UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

CALCOLO DI STRATEGIE DI COPERTURA QUANDO L'EVOLUZIONE DEI PREZZI E' DISCONTINUA

Relatore: Prof. Wolfgang J. Runggaldier

Laureanda: Sara Di Emidio

ANNO ACCADEMICO 2003-2004

A Piero, Pina e Valeria

Indice

Introduzione

I *derivati* sono titoli che derivano il loro valore da quello di un titolo *sottostante* primario. L'introduzione sul mercato di tali strumenti, finalizzati a ridurre il rischio nelle operazioni finanziarie, ha portato a interessanti problematiche di natura probabilistica. Acquistare un derivato comporta un costo iniziale, il primo problema da affrontare è, dunque, quello della valutazione (*pricing*) del prezzo di un derivato. Il secondo problema, detto di copertura (*hedging*), consiste nel tutelare chi vende il derivato dalle oscillazioni sfavorevoli dei prezzi dei sottostanti, che rappresentano una potenziale passività a scadenza.
Oggetto di studio di questa tesi è il problema della *copertura* quando il prezzo del sottostante, unico sul mercato in esame, cambia in istanti di tempo discreti in accordo con un *processo di Poisson geometrico*

$$X_t = x_0 e^{aN_t^+ - bN_t^-} \tag{1}$$

dove a, b sono costanti positive e N_t^+, N_t^- sono due processi di Poisson indipendenti con intensità λ^+ e λ^- rispettivamente. Studieremo sia il caso di intensità note sia quello di intesità non note all'investitore.
Il mercato in esame è incompleto poichè due sono le sorgenti di aleatorietà (N_t^+, N_t^-) che guidano il prezzo dell'unico sottostante. In generale, una strategia d'investimento è detta di copertura se il valore del portafoglio ad essa associato, coincide con il rendimento a scadenza del derivato. In un mercato incompleto pero', non è possibile *replicare* esattamente il *claim* mediante una strategia di copertura. Il capitolo 2 offre una panoramica sui metodi per risolvere il problema della copertura sia in un mercato completo sia in uno incompleto.
Nel caso in esame il problema viene affrontato come problema di scelta secondo quanto fatto in [9]: determinare una strategia d'investimento *efficiente*, ovvero tale da minimizzare

$$E\big\{l(F(X_S) - V_S)\big\} \tag{2}$$

dove $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione crescente, convessa. In particolare

$$l(z) = z^p \quad z \geq 0 \quad p \geq 1 \qquad l(z) = 0 \quad z < 0 \tag{3}$$

In quanto problema di ottimizzazione stocastica si adotta come metodo risolutivo quello della Programmazione Dinamica. Sia S la scadenza del derivato, lo *stato* è la quadrupla (v, u, d, t): v è il capitale disponibile in t, istante di tempo corrente, $N_t^+ = u$ il numero di salti verso l' alto del prezzo del sottostante e $N_t^- = d$ il numero di salti verso il basso. Lo spazio degli stati è quindi

$$E = \{(v, u, d, t)| \quad v \geq -c, \quad u, d \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, S]\} \tag{4}$$

mentre il *controllo* applicato a (v, u, d, t) è proprio la strategia d'investimento $\xi_t \in \mathcal{A}_{v,u,d,t}$, classe delle strategie ammissibili, che saranno definite in seguito, per $t \in [t, S]$. La *funzione valore* del problema in esame è definita come

$$J_0^* = \min_{\xi \in \mathcal{A}_{V_0}} \quad E[l(F(X_S) - V_0 - \int_0^S \xi_s dX_s)]. \tag{5}$$

detta anche il *rischio minimo* e dove $\mathcal{A}_{V_0} = \mathcal{A}_{V_0,0,0,0}$. Più in generale, per un dato t, consideriamo il rischio residuo minimale

$$J^*(v, u, d, t) = \min_{\xi \in \mathcal{A}_{v,u,d,t}} E[l(F(X_S) - v - \int_t^S \xi_s dX_s)|N_t^+ = u, N_t^- = d] \tag{6}$$

calcolabile come punto fisso di un opportuno operatore T di programmazione dinamica.
Nel caso di intensità note tale operatore è una contrazione su $\mathcal{C}(E)$, spazio di Banach delle funzioni continue da E in $\mathbb{R}^+$. Dunque la successione delle iterate con punto inziale zero, converge a J^*. Abbiamo quindi a disposizione un algoritmo per calcolare il costo residuo minimale e la strategia ottimale ad esso associata.
Nel caso di intensità non note all'investitore, l'operatore T ha un unico punto fisso ma non è più una contrazione.
Fissato $k \in \mathbb{N}$, da interpretare come il massimo numero di salti del prezzo del sottostante, introduciamo un ulteriore operatore T^k che su un sottoinsieme di E abbia come punto fisso, al pari di T, J^* e in più sia una contrazione. Tuttavia il calcolo della trasformata di un punto tramite gli operatori T e T^k richiede operazioni quali il calcolo del minimo e dell'integrale di funzioni continue su un intervallo reale.
Un modo per ovviare a questo inconveniente è quello di considerare lo spazio delle funzioni costanti a tratti su una griglia G, quindi definire su tale spazio

un operatore T_G^k la cui n-esima iterata approssimi il valore ottimo J^*. L'operatore T_G^k è il risultato della composizione di T^k con l'interpolazione *costante a tratti* e *cadlag* sulla griglia G.
Sia H_k^n la successione di iterate di T_G^k con punto iniziale la prima iterata di T^k. L'analisi su H_k^n svolta nel capitolo 4, mette in evidenza come, contrariamente a quanto si vorrebbe, per ogni $n \geq k+1$ la successione delle iterate resti la stessa, comportamento dovuto alla struttura dell'operatore T^k.
Il contributo originale della tesi rispetto a [9], consiste nell'aver presentato un operatore $\hat{T}^k$ che ha le stesse proprietà di T^k e tale da non compromettere la validità dell'algoritmo che approssima il costo residuo minimale. Al nuovo $\hat{T}^k$ è infatti associato $\hat{T}_G^k$, la cui successione delle iterate $\hat{H}_k^n$, definita in analogia a H_k^n, approssima J^* con un errore che tende a zero al crescere di n.

Capitolo 1

Preliminari Stocastici

In questo capitolo verranno richiamate alcune definizinioni alla base della teoria svolta in seguito, adottando la notazione di [2].

1.1 Processi stocastici

Definizione 1.1.1 *Si dice* processo stocastico *su uno spazio di probabilitá* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un oggetto della forma*

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T}, P) \tag{1.1}$$

dove

- T *é un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^+$*;*
- $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *é una filtrazione,ovvero una famiglia di sotto* σ*-algebre di* $\mathcal{F}$ *crescente in* t*;*
- $(X_t)_{t\in T}$ *é una famiglia di variabili aletorie in uno spazio misurabile* $(E, \mathcal{E})$ *e tale che,* $\forall t$*,* X_t *sia* $(\mathcal{F}_t)$*-misurabile come dire che* $(X_t)_t$ *è adattato alla filtrazione* $(\mathcal{F}_t)_t$*.*

Se la filtrazione non é indicata esplicitamente, si sottintende

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t) \qquad (\textit{filtrazione naturale}). \tag{1.2}$$

Un processo si dice *misurabile* se l'applicazione

$$(t, \omega) \to X_t(\omega) \tag{1.3}$$

é misurabile da $(T \times \Omega, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F})$ in $(E, \mathcal{B}(E))$.
Si dice *progressivamente misurabile* se per ogni $u \in T$ l'applicazione (1.3) é misurabile da $([0,u] \otimes \Omega, \mathcal{B}([0,u]) \otimes \mathcal{F}_u)$ in $(E, \mathcal{B}(E))$.

Definizione 1.1.2 Un processo si dice *continuo* se per ogni ω l'applicazione (detta *traettoria*)

$$t \to X_t(\omega) \tag{1.4}$$

é continua .

Definizione 1.1.3 *Un processo* $M = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (M_t)_{t\in T}, P)$ *a valori reali é una martingala se* M_t *é integrabile per ogni* $t \in T$ *e*

$$E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \tag{1.5}$$

per ogni $s \leq t$.

1.2 Processi con salti

Su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilitá, si consideri $(T_n)_{n\geq 0}$ una sequenza di variabili aleatorie non negative tali che la generica T_n indichi l'n-esimo istante di occorrenza di un evento.
L'ipotesi di lavoro sulle variabili è la seguente:

$$T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = \infty \tag{1.6}$$

$(T_n)_n$ rappresenta un *processo a punti*. Equivalentemente si puó considerare il processo N_t definito sempre sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, che conta il numero di occorrenze di un evento verificatesi fino all'istante di tempo t :

$$N_t = n \quad se \quad t \in [T_n, T_{n+1}) \quad oppure \quad N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}} \tag{1.7}$$

La (1.6) diventa

$$N_t < \infty \quad per \quad t \geq 0 \tag{1.8}$$

Definizione 1.2.1 *Un processo a punti* N_t *é detto un processo di Poisson se*

- $N_0 = 0$*;*

- *N_t é un processo ad incrementi indipendenti;*
- *$N_t - N_s$ é una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\Lambda_{s,t}$,*

dove

$$\Lambda_{s,t} = \int_s^t \lambda_u du \tag{1.9}$$

e λ_t, che è anche detta *intensitá* del processo di Poisson N_t, è una funzione deterministica del tempo.
Si nota inoltre che

$$M_t := N_t - \Lambda_{0,t} \tag{1.10}$$

è una $\mathcal{F}_t$-martingala.
Se il processo di Poisson ha intensitá $\lambda_t \equiv \lambda$, allora $(T_n)_{n\geq 0}$ é una successione di variabili aleatorie i.i.d con distribuzione esponenziale di parametro λ.

1.2.1 Formula di Ito

Sia X_t un processo in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ che soddisfa

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \gamma_{s^-} dN_s \tag{1.11}$$

dove α_t e γ_t sono processi $\mathcal{F}_t$-misurabili e N_t processo di Poisson. In forma differenziale la (1.11) diventa

$$dX_t = X_{t^-}(\alpha_t dt + \gamma_{t^-} dN_t) \tag{1.12}$$

Si dimostra che una soluzione della (1.12) è del tipo

$$X_t = X_0 \exp\left[\int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \log(1+\gamma_{s^-})dN_s\right] \tag{1.13}$$

ottenuta tramite l'applicazione della *formula di Ito*

$$dF(t,X_t) = F_t(t,X_t)dt + F_X(t,X_t)X_t\alpha_t dt + \big[F\big(t, X_{t-}(1+\gamma_{t^-})\big) - F\big(t, X_{t^-}\big)\big]dN_t \tag{1.14}$$

dove $F(t,X)$ è una funzione $\mathcal{C}^{1,2}$ e i pedici stanno ad indicare le derivate parziali. Se, infatti, alla (1.12) si applica la formula (1.14) scegliendo $F(t,X) = \log X$ si ha

$$dF = \alpha_t dt + log(1+\gamma_{t^-})dN_t \tag{1.15}$$

che in forma integrale diventa

$$\log X_t = \log X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \log(1+\gamma_{s^-}) dN_s \tag{1.16}$$

Applicando la funzione esponenziale ad entrambi i membri dell'equazione, si ottiene proprio la (1.13), detta anche *processo di Poisson geometrico.* [10]

Capitolo 2

Preliminari Finanziari

2.1 Derivati

Un *derivato* è uno strumento finanziario il cui valore dipende da quello di un titolo *primario sottostante*. Le modalità variano al variare della tipologia in esame. Le opzioni, ad esempio, conferiscono al portatore il diritto, e non l' obbligo, di acquistare (*opzioni call*) o vendere (*opzioni put*) a maturitá T, il sottostante ad un prezzo fissato K (*prezzo d' esercizio*).
Per acquistare un contratto d' opzione o un qualunque altro derivato, bisogna sostenere un costo. Il primo problema da affrontare è, dunque, quello della valutazione (*pricing*) del prezzo di un derivato.
Il secondo problema detto di copertura (*hedging*) interessa più da vicino chi vende il derivato.È suo interesse tutelarsi dalle oscillazioni sfavorevoli dei prezzi dei sottostanti, che rappresentano una potenziale passività a scadenza.

In questo capitolo verrano inizialmente introdotte alcune notazioni, per poi descrivere brevemente i principali approcci utilizzati per la risoluzione del problema della valutazione e copertura di un derivato.

2.2 Dinamica del Portafoglio

Dato un intervallo temporale $[0, T]$, $T \in \mathbb{R}^+$, sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilitá dotato della filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$.
Si considerino $d + 1$ titoli primari ,di cui uno *non rischioso* (ad esempio un conto in banca). Per semplificare la trattazione che segue, si sceglie di nor-

malizzare (scontare) i prezzi dei titoli rischiosi rispetto al titolo non rischioso. Quest'ultimo diventa un prezzo di riferimento e lo si uguaglia a uno.
L'evoluzione nel tempo dei prezzi dei $d+1$ titoli è descritta tramite un processo stocastico non negativo

$$S = \{S_t^i, i = 0, ..., d \quad e \quad t \in [0,T]\} \tag{2.1}$$

dove $S_t^0 \equiv 1$. Il processo S è adattato alla filtrazione $\mathbb{F}$, a valori in $\mathbb{R}^{d+1}$. Ciò significa che per ogni $i = 0, ..., d$ e per ogni $t \in [0,T]$ la variabile aleatoria S_t^i è $\mathcal{F}_t$ misurabile.

Definizione 2.2.1 *Una strategia di investimento è un processo*

$$\xi = (\xi_t^0, ..., \xi_t^d) \quad per \quad ogni \quad t \in [0,T] \tag{2.2}$$

a valori in $\mathbb{R}^{d+1}$, che supporremo essere predicibile.

La i-esima componente di ξ ,ξ_t^i, rappresenta il numero di unità dell' i-esimo titolo presenti nel portafoglio in t.

Dato un capitale iniziale V_0, il valore del portafoglio relativo alla strategia ξ nel generico $t \in [0,T]$ è pari a:

$$V_t(\xi) = V_0 + \sum_{i=0}^{d} \xi_t^i S_t^i \tag{2.3}$$

Sia dS il differenziale di Ito del processo S (si veda [2]):

Definizione 2.2.2 *Una strategia d'investimento è detta autofinanziante se vale*

$$dV_t(\xi) = \sum_{i=0}^{d} \xi_t^i dS_t^i \tag{2.4}$$

La (2.4) formalizza l' ipotesi che l'investitore non aggiunge nè sottrae capitale al portafoglio, la cui evoluzione risulta quindi determinata solo dalla variazione del valore dei titoli che lo compongono.

2.3 Caratterizzazione del Mercato

Sia S il prezzo di un titolo rischioso. Il rendimento (*claim*) di un derivato, con sottostante S e scadenza T, è una variabile aleatoria H misurabile rispetto a $\mathcal{F}_T^S$.

Definizione 2.3.1 *Una strategia ξ é di copertura/replica per H se*

$$V_T(\xi) = H \quad q.c \tag{2.5}$$

Definizione 2.3.2 *Un mercato é completo se il claim di qualunque derivato puó essere replicato mediante un portafoglio autofinanziante .*

Definizione 2.3.3 *Una possibilità di arbitraggio è un portafoglio autofinanziante ξ con le seguenti proprietà [4]:*

$$V_0(\xi) = 0 \qquad P(V_T(\xi) \geq 0) = 1 \qquad P(V_T(\xi) > 0) > 0$$

Si dice che un mercato è libero da arbitraggio, se non c'è possibilità di arbitraggio.
In un contesto a tempo continuo vale il seguente teorema:

Teorema 2.3.4 (Meta Teorema) *(si veda [4]) Siano M il numero di titoli rischiosi presenti sul mercato e R il numero di sorgenti di aleatorietà indipendenti. Si hanno le seguenti relazioni:*

i) Se $M < R$ il mercato non ammette possibilità di arbitraggio;

ii) Se $M > R$ il mercato è completo;

iii) Se $M = R$ il mercato è completo e non ammette possibiltà di arbitraggio.

In un mercato libero da arbitraggio e completo, il problema della valutazione del derivato e quello della copertura sono risolti. Per definizione, infatti, qualunque claim H è replicabile: è sempre possibile determinare V_0 capitale iniziale e una strategia d'investimento ξ autofinanziante che sia di copertura per H. Di più, il principio di assenza di arbitraggio implica che il prezzo del derivato in $t < T$ coincida con il valore del portafoglio di copertura.

2.3.1 Misura Neutrale al Rischio

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità.

Definizione 2.3.5 *Una misura di probabilitá Q su $(\Omega, \mathcal{F})$ é assolutamente continua rispetto a P se:*

$$\forall F \in \mathcal{F} \qquad P(F) = 0 \quad \rightarrow \quad Q(F) = 0 \tag{2.6}$$

Due misure di probabilità P e Q si dicono *equivalenti*, se ciascuna è assolutamente continua rispetto all'altra.

Definizione 2.3.6 *Una misura di probabilità Q su $(\Omega, \mathcal{F})$ equivalente a P, è detta misura martingala equivalente se il prezzo di un qualunque titolo, scontato, è una Q-martingala.*

Si indichi con $\mathcal{M}$ la famiglia di tutte le misure martingala equivalenti a P.

Teorema 2.3.7 (Primo Teorema Fondamentale dell' *asset pricing*) *Un mercato è libero da arbitraggio se esiste un'unica misura martingala equivalente Q.*

La necessità è verificata sotto certe ipotesi.

Teorema 2.3.8 (Secondo Teorema Fondamentale dello *asset pricing*) *Il mercato è completo se e solo se esiste un'unica misura martingala equivalente Q.*

Si consideri un mercato completo. Sia S_t il prezzo di un titolo rischioso, scontato rispetto al titolo non rischioso e sia esso il sottostante di un generico derivato. Da quanto precede segue che il prezzo del derivato è pari al valore atteso del claim H sotto l'unica misura martingala equivalente Q [4]:

$$\Pi_{t,s} = E^{Q}_{t,s}(H) \qquad con \qquad S_t = s \tag{2.7}$$

Sia ξ la strategia d'investimento di copertura, allora

$$V_t(\xi) = \Pi_{t,s} \tag{2.8}$$

2.4 Mercato incompleto

Un mercato è incompleto se non è possibile replicare il claim di un qualunque derivato mediante un portafoglio autofinanziante.
In virtù del secondo teorema dell' *asset pricing* (2.3.8), non esiste un'unica misura martingala equivalente. Il prezzo di un derivato fornito dalla (2.7) non è più unico. Si possono considerare strategie autofinanzianti ξ che soddisfano certi criteri e ancora definire il prezzo del derivato come il valore del portafoglio associato a ξ.

2.4.1 Criterio della Superreplica

Sia H il rendimento di un derivato con scadenza T, si parla di sovracopertura (*superhedging*) se :

$$V_T(\xi) \geq H \quad q.c. \tag{2.9}$$

per una qualche strategia d'investimento ξ autofinanziante. In questo caso il capitale iniziale V_0 o *costo di superreplica* del claim H, è dato da (si veda [6])

$$V_0(\xi) = \sup_{Q \in \mathcal{M}} E^Q\{H\} \tag{2.10}$$

e la ξ corrispondente é anche detta strategia di *sovracopertura* di H.
La richiesta di superreplica tutela dal rischio di una futura perdita ma potrebbe rivelarsi poco concorrenziale. Il capitale iniziale richiesto, infatti, può essere ritenuto troppo alto.

2.4.2 Criterio simmetrico

Dato un claim H, un criterio di scelta per una strategia autofinanziante ξ è quello simmetrico cioè

$$\inf_{\xi} E_P[(H - V_T(\xi))^2] \tag{2.11}$$

Si è di fronte ad un problema di scelta di portafoglio, dove il criterio è il valore atteso del quadrato dello *scarto finale*. Dal punto di vista matematico la (2.11) è trattabile, tuttavia la critica che si può muovere è di tener in ugual considerazione, in quanto criterio quadratico, sia uno scarto positivo sia uno negativo.

2.4.3 Criterio *shortfall risk*

Il seguente è un criterio asimmetrico

$$\inf_{\xi} \quad E_P[(H - V_T(\xi))^+] \tag{2.12}$$

dove $\quad (H - V_T(\xi))^+ = \max(0, H - V_T(\xi)) \quad .$

Si puo' generalizzare le (2.11) e (2.12) adottando come criterio di scelta, il valore atteso di una funzione perdita convessa non negativa $l(\cdot)$ applicata allo scarto finale. Il problema della copertura diventa un vero problema di controllo stocastico per determinare la strategia d' investimento che sia *efficiente*, ovvero tale da risolvere

$$\inf_{\xi} \quad E(l(H - V_T)) \tag{2.13}$$

Capitolo 3

Strategie Efficienti in un Mercato Incompleto

3.1 Descrizione del Modello e Formulazione del Problema

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,S]}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato, dove con $S \in \mathbb{R}^+$ qui indichiamo un istante di tempo. Si considerino due processi di Poisson N^+ e N^-, indipendenti, $\mathcal{F}_t$-misurabili, con intensità λ^+ e λ^- rispettivamente. Sia X_t un processo di Poisson geometrico (1.13) e rappresenti il prezzo di un titolo rischioso, scontato, sottostante di un generico derivato con scadenza S.

$$X_t = x_0 e^{aN_t^+ - bN_t^-} \qquad a, b > 0 \tag{3.1}$$

Il processo N_t^+ conta il numero di salti di X_t verso l'alto avvenuti fino all'istante t, N_t^- quelli verso il basso. Per semplicità sia unico, il titolo rischioso presente sul mercato.
Fissato $c \in \mathbb{R}$, sia $V_0 \geq -c$ il capitale iniziale e sia ξ_t una strategia d' investimento predicibile, autofinanziante (si veda la definizione 2.2.2) a valori reali, allora il valore del portafoglio associato è il seguente

$$V_t = V_0 + \int_0^t \xi_s dX_s \tag{3.2}$$

Diremo che ξ_t appartiene alla classe $\mathcal{A}_{V_0}$ delle strategie ammissibili per un capitale iniziale V_0 se è predicibile e soddisfa

$$\xi_t \in \left[-\frac{c + V_{\hat{\tau}_n}}{X_{\hat{\tau}_n}(e^a - 1)}, \frac{c + V_{\hat{\tau}_n}}{X_{\hat{\tau}_n}(1 - e^{-b})} \right] \tag{3.3}$$

per ogni $t \in (\hat{\tau}_n, \hat{\tau}_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$ dove

$$\hat{\tau}_n := \tau_n \wedge S \tag{3.4}$$

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 | N_t^+ + N_t^- = n\} \tag{3.5}$$

Si noti che

$$N_t := N_t^+ + N_t^- \tag{3.6}$$

è il processo che conta il numero totale di salti avvenuti fino all'istante t e data l'indipendenza di N^+ e N^-, N è ancora un processo di Poisson con intensità

$$\lambda = \lambda^+ + \lambda^- \tag{3.7}$$

Sia F una funzione continua e tale che $F(x) \geq -c$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e con $F(X_S)$ si rappresenti il rendimento a scadenza del derivato con sottostante X.
Poichè due sono le sorgenti di aleatorietà indipendenti N^+ e N^- che guidano il prezzo dell'unico titolo rischioso, dal Meta Teorema (2.3.4), segue che il mercato in esame è incompleto.
Il problema della copertura viene affrontato qui, come problema di scelta del portafoglio dove il criterio (si veda 2.13) è il valore atteso di

$$l(F(X_S) - V_S) \tag{3.8}$$

con $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione crescente, convessa. In particolare

$$l(z) = z^p \quad z \geq 0 \quad p \geq 1 \qquad l(z) = 0 \quad z < 0 \tag{3.9}$$

In quanto problema di ottimizzazione stocastica, si adotta come metodo risolutivo quello della Programmazione Dinamica .
Sia t un istante di tempo in cui $V_t = v$, $N_t^+ = u, N_t^- = d$, allora

$$E = \{(v, u, d, t) | \quad v \geq -c, \quad u, d \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, S]\} \tag{3.10}$$

è lo *spazio degli stati.* Il controllo applicato allo stato (v, u, d, t) è la strategia d'investimento $\xi_t \in \mathcal{A}_{v,u,d,t}$, classe delle strategie ammissibili per $t \in [0, S]$ e (3.3) diventa

$$\xi_t \in I_{v,u,d} := \big[-\frac{c+v}{x_0 e^{au-bd}(e^a - 1)}, \frac{c+v}{x_0 e^{au-bd}(1 - e^{-b})} \big]. \tag{3.11}$$

La *funzione valore* del problema in esame è definita come

$$J_0^* = \min_{\xi \in \mathcal{A}_{V_0}} \quad E[l(F(X_S) - V_0 - \int_0^S \xi_s dX_s)]. \tag{3.12}$$

detta anche il *rischio minimo.*
Più in generale, per un dato t, consideriamo il rischio residuo minimo

$$J^*(v,u,d,t) = \min_{\xi\in\mathcal{A}_{v,u,d,t}} E[l(F(X_S)-v-\int_t^S \xi_s dX_s)|N_t^+ = u, N_t^- = d] \quad (3.13)$$

Se come criterio di copertura si scegliesse quello di superreplica (2.9), il prezzo del derivato in un istante di tempo $t < S$ sarebbe

$$F_{u,d} := \sup_{Q\in\mathcal{M}} E_Q[F(X_S)|N_t^+ = u, N_t^- = d] \quad (3.14)$$

si veda la (2.10) e [6], [8]. Se in qualunque istante t, v fosse maggiore o uguale di $F_{u,d}$, J^* sarebbe nullo. Per $v = F_{u,d}$ si vuole tuttavia determinare la strategia di copertura corrispondente, dunque considereremo $v \in [-c, F_{u,d}]$.

3.2 Intensità note

Il rischio residuo minimale in (3.13) è calcolabile come punto fisso di un opportuno operatore di programmazione dinamica. In tal senso è utile il seguente lemma (si veda [9])

Lemma 3.2.1 *Sia f una qualunque funzione non negativa, vale l'uguaglianza*

$$\begin{aligned} &E[f(N^+_{\hat\tau_{u+d+1}}, N^-_{\hat\tau_{u+d+1}}, \hat\tau_{u+d+1})|N_t^+ = u, N_t^- = d] \\ &\quad = \int_0^{S-t} \big\{\lambda^+ f(u+1,d,t+s) + \lambda^- f(u,d+1,t+s)\big\} e^{-\lambda s} ds \\ &\quad + e^{-\lambda(S-t)} f(u,d,S) \end{aligned} \quad (3.15)$$

□

Si indichi con $\mathcal{C}(E)$ l' insieme delle funzioni continue da E in $\mathbb{R}^+$. In quanto spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(E)$ può essere dotato della norma della convergenza uniforme, definita dalla posizione

$$\| J \| = \sup_{(v,u,d,t)\in E} |J(v,u,d,t)|. \quad (3.16)$$

È chiaro che una funzione f da E in $\mathbb{R}^+$ appartiene a $\mathcal{C}(E)$ se le sezioni di f rispetto a u, d sono continue per ogni $(u,d) \in \mathbb{N}$. Inoltre è noto che $\mathcal{C}(E)$ con la sup-norma è uno spazio di Banach.

Sia $T : \mathcal{C}(E) \to \mathcal{C}(E)$ l'operatore che a $J : E \to \mathbb{R}^+$ associa $TJ : E \to \mathbb{R}^+$ definito come segue

$$\begin{aligned} TJ(v,u,d,t) = & \int_0^{S-t} e^{-\lambda s} \\ & \min_{\zeta \in I_{v,u,d}} \Big\{ \lambda^+ J(v + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1), u+1, d, t+s) + \\ & + \lambda^- J(v + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^{-b} - 1), u, d+1, t+s) \Big\} ds \\ & + e^{-\lambda(S-t)} l(F(x_0 e^{au-bd}) - v). \end{aligned} \tag{3.17}$$

con $I_{v,u,d}$ come in (3.11).

Osservazione 3.2.2 *In [9] si dimostra che per $J \in \mathcal{C}(E)$, l'integrale in (3.17) è ben definito e $TJ \in \mathcal{C}(E)$.*

L'operatore T è una contrazione su $\mathcal{C}(E)$ (si veda [9]) con costante di contrazione

$$\kappa = 1 - e^{-\lambda S} \tag{3.18}$$

Allora per il Lemma delle Contrazioni [5], esiste ed è unico il punto fisso dell'operatore T in $\mathcal{C}(E)$; di più, per ogni $J \in \mathcal{C}(E)$ si ha che la successione

$$J^0 = J \qquad J^h = TJ^{h-1} \quad h \geq 1 \tag{3.19}$$

detta delle iterate di J rispetto a T, converge al punto fisso. Si dimostra che tale punto fisso è proprio la funzione valore J^* (si veda [9]).
Sia $J = 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\| J^n - J^* \| \leq e^{\lambda S}(1 - e^{-\lambda S})^n \| J^1 \| . \tag{3.20}$$

Tale disuguaglianza può essere interpretata come una stima dell'errore che si commette approssimando J^* con J^n. Detto questo, per induzione su $h \leq n-2$ definiamo la strategia ξ_s^n per ogni $s \in (\hat{\tau}_h, \hat{\tau}_{h+1}]$, nel seguente modo:

- siano $h = 0$, $s \in [0, \hat{\tau}_1]$ e $V_0 = v$ allora

$$\begin{aligned} \xi_s^n := \arg \min_{\zeta \in I_{v,0,0}} & \big\{ \lambda^+ J^{n-1}(v + \zeta x_0(e^a - 1), 1, 0, s) \\ & + \lambda^- J^{n-1}(v + \zeta x_0(e^{-b} - 1), 0, 1, s) \big\} \end{aligned} \tag{3.21}$$

- sia $h \leq n-2$ generico e ξ_s^n sia definita per ogni $s \leq \hat{\tau}_h$. Se in $t = \hat{\tau}_h$ si ha $N_t^+ = u$, $N_t^- = d$,$V_{\hat{\tau}_h} = v$, per $s \in (\hat{\tau}_h, \hat{\tau}_{h+1}]$ poniamo:

$$\begin{aligned}\xi_s^n := \arg\min_{\zeta \in I_{v,u,d}} \Big\{ & \\ & \lambda^+ J^{n-u-d-1}(v + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1), u+1, d, s) \\ & + \lambda^- J^{n-u-d-1}(v + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^{-b} - 1), u, d+1, s) \Big\}\end{aligned} \tag{3.22}$$

Per ogni $s \in (\hat{\tau}_h, \hat{\tau}_{h+1}]$ con $h \leq n-2$ la strategia è indotta dal calcolo di $J^{n-h}(V_{\hat{\tau}_h}, u, d, \hat{\tau}_h)$ ed diventa così nota in tutto l' intervallo $[0, \hat{\tau}_{n-1}]$. Se $P(\tau_{n-1} > S) = 1$, questo è sufficiente. In generale per $t \in [\hat{\tau}_{n-1}, S]$ poniamo $\xi_t^n = 0$.
La strategia così definita, soddisfa la condizione di ammissibilità (3.3) e il valore del portafoglio associato, costante su $(\hat{\tau}_{n-1}, S]$, é

$$V_t^n = V_0 + \int_0^t \xi_s^n dX_s \tag{3.23}$$

In analogia alla (3.13), definiamo una nuova funzione valore (costo residuo minimo)

$$J^{*,n}(v,u,d,t) = \min_{\xi \in \mathcal{A}_{v,u,d,t}} E[l(F(X_S) - V_S^{\xi}), \tau_{u+d+n} > S | N_t^+ = u, N_t^- = d] \tag{3.24}$$

dove

$$V_S^{\xi} = v + \int_t^S \xi_s dX_s \tag{3.25}$$

e a differenza di (3.13), si calcola il valore atteso nel caso in cui il numero di salti nel periodo $(t, S]$ sia minore di n. In [9] si dimostra che J^n, l'n-esima iterata dell'operatore T (3.17), coincide con $J^{*,n}$ (cioè con il valore ottimale in (3.24)).
Per $t = 0$ vale la seguente uguaglianza

$$J_0^n := J^n(V_0, 0, 0, 0) = E[l(F(X_S) - V_S^n), \tau_n > S] = \min_{\xi \in A_{V_0}} E[l(F(X_S) - V_S^{\xi}), \tau_n > S] \tag{3.26}$$

La funzione valore J^* è l'unico punto fisso di T:

$$J^* = TJ^* \tag{3.27}$$

e per $s \in (\hat{\tau}_{u+d}, \hat{\tau}_{u+d+1}]$ e $v = V_{\tau_{u+d}}$

$$\begin{aligned}\xi_s^* := \arg\min_{\zeta \in I_{v,u,d}} \Big\{ & \\ & \lambda^+ J^*(v + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1), u+1, d, s) \\ & + \lambda^- J^*(v + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^{-b} - 1), u, d+1, s) \Big\}\end{aligned} \tag{3.28}$$

è la soluzione ottima del problema (3.12) legata al calcolo di $TJ^*(v,u,d,t)$.

3.3 Intensitá non note

3.3.1 Approccio Bayesiano

A differenza di quanto visto nel paragrafo precedente, qui considereremo non note all'investitore le intensità dei due processi N^+ e N^-.
L'idea dell'approccio bayesiano (si veda [1]) è di considerare λ^+ e λ^- come due variabili aleatorie con distibuzioni iniziali $\pi_0(\lambda^i)$, $i = +, -$. In un generico istante di tempo t, le distribuzioni a posteriori $\pi_t(\lambda^i)$ sintetizzano le informazioni su N_t^i, ottenute sia tramite osservazioni sia dalle informazioni a priori su λ^i contenute nelle $\pi_0(\lambda^i)$. Dalla formula di Bayes si ha

$$\pi_t(\lambda^i) := \frac{p(N_t^i|\lambda^i)\pi_0(\lambda^i)}{p(N_t^i)} \tag{3.29}$$

dove $p(N^i|\lambda^i)$ è la distribuzione di N^i e

$$p(N_t^i) = E_{\pi_0}[p(N_t^i)|\lambda^i]. \tag{3.30}$$

Definizione 3.3.1 *Data una variabile aleatoria X con distribuzione $f(x|\lambda)$, si chiama famiglia coniugata di distribuzioni una famiglia F di distribuzioni di λ tale che se $\pi_0(\lambda) \in F$ anche $\pi_t(\lambda) \in F$ qualunque siano il numero t di osservazioni e il campione osservato $(x_1, ..., x_t)$. [1]*

Se esiste una famiglia coniugata F e se $\pi_0(\lambda)$ appartiene ad F allora, la distribuzione finale si ottiene aggiornando i parametri che caratterizzano la $\pi_0(\lambda)$. In particolare se la distribuzione di X è di classe esponenziale,ovvero

$$f(x|\lambda) = S(x)\exp\{p(\lambda) \cdot k(x) + q(\lambda)\} \tag{3.31}$$

allora sono sufficienti due parametri, siano essi l e m, per caratterizzare una distribuzione della famiglia F. L'aggiornamento dei parametri l_0, m_0 che individuano una distribuzione iniziale nella famiglia F è del tipo

$$l = l_0 + \sum_{i=1}^{t} k(x_i) \qquad m = m_0 + t \tag{3.32}$$

Nel caso in esame N^+ e N^- hanno distribuzione di Poisson, che è di classe esponenziale. Se chi investe assegna come distribuzione iniziale $\pi_0(\lambda^i)$ una distribuzione gamma di parametri (α_0^i, β_0) allora, la distribuzione a posteriori $\pi_t(\lambda^i)$ è ancora una gamma con parametri

$$\alpha_t^i = \alpha_0^i + N_t^i \quad \beta_t = \beta_0 + t \tag{3.33}$$

La distribuzione iniziale di λ definita in (3.7) è anch'essa una gamma di parametri (α_0, β_0) dove $\alpha_0 = \alpha_0^+ + \alpha_0^-$, e a posteriori

$$\alpha_t = \alpha_0 + N_t \quad \beta_t = \beta_0 + t \tag{3.34}$$

3.3.2 Definizione dell'Operatore della Programmazione Dinamica

Come nel caso delle intensità note, enunciamo dapprima il seguente lemma (si veda [9])

Lemma 3.3.2 *Sia f una qualunque funzione non negativa, vale l'uguaglianza*

$$\begin{aligned}
&E[f(N^+_{\hat{\tau}_{u+d+1}}, N^-_{\hat{\tau}_{u+d+1}}, \hat{\tau}_{u+d+1}) | N_t^+ = u, N_t^- = d] \\
&\quad = \int_0^{S-t} \big\{ p^+(u,d,t,s) f(u+1,d,t+s) + p^-(u,d,t,s) f(u,d+1,t+s) \big\} ds \\
&\quad + p^0(u+d,t) f(u,d,S)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

dove

$$p^+(u,d,t,s) := \Big(\frac{\beta_0 + t}{\beta_0 + t + s} \Big)^{\alpha_0 + u + d} \frac{\alpha_0^+ + u}{\beta_0 + t + s} \tag{3.36}$$

$$p^-(u,d,t,s) := \Big(\frac{\beta_0 + t}{\beta_0 + t + s} \Big)^{\alpha_0 + u + d} \frac{\alpha_0^- + d}{\beta_0 + t + s} \tag{3.37}$$

$$p^0(n,t) := \Big(\frac{\beta_0 + t}{\beta_0 + S} \Big)^{\alpha_0 + n} \tag{3.38}$$

e $p^0(n,t)$ rappresenta la probabilità che, dati n salti, non ci siano salti tra t e S. In analogia a (3.17) definiamo allora

$$\begin{aligned} TJ(v,u,d,t) = &\int_0^{S-t} \\ &\min_{\zeta\in I_{v,u,d}} \Big\{ p^+(u,d,t,s) J(v+\zeta x_0 e^{au-bd}(e^a-1), u+1, d, t+s) \\ &+ p^-(u,d,t,s) J(v+\zeta x_0 e^{au-bd}(e^{-b}-1), u, d+1, t+s) \Big\} ds \\ &+ p^0(u+d,t) l(F(x_0 e^{au-bd} - v)). \end{aligned} \tag{3.39}$$

A differenza di quanto accade nel caso delle intensità note, T non è un operatore di contrazione. Prese infatti, J e J' in $\mathcal{C}(E)$ si ha

$$\| TJ - TJ' \| \leq (1 - p^0(n,0)) \| J - J' \| \tag{3.40}$$

ma

$$1 - \lim_{n\to\infty} p^0(n,0) = 1 \tag{3.41}$$

Dunque al crescere del numero dei salti osservati, la probabilità che non ci siano più salti prima della scadenza S tende a zero. Nel caso delle intensità note, è proprio questa probabilità che rende l'operatore in (3.17) una contrazione.
Ciononostante, l'operatore T ha un unico punto fisso, J^*, si veda [9]. Come nel caso delle intensità note, si considerano le iterate di T per definire la strategia d'investimento $(\xi_s^n)_{s\in[0,S]}$ analogamente a (3.21) e (3.22).
Inoltre è ancora vero che (si veda [9])

$$J^{*,n}(v,u,d,t) = \min_{\xi\in\mathcal{A}_{v,u,d,t}} E[l(F(X_S) - V_S^\xi), \tau_{u+d+n} > S | N_t^+ = u, N_t^- = d] \tag{3.42}$$

3.3.3 Introduzione dell'operatore T^k

Non potendo, dato che manca la proprietà di contrazione di T, calcolare J^* come limite della successione di iterate di T, introduciamo un nuovo operatore che su un sottoinsieme di E abbia come unico punto fisso, al pari di T, J^* e in più sia una contrazione.
Fissato $k \in \mathbb{N}$ sia

$$E^k = \{(v,u,d,t) | \quad v \geq -c, \quad u,d \in \mathbb{N}, u+d \leq k, t \in [0,S]\} \subset E \tag{3.43}$$

e sia $\mathcal{C}(E^k)$ lo spazio delle funzioni continue da E^k in $\mathbb{R}^+$, dotato della norma della convergenza uniforme definita dalla posizione

$$\parallel J \parallel_{E^k} = \sup_{(v,u,d,t)\in E^k} |J(v,u,d,t)|. \tag{3.44}$$

$\mathcal{C}(E^k)$ è uno spazio di Banach. Sia $T^k : \mathcal{C}(E^k) \to \mathcal{C}(E^k)$ l'operatore che a $J : E^k \to \mathbb{R}^+$ associa $T^k J : E^k \to \mathbb{R}^+$ definito come segue

$$(T^k J)(v,u,d,t) = \begin{cases} (TJ)(v,u,d,t) & u+d \leq k-1 \\ 0 & u+d = k \end{cases} \tag{3.45}$$

T^k è un operatore di contrazione (si veda [9]) con costante di contrazione

$$\kappa = 1 - p^0(k,0) = 1 - \Big(\frac{\beta_0}{\beta_0 + S}\Big)^{\alpha_0 + k} \tag{3.46}$$

dove k è fissato. Il punto fisso J_k^*, la cui esistenza e unicità sono garantite dal Lemma delle Contrazioni [5], coincide con J^* sull' insieme E^{k-1} [9]. Se con J_k^n si indica la successione delle iterate di T^k con punto iniziale 0, J^* su E^{k-1} potrebbe essere calcolato come limite di tale successione. In realtà nel capitolo 4 si dimostra che questo non è possibile.

3.4 Approssimazione della funzione valore

Sia nel caso delle intensità note sia nel caso delle intensità non note, ξ^n e $J^n(V_0,0,0,0)$ convergono rispettivamente alla strategia efficiente e al valore ottimo J^* in un senso meglio precisato in [9] e che, per quanto concerne la strategia, corrisponde a quanto espresso dalla (3.61) sotto.
Tuttavia il calcolo della trasformata di un punto tramite l'operatore T (3.17) e (3.39) rispettivamente, richiede operazioni quali il calcolo del minimo e dell'integrale di funzioni continue su un intervallo reale. Un modo per ovviare a questo inconveniente è quello di considerare lo spazio delle funzioni costanti a tratti su una griglia, quindi definire su tale spazio un operatore la cui n-esima iterata approssimi il valore ottimo (3.12) in un senso che verrà specificato in seguito.
D'ora in poi si farà riferimento solo al caso delle intensità non note, quanto segue è valido anche per intensità note con semplici modifiche.

3.4.1 Algoritmo

Sia $\mathcal{S} := [-c, F_k] \times [0, S]$ con

$$F_k := \max\{F_{u,d}| \quad u + d \leq k - 1\} \tag{3.47}$$

Come detto per $F_{u,d}$ in (3.14), se $v \geq F_k$ è possibile una superreplica e $J^* = 0$. Si considerino

$$G_1 = \{v_0, ..., v_M\} \subset [-c, F_k] \qquad G_2 = \{t_0, ..., t_L\} \subset [0, S] \tag{3.48}$$

dove

$$v_0 = -c, \quad v_M = F_k \qquad e \quad v_j \leq v_{j+1} \quad \forall j = 0, ..., M-1 \tag{3.49}$$

e

$$t_0 = 0, \quad t_L = S \qquad e \quad t_i \leq t_{i+1} \quad \forall i = 0, ..., L-1 \tag{3.50}$$

Si consideri la griglia

$$G = G_1 \times G_2 \subset \mathcal{S} \tag{3.51}$$

e sia

$$|G| = M \times L \tag{3.52}$$

la cardinalità della griglia. Sia $\mathcal{T}(E^k)$ lo spazio delle funzioni $H : E^k \to \mathbb{R}^+$ *costanti a tratti* e *cadlag* su E^k, dotato della sup-norma definita come segue

$$\| H \|_{E^k} = \sup_{(v,u,d,t) \in E^k} |H(v, u, d, t)|. \tag{3.53}$$

Si nota che $\mathcal{T}(E^k)$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{|G|}$, dunque è uno spazio di Banach.
Sia $T_G^k : \mathcal{T}(E^k) \to \mathcal{T}(E^k)$ l' operatore che ad ogni $H \in \mathcal{T}(E^k)$ associa $T_G^k H : E^k \to \mathbb{R}^+$ definito mediante la posizione

$$(T_G^k H)(v, u, d, t) = \begin{cases} (TH)(v, u, d, t) & \text{se } u + d \leq k - 1 \\ & \text{e } (v, t) \in G \\ 0 & \text{se } u + d = k \text{ e } (v, t) \in G \\ & \text{oppure se } v > F_k \\ \text{interpolazione costante a tratti} & \text{altrimenti} \\ \text{da destra} & \end{cases} \tag{3.54}$$

Si noti che, per *interpolazione costanti a tratti da destra*, si intende che

$$T_G^k H(v, u, d, t) = T_G^k H(v_j, u, d, t_i) \tag{3.55}$$

dove (v_j, t_i) indica l'elemento di G che caratterizza la cella cui appartiene (v, t).
Si dimostra che T_G^k è un operatore di contrazione su $\mathcal{T}(E^k)$ con costante di contrazione $\kappa = 1 - p^0(k, 0)$ (si veda [9]). Il Lemma delle Contrazioni [5] garantisce l'esistenza e l'unicità del punto fisso di T_G^k.
Sia H_k^n la successione delle iterate di T_G^k con punto iniziale J_k^1 (cioè la prima iterata di T^k con punto iniziale 0). Come noto questa converge al punto fisso H_k^*.
Inoltre

$$(T_G^k J^*)(v, u, d, t) = \begin{cases} J^*(v, u, d, t) & \text{se } u + d \leq k - 1 \\ & \text{e } (v, t) \in G \\ 0 & \text{se } u + d = k \text{ e } (v, t) \in G \\ & \text{oppure se } v > F_k \\ \text{interpolazione costante a tratti} & \text{altrimenti} \\ \text{da destra} & \end{cases} \tag{3.56}$$

Indichiamo con

$$\delta_G = \sup_{(v,t) \in \mathcal{S}} \min_{(v',t') \in G} (|v - v'| + |t - t'|) \tag{3.57}$$

e

$$\epsilon(G) := \| J^* - T_G^k J^* \|_{E^{k-1}} \tag{3.58}$$

Per la continuità di J^*, si ha

$$\lim_{\delta_G \to 0} \epsilon(G) = 0 \tag{3.59}$$

Mettendo insieme i precedenti risultati, si dimostra (si veda [9])

$$\| J^* - H_k^n \|_{E^{k-1}} \leq \frac{1}{1 - \kappa} \big(\kappa^n \| J_k^1 \|_{E^{k-1}} + \epsilon(G) \big) \tag{3.60}$$

La strategia, associata alla successione H_k^n, $\tilde{\xi}^n$, è definita come in (3.21) e (3.22), inoltre si ha

$$H_k^n \leq E[l(F(X_S) - \tilde{V}_S^n)] \leq H_k^n + E[l(F(X_S) + c), \tau_k \leq S] \tag{3.61}$$

dove $\tilde{V}_t^n$ è il portafoglio costruito con la strategia $\tilde{\xi}^n$. Ora

$$\lim_{k \to \infty} E[l(F(X_S) + c), \tau_k \leq S] = 0 \tag{3.62}$$

$$\lim_{n \to \infty} H_k^n = J^* \tag{3.63}$$

dunque il valor medio della funzione perdita applicata allo scarto $F(X_S) - \tilde{V}_S^n$ al limite, tende al costo minimo residuo.

Capitolo 4

Analisi dell'algoritmo del paragrafo 3.4.1

4.1 Formula Esplicita delle iterate di T_G^k

Siano $(v_j, t_i) \in G$ definita in (3.51), per $i = 0, ..., M$ e $j = 0, .., L$. Una forma esplicita della successione delle iterate dell'operatore T_G^k è la seguente

$$H_k^1(v_j, u, d, t_i) = J_k^1(v_j, u, d, t_i) = p^0(u + d, t_i) l(F(x_0 e^{au-bd}) - v_j) \tag{4.1}$$

In particolare per $s > 0$

$$H_k^1(v_j, u, d, t_i + s) = \left(\frac{t_i + s + \beta_0}{t_i + \beta_0}\right)^{\alpha_0+u+d} H_k^1(v_j, u, d, t_i) \tag{4.2}$$

Questo implica che, per $h = 2$, si ha

$$\begin{aligned} H_k^2(v_j, u, d, t_i) = {} & H_k^1(v_j, u, d, t_i) + \left(\frac{S - t_i}{\beta_0 + t_i}\right) \\ & \min_{\{\zeta \in I_{v_j,u,d}\}} \Bigg\{ (\alpha_0^+ + u) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1)) H_k^1(v_m, u+1, d, t_i) \\ & + (\alpha_0^- + d) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^{-b} - 1)) H_k^1(v_m, u, d+1, t_i) \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

e, per $2 < h \leq n$, si ottiene, integrando in (3.39)

$$H_k^h(v_j,u,d,t_i) = H_k^1(v_j,u,d,t_i) + \sum_{l=0}^{L-1} 1_{\{t_i \leq t_l\}} \gamma_{i,l}$$
$$\min_{\{\zeta \in I_{v_j,u,d}\}} \Big\{ (\alpha_0^+ + u) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1)) H_k^{h-1}(v_m, u+1, d, t_l)$$
$$+ (\alpha_0^- + d) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^{-b} - 1)) H_k^{h-1}(v_m, u, d+1, t_l) \Big\} \quad (4.4)$$

con

$$\gamma_{i,l} = \frac{(\beta_0 + t_i)^{\alpha_0+u+d}}{\alpha_0 + u + d} \left[(\beta_0 + t_l)^{-(\alpha_0+u+d)} - (\beta_0 + t_{l+1})^{-(\alpha_0+u+d)} \right] \quad (4.5)$$

Segue infatti da

$$H_k^1(v_j,u,d,t_i) + \int_0^{S-t_i} \left(\frac{\beta_0 + t_i}{\beta_0 + t_i + s} \right)^{\alpha_0+u+d} \frac{1}{\beta_0 + t_i + s} \sum_{l=0}^{L-1} 1_{[t_l,t_{l+1})}(t_i + s)$$
$$\min_{\zeta \in I_{v_j,u,d}} \Big\{ (\alpha_0^+ + u) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1)) H_k^{h-1}(v_m, u+1, d, t_l) +$$
$$(\alpha_0^- + d) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1)) H_k^{h-1}(v_m, u, d+1, t_l) \Big\} ds \quad (4.6)$$

usando

$$\int_0^{S-t_i} \left(\frac{\beta_0 + t_i}{\beta_0 + t_i + s} \right)^{\alpha_0+u+d} \frac{1}{\beta_0 + t_i + s} \sum_{l=0}^{L-1} 1_{[t_l,t_{l+1})}(t_i + s) ds =$$
$$\sum_{l=0}^{L-1} 1_{\{t_i \leq t_l\}} \frac{(\beta_0 + t_i)^{\alpha_0+u+d}}{\alpha_0 + u + d} \left[(\beta_0 + t_l)^{-(\alpha_0+u+d)} - (\beta_0 + t_{l+1})^{-(\alpha_0+u+d)} \right]$$
$$(4.7)$$

Si indichi con $\check{H}_k^n$, la successione definita per $n=1$ come in (4.1) e per $n \geq 2$, incluso $n=2$, in analogia alla (4.4)

$$\check{H}_k^h(v_j,u,d,t_i) = H_k^1(v_j,u,d,t_i) + \sum_{l=0}^{L-1} 1_{\{t_i \leq t_l\}} \gamma_{i,l}$$
$$\min_{\{\zeta \in I_{v_j,u,d}\}} \left\{ (\alpha_0^+ + u) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1)) \check{H}_k^{h-1}(v_m, u+1, d, t_l) \right.$$
$$\left. + (\alpha_0^- + d) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^{-b} - 1)) \check{H}_k^{h-1}(v_m, u, d+1, t_l) \right\} \quad (4.8)$$

Nel prossimo paragrafo studieremo la relazione tra H_k^n e $\check{H}_k^n$.

4.2 Analisi dell'operatore T^k

Iniziamo con la seguente

Osservazione 4.2.1 *Per ogni $n \geq 1$ e per ogni $(v_j,t_i) \in G$, se $u+d=k$, si ha*

$$H_k^n(v_j,u,d,t_i) = 0 \quad (4.9)$$

□

Proposizione 4.2.2 *Per $h \geq \ell+1$ con $u+d=k-\ell$ e $1 \leq \ell \leq k$, si ha*

$$H_k^h(v_j,u,d,t_i) = \check{H}_k^\ell(v_j,u,d,t_i) \quad (4.10)$$

Dimostrazione: Si dimostra l'enunciato per induzione del primo tipo su ℓ, con caso base $\ell=1$:
se $u+d=k-1$ e $h \geq 2$, dall'osservazione (4.2.1) segue che nella parte destra di (4.4)

$$H_k^{h-1}(v_m,u+1,d,t_l) = 0 \quad per \quad ogni \quad m,l \quad (4.11)$$

e

$$H_k^{h-1}(v_m,u,d+1,t_l) = 0 \quad per \quad ogni \quad m,l \quad (4.12)$$

Dunque, per $h \geq 2$ e $u+d=k-1$

$$H_k^h(v_j,u,d,t_i) = H_k^1(v_j,u,d,t_i) = \check{H}_k^1(v_j,u,d,t_i) \quad (4.13)$$

Sia ora $1 < \ell \leq k$. Allora per $h \geq \ell + 1$ e $u + d = k - \ell$ nella parte destra di (4.4) in base all'ipotesi induttiva e poichè $u + d + 1 = k - \ell + 1 = k - (\ell - 1)$, si ha

$$H_k^{h-1}(v_m, u+1, d, t_l) = \check{H}_k^{\ell-1}(v_m, u+1, d, t_l) \tag{4.14}$$

e

$$H_k^{h-1}(v_m, u, d+1, t_l) = \check{H}_k^{\ell-1}(v_m, u, d+1, t_l) \tag{4.15}$$

Allora

$$\begin{aligned}
H_k^h(v_j, u, d, t_i) &= H_k^1(v_j, u, d, t_i) + \sum_{l=0}^{L-1} 1_{\{t_i \leq t_l\}} \gamma_{i,l} \\
&\min_{\{\zeta \in I_{v_j,u,d}\}} \Big\{ (\alpha_0^+ + u) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1)) \check{H}_k^{\ell-1}(v_m, u+1, d, t_l) \\
&+ (\alpha_0^- + d) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^{-b}) - 1) \check{H}_k^{\ell-1}(v_m, u, d+1, t_l) \Big\}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

ovvero, per $h \geq \ell + 1$ e $u + d = k - \ell$

$$H_k^h(v_j, u, d, t_i) = \check{H}_k^{\ell}(v_j, u, d, t_i) \tag{4.17}$$

□

Ai fini del calcolo della strategia $(\tilde{\xi}_s^n)_{s \in [0,S]}$ in accordo con (3.22) e relativa a H_k^n, è necessario conoscere $H_k^{n-h}(v_{\hat{\tau}_h}, u, d, \hat{\tau}_h)$ in ciascun periodo $(\hat{\tau}_h, \hat{\tau}_{h+1}]$ con $h \leq k - 2$ e $n \geq k$.
Tuttavia poichè per $n \geq k + 1$

$$n - h \geq (k - h) + 1 \tag{4.18}$$

e

$$u + d = h = k - (k - h) \tag{4.19}$$

con

$$2 \leq k - h \leq k \tag{4.20}$$

pensando $\ell = k - h$, dalla proposizione (4.2.2) si ha per ogni $v_{\hat{\tau}_h}$ e $\hat{\tau}_h$

$$H_k^{n-h}(v_{\hat{\tau}_h}, u, d, \hat{\tau}_h) = \check{H}_k^{k-h}(v_{\hat{\tau}_h}, u, d, \hat{\tau}_h) \tag{4.21}$$

indipendentemente dal generico $n \geq k + 1$ scelto.
Questo significa che da $n = k + 1$ in poi la successione delle iterate resta la stessa e così la strategia associata, contrariamente a quanto si vorrebbe.

Capitolo 5

Nuovo operatore

5.1 Definizioni e prime proprietà

Mantenendo le grandezze introdotte in precedenza, definiamo ora anche l'-operatore $\hat{T}^k : \mathcal{C}(E^k) \to \mathcal{C}(E^k)$ che a $J : E^k \to \mathbb{R}^+$ associa $\hat{T}^k J : E^k \to \mathbb{R}^+$ come segue

$$(\hat{T}^k J)(v,u,d,t) = \begin{cases} (TJ)(v,u,d,t) & \text{se } u+d \leq k-1 \\ (TJ)(v,u-1,d,t) & \text{se } u+d = k,\ u > 0 \\ 0 & \text{se } u = 0,\ d = k \end{cases} \tag{5.1}$$

Osservazione 5.1.1 *Risulta che per ogni* $J \in \mathcal{C}(E^k)$ *si ha* $\hat{T}^k J \in \mathcal{C}(E^k)$*, ovvero che per ogni* $(u,d) \in \mathbb{N}^2$ *tali che* $u+d \leq k$*, la sezione di* $\hat{T}^k J$ *rispetto a* (u,d)*, cioè* $(\hat{T}^k J)_{(u,d)}$ *è continua. Infatti,*

- *Se* $u+d \leq k$ *con* $u > 0$*, allora* $(\hat{T}^k J)_{(u,d)}$ *coincide con la sezione di* TJ *rispetto a* (u,d) *che è continua (l'osservazione 3.2.2 si estende al caso delle intensità non note, si veda [9]);*
- *Se* $u = 0$ *e* $d = k$*, allora* $(\hat{T}^k J)_{(u,d)}$ *è identicamente nulla, in particolare è continua.*

$\square$

Per ogni $(v,u,d,t) \in E^k$ sia $\xi_{(v,u,d,t)}$ una funzione continua

$$\xi_{(v,u,d,t)} : [0, S-t] \to I_{v,u,d} \tag{5.2}$$

e si indichi con ξ la corrispondente famiglia di funzioni $\xi_{(v,u,d,t)}(s)$.
Ad ogni ξ è associato un operatore $T_\xi : \mathcal{C}(E^k) \to \mathcal{C}(E^k)$ che a ciascuna

funzione $J \in \mathcal{C}(E^k)$ associa $T_\xi J : E^k \to \mathbb{R}^+$ definito mediante la posizione

$$\begin{aligned} T_\xi J(v,u,d,t) = &\int_0^{S-t} \\ &\big\{p^+(u,d,t,s)J(v_\xi^+(s),u+1,d,t+s) + \\ &p^-(u,d,t,s)J(v_\xi^-(s),u,d+1,t+s)\big\}ds \\ &+ p^0(u+d,t)l(F(x_0e^{au-bd}-v)). \end{aligned} \tag{5.3}$$

dove

$$v_\xi^+(s) = v+\xi_{(v,u,d,t)}(s)x_0e^{au-bd}(e^a-1) \qquad v_\xi^-(s) = v+\xi_{(v,u,d,t)}(s)x_0e^{au-bd}(e^{-b}-1) \tag{5.4}$$

Dalle definizioni di T in (3.39) e T_ξ come sopra, segue che, per ogni $J \in \mathcal{C}(E^k)$, si ha

$$T_\xi J \geq TJ \tag{5.5}$$

In particolare vale l' uguaglianza se per ogni $J(v,u,d,t) \in \mathcal{C}(E^k)$ e per ogni $s \in [0, S-t]$ si considera come ξ la ξ^J

$$\begin{aligned} \xi^J_{(v,u,d,t)}(s) = \arg &\min_{\zeta \in I_{v,u,d}} \\ &\big\{p^+(u,d,t,s)J(v+\zeta x_0e^{au-bd}(e^a-1),u+1,d,t+s) \\ &+ p^-(u,d,t,s)J(v+\zeta x_0e^{au-bd}(e^{-b}-1),u,d+1,t+s)\big\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Siano J e J' due funzioni in $\mathcal{C}(E^k)$ e sia ξ una famiglia di funzioni come in (5.2). Si ha

$$\begin{aligned} &T_\xi J(v,u,d,t) - T_\xi J'(v,u,d,t) = \\ &\int_0^{S-t} \big(p^+(u,d,t,s)((J-J')(v_\xi^+(s),u+1,d,t+s)) + \\ &p^-(u,d,t,s)((J-J')(v_\xi^-(s),u,d+1,t+s))\big)ds \end{aligned} \tag{5.7}$$

Sia $\hat{E}^{k-1} = \{(v,u,d,t,s) : (v,u,d,t) \in E^{k-1}, s \in [0,S-t]\}$. Fissata una famiglia ξ di funzioni (5.2), siano

$$\begin{aligned} \Phi_\xi^+ : \hat{E}^{k-1} &\longrightarrow E^k \\ (v,u,d,t,s) &\longmapsto (v_\xi^+(s),u+1,d,t+s) \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} \Phi_\xi^- : \hat{E}^{k-1} &\longrightarrow E^k \\ (v,u,d,t,s) &\longmapsto (v_\xi^-(s),u,d+1,t+s) \end{aligned} \tag{5.9}$$

Per ogni $(v,u,d,t,s) \in \hat{E}^{k-1}$, $v_\xi^+(s) \in E^k$ e $v_\xi^-(s) \in E^k$. Infatti, in base alla definizione di $I_{v,u,d}$ in (3.11):

$$v_\xi^+(s) \geq v - (c+v) = -c \tag{5.10}$$

$$v_\xi^-(s) \geq v - (c+v) = -c, \tag{5.11}$$

e, con facili passaggi, si vede che anche le altre componenti di $\Phi_\xi^i(v,u,d,t,s)$ appartengono ad E^k, $i = +,-$.
Ne segue che

$$\sup_{(v,u,d,t,s)\in\hat{E}^{k-1}} |(J-J')\circ\Phi_\xi^i(v,u,d,t,s)| \leq \sup_{(v,u,d,t)\in E^k} |(J-J')(v,u,d,t)| \tag{5.12}$$

dove $i = +,-$ □

Lemma 5.1.2 *L' operatore $\hat{T}^k : \mathcal{C}(E^k) \to \mathcal{C}(E^k)$ è una contrazione con costante di contrazione*

$$\kappa = 1 - p^0(k,0) = 1 - \left(\frac{\beta_0}{\beta_0 + S}\right)^{\alpha_0+k} \tag{5.13}$$

Dimostrazione:
Con le notazioni introdotte sopra e usando (5.8), (5.9), (5.12) si ha, per $u + d \leq k$ e per qualsiasi $\xi_{(v,u,d,t)}$ come in (5.2),

$$\begin{aligned}
&\| T_\xi J(v,u,d,t) - T_\xi J'(v,u,d,t) \|_{E^k} \\
&= \sup_{(v,u,d,t)\in E^k} \int_0^{S-t} |p^+(u,d,t,s)((J-J')(v_\xi^+(s),u+1,d+t+s)) + \\
&\qquad p^-(u,d,t,s)((J-J')(v_\xi^-(s),u,d+1,t+s))|ds \\
&\leq \sup_{(v,u,d,t)\in E^k} \int_0^{S-t} \big(p^+(u,d,t,s)|(J-J')\circ\Phi_\xi^+(v,u,d,t,s)| \\
&\qquad\qquad + p^-(u,d,t,s)|(J-J')\circ\Phi_\xi^-(v,u,d,t,s)|\big)ds \\
&\leq \sup_{(v,u,d,t)\in E^k} \int_0^{S-t} \| J-J' \|_{E^k} (p^+(u,d,t,s) + p^-(u,d,t,s))ds \\
&\leq \| J-J' \|_{E^k} (1 - p^0(k,0))
\end{aligned} \tag{5.14}$$

dove si é usato

$$\int_0^{S-t} \big\{p^+(u,d,t,s) + p^-(u,d,t,s)\big\}ds =$$

$$\big(\beta_0+t\big)^{\alpha_0+u+d}\int_0^{S-t}\frac{\alpha_0^++\alpha_0^-+u+d}{\big(\beta_0+t+s\big)^{\alpha_0+u+d+1}}ds=$$

$$\big(\beta_0+t\big)^{\alpha_0+u+d}(\alpha_0+u+d)\int_0^{S-t}\frac{1}{(\beta_0+t+s)^{\alpha_0+u+d+1}}ds=$$

$$(\beta_0+t)^{\alpha_0+u+d}(\alpha_0+u+d)\int_{\beta_0+t}^{\beta_0+S}\frac{1}{z^{(\alpha_0+u+d+1)}}dz=$$

$$1-p^0(u+d,t). \tag{5.15}$$

e

$$\sup_{(v,u,d,t)\in E^k}\int_0^{S-t}\big\{p^+(u,d,t,s)+p^-(u,d,t,s)\big\}ds=$$
$$\sup_{(v,u,d,t)\in E^k}(1-p^0(u+d,t))\leq 1-p^0(k,0) \tag{5.16}$$

essendo $k\geq u+d$.
Detto questo, consideriamo i due casi

1. $(v,u,d,t)\in E^k$ con $u>0$:

$$(\hat{T}^kJ)(v,u,d,t)=\begin{cases}(TJ)(v,u,d,t) & u+d\leq k-1\\ (TJ)(v,u-1,d,t) & u+d=k,\ u>0\end{cases} \tag{5.17}$$

   Fissate J e J' in $\mathcal{C}(E^k)$ e scegliendo ξ^J come in (5.6) segue che

$$T_{\xi^J}J=TJ \qquad e \qquad T_{\xi^J}J'\geq TJ' \tag{5.18}$$

   Allora
$$TJ'-TJ\leq T_{\xi^J}J'-T_{\xi^J}J \tag{5.19}$$

   e per la (5.17)
$$\hat{T}^kJ'-\hat{T}^kJ\leq T_{\xi^J}J'-T_{\xi^J}J \tag{5.20}$$

2. $(v,u,d,t)\in E^k$ con $u=0$ e $d=k$:

$$\hat{T}^kJ(v,0,k,t)=0 \qquad e \qquad \hat{T}^kJ'(v,0,k,t)=0 \tag{5.21}$$

   allora
$$\hat{T}^kJ'-\hat{T}^kJ=0\leq(1-p^0(k,0))\parallel J-J'\parallel_{E^k} \tag{5.22}$$

Dalle (5.14), (5.20), (5.22) si può concludere

$$\| \hat{T}^k J' - \hat{T}^k J \|_{E^k} \leq (1 - p^0(k,0)) \| J - J' \|_{E^k} . \tag{5.23}$$

e cioè che $\hat{T}^k$ è una contrazione con costante $\kappa = 1-p^0(k,0) = 1-\left(\frac{\beta_0}{\beta_0+S}\right)^{\alpha_0+k}$.
□

Osservazione 5.1.3 *$\mathcal{C}(E^k)$ è uno spazio normato, completo e $\hat{T}^k$ è una contrazione su $\mathcal{C}(E^k)$. Il Lemma delle contrazioni ([5]) garantisce l'esistenza e l'unicità del punto fisso di $\hat{T}^k$ che indicheremo con $\hat{J}_k^*$.*

□

Corollario 5.1.4 *Il punto fisso $\hat{J}_k^*$ di $\hat{T}^k$ coincide con il punto fisso J^* di T sull' insieme E^{k-1}*

Dimostrazione:
Sia

$$M(v,u,d,t) = \begin{cases} J^*(v,u,d,t) & \text{su } E^{k-1} \\ J^*(v,u-1,d,t) & \text{su } E^k \backslash E^{k-1},\ u > 0 \\ 0 & \text{su } E^k \backslash E^{k-1}, u = 0 \text{ e } d = k \end{cases} \tag{5.24}$$

Applicando l' operatore $\hat{T}^k$ a M, si ha

- In E^{k-1}
  $\hat{T}^k M(v,u,d,t) = \hat{T}^k J^*(v,u,d,t) = TJ^*(v,u,d,t) = J^*(v,u,d,t) = M(v,u,d,t)$;
- In $E^k \backslash E^{k-1}$ e $u > 0$
  $\hat{T}^k M(v,u,d,t) = \hat{T}^k J^*(v,u-1,d,t) = TJ^*(v,u-1,d,t) = J^*(v,u-1,d,t) = M(v,u,d,t)$;
- In $E^k \backslash E^{k-1}$ e $u = 0$
  $\hat{T}^k M(v,0,k,t) = 0 = M(v,0,k,t)$;

Dunque M è il punto fisso di $\hat{T}^k$ su E^k e dall'unicità del punto fisso segue che , su E^{k-1},

$$J^* = M = \hat{J}_k^* \tag{5.25}$$

□

Dunque J^* su E^{k-1} puo' essere calcolato come limite della successione di iterate dell'operatore $\hat{T}^k$. Indicheremo con $\hat{J}_k^n$ tale successione con punto iniziale 0.

5.2 Approssimazione

Per il calcolo effettivo delle iterate $\hat{J}_k^n$, la definizione del nuovo operatore $\hat{T}^k$ comporta una modifica della definizione di T_G^k, vista in (3.54). Siano $G \subset \mathcal{S}$ la griglia di valori per (v,t) definita in (3.51), E^k l'insieme degli stati (3.43), $\mathcal{T}(E^k)$ lo spazio delle funzioni costanti a tratti, cadlag e nonnegative su E^k. Sia $\hat{T}_G^k : \mathcal{T}(E^k) \to \mathcal{T}(E^k)$ che a $H \in \mathcal{T}(E^k)$ associa $\hat{T}_G^k H : E^k \to \mathbb{R}^+$ definito da

$$(\hat{T}_G^k H)(v,u,d,t) = \begin{cases} (TH)(v,u,d,t) & \text{se } u+d \leq k-1 \\ & (v,t) \in G \\ (TH)(v,u-1,d,t) & \text{se } u+d = k,\ u>0 \\ & \text{e } (v,t) \in G \\ 0 & \text{se } u=0\ d=k \\ & \text{e } (v,t) \in G \text{ o } v > F_k \\ \text{interpolazione costante a tratti} & \text{altrimenti} \\ \text{da destra} & \end{cases} \tag{5.26}$$

Si noti che, per *interpolazione costante a tratti da destra*, si intende quanto già illustrato in (3.55).

Lemma 5.2.1 *L'operatore $\hat{T}_G^k : \mathcal{T}(E^k) \to \mathcal{T}(E^k)$ è un operatore di contrazione in $\mathcal{T}(E^k)$, con costante di contrazione*

$$\kappa = 1 - p^0(k,0) \tag{5.27}$$

Dimostrazione:
Si considerino H e H' in $\mathcal{T}(E^k)$ e una famiglia di funzioni ξ come in (5.2). Allora, con ragionamenti analoghi a quelli fatti nel lemma 5.1.2 si conclude

$$\| T_\xi H - T_\xi H' \|_{E^k} \leq \| H - H' \|_{E^k} (1 - p^0(k,0)) \tag{5.28}$$

Questa volta si possono distinguere tre casi

1. Siano $(v,u,d,t) \in E^k$ con $u>0$ e $(v,t) \in G$, allora

$$(\hat{T}_G^k H)(v,u,d,t) = \begin{cases} (TH)(v,u,d,t) & u+d \leq k-1,\ (v,t) \in G \\ (TH)(v,u-1,d,t) & u+d = k,\ u>0 \text{ e } (v,t) \in G \end{cases} \tag{5.29}$$

Data H, sia ξ^H come in (5.6). Una tale funzione esiste poichè H è costante a tratti su E^k, dunque ammette minimo.

$$T_{\xi^H} H = TH \qquad e \qquad T_{\xi^H} H' \geq TH' \tag{5.30}$$

da cui segue

$$TH' - TH \leq T_{\xi^H} H' - T_{\xi^H} H \tag{5.31}$$

2. Sia $(v, u, d, t) \in E^k$ con $u = 0$, $d = k$ e $(v, t) \in G$ oppure siano $u + d \leq k - 1$ e $v > F_k$ (per la definizione di F_k si veda 3.47), allora

$$\hat{T}^k_G H(v, u, d, t) = 0 \qquad e \qquad \hat{T}^k_G H'(v, u, d, t) = 0 \tag{5.32}$$

Dunque

$$\hat{T}^k_G H(v, u, d, t) - \hat{T}^k_G H'(v, u, d, t) = 0 \leq (1 - p^0(k, 0)) \parallel H - H' \parallel_{E^k} \tag{5.33}$$

3. Sia $(v, u, d, t) \in E^k$ con $(v, t) \notin G$ allora

$$\hat{T}^k_G H(v, u, d, t) = \hat{T}^k_G H(v_j, u, d, t_i) \tag{5.34}$$

dove (v_j, t_i) indica l'elemento di G che caratterizza la cella cui appartiene (v, t). Al variare di $(v_j, u, d, t_i) \in E^k$, si riconduce il caso 3 ad uno dei precedenti.

Ricordando la (5.28), in tutti e tre i casi studiati si può concludere

$$\hat{T}^k_G H(v, u, d, t) - \hat{T}^k_G H'(v, u, d, t) \leq (1 - p^0(k, 0)) \parallel H - H' \parallel_{E^k} \tag{5.35}$$

Passando alla norma in $\mathcal{T}(E^k)$

$$\parallel \hat{T}^k_G H(v, u, d, t) - \hat{T}^k_G H'(v, u, d, t) \parallel_{E^k} \leq (1 - p^0(k, 0)) \parallel H - H' \parallel_{E^k} \tag{5.36}$$

□

Osservazione 5.2.2 *Come osservato nel paragrafo (3.4.1) lo spazio $\mathcal{T}(E^k)$ è di Banach, dunque il Lemma delle contrazioni garantisce esistenza e unicità del punto fisso di $\hat{T}^k_G$ che indicheremo con $\hat{H}^*_k$.*

□

Presi $\hat{T}^k_G$ come in (5.26) e δ_G come in (3.57), poniamo

$$\hat{\epsilon}(G) = \parallel J^* - \hat{T}^k_G J^* \parallel_{E^{k-1}} \tag{5.37}$$

Si ha

Lemma 5.2.3

$$\lim_{\delta_G \to 0} \hat{\epsilon}(G) = 0 \tag{5.38}$$

Dimostrazione:
Siano fissati $(u, d) \in E^{k-1}$.

- Sia $(v, t) \in G$, allora (ricordando che $(u, d) \in E^{k-1}$)

  $$\hat{T}^k_G J^*(v, u, d, t) = J^*(v, u, d, t) \quad ovvero \quad J^*(v, u, d, t) - \hat{T}^k_G J^*(v, u, d, t) = 0 \tag{5.39}$$

- Sia $(v, t) \notin G$, allora $\hat{T}^k_G J^*(v, u, d, t) = J^*(v', u, d, t')$ dove (v', t') indica l'elemento di G che caratterizza la cella cui appartiene (v, t). La sezione di J^* rispetto a (u, d), $J^*_{(u,d)}$, è continua sul compatto $\mathcal{S}$, in particolare uniformemente continua.
  Per ogni $\eta > 0$ esiste quindi $\delta_\eta > 0$ tale che

  $$|J^*_{(u,d)}(v, t) - J^*_{(u,d)(v',t')}| \leq \eta \quad per \quad |(v - v') + (t - t')| \leq \delta_\eta \tag{5.40}$$

Quindi per ogni $(u, d) \in E^{k-1}$

$$\sup_{(v,u,d,t) \in E^{k-1}} |J^*(v, u, d, t) - \hat{T}^*_G J^*(v, u, d, t)| \to 0 \quad per \quad \delta_G \to 0 \tag{5.41}$$

$\square$

Si indichi con $\hat{H}^k_n$ la successione delle iterate di $\hat{T}^k_G$ con punto iniziale J^1_k, definita in analogia a (4.1), (4.3) e (4.4). Dal lemma (5.2.1) segue che $\hat{H}^k_n$ converge a $\hat{H}^*_k$.
Analogamente a (3.60), si può infine stimare l'errore commesso approssimando J^* con $\hat{H}^k_n$. Abbiamo infatti il seguente lemma

Lemma 5.2.4

$$\| J^* - \hat{H}^n_k \|_{E^{k-1}} \leq \frac{1}{1 - \kappa} \left(\kappa^n \| J^1_k \|_{E^{k-1}} + \hat{\epsilon}(G) \right) \tag{5.42}$$

dove $\kappa = 1 - p^0(k, 0)$.

Dimostrazione:
Si nota che

$$\hat{H}^1_k(v, u, d, t) = p^0(u + d, t) l(F(x_0 e^{au - bd}) - v) = J^1_k(v, u, d, t) \tag{5.43}$$

e ricordando le (3.39), (5.26), (5.15) si ha

$$\begin{aligned}\| \hat{H}_k^2(v,u,d,t) - J_k^1(v,u,d,t) \|_{E^{k-1}} &= \| \hat{T}_G^k J_k^1(v,u,d,t) - J_k^1(v,u,d,t) \|_{E^{k-1}} \\ &\leq \| \int_0^{S-t} \big\{p^+(u,d,t,s) + p^-(u,d,t,s)\big\} ds \|_{E^{k-1}} \| J_k^1 \|_{E^{k-1}} \\ &\leq (1 - p^0(k,0)) \| J_k^1 \|_{E^{k-1}} \\ &= \kappa \| J_k^1 \|_{E^{k-1}} \end{aligned} \tag{5.44}$$

Per induzione otteniamo

$$\| \hat{H}_k^n(v,u,d,t) - \hat{H}_k^{n-1}(v,u,d,t) \|_{E^{k-1}} = \kappa^{n-1} \| J_k^1 \|_{E^{k-1}} \tag{5.45}$$

Allora

$$\| \hat{H}_k^n(v,u,d,t) - \hat{H}_k^*(v,u,d,t) \|_{E^{k-1}} \leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa} \| J_k^1 \|_{E^{k-1}} \tag{5.46}$$

Inoltre, l'errore commesso approssimando J^* tramite $\hat{H}_k^*$ soddisfa

$$\begin{aligned}\| J^* - \hat{H}_k^* \|_{E^{k-1}} &\leq \| J^* - \hat{T}_G^k J^* \|_{E^{k-1}} + \| \hat{T}_G^k J^* - \hat{T}_G^k \hat{H}_k^* \|_{E^{k-1}} \\ &\leq \hat{\epsilon}(G) + \kappa \| J^* - \hat{H}_k^* \|_{E^{k-1}} \end{aligned} \tag{5.47}$$

da cui

$$\| J^* - \hat{H}_k^* \|_{E^{k-1}} \leq \frac{1}{1-\kappa} \quad \hat{\epsilon}(G). \tag{5.48}$$

Mettendo insieme le (5.46) e (5.48) si ha

$$\begin{aligned}\| J^* - \hat{H}_k^n \|_{E^{k-1}} &\leq \| J^* - \hat{H}_k^* \|_{E^{k-1}} + \| \hat{H}_k^n - \hat{H}_k^* \|_{E^{k-1}} \\ &\leq \frac{1}{1-\kappa}\Big(\kappa^n \| J_k^1 \|_{E^{k-1}} + \hat{\epsilon}(G)\Big) \end{aligned} \tag{5.49}$$

□

Indicando, infine, con $\hat{\xi}^n$ la strategia associata ad $\hat{H}_k^n$ e definita in analogia a (3.21) e (3.22), si ha, analogamente a (3.61)

$$\hat{H}_k^n \leq E[l(F(X_S) - \hat{V}_S^n)] \leq \hat{H}_k^n + E[l(F(X_S) + c), \tau_k \leq S] \tag{5.50}$$

dove $\hat{V}_t^n$ è il portafoglio costruito con la strategia $\hat{\xi}^n$.

5.2.1 Conclusioni

Dalla definizione dell'operatore $\hat{T}_G^k$ in (5.26) segue che delle $k+1$ coppie ordinate (u,d) tali che $u+d=k$, solo $(0,k)$ è tale per cui

$$\hat{H}_k^n(v,0,k,t) = \hat{T}_G^k \hat{H}_k^{n-1}(v,0,k,t) = 0 \tag{5.51}$$

per ogni n, v, t, cosa che invece accade per tutte le $k+1$ coppie nel caso dell'operatore T_G^k (si veda l'osservazione 4.2.1).
In particolare notiamo che, fissati $(v_j,t_i) \in G$, per $n=2$ si ha (si veda (4.3))

$$\begin{aligned}
&\hat{H}_k^2(v_j,0,k-1,t_i) = J_k^1(v_j,0,k-1,t_i) + \left(\frac{S-t_i}{\beta_0+t_i}\right) \\
&\quad \min_{\{\zeta \in I_{v_j,0,k-1}\}} \Bigg\{(\alpha_0^+ + u)\sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j+\zeta x_0 e^{au-bd}(e^a-1))J_k^1(v_m,1,k-1,t_i) \\
&\quad + (\alpha_0^- + d)\sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j+\zeta x_0 e^{au-bd}(e^{-b}-1))J_k^1(v_m,0,k,t_i)\Bigg\} = \\
&\quad J_k^1(v_j,0,k-1,t_i) + \left(\frac{S-t_i}{\beta_0+t_i}\right) \min_{\{\zeta \in I_{v_j,0,k-1}\}} \Bigg\{ \\
&\quad (\alpha_0^+ + u)\sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j+\zeta x_0 e^{au-bd}(e^a-1))J_k^1(v_m,1,k-1,t_i)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

e per $n>2$ (si veda (4.4))

$$\begin{aligned}
&\hat{H}_k^n(v_j,0,k-1,t_i) = J_k^1(v_j,0,k-1,t_i) + \sum_{l=0}^{L-1} 1_{\{t_i \le t_l\}}\gamma_{i,l} \\
&\quad \min_{\{\zeta \in I_{v_j,0,k-1}\}} \Bigg\{(\alpha_0^+ + u)\sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j+\zeta x_0 e^{au-bd}(e^a-1))\hat{H}_k^{n-1}(v_m,1,k-1,t_l) \\
&\quad + (\alpha_0^- + d)\sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j+\zeta x_0 e^{au-bd}(e^{-b}-1))\hat{H}_k^{n-1}(v_m,0,k,t_l)\Bigg\} \\
&\quad = J_k^1(v_j,0,k-1,t_i) + \sum_{l=0}^{L-1} 1_{\{t_i \le t_l\}}\gamma_{i,l} \min_{\{\zeta \in I_{v_j,0,k-1}\}} \Bigg\{ \\
&\quad (\alpha_0^+ + u)\sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j+\zeta x_0 e^{au-bd}(e^a-1))\hat{H}_k^{n-1}(v_m,1,k-1,t_l)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

In altre parole, al termine $J_k^1(v_j, 0, k-1, t_i)$, che è lo stesso ad ogni iterazione, si aggiunge

$$\sum_{l=0}^{L-1} 1_{\{t_i \leq t_l\}} \gamma_{i,l} \min_{\{\zeta \in I_{v_j,0,k-1}\}} \left\{ (\alpha_0^+ + u) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v_j + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1)) \hat{H}_k^{n-1}(v_m, 1, k-1, t_l) \right\} \tag{5.54}$$

che in generale varia al variare di n.
Non sembrano quindi esserci motivi per cui la successione delle iterate di $\hat{T}_G^k$ diventi stazionaria come è invece avvenuto per le iterate di T_G^k (si veda la proposizione (4.2.2) ed i commenti che la seguono) e i dati sperimentali confermano tale tesi (si veda capitolo successivo).

Capitolo 6

Analisi dei dati

6.1 Esempio

Consideriamo un'opzione europea di tipo *call* con scadenza $S = 2$ e prezzo d'esercizio $K = 1$. Sia X un processo di Poisson geometrico come in (3.1) con $x_0 = 1$ e a, b costanti positive tali che $e^a = 2, e^{-b} = \frac{1}{2}$. Sia esso il sottostante del derivato in esame.
Studiamo il caso in cui λ^+ e λ^-, intensità dei due processi di Poisson che guidano X, non sono note all'investitore. Secondo quanto detto nel paragrafo 3.3, consideriamo λ^+ e λ^- due variabili aleatorie con distribuzione iniziale $\Gamma(\alpha_0^i, \beta_0)$, dove $\alpha_0^i = \beta_0 = 1$ per $i = +, -$. Siano inoltre $c = \frac{1}{2}$, $F(X_S) = (X_S - 1)^+$ il rendimento alla scadenza dell'opzione e sia $l(z) = [\max(z, 0)]^2$ la funzione perdita.
Il problema in (3.12) e l'intervallo in (3.11) diventano rispettivamente

$$J_0^* = \min_{\xi \in \mathcal{A}_{V_0}} \quad E\big\{\big[\max\big((2^{u-d} - 1)^+ - V_S, 0\big)\big]^2\big\}. \tag{6.1}$$

e

$$I_{v,u,d} = \left[- \frac{-\frac{1}{2} + v}{2^{u-d}}, \frac{-\frac{1}{2} + v}{2^{u-d-1}} \right] \tag{6.2}$$

Notiamo inoltre che il prezzo di superreplica in (3.14) è tale per cui

$$F_{u,d} \equiv x_0 \tag{6.3}$$

(si veda [9]) ovvero $F_{u,d} = 1$ e così $F_k \equiv 1$ (si veda (3.47)).
Come illustrato nel paragrafo 3.4.1, sia $\mathcal{S} = [-\frac{1}{2}, 1] \times [0, 2]$ e siano $M = 3$, $L = 2$. Consideriamo

$$G_1 = \{-\frac{1}{2}, 0, 0.25, 1\} \subset [-\frac{1}{2}, 1] \quad G_2 = \{0, 1, 2\} \subset [0, 2] \tag{6.4}$$

e la griglia $G = G_1 \times G_2 \subset \mathcal{S}$.
Riportiamo di seguito l'algoritmo utilizzato per il calcolo della strategia d'investimento ξ_s^n per ogni $s \in (\hat{\tau}_h, \hat{\tau}_{h+1}]$ e $h \leq n-2$:

- siano $h = 0$, $s \in [0, \hat{\tau}_1]$ e $V_0 = v$ allora

$$\begin{aligned}\xi_s^n := \arg\min_{\zeta \in I_{v,0,0}} \Big\{ \alpha_0^+ \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v + \zeta x_0(e^a - 1)) \hat{H}_k^{n-1}(v_m, 1, 0, s) \\ + \alpha_0^- \sum_{m=0}^{M_1} 1_{\{V_m\}}(v + \zeta x_0(e^{-b} - 1)) \hat{H}_k^{n-1}(v_m, 0, 1, s) \Big\}\end{aligned} \tag{6.5}$$

- sia $h \leq n-2$ generico e ξ_s^n sia definita per ogni $s \leq \hat{\tau}_h$. Se in $t = \hat{\tau}_h$ si ha $N_t^+ = u$, $N_t^- = d$,$V_{\hat{\tau}_h} = v$, per $s \in (\hat{\tau}_h, \hat{\tau}_{h+1}]$ poniamo:

$$\begin{aligned}\xi_s^n := \arg\min_{\zeta \in I_{v,u,d}} \Big\{ \\ (\alpha_0^+ + u) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1)) \hat{H}_k^{n-u-d-1}(v_m, u+1, d, s) \\ + (\alpha_0^- + d) \sum_{m=0}^{M-1} 1_{\{V_m\}}(v + \zeta x_0 e^{au-bd}(e^a - 1)) \hat{H}_k^{n-u-d-1}(v_m, u, d+1, s) \Big\}\end{aligned} \tag{6.6}$$

  dove

$$V_{\hat{\tau}_h} = V_{\hat{\tau}_{h-1}} + \xi_{\hat{\tau}_h}(X_{\hat{\tau}_h} - X_{\hat{\tau}_{h-1}}) \tag{6.7}$$

Fissiamo $k = 5$. Sulla base dei dati a disposizione, calcoliamo la successione delle iterate dei due operatori T_G^k in (3.54) e $\hat{T}_G^k$ in (5.26) per $n = 6, 10$.
Nei prossimi paragrafi riporteremo solo i valori delle iterate necessarie per determinare la strategia d' investimento.

6.2 Operatore T_G^k

6.2.1 $n = 6$

Calcoliamo $H_5^3(v_j, u, d, t_i)$ per $v_j \in G_1$, $t_i \in \{0, 1\}$ e $u + d = 3$. La restrizione su t_i segue dall'aver adottato l'interpolazione *costante a tratti cadlag*: non è necessario considerare l'estremo superiore $t_i = 2$ dell'intervallo temporale (si vedano (4.3), (4.4)).
Queste iterate forniscono la strategia per $s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4]$. Notiamo che se $v_j = -\frac{1}{2}$, $I_{v,u,d} = \{0\}$ e $\xi_s^6 \equiv 0$ qualunque siano u, d, t_i.

$$
\begin{array}{ll}
H_5^3(-\frac{1}{2},2,1,0) = 0.0369068 & \\
H_5^3(-\frac{1}{2},2,1,1) = 0.864213 & \\
H_5^3(-\frac{1}{2},1,2,0) = 0.00195658 & \\
H_5^3(-\frac{1}{2},1,2,1) = 0.0519794 & \\
H_5^3(-\frac{1}{2},0,3,0) = 0.00195658 & \\
H_5^3(-\frac{1}{2},0,3,1) = 0.0519794 & \\
H_5^3(-\frac{1}{2},3,0,0) = 0.953843 & \\
H_5^3(-\frac{1}{2},3,0,1) = 22.2457 & \\
H_5^3(0,2,1,0) = 0.0133929 & \xi_s^6 = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^3(0,2,1,1) = 0.322263 & \xi_s^6 = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
H_5^3(0,1,2,0) = H_5^3(0,1,2,1) = 0 & \xi_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^3(0,3,0,0) = 0.792635 & \xi_s^6 = 0.125 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^3(0,3,0,1) = 18.5924 & \xi_s^6 = 0.125 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
H_5^3(0,0,3,0) = H_5^3(0,0,3,1) = 0 & \xi_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^3(\frac{1}{4},1,2,0) = H_5^3(\frac{1}{4},1,2,1) = 0 & \xi_s^6 \in [-0.5,1] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^3(\frac{1}{4},2,1,0) = 0.115925 & \xi_s^6 = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^3(\frac{1}{4},2,1,1) = 0.26465 & \xi_s^6 = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
H_5^3(\frac{1}{4},3,0,0) = 0.778489 & \xi_s^6 = 0.0937 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^3(\frac{1}{4},3,0,1) = 18.1397 & \xi_s^6 = 0.0937 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
H_5^3(\frac{1}{4},0,3,0) = H_5^3(\frac{1}{4},0,3,1) = 0 & \xi_s^6 \in [-2,4] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^3(1,0,3,0) = H_5^3(1,0,3,1) = 0 & \xi_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^3(1,3,0,0) = 0.733014 & \xi_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^3(1,3,0,1) = 16.7547 & \xi_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
H_5^3(1,1,2,0) = H_5^3(1,1,2,1) = 0 & \xi_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^3(1,2,1,0) = 0.00890659 & \xi_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^3(1,2,1,1) = 0.182953 & \xi_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2]
\end{array}
\tag{6.8}
$$

Procediamo con il calcolo delle iterate del tipo $H_5^4(v_j, u, d, t_i)$ con u, d tali che $u+d=2$, che forniscono la strategia d'investimento in $(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]$.

$$
\begin{array}{ll}
H_5^4(-\frac{1}{2},2,0,0)=1.67818 & \\
H_5^4(-\frac{1}{2},2,0,1)=15.9817 & \\
H_5^4(-\frac{1}{2},0,2,0)=0.0075277 & \\
H_5^4(-\frac{1}{2},0,2,1)=0.0910946 & \\
H_5^4(-\frac{1}{2},1,1,0)=0.0442791 & \\
H_5^4(-\frac{1}{2},1,1,1)=0.416991 & \\
H_5^4(0,1,1,0)=0.001098 & \xi_s^6=1 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
H_5^4(0,1,1,1)=0.0942631 & \xi_s^6=1 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2] \\
H_5^4(0,2,0,0)=1.27624 & \xi_s^6=0.25 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
H_5^4(0,2,0,1)=12.035 & \xi_s^6=0.25 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2] \\
H_5^4(0,0,2,0)=H_5^4(0,0,2,1)=0 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,2] \\
H_5^4(\frac{1}{4},1,1,0)=0.0109835 & \xi_s^6=0.75 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
H_5^4(\frac{1}{4},1,1,1)=0.0942631 & \xi_s^6=0.75 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2] \\
H_5^4(\frac{1}{4},2,0,0)=1.25849 & \xi_s^6=0.1875 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
H_5^5(\frac{1}{4},2,0,1)=11.751 & \xi_s^6=0.1875 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2] \\
H_5^4(\frac{1}{4},0,2,0)=H_5^4(\frac{1}{4},0,2,1)=0 & \xi_s^6\in[-1,2] \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,2] \\
H_5^4(1,0,2,0)=H_5^4(1,0,2,1)=0 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,2] \\
H_5^4(1,2,0,0)=1.1994 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
H_5^4(1,2,0,1)=10.9107 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2] \\
H_5^4(1,1,1,0)=0.0087629 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
H_5^4(1,1,1,1)=0.0734071 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2]
\end{array}
\tag{6.9}
$$

Infine calcoliamo $H_5^5(v_j,u,d,t_i)$ con $u+d=1$.

$$
\begin{array}{ll}
H_5^5(-\frac{1}{2},1,0,0)=2.02461 & \\
H_5^5(-\frac{1}{2},1,0,1)=8.26208 & \\
H_5^5(-\frac{1}{2},0,1,0)=0.00441337 & \\
H_5^5(-\frac{1}{2},0,1,1)=0.214623 & \\
H_5^5(0,1,0,0)=1.40165 & \xi_s^6=0.5 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[0,1] \\
H_5^5(0,1,0,1)=5.51269 & \xi_s^6=0.5 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[1,2] \\
H_5^5(0,0,1,0)=0.00596742 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[0,1] \\
H_5^5(0,0,1,1)=0.022111 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[1,2] \\
H_5^5(\frac{1}{4},1,0,0)=1.38545 & \xi_s^6=0.375 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[0,1]
\end{array}
\tag{6.10}
$$

$$
\begin{array}{ll}
H_5^5(\frac{1}{4},1,0,1)=5.38306 & \xi_s^6=0.375 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[1,2] \\
H_5^5(\frac{1}{4},0,1,0)=0.05967 & \xi_s^6\in[-0.5,1] \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[0,1] \\
H_5^5(\frac{1}{4},0,1,1)=0.022111 & \xi_s^6\in[-0.5,1] \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[1,2] \\
H_5^5(1,1,0,0)=1.34418 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[0,1] \\
H_5^5(1,1,0,1)=5.1358 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[1,2] \\
H_5^5(1,0,1,0)=0.00470822 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[0,1] \\
H_5^5(1,0,1,1)=0.017219 & \xi_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[1,2]
\end{array}
$$

A questo punto è possibile calcolare $H_5^6(v_j, 0, 0, 0)$ per $v_j = 0, \frac{1}{4}, 1$. Qui come negli esempi successivi, non prendiamo in considerazione come valore iniziale del capitale $v_j = -\frac{1}{2}$ perchè non realistico ed introdotto solo per permettere i calcoli ricorsivi. Prendiamo invece in considerazione il valore $v_j = 1$ perchè, come accennato, possiamo essere interessati alla strategia corrispondente a tale valore.

$$\begin{array}{ll} H_5^6(0,0,0,0) = 0.892175 & \xi_s^6 = 1 \text{ per } s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2] \\ H_5^6(\frac{1}{4},0,0,0) = 0.892175 & \xi_s^6 = 0.75 \text{ per } s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2] \\ H_5^6(1,0,0,0) = 0.863682 & \xi_s^6 = 0 \text{ per } s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2] \end{array} \tag{6.11}$$

Notiamo che per un capitale iniziale pari a 0 e $\frac{1}{4}$, i valori delle iterate coincidono. Cio' non accadrebbe se scegliessimo una griglia piu' fine. In accordo con (6.5) e (6.6) la strategia ξ_s^6 risulta essere quella della seguente tabella (6.12). I valori del capitale $V_{\hat{\tau}_h}$ al variare di h, sono calcolati in base alla (6.7), il che conduce a valori che non sempre ricoprono tutto l'intervallo $[-\frac{1}{2}, 1]$.

$$\xi_s^6 = \begin{cases} 1 & s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2],\ V_0 = 0 \\ 0.75 & s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2],\ V_0 = \frac{1}{4} \\ 0 & s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2],\ V_0 = 1 \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2] \cap [0,2] \text{ con } u = 1, d = 0,\ V_{\hat{\tau}_1} = 1 \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2] \cap [0,2] \text{ con } u = 0, d = 1,\ V_{\hat{\tau}_1} = -\frac{1}{2} \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3] \cap [0,2] \text{ con } u = 1, d = 1,\ V_{\hat{\tau}_2} \in \{-\frac{1}{2}, 1\}1 \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3] \cap [0,2] \text{ con } u = 2, d = 0,\ V_{\hat{\tau}_2} = 1 \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3] \cap [0,2] \text{ con } u = 0, d = 2,\ V_{\hat{\tau}_2} = -\frac{1}{2} \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u = 2, d = 1,\ V_{\hat{\tau}_3} \in \{-\frac{1}{2}, 1\} \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u = 1, d = 2,\ V_{\hat{\tau}_3} \in \{-\frac{1}{2}, 1\} \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u = 3, d = 0,\ V_{\hat{\tau}_3} = 1 \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u = 0, d = 3,\ V_{\hat{\tau}_3} = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{6.12}$$

6.2.2 $n = 10$

Per $n = 10$, ma avremmo potuto scegliere qualunque $n \geq 6$ (si veda la proposizione 4.2.2), la successione dellle iterate resta la stessa del caso $n = 6$. Infatti

$$
\begin{array}{ll}
H_5^7(-\frac{1}{2},2,1,0) = 0.0369068 & \\
H_5^7(-\frac{1}{2},2,1,1) = 0.864213 & \\
H_5^7(-\frac{1}{2},1,2,0) = 0.00195658 & \\
H_5^7(-\frac{1}{2},1,2,1) = 0.0519794 & \\
H_5^7(-\frac{1}{2},0,3,0) = 0.00195658 & \\
H_5^7(-\frac{1}{2},0,3,1) = 0.0519794 & \\
H_5^7(-\frac{1}{2},3,0,0) = 0.953843 & \\
H_5^7(-\frac{1}{2},3,0,1) = 22.2457 & \\
H_5^7(0,2,1,0) = 0.0133929 & \xi_s^{10} = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^7(0,2,1,1) = 0.322263 & \xi_s^{10} = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
H_5^7(0,1,2,0) = H_5^7(0,1,2,1) = 0 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^7(0,3,0,0) = 0.792635 & \xi_s^{10} = 0.125 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_{10}, \hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^7(0,3,0,1) = 18.5924 & \xi_s^{10} = 0.125 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
H_5^7(0,0,3,0) = H_5^7(0,0,3,1) = 0 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^7(\frac{1}{4},1,2,0) = H_5^7(\frac{1}{4},1,2,1) = 0 & \xi_s^{10} \in [-0.5,1] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^7(\frac{1}{4},2,1,0) = 0.0115925 & \xi_s^{10} = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^7(\frac{1}{4},2,1,1) = 0.26465 & \xi_s^{10} = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
H_5^7(\frac{1}{4},3,0,0) = 0.778489 & \xi_s^{10} = 0.0937 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^7(\frac{1}{4},3,0,1) = 18.1397 & \xi_s^{10} = 0.0937 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
H_5^7(\frac{1}{4},0,3,0) = H_5^7(\frac{1}{4},0,3,1) = 0 & \xi_s^{10} \in [-2,4] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^7(1,0,3,0) = H_5^7(1,0,3,1) = 0 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^7(1,3,0,0) = 0.733014 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^7(1,3,0,1) = 16.7547 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
H_5^7(1,1,2,0) = H_5^7(1,1,2,1) = 0 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
H_5^7(1,2,1,0) = 0.00890659 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
H_5^7(1,2,1,1) = 0.182953 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [1,2]
\end{array}
\tag{6.13}
$$

Procediamo con il calcolo delle iterate del tipo $H_5^8(v_j,u,d,t_i)$ con u,d tali che $u+d=2$, che forniscono la strategia d'investimento in $(\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3]$.

$$\begin{array}{ll}
H_5^8(-\frac{1}{2},2,0,0) = 1.67818 & \\
H_5^8(-\frac{1}{2},2,0,1) = 15.9817 & \\
H_5^8(-\frac{1}{2},0,2,0) = 0.0075277 & \\
H_5^8(-\frac{1}{2},0,2,1) = 0.0910946 & \\
H_5^8(-\frac{1}{2},1,1,0) = 0.0442791 & \\
H_5^8(-\frac{1}{2},1,1,1) = 0.416991 & \\
H_5^8(0,1,1,0) = 0.010983 & \xi_s^{10} = 1 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
H_5^8(0,1,1,1) = 0.0942631 & \xi_s^{10} = 1 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2] \\
H_5^8(0,2,0,0) = 1.27624 & \xi_s^{10} = 0.25 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
H_5^8(0,2,0,1) = 12.035 & \xi_s^{10} = 0.25 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2] \\
H_5^8(0,0,2,0) = H_5^8(0,0,2,1) = 0 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,2] \\
H_5^8(\frac{1}{4},1,1,0) = 0.0109835 & \xi_s^{10} = 0.75 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
H_5^8(\frac{1}{4},1,1,1) = 0.0942631 & \xi_s^{10} = 0.75 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2] \\
H_5^8(\frac{1}{4},2,0,0) = 1.25849 & \xi_s^{10} = 0.1875 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
H_5^8(\frac{1}{4},2,0,1) = 11.751 & \xi_s^{10} = 0.1875 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2] \\
H_5^8(\frac{1}{4},0,2,0) = H_5^8(\frac{1}{4},0,2,1) = 0 & \xi_s^{10} \in [-1,2] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,2] \\
H_5^8(1,0,2,0) = H_5^4(1,0,2,1) = 0 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,2] \\
H_5^8(1,2,0,0) = 1.1994 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
H_5^8(1,2,0,1) = 10.9107 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2] \\
H_5^8(1,1,1,0) = 0.0087629 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
H_5^8(1,1,1,1) = 0.0734071 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2]
\end{array} \tag{6.14}$$

Infine calcoliamo $H_5^9(v_j, u, d, t_i)$ con $u + d = 1$.

$$\begin{array}{ll}
H_5^9(-\frac{1}{2},1,0,0) = 2.02461 & \\
H_5^9(-\frac{1}{2},1,0,1) = 8.26208 & \\
H_5^9(-\frac{1}{2},0,1,0) = 0.0441337 & \\
H_5^9(-\frac{1}{2},0,1,1) = 0.214623 & \\
H_5^9(0,1,0,0) = 1.40165 & \xi_s^{10} = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\
H_5^9(0,1,0,1) = 5.51269 & \xi_s^{10} = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2] \\
H_5^9(0,0,1,0) = 0.00596742 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\
H_5^9(0,0,1,1) = 0.022111 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2] \\
H_5^9(\frac{1}{4},1,0,0) = 1.38545 & \xi_s^{10} = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\
H_5^9(\frac{1}{4},1,0,1) = 5.38306 & \xi_s^{10} = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2] \\
H_5^9(\frac{1}{4},0,1,0) = 0.005967 & \xi_s^{10} \in [-0.5,1] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1]
\end{array} \tag{6.15}$$

$$\begin{array}{ll}
H_5^9(\frac{1}{4},0,1,1) = 0.022111 & \xi_s^{10} \in [-0.5,1] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2] \\
H_5^9(1,1,0,0) = 1.34418 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\
H_5^9(1,1,0,1) = 5.1358 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2] \\
H_5^9(1,0,1,0) = 0.00470822 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\
H_5^9(1,0,1,1) = 0.017219 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2]
\end{array} \tag{6.16}$$

A questo punto è possibile calcolare $H_5^6(v_j,0,0,0)$ per $v_j = 0, \frac{1}{4}, 1$.

$$\begin{array}{ll}
H_5^{10}(0,0,0,0) = 0.892175 & \xi_s^{10} = 1 \text{ per } s \in [0,\hat{\tau}_1] \cap [0,2] \\
H_5^{10}(\frac{1}{4},0,0,0) = 0.892175 & \xi_s^{10} = 0.75 \text{ per } s \in [0,\hat{\tau}_1] \cap [0,2] \\
H_5^{10}(1,0,0,0) = 0.863682 & \xi_s^{10} = 0 \text{ per } s \in [0,\hat{\tau}_1] \cap [0,2]
\end{array} \tag{6.17}$$

Data l'identità delle due successioni, la strategia per $n = 10$ sarà la stessa riportata in (6.12).

6.3 Operatore $\hat{T}_G^k$

Studiamo i casi $k = 5$ e $n = 6, 10$ per l'operatore $\hat{T}_G^k$.

6.3.1 $n = 6$

Come nel paragrafo precedente, calcoliamo le iterate $\hat{H}_5^3(v_j, u, d, t_i)$ con $u + d = 3$ necessarie per determinare la strategia in $(\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4]$.

$$
\begin{array}{ll}
\hat{H}_5^3(-\frac{1}{2},1,2,0) = 0.0077298 & \\
\hat{H}_5^3(-\frac{1}{2},1,2,1) = 0.109152 & \\
\hat{H}_5^3(-\frac{1}{2},2,1,0) = 0.153527 & \\
\hat{H}_5^3(-\frac{1}{2},2,1,1) = 2.01911 & \\
\hat{H}_5^3(-\frac{1}{2},3,0,0) = 4.72841 & \\
\hat{H}_5^3(-\frac{1}{2},3,0,1) = 59.6253 & \\
\hat{H}_5^3(-\frac{1}{2},0,3,0) = 0.003881 & \\
\hat{H}_5^3(-\frac{1}{2},0,3,1) = 0.071037 & \\
\hat{H}_5^3(0,1,2,0) = \hat{H}_5^3(0,1,2,1) = 0 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^3(0,2,1,0) = 0.0526512 & \hat{\xi}_s^6 = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^3(0,2,1,1) = 0.711039 & \hat{\xi}_s^6 = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^3(0,3,0,0) = 3.86055 & \hat{\xi}_s^6 = 0.125 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^3(0,3,0,1) = 48.974 & \hat{\xi}_s^6 = 0.125 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^3(0,0,3,0) = \hat{H}_5^3(0,0,3,1) = 0 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^3(\frac{1}{4},1,2,0) = \hat{H}_5^3(\frac{1}{4},1,2,1) = 0 & \hat{\xi}_s^6 \in [-0.5,1] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^3(\frac{1}{4},2,1,0) = 0.0508508 & \hat{\xi}_s^6 = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^3(\frac{1}{4},2,1,1) = 0.653426 & \hat{\xi}_s^6 = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^3(\frac{1}{4},3,0,0) = 3.84641 & \hat{\xi}_s^6 = 0.09375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^3(\frac{1}{4},3,0,1) = 48.5214 & \hat{\xi}_s^6 = 0.09375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^3(\frac{1}{4},0,3,0) = \hat{H}_5^3(\frac{1}{4},0,3,1) = 0 & \hat{\xi}_s^6 \in [-2,4] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^3(1,1,2,0) = \hat{H}_5^3(1,1,2,0) = 0 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^3(1,2,1,0) = 0.0458556 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^3(1,2,1,1) = 0.548859 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^3(1,3,0,0) = 3.77515 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^3(1,3,0,1) = 46.8809 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^3(1,0,3,0) = \hat{H}_5^3(1,0,3,1) = 0 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2]
\end{array}
\tag{6.18}
$$

La strategia nel periodo $(\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3]$ è data dalle $\hat{H}_5^4(v_j, u, d, t_i)$ con $u + d = 2$.

$$\begin{array}{ll}
\hat{H}_5^4(-\frac{1}{2},1,1,0)=0.132046 & \\
\hat{H}_5^4(-\frac{1}{2},1,1,1)=0.903313 & \\
\hat{H}_5^4(-\frac{1}{2},2,0,0)=5.78005 & \\
\hat{H}_5^4(-\frac{1}{2},2,0,1)=38.7104 & \\
\hat{H}_5^4(-\frac{1}{2},0,2,0)=0.0116677 & \\
\hat{H}_5^4(-\frac{1}{2},0,2,1)=0.114034 & \\
\hat{H}_5^4(0,0,2,0)=\hat{H}_5^4(0,0,2,1)=0 & \hat{\xi}_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,2] \\
\hat{H}_5^4(0,2,0,0)=4.59027 & \hat{\xi}_s^6=0.25 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
\hat{H}_5^4(0,2,0,1)=30.3982 & \hat{\xi}_s^6=0.25 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2] \\
\hat{H}_5^4(0,1,1,0)=0.0411813 & \hat{\xi}_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
\hat{H}_5^4(0,1,1,1)=0.264017 & \hat{\xi}_s^6=1 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2] \\
\hat{H}_5^4(\frac{1}{4},0,2,0)=\hat{H}_5^4(\frac{1}{4},0,2,1)=0 & \hat{\xi}_s^6=[-1,2] \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,2] \\
\hat{H}_5^4(\frac{1}{4},2,0,0)=4.57253 & \hat{\xi}_s^6=0.187 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
\hat{H}_5^4(\frac{1}{4},2,0,1)=30.1143 & \hat{\xi}_s^6=0.1875 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2] \\
\hat{H}_5^4(\frac{1}{4},1,1,0)=0.0402224 & \hat{\xi}_s^5\in[0,0.5] \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
\hat{H}_5^4(\frac{1}{4},1,1,1)=0.262177 & \hat{\xi}_s^6\in[0,0.5] \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2] \\
\hat{H}_5^4(1,0,2,0)=\hat{H}_5^4(1,0,2,1)=0 & \hat{\xi}_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,2] \\
\hat{H}_5^4(1,2,0,0)=4.48487 & \hat{\xi}_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
\hat{H}_5^4(1,2,0,1)=29.1156 & \hat{\xi}_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2] \\
\hat{H}_5^4(1,1,1,0)=0.0352586 & \hat{\xi}_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[0,1] \\
\hat{H}_5^4(1,1,1,1)=0.220221 & \hat{\xi}_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3]\cap[1,2]
\end{array} \tag{6.19}$$

Notiamo che in questo esempio, e sarà vero anche per il successivo, ci sono casi in cui la strategia cambia tra $(\hat{\tau}_h,\hat{\tau}_{h+1}]\cap[0,1]$ e $(\hat{\tau}_h,\hat{\tau}_{h+1}]\cap[1,2]$. La strategia nel periodo $(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]$ è data dal calcolo delle $\hat{H}_5^5(v_j,u,d,t_i)$ con $u+d=1$.

$$\begin{array}{ll}
\hat{H}_5^5(-\frac{1}{2},1,0,0)=5.79008 & \\
\hat{H}_5^5(-\frac{1}{2},1,0,1)=19.039 & \\
\hat{H}_5^5(-\frac{1}{2},0,1,0)=0.0877521 & \\
\hat{H}_5^5(-\frac{1}{2},0,1,1)=0.33946 & \\
\hat{H}_5^5(0,1,0,0)=4.42561 & \hat{\xi}_s^6=0.5 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[0,1] \\
\hat{H}_5^5(0,1,0,1)=14.1674 & \hat{\xi}_s^6=0.5 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[1,2] \\
\hat{H}_5^5(0,0,1,0)=0.0197525 & \hat{\xi}_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[0,1] \\
\hat{H}_5^5(0,0,1,1)=0.0619299 & \hat{\xi}_s^6=0 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[1,2] \\
\hat{H}_5^5(\frac{1}{4},1,0,0)=4.40941 & \hat{\xi}_s^6=0.375 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[0,1] \\
\hat{H}_5^5(\frac{1}{4},1,0,1)=14.0377 & \hat{\xi}_s^6=0.375 \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[1,2] \\
\hat{H}_5^5(\frac{1}{4},0,1,0)=0.0194188 & \hat{\xi}_s^6\in[0,1] \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[0,1] \\
\hat{H}_5^5(\frac{1}{4},0,1,1)=0.0614983 & \hat{\xi}_s^6\in[0,1] \text{ per } s\in(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]\cap[1,2]
\end{array} \tag{6.20}$$

$$\begin{array}{ll}
\hat{H}_5^5(1,1,0,0) = 4.34031 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^5(1,1,0,1) = 13.7108 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^5(1,0,1,0) = 0.0167409 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^5(1,0,1,1) = 0.0516569 & \hat{\xi}_s^6 = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2] \cap [1,2]
\end{array} \tag{6.21}$$

A questo punto sono note

$$\begin{array}{lll}
\hat{H}_5^6(0,0,0,0) = 2.63624 & \hat{\xi}_s^6 = 1 & s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^6(\frac{1}{4},0,0,0) = 2.63624 & \hat{\xi}_s^6 = 0.75 & s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^6(1,0,0,0) = 2.58962 & \hat{\xi}_s^6 = 0 & s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2]
\end{array} \tag{6.22}$$

In accordo con (6.5) e (6.6) la strategia $\hat{\xi}_s^6$ risulta:

$$\hat{\xi}_s^6 = \begin{cases}
1 & s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2],\ V_0 = 0 \\
0.75 & s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2],\ V_0 = \frac{1}{4} \\
0 & s \in [0, \hat{\tau}_1] \cap [0,2],\ V_0 = 1 \\
0 & s \in (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2] \cap [0,2] \text{ con } u = 1, d = 0,\ V_{\hat{\tau}_1} = 1 \\
0 & s \in (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2] \cap [0,2] \text{ con } u = 0, d = 1,\ V_{\hat{\tau}_1} = -\frac{1}{2} \\
0 & s \in (\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3] \cap [0,2] \text{ con } u = 1, d = 1,\ V_{\hat{\tau}_2} \in \{-\frac{1}{2}, 1\} \\
0 & s \in (\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3] \cap [0,2] \text{ con } u = 2, d = 0,\ V_{\hat{\tau}_2} = 1 \\
0 & s \in (\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3] \cap [0,2] \text{ con } u = 0, d = 2,\ V_{\hat{\tau}_2} = -\frac{1}{2} \\
0 & s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u = 2, d = 1,\ V_{\hat{\tau}_3} \in \{-\frac{1}{2}, 1\} \\
0 & s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u = 1, d = 2,\ V_{\hat{\tau}_3} \in \{-\frac{1}{2}, 1\} \\
0 & s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u = 3, d = 0,\ V_{\hat{\tau}_3} = 1 \\
0 & s \in (\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u = 0, d = 3,\ V_{\hat{\tau}_3} = -\frac{1}{2}
\end{cases} \tag{6.23}$$

6.3.2 $n = 10$

Calcoliamo le iterate $\hat{H}_5^7(v_j, u, d, t_i)$ con $u+d=3$ necessarie per determinare la strategia in $(\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4]$.

$$
\begin{array}{ll}
\hat{H}_5^7(-\frac{1}{2},1,2,0) = 0.00596087 & \\
\hat{H}_5^7(-\frac{1}{2},1,2,1) = 0.0928319 & \\
\hat{H}_5^7(-\frac{1}{2},2,1,0) = 0.141189 & \\
\hat{H}_5^7(-\frac{1}{2},2,1,1) = 1.8271 & \\
\hat{H}_5^7(-\frac{1}{2},3,0,0) = 6.4861 & \\
\hat{H}_5^7(-\frac{1}{2},3,0,1) = 66.7333 & \\
\hat{H}_5^7(-\frac{1}{2},0,3,0) = 0.002616 & \\
\hat{H}_5^7(-\frac{1}{2},0,3,1) = 0.06039 & \\
\hat{H}_5^7(0,1,2,0) = \hat{H}_5^7(0,1,2,1) = 0 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^7(0,2,1,0) = 0.04755265 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^7(0,2,1,1) = 0.641211 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^7(0,3,0,0) = 5.2396 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.125 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^7(0,3,0,1) = 54.4446 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.125 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^7(0,0,3,0) = \hat{H}_5^7(0,0,3,1) = 0 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^7(\frac{1}{4},1,2,0) = \hat{H}_5^7(\frac{1}{4},1,2,1) = 0 & \hat{\xi}_s^{10} \in [-0.5,1] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^7(\frac{1}{4},2,1,0) = 0.0457261 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^7(\frac{1}{4},2,1,1) = 0.583598 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^7(\frac{1}{4},3,0,0) = 5.22547 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.09375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^7(\frac{1}{4},3,0,1) = 53.9919 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.09375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^7(\frac{1}{4},0,3,0) = \hat{H}_5^7(\frac{1}{4},0,3,1) = 0 & \hat{\xi}_s^{10} \in [-2,4] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^7(1,1,2,0) = \hat{H}_5^7(1,1,2,0) = 0 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^7(1,2,1,0) = 0.0404291 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^7(1,2,1,1) = 0.478095 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^7(1,3,0,0) = 5.15661 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^7(1,3,0,1) = 52.3922 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^7(1,0,3,0) = \hat{H}_5^7(1,0,3,1) = 0 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2]
\end{array}
\tag{6.24}
$$

La strategia nel periodo $(\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3]$ è data dal calcolo delle $\hat{H}_5^8(v_j, u, d, t_i)$ con $u + d = 2$.

$$\begin{array}{ll}
\hat{H}_5^8(-\frac{1}{2},1,1,0) = 0.12021 & \\
\hat{H}_5^8(-\frac{1}{2},1,1,1) = 0.819743 & \\
\hat{H}_5^8(-\frac{1}{2},2,0,0) = 7.27806 & \\
\hat{H}_5^8(-\frac{1}{2},2,0,1) = 42.9499 & \\
\hat{H}_5^8(-\frac{1}{2},0,2,0) = 0.0097588 & \\
\hat{H}_5^8(-\frac{1}{2},0,2,1) = 0.104357 & \\
\hat{H}_5^8(0,0,2,0) = \hat{H}_5^8(0,0,2,1) = 0 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^8(0,2,0,0) = 5.76363 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.25 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^8(0,2,0,1) = 33.6767 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.25 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^8(0,1,1,0) = 0.0360625 & \hat{\xi}_s^{10} = 1 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^8(0,1,1,1) = 0.229076 & \hat{\xi}_s^{10} = 1 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^8(\frac{1}{4},0,2,0) = \hat{H}_5^8(\frac{1}{4},0,2,1) = 0 & \hat{\xi}_s^{10} \in [-1,2] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^8(\frac{1}{4},2,0,0) = 5.74588 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.187 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^8(\frac{1}{4},2,0,1) = 33.3928 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.1875 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^8(\frac{1}{4},1,1,0) = 0.0357514 & \hat{\xi}_s^{10} = [0,0.5] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^8(\frac{1}{4},1,1,1) = 0.229076 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.75 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^8(1,0,2,0) = \hat{H}_5^8(1,0,2,1) = 0 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,2] \\
\hat{H}_5^8(1,2,0,0) = 5.6613 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^8(1,2,0,1) = 32.4184 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^8(1,1,1,0) = 0.0309404 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^8(1,1,1,1) = 0.191828 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [1,2]
\end{array} \tag{6.25}$$

La strategia nel periodo $(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2]$ è data dal calcolo delle $\hat{H}_5^9(v_j,u,d,t_i)$ con $u+d=1$.

$$\begin{array}{ll}
\hat{H}_5^9(-\frac{1}{2},1,0,0) = 6.90663 & \\
\hat{H}_5^9(-\frac{1}{2},1,0,1) = 21.0083 & \\
\hat{H}_5^9(-\frac{1}{2},0,1,0) = 0.0801686 & \\
\hat{H}_5^9(-\frac{1}{2},0,1,1) = 0.315317 & \\
\hat{H}_5^9(0,1,0,0) = 5.29968 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^9(0,1,0,1) = 15.6972 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.5 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^9(0,0,1,0) = 0.017235 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^9(0,0,1,1) = 0.0537338 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2] \\
\hat{H}_5^9(\frac{1}{4},1,0,0) = 5.28347 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\
\hat{H}_5^9(\frac{1}{4},1,0,1) = 15.5676 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.375 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2]
\end{array} \tag{6.26}$$

$$\begin{array}{ll} \hat{H}_5^9(\frac{1}{4},0,1,0) = 0.0171442 & \hat{\xi}_s^{10} = [0,1] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\ \hat{H}_5^9(\frac{1}{4},0,1,1) = 0.0537338 & \hat{\xi}_s^{10} = [-0.5,1] \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2] \\ \hat{H}_5^9(1,1,0,0) = 5.2181 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\ \hat{H}_5^9(1,1,0,1) = 15.2536 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2] \\ \hat{H}_5^9(1,0,1,0) = 0.0146489 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,1] \\ \hat{H}_5^9(1,0,1,1) = 0.0449968 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 \text{ per } s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [1,2] \end{array} \tag{6.27}$$

A questo punto sono note

$$\begin{array}{lll} \hat{H}_5^{10}(0,0,0,0) = 3.06806 & \hat{\xi}_s^{10} = 1 & s \in [0,\hat{\tau}_1] \cap [0,2] \\ \hat{H}_5^{10}(\frac{1}{4},0,0,0) = 3.06806 & \hat{\xi}_s^{10} = 0.75 & s \in [0,\hat{\tau}_1] \cap [0,2] \\ \hat{H}_5^{10}(1,0,0,0) = 3.02472 & \hat{\xi}_s^{10} = 0 & s \in [0,\hat{\tau}_1] \cap [0,2] \end{array} \tag{6.28}$$

La strategia d'investimento in $[0, \hat{\tau}_4]$ è

$$\hat{\xi}_s^{10} = \begin{cases} 1 & s \in [0,\hat{\tau}_1] \cap [0,2],\ V_0 = 0 \\ 0.75 & s \in [0,\hat{\tau}_1] \cap [0,2],\ V_0 = \frac{1}{4} \\ 0 & s \in [0,\hat{\tau}_1] \cap [0,2],\ V_0 = 1 \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,2] \text{ con } u=1, d=0,\ V_{\hat{\tau}_1} = 1 \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2] \cap [0,2] \text{ con } u=0, d=1,\ V_{\hat{\tau}_1} = -\frac{1}{2} \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,2] \text{ con } u=1, d=1,\ V_{\hat{\tau}_2} \in \{-\frac{1}{2}, 1\} \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,2] \text{ con } u=2, d=0,\ V_{\hat{\tau}_2} = 1 \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3] \cap [0,2] \text{ con } u=0, d=2,\ V_{\hat{\tau}_2} = -\frac{1}{2} \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u=2, d=1,\ V_{\hat{\tau}_3} \in \{-\frac{1}{2}, 1\} \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u=1, d=2,\ V_{\hat{\tau}_3} \in \{-\frac{1}{2}, 1\} \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u=3, d=0,\ V_{\hat{\tau}_3} = 1 \\ 0 & s \in (\hat{\tau}_3,\hat{\tau}_4] \cap [0,2] \text{ con } u=0, d=3,\ V_{\hat{\tau}_3} = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{6.29}$$

Notiamo che, come ci si aspetta, i valori delle iterate dell'operatore $\hat{T}_G^k$ sono in generale maggiori dei corrispondenti valori delle iterate dell'operatore T_G^k .

6.4 Conclusioni

Abbiamo scelto $k = 5$ e studiato il comportamento delle successioni delle iterate di entrambi gli operatori proposti per $n = k+1 = 6$ e per un generico $n = 10 > k+1$.
L'analisi dei dati conferma quanto detto nel capitolo 4. I valori delle iterate

dell'operatore T_G^k, definito in (3.54), non variano e così le rispettive strategie contrariamente a quanto accade per $\hat{T}_G^k$, definito in (5.26).
Confrontando le strategie d'investimento relative ai due operatori, per uno stesso n, si nota che le differenze sono poche. Questo significa che, nella maggior parte dei casi, pur variando il valore delle iterate, il punto di minimo, ovvero la strategia in quel periodo, non cambia.

Appendice

Di seguito riportiamo il codice del programma utilizzato per implementare il caalcolo delle iterate degli T_G^k e $\hat{T}_G^k$. Possiamo distinguere tre parti: la prima è di carattere generale e contiene le funzione comuni ad entrambi gli operatori

```
struct dati
{
 double x0,ea,eb,K,l,l1,l2,alfa01,alfa02,alfa0,beta0,c,S;
};

struct intervallo
{
  double inf; bool estremoinf; double sup; bool estremosup ;
};

struct multintervallo
{ struct intervallo A; multintervallo * pun;
};


struct strategia
{
   multintervallo * S; strategia* punta;
};




void insfondo( multintervallo** q,intervallo C)
{
  multintervallo* l;
```

```
  if(*q==0)
    {
      l=new multintervallo;
      l->A=C;
      l->pun=0;
      *q=l;

    }
  else
    insfondo(&(*q)->pun,C);



}

void insfondo1 (strategia** q, multintervallo* C)
{

  strategia* l;

  if(*q==0)
    {
      l=new strategia;
      l->S=C;
      l->punta=0;
      *q=l;

    }
  else
    insfondo1(&(*q)->punta,C);
}

double partepositiva(double a)
{
  double i = a ;
  if ( i < 0 )
    i = 0;
  return i;
}
```

```
double max (double t, double s)
{
  double i;
  if( t >= s)
    i=t;
  else
    i=s;
  return i;
}

double minimo (double t, double s)
{
  double i;
  if( t <= s)
    i=t;
  else
    i=s;
  return i;
}


struct intervallo intersezione1(intervallo A,intervallo B)
{
  struct intervallo C;
  if( A.inf > B.inf)
    {
      C.inf=A.inf;
      C.estremoinf=A.estremoinf;
    }
  else if(  A.inf < B.inf)
   {
     C.inf=B.inf;
     C.estremoinf=B.estremoinf;
   }

  else if(A.inf == B.inf)
    {
      C.inf=A.inf;
      C.estremoinf=A.estremoinf && B.estremoinf;
```

```
    }

  if( A.sup < B.sup)
    {
      C.sup=A.sup;
      C.estremosup=A.estremosup;
    }
  else if(  A.sup >B.sup)
   {
     C.sup=B.sup;
     C.estremosup=B.estremosup;
   }

  else if(A.sup == B.sup)
    {
      C.sup = A.sup;
      C.estremosup= A.estremosup && B.estremosup;


    }


  return (C);
}


double min (double A[], unsigned int n, unsigned int& pos_minimo)
{
  double minimo=A[0];
  for(unsigned int j=1; j<n; j++)
   {
     if ( minimo >A[j] )
     {
       minimo=A[j];
       pos_minimo=j;
     }
   }

  return minimo;
```

```
}


struct intervallo antimmagine (intervallo A, double a, double b)
{
  intervallo B;
  double b1,b2;
  b1= (A.inf -a)/b;
  b2= (A.sup-a)/b;
  if(b >0)
    {
      B.inf=b1;
      B.estremoinf = A.estremoinf;
      B.sup=b2;
      B.estremosup = A.estremosup;
    }
  else if(b<0)
    {
      B.inf=b2;
      B.estremoinf = A.estremosup;
      B.sup=b1;
      B.estremosup = A.estremoinf;

    }
  return (B);
}


struct intervallo intersezione (intervallo A,intervallo B)
{
  struct intervallo C;
  C= intersezione1( A, B);

  return (C);
}


bool nonvuoto (struct intervallo I )
{
  if(I.inf  <  I.sup)
```

```
    return true;
  else if( (I.inf == I.sup )  &&
( (I.estremoinf == true) && (I.estremosup == true) ))
    return true;
  else
    return false;
}


double minZ (int m1,unsigned int k, unsigned int n, unsigned int j,
unsigned  int u,unsigned int d,unsigned int i,int T[],
unsigned int L,double V[],unsigned int M, struct dati* a,
multintervallo **J, strategia ** J2)
{
  if( a->c+V[j]==0 )
    {
      if(n==m1)
{
  intervallo C;
  C.inf=0;
  C.sup=0;
  C.estremoinf=true;
  C.estremosup=true;
  insfondo(J,C);

}

    return (a->alfa01 +u)*H(m1,k, n-1, j, u+1, d, i, T, L, V, M, a, J,J2)+
 (a->alfa02 +d)*H(m1,k, n-1 ,j , u, d+1 , i, T, L, V, M, a,J,J2);

    }


  struct intervallo (*I1)= new struct intervallo [M];
  struct intervallo (*I2)= new struct intervallo [M];

  double q=  a->x0 * pow( a->ea, u) * pow(a->eb , d) * (a->ea - 1);
  double s=  a->x0 * pow( a->ea, u) * pow( a->eb ,d ) * ( a->eb - 1);

  struct intervallo (*C) = new struct intervallo [M];
  for(int indice=0;indice<M-1;indice++)
```

```
    {
      C[indice].inf=V[indice];
      C[indice].sup= V[indice+1];
      C[indice].estremoinf=true;
      C[indice].estremosup = false;
}
  C[M-1].inf =V[M-1];
  C[M-1].sup =V[M-1];
  C[M-1].estremoinf =true;
  C[M-1].estremosup = true;

  for(int i1=0;i1<M;i1++)
    I1[i1]=antimmagine ( C[i1],V[j], q);

  for(int i2=0;i2<M;i2++)
    I2[i2]=antimmagine ( C[i2], V[j], s );



  struct intervallo** I = new struct intervallo *[M];

  for(int indice=0;indice<M;indice++)
    I[indice] =new struct intervallo [M];

  int l,m,j1,b;

  for( m=0; m<M; m++ )
    for( j1=0; j1<M; j1++)
     I[m][j1]= intersezione( I1[m], I2[j1] );

  int ** D=new int* [M];

  for(unsigned int index=0; index<M; index++)
    D[index]=new int [M];
  int conta=0;

  for( l=0; l<M; l++)
    for( b=0; b<M; b++)
      {
if( nonvuoto(I[l][b] )==true)
 {
```

```
   D[l][b]=1;

   conta++;
 }

else
  D[l][b]=0;
      }

  double (*P1)=new double [M];
  double (*S)=new double [M];

  for(unsigned int indice=0; indice<M; indice++)
    P1[indice]= H( m1,k, n-1, indice, u+1, d, i, T, L, V, M, a,J,J2);

  for(unsigned int indice=0; indice<M; indice++)
    S[indice]= H( m1,k, n-1, indice, u, d+1, i, T, L, V, M, a,J,J2);

  struct intervallo (*A) = new struct intervallo [conta];
  double u1=a->alfa01 + u;
  double u2=a->alfa02 +d;
  double (*E)=new double [conta];
  int y=0;
  for( l=0; l<M; l++)
    for( b=0; b<M; b++)
      {
if(D[l][b]==1)
  {

    E[y]=u1*P1[l]+u2*S[b];
    if(n==m1)
      A[y]=I[l][b];
    y++;


  }
      }

  unsigned int pos_minimo=0;
  double w = min( E, conta, pos_minimo);
```

```
  if(n==m1)
    {


      for(int i=0; i<conta; i++)
{
  if(E[i]==w)
    {
    insfondo(J,A[i]);}
}

    }


  for(int index=0; index<M; index++)
    {
      delete[] I[index];
    }

  delete[] I;


  for(int index=0; index<M; index++)
    {
      delete[] D[index];
    }

  delete[] D;
  delete[] S;
  delete[] P1;
  delete[] C;
  delete[] I1;
  delete[] E;
  delete[] I2;
  delete[] A;

  return w;

}
```

La seconda e la terza parte contengono le funzioni caratterizzanti T_G^k e $\hat{T}_G^k$ rispettivamente

```
double J1 (unsigned int k,struct dati* a,double v,unsigned int u,
unsigned  int d, double t, double t0)
{

  if (u+d > k-1)
    return 0;


  else  if(t>t0)

    return  pow( (t+a->beta0)/(t0+a->beta0) , u + d + a->alfa0)*
            *J1( k, a, v, u, d, t0, t0);

  else
    {
      double q = a->x0 * pow(a->ea,u) *  pow(a->eb,d) ;
      double s = partepositiva(q - a->K) - v ;


      return pow( (t+a->beta0)/(a->beta0 + a->S) , u+ d+ a->alfa0)*
* pow( max( s , 0) , 2 );

    }

}

double H (int m1, unsigned int k, unsigned int n, unsigned int j,
unsigned int u,unsigned int d,unsigned int i, int T[],
unsigned  int L,double V[],unsigned  int M, struct dati *a,
multintervallo **J, strategia ** J2)
{
  if (n==0)
    return 0;

  else  if ((n==1) || (u+d >= k-1) )
    return  J1( k, a, V[j], u, d, T[i], T[0]);
```

```
  else if (n==2)
    {
      double r;
      double pot= (a->beta0+ T[i]);
      r= ((a->S-T[i])/pot)*minZ(m1, k, n, j, u, d, i,T, L, V, M, a,J,J2);
      if(n==m1)
insfondo1(J2,*J);

      return  r+J1( k, a, V[j], u, d, T[i], T[0]);

    }

  else
    {
      unsigned int h;
      double o=0;
      double g=0;
      double m=0;
      double diff=0;
      int f=0;
      int conta=0;
      for( h=0; h<L-1; h++)
{
  if ( T[i] <= T[h] )
    {
      m= pow((a->beta0 + T[i]),(a->alfa0 + u + d))/(a->alfa0+u+d);
      diff= 1/pow((a->beta0 + T[h]),(a->alfa0+u+d)) -
                     - 1/pow((a->beta0+T[h+1]),(a->alfa0+u+d));

      o= o+m*diff*minZ(m1, k, n, j, u, d, h,T, L, V, M, a,J,J2);
      if(n==m1)
{

  insfondo1(J2,*J);

  multintervallo *p1=new multintervallo;
  p1=0;
  J=&p1;
  conta++;
}
```

```
    }
}


      return J1( k, a, V[j], u, d, T[i], T[0]) + o;
    }
}
```

```
double J1 ( unsigned int k, struct dati* a, double v, unsigned int u,
unsigned  int d, double t, double t0)
{
  if ( (u==0) && (d==k) )
   return 0;

  else if (u+d > k-1)
    return  J1( k, a, v, u-1, d, t, t0);

  else if(t>t0)
    return pow( (t+a->beta0)/(t0+a->beta0) , u + d + a->alfa0) *
              * J1( k, a, v, u, d, t0, t0);

  else
    {
      double q = a->x0 * pow(a->ea,u) *  pow(a->eb,d) ;
      double e=q-a->K;
      double s = partepositiva(e) - v ;


      return pow( (t+a->beta0)/(a->beta0 + a->S),u+ d+ a->alfa0)*
             *pow( max( s , 0) , 2 );
    }


}
```

```
double H (int m1,unsigned int k, unsigned int n, unsigned int j,
unsigned int u,unsigned int d,unsigned int i, int T[],
unsigned  int L,double V[],unsigned  int M,struct dati *a,
multintervallo** J,strategia** J2)
{
  if ((n==0) || ( (u==0) && (d==k)))
    return 0;


  else  if (  u+d > k-1)
    return  H(m1, k, n, j, u-1, d, i,  T, L, V, M, a,J,J2);


  else if (n==1)
    return  J1( k, a, V[j], u, d, T[i], T[0]);




  else if (n==2)
    {
      double r;
      double pot= a->beta0+ T[i];
      r= ((a->S-T[i])/pot)*minZ( m1,k, n, j, u, d, i,T, L, V, M, a,J,J2);

      if(n==m1)
insfondo1(J2,*J);
      return  r+J1( k, a, V[j], u, d, T[i], T[0]);

    }
  else
    {
      unsigned int h;
      double o=0;
      double g=0;
      double m=0;
      double diff=0;
      int f=0;
      int conta=0;
      for( h=0; h<L-1; h++)
{
```

```
  if ( T[i] <= T[h] )
    {
      m= pow((a->beta0 + T[i]),(a->alfa0 + u + d))/(a->alfa0+u+d);
      diff= 1/pow((a->beta0 + T[h]),(a->alfa0+u+d))-
                   - 1/pow((a->beta0+T[h+1]),(a->alfa0+u+d));
      o= o + m*diff * minZ(m1,k, n, j, u, d, h,T, L, V, M, a, J,J2);
      if(n==m1)
{

  insfondo1(J2,*J);

  multintervallo *p1=new multintervallo;
  p1=0;
  J=&p1;
  conta++;
}
    }
}

  return J1( k, a, V[j], u, d, T[i], T[0]) + o;

    }

}
```

Bibliografia

[1] G. Andreatta e W. Runggaldier, *Statistica Matematica*, Liguori Editore, (1988).

[2] P. Baldi *Equazioni Differenziali Stocastiche*, Pitagora Editrice (2000).

[3] F. Black-M. S. Scholes *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81 (1973), pp 637-654.

[4] T. Bjørk *Arbitrage Theory In Continuous Time*, Oxford University Press (1998).

[5] G. De Marco *Analisi Due*, Decibel Editore (1992), pp 153-155.

[6] N. El Karoui e M.C. Quenez,*Dynamic Programming and Pricing of Contingent Claims in an Incomplete Market*, SIAM J. Control Optimiz., (1995), pp.27-66.

[7] H. Follmer e P. Leukert, *Efficiente Hedging: cost versus shortfall risk*, Finance and Stochastic, 4 (2000), pp 117-146.

[8] D. Kramkov, *Optional Decomposition of Supermartingales and Hedging Contingent Claims in Incomplete Security Markets*, Probab. Theory Relat. Fields, (1996), pp.459-479.

[9] M. Kirch e W. Runggaldier, *Efficient Hedging When Asset Prices Follow A Geometric Poisson Process With Unknown Intensities*, uscirà su SIAM J. Control Optimization.

[10] W. J. Runggaldier *Jump Diffusion Models* in: Handbook of Heavy Tailed Distributions in France, Ed S.T.Rachev (2003) Elsevier Science B.V. ,pp 169-209.