

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTA' DI SCIENZE MM.FF.NN.

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA E APPLICATA

TESI DI LAUREA

STRUTTURA DEI CICLI SENZA CORDE
DI PARITA' FISSATA

RELATORE: Ch.mo Prof. Michelangelo Conforti
CONTRORELATORE: Ch.mo Prof. Livio Colussi

LAURANDA: Irene Pivotto

ANNO ACCADEMICO 2003/2004

Capitolo 1

Introduzione

Il problema della determinazione del numero cromatico di un grafo è di fondamentale importanza in matematica discreta. Spesso compare anche in campi che sembrano non avere nessuna relazione con esso; ad esempio, il teorema di Erdős, Stone, Simonovits mostra che per un grafo fissato G il comportamento del massimo numero di archi di un grafo con n vertici che non contenga G come sottografo indotto (che indichiamo con $f(n, G)$) dipende dal numero cromatico di G :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n, G)}{n^2} = \frac{\chi(G) - 2}{2\chi(G) - 2}$$

Lo studio della colorazione di grafi è inoltre interessante per le sue applicazioni. Esso riguarda il problema fondamentale di partizionare un insieme di oggetti in classi, secondo regole definite.

Sebbene molti risultati rilevanti siano stati conseguiti nello studio del numero cromatico di un grafo (e alcuni li citeremo in seguito), ci sono ancora molti problemi interessanti e di facile formulazione che rimangono irrisolti.

Di particolare interesse è la relazione tra il numero cromatico di un grafo G e la massima taglia di una clique ottenibile come sottografo indotto o come minore di G .

Prima di parlarne, forniamo alcune definizioni e notazioni che saranno utili in seguito.

1.1 Notazioni e definizioni

Un *grafo* G è una coppia ordinata $(V(G), E(G))$ in cui $V(G)$ è l'insieme dei *nodi* (o *vertici*) di G , $E(G)$ è l'insieme degli *archi* di G , e sia $V(G)$ che $E(G)$ sono finiti. Ogni arco $e \in E(G)$ connette due vertici $u, v \in V(G)$ detti

estremi dell'arco. Dato $e \in E(G)$, esso verrà indicato anche con uv , dove u e v sono i suoi estremi; se $e = uv$, si dice che e *incide* in u e in v .

Un arco $e \in E(G)$ è un *cappio* se i suoi estremi coincidono. Due archi $e, e' \in E(G)$ sono *paralleli* se hanno gli stessi estremi; in tal caso e ed e' sono *archi multipli*. In questo testo verranno sempre trattati grafi *semplici*, cioè non contenenti cappi o archi paralleli. Lo *scheletro* $sk(G)$ di un grafo G è il grafo semplice che si ottiene da G togliendo i cappi e sostituendo gli archi multipli con singoli archi.

Dati $u, v \in V(G)$, u e v sono *adiacenti* se esiste $e \in E(G)$ avente u e v come estremità. Se u e v sono adiacenti, diremo che u è un *vicino* di v ; altrimenti u è un *non-vicino* di v . Dato $u \in V(G)$, indichiamo con $N(u)$ l'insieme dei vicini di u ; il *grado* di u è il numero dei suoi vicini e si indica con $\delta(u)$.

Due archi sono *adiacenti* se hanno un estremo in comune.

Dato un grafo G , il *complementare* di G è il grafo $\overline{G}$ formato dagli stessi nodi di G , ma in cui due nodi sono adiacenti se e solo se non lo sono in G .

Due grafi G e G' sono *isomorfi* se esiste una biiezione φ tra $V(G)$ e $V(G')$ tale che $uv \in E(G)$ se e solo se $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G')$.

Un *sottografo* di G è un grafo H con $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. H è un *sottografo indotto* di G se H è un sottografo di G e $E(H) = \{uv \in E(G) | u, v \in V(H)\}$ e diremo che H è *indotto* da $V(H)$. Diremo che il grafo G *contiene* il grafo H se H è un sottografo indotto di G . Sia $X \subseteq V(G)$; allora $G[X]$ indica il sottografo di G indotto da X .

Dato un sottografo H di G e un nodo $u \in V(H)$, si indica con $N_H(u)$ l'insieme dei vicini di u in H e con $\delta_H(u)$ il grado di u in H .

Un nodo $v \in V(G)$ è *universale* al sottografo H di G se ogni nodo $u \in V(H)$ è adiacente a v ; è *co-universale* ad H se è universale ad esso in $\overline{G}$, cioè se nessun nodo di H è adiacente a v .

Dato un arco $e \in E(G)$ di estremità distinte u e v , l'operazione di *contrazione* dell'arco e consiste nell'identificazione dei vertici u e v in un singolo vertice, i cui archi incidenti sono gli archi che erano incidenti in u o in v ; l'arco e diventa un cappio. Un grafo G' è un *minore* di G se G' può essere ottenuto da G eseguendo iterativamente delle operazioni di contrazione, rimozione di archi e rimozione di vertici isolati.

Dato un arco $e \in E(G)$, denotiamo con $G \setminus e$ il grafo ottenuto cancellando e , cioè tale che $V(G \setminus e) = V(G)$ e $E(G \setminus e) = E(G) \setminus e$.

Un *percorso* in un grafo G è una sequenza $v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n$ in cui $v_i \in V(G)$, $e_i \in E(G)$ e ogni arco e_i ha come estremi v_{i-1} e v_i . Un *cammino* è un percorso i cui vertici sono tutti distinti. Un *ciclo* è un percorso i cui vertici sono tutti distinti eccetto $v_0 = v_n$. Denoteremo un cammino P con $v_1, v_2, \dots, v_n$ se P è formato dai nodi v_i e dagli archi v_i, v_{i+1} . Analo-

gamente, indicheremo un ciclo C con $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$. Un *co-cammino* è il complementare di un cammino.

Se Q è un cammino o un ciclo, la *lunghezza* di Q , indicata con $|Q|$, è il numero degli archi di Q . Q è *pari* o *dispari* a seconda che la sua lunghezza sia pari o dispari. Se Q è un co-cammino, la lunghezza di Q è pari alla lunghezza di $\overline{Q}$.

Se G è un grafo e Q è un sottografo di G che è un cammino o un ciclo, diciamo che Q è *senza corde* se Q è indotto in G . Indichiamo con C_k il ciclo senza corde di lunghezza k . Se Q non è senza corde, gli archi di G in $E(G) \setminus E(Q)$ con entrambi gli estremi in $V(Q)$ sono le *corde* di Q .

Due vertici u e v sono *connessi* se esiste un cammino avente u come primo vertice e v come ultimo vertice. Un grafo G è *connesso* se $\forall u, v \in V(G)$, u e v sono connessi. Le *componenti connesse* di G sono i sottoinsiemi massimali di G che inducono un grafo connesso. Un grafo G è *co-connesso* se $\overline{G}$ è connesso. Un insieme $X \subseteq V(G)$ è *connesso* se $G[X]$ è connesso o se X è vuoto; è *co-connesso* se $\overline{G}[X]$ è connesso.

Un *buco* è un ciclo senza corde di lunghezza maggiore di tre, un *antibuco* è il suo complementare. Un h -buco è un buco formato da h nodi; analogamente si definisce un h -antibuco.

Dato un grafo G , $X \subseteq V(G)$ è un *indipendente* (o un *insieme stabile*) se per ogni coppia di nodi $u, v \in X$, u e v non sono adiacenti in G . Un grafo H è una *clique* se per ogni coppia di nodi $u, v \in V(H)$, u e v sono adiacenti. Con K_n si indica la clique formata da n nodi. Una clique K contenuta in un grafo G si dice *massima* se G non contiene nessuna clique di taglia maggiore di $|V(K)|$.

Indichiamo con $\alpha(G)$ la cardinalità massima di un indipendente in G e con $\omega(G)$ la massima taglia di una clique di G . Con $\Omega(G)$ indichiamo la massima taglia di una clique ottenibile come minore di G .

Una *colorazione* di G è un assegnamento di colori ai nodi di G tale che nodi adiacenti abbiano colori distinti. G è *k-colorabile* se ammette una colorazione con al massimo k colori. Indichiamo con $\chi(G)$ il *numero cromatico* di G , cioè il minimo h per cui G è h -colorabile.

1.2 Numero cromatico di un grafo

Un risultato fondamentale ottenuto nell'ambito della determinazione del numero cromatico di un grafo G , è la dimostrazione che esso non possa crescere a piacere al crescere del numero dei nodi di G , ma sia legato a $\Omega(G)$.

Mader dimostrò infatti il seguente teorema

Teorema 1.1 (Mader) *Vale $|E(G)| < 3^{\Omega(G)+1}|V(G)|$ per ogni grafo semplice G .*

Dim. Supponiamo per assurdo che esista un grafo semplice G tale che $|E(G)| \geq 3^{\Omega(G)+1}|V(G)|$, e che G sia minimo con questa proprietà. Cioè per ogni minore G' di G ed ogni intero positivo q , se $|E(G')| \geq 3^q|V(G')|$, allora $\Omega(G') \geq q$ e quindi G' contiene K_q come minore.

Poiché $|E(G)| \geq 3^{\Omega(G)+1}|V(G)|$, allora $\sum_{v \in V} \delta(v) \geq 2 \times 3^{\Omega(G)+1}|V(G)|$ e quindi G contiene un vertice u tale che $\delta_G(u) \geq 2 \times 3^{\Omega(G)+1}$. Sia G_u il sottografo di G indotto dall'insieme $N(u)$ di vertici adiacenti a u . Poiché G è semplice, $|V(G_u)| \geq 2 \times 3^{\Omega(G)+1}$.

Per costruzione, $\Omega(G_u) < \Omega(G)$, e per la minimalità di G , $|E(G_u)| < 3^{\Omega(G)}|V(G_u)|$. Quindi G_u contiene un vertice w tale che $\delta_{G_u}(w) < 2 \times 3^{\Omega(G)}$.

Sia G'_{uw} il grafo ottenuto da G contraendo i vertici u, v in un vertice z . Il grafo G'_{uw} ha un solo cappio con estremità coincidenti uv e coppie di archi paralleli che congiungono z ai vertici adiacenti a w in G_u . Sia G_{uw} lo scheletro di G'_{uw} .

Si ha quindi:

$$|E(G)| - |E(G_{uw})| = \delta_{G_u}(w) + 1 < 2 \times 3^{\Omega(G)} + 1$$

Poiché $\Omega(G_{uw}) \leq \Omega(G)$, dalla minimalità di G si ha:

$$|E(G_{uw})| < 3^{\Omega(G)+1}|V(G_{uw})| = 3^{\Omega(G)+1}|V(G)| - 3^{\Omega(G)+1} \leq |E(G)| - 3^{\Omega(G)+1}$$

Da qui si deriva $3^{\Omega(G)+1} < 2 \times 3^{\Omega(G)}$, assurdo. $\square$

Questo comporta subito una limitazione al numero cromatico di un grafo G in funzione di $\Omega(G)$ grazie all'algoritmo di colorazione sequenziale che ora definiamo.

Def 1.1 *In un grafo G con $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, una colorazione sequenziale relativa all'ordinamento dei vertici $v_1, \dots, v_n$ è ottenuta colorando i vertici nell'ordine $v_1, \dots, v_n$, assegnando a v_i il colore di indice più piccolo che non è utilizzato da un vertice di indice minore adiacente a v_i .*

Lemma 1.2 *Sia G un grafo con $|V(G)| = n$. Per $1 \leq i \leq n$, sia G_i il sottografo di G contenente i vertici $v_1, \dots, v_i$ e sia δ_i il grado del vertice v_i nel grafo G_i . Allora vale $\chi(G) \leq \max \{\delta_i\} + 1$.*

Dim. Ogni vertice v_i ha δ_i vertici adiacenti che lo precedono nell'ordinamento. Quindi, nella colorazione sequenziale, al vertice v_i viene assegnato un colore di indice non superiore a $\delta_i + 1$. $\square$

Corollario 1.3 *Per ogni grafo G senza cappi, G è $f(\Omega(G))$ -colorabile.*

Dim. Poiché $\chi(G) = \chi(sk(G))$, è sufficiente dimostrare l'asserto per grafi semplici. Dal teorema di Mader si deduce che G contiene un vertice v tale che $\delta(v) \leq 2 \times 3^{\Omega(G)+1} - 1$ e questo vale per tutti i sottografi di G . Dall'algoritmo di colorazione sequenziale si ha $\chi(G) \leq 2 \times 3^{\Omega(G)+1}$.

Infatti, siano $G_n = G$ e $G_i = G_{i+1} \setminus v_{i+1}$, dove v_i è un nodo tale che $\delta_{G_i}(v_i) \leq 2 \times 3^{\Omega(G)+1} - 1$ per $i = n, \dots, 1$. Allora per il lemma 1.2 la colorazione sequenziale relativa all'ordinamento $v_1, \dots, v_n$ utilizza al massimo $2 \times 3^{\Omega(G)+1}$ colori. Quindi G è $f(\Omega(G))$ -colorabile. $\square$

Hadwiger suppose che il limite superiore al numero cromatico imposto da $\Omega(G)$ fosse molto più ristretto di quello trovato da Mader. Nel 1943 egli formulò la seguente

Congettura 1.4 (Hadwiger) *Per ogni grafo semplice G , $\chi(G) \leq \Omega(G)$.*

La congettura di Hadwiger è ovvia per $\Omega(G) = 1$; se $\Omega(G) = 2$, il grafo non contiene cicli di lunghezza ≥ 3 e quindi è bipartito (ricordiamo che un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli dispari).

Il caso $\Omega(G) = 3$ fu provato da Dirac nel 1952. Egli in realtà dimostrò un asserto più forte, e cioè che ogni grafo di grado minimo ≥ 3 contiene K_4 come minore. Se $\Omega(G) = 3$, il grafo G non contiene K_4 come minore; di conseguenza, il suo grado minimo, $\delta_{\min}(G)$, è ≤ 2 e questo vale per ogni sottografo di G . Siano $G_n = G$ e $G_i = G_{i+1} \setminus v_{i+1}$ dove v_i è un nodo di grado minimo in G_i per $i = n, \dots, 1$. Allora, per il lemma 1.2, la colorazione sequenziale relativa all'ordinamento $v_1, \dots, v_n$ utilizza al massimo tre colori. Quindi $\chi(G) \leq 3$.

Il caso $\Omega(G) = 4$ dà il

Teorema 1.5 (Wagner) *Sia G un grafo con $\Omega(G) = 4$. Allora $\chi(G) \leq 4$.*

Un noto teorema di Kuratowski asserisce che un grafo G è planare se e solo se non contiene K_5 e $K_{3,3}$ come minori (con $K_{m,n}$ si indica il grafo semplice bipartito con bipartizioni V_1, V_2 , in cui $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ e ogni vertice di V_1 è adiacente ad ogni vertice di V_2).

Inoltre il celebre Teorema dei Quattro Colori, afferma che ogni grafo planare è 4-colorabile. K_5 ovviamente non è 4-colorabile, mentre $K_{3,3}$ lo è, in quanto bipartito. Il teorema di Wagner asserisce quindi che K_5 è l'unica ostruzione alla 4-colorabilità di un grafo.

La congettura di Hadwiger è stata recentemente dimostrata per grafi con $\Omega(G) = 5$ da Robertson, Seymour e Thomas utilizzando il Teorema dei Quattro Colori. Resta aperta per $\Omega(G) \geq 6$.

Naturalmente, per ogni grafo G vale $\chi(G) \geq \omega(G)$. Invece, non esiste alcuna funzione f tale che $\chi(G) \leq f(\omega(G))$. Infatti, esistono vari modi di costruire grafi senza triangoli (quindi con $\omega(G) \leq 2$) e $\chi(G)$ arbitrariamente grande. Ne riportiamo uno dovuto a Mycielski.

Def 1.2 *Dato un grafo semplice G , la costruzione di Mycielski produce un grafo semplice G' contenente G . Per costruire G' , a partire da G (avente insieme dei nodi $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$) si aggiungono nodi $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ e un ulteriore nodo w . Si aggiungono archi per rendere u_i adiacente a tutti i nodi di $N_G(v_i)$ e infine $N(w) = U$.*

Questa procedura porta, ad esempio, alla costruzione di C_5 a partire da K_2 .

Teorema 1.6 (Mycielski) *Da un grafo G , k -cromatico senza triangoli, la costruzione di Mycielski produce un grafo G' , $(k+1)$ -cromatico senza triangoli.*

Dim. Sia $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, e sia G' il grafo prodotto dalla costruzione di Mycielski a partire da G . Siano $u_1, \dots, u_n, w$ e U come nella definizione.

Dimostriamo innanzitutto che G' è senza triangoli. Se G' contenesse un triangolo, esso dovrebbe necessariamente contenere un nodo di U . Per costruzione, U è un insieme indipendente in G' . Quindi gli altri vertici di un qualsiasi triangolo contenente u_i appartengono a $V(G)$ e sono vicini di v_i . Questo completerebbe un triangolo in G , che non può esistere.

Sia f una k -colorazione di G . Essa si estende ad una $(k+1)$ -colorazione di G' ponendo $f(u_i) = f(v_i)$ e $f(w) = k+1$; quindi $\chi(G') \leq \chi(G)+1$. Proviamo l'uguaglianza mostrando che $\chi(G) < \chi(G')$. Per provarlo, consideriamo ogni possibile colorazione di G' e da questa otteniamo una colorazione di G usando meno colori.

Sia g una k -colorazione di G' . Cambiando i nomi dei colori, possiamo assumere che $g(w) = k$. Questo restringe g a $\{1, \dots, k-1\}$ su U . Sia A l'insieme dei vertici di G su cui g usa il colore k .

Per ogni $v_i \in A$, cambiamo il colore di v_i in $g(u_i)$. Poiché tutti i nodi di A hanno colore k , A è un insieme stabile. Quindi basta controllare gli archi del tipo v_i, v' , con $v_i \in A$ e $v' \in V(G) \setminus A$. Se v' è adiacente a v_i , allora per costruzione v' è adiacente anche a u_i ; di conseguenza $g(v') \neq g(u_i)$. $\square$

Esistono anche altre costruzioni di questo tipo; esse portano alla conclusione che, dato un grafo G , conoscere $\omega(G)$ non dà informazioni sul suo numero cromatico.

Nemmeno sapere che in un grafo $\omega(G) = \chi(G)$ dà informazioni strutturali sul grafo stesso, poiché dato un grafo G avente $\omega(G) < \chi(G)$, G si può sempre completare ad un grafo G' tale che $\omega(G') = \chi(G')$ (basta, ad esempio, aggiungere $\chi(G) - \omega(G)$ nodi, tutti adiacenti fra loro e adiacenti a tutti i nodi di una clique massima di G).

Fu Berge ad intuire che se in un grafo G vale $\omega(H) = \chi(H)$ per ogni sottografo indotto H di G , allora si ha una caratterizzazione di G in termini di sottografi che esso non può contenere.

Def 1.3 *Un grafo G è perfetto se per ogni sottografo indotto H di G vale $\chi(H) = \omega(H)$; è imperfetto altrimenti. Un grafo G è minimalmente imperfetto se G non è perfetto ma ogni sottografo indotto proprio di G è perfetto.*

Quindi se G non è perfetto, esso contiene un grafo minimalmente imperfetto.

Berge studiò i grafi (detti appunto *grafi di Berge*) non contenenti né buchi né antibuchi dispari. Equivalentemente, poiché un antibuco è il complementare di un buco, un grafo G è di Berge se né G né $\overline{G}$ contengono un buco dispari. Egli formulò due importanti congetture

Congettura 1.7 (Congettura debole dei grafi perfetti) *Un grafo G è perfetto se e solo se $\overline{G}$ è perfetto.*

Congettura 1.8 (Congettura forte dei grafi perfetti) *Un grafo è perfetto se e solo se non contiene buchi dispari e antibuchi dispari.*

La congettura forte dei grafi perfetti equivale ad asserire che i soli grafi minimalmente imperfetti sono i buchi dispari e gli antibuchi dispari.

La prima delle due congetture fu provata nel 1972 da Lovász. Egli in realtà dimostrò un teorema più forte della Congettura Debole dei Grafi Perfetti, il cosiddetto Teorema dei Grafi Perfetti.

Teorema 1.9 (Teorema dei grafi perfetti) *Un grafo G è perfetto se e solo se $\omega(H)\alpha(H) \geq |V(H)|$ per ogni sottografo indotto H di G .*

Riportiamo qui una dimostrazione della Congettura Debole dei Grafi Perfetti data da Gasparyan.

Per tale dimostrazione servono i due lemmi:

Lemma 1.10 *Un grafo G è perfetto se e solo se ogni sottografo indotto H di G ha un insieme stabile che interseca ogni clique massima di H .*

Dim. Se G è un grafo perfetto, si possono colorare i suoi vertici con $\omega(G)$ colori; quindi l'insieme dei nodi colorati con un dato colore è un insieme stabile che interseca ogni clique massima di G . Lo stesso ragionamento vale per ogni sottografo indotto H di G , perché se G è perfetto anche H lo è.

Ora supponiamo che ogni sottografo indotto H di G abbia un insieme stabile che interseca ogni clique massima di G . Supponiamo per assurdo che G non sia perfetto. Esso allora contiene un grafo minimalmente imperfetto H . Sia S un insieme stabile di H che interseca tutte le sue cliques massime. Per la minimalità di H , $H \setminus S$ è perfetto, quindi $\chi(H \setminus S) = \omega(H \setminus S) = \omega(H) - 1$. Ma allora $\chi(H) = \omega(H \setminus S) + 1 = \omega(H)$, assurdo. $\square$

Lemma 1.11 (di replicazione) *Sia G un grafo perfetto e sia $v \in V(G)$. Definiamo un grafo G' aggiungendo a G un nuovo vertice v' e congiungendolo a v e a tutti i vicini di v . Allora G' è perfetto.*

Dim. (Lovász) Per il lemma precedente è sufficiente dimostrare che G' ha un insieme stabile che interseca ogni clique massima di G' . Dato che G è perfetto, esso ammette una colorazione con $\omega(G)$ colori; sia S l'insieme dei nodi colorati dello stesso colore di v . Allora S interseca ogni clique massima di G' . $\square$

Nella dimostrazione della Congettura Debole dei Grafi Perfetti daremo un'altra caratterizzazione dei grafi perfetti in termini di politopi associati ai grafi.

Def 1.4 *Sia G un grafo. Il politopo degli insiemi stabili di G , indicato con $STAB(G)$, è l'involuppo convesso in $\mathbb{R}^{V(G)}$ di tutti i vettori di incidenza degli insiemi stabili di G .*

Il politopo frazionario degli insiemi stabili $QSTAB(G) \subseteq \mathbb{R}^{V(G)}$ è definito dalle condizioni:

- (1) $x_v \geq 0$ per ogni $v \in V(G)$;
- (2) $\sum_{v \in V(K)} x_v \leq 1$ per ogni clique K in G .

Dato che il vettore di incidenza di ogni insieme stabile soddisfa (1) e (2), si ha $STAB(G) \subseteq QSTAB(G)$. Il seguente teorema, che incorpora anche risultati di Chvátal e Fulkerson, implica la Congettura Debole dei Grafi Perfetti.

Teorema 1.12 *Per ogni grafo G le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) G è perfetto;
- (ii) $STAB(G) = QSTAB(G)$;
- (iii) $\overline{G}$ è perfetto;
- (iv) $STAB(\overline{G}) = QSTAB(\overline{G})$.

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sia x un vettore soddisfacente le condizioni (1) e (2); possiamo assumere che x sia razionale. Sia N un intero tale che $y = Nx$ sia un vettore intero. Per (1), $y_v \geq 0$ per ogni $v \in V(G)$. Siano Y_v (al variare di v in $V(G)$) insiemi disgiunti con $|Y_v| = y_v$, e sia H il grafo con insieme dei vertici $\bigcup_{v \in V(G)} Y_v$, in cui un vertice di Y_v è adiacente a un vertice di Y_u se e solo se o $v = u$ oppure v è adiacente ad u in G . Per ripetute applicazioni del Lemma di Replicazione, il grafo H è perfetto. Per (2) abbiamo che $\omega(H) \leq N$, e quindi $V(H)$ può essere ricoperto da N insiemi stabili disgiunti di H . Siano $q_1, q_2, \dots, q_N$ i vettori di incidenza dei corrispondenti insiemi stabili di G . Allora $x = \frac{1}{N}(q_1 + q_2 + \dots + q_N)$, come desiderato.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Dato che la condizione (ii) è ereditata dai sottografi indotti di G , per il lemma 1.10 è sufficiente provare che G contiene una clique che interseca ogni insieme stabile massimo di G . Proviamo questa asserzione per induzione su $|V(G)|$. Possiamo assumere che ogni vertice appartenga ad un insieme stabile massimo di G , perché altrimenti potremmo cancellare questo vertice e procedere per induzione. Sia X il sottoinsieme di $STAB(G)$ formato da tutti i vettori x con $\sum_{v \in V(G)} x_v = \alpha(G)$. Allora X è una faccia di $QSTAB(G)$, e quindi una delle disuguaglianze (1),(2) è soddisfatta ad uguaglianza per ogni vettore di X . Dato che ogni vertice di G appartiene ad un insieme stabile massimo di G , segue che nessuna delle disuguaglianze (1) è soddisfatta ad uguaglianza per tutti gli $x \in X$, e quindi lo è una delle

disuguaglianze (2). Quindi esiste una clique di G che interseca ogni insieme stabile massimo di G , come desiderato.

Le rimanenti due implicazioni seguono applicando gli argomenti precedenti al complementare di G . $\square$

La Congettura Forte dei Grafi Perfetti è stata recentemente dimostrata da Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas, utilizzando una strategia proposta da Conforti, Cornuéjols e Vušković. Essi congetturarono che ogni grafo di Berge contenesse un 2-join o una skew partition oppure appartenesse ad una delle quattro classi di grafi perfetti che illustreremo in seguito. Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas hanno apportato una leggera variazione a questa idea. Diamo ora un accenno ai risultati contenuti nella loro dimostrazione.

Def 1.5 *Un 2-join in G è una partizione (X_1, X_2) di $V(G)$ tale che esistano insiemi disgiunti e non vuoti $A_i, B_i \subseteq X_i$ ($i = 1, 2$) che soddisfano:*

- A_1 è universale ad A_2 , B_1 è universale a B_2 e non esistono altri archi tra X_1 e X_2 ;
- per $i = 1, 2$, ogni componente di $G[X_i]$ incontra sia A_i che B_i ;
- per $i = 1, 2$, se $|A_i| = |B_i| = 1$ e $G[X_i]$ è un cammino che collega i membri di A_i e B_i , allora esso ha lunghezza dispari maggiore o uguale a tre.

Cornuéjols e Cunningham dimostrarono che

Nessun grafo minimalmente imperfetto contiene un 2-join.

Inoltre, un 2-join permette una decomposizione del grafo in due grafi più piccoli tali che il grafo originale è di Berge se e solo se entrambi i nuovi grafi sono di Berge; allo stesso modo si preserva la perfezione. Per il Teorema dei Grafi Perfetti, segue che anche il complementare di un controesempio minimale alla Congettura Forte dei Grafi Perfetti non contiene un 2-join.

Def 1.6 *Una skew partition in G è una partizione (A, B) di $V(G)$ tale che A non è connesso e B non è co-connesso.*

Dalla Congettura Forte dei Grafi Perfetti segue facilmente che un grafo minimalmente imperfetto non contiene una skew partition, ma Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas non riuscirono a dimostrare questo risultato a priori. Comunque, per provare la Congettura Forte dei Grafi Perfetti ciò non era necessario; essi infatti utilizzarono una classe ristretta di skew partitions, quella delle skew partitions pari.

Def 1.7 Una skew partition (A, B) è pari se ogni cammino indotto di lunghezza almeno due con estremità in B e interno in A è pari e ogni cocammino indotto di lunghezza almeno due con estremità in A e interno in B è pari.

Def 1.8 Un grafo imperfetto minimo è un grafo di Berge G tale che G non è perfetto, ma ogni grafo di Berge H con $|V(H)| < |V(G)|$ è perfetto.

Ciò che Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas dimostrarono è che
Nessun grafo imperfetto minimo ha una skew partition pari.

Accenniamo ora a quattro importanti classi di grafi perfetti.

Def 1.9 Un grafo B è bipartito se l'insieme dei suoi nodi può essere partizionato in due insiemi disgiunti X, Y in modo tale che ogni arco di B abbia un'estremità in X e una in Y . In altre parole, B è bipartito se e solo se $\chi(B) \leq 2$.

Segue subito che ogni grafo bipartito è perfetto. Per la Congettura Debole dei Grafi Perfetti, anche il complementare di un grafo bipartito è perfetto.

Altre due classi di grafi perfetti possono essere ottenute dai grafi bipartiti per mezzo di grafi linea.

Def 1.10 Sia G un grafo; il grafo linea di G è il grafo $L(G)$ il cui insieme dei vertici è $E(G)$ e in cui $e, f \in E(G)$ sono adiacenti se hanno un'estremità in comune in G .

Se B è un grafo bipartito, allora $G = L(B)$ è perfetto. Per vederlo, è sufficiente verificare che $\chi(G) = \omega(G)$, perché ogni sottografo indotto di un grafo linea di un grafo bipartito è ancora il grafo linea di un grafo bipartito. Evidentemente $\omega(G)$ è pari al grado massimo di B (che indichiamo con $\Delta(B)$) e $\chi(G)$ è pari al numero arcocromatico di B , cioè al minimo numero di colori necessari per colorare gli archi di B in modo che archi adiacenti abbiano colori distinti (indichiamo il numero arcocromatico di B con $\chi'(B)$). Un ben noto teorema di König implica che $\chi'(B) = \Delta(B)$, quindi $\omega(G) = \chi(G)$.

Ne consegue che se B è un grafo bipartito allora anche $G = \overline{L(B)}$ (cioè il complementare di $L(B)$) è perfetto.

Nella loro dimostrazione, Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas introdussero anche un'altra classe di grafi perfetti.

Def 1.11 Sia H un grafo bipartito, con bipartizione (A, B) . Per ogni vertice $v \in V(H)$ prendiamo due nuovi vertici s_v, t_v e costruiamo un grafo G con $V(G) = \{s_v, t_v : v \in V(H)\}$.

Gli archi di G sono come segue:

- per $v \in V(H)$, s_v è adiacente a t_v se $v \in A$, e s_v è non adiacente a t_v se $v \in B$;
- per $u, v \in A$ distinti, non ci sono archi tra s_u, t_u e s_v, t_v ;
- per $u, v \in B$ distinti, entrambi s_u, t_u sono adiacenti ad entrambi s_v, t_v ;
- per $u \in A$ e $v \in B$, ci sono esattamente due archi che uniscono uno tra s_u, t_u ad uno tra s_v, t_v ; se $uv \in E(H)$ allora $s_u s_v$ e $t_u t_v$ sono archi di G oppure $s_u t_v$ e $t_u s_v$ sono archi di G .

Chiamiamo grafo di sdoppiamento un tale grafo.

Si vede facilmente che il complementare di un grafo di sdoppiamento è ancora un grafo di sdoppiamento.

Def 1.12 *Un grafo G è di base se o G o $\overline{G}$ è bipartito, oppure è il grafo linea di un grafo bipartito, o è un grafo di sdoppiamento.*

È facile verificare che tutti i grafi di sdoppiamento sono grafi perfetti, e quindi tutti i grafi di base sono grafi perfetti.

Def 1.13 *Se $X, Y \subseteq V(G)$ sono disgiunti, diciamo che X è completo per Y (o che la coppia (X, Y) è completa) se ogni vertice di X è adiacente ad ogni vertice di Y ; diciamo che X è anticompleto per Y se non ci sono archi tra X e Y .*

Def 1.14 *Un M-join in G è una partizione di $V(G)$ in sei insiemi non vuoti (A, B, C, D, E, F) tali che:*

- ogni vertice di A ha un vicino e un non-vicino in B e viceversa;
- le coppie $(C, A), (A, F), (F, B), (B, D)$ sono complete;
- le coppie $(D, A), (A, E), (E, B), (B, C)$ sono anticomplete.

Da un lavoro di Chvátal e Sbihi segue che

Nessun grafo minimalmente imperfetto contiene un M-join.

Il risultato principale di Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas è stato quello di dimostrare che

Teorema 1.13 *Dato un grafo di Berge G , o G è di base, o uno tra G e $\overline{G}$ ammette un 2-join, o G ammette un M -join, oppure G ammette una skew partition pari.*

Per quanto sopra detto, questo prova la Congettura Forte dei Grafi Perfetti.

L'introduzione dei grafi di sdoppiamento (in più rispetto all'idea originale di Conforti, Cornuéjols e Vušković) è necessaria, perché in generale, sebbene ogni grafo di sdoppiamento contenga una skew partition, non è detto che ne contenga una pari. Chudnovsky ha dimostrato in seguito che l'introduzione di M -join non è necessaria, cioè il teorema sopra citato resta valido se si omette il caso che G contenga un M -join.

Studi di Conforti, Cornuéjols e Rao hanno portato alla determinazione della struttura di una particolare classe di grafi bipartiti (e quindi perfetti): i grafi bilanciati.

Def 1.15 *In un grafo G , un ciclo è bilanciato se la sua lunghezza è un multiplo di quattro. Il grafo G è bilanciato se tutti i suoi cicli senza corde sono bilanciati. Un grafo G si dice fortemente bilanciato se è bilanciato e non contiene cicli con esattamente una corda.*

Chiaramente, un grafo bilanciato è semplice e bipartito (poiché non può contenere un ciclo dispari).

Def 1.16 *Una biclique è un grafo bipartito completo K_{AB} in cui i due lati della bipartizione A e B sono entrambi non vuoti.*

In un grafo connesso e bipartito G , un extended star $(x; T; A; R)$ è definito da insiemi disgiunti di nodi T, A, R e un nodo $x \in T$ tali che tutti i nodi in $A \cup R$ sono vicini di x e l'insieme dei nodi $T \cup A$ induce una biclique. Inoltre, se $|T| \geq 2$, allora $|A| \geq 2$; R può essere vuoto.

L'insieme dei nodi $S = T \cup A \cup R$ è un extended star cutset se $G \setminus S$ è un grafo disconnesso.

Def 1.17 *Dato un grafo connesso e bipartito con più di quattro nodi, contenente due bicliques $K_{A_1A_2}$ e $K_{B_1B_2}$, dove A_1, A_2, B_1, B_2 sono insiemi di nodi disgiunti e non vuoti, l'insieme di archi $E(K_{A_1A_2}) \cup E(K_{B_1B_2})$ è un 2-join se soddisfa le seguenti proprietà:*

- (i) *Il grafo $G' = G \setminus (E(K_{A_1A_2}) \cup E(K_{B_1B_2}))$ è disconnesso.*

- (ii) Ogni componente connessa di G' ha intersezione non vuota con esattamente due degli insiemi A_1, A_2, B_1, B_2 e questi due insiemi sono o A_1 e B_1 o A_2 e B_2 . Per $i = 1, 2$, sia G'_i il sottografo di G' contenente tutte le componenti connesse aventi intersezione non vuota con A_i e B_i .
- (iii) Se $|A_1| = |B_1| = 1$, allora G'_1 non è un cammino senza corde oppure $A_2 \cup B_2$ induce una biclique. Se $|A_2| = |B_2| = 1$, allora G'_2 non è un cammino senza corde oppure $A_1 \cup B_1$ induce una biclique.

Nel 1991 Conforti, Cornuéjols e Rao dimostrarono il seguente teorema di decomposizione

Teorema 1.14 *Se G è un grafo bilanciato che non è fortemente bilanciato, allora G ha un extended star cutset o un 2-join.*

Inoltre, essi trovarono un algoritmo polinomiale di riconoscimento basato su di esso. Tale algoritmo riconosce in tempo polinomiale se un grafo bipartito è bilanciato.

Nonostante i molti risultati ottenuti, svariati problemi riguardanti la colorazione dei vertici di un grafo rimangono tuttora insoluti. Nel 1987 Gyárfás propose la seguente

Congettura 1.15 *Esiste una funzione f tale che per ogni grafo di Berge G vale: $\chi(G) \leq f(\omega(G))$.*

Questa congettura non è mai stata dimostrata di per sè, ma naturalmente dalla Congettura Forte dei Grafi Perfetti discende subito che una tale funzione esiste, e che la migliore che si possa trovare è $f(x) = x$.

Invece, una congettura più forte, formulata sempre da Gyárfás e tuttora aperta, è la

Congettura 1.16 *Esiste una funzione f tale che per ogni grafo G non contenente buchi dispari, vale: $\chi(G) \leq f(\omega(G))$.*

L'obiettivo di questo testo è trattare un caso particolare di questa congettura, cioè studiare i grafi contenenti un 7-antibuco, nessun buco dispari e con $\omega(G) = 3$, dimostrando che questi grafi sono 4-colorabili (cioè $(\omega(G) + 1)$ -colorabili).

Naturalmente i grafi di questo tipo non contengono antibuchi dispari di taglia maggiore di sette, altrimenti $\omega(G)$ sarebbe maggiore di tre. Quindi la presenza di 7-antibuchi è l'unica cosa che impedisce che questi grafi siano perfetti.

La complementazione converte cliques in insiemi stabili e viceversa, quindi vale $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ e $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$. Una colorazione di G equivale ad una partizione in cliques di $\overline{G}$.

Quindi un problema equivalente è dato dallo studio dei grafi contenenti un 7-buco, nessun antibuco dispari e con $\alpha = 3$ e dalla dimostrazione che questi grafi sono partizionabili in quattro cliques. Tale risultato è stato qui parzialmente dimostrato, infatti alla fine di questo elaborato si dà un algoritmo che consente di partizionare in quattro cliques un grafo con le proprietà appena citate, ad esclusione di alcuni suoi particolari nodi.

Capitolo 2

Nozioni di base

2.1 7-buchi espansi

Def 2.1 *Un 7-buco espanso è un grafo formato da sette bags non vuote $B_1, B_2, \dots, B_7$ con le seguenti proprietà:*

1. *Ogni bag B_i è una clique.*
2. *B_i è universale a $B_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, 7$.*
3. *B_i e B_{i+3} sono co-universali $\quad \forall i = 1, \dots, 7$.*
4. *Ogni nodo $v_i \in B_i$ ha almeno un non-vicino in B_{i-2} e in B_{i+2} .*
5. *Ogni nodo $v_i \in B_i$ è co-universale ad almeno una tra B_{i-2} e B_{i+2} .*
6. *Se B_i e B_{i+2} non sono co-universali, allora sono co-universali $B_{i+3} - B_{i+5}$ e $B_{i+4} - B_{i+6}$.*

La figura 2.1 a pagina 18 rappresenta un 7-buco espanso.

Teorema 2.1 *Un 7-buco espanso non contiene antibuchi dispari.*

Dim. Sia H un 7-buco espanso. Evidentemente H non può contenere un 7-antibuco. Supponiamo per assurdo che H contenga un 5-buco C formato da nodi v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 . Se tutti i nodi di C fossero in bags diverse, esattamente due bags avrebbero tutti i nodi non appartenenti a C . Queste due bags potrebbero essere:

- adiacenti: in questo caso ci sarebbero due bags B_i e B_{i+3} non co-universali, contro la proprietà 3.

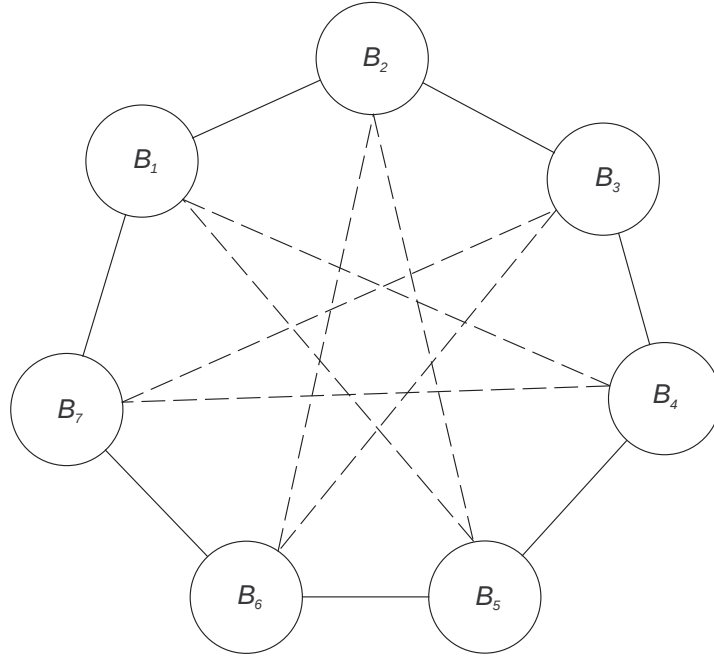


Figura 2.1: 7-buco espanso: con linea continua sono indicate le universalità, con linea tratteggiata le co-universalità.

- a distanza due: in questo caso sarebbe contraddetta la proprietà 5.
- a distanza tre: in questo caso si andrebbe contro le proprietà 3. o 6.

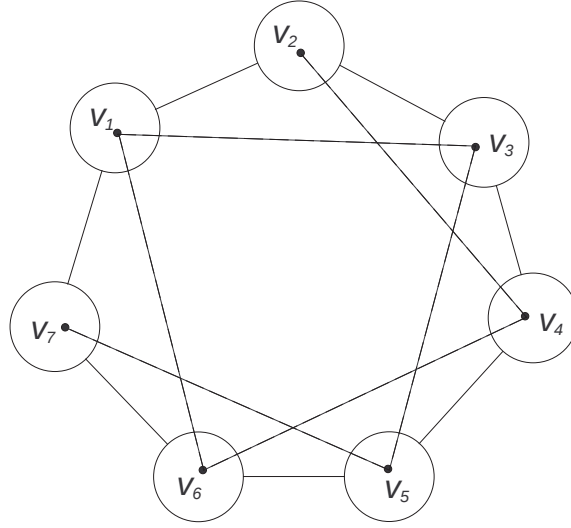
Quindi C deve avere due nodi, v_1 e v_2 , appartenenti alla stessa bag B_i . Gli altri tre nodi di C non possono appartenere a B_i , perché è una clique, e nemmeno a B_{i-1} o B_{i+1} , perché sono universali a B_i . Inoltre, al massimo un nodo di C può appartenere a $B_{i+3} \cup B_{i+4}$, perché sono entrambe co-universali a B_i . Quindi si ha che $v_3 \in B_{i+2}$, $v_4 \in B_{i+3} \cup B_{i+4}$ e $v_5 \in B_{i+5}$ (perché v_3 deve essere adiacente a v_2 e non a v_1 e v_5 , mentre v_5 deve essere adiacente a v_1 e non a v_2). Ma allora v_3 o v_5 non rispettano la proprietà 5., assurdo. $\square$

2.2 Proprietà dei 7-buchi espansi

Sia H un 7-buco espanso, formato dalle bags $B_1, B_2, \dots, B_7$.

Lemma 2.2 *Dato $v_i \in B_i$ esiste un 7-buco in H contenente v_i .*

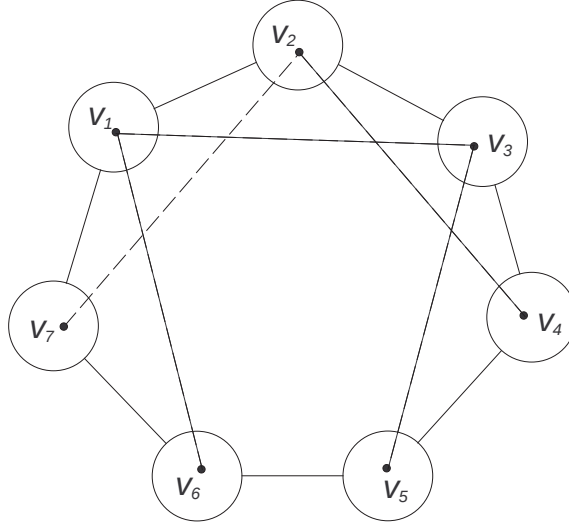
Dim. Sia $v_1 \in B_1$; v_1 ha un non-vicino $v_3 \in B_3$, il quale a sua volta ha un non-vicino $v_5 \in B_5$, che a sua volta ha un non-vicino $v_7 \in B_7$. Inoltre v_1 ha un non-vicino $v_6 \in B_6$, il quale ha un non-vicino $v_4 \in B_4$; infine v_4 ha un non-vicino $v_2 \in B_2$.



Se v_2 non è adiacente a v_7 , allora $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ è un 7-buco. Altrimenti sia v_2 adiacente a v_7 . Per la proprietà 6., B_4 è co-universale a B_6 e B_3 è co-universale a B_5 ; v_2 ha un non-vicino $w_7 \in B_7$ (per la proprietà 4.). Quindi, se w_5 è un non-vicino di w_7 in B_5 , allora $v_1, v_2, v_3, v_4, w_5, v_6, w_7$ formano un 7-buco. $\square$

Lemma 2.3 *Dati $v_i \in B_i$ e $v_{i+1} \in B_{i+1}$ esiste un 7-buco in H contenente v_i e v_{i+1} .*

Dim. Siano $v_1 \in B_1$ e $v_2 \in B_2$. Per la proprietà 4. dei 7-buchi espansi, v_1 ha un non-vicino $v_3 \in B_3$ e un non-vicino $v_6 \in B_6$; v_2 ha un non-vicino $v_4 \in B_4$ e un non-vicino $v_7 \in B_7$. Infine v_3 ha un non-vicino $v_5 \in B_5$.



Se v_4 e v_6 non sono adiacenti:

- se v_5 e v_7 non sono adiacenti, allora $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ è un 7-buco;
- se v_5 e v_7 sono adiacenti, allora B_1 è co-universale a B_3 e B_2 è co-universale a B_4 (per la proprietà 6.); v_7 ha un non-vicino $w_5 \in B_5$, che a sua volta ha un non-vicino $w_3 \in B_3$; quindi $v_1, v_2, w_3, v_4, w_5, v_6, v_7$ è un 7-buco.

Se v_4 è adiacente a v_6 , B_2 è co-universale a B_7 e B_1 è co-universale a B_3 . Inoltre v_5 ha un non-vicino $w_7 \in B_7$ e v_4 ha un non-vicino $w_6 \in B_6$. Ora:

- se w_6 non è adiacente a v_1 , allora $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, w_6, w_7$ è un 7-buco;
- se w_6 è adiacente a v_1 , allora B_2 è co-universale a B_4 e B_3 è co-universale a B_5 ; v_6 ha un non-vicino $w_4 \in B_4$ e v_5 ha un non-vicino $w_7 \in B_7$; quindi $v_1, v_2, v_3, w_4, v_5, v_6, w_7$ è un 7-buco.

□

Lemma 2.4 *Dati $v_i \in B_i$ e $v_{i+2} \in B_{i+2}$ non adiacenti, esiste un 7-buco in H contenente v_i e v_{i+2} .*

Dim. Segue subito dalla dimostrazione del lemma 2.2.

□

Lemma 2.5 *Dati $v_i \in B_i$ e $v_{i+2} \in B_{i+2}$ adiacenti, esistono due 7-buchi in H , uno contenente v_i e l'altro contenente v_{i+2} , che differiscono per due soli nodi.*

Dim. Siano $v_1 \in B_1$ e $v_3 \in B_3$ due nodi adiacenti; sia w_1 un non-vicino di v_3 in B_1 . Sia $v_1, v_2, w_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ un 7-buco (contenente v_1), con $v_i \in B_i$, $w_3 \in B_3$ e v_6 non adiacente a w_1 . Un tale 7-buco esiste per il lemma 2.2 e perché, per l'adiacenza tra v_1 e v_3 , v_1 è co-universale a B_6 e B_6 è co-universale a B_4 . Allora $w_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ è un 7-buco (contenente v_3) perché: per l'adiacenza tra v_1 e v_3 , v_3 è co-universale a B_5 e per costruzione è non adiacente a w_1 ; inoltre, sempre per costruzione, w_1 è non adiacente a v_6 . $\square$

Capitolo 3

Nodi esterni al 7-buco espanso

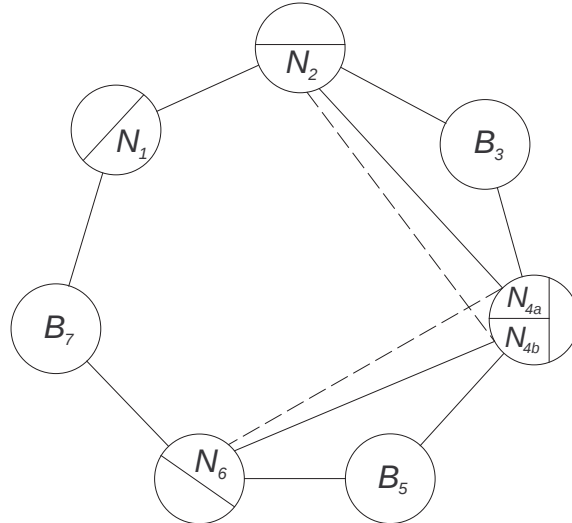
Sia G un grafo con $\alpha(G) = 3$, contenente un 7-buco e nessun antibuco dispari. Naturalmente nel grafo G è presente un 7-buco espanso, poiché esso contiene un 7-buco. D'ora in poi indicheremo con H un 7-buco espanso in G .

Teorema 3.1 *Ogni nodo di G esterno ad H è universale ad almeno due bags consecutive di H .*

Dim. Sia $v \in G$. Supponiamo per assurdo che v non sia universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+3}, B_{i+5}$.

Siano $N_i = \{\text{nodi di } B_i \text{ non adiacenti a } v\}$ per $i = 1, \dots, 7$.

Supponiamo, senza perdita di generalità, che $N_1, N_2, N_4, N_6 \neq \emptyset$.



N_4 è bipartizionato in nodi universali a N_2 e nodi universali a N_6 (altrimenti $\alpha(G) > 3$); indichiamo queste bipartizioni, rispettivamente, con N_{4a} e N_{4b} .

Se $N_{4b} \neq \emptyset$, N_6 è co-universale a B_1 ; quindi $N_{4a} = \emptyset$ (altrimenti $\alpha(G) > 3$, perché N_{4a} è co-universale a N_6 e a N_1). Di conseguenza, N_4 è universale a N_6 e co-universale a N_2 , quindi B_2 è co-universale a B_7 e B_1 è co-universale a B_3 . Ma allora v deve essere universale a B_3 e B_7 (altrimenti $\alpha(G) > 3$), quindi esiste un 5-buco passante per v, B_3, N_4, N_6, B_7 .

Se $N_{4b} = \emptyset$, N_4 è universale a N_2 e co-universale a N_6 . Ma B_6 è co-universale a B_1 , quindi $\alpha(G) > 3$. $\square$

Teorema 3.2 *Ogni nodo di G esterno ad H è adiacente ad almeno tre bags, e se sono esattamente tre devono essere consecutive.*

Dim. Sia $v \in G$. Supponiamo per assurdo che v sia adiacente ad al massimo due bags. Allora esistono tre bags B_i, B_{i+2} e B_{i+4} a cui v è co-universale. Dato $v_{i+2} \in B_{i+2}$, esso avrà due non-vicini $v_i \in B_i$ e $v_{i+4} \in B_{i+4}$. Ma allora v, v_i, v_{i+2}, v_{i+4} formano un insieme stabile di cardinalità quattro, assurdo. Ora supponiamo che v sia adiacente ad esattamente tre bags; se non sono consecutive, o si ripresenta la situazione appena trattata, oppure v è adiacente a tre bags B_i, B_{i+1} e B_{i+4} e co-universale alle altre. Siano $v_i \in B_i, v_{i+1} \in B_{i+1}$ e $v_{i+4} \in B_{i+4}$ vicini di v ; v_i ha un non-vicino $v_{i+5} \in B_{i+5}$ e v_{i+4} ha un non-vicino $v_{i+6} \in B_{i+6}$. Quindi $v, v_{i+4}, v_{i+5}, v_{i+6}, v_i$ formano un 5-buco, assurdo. $\square$

3.1 Nodi di tipo (a)

Def 3.1 *Dato un 7-buco espanso H in G , un nodo di tipo (a) per H è un nodo $v \in G \setminus H$ co-universale a quattro bags di H .*

Per il teorema 3.2 se v è un nodo di tipo (a) esso è adiacente a tre bags consecutive. Ora dimostriamo il seguente

Lemma 3.3 *Ogni nodo di tipo (a) è universale a tutte le bags a cui è adiacente.*

Dim. Sia v un nodo di tipo (a), adiacente alle bags B_i, B_{i+1}, B_{i+2} . Per il teorema 3.1 possiamo assumere che v sia universale a B_{i+1} e B_{i+2} . Supponiamo per assurdo che esista $v_i \in B_i$ non adiacente a v ; v_i avrà un non-vicino

3.2 Nodi di tipo (b)

$v_{i+5} \in B_{i+5}$, che a sua volta avrà un non-vicino $v_{i+3} \in B_{i+3}$. Ma allora v, v_i, v_{i+3}, v_{i+5} formano un insieme stabile di cardinalità maggiore di tre, assurdo. $\square$

Vale infine il seguente

Lemma 3.4 *Se H è un 7-buco espanso massimale in G , non esistono nodi di tipo (a) per H .*

Dim. Sia v un nodo di tipo (a) per H , universale alle bags B_i, B_{i+1}, B_{i+2} . Allora il grafo H' ottenuto da H inserendo v nella bag B_{i+1} è evidentemente un 7-buco espanso di G ; quindi H non è massimale, assurdo. $\square$

3.2 Nodi di tipo (b)

Def 3.2 *Dato un 7-buco espanso H in G , un nodo di tipo (b) per H è un nodo $v \in G \setminus H$ co-universale ad esattamente tre bags di H .*

Lemma 3.5 *Ogni nodo di tipo (b) è adiacente a quattro bags consecutive.*

Dim. Sia v un nodo di tipo (b) per H . Supponiamo per assurdo che v non sia adiacente a quattro bags consecutive. Se v fosse adiacente alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+4}$ oppure a $B_i, B_{i+1}, B_{i+3}, B_{i+4}$, in G sarebbe presente un 5-buco passante per $v, B_i, B_{i+6}, B_{i+5}, B_{i+4}$. Se invece v fosse adiacente alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+4}$, sarebbe presente un 5-buco per $v, B_i, B_{i+6}, B_{i+5}, B_{i+4}$. Infine, se v fosse adiacente alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+3}, B_{i+5}$ si contraddirebbe l'ipotesi $\alpha(G) = 3$. $\square$

Poiché $\alpha(G) = 3$, ogni nodo $v \in G$ di tipo (b), adiacente alle quattro bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}$, è universale alle bags B_{i+1} e B_{i+2} .

Def 3.3 *Un nodo $v \in G$ si dice parziale per la bag B_i se è adiacente ma non universale a B_i , cioè se esistono due nodi $u, w \in B_i$ con v adiacente a u e non a w .*

Def 3.4 *Un nodo $v \in G$ di tipo (b) per il 7-buco espanso H , si dice parziale se è parziale per due delle bags di H a cui è adiacente.*

Lemma 3.6 *Sia v un nodo di tipo (b) parziale, universale alle bags B_{i+1} , B_{i+2} e parziale per B_i , B_{i+3} . Siano:*

$$N_j = \{\text{nodi di } B_j \text{ non adiacenti a } v\}$$

$$A_j = \{\text{nodi di } B_j \text{ adiacenti a } v\}$$

per $j = i, i + 3$.

Allora v induce una bipartizione della bag B_{i+5} in due parti $B_{(i+5)a}$ e $B_{(i+5)b}$ con le seguenti proprietà:

- $B_{(i+5)a}$ è universale a N_i e co-universale ad A_i e a B_{i+3} ;
- $B_{(i+5)b}$ è universale a N_{i+3} e co-universale ad A_{i+3} e a B_i .

Inoltre tutte le altre bags a distanza due sono co-universali.

Dim. Supponiamo, senza perdita di generalità, che $i = 1$. Siano:

$$N_6 = \{\text{nodi di } B_6 \text{ co-universali ad } A_1\}$$

$$A_6 = \{\text{nodi di } B_6 \text{ universali ad } A_1\}.$$

A_6 è universale anche ad A_4 , altrimenti in G sarebbe presente un 5-buco per v, A_1, A_6, B_5, A_4 . Inoltre N_6 è co-universale anche per A_4 , altrimenti ci sarebbe un 5-buco per v, A_4, N_6, B_7, A_1 .

B_6 è bipartizionato da N_6 e A_6 perchè se, per assurdo, esistesse $w \in B_6$ nè universale nè co-universale, ad esempio, ad A_1 , nel grafo sarebbe presente un 5-buco. Infatti w avrebbe un vicino w_1 e un non-vicino w_2 in A_1 , quindi se w fosse universale ad A_4 ci sarebbe un 5-buco per v, w_2, B_7, w, A_4 ; se invece w avesse un non-vicino $u \in A_4$ ci sarebbe un 5-buco per v, w_1, w, B_5, u . Quindi ogni nodo di A_6 è universale o co-universale per A_1 e A_4 .

Ogni nodo di A_6 deve avere un non-vicino in N_1 e un non-vicino in N_4 (per la proprietà 4. dei 7-buchi espansi). Ma allora un nodo di A_6 , i suoi non-vicini in N_1 e N_4 e v costituiscono un insieme stabile di cardinalità maggiore di tre. Quindi, poiché N_1 e N_4 sono non vuoti per ipotesi, $A_6 = \emptyset$. Ne deriva che A_1 e A_4 sono co-universali a B_6 .

Ora sia $w \in B_6$; se w ha una non adiacenza in N_1 esso deve essere universale ad N_4 (altrimenti $\alpha(G) > 3$). Inoltre, per la proprietà 5. dei 7-buchi espansi, se ha un'adiacenza in N_1 deve essere co-universale a N_4 . Quindi ogni nodo di B_6 è universale a N_1 e co-universale a N_4 o viceversa (nel primo caso appartiene a B_{6a} , nel secondo a B_{6b}).

Per le universalità appena descritte e per la proprietà 6. dei 7-buchi espansi, le coppie di bags $B_2 - B_4$, $B_3 - B_5$, $B_1 - B_3$ e $B_2 - B_7$ sono co-universali. Infine, B_5 è co-universale a B_7 , altrimenti in G sarebbe presente un 5-buco passante per v, A_4, B_5, B_7, A_1 . $\square$

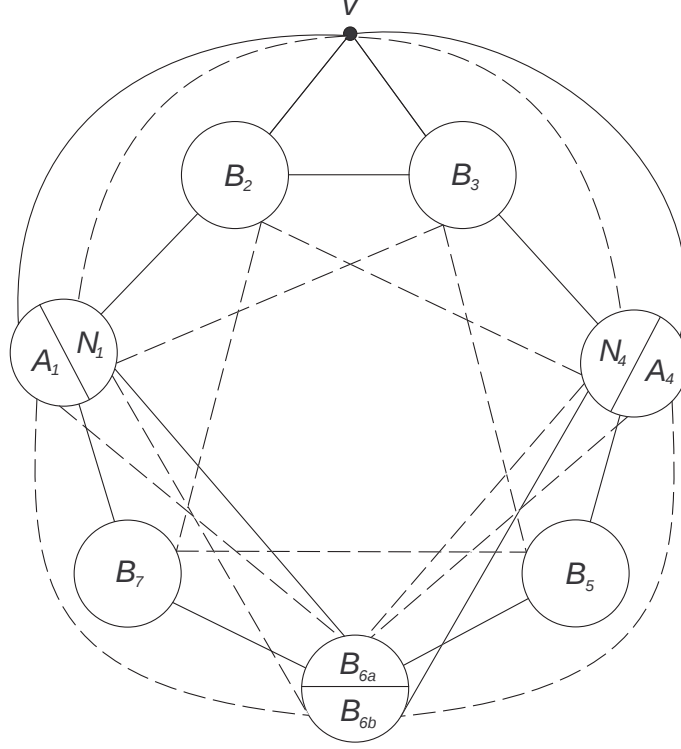


Figura 3.1: Nodo di tipo (b) parziale: con linea continua sono indicate le universalità, con linea tratteggiata le co-universalità.

Naturalmente, se H è un 7-buco espanso massimale in G , non ci può essere nessun nodo di tipo (b) per H universale ad esattamente tre bags; infatti se v fosse di questo tipo, universale ad esempio alle bags B_i, B_{i+1}, B_{i+2} e parziale per B_{i+3} , il grafo H' ottenuto da H inserendo v nella bag B_{i+1} sarebbe ancora un 7-buco espanso di G .

Def 3.5 Un nodo $v \in G$ di tipo (b) per il 7-buco espanso H si dice totale se è universale a tutte le bags di H a cui è adiacente.

Lemma 3.7 Se in G è presente un nodo di tipo (b) totale, universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}$, allora le bags $B_i - B_{i+5}$, $B_{i+3} - B_{i+5}$ e $B_{i+4} - B_{i+6}$ sono co-universali.

Dim. Se $B_{i+4} - B_{i+6}$ non fossero co-universali, G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+3}, B_{i+4}, B_{i+6}, B_i$. Inoltre, se esistesse un arco tra B_i e B_{i+5} ,

G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+3}, B_{i+4}, B_{i+5}, B_i$. Analogamente si dimostra che $B_{i+3} - B_{i+5}$ sono co-universali. $\square$

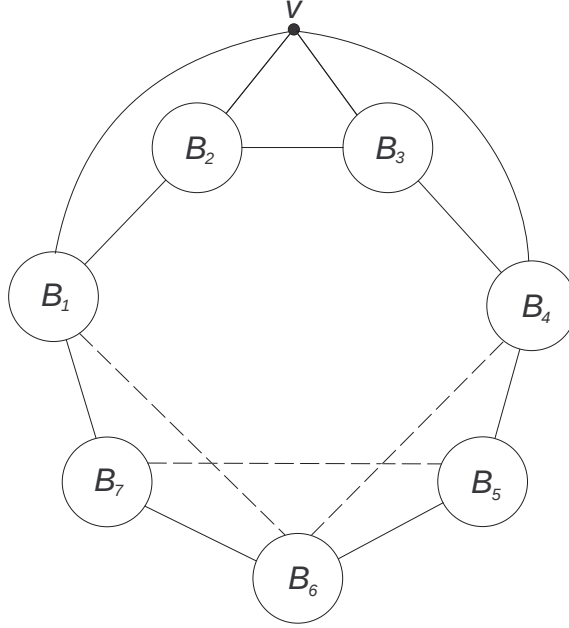


Figura 3.2: Nodo di tipo (b) totale: con linea continua sono indicate le universalità, con linea tratteggiata le co-universalità.

3.3 Nodi di tipo (c) e (d)

Sia v co-universale ad esattamente due bags di H . Le due bags a cui v è co-universale non possono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco. Infatti se v fosse adiacente alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, B_{i+4}$ e co-universale a B_{i+5} e B_{i+6} , esisterebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+4}, B_{i+5}, B_{i+6}, B_i$.

Def 3.6 Dato un 7-buco espanso H in G , un nodo $v \in G \setminus H$ si dice di tipo (c) per H se è co-universale a due bags a distanza tre e adiacente alle altre.

Lemma 3.8 Ogni nodo di tipo (c) in G è universale a tutte le bags a cui è adiacente.

3.3 Nodi di tipo (c) e (d)

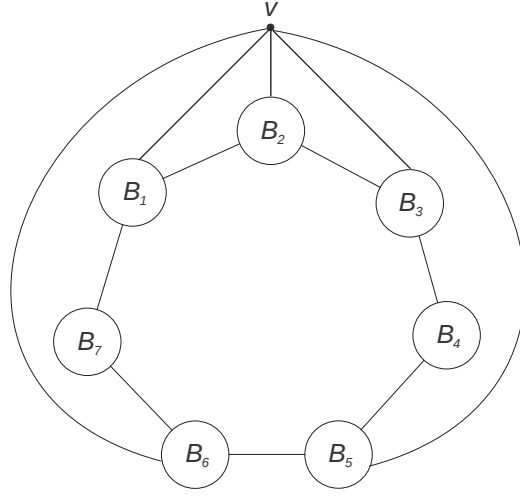


Figura 3.3: Nodo di tipo (c).

Dim. Sia v adiacente alle bags B_1, B_2, B_3, B_5, B_6 . Poiché $\alpha(G) = 3$, v è universale a B_2 . Se v è universale a B_6 lo è anche a B_1 ; infatti, se non lo fosse, esisterebbe $v_1 \in B_1$ non adiacente a v e quindi G conterrebbe un 5-buco formato da un vicino di v in B_2 (v_2), v_1 , un non-vicino di v_2 in B_7 , un non-vicino di v_1 in B_6 e v . Vale anche il viceversa, cioè se v è universale a B_1 allora lo è anche a B_6 , altrimenti ci sarebbe un 5-buco passante per v, B_5, B_6, B_7, B_1 . Quindi v è universale sia a B_1 che a B_6 o a nessuna delle due. Per simmetria, lo stesso vale per B_3 e B_5 . Ma, per il teorema 3.1, v deve essere universale ad almeno due bags; quindi, senza perdita di generalità, si può assumere che v sia universale a B_6 e B_1 . Ora siano A_3 e A_5 i sottoinsiemi, rispettivamente, di B_3 e B_5 di nodi adiacenti a v ; inoltre N_3 e N_5 i sottoinsiemi, rispettivamente, di B_3 e B_5 di nodi non adiacenti a v . N_3 deve essere universale ad N_5 , altrimenti $\alpha(G) > 3$. Ma allora un nodo di B_2 , uno di N_3 , uno di N_5 , uno di B_6 e v formerebbero un 5-buco. $\square$

Def 3.7 Dato un γ -buco espanso H in G , un nodo $v \in G \setminus H$ si dice di tipo (d) per H se è co-universale a due bags a distanza due e adiacente alle altre.

Lemma 3.9 Ogni nodo di tipo (d) in G è universale ad almeno tre bags consecutive e se è universale ad esattamente quattro, queste sono consecutive.

Dim. Sia v adiacente alle bags B_1, B_2, B_3, B_4, B_6 . Poiché $\alpha(G) = 3$, v è universale a B_2 e B_3 .

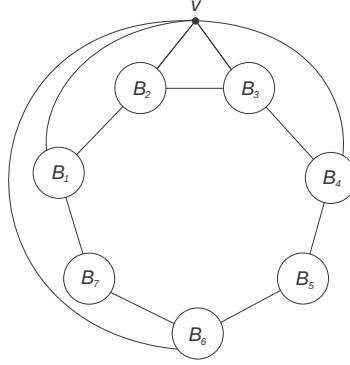


Figura 3.4: Nodo di tipo (d).

Siano:

$A_i = \{\text{nodi di } B_i \text{ adiacenti a } v\}$

$N_i = \{\text{nodi di } B_i \text{ non adiacenti a } v\}$

(quindi $N_2, N_3, A_5, A_7 = \emptyset$ e $A_1, A_4, A_6 \neq \emptyset$). N_1 deve essere universale ad A_6 , altrimenti ci sarebbe un 5-buco passante per v, B_2, N_1, B_7, A_6 ; analogamente, N_4 è universale ad A_6 . Ma allora ogni nodo di A_6 ha un vicino in B_1 e uno in B_4 , contro la proprietà 5. dei 7-buchi espansi; quindi almeno uno tra N_1 e N_4 è vuoto. Infine, se $N_6 = \emptyset$ allora anche $N_4 = \emptyset$, altrimenti N_4 sarebbe universale a B_6 . $\square$

Def 3.8 Un nodo $v \in G$ di tipo (d) per il 7-buco espanso H , si dice *totale* se è universale a tutte le bags di H a cui è adiacente, si dice *semiparziale* se è universale ad esattamente quattro di esse e *parziale* se è universale ad esattamente tre.

Lemma 3.10 Sia v un nodo di tipo (d) parziale, universale alle bags B_i, B_{i+1}, B_{i+2} e parziale per B_{i+3} e B_{i+5} . Siano:

$N_j = \{\text{nodi di } B_j \text{ non adiacenti a } v\}$

$A_j = \{\text{nodi di } B_j \text{ adiacenti a } v\}$

per $j = i+3, i+5$.

Allora N_{i+3} è universale ad A_{i+5} e co-universale a B_{i+1} ; A_{i+3} è co-universale a N_{i+5} , e le coppie di bags $B_i - B_{i+2}, B_i - B_{i+5}, B_{i+1} - B_{i+6}, B_{i+4} - B_{i+6}$ sono co-universali.

Dim. Sia v universale alle bags B_1, B_2, B_3 e parziale per B_4 e B_6 . A_6 è universale a N_4 , perché altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per

3.3 Nodi di tipo (c) e (d)

v, B_3, N_4, B_5, A_6 ; quindi A_6 è co-universale a B_1 . Inoltre B_2 è co-universale a B_7 , B_1 è co-universale a B_3 e N_4 è co-universale a B_2 . N_6 è co-universale ad A_4 , altrimenti in G sarebbe presente un 5-buco passante per v, A_4, N_6, B_7, B_1 , ed è co-universale a B_1 altrimenti esisterebbe un 5-buco passante per v, B_1, N_6, B_5, A_4 . Concludendo, B_7 è co-universale a B_5 , altrimenti esisterebbe un 5-buco passante per v, B_1, B_7, B_5, A_4 . $\square$

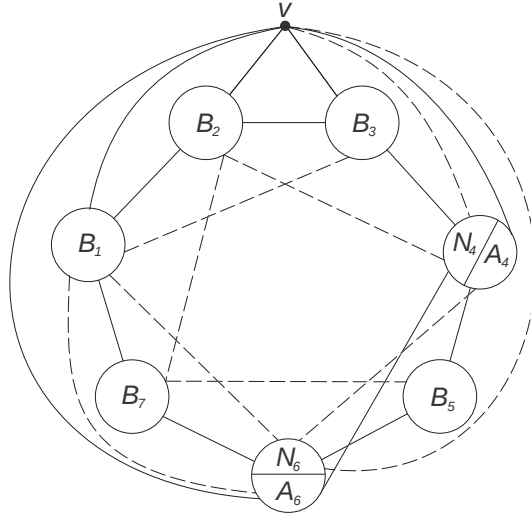


Figura 3.5: Nodo di tipo (d) parziale: con linea continua sono indicate le universalità, con linea tratteggiata le co-universalità.

Lemma 3.11 *Sia $v \in G$ un nodo di tipo (d) semiparziale per il 7-buco espanso H , universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}$ e parziale per B_{i+5} .*

Sia $N_{i+5} = \{\text{nodi di } B_{i+5} \text{ non adiacenti a } v\}$. Allora le bags $B_i - N_{i+5}$, $B_{i+3} - N_{i+5}$ e $B_{i+4} - B_{i+6}$ sono co-universali.

Dim. Se $B_{i+4} - B_{i+6}$ non fossero co-universali, G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+3}, B_{i+4}, B_{i+6}, B_i$. Inoltre, se esistesse un arco tra B_i e N_{i+5} , G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+3}, B_{i+4}, N_{i+5}, B_i$. Analogamente si dimostra che $B_{i+3} - N_{i+5}$ sono co-universali. $\square$

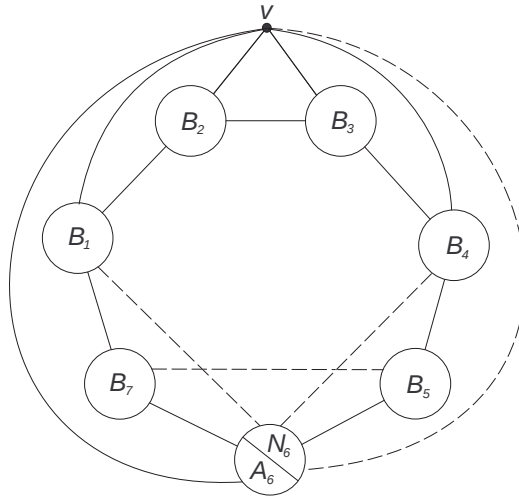


Figura 3.6: Nodo di tipo (d) semiparziale: con linea continua sono indicate le universalità, con linea tratteggiata le co-universalità.

Capitolo 4

Relazioni tra nodi esterni al 7-buco espanso

4.1 Relazioni tra nodi di tipo (b) parziali

Per il lemma 3.6, se v e w sono nodi di tipo (b) parziali per H , essi devono essere adiacenti agli stessi nodi. Inoltre tutti i nodi di questo tipo devono formare una clique, altrimenti $\alpha(G) > 3$.

4.2 Relazioni tra nodi di tipo (b) parziali e totali

Lemma 4.1 *Se G contiene un nodo di tipo (b) parziale per H , non ne può contenere alcuno di tipo (b) totale per H .*

Dim. Sia v un nodo di tipo (b) parziale per il 7-buco espanso H , adiacente alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}$; sia poi w di tipo (b) totale, universale alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+3}$. Allora, per i lemmi 3.6 e 3.7, gli unici due casi che si possono verificare sono $j = i + 3$ e $j = i + 4$. Questi due casi sono simmetrici, quindi possiamo limitarci a studiare il caso $j = i + 4$, considerando $i = 1$. Siano A_1, A_4, N_1 e N_4 definiti come nel lemma 3.6. Se v e w non fossero adiacenti, in G sarebbe presente un 5-buco passante per w, A_1, v, A_4, B_5 . Invece, se lo fossero G conterrebbe un 5-buco passante per w, v, A_4, N_4, B_{6b} . Quindi v e w non possono coesistere. $\square$

4.3 Relazioni tra nodi di tipo (b) totali

Siano v e w nodi di tipo (b) totali per il 7-buco espanso H , con v universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}$ e w universale alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+3}$. Allora, se:

- $j = i$: v e w sono adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$;
- $j = i + 1$: v e w possono essere adiacenti oppure no; ma se non lo sono si può inserire v in B_{i+1} e w in B_{i+3} e la struttura che si ottiene è ancora un 7-buco espanso;
- $j = i + 2$: v e w non sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, w, B_{i+5}, B_{i+6}, B_i$;
- $j = i + 3$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti esisterebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+3}, w, B_{i+6}, B_i$.

Gli altri casi sono simmetrici.

Indichiamo con T_i la clique formata dai nodi di tipo (b) totali universali alle bags $B_{i+2}, B_{i+3}, B_{i+4}, B_{i+5}$.

Lemma 4.2 *Se H è un 7-buco espanso massimale, almeno tre cliques di nodi di tipo (b) totali sono vuote e le quattro che possono essere non vuote o sono consecutive $(T_i, T_{i+1}, T_{i+2}, T_{i+3})$ oppure due a due opposte $(T_i, T_{i+1}, T_{i+3}, T_{i+4})$.*

Dim. Non ci possono essere tre cliques T_i, T_{i+2} e T_{i+4} non vuote, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $B_i, T_{i+2}, B_{i+5}, T_i, T_{i+4}$. Quindi almeno tre di queste cliques devono essere vuote; se sono esattamente tre, o sono adiacenti, oppure due adiacenti e una opposta. $\square$

4.4 Relazioni tra nodi di tipo (c)

Lemma 4.3 *I nodi di tipo (c) per il 7-buco espanso H formano una clique.*

Dim. Siano v e w due nodi di tipo (c) per il 7-buco espanso H ; siano v universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+4}, B_{i+5}$ e w universale alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+4}, B_{j+5}$. Allora, se:

- $j = i$: v e w sono adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$;

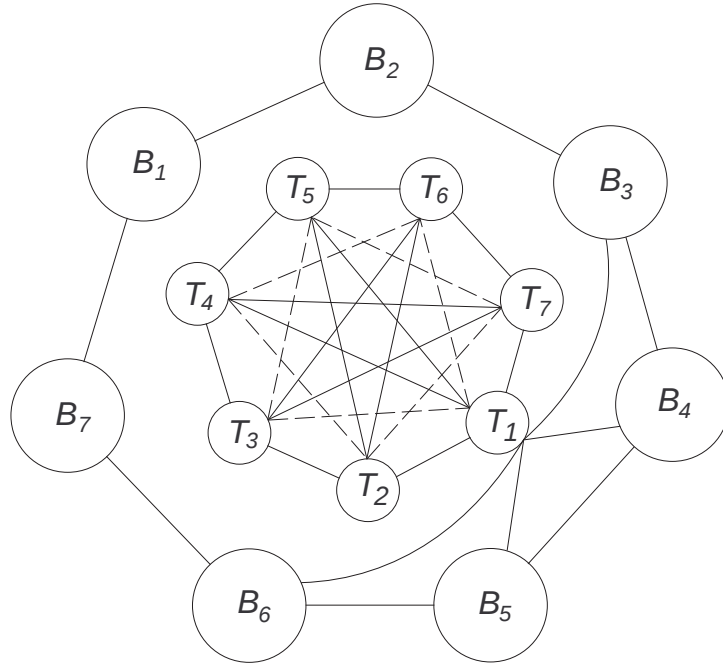


Figura 4.1: Relazioni tra nodi di tipo (b) totali con H massimale: verso H sono indicate solo le universalità di T_1 , le altre sono analoghe.

- $j = i + 1$: v e w sono adiacenti, altrimenti esiste un 5-buco passante per $v, B_{i+1}, w, B_{i+3}, B_{i+4}$;
- $j = i + 2$: v e w sono adiacenti, altrimenti esiste un 5-buco passante per $v, B_{i+2}, w, B_{i+6}, B_{i+5}$;
- $j = i + 3$: v e w sono adiacenti, altrimenti esiste un 5-buco passante per $v, B_{i+5}, w, B_{i+3}, B_{i+2}$.

Gli altri casi sono simmetrici.

□

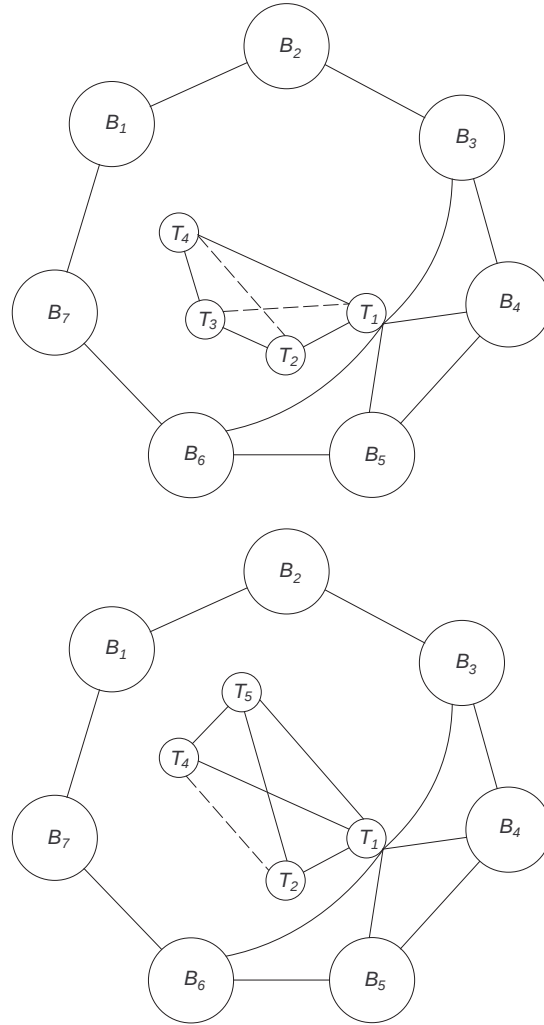


Figura 4.2: Configurazioni possibili di nodi di tipo (b) totali con H massimale.

4.5 Relazioni tra nodi di tipo (c) e nodi di tipo (b) parziali

Siano v un nodo di tipo (c) per il 7-buco espanso H , con v universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+4}, B_{i+5}$ e w di tipo (b) parziale adiacente alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+3}$. Siano $A_j, A_{j+3}, B_{(j+5)a}$ e $B_{(j+5)b}$ definite come al lemma 3.6. Allora, se:

- $j = i$: v e w non possono coesistere; infatti, sia che fossero adiacenti oppure no, G conterrebbe un 5-buco, passante per $v, A_i, w, A_{i+3}, B_{i+4}$ se non fossero adiacenti, e per $v, w, A_{i+3}, N_{i+3}, B_{i+5}$ se lo fossero;
- $j = i + 1$: v e w non possono coesistere; infatti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, N_{i+1}, B_{(i+6)a}, B_{(i+6)b}, N_{i+4}$;
- $j = i + 2$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, N_{i+2}, B_{i+3}, w, A_{i+5}$;
- $j = i + 3$: v e w non possono coesistere; infatti sia che fossero adiacenti oppure no G conterrebbe un 5-buco, passante per $v, B_i, A_{i+6}, w, B_{i+4}$ se non fossero adiacenti, e per $v, B_{(i+1)b}, N_{i+6}, A_{i+6}, w$ se lo fossero.

Gli altri casi sono simmetrici.

4.6 Relazioni tra nodi di tipo (c) e nodi di tipo (b) totali

Siano v un nodo di tipo (c) per il 7-buco espanso H , con v universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+4}, B_{i+5}$ e w di tipo (b) totale universale alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+3}$. Allora, se:

- $j = i$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_i, w, B_{i+3}, B_{i+4}$;
- $j = i + 1$: v e w possono essere adiacenti oppure no (se non lo sono B_{i+3} e B_{i+5} devono essere co-universali);
- $j = i + 2$: v e w possono essere adiacenti oppure no (se non lo sono B_{i+1} e B_{i+3} devono essere co-universali);
- $j = i + 3$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_i, B_{i+6}, w, B_{i+4}$.

Gli altri casi sono simmetrici.

4.7 Relazioni tra nodi di tipo (d) parziali

Siano v , u e w nodi di tipo (d) parziali per il 7-buco espanso H .

Sia v universale alle bags B_i , B_{i+1} , B_{i+2} , e parziale per le bags B_{i+3} e B_{i+5} ; u universale alle bags B_j , B_{j+1} , B_{j+2} , e parziale per le bags B_{j+3} e B_{j+5} ; w universale alle bags B_k , B_{k+1} , B_{k+2} , e parziale per le bags B_{k+4} e B_{k+6} .

Siano:

$$N_{hv} = \{\text{nodi di } B_h \text{ non adiacenti a } v\}$$

$$A_{hv} = \{\text{nodi di } B_h \text{ adiacenti a } v\}$$

e analoghi N_{hu} , N_{hw} , A_{hu} , A_{hw} .

Per il lemma 3.10, u e w possono coesistere con v solo nei casi: $j = i$, $j = i + 5$, $k = i + 4$, $k = i + 5$ o $k = i + 6$. Passiamo ora all'analisi di questi casi supponendo, senza perdita di generalità, che $i = 1$.

- *Caso $j = i$:* v e u devono essere adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$. Inoltre, per il lemma 3.10, devono essere vuoti almeno uno tra $N_{6v} \cap A_{6u}$ e $A_{4v} \cap N_{4u}$ e uno tra $A_{6v} \cap N_{6u}$ e $N_{4v} \cap A_{4u}$. Quindi si possono presentare quattro casi:
 - a) $A_{4v} \subseteq A_{4u}$ e $A_{6v} \subseteq A_{6u}$
 - b) $A_{4u} \subseteq A_{4v}$ e $A_{6u} \subseteq A_{6v}$
 - c) $A_{4v} = A_{4u}$
 - d) $A_{6v} = A_{6u}$.
- *Caso $j = i + 5$:* v e u possono essere adiacenti oppure no. Comunque, per il lemma 3.10, $N_{4v} \cap A_{4u} = \emptyset$. Inoltre, se sono adiacenti danno la stessa partizione di B_4 , altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, A_{4v} \cap N_{4u}, B_5, N_{6v}, u$.
- *Caso $k = i + 4$:* v e w possono essere adiacenti oppure no. Comunque, per il lemma 3.10, $N_{4v} \cap N_{4w} = \emptyset$. Inoltre, se non sono adiacenti $A_{4v} \cap A_{4w} = \emptyset$, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_1, B_7, w, A_{4v} \cap A_{4w}$.
- *Caso $k = i + 5$:* v e w non possono coesistere, altrimenti G conterrebbe un 5-buco, passante per $v, B_1, w, A_{5w}, A_{4v}$ se non fossero adiacenti e per $v, w, N_{6v}, N_{5w}, A_{4v}$ se lo fossero.
- *Caso $k = i + 6$:* per il lemma 3.10, devono essere vuoti almeno uno tra $N_{4v} \cap N_{4w}$ e $A_{6v} \cap A_{6w}$ e uno tra $A_{4v} \cap A_{4w}$ e $N_{6v} \cap N_{6w}$.

Quindi si possono presentare quattro casi:

- a) $A_{4v} \cap A_{4w} = \emptyset$ e $A_{6v} \cap A_{6w} = \emptyset$;
- b) $N_{4v} \cap N_{4w} = \emptyset$ e $N_{6v} \cap N_{6w} = \emptyset$;
- c) $A_{4w} \subseteq N_{4v}$;
- d) $A_{6w} \subseteq N_{6v}$.

Nel caso a), v e w non possono coesistere, altrimenti G conterrebbe un 5-buco, passante per $v, B_1, w, N_{4v} \cap A_{4w}, A_{4v} \cap N_{4w}$ se non fossero adiacenti e per $v, w, N_{6v} \cap A_{6w}, B_5, A_{4v} \cap N_{4w}$ se lo fossero. Analogamente, non si può verificare il caso b). Nel caso c) v e w devono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_2, w, A_{4w}, A_{4v}$; inoltre $N_{6v} \cap A_{6w} = \emptyset$, altrimenti in G sarebbe presente un 5-buco passante per $v, A_{4v}, B_5, N_{6v} \cap A_{6w}, w$. Per concludere, il caso d) è simmetrico al caso c).

4.8 Relazioni tra nodi di tipo (d) parziali e di tipo (b) parziali

Lemma 4.4 *Se G contiene un nodo di tipo (b) parziale per H , non ne può contenere alcuno di tipo (d) parziale per H .*

Dim. Siano v un nodo di tipo (d) universale alle bags B_i, B_{i+1}, B_{i+2} , e parziale per le bags B_{i+3} e B_{i+5} e w di tipo (b) parziale, adiacente alle bags B_j, B_{j+1}, B_{j+2} e B_{j+3} . Siano inoltre:

$$N_{iv} = \{\text{nodi di } B_i \text{ non adiacenti a } v\}$$

$$A_{iv} = \{\text{nodi di } B_i \text{ adiacenti a } v\}$$

e analoghi N_{iw} e A_{iw} .

Per i lemmi 3.6 e 3.10, l'unico caso che si può presentare è $j = i+5$; inoltre deve valere $A_{(i+5)v} = N_{(i+5)w}$. Ma allora, se v e w non fossero adiacenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, A_{(i+1)w}, w, A_{(i+5)w}, A_{(i+5)v}$. Se invece fossero adiacenti, G conterrebbe un 5-buco passante per $v, w, A_{(i+5)w}, B_{i+4}, A_{(i+3)v}$.

□

4.9 Relazioni tra nodi di tipo (d) parziali e di tipo (b) totali

Siano v un nodo di tipo (d) universale alle bags B_i, B_{i+1}, B_{i+2} , e parziale per le bags B_{i+3} e B_{i+5} e w di tipo (b) totale, universale alle bags B_j, B_{j+1}, B_{j+2} e B_{j+3} . Siano inoltre:

$$N_i = \{\text{nodi di } B_i \text{ non adiacenti a } v\}$$

$$A_i = \{\text{nodi di } B_i \text{ adiacenti a } v\}.$$

Allora, se:

- $j = i$: v e w non possono coesistere, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $B_i, w, N_{i+3}, A_{i+5}, B_{i+6}$;
- $j = i + 1$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+1}, w, B_{i+4}, A_{i+5}$;
- $j = i + 2$: v e w devono essere non adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_i, B_{i+6}, N_{i+5}, w$;
- $j = i + 3$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_i, B_{i+6}, w, A_{i+3}$;
- $j = i + 4$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_i, w, B_{i+4}, A_{i+3}$;
- $j = i + 5$: v e w non possono coesistere, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $w, B_{i+1}, B_{i+2}, N_{i+3}, A_{i+5}$;
- $j = i + 6$: v e w non possono coesistere, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $w, B_{i+2}, N_{i+3}, A_{i+5}, B_{i+6}$.

Gli altri casi sono simmetrici.

4.10 Relazioni tra nodi di tipo (d) parziali e di tipo (c)

Siano v un nodo di tipo (d) universale alle bags B_i, B_{i+1}, B_{i+2} , e parziale per le bags B_{i+3} e B_{i+5} , e w di tipo (c), universale alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+4}$ e B_{j+5} . Siano inoltre:

$$N_i = \{\text{nodi di } B_i \text{ non adiacenti a } v\}$$

$$A_i = \{\text{nodi di } B_i \text{ adiacenti a } v\}.$$

Allora, se:

- $j = i$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$;
- $j = i + 1$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_i, B_{i+6}, w, A_{i+3}$;
- $j = i + 2$: v e w devono essere adiacenti altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+2}, w, B_{i+6}, A_{i+5}$;
- $j = i + 3$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_i, w, N_{i+3}, B_{i+2}$.
- $j = i + 4$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+1}, w, B_{i+4}, A_{i+3}$.
- $j = i + 5$: v e w possono essere adiacenti oppure no;
- $j = i + 6$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_i, w, B_{i+4}, A_{i+5}$.

Gli altri casi sono simmetrici.

4.11 Relazioni tra nodi di tipo (d) semiparziali

Siano v e w nodi di tipo (d) semiparziali per il 7-buco espanso H , con v universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}$ e parziale per B_{i+5} e w universale alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+3}$ e parziale per B_{j+5} . Siano inoltre:

$$N_{(i+5)v} = \{\text{nodi di } B_{i+5} \text{ non adiacenti a } v\}$$

$$A_{(i+5)v} = \{\text{nodi di } B_{i+5} \text{ adiacenti a } v\}$$

e analoghi $N_{(j+5)w}$ e $A_{(j+5)w}$. Allora, se:

- $j = i$: v e w sono adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$;
- $j = i + 1$: v e w devono essere adiacenti altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+1}, w, B_{i+4}, A_{(i+1)v}$;
- $j = i + 2$: v e w non sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, w, N_{(i+5)v}, B_{i+6}, N_{iw}$;
- $j = i + 3$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti esisterebbe un 5-buco per $v, B_{i+3}, w, B_{i+6}, B_i$.

Gli altri casi sono simmetrici.

Quindi la disposizione è analoga a quella dei nodi di tipo (b) totali. Indicando con S_i la clique formata dai nodi di tipo (d) semiparziali, universali alle bags B_{i+2} , B_{i+3} , B_{i+4} , B_{i+5} e parziali per la bag B_i , vale l'analogo del lemma 4.2, cioè

Lemma 4.5 *Almeno tre cliques di nodi di tipo (d) semiparziali sono vuote e le quattro che possono essere non vuote o sono consecutive $(S_i, S_{i+1}, S_{i+2}, S_{i+3})$ oppure due a due opposte $(S_i, S_{i+1}, S_{i+3}, S_{i+4})$.*

Dim. Analoga alla dimostrazione del lemma 4.2. □

4.12 Relazioni tra nodi di tipo (d) semiparziali e di tipo (b) parziali

Lemma 4.6 *Se G contiene un nodo di tipo (b) parziale per H , non ne può contenere alcuno di tipo (d) semiparziale per H .*

Dim. Sia v un nodo di tipo (d) semiparziale per il 7-buco espanso H , universale alle bags B_i , B_{i+1} , B_{i+2} , B_{i+3} e parziale per B_{i+5} ; sia poi w un nodo di tipo (b) parziale, adiacente alle bags B_j , B_{j+1} , B_{j+2} , B_{j+3} . Siano:

$$N_{kv} = \{\text{nodi di } B_k \text{ non adiacenti a } v\}$$

$$A_{kv} = \{\text{nodi di } B_k \text{ adiacenti a } v\}$$

e analoghi N_{kw} e A_{kw} . Infine, siano $B_{(j+5)a}$ e $B_{(j+5)b}$ definiti come nel lemma 3.6. Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che $i = 1$. Allora, se:

- $j = i$: $B_{6a} \cap N_{6w} = \emptyset$, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, N_{1w}, B_{6a} \cap N_{6w}, B_5, A_{4w}$; analogamente, $B_{6b} \cap N_{6w} = \emptyset$. Ma allora v sarebbe universale a B_6 , assurdo;
- $j = i + 1$: w induce una universalità tra N_{5w} e B_{7b} , mentre v induce una co-universalità tra B_5 e B_7 , assurdo;
- $j = i + 2$: $N_{6v} \cap N_{6w} = \emptyset$, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_1, N_{6v} \cap N_{6w}, B_5, B_4$; quindi $A_{6v} \cap N_{6w} \neq \emptyset$ e $N_{6v} \cap A_{6w} \neq \emptyset$ altrimenti o v o w sarebbe universale a B_6 . Ma allora G conterrebbe un 5-buco, passante per $v, A_{3w}, w, N_{6v} \cap A_{6w}, A_{6v} \cap N_{6w}$ se v e w non fossero adiacenti, e per $v, B_1, B_7, N_{6v} \cap A_{6w}, w$ se lo fossero;

4.13 Relazioni tra nodi di tipo (d) semiparziali e di tipo (b) totali

- $j = i + 3$: in questo caso G conterrebbe un 5-buco, passante per $v, A_{4w}, w, A_{7w}, B_1$ se v e w non fossero adiacenti, e per $v, B_1, N_{7w}, N_{6v}, w$ se lo fossero.

Gli altri casi sono simmetrici. □

4.13 Relazioni tra nodi di tipo (d) semiparziali e di tipo (b) totali

Sia v un nodo di tipo (d) semiparziale per il 7-buco espanso H , universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}$ e parziale per B_{i+5} ; sia poi w un nodo di tipo (b) totale, universale alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+3}$. Siano:

$$N_{i+5} = \{\text{nodi di } B_{i+5} \text{ non adiacenti a } v\}$$

$$A_{i+5} = \{\text{nodi di } B_{i+5} \text{ adiacenti a } v\}.$$

Allora, se:

- $j = i$: v e w sono adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$;
- $j = i + 1$: v e w devono essere adiacenti altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, A_{i+5}, B_{i+4}, w, B_{i+1}$;
- $j = i + 2$: v e w non sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_i, B_{i+6}, N_{i+5}, w$;
- $j = i + 3$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti esisterebbe un 5-buco per $v, B_i, B_{i+6}, w, B_{i+3}$.

Gli altri casi sono simmetrici.

4.14 Relazioni tra nodi di tipo (d) semiparziali e nodi di tipo (c)

Sia v un nodo di tipo (d) semiparziale per il 7-buco espanso H , universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}$ e parziale per B_{i+5} ; sia poi w un nodo di tipo (c), universale alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+4}, B_{j+5}$. Siano:

$$N_{i+5} = \{\text{nodi di } B_{i+5} \text{ non adiacenti a } v\}$$

$$A_{i+5} = \{\text{nodi di } B_{i+5} \text{ adiacenti a } v\}.$$

Allora, se:

- $j = i$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_1, w, B_{i+4}, B_{i+3}$;

- $j = i + 6$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+1}, w, B_{i+6}, A_{i+5}$;
- $j = i + 5$: v e w possono essere adiacenti oppure no;
- $j = i + 4$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti esisterebbe un 5-buco per $v, B_i, B_{i+6}, w, B_{i+2}$.

Gli altri casi sono simmetrici.

4.15 Relazioni tra nodi di tipo (d) semiparziali e parziali

Sia v un nodo di tipo (d) semiparziale per il 7-buco espanso H , universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}$ e parziale per B_{i+5} ; sia poi w un nodo di tipo (d) parziale, universale alle bags B_j, B_{j+1}, B_{j+2} e parziale per B_{j+3} e B_{j+5} . Siano:

$$N_{kv} = \{\text{nodi di } B_k \text{ non adiacenti a } v\}$$

$$A_{kv} = \{\text{nodi di } B_k \text{ adiacenti a } v\}$$

e analoghi N_{kw} e A_{kw} . Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che $i = 1$. Allora, se:

- $j = i$: v e w sono adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$;
- $j = i + 1$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_2, w, A_{5w}, A_{6v}$;
- $j = i + 2$: $N_{6v} \cap N_{6w} = \emptyset$, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, A_{1w}, N_{6v} \cap N_{6w}, B_5, B_4$; quindi $N_{6v} \cap A_{6w} \neq \emptyset$ e $A_{6v} \cap N_{6w} \neq \emptyset$. Ma allora G conterrebbe un 5-buco, passante per $v, N_{1w}, B_7, N_{6v} \cap A_{6w}, w$ se v e w fossero adiacenti, e per $v, B_3, w, N_{6v} \cap A_{6w}, A_{6v} \cap N_{6w}$ se non lo fossero; quindi in questo caso v e w non possono coesistere;
- $j = i + 3$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per v, B_4, w, A_{7w}, B_1 ;
- $j = i + 4$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per v, A_{1w}, w, B_5, B_4 ;
- $j = i + 5$: v e w non sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, w, N_{6w}, B_5, N_{4w}$;

- $j = i + 6$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per v, B_1, w, A_{5w}, B_4 ;

Gli altri casi sono simmetrici.

4.16 Relazioni tra nodi di tipo (d) totali

Siano v e w nodi di tipo (d) totali per il 7-buco espanso H , con v universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, B_{i+5}$ e w universale alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+3}, B_{j+5}$. Allora, se:

- $j = i$: v e w sono adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$;
- $j = i + 1$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti esisterebbe un 5-buco per $v, B_{i+2}, w, B_{i+6}, B_{i+5}$;
- $j = i + 2$: v e w possono essere adiacenti oppure no;
- $j = i + 3$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti esisterebbe un 5-buco per $v, B_i, B_{i+6}, w, B_{i+3}$.

Gli altri casi sono simmetrici.

Quindi le bags di nodi di tipo (d) totali sono clique, e sono universali se sono a distanza uno o tre.

4.17 Relazioni tra nodi di tipo (d) totali e di tipo (b) parziali

Lemma 4.7 *Dati due nodi di G , uno di tipo (d) totale e l'altro di tipo (b) parziale per lo stesso 7-buco espanso, essi sono adiacenti.*

Dim. Sia v un nodo di tipo (d) totale, universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, B_{i+5}$; sia poi w di tipo (b) parziale, adiacente alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+3}$. Siano A_j, A_{j+3}, N_j e N_{j+3} definiti come nel lemma 3.6. Allora, se:

- $j = i$: v e w sono adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$;
- $j = i + 1$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, A_{i+1}, w, A_{i+4}, B_{i+5}$;
- $j = i + 2$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, N_{i+5}, B_{i+4}, w, A_{i+2}$;

- $j = i + 3$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti esisterebbe un 5-buco per $v, B_i, A_{i+6}, w, A_{i+3}$.

Gli altri casi sono simmetrici. □

4.18 Relazioni tra nodi di tipo (d) totali e di tipo (b) totali

Sia v un nodo di tipo (d) totale, universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, B_{i+5}$; sia poi w di tipo (b) totale, universale alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+3}$. Allora, se:

- $j = i$: v e w sono adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$;
- $j = i + 1$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+1}, w, B_{i+4}, B_{i+5}$;
- $j = i + 2$: v e w possono essere adiacenti oppure no;
- $j = i + 3$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti esisterebbe un 5-buco per $v, B_i, B_{i+6}, w, B_{i+3}$.

Gli altri casi sono simmetrici.

4.19 Relazioni tra nodi di tipo (d) totali e nodi di tipo (c)

Sia v un nodo di tipo (d) totale, universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, B_{i+5}$; sia poi w di tipo (c), universale alle bags $B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, B_{j+4}, B_{j+5}$. Allora, se:

- $j = i$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_i, w, B_{i+4}, B_{i+5}$;
- $j = i + 6$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+1}, w, B_{i+4}, B_{i+5}$;
- $j = i + 5$: v e w possono essere adiacenti oppure no;
- $j = i + 4$: v e w devono essere adiacenti, altrimenti esisterebbe un 5-buco per $v, B_i, B_{i+6}, w, B_{i+2}$.

Gli altri casi sono simmetrici.

4.20 Relazioni tra nodi di tipo (d) totali e semiparziali

Valgono esattamente le stesse considerazioni fatte riguardo ai nodi di tipo (b) totali. Infatti, se v è un nodo di tipo (d) totale e w un nodo di tipo (d) semiparziale, le adiacenze tra v e w sono le stesse che si avrebbero tra v e u , con u nodo di tipo (b) totale, universale alle stesse bags di w .

4.21 Relazioni tra nodi di tipo (d) totali e parziali

Sia v un nodo di tipo (d) totale, universale alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, B_{i+5}$; sia poi w un nodo di tipo (d) parziale, universale alle bags B_j, B_{j+1}, B_{j+2} e parziale per B_{j+3} e B_{j+5} . Siano:

$$N_k = \{\text{nodi di } B_k \text{ non adiacenti a } w\}$$

$$A_k = \{\text{nodi di } B_k \text{ adiacenti a } w\}.$$

Allora, se:

- $j = i$: v e w sono adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$;
- $j = i + 1$: v e w sono adiacenti, altrimenti $\alpha(G) > 3$;
- $j = i + 2$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+2}, w, B_{i+4}, N_{i+5}$;
- $j = i + 3$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_{i+3}, w, A_{i+6}, B_i$;
- $j = i + 4$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, A_i, w, B_{i+4}, B_{i+3}$;
- $j = i + 5$: v e w possono essere adiacenti oppure no;
- $j = i + 6$: v e w sono adiacenti, altrimenti G conterrebbe un 5-buco passante per $v, B_i, w, A_{i+4}, B_{i+3}$.

Gli altri casi sono simmetrici.

Capitolo 5

Partizione del grafo in quattro cliques

Teorema 5.1 *Dato un grafo G contenente un 7-buco, nessun antibuco dispari e con $\alpha(G) = 3$, il sottografo indotto di G formato da un suo 7-buco espanso massimale H e dai nodi di tipo (b), (c) e (d) per H è partizionabile in quattro cliques.*

Dim. Il 7-buco espanso H si può partizionare in quattro cliques, formate una da una sola bag (che chiameremo bag singola) e le altre da tre coppie di bags adiacenti; poiché per la bag singola ci sono sette possibili scelte, esistono sette possibili partizioni di H di questo tipo.

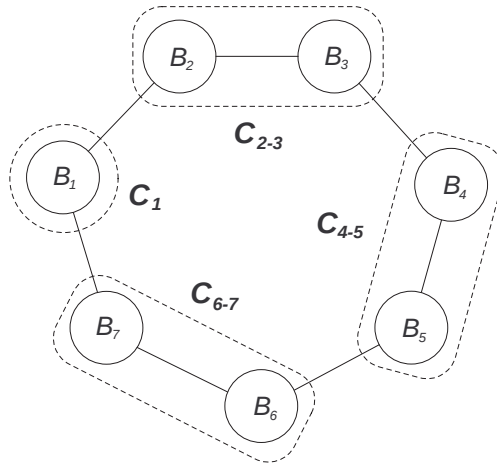


Figura 5.1: Partizione di H in quattro cliques.

Partizioneremo il grafo scegliendo la bag singola e inserendo ogni nodo di tipo (b), (c) e (d) in una delle cliques di H . Indichiamo con C_i la clique contenente la bag singola B_i e con $C_{i-(i+1)}$ la clique contenente le bags B_i e B_{i+1} .

Iniziamo dai nodi di tipo (d) totali e di tipo (c); indichiamo con v_i i nodi di tipo (d) totali universali alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, B_{i+5}$ e con w_i i nodi di tipo (c) universali alle bags $B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+4}, B_{i+5}, B_{i+6}$.

Due nodi v_i e w_j possono non essere adiacenti se e solo se $i = j + 1$ oppure $i = j - 1$. Ora supponiamo che la bag singola sia B_1 . Allora per i nodi v_i e w_i valgono le seguenti proprietà:

	Può entrare nella clique:		Non adiacente ai nodi:
	singola	doppia	
v_1	C_1	C_{2-3}	v_3, v_6, w_2, w_7
v_2	—	C_{2-3}, C_{4-5}	v_4, v_7, w_1, w_3
v_3	C_1	C_{4-5}	v_1, v_5, w_2, w_4
v_4	—	C_{4-5}, C_{6-7}	v_2, v_6, w_3, w_5
v_5	C_1	C_{6-7}	v_3, v_7, w_4, w_6
v_6	C_1	C_{6-7}	v_1, v_4, w_5, w_7
v_7	C_1	C_{2-3}	v_2, v_5, w_1, w_6

	Può entrare nella clique:		Non adiacente ai nodi:
	singola	doppia	
w_1	—	C_{2-3}, C_{6-7}	v_2, v_7
w_2	C_1	C_{6-7}	v_1, v_3
w_3	C_1	C_{4-5}	v_2, v_4
w_4	C_1	C_{2-3}	v_3, v_5
w_5	—	C_{2-3}, C_{6-7}	v_4, v_6
w_6	C_1	C_{4-5}	v_5, v_7
w_7	C_1	C_{4-5}	v_1, v_6

Da qui si deduce che tutti i nodi v_i e w_i si possono inserire nelle cliques $C_1, C_{2-3}, C_{4-5}, C_{6-7}$ in vari modi.

Gli inserimenti possibili sono:

	In C_1 :	In C_{2-3} :	In C_{4-5} :	In C_{6-7} :
A)	v_1, v_7, w_3, w_4^*	v_2, w_4^*, w_5	v_3, v_4, w_6, w_7	v_5, v_6, w_1, w_2
B)	v_5, v_6, w_2^*, w_3	v_1, v_7, w_4, w_5	v_2, v_3, w_6, w_7	v_4, w_1, w_2^*
C)	v_3, v_6, v_7, w_3	v_1, w_1^*, w_4, w_5	v_2, w_6, w_7	v_4, v_5, w_1^*, w_2
D)	v_3, v_6, w_3, w_6^*	v_1, v_7, w_4, w_5	v_2, w_6^*, w_7	v_4, v_5, w_1, w_2
E)	$v_6, v_7, w_2^*, w_3, w_4^*$	v_1, w_1^*, w_4^*, w_5	v_2, v_3, w_6, w_7	v_4, v_5, w_1^*, w_2^*
F)	$v_6, w_2^*, w_3, w_4^*, w_6^*$	v_1, v_7, w_4^*, w_5^*	v_2, v_3, w_6^*, w_7	v_4, v_5, w_1, w_2^*
G)	$v_6, v_7, w_2^*, w_3^*, w_4^*$	v_1, v_2, w_4^*, w_5	v_3, w_3^*, w_6, w_7	v_4, v_5, w_1, w_2^*
H)	v_3, v_6, v_7, w_3^*	v_1, v_2, w_4, w_5	w_3^*, w_6, w_7	v_4, v_5, w_1, w_2
I)	v_3, v_6, v_7, w_3	v_1, v_2, w_4, w_5^*	v_4, w_6, w_7	v_5, w_1, w_2, w_5^*
J)	v_3, v_7, w_3, w_7^*	v_1, v_2, w_4, w_5	v_4, w_6, w_7^*	v_5, v_6, w_1, w_2
K)	$v_6, v_7, w_2^*, w_3, w_4^*$	v_1, v_2, w_4^*, w_5^*	v_3, v_4, w_6, w_7	v_5, w_1, w_2^*, w_5^*
L)	$v_7, w_2^*, w_3, w_4^*, w_7^*$	v_1, v_2, w_4^*, w_5	v_3, v_4, w_6, w_7^*	v_5, v_6, w_1, w_2^*

Con un asterisco sono indicati i nodi che possono essere inseriti indifferentemente in due cliques diverse.

Se G contenesse nodi di tipo (b) parziali, non potrebbe contenerne di tipo (b) totali e (d) parziali e semiparziali. Inoltre i nodi di tipo (b) parziali sono adiacenti a quelli di tipo (c) e (d) totali. Quindi se u fosse un nodo di tipo (b) parziale, adiacente alle bags $B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}$, esso si potrebbe naturalmente inserire in una clique, con l'unica limitazione che la bag singola non fosse B_{i+4} o B_{i+6} .

Ora consideriamo, invece, il caso in cui G contenesse nodi di tipo (b) totali. Indichiamo con t_i i nodi di tipo (b) totali universali alle bags $B_{i+2}, B_{i+3}, B_{i+4}, B_{i+5}$. In questo caso si ha:

	Può entrare nella clique:		Non adiacente ai nodi:
	singola	doppia	
t_1	—	C_{4-5}	$v_1, v_5, w_1, w_2, w_4, w_5$
t_2	—	C_{4-5}, C_{6-7}	$v_2, v_6, w_2, w_3, w_5, w_6$
t_3	C_1	C_{6-7}	$v_3, v_7, w_3, w_4, w_6, w_7$
t_4	C_1	C_{6-7}	$v_1, v_4, w_1, w_4, w_5, w_7$
t_5	C_1	C_{2-3}	$v_2, v_5, w_1, w_2, w_5, w_6$
t_6	C_1	C_{2-3}	$v_3, v_6, w_2, w_3, w_6, w_7$
t_7	—	C_{2-3}, C_{4-5}	$v_4, v_7, w_1, w_3, w_4, w_7$

Quindi, relativamente agli inserimenti dei nodi di tipo (c) e (d) totali, i nodi di tipo (b) totali che si possono inserire sono:

	In C_1 :	In C_{2-3} :	In C_{4-5} :	In C_{6-7} :
A)	t_5	$t_6, t_7(w_4)$	t_1	t_3
B)	t_4	t_6	t_1	$t_2(w_2), t_3$
C)	t_4, t_5	t_6	t_1	t_3
D)	$t_4, t_5(w_6)$	t_6	t_1	t_3
E)	$t_4(w_4), t_5(w_2)$	$t_6, t_7(w_1, w_4)$	t_1	$t_2(w_2), t_3$
F)	$t_4(w_4), t_5(w_2, w_6)$	t_6	t_1	$t_2(w_2), t_3$
G)	$t_4(w_4), t_5(w_2)$	$t_6, t_7(w_4)$	t_1	$t_2(w_2), t_3$
H)	t_4, t_5	t_6	t_1	t_3
I)	t_4, t_5	t_6	t_1	t_3
J)	$t_4(w_7), t_5$	t_6	t_1	t_3
K)	$t_4(w_4), t_5(w_2)$	$t_6, t_7(w_4)$	t_1	$t_2(w_2, w_5), t_3$
L)	$t_4(w_4, w_7), t_5(w_2)$	$t_6, t_7(w_4)$	t_1	t_3

Sono indicati tra parentesi i nodi w_i che erano inseribili in due cliques a scelta e non possono essere inseriti assieme ai nodi di tipo (b) totali che li affiancano.

Per quanto visto nel capitolo precedente, le bags di tipo (b) totali non vuote possono essere al massimo quattro. Quindi se i nodi di questo tipo fossero consecutivi e fossero:

- t_1, t_2, t_3, t_4 : si potrebbero inserire nelle quattro cliques con gli inserimenti B), E), F), G) o K);
- t_2, t_3, t_4, t_5 : non si potrebbero inserire nelle quattro cliques;
- t_3, t_4, t_5, t_6 : si potrebbero inserire nelle quattro cliques con gli inserimenti C), D), E), F), G), H), I), J), K) o L);
- t_4, t_5, t_6, t_7 : non si potrebbero inserire nelle quattro cliques;
- t_1, t_5, t_6, t_7 : si potrebbero inserire nelle quattro cliques con gli inserimenti A), E), G), K) o L);
- t_1, t_2, t_6, t_7 : si potrebbero inserire nelle quattro cliques con gli inserimenti E), G) o K);

-
- t_1, t_2, t_3, t_7 : si potrebbero inserire nelle quattro cliques con gli inserimenti E), G) o K).

Se invece i nodi di tipo (b) totali fossero opposti a due a due, se fossero:

- t_1, t_2, t_4, t_5 : non si potrebbero inserire nelle quattro cliques;
- t_2, t_3, t_5, t_6 : non si potrebbero inserire nelle quattro cliques;
- t_3, t_4, t_6, t_7 : non si potrebbero inserire nelle quattro cliques;
- t_1, t_4, t_5, t_7 : non si potrebbero inserire nelle quattro cliques;
- t_1, t_2, t_5, t_6 : non si potrebbero inserire nelle quattro cliques;
- t_2, t_3, t_6, t_7 : si potrebbero inserire nelle quattro cliques con gli inserimenti E), G) o K);
- t_1, t_3, t_4, t_7 : non si potrebbero inserire nelle quattro cliques.

Quindi se nel grafo G fossero presenti tutti i nodi di tipo (c), (d) totali e (b) totali, se quest'ultimi fossero $t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}$ la bag singola non potrebbe essere B_{i+4} o B_{i+6} , mentre se fossero $t_i, t_{i+1}, t_{i+3}, t_{i+4}$ la bag singola dovrebbe necessariamente essere B_{i+2} .

Ora supponiamo che G contenga anche nodi di tipo (d) parziali. Per quanto visto nel capitolo precedente, basta studiare i nodi: u_1 , universale alle bags B_i, B_{i+1}, B_{i+2} e parziale per B_{i+3}, B_{i+5} ; u_2 , universale alle bags B_i, B_{i+5}, B_{i+6} e parziale per B_{i+1}, B_{i+3} ; u_3 , universale alle bags $B_{i+4}, B_{i+5}, B_{i+6}$ e parziale per B_{i+1}, B_{i+3} ; u_4 , universale alle bags B_i, B_{i+1}, B_{i+6} e parziale per B_{i+3}, B_{i+5} .

Il nodo u_1 deve essere adiacente ad u_4 e può essere adiacente oppure no a u_2 e u_3 ; u_2 è adiacente a u_3 e la sua presenza esclude quella di u_4 . Infine, u_3 è adiacente a u_4 .

Supponiamo ancora che la bag singola sia B_1 e ruotiamo questi nodi per studiare i vari casi. Per ora tralasciamo i nodi di tipo (b) totali.

Caso $i = 1$:

	Può entrare nella clique:		Non adiacente ai nodi:
	singola	doppia	
u_1	C_1	C_{2-3}	v_3, w_2
u_2	C_1	C_{6-7}	v_1, w_7
u_3	—	C_{6-7}	v_2, w_3
u_4	C_1	—	v_4, w_5

Con tutti gli inserimenti visti prima, si possono inserire u_1 in C_{2-3} , u_2 e u_3 in C_{6-7} e u_4 in C_1 .

Caso $i = 2$:

	Può entrare nella clique:		Non adiacente ai nodi:
	singola	doppia	
u_1	—	C_{2-3}	v_4, w_3
u_2	C_1	—	v_2, w_1
u_3	C_1	C_{6-7}	v_3, w_4
u_4	C_1	C_{2-3}	v_5, w_6

Con tutti gli inserimenti visti prima, si possono inserire u_1 e u_4 in C_{2-3} , u_2 in C_1 e u_3 in C_{6-7} .

Caso $i = 3$:

	Può entrare nella clique:		Non adiacente ai nodi:
	singola	doppia	
u_1	—	C_{4-5}	v_5, w_4
u_2	C_1	C_{2-3}	v_3, w_2
u_3	C_1	—	v_4, w_5
u_4	—	C_{2-3}	v_6, w_7

In ogni caso si possono inserire u_1 in C_{4-5} , u_2 e u_4 in C_{2-3} e u_3 in C_1 .

Caso $i = 4$:

	Può entrare nella clique:		Non adiacente ai nodi:
	singola	doppia	
u_1	—	C_{4-5}	v_6, w_5
u_2	—	C_{2-3}	v_4, w_3
u_3	C_1	C_{2-3}	v_5, w_6
u_4	—	C_{4-5}	v_7, w_1

Con tutti gli inserimenti possono entrare u_1 e u_4 in C_{4-5} , u_2 e u_3 in C_{2-3} .

Caso $i = 5$:

	Può entrare nella clique:		Non adiacente ai nodi:
	singola	doppia	
u_1	—	C_{6-7}	v_7, w_6
u_2	—	C_{4-5}	v_5, w_4
u_3	—	C_{2-3}	v_6, w_7
u_4	—	C_{4-5}	v_1, w_2

Con tutti gli inserimenti possono entrare u_1 in C_{6-7} , u_2 e u_4 in C_{4-5} e u_3 in C_{2-3} .

Caso $i = 6$:

	Può entrare nella clique:		Non adiacente ai nodi:
	singola	doppia	
u_1	C_1	C_{6-7}	v_1, w_7
u_2	—	C_{4-5}	v_6, w_5
u_3	—	C_{4-5}	v_7, w_1
u_4	—	C_{6-7}	v_2, w_3

In ogni caso possono entrare u_1 e u_4 in C_{6-7} , u_2 e u_3 in C_{4-5} .

Caso $i = 7$:

	Può entrare nella clique:		Non adiacente ai nodi:
	singola	doppia	
u_1	C_1	—	v_2, w_1
u_2	—	C_{6-7}	v_7, w_6
u_3	—	C_{4-5}	v_1, w_2
u_4	C_1	C_{6-7}	v_3, w_4

In ogni caso possono entrare u_1 in C_1 , u_2 e u_4 in C_{6-7} e u_3 in C_{4-5} .

Quindi i nodi di tipo (d) parziali non forzano la scelta della bag singola, e lasciano aperti tutti i possibili inserimenti A), B), $\dots$, L).

Se ora torniamo a considerare anche i nodi di tipo (b) totali, il grafo resta partizionabile in quattro cliques; infatti preso, ad esempio, u_1 (universale alle bags B_i, B_{i+1}, B_{i+2} e parziale per B_{i+3}, B_{i+5}), l'unico nodo di tipo (b) totale a cui esso può non essere adiacente è t_i . Ma u_1 e t_i sono sempre forzati ad entrare in cliques diverse, a meno che la bag singola non sia B_{i+2} ; in tal caso, però, u_1 può entrare nella clique $C_{i-(i+1)}$, perché, come appena visto, se uno dei nodi (d) parziali può scegliere tra una bag singola e una doppia non è forzato a entrare nella singola.

Infine, restano da esaminare i nodi di tipo (d) semiparziali. Essi possono entrare nelle stesse cliques dei corrispondenti nodi di tipo (b) totali, poiché si comportano in modo analogo per quanto riguarda la loro disposizione; inoltre, se esistesse un nodo u , di qualsiasi tipo, non adiacente ad un nodo v di tipo (d) semiparziale, u non sarebbe adiacente nemmeno ad un nodo di tipo (b) totale corrispondente a v (cioè universale alle stesse bags di v). $\square$

Dalla dimostrazione del teorema 5.1 discende subito un algoritmo di partizione in quattro cliques del sottografo di G formato da H e dai suoi nodi di tipo b), c) e d).

Bibliografia

- [1] M. Chudnovsky, G. Cornuéjols, X. Liu, P. D. Seymour, K. Vušković; *Cleaning for Bergeness*, manoscritto (2002).
- [2] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. D. Seymour, R. Thomas; *Progress on Perfect Graph*, Mathematical Programming B 97 (2003), 405-422.
- [3] M. Chudnovsky, P. D. Seymour; *Recognizing Berge Graph*, manoscritto (2002).
- [4] M. Conforti, G. Cornuéjols; *Graph whitout Odd Holes, Parachutes or Proper Wheels: A Generalization of Meyniel Graph and of Line Graph of Bipartite Graph (1999)*, Journal of Combinatorial Theory B 87 (2003), 300-330.
- [5] M. Conforti, B. Gerards, Ajai Kapoor; *A Theorem of Truemper*, Combinatorica 20 (2000), 15-26.
- [6] M. Conforti, G. Cornuéjols, A. Kapoor, K. Vušković; *Even and Odd Holes in Cap-Free Graph*, Journal of Graph Theory (1999), 289-308.
- [7] M. Conforti, G. Cornuéjols, A. Kapoor, K. Vušković; *Triangle-Free Graph that are Signable Whitout Even Holes*, Journal of Graph Theory (2000), 203-220.
- [8] M. Conforti, G. Cornuéjols, M. R. Rao; *Decomposition of Balanced Matrices*, Journal of Combinatorial Theory B 77 (1999), 292-406.
- [9] M. Conforti, G. Cornuéjols, G. Zambelli; *Decomposing Berge Graph Containing no Proper Wheels, Stretchers or Their Complements*, manoscritto (maggio 2002).
- [10] Tommy R. Jensen, Bjarne Toft; *Graph Coloring Problems*, Wiley-Interscience (1995).

- [11] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas; *The Four-Color Problem*, Journal of Combinatorial Theory B 70 (1997), 2-44.
- [12] Douglas B. West; *Introduction to Graph Theory*, Pearson Education (2^a ed.).

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Notazioni e definizioni	1
1.2	Numero cromatico di un grafo	3
2	Nozioni di base	17
2.1	7-buchi espansi	17
2.2	Proprietà dei 7-buchi espansi	19
3	Nodi esterni al 7-buco espanso	23
3.1	Nodi di tipo (a)	24
3.2	Nodi di tipo (b)	25
3.3	Nodi di tipo (c) e (d)	28
4	Relazioni tra nodi esterni al 7-buco espanso	33
4.1	Relazioni tra nodi di tipo (b) parziali	33
4.2	Relazioni tra nodi di tipo (b) parziali e totali	33
4.3	Relazioni tra nodi di tipo (b) totali	34
4.4	Relazioni tra nodi di tipo (c)	34
4.5	Relazioni tra nodi di tipo (c) e nodi di tipo (b) parziali	37
4.6	Relazioni tra nodi di tipo (c) e nodi di tipo (b) totali	37
4.7	Relazioni tra nodi di tipo (d) parziali	38
4.8	Relazioni tra nodi di tipo (d) parziali e di tipo (b) parziali	39
4.9	Relazioni tra nodi di tipo (d) parziali e di tipo (b) totali	40
4.10	Relazioni tra nodi di tipo (d) parziali e di tipo (c)	40
4.11	Relazioni tra nodi di tipo (d) semiparziali	41
4.12	Relazioni tra nodi di tipo (d) semiparziali e di tipo (b) parziali	42
4.13	Relazioni tra nodi di tipo (d) semiparziali e di tipo (b) totali	43
4.14	Relazioni tra nodi di tipo (d) semiparziali e nodi di tipo (c)	43
4.15	Relazioni tra nodi di tipo (d) semiparziali e parziali	44
4.16	Relazioni tra nodi di tipo (d) totali	45
4.17	Relazioni tra nodi di tipo (d) totali e di tipo (b) parziali	45

4.18	Relazioni tra nodi di tipo (d) totali e di tipo (b) totali	46
4.19	Relazioni tra nodi di tipo (d) totali e nodi di tipo (c)	46
4.20	Relazioni tra nodi di tipo (d) totali e semiparziali	47
4.21	Relazioni tra nodi di tipo (d) totali e parziali	47
5	Partizione del grafo in quattro cliques	49
	Bibliografia	57