UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI SCIENZE STATISTICHE

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA ECONOMIA E FINANZA

TESI DI LAUREA

Il *VALUE AT RISK* PER LA GESTIONE DEL RISCHIO DI MERCATO: METODI DI CALCOLO E PROCEDURE DI BACKTESTING

RELATORE: Ch.mo Prof. SILVANO BORDIGNON
CORRELATORE: Dott. DAVIDE RAGGI

LAUREANDA: SILVIA FURLAN
MATRICOLA: 483904

ANNO ACCADEMICO 2004 - 2005

A mia sorella

RINGRAZIAMENTI

Se sono giunta a questo primo traguardo della mia carriera universitaria, lo devo a tutti coloro che mi sono stati vicino e che mi hanno permesso di arrivare fin qui incoraggiandomi soprattutto nei momenti più difficili.

È per tale motivo che mi sembra doveroso spendere due parole per le persone che mi stanno più a cuore.

Innanzitutto, mi sento di ringraziare il Prof. Silvano Bordignon, per avermi seguito nella stesura di questo lavoro.

Un ringraziamento particolare va al Dott. Davide Raggi, per la sua disponibilità, per tutto il tempo dedicatomi e per i suoi preziosi consigli.

Voglio inoltre ringraziare la mia famiglia, Daniele e tutti i miei amici, i quali mi hanno fatto trascorrere momenti di spensieratezza anche quando non c'era molto da stare tranquilli.

Un sincero grazie a tutti i miei colleghi di facoltà, i quali hanno condiviso con me questi tre anni e con i quali è stato possibile superare al meglio le difficoltà a cui siamo andati incontro.

INDICE

INTRODUZIONE

L'importanza della gestione del rischio comincia a suscitare notevole interesse in particolar modo negli ultimi anni. I cambiamenti avvenuti nell'ambito dell'economia e della finanza hanno, in qualche modo provocato un aumento della volatilità delle variabili finanziarie generata dalla crescente integrazione internazionale dei mercati finanziari. Tale accresciuta volatilità dei mercati si è riflessa in modo crescente in episodi di crisi, e a volte di insolvenza, di istituzioni finanziarie il cui management si è dimostrato incapace di adottare sistemi adeguati di misurazione e controllo dei rischi assunti. È proprio da qui che si cominciano ad elaborare i primi modelli di *risk management* per la misurazione appunto dei rischi cui una banca o altra istituzione finanziaria è soggetta. Tali modelli verranno poi adottati non solo da banche o istituzioni finanziarie, ma anche dalle imprese generalmente di grandi dimensioni.

Le tradizionali istituzioni bancarie si sono via via trasformate in nuove imprese di servizi finanziari, aprendosi a nuove linee di business e a nuovi rischi; le istituzioni non bancarie, dal canto loro, hanno iniziato a competere con le banche sul loro stesso terreno.
Come risultato, la classica distinzione tra attività bancarie e non bancarie si è indebolita.

Principalmente due sono le ragioni che stanno alla base di questa evoluzione:

- in primo luogo, la caduta delle barriere di regolamentazione ha permesso alle banche l'entrata in settori che fino a pochi anni fa erano loro preclusi;
- in secondo luogo, il grande processo di disintermediazione e l'altrettanto poderoso sviluppo dei mercati dei capitali ha permesso alle grandi multinazionali di reperire direttamente sul mercato i fondi necessari per lo svolgimento dell'attività produttiva.

La principale conseguenza di questi due fattori è stata la crisi della fonte tradizionale dei profitti bancari (il prestito a piccole o grandi imprese finanziato da depositi a basso costo).
Le banche hanno così cercato valore altrove, ad esempio in nuove forme di intermediazione dei rischi. In questo modo, la fonte di reddito delle banche si è spostata dallo spread tra raccolta e impieghi verso altre forme di profitto.

Sia la teoria che la pratica della gestione del rischio si è sviluppata enormemente nell'ultimo ventennio.
La teoria si è sviluppata a tal punto che la gestione del rischio è considerata come una distinta sottocategoria della teoria della finanza e tale disciplina ha attratto un largo numero di studiosi: non solo specialisti nel campo della finanza, ma anche specialisti di altre discipline ne vengono attratti.
Alla trasformazione della pratica, invece, hanno contribuito due fattori in particolare:

- un fattore è stato lo sviluppo della nuova teoria e la sua rapida traslazione nell'applicazione pratica (come gli studi portati avanti da Black – Scholes e, più recentemente da Heath – Jarrow – Morton);
- l'altro fattore è lo sviluppo del **Value at Risk**. L'approccio al VaR nasce come metodo di misurazione dei rischi di mercato, ma si realizzò ben presto che il VaR poteva fare molto di più che semplicemente essere usato per presentare relazioni di sintesi agli azionisti o per guidare la scelta delle decisioni interne all'impresa. Esso può essere anche utilizzato per guidare decisioni d'investimento aggiustando i rendimenti attesi con il rischio ad essi incorporato; può fornire informazioni ex-post per valutare le decisioni di investimento effettuate; può fornire un più consistente e integrato trattamento del rischio tra le istituzioni; inoltre la logica che esso incorpora conduce ad un nuovo sistema di controllo che lo rende più efficace contro le frodi e gli errori umani non rilevati.

I fattori che stanno alla base di questo grande sviluppo dell'analisi della gestione del rischio sono principalmente i seguenti:

- in primo luogo, un alto livello di instabilità (e quindi volatilità) dell'ambiente in cui si opera;
- instabilità dei tassi di interesse;
- instabilità nei tassi di cambio;
- la volatilità nel mercato dei valori mobiliari;
- il rapido sviluppo dell'Information Tecnology;
- la crescita dell'attività commerciale;
- lo sviluppo dei contratti derivati.

<u>I rischi della nuova finanza</u>

I principali rischi a cui sono sottoposte le istituzioni finanziarie sono:

- rischio di mercato (*market risk*): sorge da movimenti indesiderati nei prezzi, nei tassi di interesse, nei tassi di cambio, nelle volatilità delle opzioni. Un'importante estensione della moderna teoria di portafoglio è rappresentata dalle tecniche di valore al rischio (VaR) che rappresentano storicamente il primo passo dei sistemi di risk management finalizzato alla stima statistica delle probabilità di perdita monetaria;
- rischio di credito (*credit risk*): fa riferimento all'incapacità (potenziale) di una controparte di soddisfare i propri impegni contrattuali (si parla in questo caso di *counterparty default risk*);
- rischio di liquidità (*liquidity risk*): fa riferimento a quelle situazioni in cui il possessore di uno strumento finanziario incontra difficoltà a trasferire tale strumento prontamente e a prezzi convenienti;
- rischio operativo (*operational risk*): è il rischio che operazioni improprie di elaborazione o gestione dei sistemi si traducano in perdite monetarie. Esso comprende le perdite che possono verificarsi in caso di fallimento del sistema di controlli, di *trading* non autorizzato, di frode da parte delle funzioni di front office e back office, di inesperienza del personale, di sistemi informatici carenti, instabili o inadeguati;

- rischio di regolamento (*settlement risk*): è il rischio derivante dal mancato funzionamento dei sistemi di pagamento. Esso è un rischio misto, nel senso che l'origine del mancato pagamento può derivare dall'incapacità della controparte di saldare i propri debiti (rischio di credito) oppure da difficoltà tecniche (rischio operativo). Per attenuare la portata dei rischi di regolamento sono nati nuovi contratti finanziari, nonché dalla nascita di sistemi di consegna-contro-pagamento e dalla presenza di numerose Casse di compensazione e garanzia (clearing house) nei mercati regolamentati.

I manager devono perciò gestire l'esposizione della loro società a queste categorie di rischio. Devono decidere quali rischi possono sopportare, valutare i rischi in cui attualmente incorrono e variare la loro esposizione in accordo con il livello di rischio che si è disposti a tollerare.

In generale, sebbene i sistemi di stima del rischio di mercato siano ormai ad un livello di definizione e di utilizzo avanzato, è ancora lontano l'obiettivo di integrare il rischio di mercato, di liquidità, di credito e operativo in un unico modello.

Questo lavoro si articola principalmente in cinque parti fondamentali.

La prima parte analizza più specificatamente il rischio di mercato suddiviso tra le sue componenti, e introduce il *Value at Risk* per la misurazione di tale rischio.

La seconda parte è incentrata sui diversi metodi di calcolo dei modelli *VaR* e le loro principali caratteristiche.

Le terza parte si occupa della valutazione del *VaR* ottenuto dalla fase di stima e dunque illustra le principali metodologie di *backtesting*.

Il quarto capitolo si occupa dei modelli per la stima della volatilità, con maggior attenzione ai modelli GARCH e APARCH.

Nel quinto capitolo viene presentata un'analisi empirica di calcolo del VaR e relativa valutazione delle stime ottenute.

Capitolo 1

IL RISCHIO DI MERCATO E I MODELLI *VALUE AT RISK*

---

1. *Classificazione dei rischi di mercato*

Abbiamo prima fatto un breve cenno sul rischio di mercato. In generale, si possono classificare cinque principali categorie di rischi di mercato:

- *rischio di cambio*, quando il valore di mercato delle posizioni assunte è sensibile a variazioni dei tassi di cambio (acquisti e vendite a pronti e a termine, currency swap, currency future, currency option, titoli azionari, obbligazionari e altre attività/passività denominati in valuta estera);
- *rischio di interesse*, quando il valore di mercato delle posizioni assunte è sensibile a variazioni dei tassi di interesse (titoli obbligazionari, forward rate agreement, interest rate future, interest rate swap, cap, floor, collar);
- *rischio azionario*, quando il valore di mercato delle posizioni assunte è sensibile all'andamento dei mercati azionari (titoli azionari, stock-index future, stock option, ecc.);
- *rischio merci*, quando il valore di mercato delle posizioni assunte è sensibile a variazioni dei prezzi delle commodity (acquisti e vendite a pronti e a termine di merci, commodity swap, commodity future, commodity option ecc.);
- *rischio di volatilità*, quando il valore di mercato delle posizioni assunte è sensibile a variazione della volatilità di una delle variabili considerate sopra (opzioni su valute, opzioni su tassi di interesse, opzioni su titoli azionari, opzioni su commodity, ecc.).

I rischi di mercato sono venuti assumendo, nell'ambito dei mercati finanziari internazionali, una rilevanza crescente nel corso dell'ultimo ventennio in seguito a due fenomeni particolari.

Il primo è connesso al processo di titolarizzazione (*securitization*) che ha portato alla progressiva sostituzione di attività illiquide (prestiti, mutui) con attività dotate di un mercato secondario liquido e dunque di un prezzo. Tale processo ha favorito, congiuntamente all'affinamento delle tecniche di misurazione dei risultati economici, la diffusione dei criteri di misurazione al mercato (*market-to-market*) delle singole posizioni detenute dagli intermediari finanziari e dunque l'immediata evidenziazione dei profitti e delle perdite connessi alle variazioni di breve periodo delle condizioni di mercato.

Il secondo fenomeno è rappresentato dalla progressiva crescita del mercato degli strumenti finanziari derivati, il cui principale profilo di rischio per gli intermediari finanziari che li negoziano è appunto rappresentato dalla variazione del relativo valore di mercato causata da variazioni dei prezzi delle attività sottostanti e/o dalle condizioni di volatilità degli stessi.

Come vedremo in seguito, tale crescente attenzione ai rischi di mercato non ha riguardato esclusivamente gli intermediari finanziari e il mondo accademico, ma si è estesa anche alle autorità di vigilanza.

2. *Problemi rilevati nell'ambito della gestione del rischio di mercato*

L'approccio tradizionale alla misurazione dei rischi di mercato si basava generalmente sui valori nominali delle singole posizioni. In altri termini, sia la valutazione dell'esposizione al rischio, sia la successiva imposizione di limiti alle singole unità operative, si basavano tradizionalmente sul valore nominale delle posizioni. Questo metodo ha però dei limiti considerevoli: innanzitutto, il valore nominale di una posizione non coglie il diverso valore di mercato delle posizioni; non coglie nemmeno il diverso grado di sensibilità del valore di mercato di posizioni differenti rispetto ad analoghe variazioni dei fattori di mercato; infine, non tiene in considerazione le condizioni di volatilità e di correlazione dei prezzi / tassi.

L’inadeguatezza del metodo tradizionale è emersa in modo rilevante in seguito al crescente coinvolgimento delle principali istituzioni finanziarie internazionali nell’attività di *trading* di opzioni.

I problemi emersi hanno portato all’utilizzo di misure di sensibilità delle singole posizioni quali la *duration* e il *basis point value* per i titoli obbligazionari, il beta per i titoli azionari e i coefficienti delta, gamma, vega e rho per le opzioni.

L’utilizzo delle misure di sensibilità presenta tuttavia ancora diversi limiti.
Il primo è associato al fatto che posizioni di natura diversa vengono quantificate facendo riferimento a coefficienti diversi, impedendo di confrontare o aggregare tra loro i rischi di posizioni differenti; non sempre, inoltre, le misure di sensibilità sono tra loro aggregabili; in aggiunta, rimane sempre la mancata considerazione del diverso grado di volatilità e di correlazione dei diversi fattori di mercato.

3. *Origini e sviluppo del VaR*

Il tentativo di superare i problemi sopra menzionati ha condotto alcune istituzioni finanziarie a sviluppare modelli che consentissero di quantificare, confrontare e aggregare il rischio connesso a posizioni e portafogli differenti. Tali modelli, originariamente introdotti nella prima metà degli anni Ottanta dalle principali banche commerciali statunitensi, sono generalmente denominati modelli del **“valore a rischio”, o *Value-at-Risk (VaR)***.

L’obiettivo ultimo di tali modelli è quello di ottenere una misura della massima perdita che una posizione o un portafoglio di posizioni può subire, dato un certo livello di confidenza, nel corso di un predeterminato orizzonte temporale.

Una delle prime istituzioni a sviluppare un modello VaR e la prima a renderlo pubblico è stata la banca commerciale statunitense J.P.Morgan, autrice del modello RiskMetrics.
Altre istituzioni hanno poi elaborato propri modelli interni e ci fu una competizione considerevole per stabilire quale fosse il sistema standard. Alcuni sistemi di software per la misura del VaR sono stati sviluppati da compagnie specializzate, le quali

concentrarono la distribuzione di questi software, ma non erano in una posizione favorevole per l'approvvigionamento dei dati.

I sistemi risultanti differiscono considerabilmente tra loro. Anche se essi sono basati sulle stesse idee teoriche, ci sono comunque grandi differenze per quanto riguarda le assunzioni su cui si basano, l'utilizzo dei dati, le procedure di stima della volatilità e della correlazione, e molti altri dettagli. Se ciò non fosse sufficiente, non tutti i VaR si basano sulla teoria di portafoglio. Alcuni sistemi di stima del VaR sono costruiti usando l'approccio delle simulazioni storiche, o su ancor più sofisticati approcci, quale il metodo Monte Carlo. Tutti questi approcci hanno aspetti positivi, ma anche numerose limitazioni, che vedremo in seguito.

Il quesito cui i modelli VaR tentano di dare una risposta può essere formulato nel seguente modo:
"Qual è la perdita massima che potrebbe essere subita nel corso di un determinato orizzonte temporale, tale che vi sia una probabilità molto bassa, per esempio pari all'1%, che la perdita effettiva risulti superiore a tale importo?".

Tre dunque sono gli elementi caratterizzanti i modelli VaR:
- la massima perdita potenziale che una posizione o un portafoglio può subire;
- il livello di confidenza;
- un determinato orizzonte temporale.

Il Value at Risk è, dunque, un metodo di sintesi del rischio presente in un certo portafoglio, finanziario e non.
Esso esprime, in forma monetaria, il livello di rischio a cui il detentore del portafoglio è soggetto. Sotto determinate condizioni, il Value at Risk misura la massima perdita probabile che – con un determinato intervallo di confidenza – potrà verificarsi tenendo il proprio portafoglio a posizioni inalterate per un certo periodo di tempo. Ad esempio, se il livello di confidenza è pari al 99% e il periodo di detenzione (*holding period*) è di 5 giorni, un VaR di 5000 euro indica che, detenendo il portafoglio a posizioni inalterate per i successivi 5 giorni, la massima perdita che si potrebbe dover sopportare non risulterà maggiore – con il 99% di probabilità – a 5000 euro.

Il VaR di una posizione o di un portafoglio rappresenta perciò una misura di tipo probabilistico, la quale assume valori diversi in corrispondenza di differenti livelli di confidenza. Definendo con c il livello di confidenza e con L (*loss*) la perdita, si ha:

$$\Pr(L > VaR) = 1 - c$$

Si noti come la misura di VaR si limiti a stabilire la probabilità che la perdita effettiva risulti superiore allo stesso VaR. Nel caso in cui tale evento si verifichi, essa non fornisce invece alcuna indicazione circa la dimensione di tale superamento.
Dunque, possiamo più brevemente definire il VaR come la stima del cambiamento potenziale del valore di portafoglio con un certo livello di confidenza statistica e in un certo periodo di detenzione.

In questo cambiamento potenziale risiede il concetto antico di "rischio di mercato".
Alcuni aspetti del rischio di mercato possono essere "modellizzati" con un certo grado di confidenza, introducendo tuttavia un'altra fonte di rischio (il cosiddetto *model risk*, cioè il rischio derivante da una imperfetta modellizzazione della realtà finanziaria). La capacità di misurare e gestire il rischio di mercato dipende dunque dalla bontà del modello utilizzato e dalla corretta rappresentazione delle posizioni che costituiscono il portafoglio o i portafogli oggetto di analisi.

I modelli VaR, utilizzando per tutte le posizioni ipotesi uniformi relative al grado di sensibilità rispetto alle variazioni dei fattori di mercato, alla variabilità dei rendimenti di questi ultimi, all'orizzonte temporale di riferimento per la stima della perdita potenziale e al livello di confidenza, consentono di ottenere misure di rischio relative a strumenti e portafogli differenti, le quali risultano confrontabili tra loro. Per questo motivo, essi vengono utilizzati per tre esigenze fondamentali:

- confrontare le diverse alternative di impiego del capitale di rischio di un'istituzione finanziaria;
- valutare la redditività del capitale allocato;
- "prezzare" in modo corretto le singole operazioni sulla base del relativo grado di rischio.

Le stime VaR hanno due importanti caratteristiche.

La prima è che ci conducono ad una comune misura consistente di rischio tra diverse posizioni e diversi fattori di rischio. Ci fornisce dunque una comune unità di misura che rende possibile per le istituzioni gestire i loro rischi in una varietà di modi, prima impossibile.

L'altra caratteristica del VaR è che tiene conto delle correlazioni tra i diversi fattori di rischio. Se, ad esempio, due rischi si compensano l'un l'altro, il VaR tiene conto di ciò, e l'informazione che ci restituisce è che il rischio totale è ragionevolmente più basso. Se gli stessi fattori di rischio non si compensassero, il VaR ci darebbe una stima del rischio totale più alta.

Nonostante i suoi molteplici utilizzi, il VaR ha anche delle limitazioni.

Emergono in particolar modo tre limiti principali. Un primo problema è che con questo metodo si cerca di prevedere potenziali perdite future utilizzando dati passati, basandosi sull'assunzione, che può essere o no verificata, che la relazione continui a rimanere tale anche in futuro. E questa è la maggior causa dei gravi collassi dei mercati azionari, i quali infliggono perdite molto più grandi di quelle che qualsiasi modello di questo tipo avesse potuto prevedere.

Un secondo problema deriva dal fatto che tutti i sistemi VaR sono inevitabilmente basati su assunzioni che non possono essere valide in ogni data circostanza, e quindi i loro risultati possono essere compromessi.

Infine, c'è il problema che nessun sistema VaR è semplicissimo. Per quanto buono sia il sistema, esso deve essere usato solamente da persone che sappiano come usarlo, e questo rappresenta un limite non banale.

Appendice 1

Portfolio theory e VaR

Il VaR è una naturale progressione della teoria di portafoglio (PT). Nonostante ciò, ci sono importanti differenze tra loro:

- PT interpreta i rischi in termini di deviazione standard dei rendimenti, mentre l'approccio del VaR li interpreta in termini di massima perdita potenziale. La nozione del VaR è molto più utilizzata;
- L'approccio varianza – covarianza del VaR poggia sulle stesse basi teoriche della PT; non è però lo stesso per gli altri due approcci (simulazione storica e simulazione Monte Carlo). Si commette dunque un errore considerare tutti gli approcci al VaR come un'applicazione o uno sviluppo della teoria di portafoglio;
- Il metodo VaR può essere applicato ad una categoria più ampia di rischi: PT è limitata ai rischi di prezzi di mercato, mentre il VaR può essere applicato al rischio di credito, di liquidità e altri rischi, nonché a quello di mercato. Il VaR è inoltre molto più flessibile, nel senso che si possono scegliere diverse procedure per adattarsi a diverse circostanze;
- Il VaR è migliore nel conciliare problemi statistici, quali la normalità dei rendimenti;
- Il VaR porta a decisioni migliori rispetto PT per guidare decisioni d'investimento, copertura dei rischi e gestione di portafoglio.

Capitolo 2

METODI DI CALCOLO DEL *VALUE AT RISK*

In generale, esistono tre metodi per il calcolo del valore al rischio:

- l'approccio varianza – covarianza (anche detto approccio analitico o parametrico);
- la simulazione storica;
- la simulazione di Monte Carlo.

L'approccio parametrico è quello che più si avvicina alle definizioni e ai concetti derivati dalla moderna teoria di portafoglio in quanto esprime il VaR come un multiplo di deviazioni dei profitti (o delle perdite) del portafoglio.

In generale, l'approccio varianza – covarianza viene utilizzato in presenza di portafogli lineari (composti ad esempio da obbligazioni o depositi), mentre la simulazione Monte Carlo è preferita in caso di portafogli caratterizzati da dipendenze non-lineari (composti ad esempio da opzioni). La simulazione storica si pone in una posizione intermedia e per questo assai promettente.
Tra i due approcci estremi, simulazione o varianza – covarianza, il primo è in generale preferibile. Tuttavia, quando i portafogli in oggetto sono caratterizzati da rischi non-lineari, l'approccio varianza – covarianza può ancora rappresentare un'accettabile approssimazione.

Illustriamo brevemente le caratteristiche generali dei tre metodi di calcolo.

1. *L’approccio varianze – covarianze*

Nell’approccio varianza – covarianza si assume che le variazioni dei parametri di mercato (tassi di interesse e di cambio) si distribuiscano in modo normale. Da ciò deriva che la media e la varianza della distribuzione dei valori del portafoglio può essere calcolata a partire dalla media e dalla varianza dei parametri di mercato sottostanti.
Se la distribuzione di probabilità dei profitti assume una forma normale, è possibile utilizzare la deviazione standard quale indicatore statistico del grado di incertezza.

L’approccio varianza – covarianza inserisce - accanto alle precedenti considerazioni relative all’assunzione di distribuzione normale dei profitti futuri - ipotesi più raffinate circa la correlazione esistente tra i beni del portafoglio. Esso tuttavia non è in grado di catturare compiutamente le categorie di rischio di tipo non-lineare, quali quelle relative a beni *volatility-dependent* (opzioni). A questo scopo rispondono invece la simulazione di Monte Carlo e la simulazione storica.

Questo metodo prevede di stimare il VaR di una posizione come prodotto di tre elementi:

- il valore di mercato della stessa (VM);
- un coefficiente (δ) rappresentativo della sensibilità del valore di mercato della posizione a variazioni del fattore di mercato nei confronti del quale la posizione è esposta;
- la potenziale variazione sfavorevole del fattore di mercato, a sua volta ottenuto come prodotto di due elementi: - la volatilità stimata di tale fattore di mercato (σ);
- un fattore scalare α che consente, data l’ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti del fattore di mercato, di ottenere una misura di rischio corrispondente al livello di confidenza desiderato.

Analiticamente otteniamo la seguente formula:

$$VaR_i = VM_i \times \delta_i \times \sigma_i \times \alpha$$

1.1 *Il VaR di un portafoglio*

Quando dalla singola posizione si intende passare a considerare il rischio di un portafoglio, il calcolo del VaR di un portafoglio di più posizioni sensibili a N diversi fattori di mercato ($VaR_{P,N}$) richiede un input addizionale rappresentato dai coefficienti di correlazione fra i rendimenti di tali fattori di mercato.

Analiticamente:

$$VaR_{P,N} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(VM_i \times \delta_i \times \alpha \times \sigma_i) \times (VM_j \times \delta_j \times \alpha \times \sigma_j) \times \rho_{ij}}$$

dove ρ_{ij} rappresenta il coefficiente di correlazione fra il rendimento del fattore di mercato *i* e il rendimento del fattori di mercato *j*.

Quando dal caso di due posizioni si passa alla situazione di un portafoglio reale composto da numerose posizioni sensibili a diversi fattori di mercato, diviene più agevole ricorrere all'algebra matriciale per la stima del rischio. Si consideri un portafoglio composto da N posizioni, rispettivamente caratterizzate da valore a rischio pari a VaR_1, VaR_2, ……, VaR_n.

I valori a rischio relativi alle singole posizioni possono essere espressi in forma vettoriale nel modo seguente:

$$\overline{V} = \begin{bmatrix} VaR_1 \\ VaR_2 \\ ..... \\ VaR_n \end{bmatrix}$$

Analogamente i coefficienti di correlazione fra i rendimenti dei fattori di mercato possono essere espressi in forma matriciale:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,N} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \cdots & \rho_{2,N} \\ & .... & & \\ \rho_{N,1} & \rho_{N,2} & \cdots & \rho_{N,N} \end{bmatrix}$$

Il valore a rischio del portafoglio può a questo punto essere espresso nel modo seguente:

$$VaR_P = \sqrt{\overline{V}^T \times C \times \overline{V}} .$$

1.2 *Ipotesi e limiti dell'approccio varianze – covarianze*

L'approccio varianze – covarianze soffre di alcuni limiti che discendono direttamente dalle ipotesi a esso sottostanti. Queste ultime sono principalmente identificabili nelle seguenti quattro:

- indipendenza seriale dei rendimenti dei fattori di mercato;
- stabilità della matrice varianze – covarianze;
- distribuzione normale dei rendimenti dei fattori di mercato;
- linearità dei profili di payoff delle posizioni di rischio.

Per quanto concerne l'ipotesi di normalità della distribuzione dei rendimenti, essa è stata oggetto di critiche basate sulle seguenti conclusioni empiriche:

- le distribuzioni dei rendimenti delle attività finanziarie presentano generalmente delle code più pesanti (fat tail) di quelle proprie di una distribuzione normale, sono generalmente distribuzioni leptocurtiche. La probabilità che si verifichino variazioni di prezzo lontane dal valor medio è dunque più elevata di quella implicita di una distribuzione normale;
- le variazioni di prezzo, e conseguentemente dei rendimenti delle attività finanziarie sono generalmente distribuite in modo non perfettamente simmetrico, nel senso che si possono riscontrare più osservazioni nella parte sinistra della distribuzione (valori inferiori alla media) che nella parte destra, dando così luogo ad un'asimmetria negativa (*negative skewness*);
- un ultimo punto che occorre rilevare riguarda la distribuzione dei tassi di interesse e, in particolar modo, dei tassi di mercato monetario. Questi ultimi risentono in modo diretto degli effetti della politica monetaria, seguono un percorso di tipo

discrezionale e chiaramente non casuale, come invece dovrebbe essere visto che la distribuzione normale si basa su un processo puramente casuale.

Il problema delle *fat tail* è forse quello più serio fra quelli menzionati. Infatti tale fenomeno sta ad indicare che perdite particolarmente elevate si verificano più frequentemente di quanto implicito in una distribuzione normale.

Fortunatamente, anche se la distribuzione dei rendimenti di singoli fattori di mercato non fosse normale, è verosimile che i rendimenti di un portafoglio diversificato il cui valore dipende da più fattori di mercato fra loro indipendenti siano comunque distribuiti secondo una normale.

Una soluzione proposta per consentire di superare il problema della leptocurtosi è quella di sostituire la distribuzione normale con una distribuzione t di Student, la quale è caratterizzata da code più spesse rispetto alla normale, riflettendo in questo modo più adeguatamente la probabilità associata a movimenti estremi dei fattori di mercato.

Per quanto riguarda invece l’ipotesi di una relazione lineare fra le variazioni del fattore di mercato rilevante e le variazioni di mercato della posizione (o, equivalentemente, del portafoglio di posizioni), essa è in contrasto con la sensibilità alle variazioni dei fattori di mercato del valore di alcune rilevanti tipologie di strumenti finanziari. Caso tipico è quello dei titoli obbligazionari, il cui valore di mercato varia in modo non lineare al variare dei tassi di rendimento.

A fronte dei limiti connessi alle ipotesi illustrate, l’approccio varianze – covarianze presenta, rispetto ai metodi alternativi che illustreremo in seguito, alcuni importanti pregi. Il primo è l’efficienza computazionale. Inoltre non richiede di esplicitare i modelli di pricing relativi a ogni singolo strumento in portafoglio. Infine, grazie al teorema del limite centrale, la metodologia sottostante l’approccio varianze – covarianze può essere applicata anche se i fattori di rischio non sono distribuiti normalmente, a condizione che essi siano sufficientemente numerosi e fra loro relativamente indipendenti.

2. *I modelli di simulazione*

Il tentativo di superare i problemi connessi all’approccio varianze – covarianze ha condotto allo sviluppo dei modelli di simulazione, detti anche modelli non parametrici.

I modelli rientranti in questa categoria sono così definiti in quanto, non formulando alcuna ipotesi relativa alla forma funzionale della distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato, non richiedono di stimare i parametri di tale distribuzione.

Tra i modelli non parametrici, si possono classificare due principali approcci per la stima del VaR di un portafoglio: le simulazioni storiche e le simulazioni Monte Carlo.

2.1 *Le simulazioni storiche*

In un modello di simulazione storica si ipotizza che le potenziali variazioni dei fattori di mercato siano ben rappresentate dalla loro distribuzione empirica storica, cioè dalle variazioni registrate in un periodo passato. Questa distribuzione empirica viene applicata al portafoglio in esame tramite una rivalutazione piena dello stesso. Ciò elimina ogni pericolo connesso ad approssimazioni lineari o quadratiche delle vere relazioni di *pricing*. Una volta calcolate le variazioni di valore del portafoglio corrispondenti a ciascuna delle osservazioni storiche relative alle variazioni dei fattori di mercato, queste vengono ordinate dalla minore alla maggiore (dalla massima perdita al massimo profitto). In questo modo si ottiene una distribuzione empirica di probabilità delle variazioni di valore del portafoglio.

Quest’ultima viene “tagliata” al percentile corrispondente al livello di confidenza richiesto. Il corrispondente cambiamento di valore del portafoglio è uguale al VaR desiderato.

Più in particolare, le simulazioni storiche prevedono che il VaR giornaliero di una posizione o di un portafoglio venga stimato mediante un processo articolato in quattro fasi:

- selezione di un campione di rendimenti giornalieri del fattore di mercato considerato relativo a un determinato periodo storico;

- rivalutazione della posizione / portafoglio in corrispondenza di ognuno dei valori storici del fattore di mercato;
- ricostruzione della distribuzione empirica di frequenza dei valori così ottenuti della posizione / portafoglio;
- taglio della distribuzione in corrispondenza del percentile relativo al livello di confidenza desiderato.

2.1.a *Pregi e limiti del metodo delle simulazioni storiche*

I pregi di questo modello sono molteplici.

- Anzitutto le simulazioni storiche rappresentano una soluzione al problema della misurazione del rischio la cui logica sottostante risulta facilmente comprensibile e comunicabile fra le varie unità di una banca, oltre che all'Alta Direzione. Il risultato cui tale metodologia perviene rappresenta infatti la perdita che si otterrebbe se le condizioni passate, in termini di variazioni congiunte dei fattori di mercato, dovessero ripetersi in futuro. L'intuizione alla base di tale logica risulta facilmente comprensibile anche per chi non fosse a conoscenza della natura della singola posizione considerata o delle tecniche utilizzate per ottenere il risultato.
- Un secondo vantaggio delle simulazioni storiche è legato al fatto che esse non richiedono di esplicitare alcuna ipotesi particolare circa la forma funzionale della distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato. L'unica ipotesi implicita è che la distribuzione dei rendimenti futura sia correttamente approssimata mediante la distribuzione storica. Se i rendimenti dei fattori di mercato non sono distribuiti normalmente, ma hanno un comportamento stabile nel tempo, il modello delle simulazioni storiche fornisce indicazioni più precise rispetto ai modelli parametrici.
- In terzo luogo, le simulazioni storiche non richiedono di stimare la matrice di varianze – covarianze dei numerosi fattori di mercato che possono influenzare il valore del portafoglio considerato. Il rischio connesso a portafogli il cui valore è influenzato da più variabili di mercato è infatti calcolato sulla base delle variazioni congiunte di tali variabili verificatesi nel corso del periodo storico prescelto.

- Le simulazioni storiche, basandosi sulla rivalutazione piena dell'intero portafoglio di posizioni alle nuove condizioni di mercato simulate in base alle variazioni passate, consentono di cogliere il rischio di portafogli la cui sensibilità alle variazioni dei fattori di mercato è non-lineare o non-monotona.
- Infine, le simulazioni storiche tendono a produrre misure di VaR molto stabili e poco reattive alle variazioni delle condizioni dei mercati, specie se il livello di confidenza è elevato. Ciò è dovuto al fatto che il VaR non cambia fino a quando nel mercato non si presenta un rendimento superiore (in valore assoluto) a quello corrispondente al percentile prescelto, o fino a quando quest'ultimo non esce dal campione storico di stima.

A fronte di tali vantaggi, le simulazioni storiche presentano tre principali limiti.

- I calcoli necessari per rivalutare l'intero portafoglio di posizioni di un'istituzione finanziaria alle condizioni di mercato passate sono particolarmente onerosi e richiedono dunque un tempo relativamente elevato rispetto alle esigenze di quantificazione del rischio connesse all'attività di trading di una banca.
- In secondo luogo, le simulazioni storiche ipotizzano implicitamente la stabilità temporale della distribuzione storica dei fattori di mercato. Se la distribuzione sottostante dei rendimenti non è costante nel tempo, non è possibile considerare la distribuzione empirica come una sua rappresentazione.
- Un terzo e ultimo limite del metodo delle simulazioni storiche, probabilmente il più serio dal punto di vista applicativo, è relativo alla limitatezza delle serie storiche disponibili, specie se l'orizzonte temporale prescelto per il calcolo del VaR è

superiore a un giorno. Il numero limitato di osservazioni storiche disponibili si traduce tipicamente in una scarsa definizione delle code della distribuzione empirica di probabilità. D'altra parte, incrementare il più possibile la lunghezza della serie storica di riferimento può essere controproducente perché diviene più probabile che sia violata l'ipotesi di stabilità della distribuzione.

- Esiste quindi una relazione di trade-off riguardo la lunghezza ottimale della serie storica di riferimento: considerazioni di stabilità della distribuzione delle variazioni dei fattori di mercato la vorrebbero breve; requisiti di adeguata rappresentazione dei fenomeni estremi l'esigerebbero lunga.

2.2 *Le simulazioni Monte Carlo*

Un modo per superare il problema della carenza di dati storici relativo alle simulazioni storiche è quello di generare nuovi dati. È questa la logica sottostante il metodo delle simulazioni Monte Carlo. L'applicazione delle simulazioni Monte Carlo ai problemi di risk management è recente e risale agli anni Ottanta.

Si tratta di simulare un numero elevato di volte l'evoluzione di una variabile di mercato e ricalcolare il valore di mercato della singola posizione di rischio in corrispondenza di ognuno degli scenari così costruiti. Una volta ottenuta la distribuzione di probabilità delle variazioni del valore di mercato della posizione in esame, il VaR può essere stimato seguendo la logica del percentile già illustrata con riferimento alle simulazioni storiche.

Al metodo Monte Carlo è dunque richiesto di offrire una rappresentazione il più accurata possibile della distribuzione empirica di probabilità delle variazioni, sulla base della distribuzione dei fattori di mercato ipotizzata e delle relazioni di pricing postulate. È attraverso la successiva procedura di riordino delle osservazioni e di taglio in corrispondenza del percentile desiderato che si arriva alla determinazione del VaR.

2.2.a <u>*Per una singola posizione*</u>

Il processo di stima del VaR di una posizione il cui valore di mercato risulta sensibile all'evoluzione di un unico fattore di mercato si compone di cinque fasi principali.

- identificazione della distribuzione statistica – *f(x)* – che meglio approssima la distribuzione dei rendimenti del fattore di mercato in esame;
- stima dei parametri – media, deviazione standard, asimmetria, curtosi – della distribuzione identificata;
- simulazione di numerosi scenari evolutivi del fattore di mercato;
- calcolo della variazione del valore di mercato della posizione in esame in corrispondenza di ognuno degli scenari simulati;

- taglio della distribuzione empirica di probabilità delle variazioni del valore di mercato della posizione in corrispondenza del percentile relativo al livello di confidenza desiderato.

La terza fase è probabilmente la più critica del metodo Monte Carlo. Essa comporta la necessità di ricorrere a un generatore di numeri casuali. Il criterio più frequentemente utilizzato per la generazione da tali numeri casuali è rappresentato dall'estrazione da una distribuzione uniforme definita nell'intervallo [0,1]. In questo caso la terza fase può essere a sua volta scomposta nelle seguenti sottofasi principali:

- estrazione di un numero U da una distribuzione uniforme [0,1];
- determinazione dell'inversa della funzione di ripartizione - $F_X^{-1}(x)$ - della distribuzione da cui si desidera effettuare il campionamento;
- calcolo del valore x di tale funzione f(x) corrispondente al numero U estratto;
- ripetizione delle precedenti fasi un numero molto elevato di volte.

2.2.b *Per un portafoglio*

Quando si passa da una singola posizione ad un portafoglio, il calcolo del VaR richiede di tenere in considerazione la struttura delle correlazioni fra i rendimenti di tutti i fattori che influenzano il valore di mercato del portafoglio stesso. Diversamente dal modello delle simulazioni storiche, infatti, il metodo Monte Carlo, essendo fondato sulla generazione di un numero elevato di scenari per ogni fattore di mercato, non è in grado di catturare automaticamente tali correlazioni. Se dunque si procedesse a simulare tali scenari in modo indipendente per ogni fattore di mercato, il risultato potrebbe essere irrealistico. Il processo di stima del Var di un portafoglio, in base a questo metodo, si compone di cinque fasi principali:

- nella prima fase si stima la matrice di varianze – covarianze dei rendimenti dei fattori di mercato (Σ);

- nella seconda fase Σ viene scomposta in due matrici simmetriche, A e A^T, con $\Sigma = AA^T$, dove A è una matrice triangolare inferiore e A^T la sua trasposta (scomposizione di Cholesky);
- nella terza fase si generano gli scenari relativi alle variazioni dei fattori di mercato moltiplicando la amatrice A^T, che riflette le correlazioni storiche fra i rendimenti dei fattori di mercato, per un vettore di numeri casuali z. in pratica si estrae, mediante il ricorso a un generatore di numeri casuali, un elevato numero di valori (solitamente 10.000) per ogni fattore di mercato, tenendo tuttavia in considerazione la struttura delle correlazioni;
- nella quarta fase si calcola la variazione del valore di mercato del portafoglio in esame, in corrispondenza di ognuno degli scenari simulati, costruendo in questo modo la distribuzione empirica di probabilità delle variazioni del valore di mercato del portafoglio;
- nell'ultima fase si calcola il VaR tagliando la distribuzione empirica di probabilità dei valori di mercato del portafoglio in esame in corrispondenza del percentile relativo al livello di confidenza prescelto.

2.2.c *Pregi e limiti delle simulazioni Monte Carlo*

Anche in questo caso i vantaggi sono numerosi.

- Simulando l'evoluzione dei fattori di mercato e ricalcolando il valore di mercato delle posizioni che compongono l'intero portafoglio alle nuove condizioni simulate, viene superato il problema della non- linearità e/o non-monotonicità dei payoff delle posizioni;
- Efficienza delle procedure di calcolo, nel senso che il tempo necessario per effettuare le simulazioni richieste cresce linearmente (e non esponenzialmente) al crescere del numero di variabili considerate;
- Si presta ad essere utilizzato con qualunque forma funzionale della distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato.;
- Potendo simulare non solo la variazione che ogni singola variabile di mercato subisce nel corso del periodo considerato,e dunque il valore finale che essa viene ad

assumere, ma anche il percorso evolutivo di tale variabile nello stesso periodo, il metodo Monte Carlo offre il vantaggio di consentire di analizzare anche il rischio connesso a particolari categorie di opzioni, quali alcune opzioni esotiche il cui payoff dipende non solo dal valore che le variabili rilevanti assumeranno a scadenza ma anche dal percorso evolutivo che esse hanno seguito nel periodo oggetto di simulazione.

I limiti rappresentati invece da questo metodo sono i seguenti:

- Nel simulare l'evoluzione congiunta di più variabili di mercato, il metodo impone di stimare la matrice delle covarianze dei fattori di mercato;
- Pur essendo numericamente efficiente rispetto ad altre procedure numeriche, rimane comunque un metodo oneroso in termini di tempo e di risorse informatiche;
- Infine, essendo generalmente basato sull'utilizzo di un numero particolarmente elevato di scenari al fine di stimare nel modo più accurato possibile la distribuzione empirica di probabilità, il metodo tende a fornire le misure di VaR sulle variazioni che raramente rappresentano valori estremi.

3. *Confronto fra le tre metodologie*

Non si può dire a priori quale sia la metodologia migliore perché ognuna presenta di lati negativi e positivi.

L'approccio parametrico, ad esempio, è di veloce implementazione. Tuttavia, la bontà delle stime VaR decresce in presenza di portafogli non-lineari oppure nel caso di distribuzioni che si allontanano dall'ipotesi di normalità.

L'approccio della simulazione storica è indipendente da assunzioni nella forma della distribuzione. Tuttavia l'utilizzo di una serie storica data rende la stima VaR necessariamente limitata e contingente.

L'approccio della simulazione di Monte Carlo è invece libero da costrizioni di natura storica, ma richiede il ricalcolo del valore di portafoglio numerose volte, dimostrandosi così piuttosto dispendioso in termini di tempi e risorse.

Pro e contro delle metodologie di calcolo	Simulazione storica	Simulazione Monte Carlo	Approccio parametrico
Semplicità di implementazione			
- E’ semplice aggregare il rischio tra diversi mercati?	Si	Si	Si
- I dati sono facilmente ottenibili?	No	No	Si
- L’attività di programmazione è semplice?	Si	No	Si / No
Assunzioni sulla distribuzione dei parametri			
- Deve essere assunta una determinata distribuzione dei parametri?	No	No	Si
- Vengono usate volatilità e correlazioni?	No	Possibile	Si
Trattamento di particolari strumenti			
- Sono richiesti meccanismi di pricing?	No	Si	No
- È necessario attuare una fase di “mapping”?	No	No	Si
- Le opzioni vengono correttamente trattate?	Si	Si	No
Comunicazione al top management			
- Il metodo è semplice da spiegare?	Si	Si / No	No
- Possono essere effettuate analisi di sensitività?	No	Si	Si / No

Capitolo 3

IL BACKTESTING

La diffusione dei modelli Var quali strumenti fondamentali per la misurazione dei rischi di mercato ha reso sempre più importante lo sviluppo di tecniche di valutazione della qualità di questi modelli.

Nel 1996 il Comitato di Basilea ha introdotto, quale condizione per l'utilizzo di un modello VaR ai fini della determinazione del requisito patrimoniale relativo ai rischi di mercato, la condizione che esso venga sottoposto a regolari test retrospettivi volti a determinare la relativa capacità previsionale.

Tali test retrospettivi, più comunemente denominati *backtesting*, sono basati sul confronto fra i risultati dell'attività di negoziazione e quanto indicato dai modelli interni. La logica sottostante al backtesting di un modello VaR adottata dal Comitato di Basilea e dalle banche è relativamente semplice: se il modello è qualitativamente adeguato, dal confronto periodico della stima giornaliera del VaR di un portafoglio di trading con le perdite giornaliere dell'attività di negoziazione relative al giorno successivo dovrebbe emergere che le perdite effettive risultano superiori al VaR con una frequenza coerente con quella definita dal livello di confidenza.

Per quanto apparentemente semplice, il backtesting di un modello VaR presenta numerosi problemi e può seguire logiche differenti. Nel corso degli ultimi dieci anni sono infatti stati proposti numerosi modelli alternativi per valutare l'accuratezza di un modello VaR.

Tali test possono essere suddivisi in due principali categorie: i test basati sulla frequenza delle eccezioni e i test basati su una funzione di perdita, cioè considerano anche la dimensione delle perdite.

La maggioranza delle tecniche di backtesting si basa su test di ipotesi. Nel caso in cui l'ipotesi nulla venga rigettata, le previsioni di VaR non presentano le caratteristiche richieste dal modello di backtesting, e quindi il modello VaR sottostante è considerato inaccurato. Se l'ipotesi nulla non è rifiutata, il modello è accettabilmente accurato. Se il test non ha abbastanza potenza, la probabilità di classificare un modello inaccurato come accettabilmente accurato potrebbe essere alta.

1. *Il test dell'unconditional coverage*

Tra i primi a condurre un'analisi formale riguardante i test statistici per l'analisi della qualità di un modello VaR è stato Paul Kupiec (1995).

Il test elaborato da Kupiec, denominato anche *proportion of failure test*, è basato sull'esame della frequenza con cui le perdite del portafoglio superano il VaR. In pratica, ciò che si intende sottoporre a verifica empirica è se la frequenza delle eccezioni empiricamente rilevate , π, è significativamente diversa da quella "teorica" desiderata, α. Tale ipotesi prende il nome di <u>*unconditional coverage*</u>.

In altri termini, se $\pi = \alpha$ si ha una corretta copertura condizionale.

Se la probabilità desiderata di eccezioni è pari ad α, ossia il VaR è stimato come la perdita massima che potrebbe verificarsi in una percentuale di casi pari a $1-\alpha$, la probabilità di osservare *x* eccezioni (numero di giorni in cui la perdita supera il VaR) in un campione di *n* osservazioni, nel caso in cui il modello sia buono e dunque α sia la vera probabilità che si verifichi un'eccezione, può essere ottenuta sulla base della distribuzione binomiale ed è pari a:

$$\Pr(x;\alpha,n) = \binom{n}{x}\alpha^x(1-\alpha)^{n-x}$$

La distribuzione binomiale può essere utilizzata per testare se il numero di eccezioni è sufficientemente basso.

Considerando, ad esempio, un campione di 250 osservazioni giornaliere relative a un modello VaR con livello di confidenza del 99%, la probabilità che si verifichino *x* eccezioni è data da:

$$\Pr(x;0.01;250) = \binom{250}{x} 0.01^x \times 0.99^{250-x}$$

Se sostituiamo a *x* il valore 4, ad esempio, la probabilità che si verificano 4 eccezioni risulta essere 13,4%.

In generale, se il modello è accurato, la frequenza effettiva delle eccezioni nel campione $\left(\pi = \frac{x}{n}\right)$ dovrebbe essere pari ad α.

Dunque l'ipotesi nulla che si intende sottoporre a verifica empirica è $H_0 : \pi = \alpha$.

La funzione di verosimiglianza sotto l'ipotesi nulla è data da:

$$L_0(\alpha) = \alpha^x (1-\alpha)^{n-x}$$

La funzione di verosimiglianza sotto l'ipotesi alternativa è invece data da:

$$L_0(\pi) = \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

È dunque possibile verificare l'ipotesi nulla di unconditional coverage utilizzando il rapporto fra le due funzioni di verosimiglianza, ossia il cosiddetto *likelihood ratio* dato da:

$$LR_{uc}(\alpha) = -2 \times \ln\left[\frac{\alpha^x (1-\alpha)^{n-x}}{\pi^x (1-\pi)^{n-x}}\right]$$

Il cui valore asintotico si distribuisce secondo una chi-quadro con un grado di libertà $\left(X_1^2\right)$.

Così, per esempio, se si scegliesse un livello di significatività del 10%, si avrebbe un valore critico della X_1^2 pari a 2.7055. Se il valore del likelihood ratio $LR_{uc}(\alpha)$ fosse maggiore di 2.7055 il modello potrebbe essere rifiutato al livello di significatività del 10%.

Consideriamo ancora una volta l'esempio precedente caratterizzato da 250 osservazioni giornaliere e 4 eccezioni relative a un modello VaR con livello di confidenza pari al 99%.

Il valore del test sarebbe dato da:

$$LR_{uc}(1\%) = -2 \times \ln\left[\frac{0.01^{4}(0.99)^{246}}{\left(\frac{4}{250}\right)^{4}\left(\frac{246}{250}\right)^{246}}\right] = 0.77$$

Il corrispondente valore, con livello di significatività dell'1% di una chi-quadro con 1 grado di libertà è pari a 6.635. Il modello VaR può dunque essere accettato come accurato.

Possiamo anche trovarci il p-value in questo modo:

$$p - value = 1 - F_{X_1^2}(LR_{uc})$$

Se il p-value è inferiore al livello di significatività desiderato, allora l'ipotesi nulla può essere rifiutata.

Un punto cruciale di un modello di backtesting è dunque rappresentato dal livello di significatività.

In generale il test di Kupiec richiede un campione composto da un elevato numero di dati (circa 10 anni di dati giornalieri) per poter generare risultati affidabili. In particolare, la potenza statistica di questo test è piuttosto bassa; in altre parole, vi è un'alta probabilità di accettare l'ipotesi nulla quando invece è vera una specifica ipotesi alternativa; questa probabilità è tanto maggiore quanto più il valore α dell'ipotesi nulla diminuisce, ossia quanto maggiore è il livello di confidenza del modello, e quanto più piccola è la dimensione del campione. Occorre infatti osservare che per piccoli valori del parametro α, ossia per livelli di confidenza più elevati, divenga più difficile definire le regioni di rifiuto e di accettazione. Ciò è principalmente dovuto al fatto che per livelli di confidenza elevati le eccezioni divengono, a parità di dimensione del campione, eventi più rari.

Il test di Kupiec presenta il limite di focalizzarsi unicamente sulla capacità di un modello VaR di generare un numero di eccezioni coerente con il relativo livello di confidenza, senza considerare la distribuzione temporale di tali eccezioni.

In questo senso, anche un modello che alterna periodi in cui il VaR è sottostimato (e dunque il numero di eccezioni è elevato) a periodi in cui il VaR è sovrastimato (e dunque il numero di eccezioni è basso) potrebbe risultare idoneo utilizzando questo test statistico.

Il test di Kupiec è infatti un test della bontà non condizionale di un modello, nel senso che la qualità di un modello è valutata in modo indipendente dalla capacità delle stesso di reagire alle informazioni riflesse nelle nuove condizioni di mercato.

2. *Il test della conditional coverage*

Un test rivolto a valutare la *conditional coverage* di un modello VaR è stato proposto da Christoffersen (1998), il quale estende il LR_{uc} per specificare che le eccezioni devono essere fra loro serialmente indipendenti.

In altri termini, affinché un modello sia caratterizzato da una corretta conditional coverage, occorre che la probabilità che si verifichi un'eccezione in un determinato giorno sia indipendente dal fatto che il giorno precedente si sia o meno verificata un'eccezione.

Christoffersen parte dalla considerazione che le stime VaR possono essere viste come stime d'intervallo, ossia come stime della coda sinistra della distribuzione di probabilità a uno specifico livello di copertura (*coverage*). In particolare, un modello VaR utilizza un intervallo illimitato inferiormente [$-\infty$,VaR]. I test per la valutazione della bontà di un modello VaR devono dunque tenere in considerazione questa caratteristica. Al contrario, il test dell'unconditional coverage descritto nel paragrafo precedente è basato su una stima puntuale.

La principale differenza fra i due tipi di stima è che una stima per intervalli ha la possibilità di essere dinamica, nel senso che l'intervallo dovrebbe essere stretto in presenza di bassa volatilità e più ampio quando la volatilità cresce. Osservazioni fuori dall'intervallo dovrebbero così distribuirsi in modo uniforme nel campione, e non essere invece concentrate (*clustered*).

L'autore costruisce dunque una variabile così definita:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad y_t \in \left[L_{t|t-1}(\alpha), U_{t|t-1}(\alpha)\right] \\ 0 & \phantom{\text{se}} \quad y_t \notin \left[L_{t|t-1}(\alpha), U_{t|t-1}(\alpha)\right] \end{cases}$$

dove:

- y_t rappresenta l'osservazione al tempo *t* del campione sul quale si sta effettuando l'analisi (essa corrisponde al profitto / perdita registrato il giorno *t*);
- $\left[L_{t|t-1}(\alpha), U_{t|t-1}(\alpha)\right]$ è la stima per intervallo elaborata al tempo *t*-1 e riferita al tempo *t*, con $L_{t|t-1}$ estremo inferiore (*lower*) e $U_{t|t-1}$ estremo superiore (*upper*) dell'intervallo.

In pratica, la variabile indicatrice I_t assume valore nullo nel caso in cui non si sia verificata un'eccezione e un valore unitario in caso contrario.

Per verificare la corretta <u>copertura non condizionale</u>, è necessario testare l'ipotesi $E[I_t] = \alpha$ per tutti i *t*, ossia verificare che, indipendentemente dalla sequenza, il valore atteso delle eccezioni sia pari al complemento a 1 del livello di confidenza.

Per verificare la corretta <u>copertura condizionale</u> occorre invece testare $E[I_t \mid \Psi_{t-1}] = \alpha$ per tutti i *t*, dove Ψ_{t-1} indica l'insieme delle informazioni disponibili al tempo *t* – 1.

Tali informazioni sono peraltro rappresentate dai valori assunti dallo stesso indicatore I nei giorni precedenti $\Psi_{t-1} = (I_1, I_2, \ldots\ldots\ldots, I_{t-1})$.

Si tratta dunque di costruire un test statistico che consenta di determinare se i valori dell'indicatore I_t sono fra loro serialmente indipendenti.

Definendo con $\pi_{i,j} = \Pr(I_{t-1} = i \mid I_t = j)$ la probabilità che l'indicatore assuma un valore *j* il giorno *t* condizionatamente al fatto che il giorno precedente abbia assunto un valore *i*, è possibile definire con:

- $\pi_{1,1}$ la probabilità che un'eccezione in t – 1 sia seguita da un'altra eccezione in t;
- $\pi_{1,0}$ la probabilità che un'eccezione in t – 1 sia seguita da una non eccezione in t;
- $\pi_{0,1}$ la probabilità che in t si verifichi un'eccezione senza che un'eccezione si sia verificata il giorno precedente;
- $\pi_{0,0}$ la probabilità che non vi siano eccezioni né in t – 1 né in t.

Sottoporre a verifica l'indipendenza seriale delle eccezioni significa di fatto testare le due condizioni:

$$\pi_{1,1} = \pi_{0,1} = \pi_1$$

$$\pi_{0,0} = \pi_{1,0} = \pi_0$$

Entrambe le condizioni indicano che la probabilità di avere o meno un'eccezione in *t* è indipendente dal fatto che in *t* – 1 si sia o meno verificata un'eccezione.

Si supponga a questo punto di considerare un campione di T osservazioni complessive e di indicare con:

- $T_{1,1}$ il numero di eccezioni che sono state precedute da un'altra eccezione;
- $T_{0,1}$ il numero di eccezioni che non sono state precedute da un'altra eccezione;
- $T_{1,0}$ il numero di eccezioni che sono state seguite da un'altra eccezione;
- $T_{0,0}$ il numero di mancate eccezioni precedute da altre mancanti eccezioni.

Sulla base di tali valori campionari, è possibile stimare i valori dei parametri relativi alle probabilità condizionate:

$$\hat{\pi}_{0,1} = \frac{T_{0,1}}{T_{0,0} + T_{0,1}}$$

$$\hat{\pi}_{1,1} = \frac{T_{1,1}}{T_{1,0} + T_{1,1}}$$

da cui, sapendo che la probabilità totale deve essere pari a uno, si ottiene anche che:

$$\hat{\pi}_{0,0} = 1 - \hat{\pi}_{0,1}$$

$$\hat{\pi}_{1,0} = 1 - \hat{\pi}_{1,1}$$

L'ipotesi nulla di indipendenza seriale può dunque essere testata rispetto all'ipotesi di una dipendenza seriale markoviana del primo ordine. La funzione di verosimiglianza nel caso di dipendenza del primo ordine sarebbe data da:

$$L(\hat{\Pi}_1) = (1 - \pi_{0,1})^{T_{0,0}} \pi_{0,1}^{T_{0,1}} (1 - \pi_{1,1})^{T_{1,0}} \pi_{1,1}^{T_{1,1}}$$

Nel caso dell'ipotesi nulla, ossia di indipendenza seriale, la funzione di verosimiglianza sarebbe invece data da:

$$L(\hat{\pi}) = (1 - \pi_1)^{T_{0,0} + T_{1,0}} \pi_1^{T_{0,1} + T_{1,1}}$$

dove:

$$\pi_1 = \frac{T_{0,1} + T_{1,1}}{T_{0,1} + T_{1,1} + T_{1,0} + T_{0,0}}$$

Il rapporto di verosimiglianza necessario per testare l'ipotesi nulla di indipendenza può a questo punto essere costruito come:

$$LR_{ind} = -2 \times \ln\left[\frac{L(\hat{\pi})}{L(\hat{\Pi}_1)}\right]$$

Il termine a numeratore rappresenta la massima probabilità (verosimiglianza) sotto l'ipotesi che le eccezioni siano serialmente indipendenti. Il termine a denominatore indica invece la probabilità massima per i dati osservati.

Esso si distribuisce asintoticamente come una chi-quadro con 1 grado di libertà.

L'ipotesi nulla di indipendenza seriale va dunque rifiutata quando LR_{ind} risulti indipendente dal parametro α. Ciò implica che mediante l'uso di questa statistica è possibile testare unicamente l'indipendenza delle eccezioni.

Per ottenere un test completo di copertura condizionale occorre dunque combinare fra loro i due test di unconditional coverage e di indipendenza.

Il test per la copertura condizionale è infatti volto a sottoporre a verifica congiuntamente l'ipotesi che il numero medio delle eccezioni sia corretto e che le stesse siano indipendenti. Esso è dato da:

$$LR_{cc} = -2 \times \ln\left[\frac{L(\alpha)}{L(\hat{\Pi}_1)}\right]$$

In pratica, si prendono la verosimiglianza dall'ipotesi nulla relativa al test di unconditional coverage (LR_{uc}) e la verosimiglianza dall'ipotesi alternativa del test di indipendenza (LR_{ind}). Ciò corrisponde a testare che

$$\pi_{0,1} = \pi_{1,1} = \alpha$$

La statistica corrispondente al test di conditional coverage è data dalla somma dei due likelihood ratio:

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$$

LR_{cc} si distribuisce asintoticamente come una chi-quadro con 2 gradi di libertà.

In generale, la metodologia di backtesting proposta da Christoffersen risulta più completa ed efficiente di quella analizzata in precedenza. Più completa perché tiene conto del problema dell'indipendenza fra le eccezioni che il test dell'unconditional coverage non prende in considerazione. Più efficiente perchè la scomposizione del test di copertura condizionale nelle sue componenti di indipendenza e di copertura non condizionale consente di evidenziare con maggiore chiarezza le cause che possono condurre al rifiuto di un particolare modello VaR.

3. *Il backtesting dei modelli VaR secondo il Comitato di Basilea*

Il Comitato ha previsto che la banca che adotta l'approccio al modello interno è tenuta a sottoporre il proprio modello a una valutazione periodica, trimestrale, basata su una logica di backtesting dei risultati giornalieri dell'attività di negoziazione. Il risultato di questa validazione periodica incide sul requisito patrimoniale, in quanto, quest'ultimo è soggetto a un fattore moltiplicativo che risulta tanto maggiore quanto peggiore è la performance del modello interno in sede di backtesting regolamentare.

Un semplice esempio può risultare utile per comprendere la logica alla base di tali test. Si supponga che il VaR giornaliero risulti pari a 100 e che il livello di confidenza del modello sia pari al 99%. In questo caso, è verosimile attendersi perdite superiori a 100 unicamente nell'1% dei casi, ossia 2,5 giorni su 250 giorni di negoziazione annui. Se il numero di eccezioni, ossia il numero di giorni in cui le perdite risultano superiori a 100, è inferire, pari o di poco superiore a 2,5 è verosimile ipotizzare che il modello utilizzato sia di soddisfacente livello qualitativo. Viceversa, se il numero di eccezioni è significativamente superiore a quanto previsto dal livello di confidenza adottato, è verosimile ipotizzare che il modello utilizzato presenti problemi.

Seguendo la logica illustrata, il Comitato di Basilea stabilisce che il grado di maggiorazione da applicare al fattore di moltiplicazione sia inversamente proporzionale al livello qualitativo del modello, ossia direttamente proporzionale al numero di eccezioni riscontrate.

A questo fine, i test retrospettivi devono essere condotti trimestralmente sulla base dei dati dell'ultimo anno, ossia degli ultimi 250 giorni di negoziazione.

Nel caso di un modello con livello di confidenza del 99% e un test retrospettivo basato su 250 osservazioni, la maggiorazione varia da un valore nullo, nel caso in cui il numero delle eccezioni sia pari al massimo a 4, fino a un valore unitario, nel caso in cui il numero di eccezioni sia pari o superiore a 10.

La tabella seguente riporta il valore del fattore di maggiorazione corrispondente al numero di eccezioni ed evidenzia la suddivisione in tre zone – verde, gialla, rossa – adottata dal Comitato di Basilea relativamente ai risultati generati dai test retrospettivi e al conseguente livello qualitativo dei modelli.

Zona	Numero di eccezioni	Maggiorazione	Fattore di moltiplicazione
Verde	0	0,00	3,00
	1	0,00	3,00
	2	0,00	3,00
	3	0,00	3,00
	4	0,00	3,00
Gialla	5	0,40	3,40
	6	0,50	3,50
	7	0,65	3,65
	8	0,75	3,75
	9	0,85	3,85
Rossa	≥ 10	1,00	4,00
Fonte: Basel Committee (1996)			

Se il modello interno ricade nella zona rossa, la maggiorazione risulta pari a 1 e conseguentemente il fattore di moltiplicazione da applicare alla media dei VaR decadali relativi agli ultimi 60 giorni risulta pari a 4.

Se i risultati del backtesting si collocano nella zona gialla, la penalità, ossia la maggiorazione, viene decisa dall'organo di vigilanza in funzione della motivazione sottostante le eccezioni.
Il Comitato di Basilea distingue i fattori causali in quattro categorie:

- *Integrità del modello*: l'eccezione si è verificata perché le posizioni di rischio sono state riportate in modo scorretto;
- *Accuratezza del modello*: l'eccezione si è verificata perché il modello non misura il rischio in modo sufficientemente preciso;
- *Negoziazioni intraday*: l'eccezione si è verificata perché le posizioni di rischio si sono modificate durante la giornata di negoziazione;
- *Evoluzione del mercato*: l'eccezione si è verificata perché i mercati sono stati particolarmente volatili o perché le correlazioni si sono modificate.

Se le eccezioni sono dovute alla prime due categorie di fattori causali, la maggiorazione deve essere applicata; se invece esse sono attribuibili alla terza categoria, bisogna considerare "seriamente" l'applicazione della maggiorazione; il Comitato non si esprime, però, in modo definitivo circa le conseguenze di eccezioni dovute all'ultima categoria di cause, limitandosi ad affermare che questa tipologia di eccezioni "*be expected to occurr at least some of the time*".

Capitolo 4

LA STIMA DELLA VOLATILITA' :
I modelli della classe ARCH

---

1. Modelli ARCH e GARCH

Molti modelli utilizzati per la stima della volatilità, quali ad esempio le medie mobili semplici ed esponenziali, si basano sull'assunto implicito che la volatilità sia costante nel tempo.

Spesso accade, però, che la volatilità non sia costante, né possa considerarsi come una costante a cui si aggiunge un semplice errore di campionamento, ossia un *sampling noise*. In sostanza, la volatilità subisce fluttuazioni significative. Tale fenomeno noto come *volatility clustering* sta ad indicare che i fenomeni di mercato presentano periodi di maggiore volatilità che possono anche persistere per lungo tempo.

Questo problema viene esplicitamente affrontato dai modelli della famiglia ARCH (*AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*) (Engel 1982). I modelli a eteroschedasticità condizionale autoregressiva sono modelli che consentono di prevedere la volatilità futura utilizzando una regressione basata sui valori passati della volatilità stessa. Essi modellano pertanto la volatilità che cambia nel tempo (*time-varying volatility*).

Secondo Engel, le innovazioni seguono un processo di prodotto del tipo:

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}$$

dove h_t è la varianza condizionata e η_t, condizionatamente all'insieme informativo disponibile al tempo t – 1, si distribuisce come una variabile casuale normale standardizzata. Questo implica che ε_t, sempre in termini condizionati, sia distribuita come una variabile casuale normale con media zero e varianza h_t. Perciò la varianza dipende dal tempo. Al variare di h_t si otterranno delle distribuzioni di probabilità di tipo normale diverse tra loro, più o meno disperse attorno al centro di simmetria. La distribuzione non condizionata può essere vista come valore atteso delle distribuzioni condizionate. La forma più semplice, ARCH (1,1), specifica che la varianza condizionate al tempo t sia espressa come la somma di un termine costante e di una innovazione al quadrato al tempo t – 1.

Analiticamente:

$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$

Estensione del modello ARCH, sono i modelli GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), proposti da Bollerslev (1996).

Rispetto al modello ARCH, la generalizzazione proposta da Bollerslev è stata quella di introdurre un modello che può essere rappresentato come un modello ARMA per i quadrati dei rendimenti. Questo consente di ottenere una descrizione delle dinamiche delle volatilità più parsimoniosa, in termini di numero di parametri,del modello ARCH.

Il GARCH (p,q) è perciò un modello in cui la varianza condizionata al tempo t è una combinazione lineare di p ritardi dei residui al quadrato – ricavati dall'equazione della media condizionata – e di q ritardi della varianza condizionata. Analiticamente, il GARCH (p,q) può essere espresso come:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}$$

Dove i termini di tipo $\alpha_i\ \varepsilon_{t\text{-}i}^2$ si riferiscono alla componente ARCH del modello, mentre i termini $\beta_j\ h_{t\text{-}j}$ si riferiscono alla componente GARCH.

Considerando il caso più semplice di GARCH (1,1), si ha:

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

nel quale ω, α_1 e β_1 sono dei parametri a cui è imposto il vincolo di non negatività. Questa condizione è sufficiente per mantenere la non negatività della varianza condizionata.

Da questa ultima formula, è interessante notare che il valore precedentemente stimato della varianza condizionata si trasferisce alla stima corrente per una proporzione β_1 e che la varianza condizionata reagisce al valore ritardato del termine di disturbo al quadrato in misura pari ad α_1. Il valore passato della varianza condizionata riassume in sé le informazioni passate, e quindi spetta al valore dell'innovazione osservata il periodo precedente il compito di alterare la previsione corrente della varianza condizionata. Il valore stimato della varianza condizionata al tempo t, h_t, sarà maggiore del valore stimato al tempo t-1, h_{t-1} se:

$$\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} > h_{t-1}$$

Nel caso GARCH, dunque, le informazioni passate sono sintetizzate dai ritardi della varianza, mentre le "novità", e la capacità di variazione nel tempo delle stime della varianza condizionata sono racchiuse nel termine ε_{t-1}^2.

Il modello GARCH, sinteticamente illustrato, presenta diversi vantaggi:

- Riconosce esplicitamente l'esistenza di un fenomeno di correlazione seriale e lo esplicita attraverso un modello autoregressivo;
- Attribuisce un'adeguata importanza alle nuove informazioni incorporate negli shock di mercato;
- Parsimonia dei parametri da stimare.

A fianco di tali vantaggi, il modello di Bollerslev presenta alcuni limiti. Infatti, il modello GARCH nella sua versione originale, assume l'ipotesi di normalità, anche se in questo caso tale ipotesi si riferisce alla distribuzione degli errori di previsione. Ne segue comunque che in presenza di una distribuzione asimmetrica o con curtosi maggiore di quella di una normale il modello GARCH può non offrire risultati adeguati.
Inoltre,il modello GARCH tratta in maniera simmetrica sia gli shock positivi che quelli negativi, dato che le innovazioni al quadrato nel modello GARCH (1,1) hanno lo stesso impatto sulla varianza condizionata misurato da α_1. Quindi non si riescono a cogliere possibili effetti differenziali tra ε_{t-1} positivi e negativi. Ciò contrasta con numerose evidenze empiriche, specie se le analisi riguardano il mercato azionario. In questo caso

spesso si osserva che la varianza condizionata aumenta maggiormente se si verificano shock negativi.

Per far fronte a questi limiti, sono state proposte in letteratura numerose versioni alternative.
Tra queste vanno menzionate l'Exponential GARCH – *EGARCH (Nelson, 1991)*, il Threshold GARCH – *TGARCH (Glosten, Jagannathan e Runkle, 1993; Zakoïan, 1994), l'APARCH (Taylor, 1986 and Schwert, 1989).*

2. *Modelli APARCH*

Il modello APARCH con innovazioni gaussiane è un'estensione del modello GARCH di Bollerslev. Infatti, esso raccoglie, come casi particolari, diverse parametrizzazioni che appartengono alla famiglia GARCH.
L'APARCH (1,1) scritto analiticamente è definito da:

$$h_t^{\delta} = \omega + \alpha_1 \left(|e_{t-1}| - \gamma_1 e_{t-1} \right)^{\delta} + \beta_1 h_{t-1}^{\delta}$$

dove $\omega, \alpha_1, \gamma_1, \beta_1$ e δ sono opportuni parametri. $\delta\,(\delta > 0)$ induce una trasformazione di Box-Cox su h_t, mentre $\gamma_1\,(-1 < \gamma_1 < 1)$ descrive il così detto effetto leva (leverage). Un valore positivo di γ_1 significa che gli shock negativi passati hanno un impatto sulla volatilità condizionata corrente più marcato rispetto gli shock positivi, e viceversa.

Studi empirici sul VaR hanno dimostrato che i modelli basati sulla distribuzione normale spesso non tengono in piena considerazione le code pesanti (*fat tail*) della distribuzione dei rendimenti. Per ovviare a questo problema, è stato possibile considerare errori a code pesanti. Ad esempio è possibile assumere che ε_t si distribuisca come una t di Student con υ gradi di libertà. Il modello Student APARCH (o t APARCH) è definito dunque come segue:

$$e_t = \varepsilon_t h_t$$

dove ε_t è IID t $(0,1,\upsilon)$ e h_t è definito come in precedenza.

Sono state proposte inoltre varianti con termini di errore più generali come, ad esempio, la Skewed Student APARCH, la quale consente di trattare in modo diverso gli impatti di shock positivi e shock negativi. Tale riparametrizzazione non verrà trattata però nell'ambito di questo lavoro.

ANALISI EMPIRICA

Le analisi che seguono prendono in considerazione quattro diversi indici dei mercati azionari inglesi ed americani.

Inizialmente viene riportata un'analisi descrittiva delle serie dei rendimenti. Successivamente si riporta la stima di un modello adeguato a spiegare effetti di natura sistematica che determinano il comportamento delle medie e delle varianze condizionate. Una volta individuato il modello opportuno a spiegare tali effetti, si passa al calcolo del "valore al rischio" – VaR – sia al livello di significatività dell'1% sia al 5%. Ottenute le stime del VaR, è possibile applicare i tre test descritti nel terzo capitolo per valutare la bontà di tale stime.

Le analisi empiriche sono state effettuate tramite il linguaggio Ox (*Doornik 2001*) ed EViews.

<u>Dati</u>

Per l'applicazione empirica sono stati utilizzati quattro diversi indici appartenenti al mercato azionario americano e inglese:

- Dow Jones Composite 65;
- Dow Jones Industrial;
- Ftse100;
- Standard & Poor 500 Composite.

Verranno analizzati dati giornalieri, che vanno dal 30/12/1988 al 15/06/2005 (4294 osservazioni).

I dati sono stati scaricati da Datastream.

I rendimenti sono stati definiti come differenza prima del logaritmo delle serie dei prezzi:

$$r_t = 100 * [\log(p_t) - \log(p_{t-1})]$$

Di seguito vengono riportati i grafici delle serie dei prezzi e dei rendimenti, nonché le rispettive statistiche descrittive principali.

Grafico 5.1: Serie dei prezzi

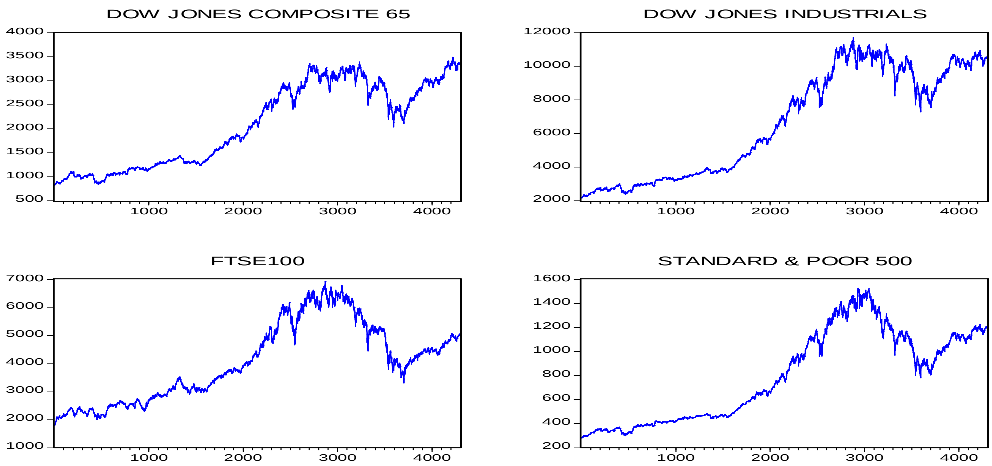
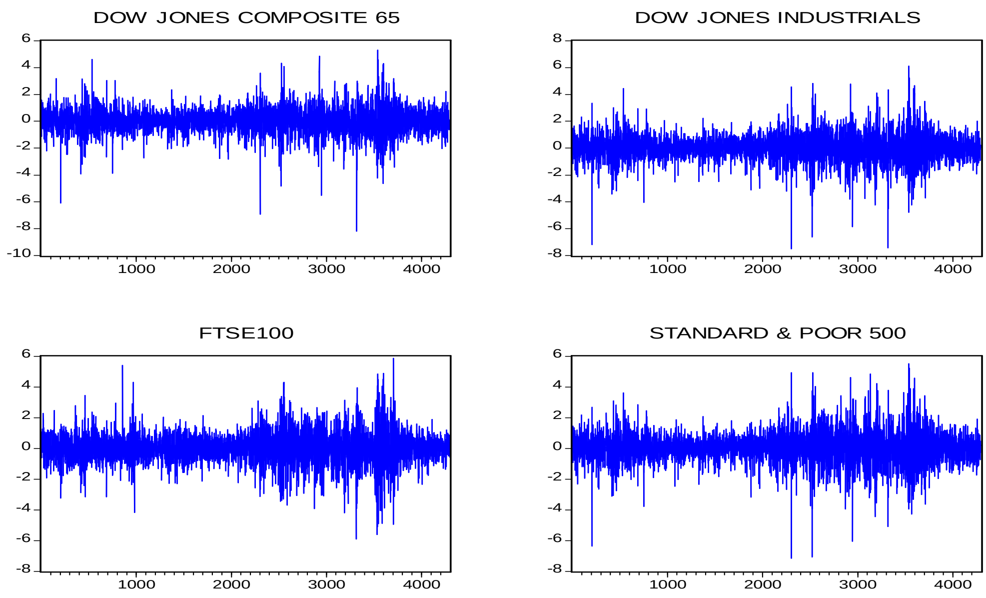


Grafico 5.2: Serie dei rendimenti



Tab. 5.1: Statistiche descrittive dei rendimenti

	DOW JONES COMP	DOW JONES INDUSTIAL	FTSE100	STANDARD & POOR COMP
Mean	6.39E-17	1.26E-17	-1.71E-16	-6.44E-18
Median	-0.0189	-0.0189	-0.0179	-0.0195
Maximum	5.3128	6.1178	5.8785	5.5390
Minimum	-8.1824	-7.4918	-5.9093	-7.1469
Std. Dev.	0.9231	0.9889	1.0114	0.9968
Skewness	-0.3290	-0.3021	-0.1138	-0.1625
Kurtosis	8.1856	8.1954	6.2218	7.2436
Jarque-Bera	4887.524	4893.620	1866.060	3240.163
Probability	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*
Sum	2.55E-13	-5.45E-13	-3.98E-13	-1.38E-14
Sum Sq. Dev.	3657.716	4197.582	4390.820	4265.280
Ljiung-Box				
Q^2(10)	785.09	729.37	2419.6	951.39
p-value	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*
Observations	4293	4293	4293	4293

Dalla tabella delle statistiche descrittive, risulta immediato che il test di Jarque-Bera rifiuta, a qualsiasi livello ragionevole di significatività, l’ipotesi di normalità dei rendimenti.

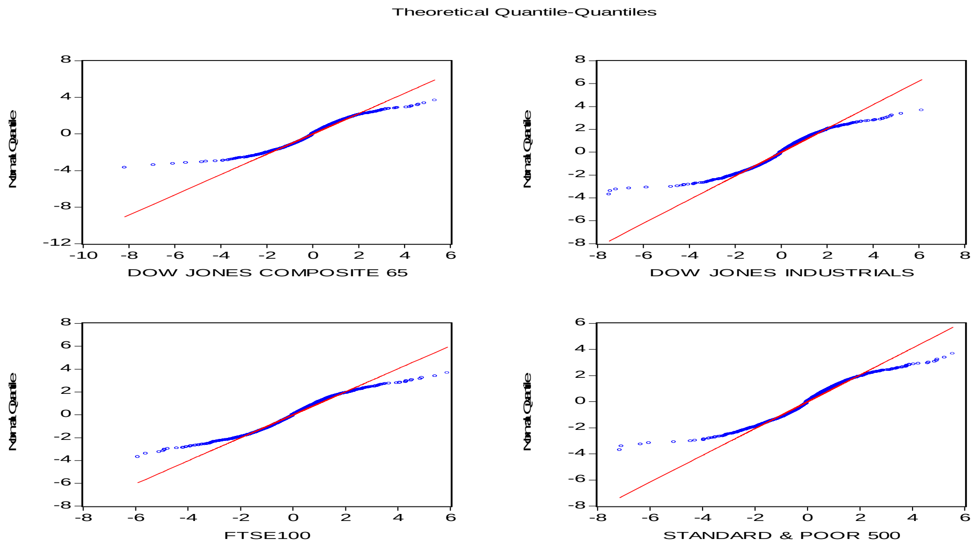
Questo sembra dovuto principalmente ad un eccesso di curtosi, come messo in evidenza anche dal Normal Probability Plot.

Le code sono particolarmente pesanti rispetto a quelle di una distribuzione Normale; inoltre sembra esserci anche una lieve asimmetria negativa.

Queste caratteristiche sono comuni in molte serie finanziarie.

La statistica *Q* di Ljiung-Box, al ritardo 10, mostra una forte correlazione tra i rendimenti al quadrato, a evidenza del fatto che i rendimenti non sono tra loro indipendenti.

Grafico 5.3: Normal Probability Plot dei rendimenti



Per alcune serie, quali il Dow Jones Composite 65 e Ftse100, sembra esserci una dipendenza lineare sui livelli dei rendimenti.

Prima però di stimare un modello ARMA per la media, conviene stimare un modello della famiglia ARCH per la volatilità. Questo perché, alcune volte , adattando un modello per la volatilità alle serie dei rendimenti, esso elimina gli effetti sulla media. In altre parole, le correlazioni sulla media possono essere causate da forme di dipendenza sui momenti di ordine superiore, per esempio le varianze condizionali.

Se una volta stimato un modello a volatilità non costante è ancora presente una componente ARMA, allora in quel caso vi si può adattare un modello adeguato per la media.

Di seguito si riportano i risultati delle stime ottenute, per tutte le quattro serie dei rendimenti.

Tra i modelli della classe ARCH, si è scelto di adattare modelli APARCH (descritti nel capitolo precedente), perché consentono di modellare in maniera più flessibile le varianze condizionali.

Il modello GARCH, per esempio, è un caso particolare del modello APARCH.

In questo lavoro si utilizzano modelli APARCH con errori gaussiani (*APARCH n*) e con errori t di Student (*APARCH t*).

Le stime di massima verosimiglianza sono state effettuate utilizzando un sottocampione che va dal 02/01/1989 fino al 16/09/1999.

Le ultime 1500 osservazioni, che arrivano fino al 15/06/2005, sono state utilizzate per testare le capacità previsive dei modelli analizzati attraverso la stima del VaR.

Tab. 5.2: Stime dei parametri con APARCH n e relativi standard error

	D J COMP.	**DJ INDUS**	**FTSE100**	**S & P 500**
AR(1)	0,083155	---	---	---
s.e.	*0,020459*			
C	0,037605	0,026005	0,008493	0,014926
s.e.	*0,010327*	*0,008146*	*0,002880*	*0,004271*
β_1	0,902311	0,925046	0,951608	0,940674
s.e.	*0,018956*	*0,015546*	*0,009135*	*0,010094*
α_1	0,064913	0,065633	0,047028	0,059569
s.e.	*0,011156*	*0,011116*	*0,009421*	*0,008708*
γ_1	0,766706	0,710120	0,376869	0,651143
s.e.	*0,138645*	*0,093716*	*0,096462*	*0,091996*
δ	1,083154	0,803141	1,279285	0,855000
s.e	*0,148098*	*0,134647*	*0,237527*	*0.139353*

Tab. 5.3: Stime dei parametri con APARCH t e relativi standard error

	D J COMP.	D J INDUS	FTSE100	S & P 500
AR(1)	0,066085	---	---	---
s.e.	*0,018161*			
C	0,015184	0,010195	0,007040	0,007015
s.e.	*0,006566*	*0,004390*	*0,002790*	*0,003090*
β_1	0,941313	0,950947	0,956005	0,954228
s.e.	*0,015993*	*0,011674*	*0,009114*	*0,009984*
α_1	0,046106	0,047852	0,040408	0,049083
s.e.	*0,011682*	*0,011106*	*0,010159*	*0,010372*
γ_1	0,511716	0,498164	0,406023	0,545725
s.e.	*0,166544*	*0,140301*	*0,115071*	*0,129212*
δ	1,342933	1,195897	1,477086	1,178014
s.e	*0,246749*	*0,218316*	*0,278104*	*0,196256*
t (df)	5,658331	5,539045	11,959362	5,414194
s.e.	*0,602479*	*0,579132*	*2,229743*	*0,575018*

Una volta ottenute le stime dei parametri, è possibile procedere al calcolo del *Value at Risk.*

Al fine di calcolare il VaR per le ultime 1500 osservazioni (periodo "*out-of-sample*"), sono state aggiornate le stime iterativamente ogni 50 giorni, per tener conto del flusso di nuove informazioni.

Il VaR è calcolato come somma della previsione ad un passo della media condizionale (la componente ARMA) e la previsione ad un passo della varianza moltiplicato per il percentile relativo al termine d'errore utilizzato.

Analiticamente:

$$VaR_{t+1} = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}^2_{t+1} z_{\alpha}$$

Se non vi è la componente ARMA, allora $\hat{\mu}_{t+1} = 0$.

Si sono così ottenute le serie delle previsioni del VaR.

Disponendo delle stime del VaR, si può procedere alla fase del backtesting, ovvero ad una valutazione delle stime ottenute sulla base del modello che è stato adattato ai dati.

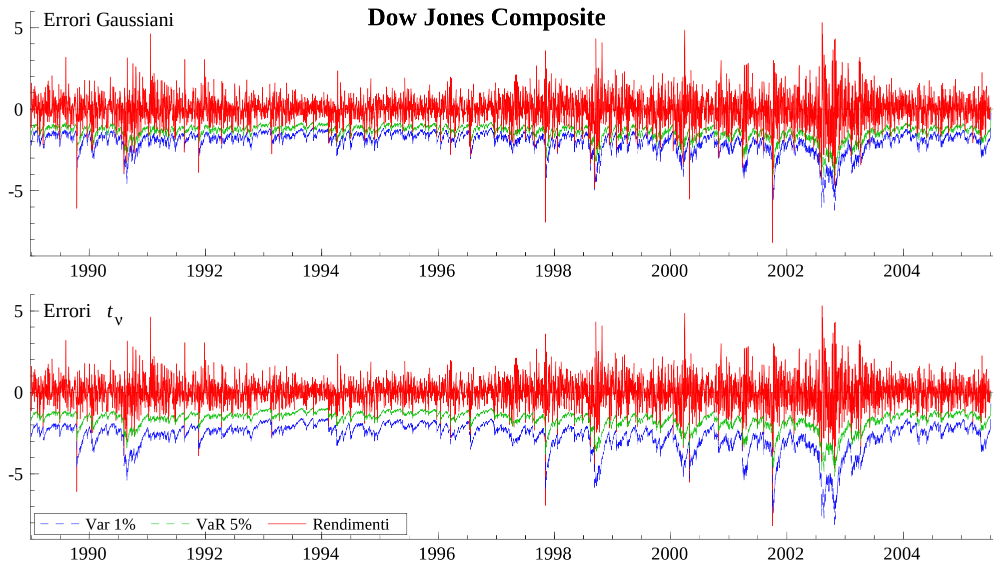
Si è visto nel terzo capitolo che il test dell'*unconditional coverage* verifica se le violazioni che intercorrono nel periodo di riferimento sono compatibili con quelle attese a quel determinato livello di significatività. Per valutare, invece, la dipendenza o meno tra le violazioni si ricorre al test dell'i*ndipendence*. Per testare congiuntamente le ipotesi che il numero medio di eccezioni sia corretto e che le stesse siano indipendenti si fa riferimento al test della *conditional coverage*.

Quest'ultimo, oltre ad essere quello più completo, è anche molto più utile ai fini delle analisi in quanto permette di individuare le cause che portano al rifiuto di un determinato modello.

Sono riportati di seguito i grafici delle serie dei rendimenti congiuntamente alle serie del VaR, sia all'1% che al 5% di livello di significatività, nonché i risultati ottenuti dall'implementazione dei test.

I test sono stati eseguiti prima su tutto il periodo di riferimento che va dal 02/01/1989 al 15/06/2005 (*Overall-sample*), poi solo sul campione considerato per la stima del modello adeguato, cioè dal 02/01/1989 al 16/09/1999 (*In-sample*), infine sulle ultime 1500 osservazioni su cui si sono effettuate le previsioni ad un passo in riferimento al modello stimato precedentemente, ovvero dal 17/09/1999 al 15/06/2005 (*Out-of-sample*).

Grafico 5.4: VaR al 5% e all'1% sulla serie dei rendimenti del Dow Jones Composite



Tab. 5.4: Risultati test per la valutazione delle stime VaR su Dow Jones Composite 65 con modello APARCH n

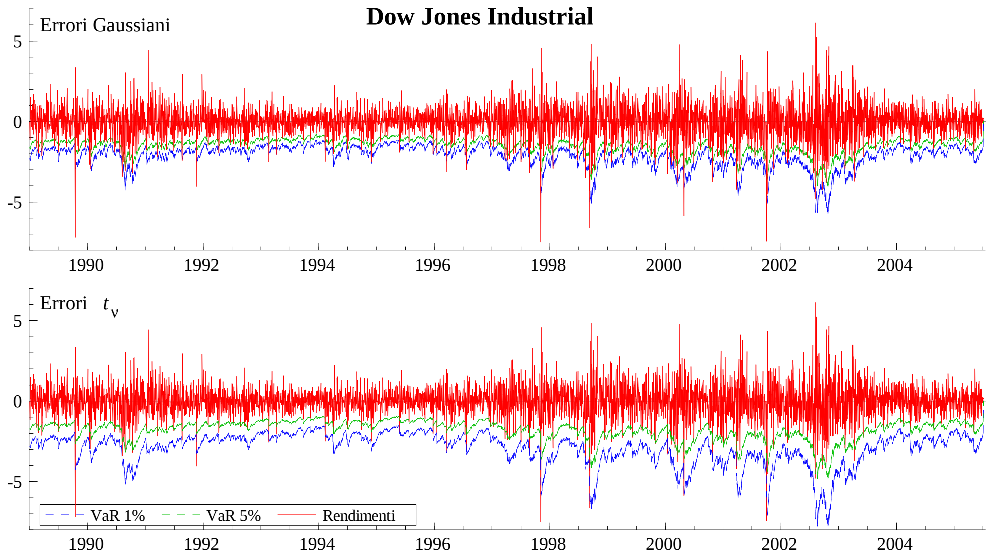
DOW JONES COMP 65		APARCH n					
		Unconditional coverage		Indipendence		Conditional coverage	
	1 - α	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***
Overall-sample	0.99	10.757	*0.00104*	2.6571	*0.26486*	13.414	*0.00025*
	0.95	0.4633	*0.49609*	0.0050	*0.99752*	0.4683	*0.49378*
In-sample	0.99	10.914	*0.00095*	0.0529	*0.81813*	10.967	*0.00415*
	0.95	1.9154	*0.16636*	0.4942	*0.48207*	2.4096	*0.29975*
Out-of-sample	0.99	0.9936	*0.31887*	5.2942	*0.02140*	6.2878	*0.04312*
	0.95	0.4929	*0.48260*	0.6125	*0.43387*	1.1054	*0.57538*

Tab. 5.5: Risultati test per la valutazione delle stime VaR su Dow Jones Composite 65 con modello APARCH t

DOW JONES COMP 65		APARCH t					
		Unconditional coverage		Indipendence		Conditional coverage	
	1 - α	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***
Overall-sample	0.99	12.548	*0.00040*	0.2266	*0.89286*	12.774	*0.00035*
	0.95	43.866	*0.0000*	1.2150	*0.54471*	45.081	*0.0000*
In-sample	0.99	7.2708	*0.00701*	0.1620	*0.16199*	7.4328	*0.02432*
	0.95	35.086	*0.0000*	0.3418	*0.55881*	35.428	*0.0000*
Out-of-sample	0.99	5.3731	*0.02045*	0.0656	*0.79779*	5.4387	*0.06592*
	0.95	9.8895	*0.00166*	0.9356	*0.33342*	10.825	*0.00446*

Sono stati evidenziati i risultati che portano al rifiuto dell'ipotesi nulla per ciascun test. Per entrambi i modelli, non risultano esserci forme di dipendenza seriale tra le violazioni. Questo significa che la prima violazione non ha influenza sulle successive e viceversa. Il VaR sembrerebbe allora reagisce bene in caso di valori che superano la soglia. Alcuni problemi sorgono invece dal test dell'*unconditional coverage*, in particolar modo per quanto riguarda il modello APARCH con errori t di Student. In questo caso, infatti, il numero delle violazioni alla soglia del VaR non sembrano essere compatibili con quelle che si sarebbero attese al livello di significatività considerato. Il rifiuto dell'ipotesi nulla di corretta copertura non condizionale porta al conseguente rifiuto dell'ipotesi nulla del test della *conditional coverage*. Il modello migliore per spiegare i nostri dati risulta essere l'APARCH con errori gaussiani, anche se al livello di significatività dell'1% continuano a persistere alcuni problemi, sia per osservazioni *In-sample*, sia *Overall-sample*.

Grafico 5.5: VaR al 5% e all'1% sulla serie dei rendimenti del Dow Jones Industrial



Tab. 5.6: Risultati test per la valutazione delle stime VaR su Dow Jones Industrial con modello APARCH n

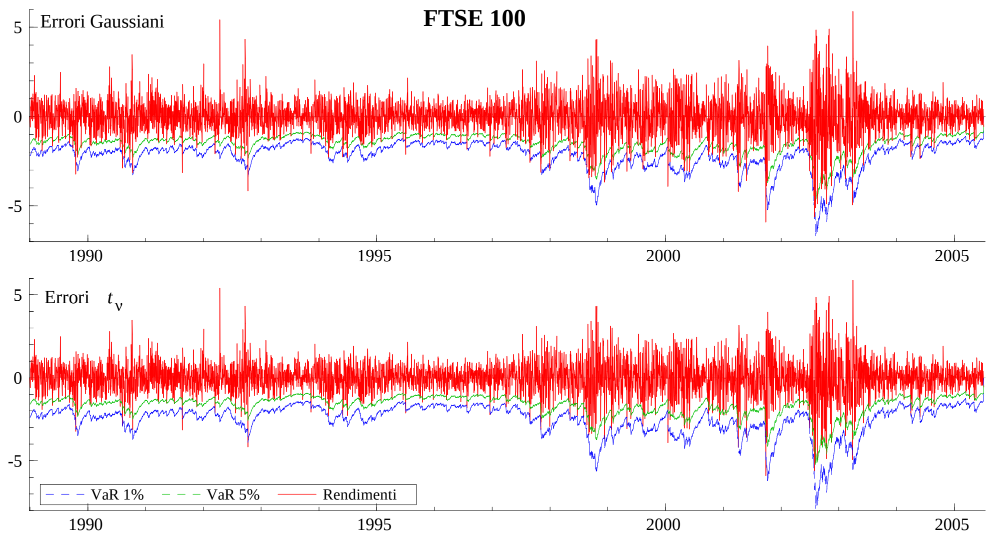
DOW JONES INDUSTRIAL		APARCH n					
		Unconditional coverage		**Indipendence**		**Conditional coverage**	
	1 - α	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***
Overall-sample	0.99	4.2234	*0.03987*	1.5340	*0.46439*	5.7574	*0.01642*
	0.95	3.9124	*0.04793*	0.9941	*0.60833*	4.9064	*0.02676*
In-sample	0.99	6.2010	*0.01277*	1.2825	*0.25744*	7.4835	*0.02372*
	0.95	4.0829	*0.04332*	0.0022	*0.96295*	4.0851	*0.12970*
Out-of-sample	0.99	0.0000	*1.0000*	0.3031	*0.58199*	0.3031	*0.85940*
	0.95	0.3585	*0.54933*	2.0617	*0.15104*	2.4202	*0.29816*

Tab. 5.7: Risultati test per la valutazione delle stime VaR su Dow Jones Industrial con modello APARCH t

DOW JONES INDUSTRIAL		APARCH t					
		Unconditional coverage		Indipendence		Conditional coverage	
	1 - α	*test*	*p-value*	*test*	*p-value*	*test*	*p-value*
Overall-sample	0.99	11.246	*0.00080*	0.2478	*0.88348*	11.494	*0.00070*
	0.95	38.605	*0.0000*	0.8683	*0.64781*	39.473	*0.0000*
In-sample	0.99	4.0798	*0.04340*	0.2335	*0.62893*	4.3133	*0.11571*
	0.95	26.015	*0.0000*	0.0669	*0.79583*	26.082	*0.0000*
Out-of-sample	0.99	9.0811	*0.00260*	0.0334	*0.85489*	9.1145	*0.01049*
	0.95	12.617	*0.00038*	1.3199	*0.25062*	13.936	*0.00094*

Anche per quanto riguarda il Dow Jones Industrial, i problemi non derivano da forme di dipendenza seriale tra le violazioni, ma dal numero di eccezioni. Il test della *unconditional coverage* ancora una volta da indicazioni del fatto che le violazioni non sembrano corrispondere con il numero atteso a quel livello di significatività. Dato che il test della *conditional coverage* risulta dalla somma dei due test precedenti, il rifiuto del test dell'*unconditional coverage* è causa del rifiuto del test di corretta copertura condizionale. Tali problemi riguardano in particolar modo il modello APARCH t. Quindi il modello che sembra spiegare meglio i nostri dati è il modello ARARCH con innovazioni gaussiane.

Grafico 5.6: VaR a 5% e all'1% sulla serie dei rendimenti del FTSE 100



Tab. 5.8: Risultati test per la valutazione delle stime VaR su Ftse 100 con modello APARCH n

FTSE 100		APARCH n					
		Unconditional coverage		Indipendence		Conditional coverage	
	1 - α	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***
Overall-sample	0.99	4.2234	*0.03987*	1.5340	*0.46439*	5.7574	*0.01642*
	0.95	0.0021	*0.96368*	3.5882	*0.16628*	3.5903	*0.05812*
In-sample	0.99	2.6998	*0.10036*	0.9935	*0.31889*	3.6933	*0.15776*
	0.95	0.8764	*0.34920*	1.4960	*0.22129*	2.3724	*0.30539*
Out-of-sample	0.99	1.5241	*0.21699*	0.5405	*0.46220*	2.0647	*0.35617*
	0.95	1.3481	*0.24562*	2.0148	*0.15577*	3.3629	*0.18610*

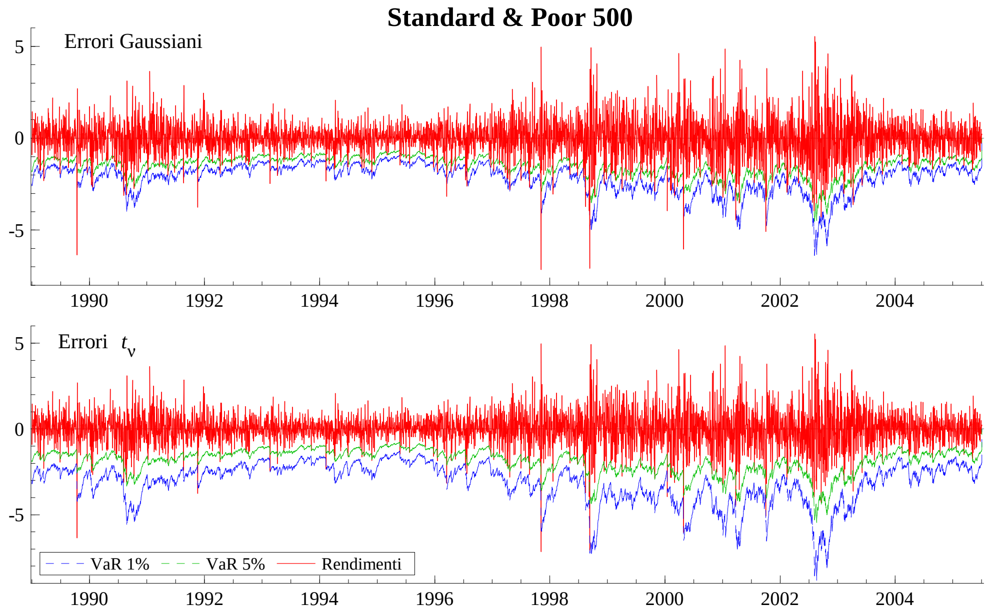
Tab. 5.9: Risultati test per la valutazione delle stime VaR su Ftse 100 con modello APARCH t

FTSE 100		APARCH t					
		Unconditional coverage		Indipendence		Conditional coverage	
	1 - α	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***
Overall-sample	0.99	5.9799	*0.01447*	0.3676	*0.83208*	6.3475	*0.01175*
	0.95	9.5435	*0.00201*	1.3494	*0.50930*	10.893	*0.00096*
In-sample	0.99	3.2488	*0.07147*	0.2603	*0.60993*	3.5091	*0.17298*
	0.95	13.096	*0.00029*	0.0511	*0.82118*	13.147	*0.00139*
Out-of-sample	0.99	2.8293	*0.09256*	0.1086	*0.74168*	2.9380	*0.23016*
	0.95	0.1279	*0.72057*	1.7278	*0.18870*	1.8557	*0.39540*

In questo caso entrambi i modelli sembrano adeguarsi bene ai dati, anche se il modello APARCH n si dimostra sempre più adeguato rispetto APARCH t.

Non risultano mai dipendenze seriali tra le violazioni. Non sempre invece il numero di violazioni attese corrisponde a quelle verificatesi.

Grafico 5.7: VaR al 5% e all'1% sulla serie dei rendimenti dello Standard & Poor 500



Tab. 5.10: Risultati test per la valutazione delle stime VaR su S&P 500 con modello APARCH n

STANDARD & POOR 500		APARCH n					
		Unconditional coverage		Indipendence		Conditional coverage	
	1 - α	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***	***test***	***p-value***
Overall-sample	0.99	3.6677	*0.05547*	0.0917	*0.95518*	3.7594	*0.05251*
	0.95	0.5652	*0.45219*	0.0105	*0.99474*	0.5757	*0.44800*
In-sample	0.99	7.9485	*0.00481*	0.1237	*0.72505*	8.0722	*0.01766*
	0.95	1.2424	*0.26502*	0.1190	*0.73006*	1.3614	*0.50626*
Out-of-sample	0.99	0.6506	*0.41989*	0.1935	*0.65998*	0.8442	*0.65568*
	0.95	0.0556	*0.81347*	0.286	*0.59228*	0.3424	*0.84262*

Tab. 5.11: Risultati test per la valutazione delle stime VaR su S&P 500 con modello APARCH t

STANDARD & POOR 500		APARCH t					
		Unconditional coverage		Indipendence		Conditional coverage	
	1 - α	*test*	*p-value*	*test*	*p-value*	*test*	*p-value*
Overall-sample	0.99	26.682	*0.0000*	0.0916	*0.95523*	26.774	*0.0000*
	0.95	62.148	*0.0000*	0.3779	*0.82783*	62.526	*0.0000*
In-sample	0.99	15.434	*0.0000*	0.0719	*0.78864*	15.506	*0.0004*
	0.95	35.086	*0.0000*	0.3418	*0.55881*	35.428	*0.0000*
Out-of - sample	0.99	11.507	*0.00069*	0.0214	*0.88372*	11.529	*0.00314*
	0.95	27.763	*0.0000*	0.0404	*0.84075*	27.803	*0.0000*

Per lo Standard & Poor 500, non si può affermare che il modello APARCH con errori t di Student sia un modello adeguato per i dati a nostra disposizione. Si rifiuta sempre l'ipotesi di corretta copertura condizionale, causato ancora una volta da un numero di violazioni diverso da quello atteso. Il modello APARCH n sembra invece essere adeguato.

Riassumendo brevemente quanto ottenuto, si è notato che il modello APARCH t non risulta essere un buon modello per spiegare l'evoluzione dei dati considerati.

Le violazioni, in nessun caso, sono legate tra loro da forme di dipendenza, e quindi sono casuali, a testimonianza del fatto che il VaR riesce a reagire positivamente al verificarsi di violazioni. Abbiamo visto infatti che il test dell'indipendenza si basa principalmente si una sima di tipo intervallare, dunque una stima dinamica. Questo significa che in presenza di bassa volatilità l'intervallo tende ad essere più ristretto rispetto a periodi caratterizzati da alta volatilità.

Il numero di eccezioni, invece, non sempre è compatibile con quello atteso al livello di significatività $1-\alpha$.

Si incontrano comunque minori problemi legati a questo fatto se consideriamo modelli APARCH con errori gaussiani per la stima della volatilità.

CONCLUSIONI

Abbiamo più volte ribadito che l'attività di *risk management* ha avuto notevoli sviluppi negli ultimi anni, visti i numerosi cambiamenti avvenuti nei mercati finanziari.
A fronte dell'interesse che è stato rivolto a questa disciplina, non era plausibile che le autorità di vigilanza non prendessero in considerazione tale evoluzione.

Un ruolo rilevante nella regolamentazione del capitale connesso all'assunzione di rischio è stato svolto dal Comitato di Basilea.
Il Comitato di Basilea è stato istituito alla fine del 1977 dai Governatori delle banche centrali dei Paesi del G10. I compiti del Comitato riguardano in generale le modalità attraverso le quali migliorare e rendere più efficace la politica di vigilanza sulle banche.

Nel luglio del 1988 il Comitato ha formulato una serie di requisiti patrimoniali che ogni banca è tenuta ad osservare. Tale proposta iniziale è stata rivista in seguito più volte, fino ad arrivare al Nuovo Accordo sul Capitale – Basilea 2, reso pubblico nel giugno 2004.
L'impegno delle autorità è stato rivolto proprio all'analisi dei modelli di misurazione del rischio adottati dalle banche e alla relativa affidabilità e integrità.

Il nuovo schema di adeguatezza patrimoniale si basa su tre pilastri, considerati equamente importanti e fra loro indipendenti:

- *Capital requirement*: un nuovo sistema di requisiti patrimoniali;
- *Supervisory review*: un processo di supervisione da parte degli organi di vigilanza nazionali volto ad assicurare che le banche si dotino di adeguati sistemi di misurazione e controllo dei rischi e sviluppino politiche di valutazione dell'adeguatezza patrimoniale;
- *Market discipline*: un utilizzo più efficace della disciplina di mercato quale strumento che integri il lavoro delle autorità di vigilanza nel garantire la solvibilità del sistema bancario, da realizzare mediante un rafforzamento della trasparenza relativa alle condizioni di rischio e di patrimonializzazione della banche.

Un passo importante di questo lavoro è stato quello di presentare alcune procedure per la valutazione delle stime ottenute del VaR.
Le procedure di backtesting presentate considerano il numero di violazioni che intercorrono nel periodo di riferimento e l'indipendenza seriale tra le stesse.
Esistono altre metodologie di valutazione basate, ad esempio, su funzioni di perdita per considerare anche l'entità della violazione, che però non sono trattate in questo lavoro.

È importante anche far notare che il VaR non può essere applicato in ogni situazione in cui si voglia misurare il rischio di una determinata realtà.
In seguito all'interesse suscitato da questi modelli, si è verificata una vera e propria "corsa" all'applicazione del VaR ai settori più disparati. Come ogni eccesso, anche questo non si è rilevato esente da contraddizioni e forzature.
Il fatto che un processo si fondi sulla metodologia VaR non implica alcuna garanzia di congruenza ed esattezza. Spesso, l'applicazione pervasiva del VaR ha comportato anche l'accettazione acritica delle ipotesi stringenti da cui questo approccio era nato.

Occorre quindi mettere in guardia contro applicazioni estensive del valore a rischio, ricordando come il VaR non serve a combattere né ad annullare i rischi.
Esso è semplicemente un'indicazione numerica – sotto certe ipotesi – del massimo livello di perdita potenziale.

Ciò che serve è l'intervento, la professionalità e l'esperienza di persone in grado di utilizzare questo, ma anche altri strumenti per svolgere al meglio i compiti loro assegnati (di controllo, di gestione, di vigilanza). Nello svolgimento di tali funzioni, può ad esempio succedere che le ipotesi sottostanti ai modelli VaR (normalità della distribuzione, base storica dei dati), non consentano una corretta descrizione della realtà di mercato circostante.

Sempre più spesso, quindi, alle analisi di tipo VaR si affiancano analisi di scenario e – all'interno di queste – analisi di stress.
Nelle analisi di scenario la variazione dei parametri di mercato non viene desunta dai parametri statistici, ma è definita in base ad aspettative soggettive.
Le analisi di stress sono finalizzate a cogliere gli eventi a bassa probabilità, eventi non catturati dalle analisi probabilistiche di tipo VaR.

Bibliografia

Sironi A. (2005), *Rischio e valore nelle banche: Risk Management e Capital Allocation*, Milano, Egea

Betti F. (2001), *Value at Risk: La gestione dei rischi finanziari e la creazione del valore*, Milano, Il Sole 24 Ore

Gallo G.M., Pacini B. (2002), *Metodi quantitativi per i mercati finanziari*, Roma, Carocci editore S.p.A.

Lopez J. A. (1999), *Methods for Evaluating Value at Risk Estimates*, Economic Review, San Francisco

Christoffersen P., Pelletier D. (2004), *Backtesting Value at Risk: A Duration-Based Approach*, Journal of Financial Econometrics, Vol.2, No.1,pp.84-108

Giot P., Laurent S. (June 2002), *Value at Risk for long and short trading positions*, Journal of Applied Econometrics, Forthcoming

Doornik J.A. (2201), *Ox: An Object-Oriented Matrix Programming Language*, Londra, Timberlake Consultans Ltd.