

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione L.M.

Algoritmi per la Compensazione Distribuita della Potenza Reattiva nelle Smart Grid

Autore: Guido Cavraro
Relatore: Sandro Zampieri
14-03-2011

Indice

1	Richiami di elettrotecnica	11
1.1	Bipoli elettrici	11
1.2	Regime sinusoidale	12
1.2.1	Rappresentazione simbolica di grandezze sinusoidali . .	12
1.2.2	Potenza in regime sinusoidale	13
1.2.3	Impedenza e ammettenza	16
1.3	Teoremi dei generatori equivalenti simbolici	17
2	Modellazione delle Smart Micro-Grid	19
2.1	La micro-rete come grafo	19
2.1.1	Nozioni preliminari sui grafi	19
2.1.2	Grafi e reti elettriche	20
2.1.3	Reti elettriche non magliate	22
2.2	Analisi dei flussi di potenza sulle reti	25
2.2.1	Flusso di potenza lungo un arco	25
2.2.2	Le equazioni dei flussi di potenza	27
2.3	Flussi di potenza reattiva in reti resistive ad albero	29
2.4	L'albero dei compensatori	31
2.5	Modello equivalente per gli archi dell'albero dei compensatori .	34
2.5.1	Stima delle impedenze equivalenti	38
2.6	Equivalenti per la rete elettrica esterna	39
2.6.1	Single-interconnection based equivalent	39
2.7	La rete di comunicazione	42
3	Compensazione ottima della potenza reattiva	45
3.1	Minimizzazione delle perdite lungo la linea di distribuzione . .	45
3.1.1	Soluzione ottima del problema	47
3.1.2	Considerazioni sull'Hessiano	48
3.2	L'algoritmo distribuito	50
3.2.1	La matrice Ω	54
3.2.2	Problemi di ottimizzazione equivalenti	54

3.3	Soluzione dei sottoproblemi di ottimizzazione	55
3.3.1	Proprietà delle matrici F_i	56
3.4	Convergenza alla soluzione ottima	57
3.5	Affinità fra il problema di consenso e l'algoritmo iterativo . . .	60
4	Velocità di convergenza dell'algoritmo	61
4.1	Definizione della velocità di convergenza	61
4.1.1	Un bound per il rate di convergenza	64
4.1.2	Proprietà della matrice $\bar{F}$	65
4.1.3	R e gli autovalori di $\mathbf{F}$	66
4.2	L'influenza del grafo di comunicazione	68
4.2.1	Il bound β	70
4.2.2	Il rate R	72
4.3	Esempio di un'applicazione dell'algoritmo	78
5	Conclusione e sviluppi futuri	83

Ringraziamenti

Questi dell'Università sono stati anni molto duri, nei quali spesso è mancata la serenità necessaria per dedicare tutte le attenzioni e le forze nello studio. Per questo il traguardo della Laurea Magistrale ha per me un significato più ampio: voglio che sia l'inizio di una nuova fase della mia vita, ricca di serenità e soddisfazioni. Il primo pensiero va al mio bambino Isaac, così bravo a regalarmi gioia e forza in ogni istante, e che vale ogni rinuncia, e a sua mamma Elisa, che mi ha sempre appoggiato e, con il suo amore e i suoi sacrifici, ha avuto parte determinante nel mio cammino all'Università.

Ringrazio papà Paolo, mamma Leopoldina e Alessandra per il sostegno che mi hanno dato, sia economico che morale, in questi anni. Sempre pronti ad aiutarmi e consigliarmi, incondizionatamente. Un ulteriore grazie va a Antonio e Marisa: è anche grazie a loro se posso raggiungere questo traguardo.

Infine desidero esprimere la mia gratitudine verso il relatore, il Prof. Sandro Zampieri, e il dottorando che mi ha aiutato, Saverio Bolognani, i quali mi hanno permesso di vivere questa meravigliosa esperienza di ricerca.

Guido Cavraro

Introduzione

Il nuovo scenario energetico

L'Europa sta entrando in un nuovo scenario energetico ([6], [11]). La dipendenza dalle importazioni di energia è molto alta ed è destinata a salire. Le riserve europee di idrocarburi si stanno esaurendo, e l'energia diventa sempre più costosa. Inoltre le infrastrutture necessitano di miglioramenti: 1000 miliardi di Euro dovranno essere investiti nei prossimi 20 anni per soddisfare la richiesta di energia e sostituire le vecchie strutture. Queste sfide, comuni a tutti i Paesi europei, richiedono risposte e iniziative comuni. Questo è il motivo per cui la Commissione Europea, l' 8/3/2006, ha pubblicato il rapporto *A European Strategy for Sustainable, Competitive and Secure Energy*, sullo sviluppo di una politica energetica europea. Si sta creando una convergenza di interessi scientifici, industriali e politici su come le tecnologie ICT (Information and Communication Technology) possano attivare un processo di trasformazione strutturale di ogni fase del ciclo energetico: dalla generazione fino all'accumulo, al trasporto, alla distribuzione, alla vendita e al consumo intelligente di energia. Questo connubio fra ICT ed Energia viene comunemente identificato con l'espressione *Smart Grid*.

Il mercato elettrico europeo e le linee elettriche costituiscono l'essenza del sistema energetico, e devono evolvere per affrontare le nuove sfide. La futura rete europea deve fornire a tutti gli utilizzatori elettricità altamente affidabile e efficace dal punto di vista economico, sfruttando pienamente l'uso sia di grandi generatori centralizzati sia di fonti più piccole, decentralizzate e distribuite in tutta Europa (DG, distributed generation).

Le reti elettriche europee hanno fornito i collegamenti essenziali fra i produttori e i fruitori di energia elettrica con grande successo per molti decenni. L'architettura di queste reti è stata pensata per unire le poche grandi centrali di generazione a tanti piccoli punti di consumo. Quella di oggi, la cui struttura è schematizzata nella Figura 1 è cioè una rete sostanzialmente passiva che trasporta l'energia secondo una sola direzione (flusso di potenza **monodirezionale**) dalle centrali agli utenti, prima attraverso le linee ad alto

voltaggio e poi attraverso quelle a medio o basso voltaggio. Il controllo della rete e dei flussi di potenza sono affidati tipicamente a impianti centralizzati.

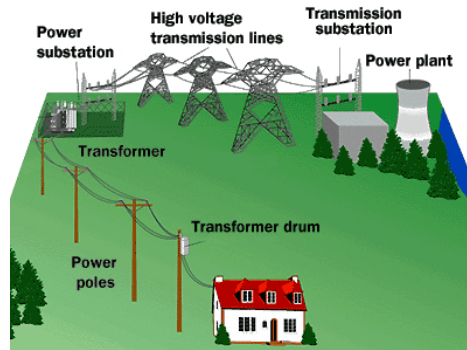


Figura 1: Struttura della attuale rete di distribuzione: l'energia prodotta in grandi centrali di generazione passa prima per la rete ad alta tensione, poi per quelle a media e bassa tensione prima di arrivare nelle nostre case.

La nuova rete dovrà sfruttare i sistemi di micro-generazione distribuita (DG, Distributed Generation) e le fonti di energia rinnovabile (RES, Renewable Energy Source), come mostrato in Figura 2. La micro-generazione permette di aumentare l'efficienza della rete, avvicinando i luoghi di produzione a quelli di consumo di energia, riducendo le perdite intrinseche del sistema di distribuzione. A questo riguardo, perdite del 6-8% dell'energia prodotta durante la trasmissione e la distribuzione sono tipiche anche delle reti più avanzate. Una diminuzione delle perdite gioverebbe anche all'ambiente, grazie alla riduzione delle emissioni di gas serra generati nella produzione di energia. Ogni casa, ogni utente, potrà potenzialmente diventare un produttore e un consumatore. La Smart Grid dovrà quindi essere riprogettata per promuovere l'uso diffuso della micro-generazione e dovrà essere in grado di gestire flussi energetici **bidirezionali**. La rete elettrica utilizzerà microprocessori e software per lavorare in modo efficiente e attingere a fonti rinnovabili per la distribuzione di energia.

Controllo distribuito delle reti

La generazione distribuita presenta delle peculiarità che renderanno l'evoluzione della rete praticamente impossibile da prevedere e da controllare in maniera centralizzata. Infatti, i sistemi di micro-generazione sono privati, presenti in gran numero e di diverse tipologie; inoltre la capacità di generazione è molto



Figura 2: Struttura della futura rete di distribuzione: accanto ai grandi impianti di generazione tradizionali vi saranno gli impianti di generazione distribuita e da fonti rinnovabili e quelli di immagazzinamento dell'energia.

variabile, dipendendo ad esempio dalle condizioni atmosferiche locali (come nel caso dei pannelli fotovoltaici). La rete elettrica sarà, come la rete internet, interattiva: ogni sistema di micro-generazione sarà in grado di comunicare e ricevere dati così da reagire in tempo reale ad eventi e stimoli che arrivano da altri dispositivi o dalla rete elettrica stessa. Una rete energetica disseminata di sensori, attuatori, nodi di comunicazione, in cui entreranno in gioco sistemi di controllo non più centralizzati ma **distribuiti** che opereranno grazie a una nuova rete di comunicazione fra i singoli micro-produttori di energia. Parti fondamentali della futura rete elettrica intelligente saranno le:

- Micro reti (*micro-grids*) nelle quali ogni utente privato può produrre localmente energia rinnovabile (attraverso ad esempio pannelli solari, eolico, piccolo idroelettrico), utilizzarla per i propri bisogni elettrici e condividerla con gli altri.
- Tecnologie di contatori intelligenti che permettono ai produttori locali di energia di venderla in modo più vantaggioso alla rete elettrica principale e di prendere, al bisogno, elettricità dalla rete rendendo il flusso elettrico bi-direzionale.

Le Smart Micro-Grid

Le *smart micro-grid* rappresentano l'unione fra la tecnologia dell'informazione e quella della trasmissione, e cambieranno radicalmente il paradigma della distribuzione di energia elettrica. Queste sono reti di bassa tensione, allacciate alla rete di distribuzione principale, con generazione da fonti rinnovabili e con sistemi di accumulo dell'energia, destinata principalmente alle abitazioni. Queste reti punteranno all'autosufficienza energetica, a divenire *isole*. La connessione con la rete di distribuzione principale è comunque necessaria per soddisfare il bisogno di energia anche nelle circostanze in cui i generatori della micro-rete non riescano a produrne a sufficienza.

Nello scenario energetico futuro vi saranno due diversi tipi di utenti:

- **utenti passivi** (o **utilizzatori**) che si connetteranno alla smart micro-grid e da essa attingeranno l'energia di cui necessitano
- **utenti attivi** che, provvisti di micro-generatori di elettricità, potranno servirsene per soddisfare i loro bisogni, immettendo nella rete l'energia in eccesso, o prelevandone nel caso in cui l'energia prodotta dai loro generatori non basti.

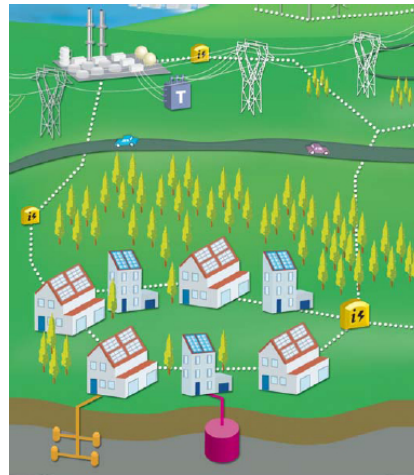


Figura 3: Smart micro-grid residenziale, in cui sono evidenziati i collegamenti con la rete di distribuzione principale. L'energia viene prodotta dai pannelli fotovoltaici sulle case, e quella in eccesso immagazzinata.

Dalla complessità di questa nuova tipologia di rete, in cui il flusso energetico non è più monodirezionale (dalle centrali di produzione agli utenti)

bensi bidirezionale (gli utenti possono assorbire ma anche immettere energia nella rete), deriva la necessità di progettare sistemi di controllo e algoritmi per la gestione, per il monitoraggio e per la protezione della rete. Infatti, un forte incremento di generatori (prevalentemente impianti di cogenerazione e impianti eolici, con generatori sincroni/asincroni) connessi alla rete, potrà provocare alterazioni nel profilo della tensione lungo le linee e quindi rendere insufficienti le modalità di controllo attuali della tensione previste per una rete passiva. Parte di questi generatori potranno quindi partecipare alla regolazione di tensione. Questi saranno fondamentali nel fornire servizi ausiliari quali il controllo e il miglioramento del profilo di tensione, o nell'ottimizzazione dei flussi di potenza ([1]). Ciascun compensatore sarà in grado di:

1. acquisire misure (come ad esempio della tensione) della rete elettrica nel punto in cui si connette ad essa
2. comunicare con altri agenti attivi della rete, grazie ad un sistema di trasmissione dati
3. elaborare i dati a disposizione
4. attuare il sistema, decidendo la quantità di potenza da immettere nella rete
5. costruire e memorizzare modelli parziali della rete, ottenute grazie alle misure e alle informazioni condivise con gli altri agenti

Per la capacità dei nodi attivi di immettere la quantità voluta di potenza nella rete, essi saranno denominati *compensatori*.

Le smart grid e la terza rivoluzione industriale

Secondo l'economista J. Rifkin ¹ lo scenario energetico mondiale è destinato a mutare radicalmente. Già siamo al tramonto dell'era del petrolio e dei combustibili fossili, per il loro prezzo in continua ascesa e per il progressivo deteriorarsi dell'ecologia della Terra.

¹Jeremy Rifkin è un economista americano, esperto di energie rinnovabili e presidente della *Foundation on Economic trends*. Autore di fama mondiale, interviene periodicamente come opinionista su numerosi quotidiani e periodici europei tra i quali il britannico *The Guardian*, lo spagnolo *El Pais*, e l'italiano *L'Espresso*. E' stato consigliere di alcuni statisti e capi di governo europei e, in particolare, ha operato come consigliere personale sulle questioni energetiche di Romano Prodi, quando questi era Presidente della Commissione Europea.

Gli stessi principi progettuali che resero possibile internet e ampie reti globali distribuite di comunicazione, verranno utilizzati per riconfigurare le reti elettriche globali in modo che la popolazione possa produrre energia rinnovabile e condividerla. Ciò creerà un nuovo sistema decentrato di utilizzazione dell'energia. L'introduzione di tecnologie per immagazzinare le forme intermittenti di energia rinnovabile e distribuirle attraverso intergrid intelligenti, porterà alla **Terza Rivoluzione Industriale**, e la prima regione al mondo che riuscirà a sfruttare il suo pieno potenziale guiderà lo sviluppo economico per il resto del secolo. Il viaggio dell'Unione Europea verso la Terza Rivoluzione Industriale è iniziato col rendere obbligatorio che il 20% di tutta l'energia sia generata da fonti rinnovabili entro il 2020.

Il controllo della potenza reattiva e struttura della tesi

La tesi si basa sullo sviluppo e lo studio di algoritmi per la minimizzazione delle perdite sulla linea di distribuzione da attuare controllando i flussi di potenza reattiva. A differenza della potenza attiva, essa non necessita, per essere prodotta, di una conversione di energia. Però, come la potenza attiva, contribuisce con il suo flusso alle perdite e alle cadute di tensione.

In passato è già stato trattato il problema della determinazione del flusso ottimo di potenza reattiva (optimal reactive power flow, ORPF, [12]), ma il contesto energetico era completamente diverso, caratterizzato da flussi unidirezionali di energia, come spiegato prima. Con l'avvento della generazione distribuita e della forte variabilità della rete di distribuzione che ne deriva, il problema dell'ORPF deve essere ridefinito e affrontato nuovamente, utilizzando gli strumenti forniti dalle metodologie di controllo locale distribuito.

La tesi si divide in 5 capitoli:

1. il Capitolo 1 richiama alcune nozioni di elettrotecnica, che serviranno per lo studio del problema
2. il Capitolo 2 propone una modellazione matematica delle reti elettriche, su cui poi si baseranno gli algoritmi di ottimizzazione. Questa modellazione cerca di unificare le notazioni e i modelli della rete forniti da diverse discipline (teoria dei grafi, elettronica di potenza, elettrotecnica) e fornire una solida base non solo per lo studio dell'ORPF, ma per lo studio delle reti elettriche in generale.
3. il Capitolo 3 definisce il problema di ottimizzazione delle perdite e l'algoritmo distribuito

-
4. il Capitolo 4 studia la velocità di convergenza dell'algoritmo e la sua dipendenza dal sistema di comunicazione fra i compensatori
 5. il Capitolo 5 traccia le conclusioni e i futuri ambiti di sviluppo

Capitolo 1

Richiami di elettrotecnica

In questo capitolo si richiamano alcune nozioni di elettrotecnica, fondamentali per lo studio degli algoritmi di ottimizzazione.

1.1 Bipoli elettrici

Un n -*polo* è un elemento elettrico dotato di n morsetti, per il quale è possibile individuare una superficie chiusa $\mathcal{S}$ che lo contiene e dalla quale escono i due morsetti tale che:

1. $\forall t$ la tensione $u(t)$ fra i morsetti è conservativa;
2. $\forall t$ la somma di tutte le correnti entranti nei morsetti è nulla (con la convenzione secondo cui la corrente è orientata verso l'interno di $\mathcal{S}$)

Una *porta* elettrica è una coppia di morsetti con correnti uguali se riferite una verso l'esterno e una verso l'interno dell' n -polo.

Un *bipolo* è un 2-polo i cui morsetti costituiscono una porta. La *potenza elettrica istantanea* scambiata a una porta è la grandezza scalare $p(t) = u(t)i(t)$ [W].

Per stabilire se la potenza entra o esce dalla porta è necessario considerare i riferimenti di tensione e corrente. Quando il riferimento di corrente ($\rightarrow$) è entrante nel morsetto che reca il riferimento di tensione (+), si dice che la porta reca la *convenzione degli utilizzatori*. In tal caso si assume che la potenza $p(t) = u(t)i(t)$ sia entrante nella porta. Se risulta $p(t) > 0$ allora la porta all'istante t *effettivamente assorbe potenza elettrica*; se risulta $p(t) < 0$ allora la porta all'istante t *eroga potenza elettrica*. Quando invece il riferimento di corrente è uscente dal morsetto che reca il riferimento di tensione (+), si dice che la porta reca la *convenzione dei generatori*. In tal

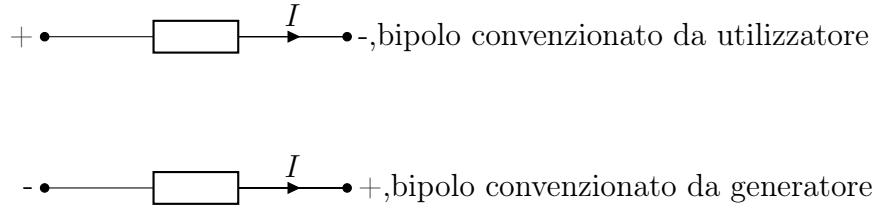


Figura 1.1: Bipoli con la convenzione dei generatori e con la convenzione degli utilizzatori

caso si assume che la potenza $p(t) = u(t)i(t)$ sia uscente dalla porta. Se risulta $p(t) > 0$ allora la porta all'istante t *effettivamente eroga potenza elettrica*; se risulta $p(t) < 0$ allora la porta all'istante t *assorbe potenza elettrica*.

1.2 Regime sinusoidale

1.2.1 Rappresentazione simbolica di grandezze sinusoidali

La generica grandezza sinusoidale del tipo

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha) \quad (1.1)$$

appartenente all'insieme delle sinusoidi isofrequenziali con pulsazione ω (oppure con frequenza $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$), è individuata dall'ampiezza A_M e dalla fase iniziale α). Con questi due parametri è individuabile uno e uno solo numero complesso

$$A = A_C e^{i\alpha_C} \quad (1.2)$$

avente modulo pari all'ampiezza della sinusoidale, $A_C = A_M$, e argomento pari alla fase iniziale, $\alpha_C = \alpha$. Viceversa dato il numero complesso A il suo modulo e la sua fase individuano una e una sola grandezza appartenente all'insieme delle sinusoidi isofrequenziali con pulsazione ω . Viene quindi stabilita una corrispondenza biunivoca fra ciascun elemento di un insieme di sinusoidi isofrequenziali e ciascun numero complesso. I numeri complessi (1.2) associati alle sinusoidi sono detti *fasori* e costituiscono le rappresentazioni simboliche delle grandezze sinusoidali.

Nell'introdurre i fasori è stata utilizzata la notazione polare dei numeri complessi, perchè questa permette di evidenziare meglio la corrispondenza con le sinusoidi. Ma un numero complesso può essere espresso anche in termini di parte reale A_R e parte immaginaria A_I , e le relazioni tra le due espressioni sono stabilite dalle formule di Eulero:

$$A = A_C e^{i\alpha_C} = A_C \cos(\alpha_C) + i A_C \sin(\alpha_C) = A_R + i A_I \quad (1.3)$$

Un bipolo si dice *in regime sinusoidale* quando la sua tensione e la sua corrente variano nel tempo secondo andamenti sinusoidali isofrequenziali. L'analisi di una rete in regime sinusoidale è facilitata dall'uso dei fasori rappresentativi delle tensioni e delle correnti.

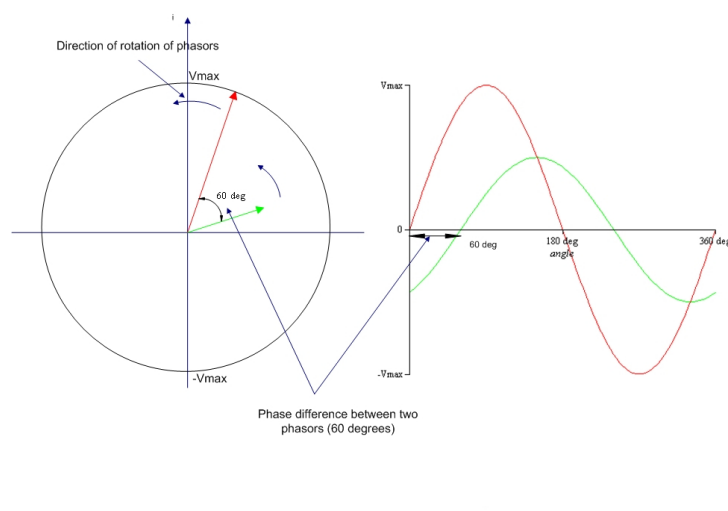


Figura 1.2: Rappresentazione fasoriale di due grandezze sinusoidali isofrequenziali.

1.2.2 Potenza in regime sinusoidale

Si consideri un bipolo a cui sia applicata la convenzione degli utilizzatori. Siano $u(t) = U_M \sin(\omega t + \alpha)$ la tensione ai capi di un bipolo, e $i(t) = I_M \sin(\omega t + \beta)$ la corrente che lo attraversa. E' consuetudine indicare con $\phi = \alpha - \beta$ lo sfasamento fra tensione e corrente.

Potenza istantanea La potenza istantanea entrante nel bipolo è espressa dal prodotto

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = U_M \sin(\omega t + \alpha) I_M \sin(\omega t + \beta) \\ &= \frac{U_M I_M}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{U_M I_M}{2} \cos(2\omega t + \alpha + \beta) \\ &= \mathcal{UI} \cos(\phi) - \mathcal{UI} \cos(2\omega t + 2\alpha + \phi) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo membro sono stati introdotti i valori efficaci $\mathcal{U} = U_M/\sqrt{2}$ e $\mathcal{I} = I_M/\sqrt{2}$. Tale potenza risulta uguale alla somma di due quantità: una

costante e una sinusoidale (detta potenza fluttuante) di frequenza doppia rispetto a quella della corrente e della tensione

$$p(t) = \mathcal{UI} \cos(\phi) - \mathcal{UI} \cos(2\omega t + 2\alpha + \phi) \quad (1.4)$$

$$= p_{cost} + p_f(t) \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

Pertanto la potenza istantanea è periodica di pulsazione $\omega' = 2\omega$.

Potenza attiva (reale) Il valore medio in un periodo di una potenza periodica è la potenza attiva P

$$P = \frac{1}{T} \int_T p(\tau) d\tau \text{ [W]} \quad (1.7)$$

Applicando questa definizione alla 1.4 si ottiene che la potenza istantanea è pari all'addendo costante

$$P = \mathcal{UI} \cos \phi \quad (1.8)$$

E' facile verificare che la potenza media su un intervallo $\Delta t \gg T$ è con ottima approssimazione pari alla potenza attiva. Dunque segue che è soltanto la potenza attiva che determina gli scambi energetici su intervalli di tempo sufficientemente lunghi, mentre la potenza fluttuante non vi partecipa.

Potenza apparente, potenza reattiva Si definiscono la potenza apparente

$$A = \mathcal{UI} \quad (1.9)$$

e la potenza reattiva

$$Q = \mathcal{UI} \sin \phi \quad (1.10)$$

Tali espressioni non sono correlate alla potenza istantanea e pertanto sono espresse in *volt-ampere* [VA] e *volt-ampere reattivi* [VAR] anzichè in watt. La potenza apparente, prodotto di valori efficaci, è intrinsecamente positiva e non associata a specifici riferimenti di tensione o corrente. Essa esprime il valore massimo cui la potenza attiva può arrivare a parità di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{I}$.

La potenza reattiva Q è legata alla variazione nel tempo dell'energia induttiva e di quella capacitiva immagazzinate rispettivamente nel bipolo induttore e nel bipolo condensatore. Essa dipende, oltre che dai valori efficaci $\mathcal{U}$ e $\mathcal{I}$ della tensione e della corrente, anche dal loro sfasamento ϕ .

Potenza attiva, reattiva ed apparente verificano le seguenti

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (1.11)$$

$$P = A \cos \phi, \quad Q = A \sin \phi \quad (1.12)$$

Potenza complessa Dai fasori si possono dedurre anche informazioni relative alle potenze scambiate dai bipoli in regime sinusoidale. A questo fine, per definire i fasori, conviene adottare la trasformazione simbolica ai valori efficaci, con la quale essi hanno moduli uguali ai valori efficaci:

$$U = \mathcal{U}e^{i\alpha} \quad (1.13)$$

$$I = \mathcal{I}e^{i\beta} \quad (1.14)$$

Si definisce allora potenza complessa la

$$S = UI^* = \mathcal{U}\mathcal{I}e^{i\phi} \quad (1.15)$$

dove il simbolo $*$ sta per complesso coniugato. Applicando a quest'ultima la formula di Eulero si ottiene

$$S = \mathcal{U}\mathcal{I}(\cos \phi + i \sin \phi) = P + iQ \quad (1.16)$$

Pertanto la potenza complessa ha

- modulo $|UI^*|$ pari alla potenza apparente A ;
- argomento $\angle(UI^*)$ pari allo sfasamento ϕ fra tensione e corrente;
- parte reale $\text{Re}(UI^*)$ uguale alla potenza attiva P ;
- parte immaginaria $\text{Im}(UI^*)$ uguale alla potenza reattiva Q

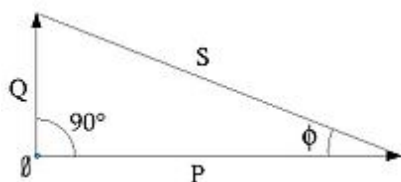


Figura 1.3: La potenza complessa ha come parte reale la potenza attiva P e come parte immaginaria la potenza reattiva Q .

Passività in regime sinusoidale I bipoli passivi in qualsiasi Δt non possono erogare lavoro elettrico maggiore del decremento che subisce l'energia immagazzinata nello stesso intervallo temporale. Nel caso di un bipolo convenzionato da utilizzatore, in base alle (1.7) e (1.8) la condizione di passività diventa la

$$P = \mathcal{U}\mathcal{I} \cos \phi \geq 0 \quad (1.17)$$

1.2.3 Impedenza e ammettenza

Si definisce *impedenza* del bipolo passivo in regime sinusoidale (convenzionato da utente) l'operatore complesso

$$Z = \frac{U}{I} \quad (1.18)$$

le cui componenti polari si ricavano

$$Z = \frac{\mathcal{U}e^{i\alpha}}{\mathcal{I}e^{i\beta}} = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{I}}e^{i\phi} \Rightarrow \begin{cases} |Z| = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{I}} [\Omega] \\ \angle Z = \phi [\text{rad}] \end{cases} \quad (1.19)$$

La condizione di passività impone che $|\phi| \leq \pi/2$. Le componenti cartesiane dell'impedenza si ottengono per mezzo della formula di Eulero

$$Z = |Z|e^{i\phi} = |Z|(\cos \phi + i \sin \phi) = R + iX \quad (1.20)$$

La condizione di passività $|\phi| \leq \pi/2$ impone che $R \geq 0$. Si determinano facilmente le potenze complessa, attiva e reattiva assorbite da un bipolo passivo

$$S = UI^* = ZII^* = (R + iX)I^2 \Rightarrow \begin{cases} S = ZI^2 \\ P = RI^2 \\ Q = XI^2 \end{cases} \quad (1.21)$$

Si definisce *ammettenza* del bipolo passivo in regime sinusoidale (convenzionato da utente) l'operatore complesso

$$Y = \frac{I}{U} \quad (1.22)$$

le cui componenti polari si ricavano

$$Y = \frac{\mathcal{I}e^{i\beta}}{\mathcal{U}e^{i\alpha}} = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{U}}e^{i\phi'} \Rightarrow \begin{cases} |Y| = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{U}} [\text{Siemens}] \\ \angle Y = \phi' [\text{rad}] \end{cases} \quad (1.23)$$

La condizione di passività impone che $|\phi'| \leq \pi/2$. Le componenti cartesiane dell'impedenza si ottengono per mezzo della formula di Eulero

$$Y = |Y|e^{i\phi'} = |Y|(\cos \phi' + i \sin \phi') = C + iB \quad (1.24)$$

La condizione di passività $|\phi'| \leq \pi/2$ impone che $C \geq 0$. Si determinano facilmente le potenze complessa, attiva e reattiva assorbite da un bipolo passivo

$$S = UI^* = UY^*U^* = (C + iB)V^2 \Rightarrow \begin{cases} S = YV^2 \\ P = CV^2 \\ Q = BV^2 \end{cases} \quad (1.25)$$

1.3 Teoremi dei generatori equivalenti simbolici

Teorema di Thèvenin simbolico Una rete della quale sia accessibile una sola porta che ammette il funzionamento a vuoto è equivalente alla serie di un generatore simbolico di tensione e di un'impedenza, detto generatore simbolico di Thèvenin che ha equazione

$$U = E_{eq} - Z_{eq}I \quad (1.26)$$

dove $E_{eq} = U_0$ (U_0 tensione simbolica a vuoto della porta AB) e $Z_{eq} = Z_i = U_0/I_{cc}$ (I_{cc} è la corrente simbolica di cortocircuito della porta AB). I parametri U_0 , I_{cc} e Z_i sono specifici della rete alla porta AB.

Teorema di Norton simbolico Una rete della quale sia accessibile una sola porta che ammette il funzionamento a vuoto è equivalente al parallelo di un generatore simbolico di corrente e di un'ammettenza, detto generatore simbolico di Norton che ha equazione

$$I = J_{eq} - Y_{eq}U \quad (1.27)$$

dove $J_{eq} = I_{cc}$ (I_{cc} è la corrente simbolica di cortocircuito della porta AB) (U_0 tensione simbolica a vuoto della porta AB) e $Y_{eq} = Y_i = I_{cc}/U_0$ (U_0 tensione simbolica a vuoto della porta AB).

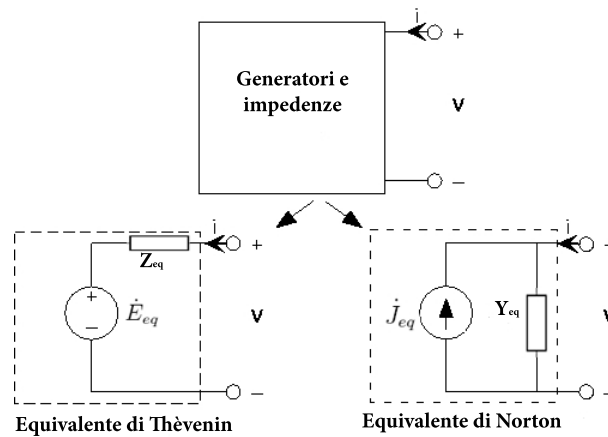


Figura 1.4: Equivalenti di Thèvenin e di Norton per una rete lineare di cui è accessibile solo una porta.

I generatori simbolici di Thèvenin e Norton sono fra loro equivalenti: tra i loro parametri valgono le relazioni

$$J_{eq} = \frac{E_{eq}}{Z_{eq}} \quad (1.28)$$

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_{eq}} \quad (1.29)$$

$$E_{eq} = \frac{J_{eq}}{Y_{eq}} \quad (1.30)$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} \quad (1.31)$$

$$(1.32)$$

Capitolo 2

Modellazione delle Smart Micro-Grid

Questo capitolo fornisce un modello matematico per le smart micro-grid, sfruttando gli strumenti della teoria dei grafi e quelli del tradizionale studio della trasmissione di energia elettrica, che può essere usato per lo studio dei flussi di potenza nelle situazioni “di regime”. Un modello comunque non ancora abbastanza completo per lo studio della dinamica della rete.

2.1 La micro-rete come grafo

Uno strumento matematico che ben si presta per trattare le reti elettriche è quello della teoria dei grafi.

2.1.1 Nozioni preliminari sui grafi

In generale, un grafo è una quaterna $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, s, t)$, dove $\mathcal{V}$ è l'insieme dei nodi, $\mathcal{E}$ è l'insieme degli archi, e s e t sono due funzioni $s, t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$. Se $s(e) = u$, allora si dice che l'arco e inizia nel nodo u . Se $t(e) = v$, allora si dice che l'arco e finisce nel nodo v . In seguito considereremo solo grafi nei quali non esiste più di un arco che inizi e finisca in due determinati nodi. In tal caso, se un arco e è tale che $s(e) = u$ e $t(e) = v$, si può semplicemente scrivere $e = (u, v)$ e $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, con $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Dato $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, chiameremo $N = |\mathcal{V}|$ e $M = |\mathcal{E}|$ rispettivamente il numero di nodi e il numero degli archi.

Un grafo si dice *non orientato* se $(u, v) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (v, u) \in \mathcal{E}$

Un cammino nel grafo $\mathcal{G}$ dal nodo u al nodo v è un insieme di archi $(u_i, v_i) \in \mathcal{E}, i = 1, s, \ell$ tale che $u_1 = u, v_\ell = v$ e $u_{i+1} = v_i \forall i = 1, s, \ell - 1$. Il numero ℓ è detto *lunghezza del cammino*.

Un grafo non orientato si dice *connesso* se per ciascuna coppia di nodi esiste almeno un cammino che li unisce e, analogamente, un grafo orientato si dice *fortemente connesso* se per ciascuna coppia di nodi esiste almeno un cammino orientato che li unisce.

Si definisce *matrice d'incidenza* la matrice $A \in \{0, 1, -1\}^{M \times N}$ che assume i valori

$$A(e, u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u = s(e) \\ -1 & \text{se } u = t(e) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui l' e -esima riga di A , in relazione con l' e -esimo arco di $\mathcal{E}$, è composta di tutti zeri eccetto che per la posizione in corrispondenza con il suo nodo di partenza, in cui vale 1, e quella relativa al nodo di arrivo, in cui vale -1. Si definisce inoltre *matrice d'adiacenza* la matrice $F \in \{0, 1\}^{N \times N}$ che assume i valori

$$F(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per grafi non orientati, la matrice F è simmetrica.

Un *albero orientato* è un particolare grafo orientato in cui per ciascun nodo i , eccetto per un nodo speciale detto *radice*, esiste un solo arco $e = (j, i) : t(e) = i$. Il nodo i è detto *figlio* di j , il nodo j *padre* di i . La radice è l'unico nodo a non avere un padre. Un albero orientato connesso possiede esattamente $M = N - 1$ archi.

2.1.2 Grafi e reti elettriche

Una rete elettrica può essere definita come una coppia $(\mathcal{G}, \mathbf{z})$, o analogamente $(\mathcal{G}, \mathbf{y})$ dove

- $\mathcal{G}$ è un grafo orientato, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. I nodi rappresentano gli utenti (attivi o passivi), e gli archi rappresentano le linee elettriche che li collegano;
- $\mathbf{z}$ e $\mathbf{y}$ sono due funzioni definite sugli archi $\mathbf{z}, \mathbf{y} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}_+$, $\mathbf{z}(e) = \mathbf{y}(e)^{-1}$, dove $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$, chiamate rispettivamente *impedenza* e *ammettenza* degli archi.

I nodi possono essere divisi in due sottoinsiemi disgiunti: l'insieme dei nodi compensatori $\mathcal{C}$, di cardinalità $N_{\mathcal{C}}$, e l'insieme dei nodi utilizzatori $\mathcal{U}$, di cardinalità $N_{\mathcal{U}}$. Ovviamente $\mathcal{V} = \mathcal{C} \cup \mathcal{U}$, e $N = N_{\mathcal{C}} + N_{\mathcal{U}}$. Definiamo inoltre le matrici diagonali $Z, Y \in \mathbb{C}^{M \times M}$, tali che $Z(e, e) = \mathbf{z}(e)$ e $Y(e, e) = \mathbf{y}(e)$, $\forall e \in \mathcal{E}$.

Si ipotizza che tutta la rete abbia la stessa impedenza per unità di lunghezza $z = e^{i\theta}r$ (e quindi anche stessa ammettenza per unità di lunghezza $y = e^{-i\theta}c$, con $c = r^{-1}$). In questo caso dunque si ha

$$Z = e^{i\theta}\Xi \quad (2.1)$$

$$Y = e^{-i\theta}C \quad (2.2)$$

con $\Xi = \text{diag}(\xi_1, s, \xi_M)$, dove (se ℓ_i è la lunghezza dell' i -esimo arco), $\xi_i = \ell_i r$, e con $C = \text{diag}(c_1, s, c_M)$, $c_i = \xi_i^{-1}$.

Siano $I \in \mathbb{C}^N$ e $U \in \mathbb{C}^N$ rispettivamente il vettore che contiene le correnti iniettate nella rete da ciascun nodo e il vettore che contiene le tensioni di ciascun nodo, espresse in notazione fasoriale. Sia inoltre $J \in \mathbb{C}^M$ il vettore che contiene i flussi di corrente che attraversano ciascun ramo della rete (anch'esse espresse in notazione fasoriale). Queste grandezze sono fra loro correlate dalle leggi di Kirchoff delle correnti (LKC) e delle tensioni (LKT), che possono essere rappresentate dal seguente sistema lineare:

$$A^T J = I \quad \text{LKC} \quad (2.3)$$

$$Y A U = J \quad \text{LKT} \quad (2.4)$$

Sostituendo la 2.4 nella 2.3 si ottiene

$$e^{-i\theta} A^T C A U = e^{-i\theta} L U = I \quad (2.5)$$

che rappresenta esprime le correnti iniettate nella rete dai nodi in funzione delle loro tensioni. L è detto *laplaciano* della rete, ed è tale che $L\mathbf{1} = 0$. E' immediato vedere che

$$L(u, v) = \begin{cases} c_u & \text{se } u = v \\ -C(e, e) & \text{se } (u, v) = e \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $c_u = \sum_{e: u=t(e), u=s(e)} C(e, e)$.

Per esprimere le tensioni dei nodi della rete in funzione delle correnti iniettate introduciamo ora la matrice di Green di L . Questa è l'unica matrice simmetrica X tale che

$$\begin{cases} LX = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{N} \\ X\mathbf{1} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Dalla (2.5) e dalla (2.6) si ha quindi che

$$e^{-i\theta} L U = I \Rightarrow X L U = e^{i\theta} X I \Rightarrow U - \mathbf{1} U_m = e^{i\theta} X I$$

con U_m tensione media dei nodi ($U_m = \sum_{i \in \mathcal{V}} U_i / N$). E' immediato verificare che la matrice di Green può essere espressa esplicitamente come

$$X = \left(L + \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{N} \right)^{-1} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{N} \quad (2.7)$$

Si definisce *impedenza effettiva* fra due nodi u e v della rete elettrica $(\mathcal{G}, Z)$ la quantità

$$\mathcal{Z}_{u,v} = \frac{U_u - U_v}{i} \quad (2.8)$$

dove U_u e U_v sono i potenziali dei nodi quando iniettiamo la corrente i nel nodo u e estraiamo la stessa dal nodo v . Assumiamo ora che $I = e_u - e_v$ ¹ (cioè che si inietti in u la stessa corrente estratta poi in v). Poichè $U_u - U_v = U^T I$, si ha

$$\mathcal{Z}_{u,v} = \frac{U^T I}{i} = (e_u - e_v)^T X (e_u - e_v). \quad (2.9)$$

2.1.3 Reti elettriche non magliate

L'algoritmo che verrà studiato si fonda sull'ipotesi che le linee elettriche che costituiscono la smart-grid non contengano alcuna maglia. In questo caso, la smart micro-grid può essere modellata come la coppia $(\mathcal{G}, \mathbf{z})$, oppure $(\mathcal{G}, \mathbf{y})$, in cui questa volta $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ è un albero orientato. Il numero degli archi ora è proprio uguale quello dei collegamenti elettrici effettivi fra i nodi, e non il doppio come nel caso in cui $\mathcal{G}$ è non orientato. Siano A la matrice d'incidenza di $\mathcal{G}$, Z e Y le matrici delle impedenze e delle ammettenze. Ancora valgono le

$$A^T J = I \quad (2.10)$$

$$e^{-i\theta} L U = I \quad (2.11)$$

$$U - \mathbf{1} U_m = e^{i\theta} X I \quad (2.12)$$

E' possibile, nel caso in cui $\mathcal{G}$ è un albero, esprimere esplicitamente i flussi di corrente sugli archi come funzioni delle correnti iniettate dai compensatori. Fissato un arco $e \in \mathcal{E}$, questo divide l'insieme dei nodi in due componenti

¹Il vettore colonna e_i è il versore le cui componenti sono tutte zero meno che quella nella i -esima posizione, che vale 1:

$$e_i = [0 \dots \underbrace{1}_i \dots 0]^T$$

disgiunte. Queste sono le componenti connesse che si otterrebbero se l'arco e fosse rimosso dall'albero:

$$e \rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{V}_e \cup \bar{\mathcal{V}}_e$$

Inoltre, si scelga un nodo speciale, $\bar{i}$, tale che, per ogni arco e , $\bar{i} \in \bar{\mathcal{V}}_e$. E' conveniente, ed è ciò che si farà d'ora in poi anche se non sarebbe necessario, scegliere $\bar{i} = 1$ (la radice dell'albero). Definiamo allora la matrice $K \in \{0, 1\}^{M \times N}$:

$$K(e, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in \bar{\mathcal{V}}_e \\ 0 & \text{se } j \in \mathcal{V}_e \end{cases}$$

E' facile notare che la riga e -esima di K identifica con il valore 0 i vertici che stanno nel sottoalbero del nodo $\iota = s(e)$, con 1 gli altri. Le matrici K ed A soddisfano una particolare e utile relazione espressa nel seguente

Lemma 1.

$$KA^T = \mathbf{I} \quad (2.13)$$

dove $\mathbf{I}$ è la matrice identità.

Dimostrazione. Infatti

$$(KN)_{e_r, e_s} = \sum_l K_{e_r, l} N_{l, e_s} = \sum_{l \in \bar{\mathcal{V}}_r} A_{l, e_s}^T = \begin{cases} 0 & \text{se } e_s = (m, n) : m, n \in \mathcal{V}_{e_r} \\ 0 & \text{se } e_s = (m, n) : m, n \in \bar{\mathcal{V}}_{e_r} \\ 1 & \text{se } e_r = e_s \end{cases}$$

□

Moltiplicando a sinistra entrambi i membri della (2.3) per K si ottiene la relazione che esprime i flussi di corrente lungo gli archi del grafo in funzione delle correnti iniettate dai nodi:

$$J = KI \quad (2.14)$$

Esempio 1. Mostriamo ora il processo con cui ad una rete elettrica si associa un grafo. In Figura 2.1 si vede la rete di partenza, in cui il nodo 1 rappresenta la connessione con la rete di distribuzione esterna, mentre gli altri sono dei generatori o utilizzatori di potenza. Il grafo a cui viene associata è mostrato nella Figura 2.2. I vertici di questo grafo rappresentano i nodi della rete, mentre i collegamenti elettrici fra questi sono rappresentati dagli archi del grafo.

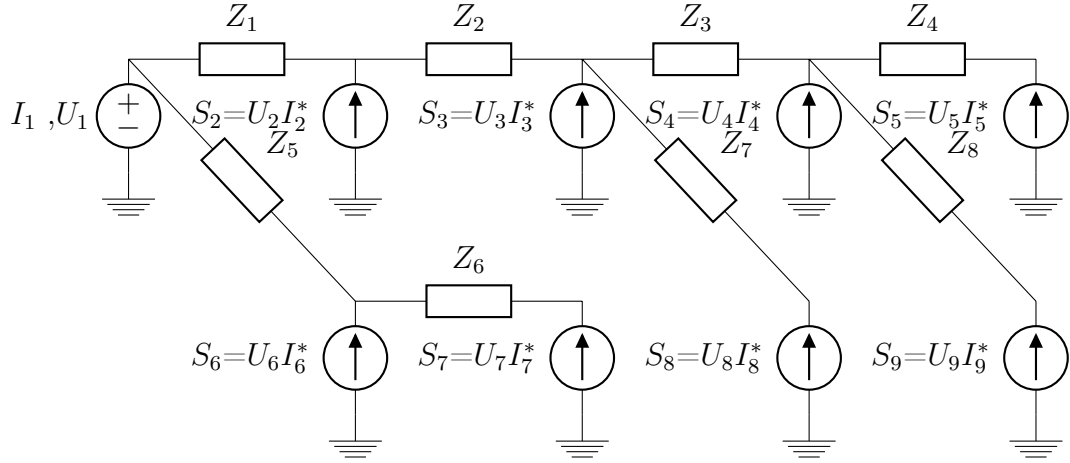


Figura 2.1: Piccola micro-grid residenziale. Il bus 1 rappresenta la connessione della micro-grid con la rete di distribuzione esterna.

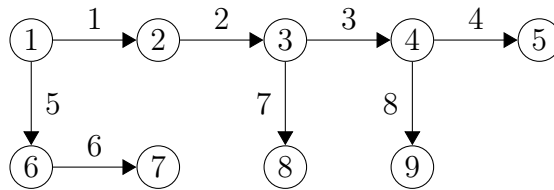


Figura 2.2: Rappresentazione attraverso un albero orientato della micro-grid di Figura 2.1.

Una volta etichettati i vertici e gli archi del grafo, si possono scrivere le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_8 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = Z^{-1} \quad (2.17)$$

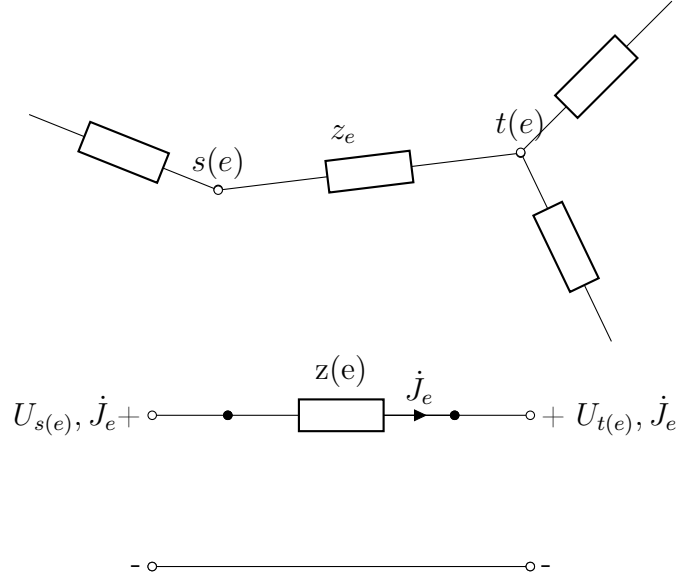
$$(2.18)$$

2.2 Analisi dei flussi di potenza sulle reti

Consideriamo ora il problema dei flussi di potenza all'interno di una micro-grid. I generatori (compensatori) e gli utilizzatori, connessi nei vari nodi (tradizionalmente detti *bus*) del sistema, iniettano o assorbono potenza ([15], [2]).

2.2.1 Flusso di potenza lungo un arco

Per capire meglio il meccanismo di trasmissione dell'energia, consideriamo il caso di un singolo arco e di $\mathcal{G}$, caratterizzato dall'impedenza $z(e) = R_i + iX_i$,

Figura 2.3: Flusso di potenza lungo l'arco e

mostrato in Figura 2.3, in cui scorre la corrente J_e . La potenza immessa nell'arco dal suo punto iniziale $s(e)$ (*sending end*) è $S_e^s = U_{s(e)} J_e^* = P_e^s + iQ_e^s$, mentre la potenza che arriva nel punto finale dell'arco $t(e)$ (*receiving end*) è $S_e^t = U_{t(e)} J_e^* = P_e^t + iQ_e^t$. La tensione al nodo ricevente è

$$U_{t(e)} = U_{s(e)} - z(e)J_e = U_{s(e)} - \left(\frac{P_e^s R_i + Q_e^s X_i}{U_{s(e)}^*} + i \frac{P_e^s X_i - Q_e^s R_i}{U_{s(e)}^*} \right) \quad (2.19)$$

Dunque, la potenza che arriva al *receiving end* è

$$S_e^t = U_{t(e)} J_e^* = P_e^s + iQ_e^s - \frac{((P_e^s)^2 + (Q_e^s)^2) R_i}{|U_{s(e)}|^2} - i \frac{((P_e^s)^2 + (Q_e^s)^2) X_i}{|U_{s(e)}|^2} \quad (2.20)$$

che differisce dalla potenza iniettata per le perdite

$$S_e^{loss} = \frac{((P_e^s)^2 + (Q_e^s)^2) R_i}{|U_{s(e)}|^2} + i \frac{((P_e^s)^2 + (Q_e^s)^2) X_i}{|U_{s(e)}|^2} = P_{loss}^e + iQ_{loss}^e \quad (2.21)$$

Queste, nel caso tipico delle linee di trasmissione in cui $X \ll R$, sono approssimabili come

$$S_{loss}^e \simeq P_{loss}^e = \frac{((P_e^s)^2 + (Q_e^s)^2) R_i}{|U_{s(e)}|^2} \quad (2.22)$$

Per questo, la potenza che arriva al nodo ricevente è circa

$$S_e^t = P_e^t + iQ_e^t \simeq \left(P_e^s - \frac{((P_e^s)^2 + (Q_e^s)^2)R_i}{|U_{s(e)}|^2} \right) + iQ_e^s \quad (2.23)$$

e quindi, arrivando al *receiving end* (quasi) la stessa potenza reattiva iniettata dal *sending end*, si può dire che la potenza reattiva “si conserva”.

Dalle equazioni precedenti si capisce come il flusso di potenza reattiva contribuisca alla caduta di tensione e alle perdite di potenza sulla linea, e quindi la necessità di minimizzarlo. Infatti, le perdite dovute alla potenza reattiva sono

$$S_{e,Q}^{loss} = \frac{(Q_e^s)^2(R_i + iX_i)}{|U_{s(e)}|^2} \simeq \frac{(Q_e^s)^2 R_i}{|U_{s(e)}|^2} \quad (2.24)$$

2.2.2 Le equazioni dei flussi di potenza

Per la gestione della rete elettrica sarebbe fondamentale conoscerne lo stato (cioè le tensioni e le correnti caratteristiche di ogni nodo). Una rete elettrica composta da N nodi è caratterizzata da $2N$ variabili complesse (il vettore delle tensioni U e quello delle correnti I , oppure U e il vettore delle potenze S). Queste variabili devono sottostare a N vincoli, ad esempio

$$\begin{cases} e^{-i\theta} LU &= I \\ \mathbf{1}^T I &= 0 \end{cases}$$

per cui rimangono N gradi di libertà. Per risolvere la rete, si sfruttano le condizioni che ogni nodo i impone, espresse principalmente con relazioni fra tensioni e correnti

$$g_i(U_i, I_i) = 0$$

Di solito in un sistema di potenza possono essere conosciute le potenza complesse richieste dai carichi, e talvolta solo la potenza attiva e la tensione dei generatori. Poiché la potenza è una funzione non lineare della corrente e della tensione, ci si trova a dover trattare un sistema di equazioni non lineari, la cui soluzione (che può anche non esistere) non è facile da trovare. Non c'è alcun metodo analitico per risolvere il problema, ma si usano tecniche iterative e numeriche per trovare la soluzione (le tensioni e le correnti). Queste equazioni non lineari sono chiamate equazioni *power flow equations*, e lo studio di queste equazioni è chiamato *power flow study*. Tali studi sono la spina dorsale dello studio dei sistemi di potenza.

Quando si vuole analizzare un sistema di potenza, come già detto, non si conoscono né tutte le tensioni né tutte le loro correnti dei bus. Per questo, per

risolvere la rete, non è possibile utilizzare direttamente la (2.11) o la (2.12) ma si devono utilizzare le equazioni del bilancio energetico. Tradizionalmente, i nodi di una rete sono suddivisi in tre categorie

1. *load bus*: sono dei nodi che iniettano (assorbono) una quantità nota di potenza complessa. Non si ha invece alcuna informazione sulla loro tensione. Solitamente i load bus rappresentano i nodi utilizzatori.
2. *generator bus*: detti anche *controlled voltage bus*, sono nodi dei quali è nota la quantità di potenza attiva P iniettata nella rete e il modulo $|U|$ della loro tensione. Restano invece da determinare la potenza reattiva Q che iniettano e la fase $\angle U$ della loro tensione. Solitamente i generator bus rappresentano, come suggerisce il loro nome, i nodi generatori.
3. *slack bus*: detti anche *swing bus*, sono praticamente dei generatori di tensione. Della loro tensione infatti sono noti sia il modulo $|U|$ che la fase $\angle U$. Resta invece da determinare la quantità di potenza $S = P + iQ$ prodotta. In ogni sistema di trasmissione vi è uno slack bus. Nel caso delle smart micro-grid viene naturale assegnare il ruolo di slack bus al nodo che si allaccia alla rete di distribuzione esterna. Gli N nodi della rete sono di solito numerati assegnando allo slack bus il numero 1.

In generale, non si possono imporre le P_i indipendentemente, ma si deve rispettare il vincolo di conservazione dell'energia e bilanciare le perdite sulle linee. Da qui l'esigenza di avere in ogni rete uno slack bus, che inietta la potenza necessaria per soddisfare il bilancio energetico.

Esistono due diverse formulazioni del *power flow problem*

1. Dati $U_1, S_2, \dots, S_N$, trovare $S_1, U_2, \dots, U_N$. E' la formulazione che si ha quando nella rete vi sono solo *load bus* e lo *slack bus* (nel nodo 1).
2. Dati $U_1, (P_2, |U_2|), \dots, (P_m, |U_m|), S_{m+1}, \dots, S_N$, trovare $S_1, (Q_2, \angle U_2), \dots, (Q_m, \angle U_m), U_m, \dots, U_N$. E' la formulazione più generale, che si ha quando nella rete compaiono non solo *load bus* e lo *slack bus*, ma anche dei *generator bus*

In entrambi i casi, si assume che, per ciascun nodo i , siano note solo due delle quattro grandezze che lo caratterizzano ($|U|, \angle U, P, Q$).

Per ogni nodo si ha che

$$I_i = e^{-i\theta} \sum_{k=1}^N L_{ik} U_k \quad (2.25)$$

Essendo $S_i = U_i I_i^*$ la potenza che il nodo inietta o assorbe, segue che

$$S_i = U_i \left(e^{-i\theta} \sum_{k=1}^N L_{ik} U_k \right)^* = e^{-i\theta} \sum_{k=1}^N L_{ik} |U_i| |U_k| e^{i\vartheta_{ik}} \quad \vartheta_{ik} = \angle U_i - \angle U_k \quad (2.26)$$

la quale è un'equazione complessa. Ci si può riportare ad un sistema di due equazioni reali, distinguendo la parte reale da quella immaginaria:

$$P_i = \sum_{k=1}^N L_{ik} |U_i| |U_k| \cos(\vartheta_{ik} - \theta) \quad (2.27)$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^N L_{ik} |U_i| |U_k| \sin(\vartheta_{ik} - \theta) \quad (2.28)$$

Si determina quindi lo stato della rete risolvendo un sistema di $N - 1$ equazioni del tipo della (2.26), oppure un sistema di $2(N - 1)$ equazioni ($N - 1$ come la (2.27) e $N - 1$ come la (2.28)), ognuna associata ad un nodo $i = 2, s, N$ (cioè ad ogni nodo ad eccezione dello slack bus, di cui si conosce già la tensione). Le incognite di ciascuna equazione dipendono dal tipo di bus a cui questa è associata. La potenza S_1 e la corrente I_1 iniettate dallo slack bus si determinano da quelle iniettate dagli altri nodi, e sono tali da far rispettare il principio di conservazione della potenza sulla rete.

La difficoltà nella risoluzione di queste equazioni è legata alla non linearità delle stesse. E trattandosi di sistemi non lineari, non è in generale garantita l'esistenza di una soluzione, nè tantomeno la sua unicità. Tuttavia, nella maggior parte dei problemi ingegneristici esiste almeno una soluzione. Nel caso di soluzioni plurime, di solito quella ricercata (e che rappresenta una rete stabile) è quella che presenta le tensioni dei nodi in modulo più vicine a quella dello slack bus.

2.3 Flussi di potenza reattiva in reti resistive ad albero

Con riferimento alla Figura 2.4, in cui è riportato un esempio di modellazione di una piccola rete mediante il grafo, assumiamo che:

- come già detto, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ sia un albero;
- I nodi siano numerati progressivamente $(1, 2, \dots, N)$;

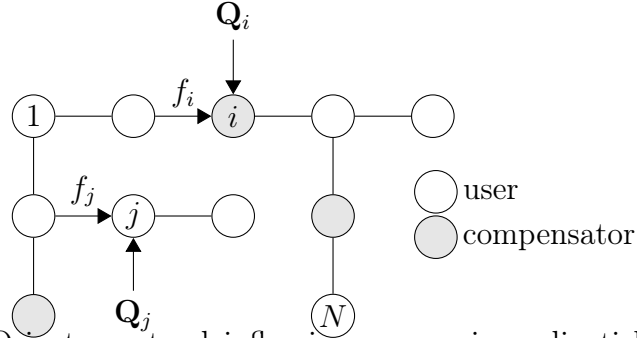


Figura 2.4: Orientamento dei flussi e convenzione di etichettatura nella modellazione di una rete elettrica con un albero

- il nodo 1 rappresenta il collegamento della micro-grid con la rete di trasmissione esterna ed è la radice dell'albero;
- l' i -esimo arco va dal padre del nodo i al nodo i stesso;
- Q_i è la quantità di potenza reattiva iniettata (assorbita se negativa) nella rete dal nodo i -esimo. Tutte le quantità di potenza reattiva iniettate nella rete dai nodi sono raccolte nel vettore $\mathbf{q}$;
- f_i è il flusso di potenza reattiva che passa per l'arco i -esimo. Le quantità di potenza reattiva iniettate nella rete dai nodi sono raccolte nel vettore $\mathbf{f}$;

Dalle equazioni (2.21) e (2.22) si capisce come, se la linea di trasmissione possiede una reattanza molto inferiore alla resistenza, o equivalentemente se nella (2.1) θ è piccolo, si può dire che la potenza reattiva iniettata nella rete “si conserva” lungo il transito nelle linee di trasmissione. Quindi i flussi di potenza reattiva si trovano a dover soddisfare lo stesso vincolo espresso nella (2.3) nel caso delle correnti, cioè

$$A^T \mathbf{f} = \mathbf{q} \quad (2.29)$$

Sfruttando la (2.13) e il fatto che $\mathcal{G}$ sia un albero, si arriva anche in questo caso alla relazione

$$\mathbf{f} = K \mathbf{q} \quad (2.30)$$

Se definiamo:

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N_c \times 1}$ il vettore che esprime le quantità di potenza reattiva iniettata da ciascun compensatore
- $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$ il vettore che esprime le quantità di potenza reattiva iniettata da ciascun utilizzatore

possiamo riscrivere la (2.30), distinguendo la potenza iniettata dai compensatori da quella iniettata dagli utenti, come

$$f = \mathcal{A}q + \mathcal{B}\bar{q}. \quad (2.31)$$

$\mathcal{A}$ è composta dalle colonne di K relative ai compensatori, $\mathcal{B}$ da quelle relative agli utilizzatori.

2.4 L'albero dei compensatori

E' importante disporre di informazioni riguardanti la mutua posizione fra i compensatori della smart micro-grid. Questa è facilmente ricavabile (nel caso in cui alla rete possa essere associato un albero) se si dispone della matrice K della (2.29). Da essa infatti si riesce a capire, $\forall i \in \mathcal{C}$, quali compensatori appartengono al sottoalbero di i e quali no, riuscendo così a costruire il nuovo albero costituito di *sol*i compensatori $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathcal{C}})$. In questo, gli archi $\in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ non rappresentano più dei collegamenti elettrici elementari fra due nodi contigui della rete, come quelli $\in \mathcal{E}$, ma indicano solamente i rapporti di adiacenza fra i compensatori. Inoltre, proprio per il fatto che tipicamente fra due compensatori si trovano diversi utenti ognuno dei quali assorbe una certa quantità di potenza reattiva, questa negli archi di $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ non si conserva: dato $e \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$, si ha che $Q_e^s \neq Q_e^t$. Nella situazione pratica in cui non è nota la topologia della rete e in cui gli unici nodi "intelligenti" sono i compensatori, l'albero dei compensatori è l'unico che può essere stimato, attraverso lo scambio di informazioni fra compensatori.

All'albero $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ si può associare la matrice $K_{\mathcal{C}}$, ricavata dalla K di $\mathcal{G}$ in questo modo:

1. Si scompone la matrice K nelle due matrici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, come fatto per l'equazione (2.31);
2. sia γ la funzione che associa ad ogni compensatore l'etichetta che ad esso è assegnata nel grafo $\mathcal{T}$, $\gamma : i \in \{1, \dots, N_{\mathcal{C}}\} \mapsto \gamma(i) \in \Gamma \subset \{1, \dots, N\}$. Dalla matrice $\mathcal{A}$ si estraggono le righe relative agli edge $\{\gamma(i)\}_{i=1}^{N_{\mathcal{C}}}$, cioè gli edge $e : t(e) = i \in \mathcal{C}$. In esse infatti è racchiusa l'informazione ricercata.

All'albero $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ è associata anche la matrice d'incidenza $A_{\mathcal{C}}$. Ovviamente, anche per $A_{\mathcal{C}}$ e $K_{\mathcal{C}}$ vale la (2.13). Invece, a causa della presenza di *load bus*, per $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ non valgono la (2.3) e la (2.4).

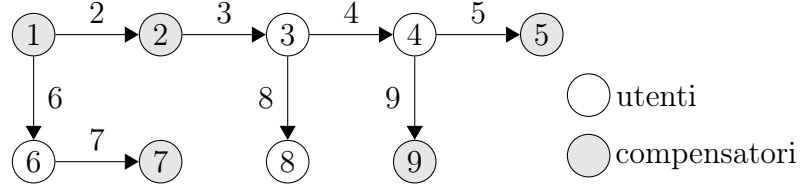


Figura 2.5: Rappresentazione attraverso un albero orientato di una micro-grid, con nodi compensatori e nodi utilizzatori

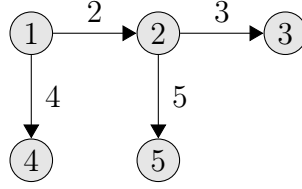


Figura 2.6: Rappresentazione dell'albero dei compensatori ricavato dalla micro-grid nell'Figura 2.5

Esempio 2. Consideriamo l'albero $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ di Figura 2.5, composto sia da compensatori che da utilizzatori, che rappresenta una smart micro-grid. Ad esso sono associate le matrici definite nelle equazioni (2.15), (2.16) e (2.17). Inoltre, con riferimento alla (2.31), definiamo le

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

In Figura 2.6 è invece rappresentato l'albero dei compensatori $\mathcal{T}_C$ che si ricava da $\mathcal{G}$. La funzione γ che lega le etichette dei vertici di $\mathcal{T}_C$ con quelle dei vertici

di $\mathcal{G}$ è

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= 1 \\ \gamma(2) &= 2 \\ \gamma(3) &= 5 \\ \gamma(4) &= 7 \\ \gamma(5) &= 9\end{aligned}$$

Dalla matrice $\mathcal{A}$, selezionando le righe opportune, si ricava la

$$K_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre la $A_{\mathcal{C}}$ è

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'algoritmo di ottimizzazione che andremo poi a definire, prevede l'attivazione di un insieme di nodi compensatori, nel caso più semplice coppie, che si scambiano le informazioni che posseggono sulla rete e sul suo stato, e poi mutano la quantità di potenza reattiva che iniettano in modo da minimizzare le perdite. I compensatori verranno suddivisi in w insiemi $C_1, \dots, C_w$ connessi, costituiti eventualmente anche da un solo nodo e che possono avere elementi in comune, tali che $\cup_{i=1}^w C_i = \{1, \dots, N_{\mathcal{C}}\}$. E' ovviamente fondamentale per lo svolgimento dell'algoritmo, che i compensatori attivati tengano conto del resto della rete in maniera adeguata. Vista la complessità della topologia della rete, la sua variabilità, la dinamica delle grandezze che la caratterizzano (tensioni e correnti), è difficile che ciascun insieme di nodi abbia una conoscenza completa, oppure possieda un modello "a priori" della rete che lo circonda, e per questo lo deve stimare. Considerato comunque che le grandezze che caratterizzano una rete di potenza variano in una scala temporale relativamente lunga, non occorre che ogni nodo ripeta la stima ad ogni sua attivazione. Verrà mostrato che è conveniente che i nodi che si attivano siano nodi adiacenti dell'albero dei compensatori, cioè $\forall i, j$ che si attivano $\exists e \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}} : s(e) = i, t(e) = j$ oppure $t(e) = i, s(e) = j$. Al fine di attuare la minimizzazione, sarebbe utile conoscere il numero e la

disposizione degli utenti che si trovano fra due condensatori adiacenti (utenti “presenti” su ciascun arco $e \in \mathcal{E}_C$) ma è impossibile. E' possibile però costruire per ogni arco $e \in \mathcal{E}_C$ un modello “equivalente” che approssimi la presena degli utenti fra $s(e)$ e $t(e)$. I compensatori potranno poi attuare l'ottimizzazione su questo modello, fittizio ma noto, anzichè su una rappresentazione più veritiera della rete, che richiede però delle conoscenze spesso non disponibili. Ovviamente il punto di ottimo trovato sfruttando il modello equivalente non è “l'ottimo reale”, ma, sotto certe ipotesi, una sua buona approssimazione.

2.5 Modello equivalente per gli archi dell'albero dei compensatori

Come visto nella sezione precedente, la potenza reattiva lungo un arco dell'albero dei compensatori $\mathcal{T}_C$ non si conserva, per la presenza di un certo numero di utenti. Dunque, fra due compensatori che vogliono minimizzare le perdite lungo la linea che li unisce, possono trovarsi diversi carichi, collegati in modo ignoto. Sarebbe utile riuscire a modellare in qualche modo la presenza di questi utenti, così da poter determinare la potenza richiesta dai carichi e minimizzare le perdite.

Si propone ora un modello che sostituisce al tratto di rete fra due compensatori, in cui ci sono n utenti, una rete formata da un unico *load bus* L , che inietta la quantità fissa di potenza S_L , e da due impedenze $Z_{1,eq}$ e $Z_{2,eq}$. In un certo senso, le impedenze equivalenti sono tali per cui L si trova nel “baricentro pesato” fra i due compensatori.

La procedura con la quale ricavare il modello equivalente è la seguente:

1. si imposta $I_L = \sum_{k=1}^n I_k$, dove I_k è la corrente assorbita dal k -esimo utente della linea.
2. si imposta $U_L = \frac{S_L}{I_L^*}$, dove $S_L = \sum_{k=1}^n S_k$ è la somma delle potenze assorbite dagli utenti.
3. si calcolano $Z_{1,eq}$ e $Z_{2,eq}$ in maniera tale che le tensioni e le correnti dei compensatori nel modello equivalente siano uguali a quelle reali e così da rispettare le leggi di Kirchoff.

Dato che la potenza iniettata nel modello equivalente è uguale a quella iniettata nella rete reale, e che la potenza assorbita da L è pari a quella assorbita da tutti gli utenti, si deduce che anche le perdite di potenza nel modello equivalente sono pari a quelle della rete reale. Ovviamente, se venisse modificato il punto di lavoro della porzione di rete, l'equivalente che si otterrebbe sarebbe diverso da quello precedente.

Il fatto interessante, e che può essere sfruttato, è che se il punto di lavoro della rete muta a seguito di una variazione “piccola” della potenza ΔS immessa nella rete, le impedenze equivalenti rimangono praticamente le stesse. Così, fintanto che il punto di lavoro della rete cambia di poco, essa si può ben rappresentare con la rete equivalente prima presentata in cui le impedenze restano costanti.

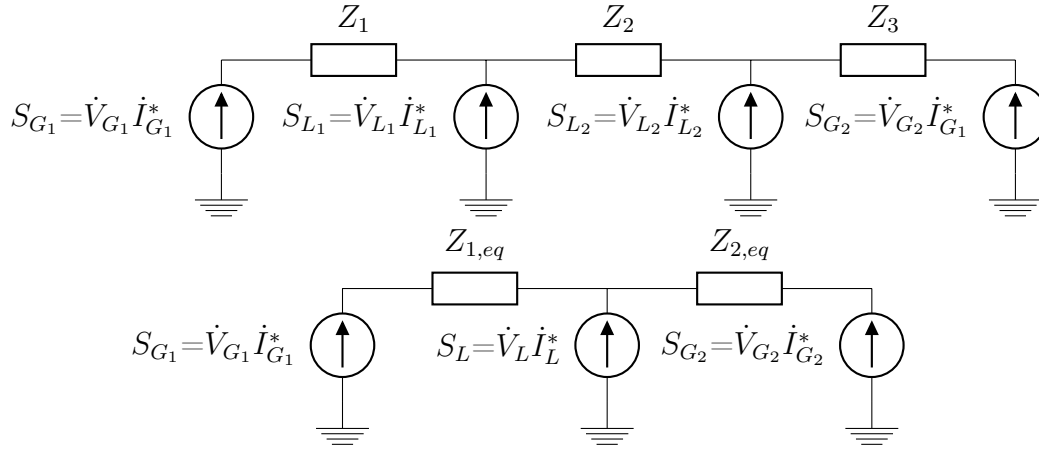


Figura 2.7: Piccola micro-grid residenziale e il suo equivalente. Il bus 1 rappresenta la connessione della micro-grid con la rete di distribuzione esterna.

Esempio 3. Consideriamo la Figura 2.7, in cui è rappresentato un tratto di rete, compreso fra i due compensatori G_1 e G_2 , nel quale sono presenti due utenti L_1 e L_2 . Il nodo G_1 è connesso con la rete di distribuzione esterna, ed è quindi vincolato ad avere tensione $V_{G_1} = 220$ V. Le impedenze della linea sono

$$Z_1 = 1 + 0.1i \quad Z_2 = 0.5 + 0.09i \quad Z_3 = 0.3 + 0.02i$$

Il punto di lavoro iniziale, all'istante $t = 0$, della rete è espresso nei seguenti valori:

$$\begin{aligned} U_{G_1}(0) &= 220 \text{ V} & I_{G_1}(0) &= 6.6862 - 1.5289i \text{ A} & S_{G_1}(0) &= 1471.0 + 336.4i \\ U_{G_2}(0) &= 215.23 - 0.07i \text{ V} & I_{G_2}(0) &= 8.3623 - 2.7903i \text{ A} & S_{G_2}(0) &= 1800.0 + 600.0i \\ U_{L_1}(0) &= 213.16 + 0.86i \text{ V} & I_{L_1}(0) &= -5.6370 + 1.8538i \text{ A} & S_{L_1}(0) &= -1200 - 400i \\ U_{L_2}(0) &= 212.67 + 0.60i \text{ V} & I_{L_2}(0) &= -9.4114 + 2.4655i \text{ A} & S_{L_2}(0) &= -2000 - 530i \end{aligned}$$

Per costruire il modello equivalente, si impongono

$$S_L(0) = S_{L_1}(0) + S_{L_2}(0) = -3200 - 930i \quad (2.33)$$

$$I_L(0) = -I_{G_1}(0) - I_{G_2}(0) = -15.0485 + 4.3192i \text{ A} \quad (2.34)$$

$$U_L(0) = \frac{S_L(0)}{I_L(0)} = 211.98 + 0.72i \text{ V} \quad (2.35)$$

e poi si ricavano le impedenze equivalenti risolvendo le LKT

$$Z_{1,eq}(0) = \frac{U_{G_1}(0) - U_L(0)}{I_{G_1}(0)} \quad (2.36)$$

$$Z_{2,eq}(0) = \frac{U_{G_2}(0) - U_L(0)}{I_{G_2}(0)} \quad (2.37)$$

Ora verrà fatto variare il punto di lavoro della rete modificando la potenza iniettata da G_1 e G_2 in questo modo:

$$S_{G_1}(t+1) = S_{G_1}(t) + \Delta S \quad (2.38)$$

$$S_{G_2}(t+1) = S_{G_2}(t) - \Delta S \quad (2.39)$$

$$(2.40)$$

con $\Delta S = \frac{2}{100}S_{G_1}$, fino ad ottenere una variazione della potenza immessa da G_1 del 10% rispetto alla condizione di lavoro iniziale. Se si calcolano le impedenze equivalenti dopo ogni variazione, si può vedere che la differenza con le $Z_{1,eq}(0)$ e $Z_{2,eq}(0)$ è davvero minima:

	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4
$Z_{1,eq}$	1.039+0.131i	1.044+0.13i	1.049+0.13i	1.054+0.13i	1.058+0.14i
$Z_{2,eq}$	0.284+0.002i	0.281+0.003i	0.278+0.002i	0.276+0.004i	0.273+0.006i

Inoltre, se si attuano le stesse variazioni di potenza nel modello equivalente caratterizzato dalle impedenze calcolate in $t = 0$ e si osservano i valori delle tensioni $V_{G_2,eq}(t)$ ($V_{G_1,eq}(t)$ è vincolato al valore 220 V) e delle perdite S_{loss} e $S_{loss,eq}$, si scopre che questi si scostano da quelli della rete reale di poco:

	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4
U_{G_2}	215.23-0.07i	214.98-0.10i	214.74-0.13i	214.49-0.16i	214.24-0.19i
$U_{G_2,eq}$	215.23-0.07i	215.05-0.08i	214.86-0.10i	214.68-0.12i	214.50-0.14i

	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4
S_{loss}	70.95+6.36i	72.38+6.54i	73.87+6.72i	75.43+6.91i	77.07+7.11i
$S_{loss,eq}$	70.95+6.36i	72.32+6.61i	73.73+6.86i	75.20+7.11i	76.72+7.38i

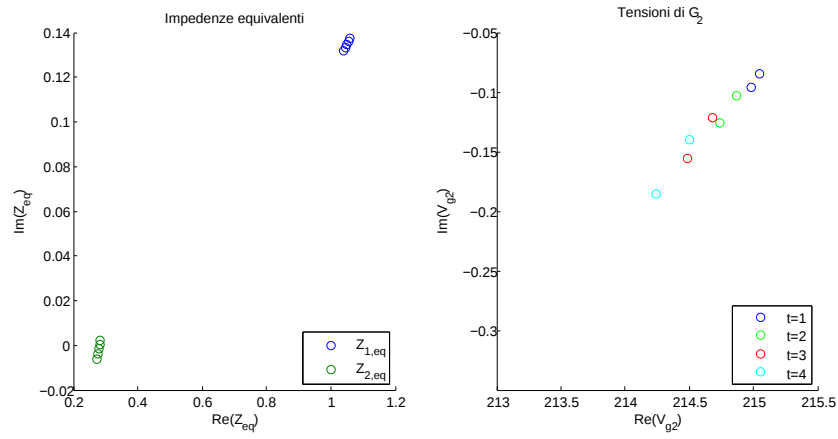


Figura 2.8: Rappresentazione grafica delle impedenze equivalenti e delle tensioni in G_2 nei vari punti di lavoro

In particolare, dato che l'algoritmo di ottimizzazione è incentrato sullo studio delle perdite, è importante puntare l'attenzione su di queste: quelle del modello equivalente e quelle della rete reale sono praticamente identiche.

In base a queste considerazioni, si può dire che la rete equivalente fornisce una buona approssimazione della rete reale, dal momento che sia le perdite sulla linea che le tensioni ai suoi capi sono molto simili a quelle reali non solo in un determinato punto di lavoro, ma anche in un suo intorno. Per questo, quando non è nota la topologia della rete elettrica, è utile poter ricorrere ad un modello di questo tipo.

2.5.1 Stima delle impedenze equivalenti

Viene ora presentato un metodo con il quale stimare le impedenze equivalenti introdotte nella sezione precedente, il quale richiede, per ciascun compensatore, la misura della sua tensione, della potenza che immette e delle correnti sulle linee che si congiungono in esso.

Consideriamo la rete mostrata in Figura 2.7, e immaginiamo di voler costruire un equivalente per il tratto compreso fra i compensatori G_1 e G_2 . All'istante $t = 0$, G_1 e G_2 misurano le potenze che iniettano, $S_{G_1}(0)$ e $S_{G_2}(0)$, le loro tensioni, $U_{G_1}(0)$ e $U_{G_2}(0)$, e le correnti lungo le linee che da essi partono. Al tempo $t = 1$, G_1 e G_2 modificano le potenze iniettate imponendo $S_{G_1}(1) = S_{G_1}(0) + \Delta S$ e $S_{G_2}(1) = S_{G_2}(0) - \Delta S$ e compiono di nuovo le misure precedenti, ottenendo $U_{G_1}(1)$ e $U_{G_2}(1)$. Facilmente si riescono a ricavare le correnti iniettate dai generatori

$$I_{G_1}(0) = \frac{S_{G_1}(0)^*}{U_{G_1}(0)^*}, U_{G_1}(1) = \frac{S_{G_1}(1)^*}{U_{G_1}(1)^*}$$

$$I_{G_2}(0) = \frac{S_{G_2}(0)^*}{U_{G_2}(0)^*}, U_{G_2}(1) = \frac{S_{G_2}(1)^*}{U_{G_2}(1)^*}$$

e le potenze iniettate nel tratto di rete che gli accumuna

$$S_{l,12}(0) = U_{G_1}(0)(I_{G_1}(0) + I_s(0))^* = U_{G_1}(0)I_l(0)^*$$

$$S_{l,12}(0) = U_{G_2}(0)(I_{G_2}(0) + I_d(0))^* = U_{G_2}(0)I_r(0)^*$$

$$S_{l,12}(1) = U_{G_1}(1)(I_{G_1}(1) + I_s(1))^* = U_{G_1}(1)I_l(1)^*$$

$$S_{l,12}(1) = U_{G_2}(1)(I_{G_2}(1) + I_d(1))^* = U_{G_2}(1)I_r(1)^*$$

Se le potenze richieste dagli utenti (la cui somma è S_L) nel tratto di linea compreso fra G_1 e G_2 non cambia, si ha che

$$S_{l,12}(0) + S_{r,12}(0) = S_{loss}(0) + S_L \quad (2.41)$$

$$S_{l,12}(1) + S_{r,12}(1) = S_{loss}(1) + S_L \quad (2.42)$$

da cui

$$S_{loss}(1) - S_{loss}(0) = S_{l,12}(1) - S_{l,12}(0) + S_{r,12}(1) - S_{r,12}(0) \quad (2.43)$$

cioè

$$Z_{1,eq}(|I_l(1)|^2 - |I_l(0)|^2) + Z_{2,eq}(|I_r(1)|^2 - |I_r(0)|^2) = S_{l,12}(1) - S_{l,12}(0) + S_{r,12}(1) - S_{r,12}(0) \quad (2.44)$$

Inoltre, per l'equivalente devono valere le LKT

$$U_{G_1} - Z_{1,eq}I_l = V_L \quad (2.45)$$

$$U_{G_2} - Z_{2,eq}I_r = V_L, \text{ dalle quali segue la } \quad (2.46)$$

$$U_{G_1} - Z_{1,eq}I_l = U_{G_2} - Z_{2,eq}I_r. \quad (2.47)$$

Risolvendo il sistema formato dalla (2.44) e dalla (2.47), G_1 e G_2 siamo in grado di stimare le impedenze $Z_{1,eq}$ e $Z_{2,eq}$ per il modello equivalente del tratto di linea che li congiunge.

2.6 Equivalenti per la rete elettrica esterna

Quando due compensatori vicini si attivano, per attuare l'ottimizzazione del flusso di potenza reattiva devono tenere conto adeguatamente della rete esterna. Questa può essere stimata utilizzando il metodo che andremo ora a illustrare ([17]). Esso prevede che ciascun insieme di nodi compensatori $\mathcal{C}_i$ associ ad ogni linea che li connette alla rete esterna (che altro non è se non un sottoalbero di $\mathcal{G}$) un equivalente, i cui parametri vengono aggiornati in base alle rilevazioni di tensioni e correnti. Questo equivalente viene detto *single-interconnection based equivalent*.

2.6.1 Single-interconnection based equivalent

Siano i compensatori suddivisi in w insiemi $C_1, \dots, C_w$, e l' i -esimo insieme abbia $n_I(i)$ interconnessioni con la rete esterna, rappresentate dagli archi $e_{i,1}, s, e_{i,n_I(i)}$. Si assume che la configurazione della rete elettrica cambi abbastanza lentamente da poterla considerare "tempo-invariante". Denoteremo con

$$\mathbf{E}_\alpha(J_{e_{i,l}}, U_{e_{i,l}}) = 0 \quad (2.48)$$

l'insieme dei vincoli espressi con equazioni parametrizzate che l'insieme $\mathcal{C}_i$ di nodi associa alla l -esima interconnessione. Sia $\alpha \in \Theta$ il vettore dei parametri da cui dipendono queste equazioni.

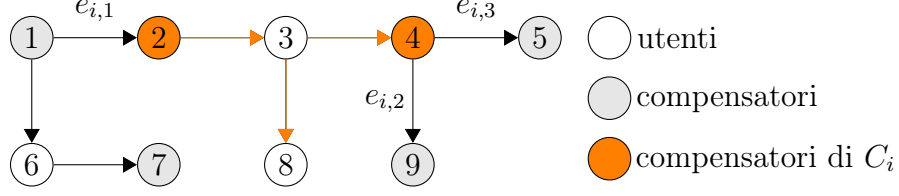


Figura 2.9: Nella micro-grid, i nodi arancioni sono i compensatori che costituiscono l'insieme C_i , mentre gli archi $e_{i,1}, e_{i,1}, e_{i,1}$ rappresentano i collegamenti di C_i con la rete esterna.

Definiamo con $\mathbf{HJ}_{e_{i,l}}^t$ e $\mathbf{HV}_{e_{i,l}}^t$ i vettori $\in \mathbb{C}^{t+1}$ le cui componenti sono i valori delle correnti $J_{e_{i,l}}$ e delle tensioni $V_{e_{i,l}}$ misurate ai tempi $0, 1, s, t$. Sia $\mathcal{HC} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}^{2 \times n}$. Definiamo allora $\Phi : \mathcal{HC} \rightarrow \Theta$ la funzione tale che $\alpha_{i,l}^t$, definito come l'insieme di parametri α che l'insieme $\mathcal{C}_i$ associa alla l -esima interconnessione al tempo t , è data da

$$\alpha_{i,l}^t = \Phi(\mathbf{HJ}_{e_{i,l}}^t, \mathbf{HV}_{e_{i,l}}^t) \quad (2.49)$$

Ora verranno presentati alcuni equivalenti possibili e fornite le equazioni che in ciascun caso compongono l'insieme di vincoli parametrizzati in (2.48).

Equivalenti PV I *PV equivalent* sono utilizzati per rappresentare le rete oltre ciascuna interconnessione come un nodo il cui modulo di tensione e il cui consumo di potenza attiva sono costanti. In Figura 2.10 è rappresentato come l'insieme $\mathcal{C}_i$ usa questo tipo di equivalente.

Le equazioni che costituiscono i vincoli (2.48) si scrivono come

$$\operatorname{Re}(U_{e_{i,l}} J_{e_{i,l}}^*) - P_{\alpha,il} = 0 \quad (2.50)$$

$$\|U_{e_{i,l}}\| - V_{\alpha,il} = 0 \quad (2.51)$$

Per queste equazioni, il vettore dei parametri da stimare è $\alpha = [P_{\alpha,il} \ V_{\alpha,il}]^T$, dove $P_{\alpha,il}$ e $V_{\alpha,il}$ sono la potenza attiva e il modulo della tensione associati al *PV-equivalent*

Equivalenti PQ I *PQ equivalent* sono utilizzati per rappresentare le rete oltre ciascuna interconnessione come un nodo il cui consumo di potenza (sia attiva che reattiva) è costante. In Figura 2.11 è rappresentato come l'insieme $\mathcal{C}_i$ usa questo tipo di equivalente.

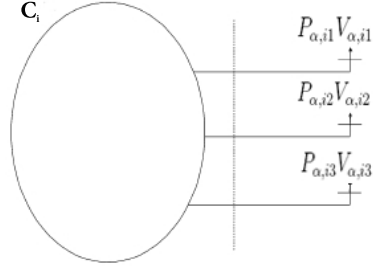


Figura 2.10: I nodi dell'insieme $\mathcal{C}_i$ associano ad ogni connessione con la rete esterna un PV equivalent

Le equazioni che costituiscono i vincoli (2.48) si scrivono come

$$\operatorname{Re} (U_{e_{i,l}} J_{e_{i,l}}^*) - P_{\alpha,il} = 0 \quad (2.52)$$

$$\operatorname{Im} (U_{e_{i,l}} J_{e_{i,l}}^*) - Q_{\alpha,il} = 0 \quad (2.53)$$

Per queste equazioni, il vettore dei parametri da stimare è $\alpha = [P_{\alpha,il} \ Q_{\alpha,il}]^T$, dove $P_{\alpha,il}$ e $Q_{\alpha,il}$ sono la potenza attiva e la potenza reattiva associati al *PQ-equivalent*

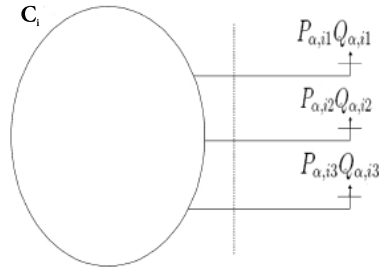


Figura 2.11: I nodi dell'insieme $\mathcal{C}_i$ associano ad ogni connessione con la rete esterna un PQ equivalent

Equivalenti di Thèvenin I *Thèvenin-like equivalent* sono utilizzati per rappresentare le rete oltre ciascuna interconnessione come un nodo il cui fasore della tensione è costante e come una linea ad impedenza costante. In Figura 2.12 è rappresentato come l'insieme $\mathcal{C}_i$ usa questo tipo di equivalente.

Le equazioni che costituiscono i vincoli (2.48) si scrivono come

$$\operatorname{Re} (U_{e_{i,l}} - Z_{\alpha,il} J_{e_{i,l}} - V_{\alpha,il}) = 0 \quad (2.54)$$

$$\operatorname{Im} (U_{e_{i,l}} - Z_{\alpha,il} J_{e_{i,l}} - V_{\alpha,il}) = 0 \quad (2.55)$$

Per queste equazioni, il vettore dei parametri da stimare è $\alpha = [V_{\alpha,il} \ Z_{\alpha,il}]^T$, dove $V_{\alpha,il}$ e $Z_{\alpha,il}$ sono la tensione e l'impedenza al *Thèvenin-like equivalent*. In tutti questi *single-interconnection based equivalent* non è richiesta alcuna

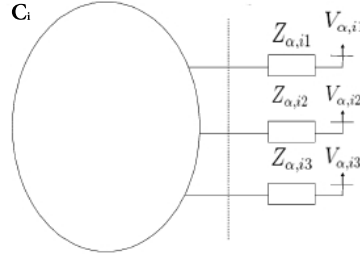


Figura 2.12: I nodi dell'insieme C_i associano ad ogni connessione con la rete esterna un Thèvenin-like equivalent

comunicazione fra i compensatori, ma soltanto la disponibilità di misure di tensione e corrente.

Stima di α La rete elettrica oltre ciascuna interconnessione è rappresentata dai compensatori di C_i tramite la (2.48). Ad ogni istante t , ogni insieme di compensatori deve determinare il vettore $\alpha_t \in \Theta$ tale per cui i vincoli (2.48) “meglio” vengono soddisfatti. Una possibile procedura per ottenere il valore di α_t è la seguente.

Definiamo l'indice

$$J(\mathbf{HJ}_{e_{i,l}}^t, \mathbf{HV}_{e_{i,l}}^t) = \sum_{k=0}^t \beta \|\mathbb{E}[\mathbf{HJ}_{e_{i,l}}^t(k), \mathbf{HV}_{e_{i,l}}^t(k)]\|^2$$

dove β è chiamato *memory factor*, e decide quanto le vecchie misure “pesino” nella sommatoria ($\beta = \frac{1}{t+1}$ se si assegna a ciascuna misura la stessa importanza). Si può allora imporre che

$$\alpha_{i,l}^t = \Phi(\mathbf{HJ}_{e_{i,l}}^t, \mathbf{HV}_{e_{i,l}}^t) = \arg \min_{\alpha \in \Theta} J(\mathbf{HJ}_{e_{i,l}}^t, \mathbf{HV}_{e_{i,l}}^t) \quad (2.56)$$

e il calcolo della funzione $\Phi(\mathbf{HJ}_{e_{i,l}}^t, \mathbf{HV}_{e_{i,l}}^t)$ richiede la soluzione di un problema ai minimi quadrati (*WLS problem*).

2.7 La rete di comunicazione

Il connubio fra tecnologie dell'informazione e quelle della trasmissione dell'energia rappresentato dalle smart micro-grid, ha come pilastro la capacità degli

utenti attivi di scambiare fra loro informazioni attraverso una rete di comunicazione. Questa può essere rappresentata attraverso il grafo $C = (\mathcal{C}, \mathcal{E}_C)$, i cui nodi rappresentano i compensatori della smart micro-grid, mentre gli archi invece collegano i compensatori che possono comunicare fra loro. Quindi, accanto al grafo che rappresenta la rete elettrica $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, abbiamo il grafo che rappresenta la rete di comunicazione fra compensatori $\mathcal{G}_C = (\mathcal{C}, \mathcal{W})$. Ovviamente, il grafo C di comunicazione non deve essere necessariamente un albero o ricalcare $\mathcal{T}_C$, e la sua progettazione sarà fondamentale per garantire la convergenza dell'algoritmo alla soluzione ottima.

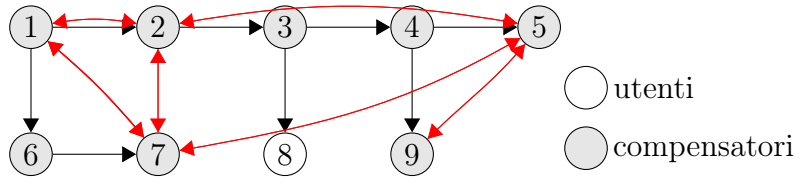


Figura 2.13: Esempio di grafo di comunicazione (in rosso) definito sull'insieme dei compensatori

La comunicazione fra compensatori potrebbe avvenire in vari modi.

1. mediante fibre ottiche;
2. semplicemente sfruttando le stesse linee di trasmissione dell'energia, attraverso la power line communication (PLC).
3. sfruttando una rete wireless;

Nel primo caso, si riuscirebbe a trasferire la quantità maggiore di dati e nella maniera più veloce (la fibra ottica riesce a trasferire dati a centinaia di Gbps). Un'altra ragione per l'uso della fibra ottica è il fatto esistono molte linee già utilizzabili. Il problema di questa soluzione è che non sempre può essere realizzabile o conveniente, a causa del costo o del luogo in cui dovrebbe essere costruita.

Nel secondo caso, si sfrutta la stessa rete elettrica per il trasferimento di dati. In questo caso si ha il grande vantaggio di costruire la rete di comunicazione su un'infrastruttura già presente e che può raggiungere qualsiasi utenza. Di contro, questa modalità di comunicazione può sfruttare una banda piuttosto limitata, dato che le linee non sono state progettate per trasferire dati.

Infine, anche la tecnologia della comunicazione wireless potrebbe essere sfruttata. Questa ha una capacità di trasmissione dati maggiore rispetto alla tecnologia PLC. Tuttavia è limitata dal fatto che non può raggiungere qualsiasi utenza, specie se si trovano in zone isolate.

Sono in fase di sviluppo gli standard sui quali si baseranno le comunicazioni fra compensatori.

Capitolo 3

Compensazione ottima della potenza reattiva

3.1 Minimizzazione delle perdite lungo la linea di distribuzione

Lo scopo di questo capitolo è di proporre un algoritmo per la minimizzazione delle perdite lungo le linee di distribuzione da ottenere mediante il controllo della potenza reattiva iniettata dai dispositivi di generazione distribuita. Abbiamo visto come le perdite S_i^{loss} di potenza attiva dovute al trasporto di potenza reattiva lungo l' i -esimo (caratterizzato dall'impedenza $z(i) = R_i + iX_i$, con $X_i \ll R_i$) arco sono del tipo

$$S_i^{loss} = f_i^2 \frac{R_i}{|U_{s(i)}|^2} \quad (3.1)$$

Di solito le linee di trasmissione hanno impedenza molto bassa, così da poter assumere che le perdite di S_i^{loss} sono molto minori rispetto alla potenza che attraversa la linea:

$$(U_{t(i)} - U_{s(i)})J_i^* = z(i)|J_i|^2 \ll U_{s(i)}J_i^* \quad (3.2)$$

e che la differenza di tensione fra $U_{t(i)}$ e $U_{s(i)}$ è molto piccola se paragonata alla tensione $U_{t(i)}$:

$$|U_{t(i)} - U_{s(i)}| \ll |U_{t(i)}| \quad (3.3)$$

Esempio 4. Facendo riferimento all'Esempio , in cui è rappresentata una piccola rete in cui le linee hanno bassa impedenza, si può notare che, con le potenze iniettate $S_{G_1} = 1471.0 + 336.4i$ e $S_{G_2} = 1800.0 + 600.0i$, la potenza persa nella trasmissione è $S^{loss} = 70.95 + 6.36i$. Inoltre, se $|U_1| = 220$, effettivamente $|U_1 - U_2| = 4.77 \ll 220$.

In base alle considerazioni precedenti, è lecito fare l'approssimazione

$$S_i^{loss} = f_i^2 \frac{R_i}{|U_{s(i)}|^2} \simeq f_i^2 \frac{R_i}{|U_1|^2} = f_i^2 d_i, \quad d_i = \frac{R_i}{|U_1|^2} \quad (3.4)$$

ed esprimere le perdite totali di potenza attiva per il trasporto di potenza reattiva con la

$$\bar{C}(f_2, s, f_N) = \sum_{i=2}^N f_i^2 d_i = f^T D f. \quad (3.5)$$

L'ottimizzazione dei flussi di potenza reattiva si ottiene minimizzando la (3.5), dove $D = \text{diag}(d_2, s, d_N)$. Si arriva così alla formulazione del problema

$$\min_f f^T D f \quad (3.6)$$

I flussi di potenza lungo le linee dipendono sia dalle quantità prodotte o assorbite dai compensatori e dagli utenti sia dalla topologia della rete. Se le linee sono quasi puramente resistive (il parametro θ di (2.1) è piccolo), quest'ultima relazione è espressa dalla

$$f = Kq$$

Se si vuole distinguere la potenza iniettata dai compensatori da quella iniettata dagli utenti, si ottiene

$$f = \mathcal{A}q + \mathcal{B}\bar{q}$$

Possiamo assumere che la potenza reattiva iniettata nella rete dai compensatori (e anche dalla rete esterna qualora $Q_1 > 0$) sia esattamente quella di cui abbiano bisogno gli utilizzatori, cioè

$$\sum_{i \in \mathcal{CU}} Q_i = 0. \quad (3.7)$$

che si può riscrivere come

$$\mathbb{1}_{N_c}^T q + \mathbb{1}_{N_u}^T \bar{q} = 0 \quad (3.8)$$

dove $\mathbb{1}_{N_c} \in \mathbb{R}^{N_c \times 1}$, $\mathbb{1}_{N_c} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$. Il problema (3.6) viene così riformulato come

$$\min_f f^T D f \quad (3.9)$$

$$s.t. \quad f = \mathcal{A}q + \mathcal{B}\bar{q} \quad (3.10)$$

$$\mathbb{1}_{N_c}^T q + \mathbb{1}_{N_u}^T \bar{q} = 0 \quad (3.11)$$

il quale, sostituendo la (3.10) in (3.9), diviene il

$$\begin{aligned} \min_q \quad & q^T \mathcal{A}^T D \mathcal{A} q + 2q^T \mathcal{A}^T D \mathcal{B} \bar{q} + \bar{q}^T \mathcal{B}^T D \mathcal{B} \bar{q} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbb{1}_{N_c}^T q + \mathbb{1}_{N_u}^T \bar{q} = 0 \end{aligned}$$

In questo però $\bar{q}$ è costante e non può essere regolato. Quindi il problema è equivalente al

$$\min_q \quad q^T \frac{M}{2} q + m^T q \quad (3.12)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbb{1}_{N_c}^T q = c \quad (3.13)$$

dove $m = 2\mathcal{A}^T D \mathcal{B} \bar{q}$, $c = \mathbb{1}_{N_u}^T \bar{q}$ e $M = 2\mathcal{A}^T D \mathcal{A}$. che è un problema quadratico con vincoli lineari.

3.1.1 Soluzione ottima del problema

Il problema di ottimizzazione (3.12) è un problema quadratico vincolato che può essere facilmente risolto con il metodo della decomposizione duale. In generale, dato il problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & G(x) \\ \text{s.t.} \quad & h(x) = 0 \end{aligned}$$

la soluzione si ottiene seguendo la procedura:

1. si costruisce la Lagrangiana $L(x, \xi) = G(x) + \xi h(x)$
2. si trova il valore minimo $x^*(\xi) = \min_x L(x, \xi)$ dipendente da (ξ)
3. si costruisce la funzione duale $\phi(\xi) = \inf_x L(x, \xi)$
4. si trova il valore minimo $\xi^* \max_{\xi} \phi(\xi)$ e lo si sostituisce in $x^*(\xi)$

Per trovare la soluzione del problema (3.12) si calcola dapprima il minimo della Lagrangiana

$$L(q, \lambda) = q^T \frac{M}{2} q + m^T q + \lambda(\mathbb{1}_{N_c}^T q - c)$$

imponendo

$$\frac{\partial L(q, \lambda)}{\partial q} = Mq + m + \lambda \mathbb{1}_{N_c} = 0$$

da cui

$$q^*(\lambda) = -M^{-1}(m + \lambda \mathbb{1}_{N_c}) \quad (3.14)$$

Con questo si costruisce la funzione duale

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= q^*(\lambda)^T \frac{M}{2} q^*(\lambda) + m^T q^*(\lambda) + \\ &= -(m + \lambda \mathbb{1}_{N_c})^T \frac{M^{-1}}{2} (m + \lambda \mathbb{1}_{N_c}) - \lambda c \end{aligned}$$

da cui, imponendo

$$\frac{d\phi(\lambda)}{d\lambda} = -\mathbb{1}_{N_c} M^{-1} m - \lambda \mathbb{1}_{N_c} M^{-1} \mathbb{1}_{N_c} - \lambda c = 0$$

si trova il valore

$$\lambda^* = -\frac{\mathbb{1}_{N_c} M^{-1} m + c}{\mathbb{1}_{N_c} M^{-1} \mathbb{1}_{N_c}}$$

che sostituita nella 3.14 dà

$$q^* = M^{-1} \left(m - \frac{\mathbb{1}_{N_c} M^{-1} m + c}{\mathbb{1}_{N_c} M^{-1} \mathbb{1}_{N_c}} \right) \quad (3.15)$$

che raggruppe le quantità ottime di potenza reattiva che ciascun compensatore deve iniettare nella rete elettrica per minimizzare le perdite.

Questa soluzione è stata trovata mediante un algoritmo centralizzato, per la cui applicazione è sottintesa una conoscenza globale della topologia della rete elettrica, espressa nell'hessiano M , e l'esistenza di un'unità centrale che raccolga le informazioni locali raccolte dai compensatori. Il problema di questo genere di soluzione è dovuto principalmente alla taglia del problema, che può essere molto grande (pari al numero di micro-generatori nella rete) e portare quindi ad un costo computazionale molto alto. Inoltre la topologia stessa della rete è molto variabile, dal momento che in qualsiasi istante un compensatore può mutarsi in utente (ad esempio quando non riesce a soddisfare il fabbisogno energetico del proprietario).

Per questo gli algoritmi studiati nella tesi si propongono invece di risolvere il problema di ottimizzazione in maniera distribuita ed iterativa, sfruttando solamente le conoscenze locali dei compensatori, senza ricorrere ad un'unità centralizzata.

3.1.2 Considerazioni sull'Hessiano

Prima è stato definito l'Hessiano del problema di ottimizzazione come $M = 2A^T D A$. Questo può essere espresso in altre forme, che saranno utili nell'analisi dell'algoritmo di ottimizzazione. Definiamo $\mathcal{P}_{s,1}$ come il cammino (unico rappresentando $\mathcal{G}$ un albero) che unisce il nodo s alla radice.

Si può dimostrare che valgono le seguenti equazioni

$$M = 2\mathcal{A}^T D \mathcal{A} = \sum_{i \in \mathcal{E}} d_i \mathbf{1} \mathbf{1}^T - M^{union} \quad (3.16)$$

dove

$$M_{i,j}^{union} = \sum_{\ell \in \mathcal{P}_{i,1} \cup \mathcal{P}_{j,1}} d_\ell \quad (3.17)$$

e

$$M = \sum_{i \in \mathcal{E}} d_i \mathbf{1} \mathbf{1}^T - \mathbf{1} h^T - h \mathbf{1}^T + M^{intersect} \quad (3.18)$$

dove

$$M_{i,j}^{intersect} = \sum_{\ell \in \mathcal{P}_{i,1} \cap \mathcal{P}_{j,1}} d_\ell \quad (3.19)$$

e

$$h_i = \sum_{j \in \mathcal{P}_{i,1}} d_j \quad (3.20)$$

Esempio 5. Con riferimento alla Figura 3.1, le matrici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ associate alla micro-rete modellata con l'albero di sinistra sono:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

mentre la matrice delle impedenze è

$$Z = \text{diag}(R_1 + iX_1, R_2 + iX_2, R_3 + iX_3, R_4 + iX_4, R_5 + iX_5, R_6 + iX_6)$$

L'Hessiano associato al problema di ottimizzazione del flusso di potenza reattiva per questa particolare micro-grid è

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$= \begin{bmatrix} d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 & d_2 + d_4 + d_5 \\ d_2 + d_4 + d_5 & d_2 + d_4 + d_5 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

con $d_i = \frac{R_i}{U_{s(i)}}$. Allora, si hanno

$$\begin{aligned}
M^{union} &= \sum_{i \in \mathcal{L}} d_i \mathbf{1} \mathbf{1}^T - M = \begin{bmatrix} 0 & d_3 + d_6 \\ d_3 + d_6 & d_3 + d_6 \end{bmatrix} \\
M^{intersect} &= M - \sum_{i \in \mathcal{L}} d_i \mathbf{1} \mathbf{1}^T + \mathbf{1} h^T + h \mathbf{1}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_3 + d_6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

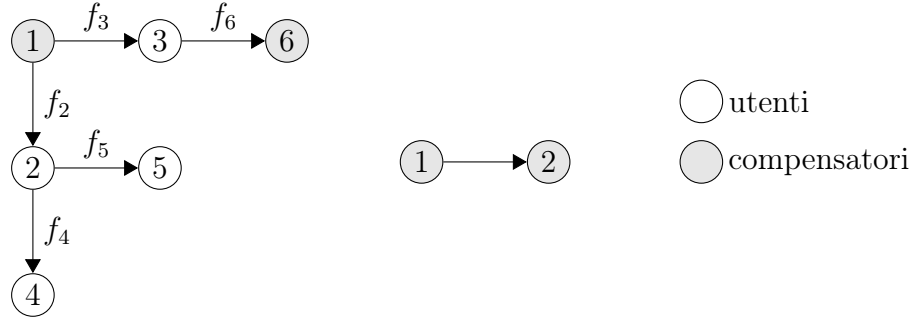


Figura 3.1: Rappresentazione attraverso un albero orientato di una microgrid, con nodi compensatori e nodi utilizzatori, e l'albero dei compensatori ad esso associato

3.2 L'algoritmo distribuito

L'idea che sta alla base dell'algoritmo distribuito è quella di raggiungere la soluzione del problema (3.12) iterativamente, passando attraverso la soluzione di sottoproblemi di ottimizzazione vincolata e implementata dai compensatori, che grazie a un sistema di comunicazione, si scambiano le informazioni necessarie.

Siano i compensatori suddivisi in ℓ insiemi $C_1, \dots, C_\ell$, che eventualmente possono avere elementi in comune, tali che $\cup_{i=1}^{\ell} C_i = \{1, \dots, N_C\}$. Questa famiglia di sottoinsiemi può essere interpretata come un ipergrafo definito sull'insieme dei nodi compensatori $\mathcal{C}$.

Definiamo anche gli insiemi $\mathcal{E}_i$, dove $\mathcal{E}_i = \{(m, n) : m, n \in C_i, m, n \in E_C\}$, cioè $\mathcal{E}_i$ è costituito da tutti gli archi del grafo di comunicazione che uniscono due qualsiasi nodi di C_i .

Sia $\sigma : \{0, \tau, 2\tau, s\} \rightarrow 1, 2, \dots, \ell, \sigma(k\tau) \mapsto \sigma$; applicando la sostituzione $t = k\tau$ si ha che $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow 1, 2, \dots, \ell, \sigma(t) \mapsto \sigma$. Dopo ogni intervallo temporale della durata τ , la funzione σ sceglie l'insieme $C_{\sigma(t)}$ che si attiva e risolve il

sottoproblema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} \min_{q_j, j \in \mathcal{C}_{\sigma(t)}} \quad & q^T M q + m q \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}_{N_c}^T q = c \end{aligned}$$

I compensatori dell'insieme $\mathcal{C}_{\sigma(t)}$ aggiornano il loro stato (la quantità di potenza reattiva immessa nella rete) in maniera da minimizzare le perdite e rispettare i vincoli imposti da (3.13). Il modo in cui attuano l'ottimizzazione può essere vario, e dipende principalmente dalle informazioni a disposizione dei compensatori. Una possibile modalità sfrutta i risultati descritti nel Capitolo 2 e prevede la costruzione di modelli equivalenti della rete su cui i compensatori attuano, per via numerica, l'ottimizzazione. Se $q(t)$ è il vettore che raggruppa le potenze reattive iniettate nella rete al tempo t da tutti i compensatori della smart microgrid, risolvono il problema

$$\min_{\Delta q} \quad \bar{C}(q(t) + \Delta q) \quad (3.24)$$

$$\text{s.t.} \quad \Delta q \in \mathcal{S}_i(t) \quad (3.25)$$

con

$$\mathcal{S}_i = \{q \in \mathbb{R}^{N_c} : \sum_{j \in \mathcal{C}_i} q_j = 0, q_j = 0 \forall j \notin \mathcal{C}_i(t)\} \quad (3.26)$$

Lo spazio $\mathcal{S}_i$ è esprimibile come

$$\mathcal{S}_i = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_c}^T \\ N_i \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Per definizione $\mathbf{1}_{N_c}^T \Delta q = 0$. Alla fine della minimizzazione locale, lo stato del sistema sarà quindi

$$q(t+1) = T_{\sigma(t)}(t)q(t) = \arg \min_q \bar{C}(q(t)) \quad (3.28)$$

$$\text{s.t.} \quad (q - q(t)) \in \mathcal{S}_{\sigma(t)}(t) \quad (3.29)$$

Si nota subito che $q(t+1)$ rispetta ancora il vincolo (3.13). Infatti

$$\mathbf{1}_{N_c}^T q(t+1) = \mathbf{1}_{N_c}^T q(t) + \mathbf{1}_{N_c}^T \Delta q = \mathbf{1}_{N_c}^T q(t) = c$$

Per studiare il comportamento dell'algoritmo, si introduce la variabile $x = q - q^*$, dove $q^* = M^{-1} \left(m - \frac{\mathbf{1}_{N_c} M^{-1} m + c}{\mathbf{1}_{N_c} M^{-1} \mathbf{1}_{N_c}} \right)$ è la soluzione ottima del problema (3.12). Questo allora diviene

$$\min_x \quad V(x) = x^T M x \quad (3.30)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{1}_{N_c}^T x = 0 \quad (3.31)$$

e i sottoproblemi del (3.24) descritti precedentemente sono equivalenti al

$$\min_{\Delta x} V(x + \Delta x) \quad (3.32)$$

$$s.t. \quad \Delta x \in \mathcal{S}_i \quad (3.33)$$

$$\sigma(t) = i \quad (3.34)$$

La condizione (3.31) traduce il fatto che x deve appartenere ad un determinato sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{N_c}$, lo spazio dei vettori a media nulla. Questo può essere descritto come il nucleo della matrice $\mathbf{1}_{N_c}^T$. Un vettore x può essere soluzione del problema se e solo se $\mathbf{1}_{N_c}^T x = 0$. Se si definisce la matrice

$$\Omega = I - \frac{\mathbf{1}_{N_c} \mathbf{1}_{N_c}^T}{N_c}$$

il vincolo (3.31) si può riscrivere come

$$\Omega x = x \quad (3.35)$$

Invece, la condizione (3.33)¹ può essere espressa anche attraverso la seguente relazione:

$$\Delta x \in \mathcal{S}_i \Leftrightarrow \Delta x \in \text{Im} B_i, \text{ cioè } \exists y : B_i y = \Delta x \quad (3.36)$$

con $B_i \in \mathbb{R}^{N_c \times |\mathcal{E}_i|}$, e

$$B_i(m, e) = \begin{cases} 1 & \text{se } e = (m, n), e \in \mathcal{E}_i, m, n \in \mathcal{C}_i \\ -1 & \text{se } e = (l, m), e \in \mathcal{E}_i, l, m \in \mathcal{C}_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.37)$$

Gli spazi $\mathcal{S}_i$ definiscono fra quali compensatori sono possibili le interazioni che portano alla soluzione dei sottoproblemi di ottimizzazione. Essi sono dei sottografi di $\mathcal{G}_C$.

D'ora in poi, con $\mathbf{1}$ intenderemo $\mathbf{1}_{N_c}$, cioè eviteremo di specificare la dimensione del vettore, e scriveremo N anzichè N_c , cioè diremo che N è la cardinalità di $\mathcal{C}$ e non di $\mathcal{V}$, per non appesantire troppo la scrittura.

Esempio 6. Si consideri la semplice micro-grid a cui è associato l'albero dei compensatori $\mathcal{T}_C = (\mathcal{C}, \mathcal{E}_C)$ di Figura 3.2. Su di esso definiamo i seguenti grafi di comunicazione notevoli:

¹Siano $x(t)$ e $x(t+1)$ le variabili ottenute da $q(t)$ e $q(t+1)$ mediante la sostituzione $x = q - q^*$. Allora

$$\Delta q = q(t+1) - q(t) = q(t+1) - q^* - (q(t) - q^*) = x(t+1) - x(t) = \Delta x$$

e dunque se $\Delta q \in \mathcal{S}_i$ allora anche $\Delta x \in \mathcal{S}_i$

1. il grafo di comunicazione *1-step* $\mathcal{G}_C = (\mathcal{C}, \mathcal{E}_C)$: uguale all'albero dei compensatori e che permette la comunicazione solo fra nodi vicini e direttamente collegati dalle linee elettriche, mostrato in Figura 3.3. In tal caso, si hanno

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. il grafo di comunicazione *circle* $\mathcal{G}_C = (\mathcal{C}, \mathcal{E}_C)$: simile al *1-step* e in più permette la comunicazione fra il primo e l'ultimo compensatore, mostrato in Figura 3.4. In tal caso, si hanno

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. il grafo di comunicazione *random* $\mathcal{G}_C = (\mathcal{C}, \mathcal{E}_C)$: gli archi connettono due nodi scelti casualmente nell'insieme $\mathcal{C}$. E' mostrato in Figura 3.5. In tal caso, si hanno

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. il grafo di comunicazione *completo* $\mathcal{G}_C = (\mathcal{C}, \mathcal{E}_C)$: in cui è permessa la comunicazione fra tutti i nodi dell'albero, mostrato in Figura 3.6. In tal caso, si hanno

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Figura 3.2: Albero dei compensatori



Figura 3.3: Albero dei compensatori su cui è definito il grafo di comunicazione *1-step*

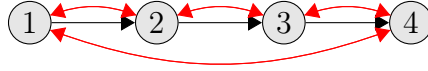


Figura 3.4: Albero dei compensatori su cui è definito il grafo di comunicazione *circle*

3.2.1 La matrice Ω

Ω è la matrice di proiezione nello spazio ortogonale a $\mathbf{1}$. Possiede alcune proprietà importanti:

- è simmetrica: $\Omega^T = \Omega$
- $\Omega = \Omega^2$
- ha tutti autovalori in 1 tranne uno in 0. Quest'ultimo è quello relativo all'autovettore $\mathbf{1}$
- dalla proprietà precedente segue che $\mathbf{1}^T \Omega = 0, \Omega \mathbf{1} = 0$

3.2.2 Problemi di ottimizzazione equivalenti

Abbiamo definito il problema di ottimizzazione come

$$\begin{aligned} \min_x \quad & V(x) = x^T M x \\ \text{s.t.} \quad & \Omega x = x \end{aligned}$$

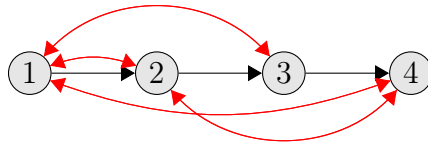


Figura 3.5: Albero dei compensatori su cui è definito il grafo di comunicazione *random*

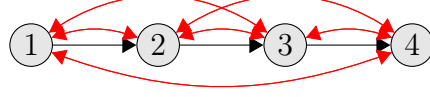


Figura 3.6: Albero dei compensatori su cui è definito il grafo di comunicazione *completo*

Vi sono altri problemi di ottimizzazione che, se soggetti allo stesso vincolo $\Omega x = x$, hanno la stessa soluzione:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & V(x) = x^T \tilde{M} x \\ \text{s.t.} \quad & \Omega x = x \end{aligned}$$

Questi sono tutti quelli il cui Hessiano $\tilde{M}$ è legato a M attraverso la

$$\Omega \tilde{M} \Omega = \Omega M \Omega \quad (3.38)$$

Per cui è lecito, e può essere comodo, sostituire l'Hessiano del problema originale M con, ad esempio, con la matrice $M^{intersect}$ oppure con la matrice $-M^{union}$, definite nella sezione 3.1.2. Infatti

$$\Omega M^{intersect} \Omega = \Omega \left(M - \sum_{i \in \mathcal{E}} d_i \mathbf{1} \mathbf{1}^T + \mathbf{1} h^T + h \mathbf{1}^T \right) \Omega = \Omega M \Omega \quad (3.39)$$

$$\Omega (-M^{union}) \Omega = \Omega \left(M - \sum_{i \in \mathcal{L}} d_i \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right) \Omega = \Omega M \Omega \quad (3.40)$$

$$(3.41)$$

3.3 Soluzione dei sottoproblemi di ottimizzazione

Con la formulazione precedente è possibile ricavare in forma esplicita la soluzione di ciascun sottoproblema di ottimizzazione come funzione lineare

dello stato precedente $x(t)$ e del valore $\sigma(t)$:

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= x(t) + \Delta x = x(t) + \arg \min_{\Delta x \in \text{Im} B_{\sigma(t)}} (x(t) + \Delta x)^T \frac{M}{2} (x(t) + \Delta x) \\
&= x(t) + B_{\sigma(t)} \arg \min_y (x(t) + B_{\sigma(t)} y)^T \frac{M}{2} (x(t) + B_{\sigma(t)} y) \\
&= x(t) + B_{\sigma(t)} \arg \min_y \left(x(t)^T \frac{M}{2} x(t) + y^T B_{\sigma(t)}^T \frac{M}{2} B_{\sigma(t)} x(t) + y^T B_{\sigma(t)}^T M x(t) \right) \\
&= x(t) + B_{\sigma(t)} \arg \min_y \left(y^T B_{\sigma(t)}^T \frac{M}{2} B_{\sigma(t)} x(t) + y^T B_{\sigma(t)}^T M x(t) \right) \\
&= x(t) + B_{\sigma(t)} (B_{\sigma(t)}^T M B_{\sigma(t)})^{-1} B_{\sigma(t)}^T M x(t) \\
&= (I - B_{\sigma(t)} (B_{\sigma(t)}^T M B_{\sigma(t)})^{-1} B_{\sigma(t)}^T M) x(t)
\end{aligned}$$

da cui finalmente l'espressione cercata

$$x(t+1) = F_{\sigma(t)} x(t). \quad (3.42)$$

Ad ogni insieme $\mathcal{C}_i$ è associata la matrice di transizione di stato che risolve il sottoproblema di ottimizzazione vincolata

$$F_i = I - B_i (B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M \quad (3.43)$$

3.3.1 Proprietà delle matrici F_i

Le F_i possiedono alcune proprietà di fondamentale importanza per lo studio della convergenza dell'algoritmo:

- sono *matrici di proiezione* secondo la metrica $\langle x, y \rangle_M = x^T M y$.
Dunque hanno autovalori solamente in 0 o in 1 e

$$F_i^2 = F_i \quad (3.44)$$

- sono *matrici autoaggiunte* in $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ cioè sono tali per cui $\langle x, F_i y \rangle = \langle F_i x, y \rangle$. Infatti

$$\begin{aligned}
\langle x, F_i y \rangle &= x^T M (I - B_i (B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M) y \\
&= x^T M y - x^T M B_i (B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M y \\
\langle F_i x, y \rangle &= x^T (I - B_i (B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M)^T M y \\
&= x^T M y - x^T M B_i (B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M y = \langle x, F_i y \rangle
\end{aligned}$$

- dalla proprietà precedente deriva che

$$F_i^T M = M F_i \quad (3.45)$$

Infatti, se $\langle x, F_i y \rangle = \langle F_i x, y \rangle$, allora $x^T M F_i y = x^T F_i^T M y$, da cui $F_i^T M = M F_i$

- dalla (3.44) e dalla (3.45) segue che $F_i^T M F_i = F_i^T M$, infatti

$$F_i^T M F_i = M F_i F_i = M F_i = F_i^T M$$

- hanno, relativi all'autovalore $\lambda = 1$, autovettore destro $M^{-1} \mathbf{1}$ e autovalore sinistro $\mathbf{1}^T$. Infatti

$$\begin{aligned} F_i M^{-1} \mathbf{1} &= (I - B_i(B_i^T M B_i) B_i^T M) M^{-1} \mathbf{1} \\ &= M^{-1} \mathbf{1} - B_i(B_i^T M B_i) B_i^T M M^{-1} \mathbf{1} = M^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T F_i &= \mathbf{1}^T (I - B_i(B_i^T M B_i) B_i^T M) = \mathbf{1}^T - \mathbf{1}^T B_i(B_i^T M B_i) B_i^T M = \mathbf{1}^T \end{aligned}$$

- se si definisce la matrice $\Omega = \frac{I - \mathbf{1} \mathbf{1}^T}{N_c}$, allora $\Omega F_i = F_i$,

3.4 Convergenza alla soluzione ottima

Con la (3.42) è stato esplicitato l'algoritmo iterativo che risolve i sottoproblemi di ottimizzazione. Resta però ancora da capire

- se questo converge a una soluzione;
- se questa è effettivamente la soluzione ottima.

Per quanto riguarda il secondo quesito, si ha il seguente

Lemma 2. *si consideri la famiglia di trasformazioni lineari $\{F_i\}$ prima descritte. Sia $\bar{x} \in \ker \mathbf{1}^T$ un vettore invariante $\forall F_i$ ($\bar{x} : F_i \bar{x} = \bar{x} \forall i$, cioè $\bar{x}$ è un punto d'equilibrio per (3.42)).*

Allora $\bar{x} = 0$ ($\bar{x}$ è la soluzione ottima) $\Leftrightarrow \text{Im}\{B_1, s, B_\ell\} = \ker \mathbf{1}^T$

Dimostrazione. se $\text{Im}\{B_1, s, B_\ell\} = \ker \mathbf{1}^T$, possiamo scrivere $\bar{x} = [B_1 \quad s \quad B_\ell] y$. Essendo $\bar{x}$ un punto fisso per (3.42), allora

$$(I - B_i(B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M) \bar{x} = \bar{x}$$

da cui segue che

$$M\bar{x} \in \ker \begin{bmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_\ell^T \end{bmatrix} \text{ e dunque } \begin{bmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_\ell^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} B_1 & s & B_\ell \end{bmatrix} y = 0$$

Dato però che $M > 0$, segue che

$$\begin{bmatrix} B_1 & s & B_\ell \end{bmatrix} y = \bar{x} = 0$$

Sia ora, per assurdo $\text{Im}\{B_1, s, B_\ell\} \neq \ker \mathbb{1}^T$. Dato che, dalle (3.27) e (3.36) si ha che $\text{Im} B_i = \ker \begin{bmatrix} \mathbb{1}^T \\ N_i \end{bmatrix}$, allora $\text{rank} \begin{bmatrix} B_1 & s & B_\ell \end{bmatrix} < \dim \ker \mathbb{1}^T = N - \text{rank} \mathbb{1}^T$. Consideriamo la matrice

$$\Psi = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_\ell^T \end{bmatrix} M \\ \mathbb{1}^T \end{bmatrix}$$

Ψ ha rango strettamente minore di N , e dunque $\exists \tilde{x} \neq 0 : \Psi \tilde{x} = 0$. Ma $\tilde{x}$ appartiene al $\ker \mathbb{1}^T$ e è invariante $\forall F_i$. $\square$

Per dimostrare che l'algoritmo converge alla soluzione ottima verrà esposto un altro risultato che si fonda sull'utilizzo delle *set valued maps* ([5]).

Una *set valued map* è una mappa $T : X \rightrightarrows X$ che associa ad ogni elemento di X un sottoinsieme di X . T è non vuota se $T(x) \neq \emptyset \forall x \in X$. L'evoluzione di un sistema dinamico descritto da una *set valued map* non vuota T è una sequenza $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ tale che $x_{t+1} \in T(x_t) \forall t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Un insieme W è fortemente invariante per T se $T(w) \subset W \forall w \in W$. Per le *set valued map* vale il seguente

Teorema 1. *Siano (X, d) uno spazio vettoriale e una metrica definita su di esso. Data una collezione di mappe $T_1, \dots, T_\ell$, si definisca la set-valued map $T : X \rightrightarrows X, T(x) = \{T_1(x), \dots, T_\ell(x)\}$. Dato il processo stocastico a simboli indipendenti e identicamente distribuiti (i.i.d.) $\sigma : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \{1, \dots, \ell\}$, si consideri una evoluzione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ of T che soddisfa la*

$$x_{n+1} = T_{\sigma(n)}(x_n).$$

Si assuma che:

1. $\exists W \subseteq X, W$ compatto, fortemente invariante per T ;

2. esista una funzione $U : W \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $U(w') < U(w) \forall w \in W, w' \in T(w) \setminus \{w\}$;
3. la mappa T_i , $i \in \{1, \dots, \ell\}$, e U siano continue in W ;
4. $\exists p \in]0, 1[$, $h \in \mathbb{N}$ tali che, $\forall i \in \{1, \dots, \ell\}$ e $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\mathbb{P}[\sigma(n+h) = i | \sigma(n), \dots, \sigma(1)] \geq p.$$

Se $x_0 \in W$, allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che l'evoluzione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ quasi certamente (q.c.)² si avvicina a

$$(J_1 \cap \dots \cap J_\ell) \cap U^{-1}(c),$$

dove $J_i = \{w \in W | T_i(w) = w\}$ è l'insieme dei punti fissi per T_i in W , $i \in \{1, \dots, \ell\}$.

Il Teorema 1 fornisce gli strumenti utilizzati dal seguente

Teorema 2. Si consideri il sistema a tempo discreto (3.42), e si assuma che $\sigma(t)$ sia un processo stocastico i.i.d.. Se $\text{Im}[B_1 \dots B_\ell] = \ker \mathbf{1}^T$, allora

$$x(t) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad \text{q.c.}$$

per ogni $x(0) \in \mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. Consideriamo le mappe $F_i(x) = F_i x$ e la set valued map $T(x) = \{F_1(x), \dots, F_\ell(x)\}$. Sia W l'insieme compatto $V^{-1}(\alpha)$, con, ricordiamo, $V(x) = x^T \frac{M}{2} x$. W è fortemente invariante per T , essendo $V(F_i x) \leq V(x)$ per ogni x, i (dato che $F_i x$ risolve i sottoproblemi di ottimizzazione inizializzati in x). Essendo le F_i matrici di proiezione ortogonale per il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$, $V(F_i x) = V(x)$ implica che $F_i x = x$ (essendo $V(x) = x^T M x / 2$), e quindi $F_i x \neq x$ implica che $V(F_i x) < V(x)$. Inoltre, essendo $\sigma(\cdot)$ processo aleatorio i.i.d., per ogni n, i abbiamo che

$$\mathbb{P}[\sigma(n+1) = i | \sigma(n), \dots, \sigma(1)] = \mathbb{P}[\sigma(n+1) = i] = \frac{1}{\ell} > 0.$$

e quindi si applica il Teorema 1. Per il Lemma 2, l'intersezione dei punti fissi delle mappe F_i si riduce al $x = 0$, e perciò $x(t) \rightarrow 0$ q.c. non appena $t \rightarrow \infty$. $\square$

²Siano $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di variabili aleatorie e x una variabile aleatoria, definite sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e tutte a valori nel medesimo spazio metrico (X, d) . Si dice che x_n converge quasi certamente a x se

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\omega) = x(\omega)] = 1$$

Abbiamo così finalmente dimostrato che l'algoritmo iterativo (3.42) converge alla soluzione ottima

3.5 Affinità fra il problema di consenso e l'algoritmo iterativo

E' evidente la somiglianza fra l'algoritmo di ottimizzazione e l'algoritmo di consenso di tipo gossip. Infatti per quest'ultimo vi è una formulazione identica a quella proposta nella (3.30) e nella (3.32), con l'unico riguardo di imporre $M = \mathbf{I}$:

$$\min_x V(x) = x^T x$$

da risolvere attraverso iterazioni successive del tipo

$$\begin{aligned} \min_{\Delta x} \quad & V(x + \Delta x) \\ \text{s.t.} \quad & \Delta x \in \mathcal{S}_i \\ & \sigma(t) = i \end{aligned}$$

Viene naturale quindi sfruttare gli strumenti già sviluppati nello studio degli algoritmi di consenso ([16], [9]) per lo studio delle prestazioni dell'algoritmo di ottimizzazione dei flussi di potenza reattiva.

Capitolo 4

Velocità di convergenza dell'algoritmo

4.1 Definizione della velocità di convergenza

Nella sezione 3.4 abbiamo dimostrato che il sistema a cui è applicato l'algoritmo iterativo converge ad uno stato che è proprio la soluzione ottima del problema espresso dalla (3.12). D'ora in avanti sottintenderemo che gli insiemi $\mathcal{C}_i$ siano composti di due soli compensatori, e che $\forall e \in \mathcal{G}_C, \exists \mathcal{C}_k = \{s(e), t(e)\}$. L'estensione al caso in cui i $\mathcal{C}_i$ sono composti da un numero arbitrario di compensatori è banale. Inoltre quando diremo che si attiva l'arco e , in realtà intenderemo che si attiva la coppia di compensatori $(s(e), t(e)) \in \mathcal{C}_k$. Infine, diremo che il numero di compensatori nella smart micro-grid è N e non $N_{\mathcal{C}}$, per non appesantire la notazione. Analizzeremo ora la velocità con la quale il sistema converge alla soluzione ottima. Assumeremo che $\sigma(t)$ sia un processo aleatorio a simboli i.i.d.. Introduciamo la funzione

$$v(t) = \mathbb{E}[V(x(t))] = \mathbb{E}\left[x(t)^T \frac{M}{2} x(t)\right] \quad (4.1)$$

La grandezza che esprime la velocità di convergenza dell'algoritmo è

$$R = \sup_{x(0) \in \ker \mathbf{1}^T} \limsup v(t)^{1/t} \quad (4.2)$$

R descrive il rate esponenziale di convergenza di $v(t)$ a zero e dunque anche quello di $q(t)$ verso la soluzione ottima q^* . Analizzando $v(t)$ si osserva che

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[x(t)^T M x(t)] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[x(t)^T \Omega M \Omega x(t)] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[x(t-1)^T F_{\sigma(t)}^T \Omega M \Omega F_{\sigma(t)} x(t-1)] \\ &= \frac{1}{2} x(0)^T \mathbb{E}[F_{\sigma(1)}^T \cdots F_{\sigma(t)}^T \Omega M \Omega F_{\sigma(t)} \cdots F_{\sigma(1)}] x(0). \end{aligned}$$

dove il secondo passaggio è dovuto al fatto che x soddisfa il vincolo (3.35). Definiamo allora

$$\Delta(t) = \mathbb{E}[F_{\sigma(1)}^T \cdots F_{\sigma(t)}^T \Omega M \Omega F_{\sigma(t)} \cdots F_{\sigma(1)}] \quad (4.3)$$

Essendo $\sigma(t)$ è i.i.d., possiamo ricavare il seguente sistema dinamico lineare

$$\begin{cases} \Delta(t+1) = \mathbb{E}[F_i^T \Delta F_i] = \mathcal{L}(\Delta(t)) \\ \Xi(t) = \Omega \Delta(t) \Omega \\ \Delta(0) = \Omega M \Omega \end{cases} \quad (4.4)$$

da cui riusciamo a esprimere le evoluzioni

$$\Delta(t) = \mathcal{L}^t(\Delta(0)) = \mathcal{L}^t(\Omega M \Omega) \quad (4.5)$$

$$\Xi(t) = \Omega \mathcal{L}^t(\Delta(0)) \Omega = \Omega \mathcal{L}^t(\Omega M \Omega) \Omega \quad (4.6)$$

e $v(t)$ come

$$v(t) = \mathbb{E}[V(x(t))] = \frac{1}{2} x(0)^T \Xi(t) x(0). \quad (4.7)$$

L'applicazione lineare $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{N_c \times N_c} \rightarrow \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$, $\Delta \mapsto \mathbb{E}[F_i^T \Delta F_i]$ può essere espressa in maniera matriciale usando gli operatori vec e $\otimes$:

- Sia $\Upsilon \in \mathbb{C}^{Q \times R}$, si definisce $v = vec(\Upsilon) \in \mathbb{C}^{QR \times 1}$ il vettore ottenuto da Υ attraverso la $\Upsilon(u, v) \rightarrow v((v-1)Q + u)$.

- Siano $\Gamma \in \mathbb{C}^{Q \times R}$ e $\Theta \in \mathbb{C}^{W \times X}$. Si definisce $\Gamma \otimes \Theta = \begin{bmatrix} \gamma_{(1,1)} \Theta & s & \gamma_{(1,R)} \Theta \\ s & s & s \\ \gamma_{(Q,1)} \Theta & s & \gamma_{(Q,R)} \Theta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{QW \times RX}$

Valgono inoltre le seguenti proprietà:

Lemma 3. *Si consideri l'equazione matriciale $AXB = C$, con A, B, C, X matrici di dimensioni opportune. Allora vale la*

$$\text{vec } C = \text{vec } AXB = [B^T \otimes A] \text{vec } X \quad (4.8)$$

Lemma 4. *Siano $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ e $B \in \mathbb{C}^{M \times M}$, e siano λ_i e μ_i due matrici quadrate*

Sia $\delta(t) = \text{vec}(\Delta(t))$. Dal lemma precedente deriva che

$$\delta(t+1) = \text{vec}(\mathbb{E}[F_i^T \Delta F_i]) = \mathbb{E}[F_i^T \otimes F_i^T] \delta(t) = \mathbf{F} \delta(t) \quad (4.9)$$

$\mathbf{F}$ è la matrice che rappresenta l'operatore lineare $\mathcal{L}$, ed è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M^{-1} \otimes M^{-1}}$. Prima di mostrarlo, osserviamo che, date Δ_1 e Δ_2 da cui si ricavano $\delta_1 = \text{vec} \Delta_1$ e $\delta_2 = \text{vec} \Delta_2$

$$\begin{aligned} \langle \delta_1, \delta_2 \rangle_{M^{-1} \otimes M^{-1}} &= \delta_1^T (M^{-1} \otimes M^{-1}) \delta_2 \\ &= \text{vec} \Delta_1^T M^{-1} \otimes M^{-1} \text{vec} \Delta_2 \\ &= \text{vec} \Delta_1^T \text{vec} (M^{-1} \Delta_2 M^{-1}) \\ &= \text{tr}(\Delta_1^T M^{-1} \Delta_2 M^{-1}) \quad \text{dato che } \text{vec}(A) \text{vec}(B) = \text{tr} AB. \end{aligned}$$

Verifichiamo ora che $\mathbf{F}$ è matrice autoaggiunta rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M^{-1} \otimes M^{-1}}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F} \delta_1, \delta_2 \rangle_{M^{-1} \otimes M^{-1}} &= (\mathbf{F} \delta_1)^T M^{-1} \otimes M^{-1} \delta_2 \\ &= (\mathbb{E}[F_i^T \otimes F_i] \delta_1)^T (M^{-1} \otimes M^{-1}) \delta_2 \\ &= \text{vec}(\mathbb{E}[F_i^T \Delta_1 F_i])^T \text{vec} M^{-1} \Delta_2 M^{-1} \\ &= \text{tr}(\mathbb{E}[F_i^T \Delta_1 F_i]^T M^{-1} \Delta_2 M^{-1}) \\ &= \mathbb{E}[\text{tr}(F_i^T \Delta_1 F_i^T M^{-1} \Delta_2 M^{-1})] \\ &= \mathbb{E}[\text{tr}(M^{-1} F_i^T \Delta_1 F_i^T M^{-1} \Delta_2)] \\ &= \mathbb{E}[\text{tr}(F_i M^{-1} \Delta_1 M^{-1} F_i^T \Delta_2)] \\ &= \mathbb{E}[\text{tr}(\Delta_1 M^{-1} F_i^T \Delta_2 F_i M^{-1})] \\ &= \text{tr}(\Delta_1 M^{-1} \mathbf{E}[F_i^T \Delta_2 F_i] M^{-1}) = \langle \delta_1, \mathbf{F} \delta_2 \rangle_{M^{-1} \otimes M^{-1}} \end{aligned}$$

$\mathbf{F}$ quindi eredita tutte le proprietà di cui godono le matrici autoaggiunte, in particolare quella di possedere autovalori reali.

4.1.1 Un bound per il rate di convergenza

Il rate di convergenza dell'algoritmo, definito come

$$R = \sup_{x(0) \in \ker \mathbf{1}^T} \limsup v(t)^{1/t}$$

altro non è che l'autovalore raggiungibile e osservabile di modulo maggiore per il sistema (4.4). In generale, non è esprimibile in maniera analitica e esplicita ma va calcolato per via numerica. Può essere comodo disporre di un bound β del rate R . Esso viene definito sfruttando i seguenti lemmi.

Lemma 5.

$$\forall \Delta, \Omega \mathcal{L}^t(\Omega \Delta \Omega) \Omega = \Omega \mathcal{L}^t(\Delta) \Omega \quad (4.10)$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione. La (4.10) è vera per $t = 0$, dal momento che $\Omega^2 = \Omega$. Supponiamo sia valida per t , e mostriamo che vale anche per $t + 1$

$$\begin{aligned} \Omega \mathcal{L}^{t+1}(\Delta) \Omega &= \Omega \mathcal{L}(\mathcal{L}^t(\Delta)) \Omega \\ &= \Omega \mathcal{L}(\Omega \mathcal{L}^t(\Delta) \Omega) \Omega \\ &= \Omega \mathcal{L}(\Omega \mathcal{L}^t(\Omega \Delta \Omega) \Omega) \Omega \\ &= \Omega \mathcal{L}^{t+1}(\Omega \Delta \Omega) \Omega. \end{aligned}$$

□

Lemma 6. Sia $\bar{F} = \mathbb{E}[F_i]$ e sia $\beta = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \lambda(\bar{F}), \lambda \neq 1\}$. Allora

$$\Omega \mathcal{L}(\Omega M \Omega) \Omega \leq \beta \Omega M \Omega \quad (4.11)$$

Dimostrazione. Si intende che $\Omega \mathcal{L}(\Omega M \Omega) \Omega \leq \beta \Omega M \Omega$

quando $x^T \Omega \mathcal{L}(\Omega M \Omega) \Omega x \leq \beta x^T \Omega M \Omega x \quad \forall x$

Allora si ha

$$\begin{aligned} x^T \Omega \mathcal{L}(\Omega M \Omega) \Omega x &= x^T \Omega \mathbb{E}[F_i^T \Omega M \Omega F_i] \Omega x = x^T \mathbb{E}[\Omega F_i^T \Omega M \Omega F_i \Omega] x \\ &= x^T \Omega \mathbb{E}[F_i^T M F_i] \Omega x = x^T \Omega M^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[M^{-\frac{1}{2}} F_i^T M F_i M^{-\frac{1}{2}}] M^{\frac{1}{2}} \Omega x \\ &= x^T \Omega M^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[M^{-\frac{1}{2}} F_i^T M F_i M^{-\frac{1}{2}}] M^{\frac{1}{2}} \Omega x \\ &= x^T \Omega M^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[M^{\frac{1}{2}} F_i M^{-\frac{1}{2}}] M^{\frac{1}{2}} \Omega x \\ &\leq \hat{\lambda}_{\max} \left(\mathbb{E}[M^{\frac{1}{2}} F_i M^{-\frac{1}{2}}] \right) x^T \Omega M \Omega x \\ &= \hat{\lambda}_{\max}(\mathbb{E}[F_i]) x^T \Omega M \Omega x = \beta x^T \Omega M \Omega x \end{aligned}$$

e quindi

$$\beta = \hat{\lambda}_{max} = \max_{y=M^{\frac{1}{2}}\Omega x} \frac{y^T \mathbb{E}[F_i]y}{y^T y} \quad (4.12)$$

cioè è l'autovalore eccitabile di modulo massimo. $\square$

Lemma 7. *Nel sistema precedente non verrà eccitato l'autovalore $\lambda = 1$.*

Dimostrazione. Sia v_1 l'autovettore relativo a $\lambda = 1$, allora

$$M^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[M^{\frac{1}{2}} F_i M^{-\frac{1}{2}}] M^{\frac{1}{2}} v_1 = v_1 - M^{\frac{1}{2}} B_i (B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M^{\frac{1}{2}} v_1 = v_1 \Leftrightarrow v_1 = M^{-\frac{1}{2}} \mathbb{E}[F_i] M^{\frac{1}{2}} v_1 \quad (4.13)$$

Ma v_1 è ortogonale alle configurazioni ammissibili nella (4.12), e dunque $\lambda = 1$ non può essere eccitato:

$$\langle v_1, M^{\frac{1}{2}} \Omega x \rangle = \mathbf{1}^T M^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \Omega x = 0$$

$\square$

Sfruttando i risultati precedenti si deduce che

$$\begin{aligned} \Omega \mathcal{L}^t(\Omega M \Omega) \Omega &= \Omega \mathcal{L}^{t-1}(\mathcal{L}(\Omega M \Omega)) \Omega \\ &= \Omega \mathcal{L}^{t-1}(\Omega \mathcal{L}(\Omega M \Omega) \Omega) \Omega \\ &\leq \Omega \mathcal{L}^{t-1}(\beta \Omega M \Omega) \Omega \\ &= \beta \Omega \mathcal{L}^{t-1}(\Omega M \Omega) \Omega \\ &\leq \dots \leq \beta^t \Omega M \Omega, \end{aligned}$$

e dunque $R \leq \beta$.

4.1.2 Proprietà della matrice $\bar{F}$

Sia $\bar{F} = \mathbb{E}[F_i]$. $\bar{F}$ eredita dalle F_i la proprietà di essere autoaggiunta per il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$, e dunque possiede solo autovalori reali.

Inoltre, si nota facilmente che $\rho(\bar{F}) \leq 1$ ¹. Infatti

$$\rho(\bar{F}) \leq \|\bar{F}\| \leq \sum \|\bar{F}_i\| p_i = 1 \quad (4.14)$$

(essendo le F_i matrici di proiezione, $\|F_i\| = 1$) da cui segue che gli autovalori di $\bar{F}$ sono tutti interni al cerchio unitario.

La molteplicità di $\lambda = 1$ è definita nel seguente

Lemma 8. *$\bar{F}$ ha un solo autovalore in 1.*

¹ $\rho(\bar{F})$ è il raggio spettrale di $\bar{F}$, cioè il massimo dei moduli degli autovalori di $\bar{F}$.

Dimostrazione. sia v tale che $\bar{F}v = v$. Allora

$$\bar{F}v = \sum_{i=1}^{N_c} p_i F_i v = \sum_{i=1}^{N_c} p_i (I - B_i (B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M) v = v$$

per cui deve essere che

$$\bar{F}v = v \Leftrightarrow (I - B_i (B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M) v = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow B_i^T M v = 0 \quad \forall i$$

da cui segue che

$$Mv \in \ker \begin{bmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_M^T \end{bmatrix} = \left(\text{Im} [B_1 \quad \dots \quad B_M^T] \right)^\perp = \text{Im} \mathbf{1}$$

cioè Mv deve appartenere ad uno spazio di dimensione 1, per cui $\bar{F}$ ha un solo autovalore in 1, il cui autovettore destro relativo è

$$Mv = \alpha \Rightarrow v = M^{-1} \mathbf{1}.$$

In maniera analoga si può dimostrare che l'autovettore sinistro relativo all'autovalore 1 è $v = \mathbf{1}$ □

Dal lemma 8, dal lemma 7 e dalla (4.14) si deduce che l'autovalore che non verrà eccitato è proprio $\lambda_{max} = 1$ e che β è, escluso quello in 1, l'autovalore di $\bar{F}$ con il modulo maggiore, e che lo spettro di $\bar{F}$ è del tipo

$$\Lambda_{\bar{F}} = \{1, \lambda_2 = \beta, \dots, \lambda_{N_c}\}$$

4.1.3 R e gli autovalori di F

Sia $\mathcal{O}$ lo spazio non osservabile per il sistema (4.4)

$$\mathcal{O} = \{\Delta \in \mathbb{R}^{N \times N} \mid \Omega \Delta \Omega = 0\}.$$

Definiamo

$$R_{\mathcal{O}} = \max \{|\lambda_{\mathcal{L}}(i)| \mid \Delta_{\mathcal{L}}(i) \notin \mathcal{O}\}. \quad (4.15)$$

Lemma 9. Siano $P, Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $P \geq Q$. Allora $\mathcal{L}^k(P) \geq \mathcal{L}^k(Q) \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Dimostrazione. Dalla definizione di $\mathcal{L}$, si ha

$$\begin{aligned} x^T [\mathcal{L}(P) - \mathcal{L}(Q)] x &= x^T [\mathbb{E} F^T P F - \mathbb{E} F^T Q F] x \\ &= \mathbb{E} x^T F^T (P - Q) F x \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Iterando k volte si ottiene $\mathcal{L}^k(P) \geq \mathcal{L}^k(Q)$. □

Teorema 3. *Siano R e $R_{\mathcal{O}}$ le quantità definite nella (4.2) e nella (4.15). Allora*

$$R = R_{\mathcal{O}}.$$

Dimostrazione. Per ogni autovettore $\tilde{\Delta}$, relativo all'autovalore $\tilde{\lambda}$, esiste $\gamma > 0$ tale che $\tilde{\Delta} \leq \gamma M$. Allora si ha che $\Omega \mathcal{L}^t(\tilde{\Delta})\Omega \leq \gamma \Omega \mathcal{L}^t(M)\Omega$, e dunque $\lambda_{\mathcal{L}}(i)^t \Omega \Delta_{\mathcal{L}}(i)\Omega \leq \gamma \Omega \mathcal{L}^t(M)\Omega$. Se $\Delta_{\mathcal{L}}(i) \notin \mathcal{O}$, allora deve essere che $\lambda_{\mathcal{L}}(i) \leq R$, perciò $R_{\mathcal{O}} \leq R$. Dato che ovviamente $R_{\mathcal{O}} \geq R$, si conclude che $R = R_{\mathcal{O}}$. $\square$

Teorema 4. *Siano*

$$\Lambda'_{\bar{F}} = [\lambda_{\bar{F}}(2), \dots, \lambda_{\bar{F}}(N)]$$

e

$$\Lambda'_{\mathcal{L}} = [\lambda_{\mathcal{L}}(2), \dots, \lambda_{\mathcal{L}}(N^2)]$$

i vettori che raccolgono gli autovalori di $\bar{F}$ e $\mathcal{L}$ diversi da 1 e ordinati in maniera tale che $|\lambda_{\bar{F}}(i)| \geq |\lambda_{\bar{F}}(i+1)|$ e $|\lambda_{\mathcal{L}}(i)| \geq |\lambda_{\mathcal{L}}(i+1)|$. Gli elementi di $\Lambda'_{\bar{F}}$ appaiono due volte in $\Lambda'_{\mathcal{L}}$, e R è l'autovalore con il modulo maggiore rimanente $\Lambda'_{\mathcal{L}}$.

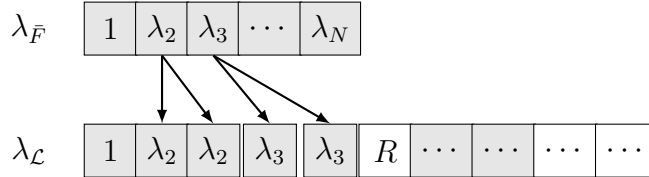


Figura 4.1: Rappresentazione degli autovalori di $\mathcal{L}$ and of $\bar{F}$, secondo il Teorema 4.

Dimostrazione. Sfruttando il lemma 5 si dimostra che $\mathcal{O}$ è un insieme invariante per il sistema (4.4).

La dimensione di $\mathcal{O}$ è $2N - 1$, cioè la dimensione di $\text{Ker}(\Omega \otimes \Omega)$. Infatti, se $\bar{\Delta} \in \mathcal{O}$, allora $\mathcal{L}'(\bar{\Delta}) = 0$, dove $\mathcal{L}'(\bar{\Delta}) = \Omega \bar{\Delta} \Omega$, e

$$\mathcal{L}'(\bar{\Delta}) = 0 \Leftrightarrow \text{vec}(\Omega \bar{\Delta} \Omega) = (\Omega \otimes \Omega) \text{vec}(\bar{\Delta}) = 0 \Leftrightarrow \text{vec}(\bar{\Delta}) \in \ker(\Omega \otimes \Omega)$$

I $2N - 1$ autovettori di $\mathcal{L}$ in $\mathcal{O}$ si riescono a trovare, e sono, rappresentati accoppiati con i relativi autovalori, i seguenti:

$$\{(\mathbb{1}\mathbb{1}^T, 1), (u_{\bar{F}}(2)\mathbb{1}^T, \lambda_{\bar{F}}(2)), (\mathbb{1}u_{\bar{F}}(2)^T, \lambda_{\bar{F}}(2)), s(u_{\bar{F}}(N)\mathbb{1}^T, \lambda_{\bar{F}}(N)), (\mathbb{1}u_{\bar{F}}(N)^T, \lambda_{\bar{F}}(N))\} \quad (4.16)$$

dove $u_{\bar{F}}(i)$ è l'autovettore sinistro associato all' i -esimo autovalore di $\bar{F}$. Infatti

$$\mathcal{L}(u_{\bar{F}}(i)\mathbf{1}^T) = \mathbb{E}[F_j^T u_{\bar{F}}(i)\mathbf{1}^T F_j] = \mathbb{E}[F_j^T] u_{\bar{F}}(i)\mathbf{1}^T = \bar{F}^T u_{\bar{F}}(i)\mathbf{1}^T = \lambda_{\bar{F}}(i) u_{\bar{F}}(i)\mathbf{1}^T$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{1} u_{\bar{F}}(i)^T) = \mathbb{E}[F_j^T \mathbf{1} u_{\bar{F}}(i)^T F_j] = \mathbf{1} u_{\bar{F}}(i)^T \mathbb{E}[F_j] = \mathbf{1} u_{\bar{F}}(i)^T \bar{F} = \lambda_{\bar{F}}(i) \mathbf{1} u_{\bar{F}}(i)^T$$

e $\Omega u_{\bar{F}}(i)\mathbf{1}^T \Omega = \Omega \mathbf{1} u_{\bar{F}}(i)^T \Omega = 0$. Da queste considerazioni segue che R è l'elemento di modulo massimo fra gli autovalori di $\mathbf{F}$ che non sono anche autovalori di $\bar{F}$. $\square$

4.2 L'influenza del grafo di comunicazione

Dopo aver dimostrato la convergenza dell'algoritmo e avere caratterizzato, grazie al Teorema 4, il rate di convergenza R , resta ora da capire quale sia il modo migliore per i compensatori di comunicare fra loro. Resta cioè da capire quale sia, se esiste, il grafo di comunicazione che porta ad avere il rate di convergenza R più basso. Inoltre sarebbe interessante capire come il bound β approssima il rate R .

Viste le affinità (evidenziate nella sezione 3.5) che il problema di ottimizzazione vincolata presenta con i problemi di consenso di tipo gossip, ci si potrebbe aspettare che il rate R ottimo si ottenga quando il grafo di comunicazione è di tipo *completo*. Nel caso cioè in cui si può attivare una qualsiasi coppia di compensatori che poi risolve il sottoproblema di ottimizzazione (3.24).

Nella Figura 4.2 è mostrata una semplice rete (una catena di 10 nodi) sulla quale è stato testato l'algoritmo per studiarne la velocità di convergenza in riferimento a diversi grafi di comunicazione definiti su di essa. I grafi di comunicazione sono gli stessi già definiti nell'Esempio 6

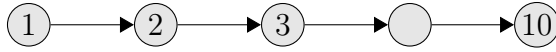


Figura 4.2: Albero associato alla rete su cui sono state fatte le simulazioni

Nella Figura 4.3 sono invece mostrati i risultati delle simulazioni. A dispetto di quanto si poteva pensare, le migliori prestazioni sono ottenute usando il grafo di comunicazione *1-step*, e esse degradano tanto più quanto i grafi di comunicazione usati “differiscono” dal *1-step*. Nella figura si vedono infatti, in linea continua, le traiettorie di $v(t) = \mathbb{E}[x(t)^T \frac{M}{2} x(t)]$ nei vari casi, e si nota come quella che più velocemente tende a zero sia quella relativa al caso in cui si è utilizzato il grafo di comunicazione *1-step*. Si vedono anche, in linea tratteggiata, le traiettorie di $v(t)$ stimate usando il bound β . Queste ultime, si vede, approssimano abbastanza bene le “pendenze” dei $v(t)$.

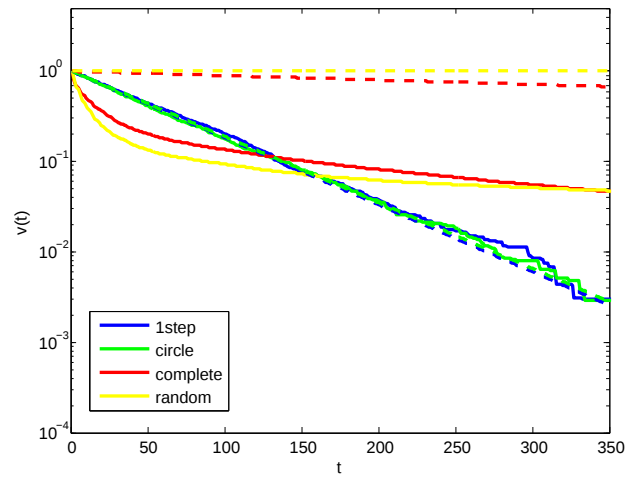


Figura 4.3: Risultati delle simulazioni

4.2.1 Il bound β

In questa sezione studieremo il bound β e la sua dipendenza da $\mathcal{G}_C$. Per fare questo dapprima definiamo le matrici $K'_C = -(K_C - 2\mathbf{1}\mathbf{1}^T)$ e $A'_C = -A_C$. Sfruttando il Lemma 1, si riesce a dire che $K'_C A'_C = \mathbf{I}$. Si può facilmente notare che la colonna i -esima di K'_C identifica il cammino fra il nodo i e la radice dell'albero. Infatti

$$K'_C(j, i) = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } j \text{ fa parte del cammino dal nodo } i \text{ alla radice (il nodo 1)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Da ciò segue che la prima colonna di K'_C è composta di soli zeri. Si può dimostrare che l'Hessiano del problema di ottimizzazione si può scrivere come

$$\begin{aligned} M &= K_C'^T D K'_C + \gamma \mathbf{1}\mathbf{1}^T \\ &= \begin{bmatrix} K_C'^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K'_C \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dove $\gamma \in \mathbb{R}$ e $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_{N-1})$. Vale il seguente

Lemma 10.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A'_C & e_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_C^T \\ e_1^T \end{bmatrix}$$

dove $e_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che effettivamente $MM^{-1} = M^{-1}M = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned} MM^{-1} &= M \begin{bmatrix} A'_C & e_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_C^T \\ e_1^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K_C'^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K'_C \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_C & e_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_C^T \\ e_1^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K_C'^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_C^T \\ e_1^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K_C'^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_C^T \\ e_1^T \end{bmatrix} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

Il fatto che $M^{-1}M = \mathbf{I}$ si dimostra in maniera analoga. □

Se $\gamma = 0$, si ha che

$$M = K_C'^T D K'_C, \text{ and } M^{-1} = A_C D^{-1} A_C^T$$

Il primo dei risultati atti a caratterizzare β è il seguente

Lemma 11. *Sia il grafo di comunicazione $\mathcal{G}_C$ di tipo 1-step. Allora*

$$\beta \leq 1 - \frac{1}{N-1}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \beta = \lambda_2(\bar{F}) &= \lambda_2(\mathbb{E}[\mathbf{I} - B_i(B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M]) \\ &= \lambda_2(\mathbf{I} - \mathbb{E}[B_i(B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M]) \\ &= 1 - \lambda_{N-1}(\bar{E}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \sum_i [p_i B_i (B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M] \\ &= A'_C P (A'_C{}^T M A'_C)^{-1} A'_C{}^T M \\ &= A'_C P (A'_C{}^T [K'_C{}^T \quad \mathbf{1}] \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K'_C \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} A'_C)^{-1} A'_C{}^T [K'_C{}^T \quad \mathbf{1}] \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K'_C \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \\ &= A'_C P D^{-1} D K'_C \\ &= [A'_C \quad e_1] \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K'_C \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \\ &= T^{-1} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \end{aligned}$$

e così finalmente

$$\lambda_{N-1}(\bar{E}) = \lambda_N(P) \leq \frac{1}{N-1} \Rightarrow \lambda_2(\bar{F}) \leq 1 - \frac{1}{N-1}$$

□

Il lemma precedente mostra che il miglior β , nel caso in cui il grafo di comunicazione è di tipo 1-step, si ha quando tutte le coppie di nodi hanno la stessa probabilità di attivarsi. Il prossimo risultato fornisce invece il limite minimo cui può arrivare β

Lemma 12. *Sia dato un albero $\mathcal{T}_C = (\mathcal{C}, \mathcal{E}_C)$ e sia definito su di esso un grafo di comunicazione qualsiasi $\mathcal{G}_C = (\mathcal{C}, \mathcal{W})$, purchè sia connesso, e ciascun arco abbia la stessa probabilità di attivarsi degli altri. Il bound β di convergenza dell'algoritmo soddisfa la*

$$\beta \geq 1 - \frac{1}{N-1}$$

Dimostrazione. Sappiamo infatti che

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda_i \in \Lambda(\bar{E})} \lambda_i &= \text{Tr} \left(\sum_{i=(h,k) \in \mathcal{W}} p_i B_i (B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M \right) \\
&= \sum_{i=(h,k) \in \mathcal{W}} p_i \text{Tr} (B_i (B_i^T M B_i)^{-1} B_i^T M) \\
&= \sum_{i=(h,k) \in \mathcal{W}} p_i \text{Tr} (B_i^T M B_i (B_i^T M B_i)^{-1}) \\
&= \sum_{i=(h,k) \in \mathcal{W}} p_i = 1
\end{aligned}$$

Sapendo che $\lambda_N(\bar{E}) = 0$, segue che $\lambda_{N-1}(\bar{E}) \leq \frac{1}{N-1}$, e dunque $\lambda_{N-1}(\bar{F}) = \beta \geq 1 - \frac{1}{N-1}$. $\square$

Quindi, la situazione migliore, almeno per quel che riguarda β è quella in cui il grafo di comunicazione è di tipo $1 - \text{step}$ e gli archi hanno tutti la stessa probabilità di attivarsi.

4.2.2 Il rate R

Prima di fornire il risultato che caratterizza questa sezione abbiamo bisogno del seguente

Lemma 13. *Sia $e \in \mathcal{W}$, $e = (i, j)$. Allora*

$$B_e^T M B_e = \sum_{h \in \mathcal{P}(i,j)} d_h = \text{dist}(i, j) \quad (4.17)$$

dove $\mathcal{P}(i, j)$ è l'unico cammino che unisce i nodi i e j , mentre i d_h sono i valori definiti nella (3.4).

Dimostrazione.

$$B_e^T M B_e = B_e (K_C'^T D K_C') B_e + B_e^T \gamma \mathbf{1} \mathbf{1}^T B_e = B_e (K_C'^T D K_C') B_e = \|D^{1/2} K_C' B_e\|^2$$

Ma abbiamo che $K_C' B_e = \text{col}_{K_C'}(i) - \text{col}_{K_C'}(j) = \text{path}(i, j)$, dove il vettore

$$\text{path}(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in \text{al cammino che unisce } i \text{ alla radice di } \mathcal{T}_C' \\ -1 & \text{se } e \in \text{al path che unisce } j \text{ alla radice di } \mathcal{T}_C' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \text{ path}(i, j) \in \mathbb{R}^{N-1}$$

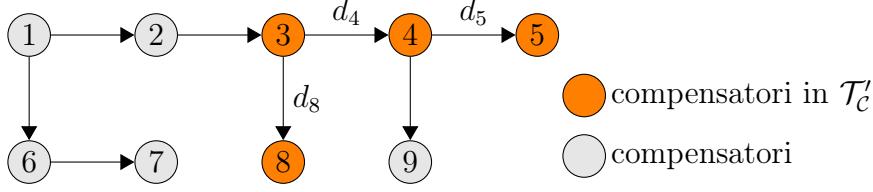


Figura 4.4: T'_C definito nel determinare $B_i^T M B_i$, $i = (8, 5)$

e T'_C è il più piccolo sottoalbero contenente i e j (in Figura 4.4 vi è un esempio di . Da questo si deduce che

$$B_e^T M B_e = \|D^{1/2} K B_e\|^2 = \sum_{l \in \text{path}(i,j)} d_l$$

che rappresenta la “lunghezza” del cammino che collega i e j , cioè la loro “distanza”. $\square$

Nella sezione precedente abbiamo mostrato che $\beta \geq 1 - \frac{1}{N-1}$. Il seguente risultato caratterizza invece R quando $\mathcal{G}_C$ è di tipo *1-step*.

Teorema 5. *Sia dato un albero $\mathcal{T}_C = (\mathcal{C}, \mathcal{E}_C)$ e sia definito su di esso il grafo di comunicazione 1-step $\mathcal{G}_C = (\mathcal{C}, \mathcal{E}_C)$ in cui ciascun arco ha la stessa probabilità di attivarsi degli altri. Allora si hanno*

$$\beta = 1 - \frac{1}{N-1}, \quad R = 1 - \frac{1}{N-1}$$

Dimostrazione. Per prima cosa, dimostriamo che, a seguito dell’attivazione di un qualsiasi arco $e \in \mathcal{E}_C$, la matrice di transizione di stato F_e è triangolare superiore e sulla diagonale principali ha elementi che valgono solamente 0 oppure 1. La dimostrazione avviene per induzione e si basa sull’osservazione che un qualsiasi albero dei compensatori $\mathcal{T}_C$ può essere pensato e costruito come l’unione di più catene elementari. In Figura 4.6 ne viene mostrato un esempio: si può affermare che l’albero sia costituito dall’unione delle tre catene $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$.

Studiamo il *il caso base* in cui l’albero è costituito da una sola catena elementare $\mathfrak{C}_1$, a cui è associato l’Hessiano $\tilde{M}_1$. Come spiegato nella sezione 3.2.2, $\tilde{M}_1$ può essere sostituito dalla $M_1^{\text{intersect}}$, d’ora in poi chiamata semplicemente M_1 per alleggerire la notazione. E’ immediato verificare che,

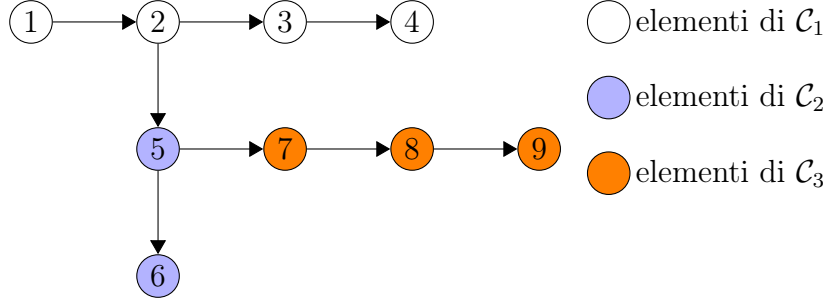


Figura 4.5: L'albero $\mathcal{T}'_C$ è visto come l'unione di tre catene elementari $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$

in seguito all'attivazione di un qualsiasi arco $e = (i - 1, i) \in \mathcal{E}_{C,1}$, la matrice che risolve il sottoproblema di ottimizzazione è triangolare superiore:

$$F_{e_i} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & * & * & \\ & & & & 1 & * & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Immaginiamo ora che $\mathcal{H} = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$ sia un albero composto da $\bar{N}$ nodi, sul

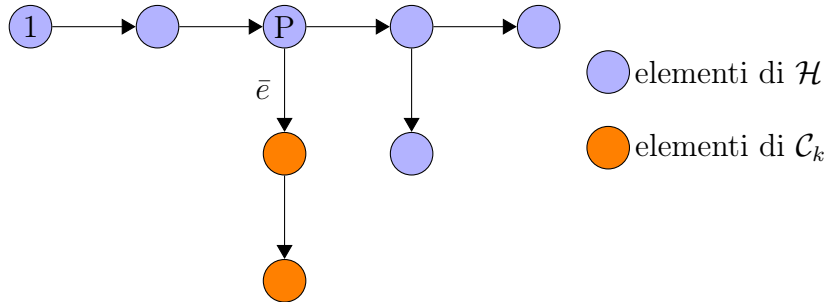


Figura 4.6: L'albero $\mathcal{H}'$ è visto come l'unione fra $\mathcal{H}$ e $\mathcal{C}_k$

quale è definito il grafo di comunicazione *1-step* $\mathcal{G}_{C,H} = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$ e al quale è associato l'Hessiano M_H , e di volere aggiungere la catena $\mathcal{C}_k = (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_k)$, composta da N_k nodi, alla quale è associata M_k e sulla quale è definito il

grafo di comunicazione $\mathcal{G}_{C,k} = (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_k)$. $\mathfrak{C}_k$ si unisce a $\mathcal{H}$ attaccandosi al vertice P con l'edge $\bar{e}$, ottenendo l'albero $\mathcal{H}'$. $\mathcal{H}$ sia tale per cui ogni matrice di transizione di stato F_e sia triangolare superiore. Per poter studiare $M_{H'}$, prima si devono indagare le proprietà di cui gode M_k

1. $M_k(i, j) = M_k(j, i)$
2. $M_k(i, j) = M_k(l, l)$, $l = \min\{i, j\}$
3. $M_k(i, i) = M_k(i-1, i-1) + d_i$

$M_{H'}$ possiede allora le seguenti proprietà:

1. $M_{H'}(i, j) = M_H(i, j)$ se $i, j \leq \bar{N}$
2. $M_{H'}(i, j) = M_k(i - \bar{N}, j - \bar{N}) + d_{\bar{e}} + M_H(P, P)$ se $i, j > \bar{N}$
3. $M_{H'}(i, j) = M_H(i, P)$ se $i \leq \bar{N}, j > \bar{N}$
4. $M_{H'}(i, j) = M_H(P, j)$ se $i > \bar{N}, j \leq \bar{N}$
5. $M_{H'}(i, j) = M_{H'}(j, i)$ se $i > \bar{N}, j \leq \bar{N}$

$M_{H'}$ possiede quindi la seguente struttura:

$$M_{H'} = \begin{bmatrix} M_H & M_{H'}^* \\ M_{H'}^{*T} & M_k + M_P \end{bmatrix}$$

con $M_P = (d_{\bar{e}} + M_H(P, P))\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \rho\mathbf{1}\mathbf{1}^T$. $\mathcal{G}_{C,H}$ e $\mathcal{G}_{C,k}$ definiscono delle matrici $B_{i,H}$ e $B_{i,k}$ come quelle viste nell'Esempio 5 nel caso *1-step* che si possono raccogliere, giustapponendole, nelle due matrici $\mathbf{B}_H$ e $\mathbf{B}_k$. Per questo $\mathcal{G}_{C,H}$ definisce le matrici B_i che si possono raccogliere, giustapponendole, nella matrice

$$\mathbf{B}_{H'} = \left[\begin{bmatrix} \mathbf{B}_H \\ 0 \end{bmatrix} B_{\bar{e}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} \right]$$

dove $B_{\bar{e}} = [0 \dots \underbrace{1}_P \dots \underbrace{-1}_{N+1} \dots 0]^T$

Studiamo ora la forma che le matrici di transizione di stato associate a $\mathcal{H}$ prendono a seguito dell'attivazione dei vari archi $e \in \mathcal{G}_C$. Ricordiamo che, per il Lemma 4.4, se $e = (l, m)$,

$$F_e = \mathbf{I} - \frac{B_e B_e^T M}{\text{dist}(l, m)}$$

Caso in cui si attiva l'arco $\bar{e}$ In questo caso si ha

$$\begin{aligned}
B_{\bar{e}}^T M_{H'} &= [0 \dots \underbrace{1}_P \dots \underbrace{-1}_{\bar{N}+1} \dots 0] M_{H'} \\
&= [0 \dots \underbrace{1}_P \dots 0] M_{H'} - [0 \dots \underbrace{1}_{\bar{N}+1} \dots 0] M_{H'} \\
&= [M_{H'}(P, 1) \dots M_{H'}(P, \bar{N} + N_k)] - [M_{H'}(\bar{N} + 1, 1) \dots M_{H'}(\bar{N} + 1, \bar{N} + N_k)] \\
&= [M_H(P, 1) \dots M_H(P, \bar{N}) \quad M_H(P, P) \dots M_H(P, P)] + \\
&\quad - [M_H(P, 1) \dots M_H(P, \bar{N}) \quad M_k(1, 1) + \rho \dots M_k(1, N_k) + \rho] \\
&= [0 \dots 0 \quad \underbrace{-d_{\bar{e}}}_{\bar{N}+1} \dots -d_{\bar{e}}]
\end{aligned}$$

essendo $M_k(1, j) = 0 \forall j$. Allora la $F_{\bar{e}}$ è del tipo

$$F_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & * & * & \\ & & & & 1 & * & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Caso in cui si attiva un arco $e_i = (i - 1, i) \in \mathcal{E}_{C, H'}, i \leq \bar{N}$. Ad e_i è associata la matrice

$$B_{e_i} = \begin{bmatrix} B_{e_i, H} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Allora si ha che

$$F_{e_i} = \mathbf{I} - \frac{B_{e_i} B_{e_i}^T M_{H'}}{\text{dist}(i-1, i)} \quad (4.18)$$

$$= \mathbf{I} - \frac{\begin{bmatrix} B_{e_i, H} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{e_i, H}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_H & M_{H'}^* \\ M_{H'}^{*T} & M_k + M_P \end{bmatrix}}{\text{dist}(i-1, i)} \quad (4.19)$$

$$= \mathbf{I} - \frac{\begin{bmatrix} B_{e_i, H} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{e_i, H}^T M_H & B_{e_i, H}^T M_{H'}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{\text{dist}(i-1, i)} \quad (4.20)$$

$$= \mathbf{I} - \frac{\begin{bmatrix} B_{e_i, H} B_{e_i, H}^T M_H & B_{e_i, H} B_{e_i, H}^T M_{H'}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{\text{dist}(i-1, i)} \quad (4.21)$$

$$= \begin{bmatrix} F_{e_i, H} & * \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

e quindi si vede che

$$F_{e_i} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & * & * & \\ & & & & 1 & * & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Caso in cui si attiva un arco $e_i = (i-1, i) \in \mathcal{E}_{C, k'}, i > \bar{N}$. Questo caso è analogo al precedente, e come esso conduce ad una

$$F_{e_i} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & * & * & \\ & & & & 1 & * & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

triangolare superiore.

Dunque tutte le $F_{e,H'}$ sono triangolari superiori, e i loro elementi diagonali sono tutti 1 meno l'elemento $F_e(t(e), t(e))$ che è zero. Da ciò segue che

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_c} F_e = (N-1)\bar{F} = \begin{bmatrix} N-1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & N-2 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & N-2 & * & \dots & * \\ & \dots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & & N-2 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 - \frac{1}{N-1} & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{N-1} & * & \dots & * \\ & \dots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & & 1 - \frac{1}{N-1} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

e si vede chiaramente che $\beta = 1 - \frac{1}{N-1}$. Inoltre, se le F_e sono triangolari superiori, tutte le $F_e^T \otimes F_e^T$ sono triangolari inferiori, e quindi la stessa $\mathbf{F} = \mathbb{E}[F_e^T \otimes F_e^T]$ è triangolare inferiore. Gli elementi della diagonale di $\mathbf{F}$ (i suoi autovalori) si ricavano facilmente, e sono

$$\Lambda_{\mathcal{L}} = \left[1, \underbrace{1 - \frac{1}{N-1}, \dots, 1 - \frac{1}{N-1}}_{3(N-1)}, \underbrace{1 - \frac{2}{N-1}, \dots, 1 - \frac{2}{N-1}}_{(N-1)(N-2)} \right]^T$$

Usando il Teorema 5 si dimostra che $R = 1 - \frac{1}{N-1}$. □

Non è ancora stato provato che, in generale, debba valere la

$$R \geq 1 - \frac{1}{N-1} \quad (4.24)$$

e che quindi la migliore interazione si ha quando $\mathcal{W} = \mathcal{E}_c$. Ma i risultati delle simulazioni, il Lemma 12 e il fatto, evidenziato nella Figura 4.3, che β sembra approssimare bene R ci spingono a credere che sia così. In netta contrapposizione a quanto avviene per gli algoritmi di consenso di tipo gossip.

4.3 Esempio di un'applicazione dell'algoritmo

Ora vedremo un esempio dell'applicazione dell'algoritmo. Si consideri la smart micro-grid a cui è associato il grafo di Figura 4.7. Il nodo 1 costituisce la connessione fra la micro-grid e la rete di distribuzione esterna. La rete presenta i seguenti parametri:

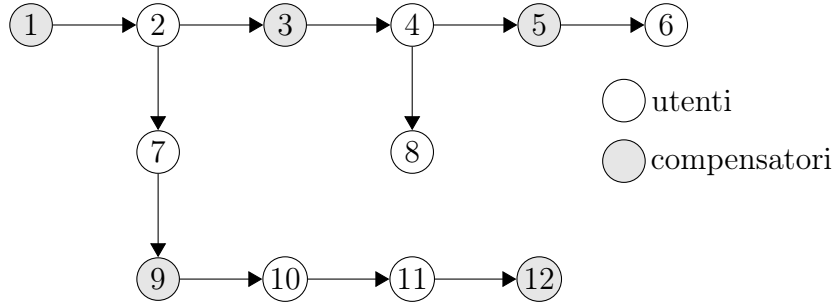


Figura 4.7: Smart micro-grid su cui è applicato l'algoritmo

1. $U_1 = 220$ V;
2. resistenza per unità di lunghezza: $0.16\text{m}\Omega/m$;
3. reattanza per unità di lunghezza: $1\mu\text{H}/m$;
4. le lunghezze degli archi ℓ_i sono v.a. $\mathcal{U}([50\text{m}, 250\text{m}])$

Supponiamo inoltre di disporre delle misure delle tensione dei compensatori, delle correnti degli archi che in essi incidono e di conoscere le potenze che essi immettono nella rete. Per applicare l'algoritmo useremo gli strumenti descritti nella Sezione 2.5.

Il punto di lavoro iniziale della rete è caratterizzato dai seguenti valori delle tensioni e delle potenze iniettate dai nodi:

$U_1 = 220.00$	$S_1 = 3638 + 3042i$
$U_2 = 219.13 - 0.22i$	$S_2 = -7042 - 3502i$
$U_3 = 218.44 - 0.44i$	$S_3 = 1534 + 365i$
$U_4 = 218.13 - 0.60i$	$S_4 = -5385 - 1876i$
$U_5 = 219.07 + 0.26i$	$S_5 = 8814 + 2875i$
$U_6 = 218.53 - 0.08i$	$S_6 = -2308 - 1093i$
$U_7 = 219.76 + 0.48i$	$S_7 = -6350 - 2844i$
$U_8 = 217.06 - 1.39i$	$S_8 = -4370 - 1689i$
$U_9 = 221.71 + 2.09i$	$S_9 = 3028 + 1359i$
$U_{10} = 223.57 + 3.76i$	$S_{10} = 1819 - 874i$
$U_{11} = 226.12 + 5.91i$	$S_{11} = -1381 - 657i$
$U_{12} = 227.30 + 6.88i$	$S_{12} = 11821 + 4327i$

e le perdite totali sulle linee sono

$$\text{Re}(S_{\text{loss}}) = 331.53$$

Immaginiamo che si attivino i compensatori 9 e 12. Essi modificano leggermente la potenza che iniettano. Sia ΔS il 5% di S_9 , allora la nuova potenza che iniettano è $S'_9 = S_9 + \Delta S$, $S'_{12} = S_{12} - \Delta S$. In base alle nuove misure acquisite, i compensatori 9 e 12 usando le equazioni (2.44) e (2.47) stimano le impedenze equivalenti $Z_{1,eq}$ e $Z_{2,eq}$. Inoltre, usando la (2.52), la (2.53) e la (2.56) stimano un modello equivalente per la rete esterna. Per la rete esterna abbiamo utilizzato due PQ equivalent, uno che modella la rete a sinistra di 9 (caratterizzato dai valori $P_s = \text{Re}(U_9 J_e^*)$, $Q_s = \text{Im}(U_9 J_e^*)$, $e' : t(e') = 9$) e l'altro che modella la rete a destra di 12 (caratterizzato dai valori $P_d = \text{Re}(U_{12} J_e^*)$, $Q_d = \text{Im}(U_{12} J_e^*)$, $e' : s(e') = 12$, in questo caso $P_d = Q_d = 0$). Dopodichè minimizzano le perdite variando il flusso di potenza reattiva sul nuovo modello stimato, mostrato in Figura 4.9. Analizziamo ora quanto la variazione ottima di potenza reattiva e la conseguente diminuzione delle perdite attuata dai compensatori sul modello equivalente della rete (mostrato in Figura 4.9) si avvicina alla variazione ottima “reale” che si otterrebbe se fossero note tutte le variabili della rete. Ricordiamo che la minimizzazione avviene come conseguenza delle variazioni “simmetriche” di potenza reattiva iniettata: $Q'_9 = Q_9 + \Delta Q$ e $Q'_{12} = Q_{12} - \Delta Q$. In Figura 4.10 sono mostrate le perdite stimate nel modello equivalente e le perdite effettive nel modello reale in funzione della variazione di potenza reattiva. Si vede che queste ultime sono ben approssimate dalle prime. Il minimo delle perdite nel modello stimato si trova per $\Delta Q_{eq} = -3100$ e vale $\text{Re}(S_{\text{loss},eq}) = 309.2$, mentre quello delle perdite reali si trova per $\Delta Q = -3140$ e vale $\text{Re}(S_{\text{loss},eq}) = 308.6$.

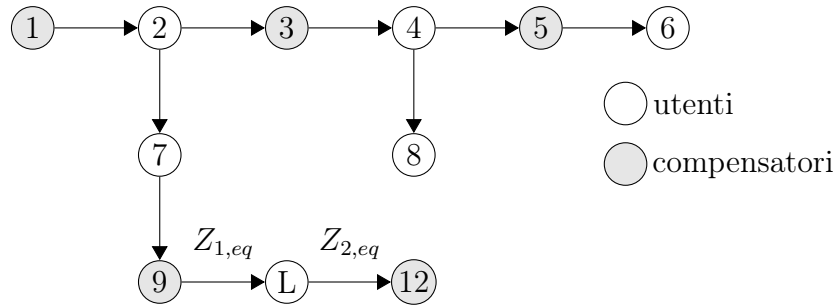


Figura 4.8: Grafo della rete dove ai nodi 10 e 11 è stato sostituito l'unico nodo L

Con questo esempio abbiamo mostrato che effettivamente, se sono a disposizione le informazioni necessarie, il calcolo della rete equivalente e la suc-

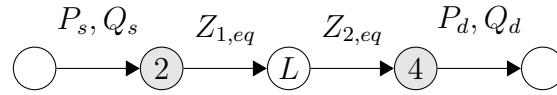


Figura 4.9: Modello equivalente della rete usato dai nodi 9 e 12 per minimizzare le perdite

cessiva minimizzazione delle perdite su di essa è una buona implementazione dell'algoritmo studiato.

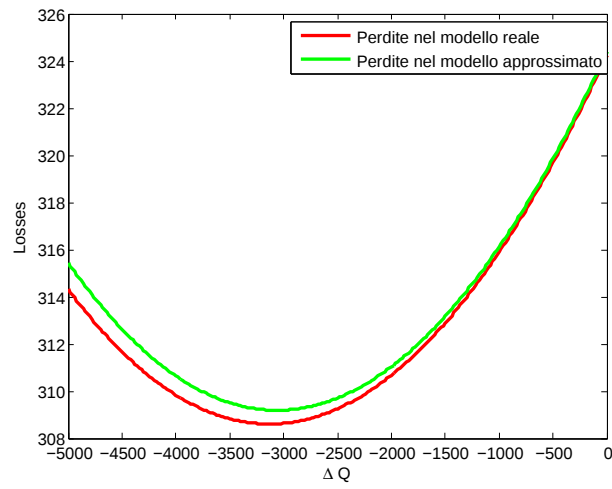


Figura 4.10: Rappresentazione grafica delle impedenze equivalenti e delle tensioni in G_2 nei vari punti di lavoro

Capitolo 5

Conclusione e sviluppi futuri

Abbiamo formulato e analizzato un algoritmo per la minimizzazione delle perdite di potenza sulle linee elettriche regolando i flussi di potenza reattiva.

In realtà questo algoritmo non è ancora completo, ma vi sono ancora degli elementi da studiare prima di poterlo attuare “sul campo”. Ad esempio le limitazioni nella capacità di produrre potenza reattiva dei compensatori, o l'estensione dell'algoritmo al caso di reti elettriche magliate.

Inoltre lo si deve attuare. Quest'ultimo aspetto è fortemente condizionato dalla quantità di informazioni che possono avere i nodi. Una possibile soluzione, ed è quella mostrata nella Sezione 4.3 prevede che ciascuna coppia di generatori una volta attivata, sfruttando gli strumenti esposti nelle sezioni 2.5 o nella 2.6, stimi la rete che la circonda e si porti nel punto di ottimo locale. Esso può essere trovato anche per via numerica, sfruttando le potenzialità di calcolo dei compensatori. Questa soluzione sottintende però la possibilità di misurare le tensioni dei nodi compensatori e, soprattutto, le correnti sugli archi che incidono in essi.

Nel caso le misure di corrente non siano disponibili, si possono utilizzare tecniche di stima del gradiente della funzione costo basate sulle misure delle tensioni dei compensatori. Il gradiente, una volta ottenuto, fornisce la “direzione” verso la quale si deve muovere lo stato di ogni compensatore (la potenza reattiva che inietta) per portarsi nella posizione di minimo ([3]).

Bibliografia

- [1] Francesco Bariani. *Il controllo delle reti attive di distribuzione*. PhD thesis, Università degli Studi di Padova, 2009.
- [2] Arthur R. Bergen. *Power System Analysis*. Prentice Hall, 1986.
- [3] Sandro Bolognani, Saverio e Zampieri. Distributed quasi-newton method and its application to the optimal reactive power flow problem. In *Proc. NECSYS'10*, Annecy, France, 2010.
- [4] Sandro Bolognani, Saverio e Zampieri. A gossip-like distributed optimization algorithm for reactive power flow control. In *IFAC Conference*, 2010.
- [5] Ruggero e Frasca Paolo Bullo, Francesco e Carli. Gossip coverage control for robotic networks: Dynamical systems on the the space of partitions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2010. Submitted.
- [6] COMMISSION STAFF WORKING DOCUMENT. A european strategic energy technology plan.
- [7] Elisabetta Tedeschi e Paolo Tenti e Paolo Mattavelli. Synergistic control and cooperative operation of distributed harmonic and reactive compensators. In *IEEE PESC 2008*, 2008.
- [8] Juan Yu e Wei Yan e Wenyuan Li e Lili Wen. Quadratic models of acdc power flow and optimal reactive power flow with hvdc and upfc controls. 2007.
- [9] Sandro Fagnani, Fabio e Zampieri. Randomized consensus algorithms over large scale networks. *IEEE J. on Selected Areas in Comm.*, 26(4):634 – 649, May 2008.
- [10] Gaetano Guarnieri, Massimo e Malesani. *Elementi di Elettrotecnica, Reti Elettriche*. Edizioni Progetto Padova, 2002.

- [11] Farrokh Ipakchi, Ali e Albuyeh. Grid of the future. are we ready to transition to a smart grid? *IEEE Power Energy Mag.*, 7(2):52 –62, mar-apr 2009.
- [12] Prabha Kundur. *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, 1994.
- [13] Sakis A. P. e Fan Zhang Meliopoulos. Multiphase power flow and state estimation for power distribution system. *IEEE Transaction on Power System*, 11(2), February 1996.
- [14] A. Monticelli. Electric power system state estimation. *Proc. of the IEEE*, 88(2), February 2000.
- [15] S.A. Nasar and F. C. Trutt. *Electric Power System*. CRC Press, 1999.
- [16] J. A. e Murray R. M. Olfati-Saber, R. e Fax. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proc. of the IEEE*, 95(1):215 – 233, January 2007.
- [17] Miroslav e Petit Marc e Heyberger Jean-Baptiste e Ernst Damien Phulpin, Yannick e Begovic. Evaluation of network equivalents for voltage optimization in multi-area power system. *IEEE Transaction on Power System*, 24(2), sep 2009.
- [18] Alessandro e Mattavelli Paolo Tenti, Paolo e Costabeber. Improving power quality and distribution efficiency in micro-grids by cooperative control of switching power interfaces. In *The 2010 International Power Electronics Conference*, 2010.