



Università degli Studi di Padova

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

**Comportamento periodico di sistemi
unidimensionali non lineari**

**Periodic behavior of one-dimensional
non linear systems**

Laureando

Alberto Padoan

Relatore

Prof. Ettore Fornasini

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

A tutti coloro che hanno reso questo possibile.

The arguments take so odd and surprising a form; the weapons used seem so childishly simple when compared with the far-reaching results; but there is no escape from the conclusions.

G. H. Hardy

Indice

1	Introduzione	1
2	Preliminari	5
2.1	Richiami di calcolo differenziale	5
2.2	Periodicità	5
2.3	Intervalli, Coperture, Cicli	13
3	Il teorema di Sharkovsky	17
3.1	Lemmi preliminari	17
3.2	Coesistenza di cicli	21
3.3	Corollari del teorema di Sharkovsky	25
4	Note conclusive	29

Sommario

Questo elaborato si colloca nell'ambito dello studio dei sistemi dinamici a tempo discreto ed in particolare è volto ad analizzare alcune proprietà dei sistemi unidimensionali periodici, scoperte dal matematico A. M. Sharkovsky nel 1964. Nel Capitolo 1 si riporta la curiosa storia della scoperta di tali proprietà. Nel Capitolo 2 si richiamano alcuni concetti di analisi matematica e si introducono gli strumenti di base per lo studio di sistemi dinamici a tempo discreto. Nei Capitoli 3 e 4, dopo avere enunciato alcuni lemmi, si prova il teorema di Sharkovsky e se ne analizzano alcune conseguenze.

Capitolo 1

Introduzione

Ben pochi all'inizio del Novecento avrebbero creduto all'esistenza di “terre vergini” nell'ambito dello studio delle proprietà di funzioni continue di una variabile reale. Nel corso della storia tale classe di funzioni è stata studiata estensivamente da matematici del calibro di Newton, Leibniz, Euler, Weierstrass facendo così supporre che nessuna sorpresa potesse arrivare dalla retta reale.

Nel 1964 fu l'allora venticinquenne Alexandr Nicolaevich Sharkovsky a smentire questa supposizione, pubblicando un articolo che solo molto tempo dopo avrebbe rivoluzionato la teoria dei sistemi dinamici. Questa storia diventa ancor più curiosa se si pensa che lo scrisse, intitolato “Coesistenza di cicli di una mappa continua dalla retta reale in se stessa” [10], fu virtualmente inaccessibile alla comunità matematica internazionale per più di due lustri.

Per comprendere a fondo il contenuto di questo articolo bisogna prima fare un passo indietro e precisare il concetto di *sistema dinamico discreto*. Si tratta di un modello matematico che descrive l'evoluzione temporale di un processo iterativo che può rappresentare fenomeni fisici, biologici, economici o quant'altro. Gli ingredienti principali per la costruzione di tale modello sono un insieme ed una mappa dall'insieme dato in se stesso. Fissato un punto di questo insieme che rappresenta lo stato iniziale del sistema, l'evoluzione temporale del processo è specificata dall'orbita del punto iniziale, ovvero dalla applicazione della mappa al punto iniziale ed ai successivi risultati.

Non è difficile immaginare che la nozione di periodicità di un sistema rivesta un ruolo molto particolare. Nell'ottica di voler controllare un processo (fisico, ad esempio) è normale chiedersi se il fenomeno si ripeta ed in caso affermativo con quale periodo. In aggiunta si noti che la dinamica dell'orbita di un punto periodico è completamente determinata a priori non appena si conosce un certo numero di iterazioni.

Fra le tante particolarità del teorema di Sharkovsky sulla “coesistenza di cicli”, vi è anche un nuovo bizzarro ordinamento dei numeri naturali, detto ordinamento di Sharkovsky. In tale ordinamento vengono prima gli interi dispari e maggiori di 1, disposti secondo l’ordine naturale crescente

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright 11 \triangleright \dots$$

seguiti dagli interi dispari moltiplicati per il fattore 2, pure essi disposti secondo l’ordine naturale crescente,

$$\dots 3 \cdot 2 \triangleright 5 \cdot 2 \triangleright 7 \cdot 2 \triangleright \dots$$

poi dagli interi dispari moltiplicati per il fattore 2^2 e disposti secondo l’ordine naturale crescente, etc. Ultime vengono le potenze di 2, disposte secondo l’ordine naturale decrescente. Si ottiene così:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright 11 \triangleright \dots \triangleright 3 \cdot 2 \triangleright 5 \cdot 2 \triangleright 7 \cdot 2 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2^1 \triangleright 1.$$

L’articolo di Sharkovsky è essenzialmente volto a provare il seguente teorema: “se $k \triangleright l$ e se una mappa continua di variabile reale a valori reali ha un punto di periodo k , allora essa ha un punto di periodo l ”; qui il simbolo $\triangleright$ denota l’ordine definito sopra.

Sorprendentemente vengono ordinati *tutti* i numeri naturali e contemporaneamente si stabilisce un vincolo sull’insieme dei periodi di una *arbitraria* funzione continua di variabile reale. L’eleganza del teorema di Sharkovsky risiede appunto nella debolezza delle ipotesi e per quanto concerne la dimostrazione nella intelligente ed oculata applicazione del teorema del valor medio.

Il lavoro di Sharkovsky avrebbe tuttavia ottenuto il giusto riconoscimento solo molti anni dopo. Tale risultato rimase sepolto per circa dieci anni, finché attorno al 1970 esplose definitivamente l’interesse per i problemi iterativi e le loro applicazioni.

Ignari dell’esistenza dell’opera di Sharkovsky nel 1975 Tien-Yien Li e James Yorke pubblicarono l’articolo “Periodo tre implica caos” [7]. Nello scritto si provava che la presenza di un punto periodico di periodo 3 per una mappa da un insieme in se stessa implica la presenza di punti periodici di tutti i periodi. Malgrado tale risultato fosse solo un frammento di quello del matematico ucraino, la gloria sembrava destinata ai due americani, che per primi avevano sollevato la questione di fronte ad una più ampia audience, i matematici anglofoni.

Secondo quanto scrive Gleick [5], ad una conferenza sulle equazioni differenziali tenuta nella Berlino Est, Sharkovsky ebbe l’opportunità di incontrare Yorke per la prima volta. C’era qualcosa di molto importante che l’ucraino doveva riferirgli. Fu così organizzato un furtivo incontro su un battello

durante la traversata del fiume Spree, in accordo al clima di guerra fredda del tempo. In quella sede Sharkovsky informò Yorke del suo più generale risultato (anche se ne inviò la dimostrazione solo sei mesi più tardi).

Da allora il merito di questo risultato venne via via universalmente attribuito a Sharkovsky e nuove dimostrazioni del teorema cominciarono ad apparire. Nonostante ciò, a Li e Yorke va riconosciuto il merito di avere affrontato l'argomento di fronte ad un grande pubblico e di aver definito la nozione di mappa caotica.

Al giorno d'oggi il teorema di Sharkovsky è un risultato che compare in tutti i libri di testo che trattano di Teoria del Caos e viene ammirato per la sbalorditiva semplicità del suo enunciato.

Capitolo 2

Preliminari

2.1 Richiami di calcolo differenziale

In questa sezione si fissa la notazione utilizzata e si richiamano alcune nozioni elementari di analisi matematica.

Si consideri una mappa continua $f : I \rightarrow I$, ove I è intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, insieme dei numeri reali.

Si denota la *composizione* di due funzioni con $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Definizione 1 (Iterazione). Per ogni intero $n \geq 1$ si definisce f^n come:

- $f^1 = f$,
- $f^n = f \circ f^{n-1}$.

Osservazione 1. Si noti che f^n non indica l'elevazione ad n -esima potenza di f , né tantomeno la derivata n -esima di f che sarebbe denotata da $f^{(n)}$.

Uno dei risultati dell'analisi che sfrutteremo estesamente è il Teorema del Valore Medio:

Teorema 1 (Teorema del Valore Medio). *Supponiamo che $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua. Supponiamo inoltre che $f(a) = u$ e $f(b) = v$. Allora per ogni z compreso tra u e v , esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = z$.*

2.2 Periodicità

In questa sezione e nella successiva vengono presentati alcuni strumenti di base per l'analisi di un *sistema dinamico a tempo discreto* i cui stati siano (rappresentati da) numeri reali. L'obiettivo principale della teoria dei sistemi

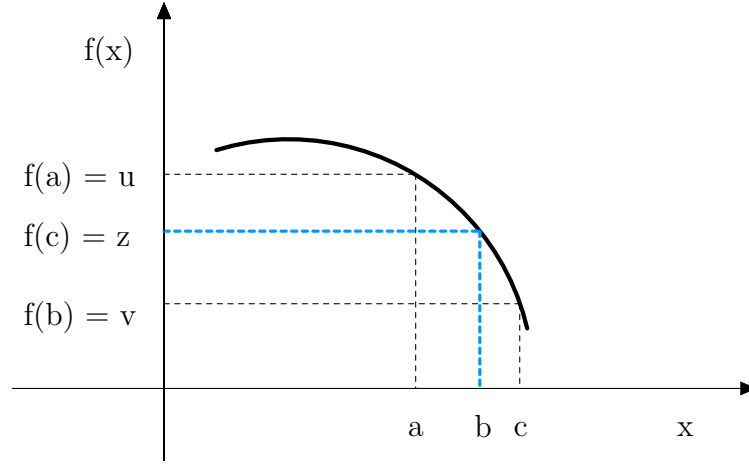


Figura 2.1: Il teorema del valore medio.

dinamici è di capire il comportamento *asintotico* di un processo iterativo. Se per esempio questo processo è un processo discreto come l'iterazione di una funzione, allora la teoria cerca di capire il comportamento finale dei punti $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)$ al crescere di n .

Fissato uno stato iniziale x_0 , se si considera il processo a tempo discreto

$$x(n) = f^n(x_0) \quad (2.1)$$

l'equazione alle differenze che ne regola la dinamica è

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (2.2)$$

con $x(0) = x_0$.

Facendo riferimento all'evoluzione temporale del sistema, è utile definire il concetto di *orbita*.

Definizione 2 (Orbita). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si definisce **orbita** o **f-orbita** di x_0 l'insieme di punti

$$O(x_0) := \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots\}. \quad (2.3)$$

Di particolare interesse sono le orbite che consistono di un unico punto. Tali punti sono detti *punti fissi* o anche *punti di equilibrio* del sistema.

Definizione 3 (Punto Fisso). Un punto x^* si dice **punto fisso** della mappa f o **punto di equilibrio** della Eq. (2.2) se $f(x^*) = x^*$.

Si osservi che l'orbita di un punto fisso x^* è un insieme di un unico elemento e consiste del solo x^* . Inoltre la Eq. (2.2) suggerisce che per trovare tutti i punti fissi di una mappa bisogna risolvere la equazione $f(x) = x$. Graficamente questo vincolo si traduce nel trovare le ascisse x per cui il grafico della curva $y = f(x)$ interseca la bisettrice del primo e del terzo quadrante $y = x$, si veda la Figura (2.2).

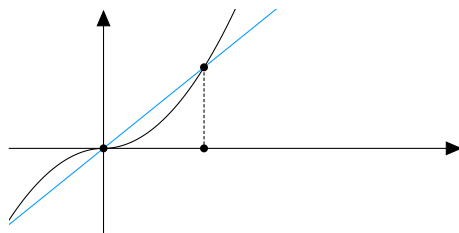


Figura 2.2: Mappa con 2 punti fissi.

Un'altra nozione di estrema importanza nel campo dei sistemi dinamici è quella di *periodicità*. La sua importanza discende dal fatto che numerosi fenomeni fisici hanno comportamenti ricorrenti, che si ripetono nel tempo. Questi “pattern” si ripetono producendo cicli (periodici), intendendo per ciclo l'orbita di punti periodici.

Definizione 4 (Punto Periodico). Un punto $\bar{x}$ si dice **punto periodico** di f di periodo k (o k -periodico per f) se $f^k(\bar{x}) = \bar{x}$ per qualche intero positivo k . Se inoltre $f^r(\bar{x}) \neq \bar{x}$ per $0 < r < k$, allora k è detto **periodo minimo** (o più semplicemente periodo) di $\bar{x}$.

Osservazione 2. Si osservi che:

- $\bar{x}$ è k -periodico per f , se $\bar{x}$ è un punto fisso della mappa f^k ;
- se x^* è punto fisso di f , allora x^* è punto periodico di f di periodo 1.

Esempio 1 (La Mappa Logistica). Supponiamo di essere interessati a capire come evolve nel tempo il numero di individui di una popolazione. Sia $x(n)$ il numero di membri di una popolazione di una certa specie al tempo n , e μ il tasso di crescita della popolazione da una generazione all'altra. Allora un modello matematico che descrive come varia la dimensione della popolazione può essere quello “*malthusiano*”

$$x(n+1) = \mu x(n), \quad \mu > 0. \quad (2.4)$$

Se la popolazione iniziale è $x(0) = x_0$, allora con una semplice iterazione si trova che

$$x(n) = \mu^n x_0. \quad (2.5)$$

è soluzione della Eq. (2.4). Essendo interessati al comportamento asintotico della popolazione, si osserva come cambia la popolazione $x(n)$ al divergere di n . Se $\mu > 1$, la popolazione $x(n)$ diverge verso infinito. Se $\mu = 1$, $x(n) = x_0$ per ogni $n \geq 0$ e la popolazione rimane costante nel tempo. Infine per $\mu < 1$, $x(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, quindi la popolazione si estingue se si lascia passare un tempo sufficientemente grande. In effetti nessuno di questi scenari rispecchia la realtà. Infatti una popolazione non può crescere a dismisura, ma dipende dalla entità delle risorse pro capite che la mantengono in vita. Inoltre eventuali carestie spingerebbero gli elementi della popolazione a combattere per tali risorse. Un modello più ragionevole è dunque

$$x(n+1) = \mu x(n) - bx^2(n) \quad (2.6)$$

ove b è la costante di proporzionalità di interazione tra i membri della specie. Se, per semplificare la Eq. (2.6), poniamo $y(n) = \frac{b}{\mu} x(n)$, otteniamo il modello

$$y(n+1) = \mu y(n)(1 - y(n)). \quad (2.7)$$

L'Eq. (2.7) è detta *equazione logistica* e la mappa $f(y) = \mu y(1 - y)$ è detta la *mappa logistica*.

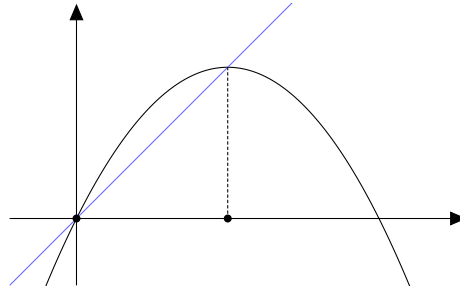


Figura 2.3: La mappa logistica per $\mu = 2$

Al variare di μ , questa innocente mappa esibisce una dinamica estremamente complessa. Sorprendentemente una soluzione in forma chiusa, ovvero l'espressione in forma algebrica di una soluzione, della Eq. (2.7) non è possibile, ad eccezione di $\mu = 2, 4$. ■

Il precedente esempio testimonia l'esistenza di mappe di cui non si può ottenere una soluzione in forma chiusa. In altre parole non è possibile scrivere una formula esplicita per i punti $f^n(x_0)$ che compongono l'orbita del generico punto x_0 . Si rende necessario dunque lo sviluppo di metodi qualitativi o grafici per determinare il comportamento delle orbite, specialmente nell'intorno di punti di interesse quali i punti fissi.

Uno dei più efficaci metodi di iterazione per determinare l'andamento (e la stabilità) delle orbite è il “*diagramma a ragnatela*”.

Anzitutto nel piano $(x(n) - x(n+1))$ si disegnano la curva $y = f(x)$ e la diagonale $y = x$ nello stesso grafico.

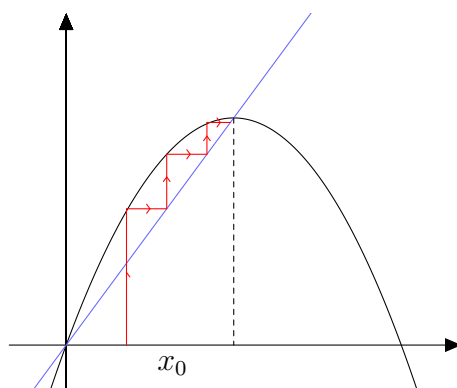


Figura 2.4: Il diagramma a ragnatela

Si parte da un punto iniziale x_0 (di cui si vuole conoscere l'orbita). In seguito ci si muove verticalmente finché non si incontra il grafico di f nel

punto $(x_0, f(x_0))$. Dopodiché ci si sposta orizzontalmente fino a incontrare la diagonale $y = x$ nel punto $(f(x_0), f(x_0))$. Questo determina $f(x_0)$ sull'asse x . Per trovare $f^2(x_0)$, ci si muove ancora verticalmente finché non si incontra il grafico di f nel punto $(f(x_0), f^2(x_0))$; poi ci si sposta orizzontalmente fino a trovare ancora la retta $y = x$ nel punto $(f^2(x_0), f^2(x_0))$. Continuando questo procedimento, si possono valutare tutti i punti dell'orbita del punto x_0 , ovvero l'insieme $O(x_0)$ (si veda la Figura 2.4).

Esempio 2 (La Mappa A Tenda). La *mappa a tenda* T è definita come segue

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \text{per } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Questa mappa si può scrivere anche nella forma

$$T(x) = 1 - 2 \left| x - \frac{1}{2} \right|. \quad (2.8)$$

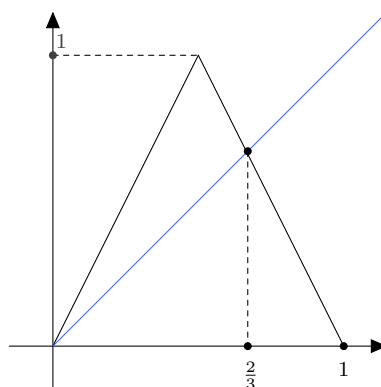


Figura 2.5: La mappa a tenda. La mappa presenta due punti di equilibrio $x_1^* = 0$ e $x_2^* = \frac{2}{3}$.

Si osservi che la mappa a tenda è una mappa lineare a tratti (si veda la Figura 2.5). Nonostante ciò, T possiede una dinamica piuttosto curiosa. Specificamente essa possiede punti periodici di *ogni* periodo, come si vedrà nella prova del teorema sulla coesistenza dei cicli.

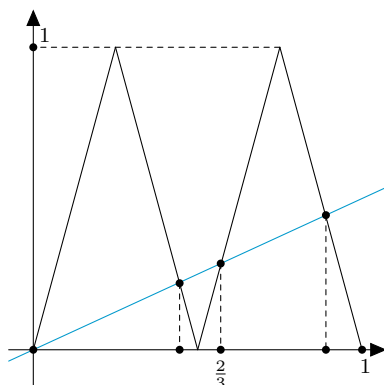


Figura 2.6: Escludendo i punti fissi di T dall'insieme dei punti fissi di T^2 , si ottengono i punti 2-periodici di T .

La mappa a tenda possiede numerose proprietà. Si può dimostrare [2] che un punto $b = \frac{r}{s}$ razionale con $b \in (0, 1)$ è punto periodico di T se e solo se r è un intero pari e s è un intero dispari. Inoltre per ispezione del grafico si verifica che T^n ha esattamente 2^n punti fissi in $(0, 1)$ (si vedano le Figure (2.6) e (2.7)). ■

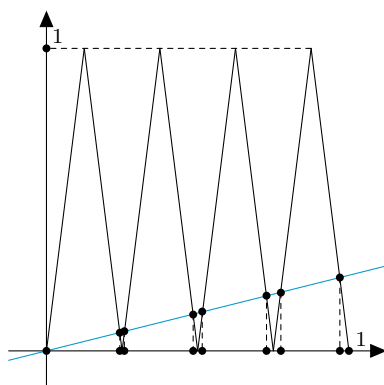


Figura 2.7: Escludendo i punti fissi di T e di T^2 dall'insieme dei punti fissi di T^3 , si ottengono i punti 3-periodici di T .

Enunciamo ora due utili lemmi che riguardano il periodo minimo di eventuali punti periodici.

Lemma 1. *Se $f^m(\bar{x}) = \bar{x}$, allora il periodo minimo di $\bar{x}$ divide m .*

Lemma 2. *Siano k, m, n ed s interi positivi. Allora valgono i seguenti enunciati:*

1. *Se $\bar{x}$ è punto periodico di f con periodo minimo m , allora è punto periodico di f^n con periodo minimo $\frac{m}{(m,n)}$, ove (m,n) è il massimo comun divisore tra m ed n .*
2. *Se $\bar{x}$ è punto periodico di f^n con periodo minimo k , allora è punto periodico di f con periodo minimo $\frac{kn}{s}$ ove s divide n ed è coprimo rispetto a k .*

Dimostrazione.

1. Sia t il periodo minimo di $\bar{x}$ sotto f^n . Allora m divide nt in quanto

$$\bar{x} = (f^n)^t(\bar{x}) = f^{nt}(\bar{x}).$$

Di conseguenza, dividendo ambo i membri per (m,n) , $\frac{m}{(m,n)}$ divide $\frac{n}{(m,n)} \cdot t$. Poiché $\frac{n}{(m,n)}$ e $\frac{m}{(m,n)}$ sono coprimi $\frac{m}{(m,n)}$ divide t . D'altra parte

$$(f^n)^{m/(m,n)}(\bar{x}) = (f^{m/(m,n)})^n(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Così, t divide $\frac{m}{(m,n)}$. Questo prova che $t = \frac{m}{(m,n)}$.

2. Poiché

$$\bar{x} = (f^n)^k(\bar{x}) = f^{nk}(\bar{x}),$$

il periodo minimo di $\bar{x}$ sotto f è $\frac{kn}{s}$ per qualche intero positivo s . Per quanto dimostrato in (1), $(\frac{kn}{s})/((\frac{kn}{s}), n) = k$. Così,

$$\frac{n}{s} = \left(\left(\frac{kn}{s} \right), n \right) = \left(k \left(\frac{n}{s} \right), n \left(\frac{s}{s} \right) \right) = \left(k \left(\frac{n}{s} \right), s \left(\frac{n}{s} \right) \right) = \left(\frac{n}{s} \right) (k, s).$$

Questo prova che s divide n e $(s, k) = 1$.

□

2.3 Intervalli, Coperture, Cicli

In questa sezione viene presentato il concetto di f -copertura e vengono dimostrate alcune semplici proprietà che ne derivano.

Definizione 5 (Copertura). Siano f una funzione continua reale di variabile reale e I, J intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$. L'intervallo I **f -copre** (o **copre**) l'intervallo J , se I appartiene al dominio di f e $f(I) \supseteq J$, ovvero se ogni punto di J è immagine di almeno un punto di I . Scriveremo in tal caso $I \xrightarrow{f} J$ o, quando non vi sia ambiguità circa la funzione, $I \rightarrow J$. Infine quando $f(I) = J$, si parlerà di **f -copertura esatta** (o **copertura esatta**) e si scriverà $I \rightsquigarrow J$.

Lemma 3 (Lemma Del Punto Fisso). Sia $I = [a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Se $I \xrightarrow{f} I$, allora esiste un punto fisso di f in I .

Dimostrazione. Dato che $I \rightarrow I$ devono esistere $c_1, c_2 \in I$ tali che

$$f(c_1) = a \leq c_1 \quad e \quad f(c_2) = b \geq c_2. \quad (2.8)$$

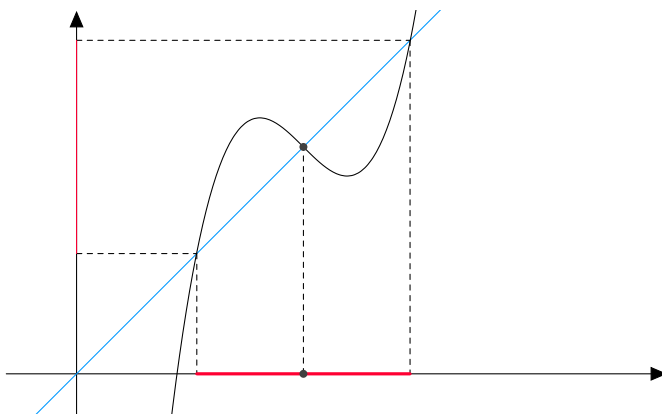


Figura 2.8: Il lemma del punto fisso.

Se $f(c_1) = c_1$ o $f(c_2) = c_2$, abbiamo finito poiché c_1 o c_2 sono per definizione punti fissi di f . Assumiamo dunque che

$$f(c_1) < c_1 \quad e \quad f(c_2) > c_2$$

e consideriamo ora la funzione continua $g(x) = f(x) - x$. Per quanto osservato sopra, $g(c_1) < 0$ e $g(c_2) > 0$. Per il Teorema 1, esiste x^* compreso tra c_1 e c_2 tale che $g(x^*) = 0$. Di conseguenza $f(x^*) = x^*$, così x^* è punto fisso di f . $\square$

Lemma 4 (Copertura Esatta). *Siano J e L sottointervalli chiusi di I con $J \xrightarrow{f} L$. Allora esiste un sottointervallo chiuso K di J tale che $K \mapsto J$.*

Dimostrazione. Sia $L = [a, b]$. Dato che $\{a, b\} \subset L \subset f(J)$ devono esistere (almeno) due punti $p, q \in J$ tali che

$$f(p) = a \quad \text{e} \quad f(q) = b$$

Se $p < q$, siano

$$\begin{aligned} c &= \max\{x \in [p, q] \mid f(x) = a\}; \\ d &= \min\{x \in [p, q] \mid f(x) = b\}. \end{aligned}$$

Se invece $q < p$, siano

$$\begin{aligned} c &= \max\{x \in [q, p] \mid f(x) = b\}; \\ d &= \min\{x \in [q, p] \mid f(x) = a\}. \end{aligned}$$

In ogni caso sia $K = [c, d]$. Chiaramente $f(K) = L$.

□

Definizione 6 (Ciclo). Siano $J_0, J_1, \dots, J_{n-1}, J_n$ sottointervalli chiusi di I con $J_n = J_0$ tali che $J_i \xrightarrow{f} J_{i+1}$ per $i = 0, 1, \dots, n-1$. Allora diremo che

$$J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0 \tag{2.8}$$

è un **ciclo** (o ***n*-ciclo**) di intervalli di lunghezza n .

In presenza di una *catena di coperture* del tipo $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1}$, si può sempre considerare un *grafo orientato* i cui vertici sono $J_0, J_1, \dots, J_{n-1}$ ed i cui archi orientati connettono J_r a J_s se $J_r \rightarrow J_s$. Tale rappresentazione è comoda perché il seguente Lemma ci permette di mettere in corrispondenza i cicli del grafo associato con i cicli di coperture.

Lemma 5 (Lemma dell' Itinerario). *Sia $J_0 \xrightarrow{f} J_1 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$ un ciclo di lunghezza n . Allora esiste un punto periodico $\bar{x}$ di f tale che:*

$$f^i(\bar{x}) \in J_i \quad \text{per} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad f^n(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Dimostrazione.

Sia $Q_n = J_0$. Posto che $J_{n-1} \rightarrow J_0 = Q_n$, esiste, per il Lemma 4, un sottointervallo chiuso Q_{n-1} di J_{n-1} tale che $Q_{n-1} \succrightarrow Q_n = J_0$. Lo stesso si può dire di J_{n-2} che per lo stesso motivo ha come sottointervallo Q_{n-2} tale che $Q_{n-2} \succrightarrow Q_{n-1}$. Iterando questo procedimento per ogni $i = 0, 1, \dots, n-1$, si ottiene un sottointervallo chiuso Q_i di J_i tale che $Q_i \succrightarrow Q_{i+1}$. Dunque si ha

$$Q_0 \succrightarrow Q_1 \succrightarrow \dots \succrightarrow Q_{n-1} \succrightarrow Q_n = J_0$$

e di conseguenza $f^i(Q_0) = Q_i$ per ogni $0 \leq i \leq n$. In particolare, $f^n(Q_0) = Q_n = J_0 \supset Q_0$. Per il Lemma 3, esiste un punto $\bar{x} \in Q_0 \subset J_0$ tale che $f^n(\bar{x}) = \bar{x}$. Dato che $\bar{x} \in Q_0$, si ottiene anche che $f^i(\bar{x}) \in f^i(Q_0) = Q_i \subset J_i$ per ogni $0 \leq i \leq n-1$. $\square$

Capitolo 3

Il teorema di Sharkovsky

In questo capitolo si enuncerà e proverà il teorema di Sharkovsky sulla coesistenza dei cicli, premettendo prima alcuni lemmi che ne faciliteranno la comprensione e la dimostrazione.

3.1 Lemmi preliminari

Si denoterà con $[a : b]$ l'intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ i cui estremi sono a e b , indipendentemente dal fatto che $a < b$ o $b < a$.

Lemma 6. *Se f ha un punto di periodo m con $m \geq 3$, allora f ha un punto di periodo 2.*

Lemma 7. *Se f ha un punto di periodo m con $m \geq 3$ dispari, allora f ha un punto di periodo $(m + 2)$.*

Lemma 8. *Se f ha un punto di periodo m con $m \geq 3$ dispari, allora f ha un punto di periodo 6 ed un punto di periodo $(2m)$.*

Dimostrazione.

Sia $P = \{x_i \mid 1 \leq i \leq m\}$, con $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, un'orbita di f di periodo m con $m \geq 3$.

Definiamo $x_s = \max\{x \in P \mid f(x) > x\}$. Allora

$$f(x_s) \geq x_{s+1} \quad \text{e} \quad f(x_{s+1}) \leq x_s. \quad (3.1)$$

Dunque $[x_s, x_{s+1}] \xrightarrow{f} [x_s, x_{s+1}]$, così per il Lemma 3 deve esistere un punto fisso z in $[x_s, x_{s+1}]$.

Se per ogni intero i tale che $1 \leq i \leq m-1$ ed $i \neq s$ i punti $f(x_i)$ ed $f(x_{i+1})$ stanno dalla stessa parte rispetto a z , allora $f([x_1, x_s] \cap P) \subset [x_{s+1}, x_m] \cap P$

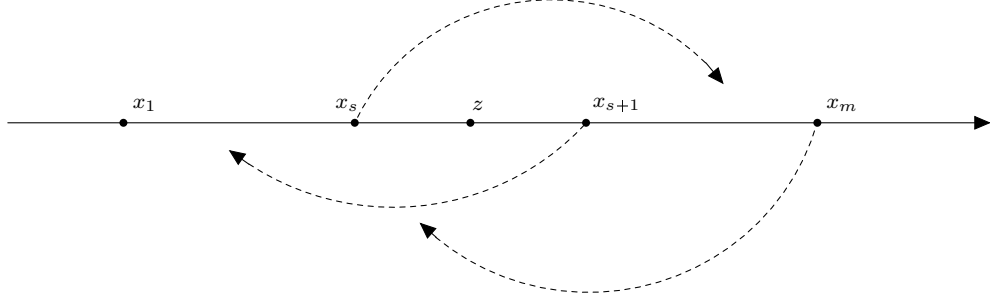


Figura 3.1: x_s è il punto più a destra dell'orbita il cui arco uscente punta verso destra nel diagramma.

e $f([x_{s+1}, x_m] \cap P) \subset [x_1, x_s] \cap P$. Poiché f è iniettiva su P (se così non fosse il ciclo sarebbe lungo meno di m), si ha che $f([x_1, x_s] \cap P) = [x_{s+1}, x_m] \cap P$ e $f([x_{s+1}, x_m] \cap P) = [x_1, x_s] \cap P$. Essendo $[x_1, x_s] \cap P \rightsquigarrow [x_{s+1}, x_m] \cap P$ e $[x_{s+1}, x_m] \cap P \rightsquigarrow [x_1, x_s] \cap P$, si ha

$$[x_1, x_s] \rightarrow [x_{s+1}, x_m] \rightarrow [x_1, x_s].$$

Applicando il Lemma 5 al ciclo $[x_1, x_s] \rightarrow [x_{s+1}, x_m] \rightarrow [x_1, x_s]$ si ottiene che f ha un punto di periodo 2.

Assumiamo ora che per qualche intero t tale che $1 \leq t \leq m-1$ e $t \neq s$ i punti $f(x_t)$ e $f(x_{t+1})$ stiano in lati opposti rispetto a z (questo deve necessariamente succedere se m è dispari).

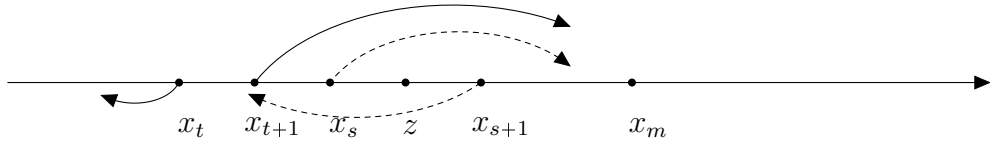


Figura 3.2: $f(x_t)$ e $f(x_{t+1})$ stanno in lati opposti rispetto a z .

Allora $[x_t, x_{t+1}] \xrightarrow{f} [x_s, x_{s+1}]$. Assumiamo senza perdita di generalità che $x_t < x_s$. Se $x_{s+1} \leq x_t$ la prova è simile. Sia q il *più piccolo* intero positivo tale che $f^q(x_s) \leq x_t$ (nel diagramma $f^q(x_s)$ è il primo punto a partire da sinistra la cui freccia “va più a sinistra” di x_t). Allora $2 \leq q \leq m - 1$, in quanto non vi sono punti fissi nell’orbita e poichè, essendo m il periodo dell’orbita periodica di periodo m , dopo m iterazioni $f^m(x_i) = x_i$ per ogni $1 \leq i \leq m$.

Per $i = 0, 1, \dots, q - 1$, definiamo $J_i = [z : f^i(x_s)]$. Dunque

$$J_0 = [z : f^0(x_s)] = [x_s, z]$$

$$J_1 = [z : f^1(x_s)] = [z, f(x_s)]$$

$$\vdots$$

Per ogni $n \geq m + 1$ consideriamo l’ n -ciclo

$$J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_{q-1} = [z : f^{q-1}(x_s)] \rightarrow [x_t, x_{t+1}] \rightarrow [x_s, x_{s+1}]^{n-(q+1)} \rightarrow J_0$$

che per il Lemma 5 conferma l’esistenza di un punto di periodo n per f . Questo prova il Lemma 7.

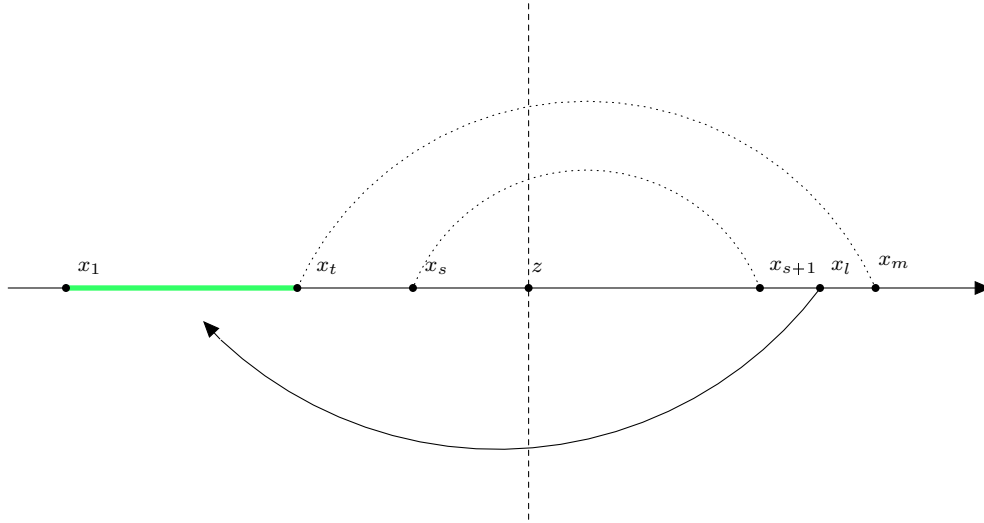


Figura 3.3: Esiste x_l con $s + 1 \leq l \leq m$ tale che $f(x_l) \leq x_t$.

D'altra parte, dato che $x_t < x_s$ e $f(x_s) \geq x_{s+1}$, si può assumere che t sia il più grande intero in $[1, s - 1]$ tale che $f(x_t) \leq x_s$. Così, $f(x_i) \geq x_{s+1}$ per ogni $t + 1 \leq i \leq s$.

Se fosse $f(x_i) \geq x_{t+1}$ per ogni $s+1 \leq i \leq m$, allora $f^n(x_s) \geq x_{t+1}$ per ogni $n \geq 1$, contraddicendo il fatto che $f^j(x_s) = x_t$ per qualche $1 \leq j \leq m-1$.

Dunque, deve esistere almeno un intero positivo l , con $s+1 \leq l \leq m$, tale che $f(x_l) \leq x_t$; sia l il più piccolo tra questi. Se fosse $x_{t+1} \leq f(x_i) \leq x_{l-1}$ per ogni $t+1 \leq i \leq l-1$, allora $f^n(x_s) \geq x_{t+1}$ per ogni $n \geq 1$, contraddicendo ancora il fatto che $f^j(x_s) = x_t$ per qualche $1 \leq j \leq m-1$.

Così, esiste un intero positivo k con $t+1 \leq k \leq l-1$ tale che $f(x_k) \geq x_l$.

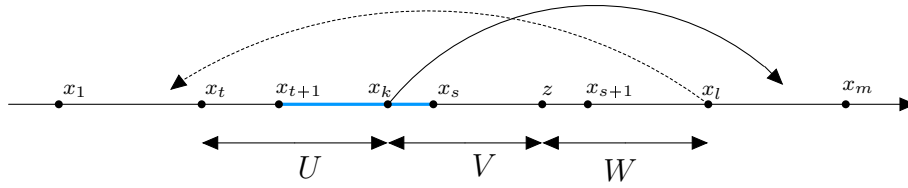


Figura 3.4: x_k . Caso $t+1 \leq k \leq s$.

Distinguiamo ora due casi: $t+1 \leq k \leq s$ oppure $s+1 \leq k \leq l-1$.

Nel caso in cui $t+1 \leq k \leq s$, siano $U = [x_t, x_k]$, $V = [x_k, z]$, $W = [z, x_l]$. Ricordando che

$$f(x_t) \leq x_s, \quad f(x_l) \leq x_t, \quad f(z) = z, \quad f(x_k) \geq x_l,$$

il grafo associato ha la forma $U \rightleftarrows V \rightleftarrows W$. Per ogni intero *pari* $n \geq 2$, si applica dunque il Lemma 5 all' n -ciclo

$$U \rightarrow (W \rightarrow V)^{\frac{n-2}{2}} \rightarrow W \rightarrow U$$

per stabilire l'esistenza di punti periodici di tutti i periodi pari, incluso il periodo 2, per f .

Se invece $s+1 \leq k \leq l-1$, applicando il Lemma 5 ai cicli

$$[x_{s+1}, x_k] \rightarrow ([x_k, x_l])^n \rightarrow [x_{s+1}, x_k], \quad n \geq 1,$$

si ottengono punti periodici di tutti i periodi ≥ 2 . Questo prova i Lemmi 6 e 8, dunque completa la dimostrazione dei Lemmi 6, 7 e 8.

□

3.2 Coesistenza di cicli

Definizione 7 (Ordinamento di Sharkovsky). Si definisce *ordinamento di Sharkovsky* dei numeri naturali:

$$\begin{array}{ll}
 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots & \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \\
 \text{interi dispari} & 2 \cdot \text{interi dispari} \\
 \\
 \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots & \dots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \dots \\
 2^2 \cdot \text{interi dispari} & 2^n \cdot \text{interi dispari} \\
 \\
 \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \triangleright 2^n \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2^1 \triangleright 1. \\
 & \text{potenze di 2}
 \end{array}$$

Esso esaurisce tutti i numeri naturali (ed è pertanto un ordinamento totale). In tale ordinamento vengono prima gli interi dispari e maggiori di 1, disposti secondo l'ordine naturale crescente, seguiti dagli interi dispari moltiplicati per il fattore 2, pure essi disposti secondo l'ordine naturale crescente, poi dagli interi dispari moltiplicati per il fattore 2^2 e disposti secondo l'ordine naturale crescente, etc. Ultime vengono le potenze di 2, disposte secondo l'ordine naturale decrescente.

Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare il teorema di Sharkovsky sulla coesistenza di cicli di una mappa continua da un intervallo in se stesso.

Teorema 2 (Coesistenza di Cicli). *I seguenti enunciati sono veri:*

1. *Se f ha un punto di periodo m e se $m \triangleright n$, allora f ha anche un punto di periodo n .*
2. *Per ogni intero positivo n , esiste una mappa continua $g : I \rightarrow I$ che ha un punto di periodo n , ma non ha punti di periodo m per ogni m tale che $m \triangleright n$.*

Dimostrazione. Se f ha punti di periodo m con $m \geq 3$ dispari, allora per il Lemma 7 f ha punti di periodo $(m+2)$ e per il Lemma 8 f ha punti di periodo $2 \cdot 3$.

Se f ha punti di periodo $2 \cdot m$ con $m \geq 3$ dispari, allora per il Lemma 2 f^2 ha punti di periodo $\frac{2 \cdot m}{(2 \cdot m, 2)} = m$. Per il Lemma 7, f^2 ha punti di periodo $(m+2)$, che implica per il Lemma 2 che f ha punti di periodo $(m+2)$ oppure punti di periodo $2 \cdot (m+2)$. In accordo a quanto dice il Lemma 8, se f ha punti di periodo $(m+2)$, allora ha punti di periodo $2 \cdot (m+2)$. In ogni caso f ha punti di periodo $2 \cdot (m+2)$. D'altronde poichè f^2 ha punti di periodo m , per il Lemma 8 f^2 ha punti di periodo $2 \cdot 3$, dunque per il Lemma 2, f ha punti di periodo $2^2 \cdot 3$.

Ora se f ha punti di periodo $2^k \cdot m$ con $m \geq 3$ dispari e $k \geq 2$, allora per il Lemma 2 $f^{2^{k-1}}$ ha punti di periodo $\frac{2^k \cdot m}{(2^k \cdot m, 2^{k-1})} = 2 \cdot m$. Per quanto provato in precedenza $f^{2^{k-1}}$ ha punti di periodo $2 \cdot (m+2)$ e $2^2 \cdot 3$. Perciò, per il Lemma 2, f ha punti di periodo $2^k \cdot (m+2)$ e $2^{k+1} \cdot 3$.

Di conseguenza, se f ha punti di periodo $2^i \cdot m$ con $m \geq 3$ dispari e $i \geq 0$, allora f^{2^i} ha punti di periodo m per il Lemma 2. Per ogni $l \geq i$, per il Lemma 2, $f^{2^l} = (f^{2^i})^{2^{l-i}}$ ha punti di periodo $\frac{m}{(m, 2^{l-i})} = m$. Per il Lemma 8, f^{2^l} ha punti di periodo 6. Dunque, $f^{2^{l+1}}$ ha punti di periodo 3 e dunque di periodo 2, per il Lemma 6. Questo implica che f ha punti di periodo 2^{l+2} per ogni $l \geq i \geq 0$.

Infine, se f ha punti di periodo 2^k per qualche $k \geq 2$, allora per il Lemma 2 $f^{2^{k-2}}$ ha punti di periodo 4, e così per il Lemma 6, ha punti di periodo 2. Dunque, f ha punti di periodo 2^{k-1} . Questo conclude il punto (1) del teorema.

Per provare il punto (2), è sufficiente assumere che $I = [0, 1]$. Consideriamo la mappa a tenda sull'intervallo I , già definita nell'esempio (2), ovvero

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \text{per } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

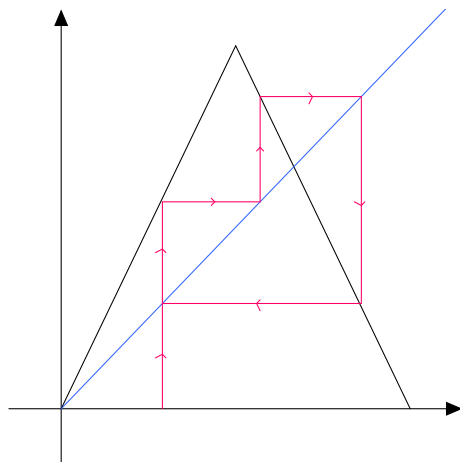


Figura 3.5: Il 3-ciclo $\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$ della mappa a tenda.

L'insieme $\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$ è un 3-ciclo di T , dunque, per quanto dimostrato nel punto (1) di questo teorema, l'insieme $Per(T)$ di tutti i possibili periodi dei cicli di T coincide con $\mathbb{N}$. Definiamo

$$T_\lambda(x) = \min(T(x), \lambda) \quad \forall \lambda, x \in I = [0, 1].$$

e denotiamo con $Const(T_\lambda)$ l'interno dell'insieme $\{x \in I = [0, 1] \mid T(x) \geq \lambda\}$ $\lambda\} = \{x \in I = [0, 1] \mid T_\lambda(x) = \lambda\}$. Chiaramente se $x \in I \setminus Const(T_\lambda)$, allora $T_\lambda(x) = T(x)$.

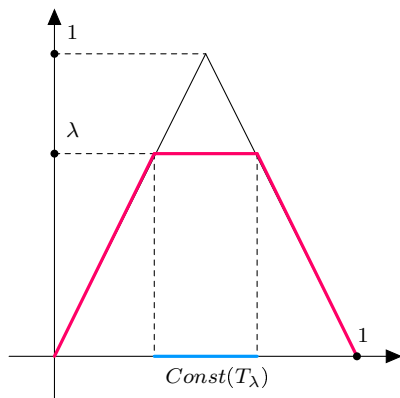


Figura 3.6: La mappa T_λ e l'insieme $Const(T_\lambda)$.

Si noti che $T_0 \equiv 0$ e $T_1 \equiv T$. Di conseguenza, $Per(T_1) = Per(T) = \mathbb{N}$ e $Per(T_0) = 1$. Mostriamo che quando si va da T_0 a T_1 al variare di λ in modo continuo, si passa attraverso tutti i possibili esempi di insieme $Per(T)$. Per fare ciò, si pone

$$\lambda_s = \min\{\max P \mid P \text{ è un } s\text{-ciclo di } T\}$$

e $g_s = T_{\lambda_s}$ per ogni $s \in \mathbb{N}$. Sia P il ciclo di g_s per cui $\lambda_s = \max P$. Per costruzione, $g_s|_P = T|_P$. Dunque, g_s ha il ciclo P di periodo s e $\{k \in \mathbb{N} \mid s \triangleright k\} \subset \text{Per}(g_s)$ per quanto dimostrato nella parte (1) del teorema. Sosteniamo che se $t \neq s$ e $t \in \text{Per}(g_s)$, allora $\lambda_t < \lambda_s$. Per provarlo, si osserva che se Q è un t -ciclo di g_s , allora $Q \cap \text{Const}(g_s) = \emptyset$ (in quanto $g_s(\text{Const}(g_s)) \in P$ e $P \cap Q = \emptyset$). Allora $T|_Q = g_s|_Q$ e $\max Q < \max P$. Questo prova la precedente affermazione. Una semplice conseguenza è che per ogni t, s tali che $t \triangleleft s$ si ha $\lambda_t < \lambda_s$.

Ora siamo pronti a mostrare che $\text{Per}(g_s) = \{k \in \mathbb{N} \mid s \triangleright k\}$ per ogni s . Infatti, se $t \in \text{Per}(g_s)$ e $s \triangleleft t$ si ha che $\lambda_t < \lambda_s < \lambda_t$; una contraddizione. Così si ottiene $\{k \in \mathbb{N} \mid s \triangleright k\} \supset \text{Per}(g_s)$ e poichè $\{k \in \mathbb{N} \mid s \triangleright k\} \subset \text{Per}(g_s)$, segue che $\text{Per}(g_s) = \{k \in \mathbb{N} \mid s \triangleright k\}$.

L'ultimo passo della prova è costruire un esempio di mappa che ha come insieme dei periodi $\{k \in \mathbb{N} \mid 2^\infty \triangleright k\} = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^\infty, \dots\}$. Poniamo allora $\lambda_{2^\infty} = \sup\{\lambda_{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $g_{2^\infty} = T_{\lambda_{2^\infty}}$. Dato che per ogni $n, m \geq 0$ e $q \geq 3$ dispari si ha che $\lambda_{2^n} < \lambda_{2^{n+1}} < \lambda_{3 \cdot 2^{m+1}} < \lambda_{q \cdot 2^m}$, si ottiene che $\lambda_{2^n} < \lambda_{2^\infty} < \lambda_{q \cdot 2^m}$. Allora $\text{Const}(g_{2^\infty}) \subset \text{Const}(g_{2^n})$ per ogni $n \geq 0$ e perciò, se Q è un ciclo di g_{2^n} per qualche n allora $g_{2^n}|_Q = g_{2^\infty}|_Q$. Dunque $\{k \in \mathbb{N} \mid 2^\infty \triangleright k\} \subset \text{Per}(2^\infty)$. D'altra parte, se $s \in \text{Per}(2^\infty)$ con una argomentazione simile a quanto stabilito sopra si ottiene $\lambda_s \leq \lambda_{2^\infty}$. Quindi, se s non è un potenza di due si ottiene $\lambda_s \leq \lambda_{2^\infty} < \lambda_s$; una contraddizione. Dunque, $\text{Per}(g_{2^\infty}) = \{k \in \mathbb{N} \mid 2^\infty \triangleright k\}$.

□

3.3 Corollari del teorema di Sharkovsky

In questa sezione si tratteranno alcune conseguenze del teorema di Sharkovsky, tra cui il teorema di Li-Yorke contenuto nel celebre articolo “Period three implies chaos” [7].

Come si vedrà nel prossimo esempio, non è difficile trovare mappe che hanno punti di periodo p e nessun periodo q con $q \triangleright p$.

Esempio 3 (Periodo 5 non implica periodo 3).

Questo esempio dimostra che la presenza di un punto di periodo 5 non implica la presenza di punto di periodo 3. Sia f una funzione lineare a tratti definita sull'intervallo $I^* = [1, 5]$ con $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$ e $f(5) = 1$, il cui grafico è mostrato in Figura (3.7).

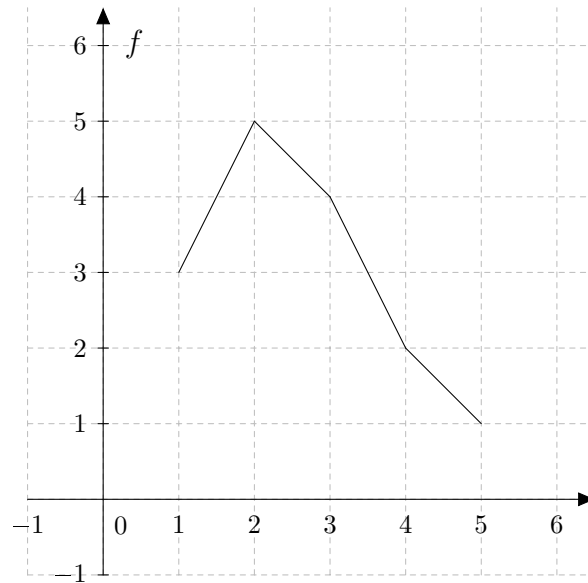


Figura 3.7: Periodo 5 non implica periodo 3.

È facile verificare che:

- $\frac{10}{3}$ è un punto fisso (o 1-periodico);
- $\frac{5}{3}$ è un punto 2-periodico;
- 1, 2, 3, 4, 5 sono punti 5-periodici.

Si può provare che f non ha punti 3-periodici. Poiché

$$f^3([1, 2]) = [2, 5], \quad f^3([2, 3]) = [3, 5], \quad f^3([4, 5]) = [1, 4],$$

f^3 non ha punti periodici in nessuno di questi intervalli. In aggiunta, poiché $f^3[3, 4] = [1, 5]$ e f^3 è monotona decrescente in $[3, 4]$, esiste un unico $\bar{x} \in [3, 4]$ tale che

$$f^3(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Dal momento che $f(x) = 10 - 2x$ in $[3, 4]$, $f(x)$ ha un unico punto fisso $x^* = \frac{10}{3}$ in $[3, 4]$. Poiché

$$f^3(x^*) = f^2(x^*) = f(x^*) = x^* = \bar{x},$$

$\bar{x}$ non è un punto 3-periodico. Perciò, f non ha punti 3-periodici. ■

Osservazione 3. Il teorema di Sharkovsky ha carattere strettamente *unidimensionale*. Non si può estendere nemmeno al cerchio unitario S^1 . Per esempio, la mappa $f : S^1 \rightarrow S^1$ definita da $f(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$ ha periodo 3 in ogni punto di S^1 , ma f non ha altri periodi.

Osservazione 4. Se f ha un punto periodico che non è una potenza di 2, allora f ha necessariamente *infiniti periodi*. Viceversa, se f ha un numero finito di periodi, allora essi sono tutti potenze di 2. Infine il periodo 3 è il più grande periodo nell'ordinamento di Sharkovsky. Dunque la presenza del periodo 3 implica l'esistenza di tutti gli altri periodi, come verrà provato nel seguito.

Teorema 3 (Li e Yorke [7]). *Sia $f : I \rightarrow I$ una mappa continua nell'intervallo I . Se esiste un punto periodico di periodo 3 in I , allora per ogni $k = 1, 2, \dots$ esiste un punto periodico in I avente periodo k .*

Dimostrazione. Supponiamo che f abbia un 3-ciclo $\{x, f(x), f^2(x)\}$. Allora possiamo rinominare i punti del ciclo di modo che sia $\{a, b = f(a), c = f(b)\}$ con $a < b < c$ oppure $a > b > c$. Se fosse per esempio $x < f^2(x) < f(x)$, si pone $a = f(x)$, $b = f(a)$, $c = f^2(a)$ avendo ottenuto così $a > b > c$. Dunque non è restrittivo assumere che $a < b < c$. Definiamo $J = [a, b]$ e $L = [b, c]$.

Non è difficile verificare che $J \xrightarrow{f} L$, $L \xrightarrow{f} J \cup L$ (si veda la Figura (3.8)). Possiamo riassumere il tutto dicendo che il grafo associato ha la forma $J \rightrightarrows L \hookrightarrow$. Questo significa che per ogni k è possibile considerare il seguente ciclo:

$$L \rightarrow \underbrace{L \rightarrow \dots \rightarrow L}_{(k-2)} \rightarrow J \rightarrow L$$

di lunghezza k . Applicando il Lemma 5 al ciclo precedente esiste un punto k -periodico di f per ogni $k \in \mathbb{N}$. □

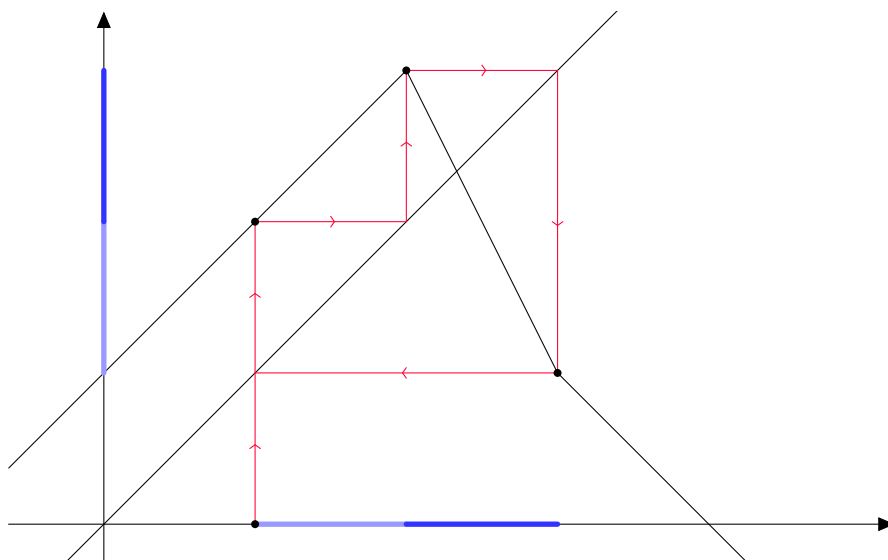


Figura 3.8: 3-ciclo.

Questo risultato stimolò Li e Yorke ad introdurre la nozione di “*caos*” in matematica. Gli esempi più comuni di sistema caotico includono il moto turbolento di un fluido, la dinamica di una popolazione, i sistemi economici, le irregolarità nel battito cardiaco etc. Questi sistemi condividono la proprietà di avere una alta sensibilità alle condizioni iniziali. In altre parole, un cambiamento molto piccolo nei valori iniziali (dovuto ad esempio al rumore) si ingigantisce al punto che l’andamento predetto del sistema non assomiglia per niente a quello reale.

Comportamenti caotici si riscontrano non solo nei sistemi discreti unidimensionali, ma anche in sistemi sia a tempo continuo sia multidimensionali. Tra gli esempi più interessanti compare certamente quello del meteorologo e matematico Edward Lorenz [14]. Nel suo studio sulle previsioni del tempo atmosferico, concluse che il meteo è imprevedibile, anche se deterministico. In effetti le *equazioni di Lorenz* costituiscono un sistema caotico, dunque le previsioni a lungo termine non hanno alcun fondamento scientifico. Questo è dovuto al fatto che il meteo ha una forte sensibilità alle condizioni iniziali. Lorenz chiamò questa dilatazione degli errori nelle previsioni meteorologiche il “*butterfly effect*”, perché metaforicamente il battito d’ali di una farfalla in Brasile può causare un tornado in Texas molte settimane dopo.

Per completezza nel seguito si illustra una tra le possibili definizioni di mappa *caotica*. Per approfondire i concetti di funzione *sensibile alle condizioni iniziali* e di funzione *topologicamente transitiva* si rimanda a testi

specifici, come [1] e [2].

Definizione 8. Sia V un insieme. La mappa $f : V \rightarrow V$ si dice **caotica** su V se

1. f ha dipendenza sensibile alle condizioni iniziali.
2. f è topologicamente transitiva.
3. L'insieme dei suoi punti periodici P è denso in V .

Riassumendo, una mappa caotica possiede tre ingredienti fondamentali: imprevedibilità, indecomponibilità ed un elemento di regolarità. Un sistema caotico è imprevedibile, a causa della sensibilità alle condizioni iniziali. Non può essere spezzato o decomposto in due sottosistemi che non interagiscono sotto f , per la transitività topologica. Nella nebbia di questo comportamento casuale, si ha tuttavia un elemento di regolarità: i punti periodici sono densi.

Capitolo 4

Note conclusive

La teoria del caos ha già prodotto risultati sorprendenti, dall'*attrattore di Lorenz*, alla *costante di Feigenbaum*, al *teorema di Sharkovsky*. La bellezza di quest'ultimo risultato risiede sia nella sobrietà dell'enunciato, sia nel fatto che rivela la presenza di ordine nel disordine, armonia nel caos. Dopo avere affrontato alcuni argomenti preliminari, in questo elaborato abbiamo analizzato gli aspetti più strani del teorema sulla coesistenza dei cicli, come l'ordinamento di Sharkovsky dei numeri naturali, ed alcune conseguenze, come il teorema di Li-Yorke.

Nel futuro della Teoria del Caos vi sono applicazioni alle discipline più disparate dalla crittografia, all'ecologia, ai laser. Riguardo lo studio dei sistemi non lineari ci si aspetta ancora molto dall'attività di ricerca nel settore. Secondo Feigenbaum [5], uno dei massimi esponenti di questo ambito, esistono "*strutture nei sistemi non lineari che sono sempre le stesse*": è sufficiente "*osservarle nel modo giusto*".

Bibliografia

- [1] Robert L. Devaney, (2003), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd Edition*, Westview Press., ISBN 0-8133-4085-3.
- [2] Saber N. Elaydi, (1999), *Discrete Chaos*, Chapman & Hall/CRC, ISBN 1584885920.
- [3] A. N. Sharkovsky, S.F. Kolyada, A.G. Sivak, V.V. Fedorenko, (2010), *Dynamics of One-Dimensional Maps, Mathematics and Its Applications*, Springer, Dordrecht.
- [4] Lluís Alsedà, Jaume Llibre, Michał Misiurewicz, (2000), *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One, Second Edition*, World Scientific (Advanced Series in Nonlinear Dynamics, vol. 5), Singapore.
- [5] James Gleick, (1987), *Chaos. Making a New Science*, Penguin, New York.
- [6] G.H. Hardy, (1940), *A Mathematician's Apology*, University Press, Cambridge
- [7] Tien-Yien Li and James A. Yorke, *Period Three Implies Chaos*, The American Mathematical Monthly vol. **82**, pp. 985 - 92, (1975).
- [8] Krzysztof Ciesielski and Zdzisław Pogoda, *On Ordering the Natural Numbers, or, The Sharkovski Theorem*, The American Mathematical Monthly vol. **115**, No. **2**, pp. 159-165, (Feb., 2008).
- [9] Keith Burns and Boris Hasselblatt, *The Sharkovsky Theorem: A Natural Direct Proof*, The American Mathematical Monthly vol. **118**, No. **3**, pp. 229-244, (March 2011).
- [10] A.N. Sharkovsky, *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukrainian Mathematical Journal vol. **61-71**, pp. 229-244, (1964).

- [11] L. Alsedà, J. Llibre, S. Kolyada, and L. Snoha, *Entropy and periodic points for transitive maps*, TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY vol. **351**, pp. 1551-1573, (April 1999).
- [12] S. F. Kolyada, *Li-Yorke Sensitivity and other concepts of chaos*, Ukrainian Mathematical Journal vol. **56**, No.8, pp. 1242-1257, (2004).
- [13] Xun-Cheng Huang, *From Intermediate Value Theorem To Chaos*, Mathematics Magazine vol. **65**, No.2, pp. 91-103, (1992).
- [14] Edward N. Lorenz, *The problem of deducing the climate from the governing equations*, Tellus vol. **XVI**, No.1, pp. 1-11, (1964).
- [15] Alejo Blaya and Víctor Jiménez López, *Is Trivial Dynamics That Trivial?*, The American Mathematical Monthly vol. **113**, No. 2, pp. 109-133, (Feb., 2006).
- [16] Chun-Hung Hsu and Ming-Chia Li, *Transitivity Implies Period Six: A Simple Proof*, The American Mathematical Monthly vol. **109**, No. 9, pp. 840-843, (Nov., 2002).
- [17] P. Štefan, *A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphisms of the Real Line*, Communications in Mathematical Physics, Volume 54, Issue 3, pp.237-248 vol. **54**, Issue **3**, pp. 237-248, (1977).
- [18] Bau-Sen Du, *A collection of simple proofs of Sharkovsky's theorem*, arXiv e-print math/0703592v3.
- [19] Bau-Sen Du, *A Simple Proof of Sharkovsky's Theorem Revisited*, arXiv e-print math/0606280v1.
- [20] E. Fornasini, *Dispensa per il corso di Teoria dei Sistemi*, (2010).