UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÁ DI INGEGNERIA

TESI DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
(Laurea triennale DM 270/04 – indirizzo informazione)

SVILUPPO IN AMBIENTE MATLAB/SIMULINK DI UN SISTEMA DI CONTROLLO PER SOSPENSIONI ATTIVE.

Relatore:Prof. Alessandro Beghi

Laureando:ENRICO FRANZON

ANNO ACCADEMICO 2011/2012

Indice

Introduzione

Lo scopo della tesina è di approfondire le conoscenza acquisite nel corso di Controlli Automatici riguardo l'implementazione di sistemi retroazionati in grado da garantire il controllo su un determinato sistema fisico che modelli con un certo grado di libertà una situazione reale. La mia tesi prevede l'utilizzo di Matlab e dello strumento Simulink utili per avere un riscontro grafico in modo da avere un riscontro visivo di ciò che viene fatto per via teorica, avendo così la possibilità di verificare se le specifiche di partenza sono rispettate o meno.
Visto la natura della tesina si è preferito dare spazio ai grafici e agli schemi simulink che rappresentano i vari passi del processo realizzativo del controllore. Quest'ultimo è stato sviluppato seguendo 3 diverse modalità : la prima prevede la determinazione dei parametri caratteristici del controllore PID, la seconda si basa sullo studio del luogo delle radici, mentre la terza utilizza lo studio in frequenza. Infine si è dato spazio allo studio del problema tramite lo strumento Simulink che ci fornisce risultati molto simili a quelli ottenuti nelle varie metodologie di progetto del controllore viste prima.

Descrizione generale del problema

L'Ingegneria dell'Automazione, o nello specifico l'Automazione, è un insieme di tecniche atte a sostituire l'intervento umano, o a migliorarne l'efficienza, nella realizzazione di dispositivi di varia natura e di impianti.
Una disciplina importante nel ramo dell'Automazione è costituita dai Controlli Automatici che si occupa dello studio e sviluppo di dispositivi, ad esempio regolatori, controllori e dispositivi di controllo, mediante i quali si riesce a fare variare le grandezze liberamente manipolabili di un sistema che viene detto Sistema Controllato**,** in modo che esso subisca l'evoluzione nel tempo migliore possibile.
Attualmente l'enorme capacità di calcolo dei moderni calcolatori ha portato ad un enorme sviluppo di questa disciplina in due diverse direzioni:

1. La velocità dei calcolatori moderni ha reso possibile il loro utilizzo come controllori, con conseguenti enormi vantaggi in termini di flessibilità e con costi abbastanza limitati.
2. Attraverso il calcolatore è oggi possibile utilizzare sofisticate metodologie per il progetto di leggi di controllo che permettono di ottenere elevate prestazioni. Vi è inoltre oggi la possibilità di verificare l'efficacia di una tecnica di controllo senza provarla sperimentalmente, ma attraverso simulazioni al calcolatore.

Controllare un apparato significa farlo evolvere secondo delle regole pre-assegnate. Di conseguenza gli elementi di partenza del problema del controllo sono:

1. un apparato da controllare;
2. delle regole di funzionamento o specifiche di controllo.

Nell'ambito dei veicoli stradali i Controlli trovano ampio spazio ed impiego ad esempio per il controllo di posizione e velocità, il controllo di trazione molto utile nei motocicli che impedisce il pattinamento delle ruote motrici nei veicoli oppure il controllo di sospensioni per gli autoveicoli.
Gli autoveicoli come automobili e autobus, sono dotati di un sistema di sospensioni che, oltre a sorreggere lo chassis del veicolo, deve isolarlo dalle irregolarità del terreno migliorando il più possibile il comfort dei passeggeri.
Le sospensioni mirano a limitare le accelerazioni verticali della parte soprastante le ruote quando il veicolo transita su un terreno stradale che presenta delle irregolarità.
Molti veicoli impiegano delle sospensioni di tipo passivo**,** che sono le più semplici ed economiche e per questo sono le più usate nei veicoli a scopo commerciale. Esse sono composte da varie componenti tra cui un ammortizzatore detto comunemente molla e uno smorzatore di tipo viscoso in parallelo, i cui parametri sono fissati e scelti dalla casa costruttrice in modo da ottenere un compromesso tra il comfort di marcia e la manovrabilità del veicolo, in base alla tipologia e allo scopo del veicolo che si vuole realizzare. Sospensioni troppo "morbide" riescono a migliorare molto il comfort dei passeggeri in quanto possono deformarsi molto

rapidamente assorbendo, e quindi compensando, le asperità e le brusche variazioni di livello del fondo stradale rischiando però di ridurre la tenuta di strada a causa delle ampie oscillazioni verticali del veicolo e delle conseguenti ampie variazioni della forza di contatto tra pneumatico e strada.
In aggiunta quando la macchina accelera o decelera, oppure percorre una curva, si generano sul veicolo delle forze che portano a movimenti di "pitch" e "roll" (rispettivamente "beccheggio" simile al movimento delle barche in mare o degli aerei, e "fluttuazione verticale" simile al movimento verticale di una trave di legno su un perno centrale) al quale le sospensioni offrono poca resistenza. Viceversa una taratura troppo rigida garantisce migliore aderenza alla strada, ma provoca un aumento delle sollecitazioni verticali sulla parte superiore del veicolo diminuendo il comfort di marcia.
Il problema del miglioramento del comfort di marcia viene valutato in termini della minimizzazione delle accelerazioni verticali del veicolo. Questo problema, comunemente detto problema dell'handling o talvolta indicato come "controllo dell'assetto", viene posto in modo da ottenere il giusto equilibrio tra minimizzazione delle fluttuazioni della forza di contatto tra pneumatico e strada, e mantenere costante la quota rispetto al suolo delle masse sospese nonostante siano presenti forze di varia natura (aerodinamica, trasferimenti di carico, ecc...) che agiscono sulla carrozzeria in frenata, in accelerazione e in curva. Ovviamente si vorrebbe simultaneamente che le sospensioni fossero sia "morbide" verso le asperità del terreno che "rigide" nei confronti di forze esterne e inerziali. E' chiaro che queste due specifiche sono in contrasto tra di loro e una soluzione intermedia risulta quindi necessaria. Una sintesi efficace si traduce pertanto nell'identificazione di un buon compromesso tra le due specifiche.
Passando nello specifico è interessante vedere come viene realizzato un sistema di sospensioni di un veicolo, in questo caso di un autobus, per vederne il modello matematico, le equazioni in gioco e le soluzioni pratiche adottate per limitare quanto più possibile lo scomfort dovuto alle asperità del fondo stradale.

CAPITOLO 1:
1.1 Modello matematico della sospensione

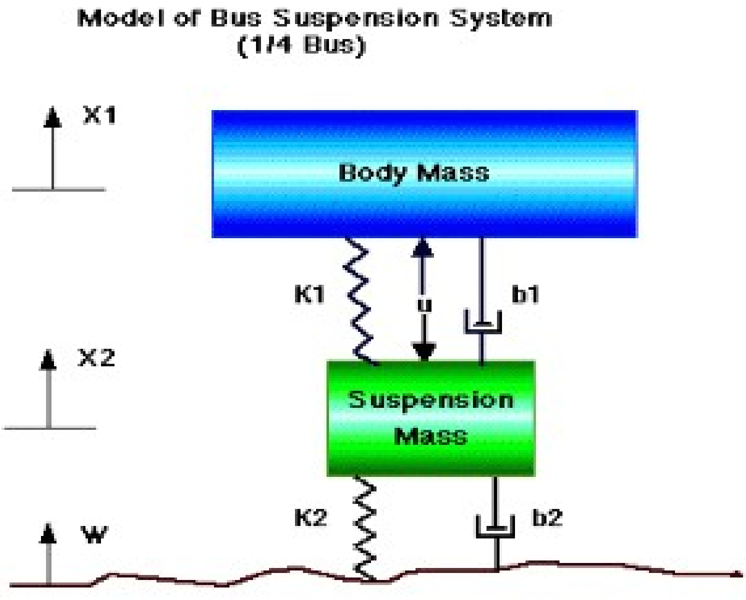
Una descrizione quantitativa dell'apparato da controllare è chiamata modello matematico. Determinare un modello matematico consiste per prima cosa nell'individuare le grandezze che riteniamo più significative per la descrizione dell'apparato e nel determinare inoltre un'equazione che lega tali grandezze. Le grandezze ritenute significative per la descrizione dell'apparato sono dette le **variabili del modello** e sono rappresentate matematicamente da funzioni del tempo (segnali). Le variabili del modello sono suddivisibili in tre categorie:

1. variabili d'ingresso
2. variabili di disturbo
3. variabili d'uscita

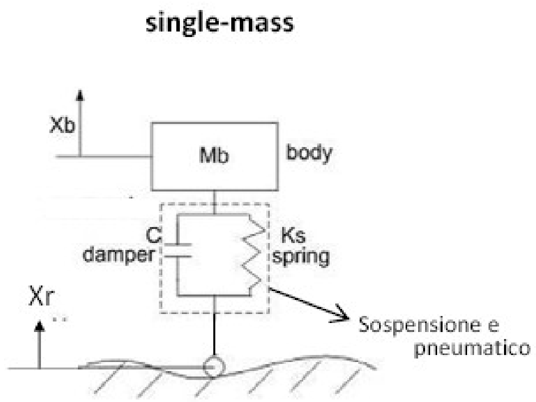
Le **variabili d'ingresso** sono le variabili del modello che possiamo manipolare il cui andamento può essere impostato nella maniera più opportuna. Le **variabili di disturbo** sono variabili il cui andamento viene imposto esternamente al sistema da controllare, ma che evolvono autonomamente. Le **variabili d'uscita** sono le variabili il cui andamento è invece fissato dal modello a partire dalle variabili di ingresso e di disturbo. Tutte queste variabili influiscono nella definizione del modello matematico per il problema specifico.
Vi sono diverse categorie di modelli matematici che possono essere utilizzati per realizzare il sistema di sospensioni di un veicolo e la scelta del particolare modello dipende dal fine e dalle informazioni che si vuole ricavarne. Nel veicolo ci sono moltissime componenti che interagiscono tra loro in ogni momento; alcuni dei modelli presenti sono:

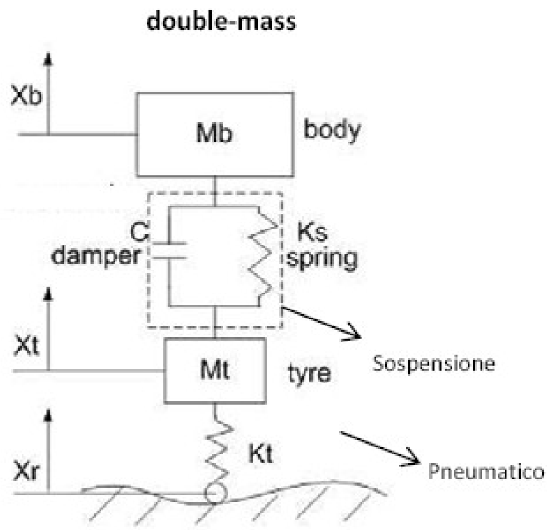
- Modelli “Quarter-Car”
- Modelli “Half-Car”
- Modelli “Full-Car”

Il modello “Quarter-car” è molto utile e semplificativo in quanto descrive la dinamica verticale di un quarto dell'intero veicolo, concentrando l'analisi del problema su una sola componente ruota-sistema di sospensioni senza considerare le mutue interazioni; questa semplificazione potrebbe sembrare troppo riduttiva per un sistema che a prima vista sembra complicato da realizzare, però permette di studiare esclusivamente movimenti traslatori verticali (heave) e non si possono caratterizzare i moti di rollio (roll), beccheggio (pitch) e imbardata che risultano comunque essere deboli in condizioni di accelerazioni modeste e di marcia rettilinea.
Un grafico del sistema è riportato sotto. Le variabili X_1 ed X_2 rappresentano rispettivamente le quote, rispetto ad un asse orizzontale di riferimento, del baricentro della massa sospesa e di quella non sospesa, mentre W descrive l'andamento irregolare del fondo stradale; le costanti K_1 e K_2 rappresentano rispettivamente la costante elastica che tiene conto della elasticità del pneumatico e la costante elastica che tiene conto della elasticità della sospensione. Infine b_1 e b_2 rappresentano rispettivamente il coefficiente di smorzamento della sospensione e dello pneumatico.



Esiste una ulteriore classificazione dei modelli; il modello presentato precedentemente mostra in modo separato la massa sospesa e non sospesa per mezzo di due elementi separati. Queste tipologie di modelli vengono chiamati di tipo “double mass”. C'è la possibilità di utilizzare una rappresentazione ancora più semplificativa delle sospensioni, che ingloba le due masse in un unico elemento ed include l'elasticità dello pneumatico nella molla della sospensione Ks, come rappresentato sotto. Questa tipologia di modello viene detta “single mass”; Mb definisce ora sia la massa di un quarto dell’intera cassa dei veicolo sia la massa associata all’insieme sospensione-ruota; la costante Ks tiene ora conto sia della costante elastica della sospensione che dell’elasticità del pneumatico.





Come dati indicativi per la descrizione del sistema, considerando la prima rappresentazione grafica, abbiamo:

- massa del corpo (m_1) = 2500 kg
- massa della sospensione (m_2) = 320 kg
- costante elastica della sospensione del sistema (k_1) = 80,000 N/m

- costante elastica di ruote e pneumatici (k_2) = 500,000 N/m
- costante di smorzamento del sistema di sospensione (b_1) = 350 Ns/m
- costante di smorzamento di ruote e pneumatici (b_2) = 15,020 Ns/m
- controllo di forza (u) = forza del controllore che ci accingiamo a progettare.

1.2 Equazioni del moto

Le equazioni del moto che interessano il sistema devono tenere conto di tutte le forze in gioco con il rispettivo segno che viene determinato in base al contributo della forza. Il disturbo dovuto alla strada (W) verrà simulato da un ingresso a gradino; questo ingresso può rappresentare il bus che esce per esempio da una buca, oppure dei sobbalzi dovuti ad un fondo stradale irregolare . L'idea è di progettare un controllore in retroazione in modo che l'uscita (X_1-X_2) abbia una sovra-elongazione inferiore al 5% e un tempo di assestamento inferiore a 5 secondi. Ad esempio, se l'autobus fa un sobbalzo di 10 cm, la massa del bus deve oscillare entro un intervallo di + / - 5 mm e tornare ad un regolare regime entro 5 secondi.
Considerando le relazioni fisiche interagenti nel sistema otteniamo le seguenti equazioni del moto:

$$M_1 \ddot{X}_1 = -b_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - K_1(X_1 - X_2) + U$$

$$M_2 \ddot{X}_2 = b_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + K_1(X_1 - X_2) + b_2(\dot{W} - \dot{X}_2) + K_2(W - X_2) - U$$

La prima equazione descrive il movimento della massa del bus; l'accelerazione del corpo del bus deve essere uguale alla risultante di tutte le forze interagenti: essa è uguale all'effetto della forza dovuta allo smorzatore b_1 che è in funzione della distanza (X_1-X_2), alla forza esercitata dalla molla indicata dal prodotto tra costante elastica K_1 e distanza (X_1-X_2) ed infine da U ossia l'ingresso a gradino, il quale agisce sul corpo del bus e che indica la presenza sul fondo stradale di asperità.

La seconda equazione descrive il movimento della sospensione; l'accelerazione del corpo della sospensione deve essere uguale alla risultante di tutte le forze interagenti: essa è uguale all'effetto della forza dovuta allo smorzatore b_1 che in funzione della distanza (X_1-X_2), alla forza esercitata dalla molla indicata dal prodotto tra costante elastica K_1 e distanza (X_1-X_2), alla forza esercitata dalla seconda molla indicata dal prodotto tra costante elastica K_2 e distanza (W-X_2), alla forza dovuta allo smorzatore b_2 che è in funzione della distanza (W-X_2) ed infine da U ossia l'ingresso a gradino che come nella prima equazione indica la presenza sul fondo stradale di asperità.
I segni dei contributi delle forze in gioco sono da considerarsi positivi o negativi in base al loro contributo pro o contro al movimento del corpo del bus e della sospensione.

Le equazioni dinamiche del moto possono essere espresse sotto forma di funzioni di trasferimento tramite la trasformata di Laplace; possiamo ricavare in forma matriciale X_1 e X_2 ; riscrivendo le due equazioni del moto che risultano dipendere da (s), in modo quadratico o lineare in base all'indice di derivazione presente sulle incognite X_1 ed X_2 che vogliamo ricavare, e tramite alcuni calcoli otteniamo:

$$(M_1 s^2 + b_1 s + K_1) X_1(s) - (b_1 s + K_1) X_2(s) = U(s)$$

$$-(b_1 s + K_1) X_1(s) + (M_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + (K_1 + K_2)) X_2(s) = (b_2 s + K_2) W(s) - U(s)$$

In forma matriciale ottengo:

$$\begin{bmatrix}(M_1 s^2+b_1 s+K_1) & -(b_1 s+K_1)\\ -(b_1 s+K_1) & (M_2 s^2+(b_1+b_2)s+(K_1+K_2))\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U(s)\\ (b_2 s+K_2)W(s)-U(s)\end{bmatrix}$$

Per semplificare i calcoli facciamo alcune sostituzioni:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}(M_1 s^2+b_1 s+K_1) & -(b_1 s+K_1)\\ -(b_1 s+K_1) & (M_2 s^2+(b_1+b_2)s+(K_1+K_2))\end{bmatrix}$$

$$\Delta=\ det\begin{bmatrix}(M_1 s^2+b_1 s+K_1) & -(b_1 s+K_1)\\ -(b_1 s+K_1) & (M_2 s^2+(b_1+b_2)s+(K_1+K_2))\end{bmatrix}$$

oppure

$$\Delta=\ (M_1 s^2+b_1 s+K_1)*(M_2 s^2+(b_1+b_2)s+(K_1+K_2))-(b_1 s+K_1)*(b_1 s+K_1)$$

ottenendo così le incognite X_1 e X_2:

$$\begin{bmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}(M_2 s^2+(b_1+b_2)s+(K_1+K_2)) & (b_1 s+K_1)\\ (b_1 s+K_1) & (M_1 s^2+b_1 s+K_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U(s)\\ (b_2 s+K_2)W(s)-U(s)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}(M_2 s^2+b_2 s+K_2) & (b_1 b_2 s^2+(b_1 K_2)s+K_1 K_2)\\ -M_1 s^2 & (M_1 b_2 s^3+(M_1 K_2+b_1 b_2)s^2+(b_1 K_2+b_2 K_1)s+K_1 K_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U(s)\\ W(s)\end{bmatrix}$$

Molte volte risulta utile conoscere la funzione di trasferimento. Una **funzione di trasferimento** è una funzione di rete che rappresenta matematicamente la relazione tra l'ingresso di un sistema dinamico lineare tempo invariante e la risposta del sistema stesso; una volta che si conosce, si può modificare il sistema ed andare ad influire quindi sul suo comportamento e sulle sue prestazioni; se vogliamo considerare solamente il controllo dell'input dobbiamo porre a zero i disturbi, quindi W(s) = 0 ottenendo così la relativa funzione di trasferimento $G_1(s)$:

$$G_1(s)=\frac{X_1(s)-X_2(s)}{U(s)}=\frac{(M_1+M_2)s^2+b_2 s+K_2}{\Delta}$$

Se vogliamo invece considerare solamente i disturbi esterni dobbiamo porre a zero il controllo d'ingresso, quindi U(s) = 0 ottenendo così l'altra funzione d'ingresso $G_2(s)$:

$$G_2(s)=\frac{X_1(s)-X_2(s)}{W(s)}=\frac{-M_1 b_2 s^2-M_1 K_2 s^2}{\Delta}$$

CAPITOLO 2:
2.1 Strategie di controllo

Esistono vari modi per controllare un sistema; i due principali sono il controllo in catena aperta (Feedforward) e il controllo a catena chiusa o retroazione (Feedback).
Nel controllo in catena aperta si cerca di soddisfare le specifiche di controllo attraverso il progetto di un controllore che genera l'ingresso di controllo a partire dalla conoscenza del modello e dell'andamento dell'ingresso. Se il sistema da controllare è affetto da disturbo e se tale disturbo può essere misurato, anche queste misure possono essere utilizzate nel calcolo dell'ingresso da applicare. Questa strategia di controllo è detta a catena aperta, perché in questo caso l'ingresso è deciso a priori e non viene modificato a seconda del valore reale dell'uscita.
Nel controllo in catena chiusa, il controllo viene effettuato comparando istante per istante l'ingresso e l'uscita e agendo sul sistema da controllare solo se si verificano delle differenze tra i due andamenti; il controllore sarà allora un sistema che a partire da un errore presente tra ingresso e uscita genera il segnale di controllo in modo tale da compensare tale errore. Questa strategia di controllo è detta a catena chiusa perché in questo caso, oltre ad avere che l'uscita dipende dall'ingresso, si ha anche che l'ingresso dipende dall'uscita.

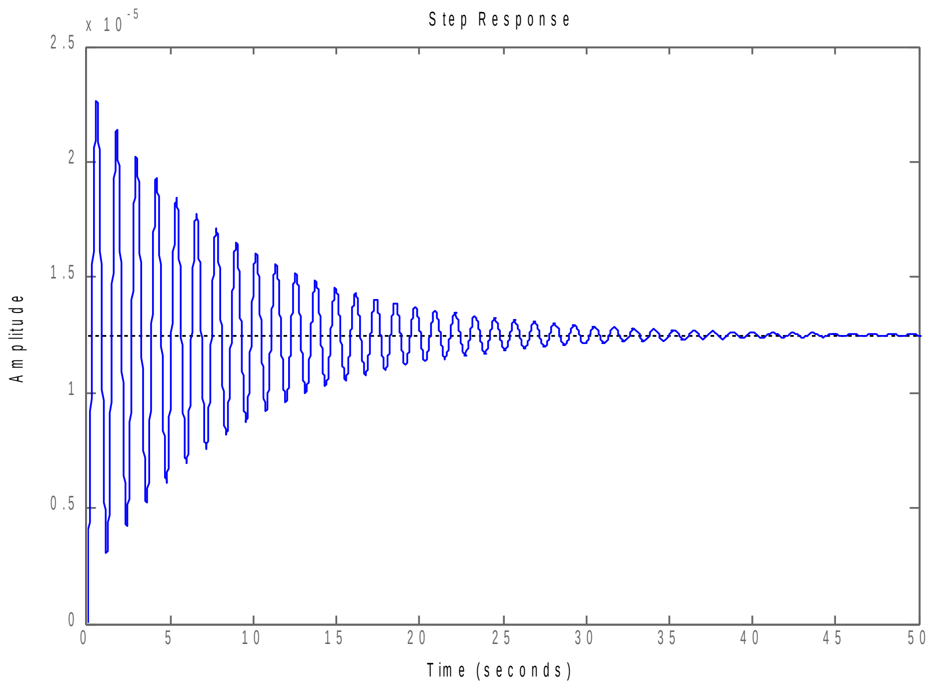
2.2 Analisi dinamica del sistema in catena aperta

Uno strumento molto utile che si presta a problemi di controllo è Matlab; questo software permette di emulare il nostro sistema di sospensioni ed inoltre ci permette di visionare tramite grafici l'oscillazione del sistema bus-sospensione; tramite poche righe di codice possiamo descrivere le due funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$ per poi studiarne l'andamento:

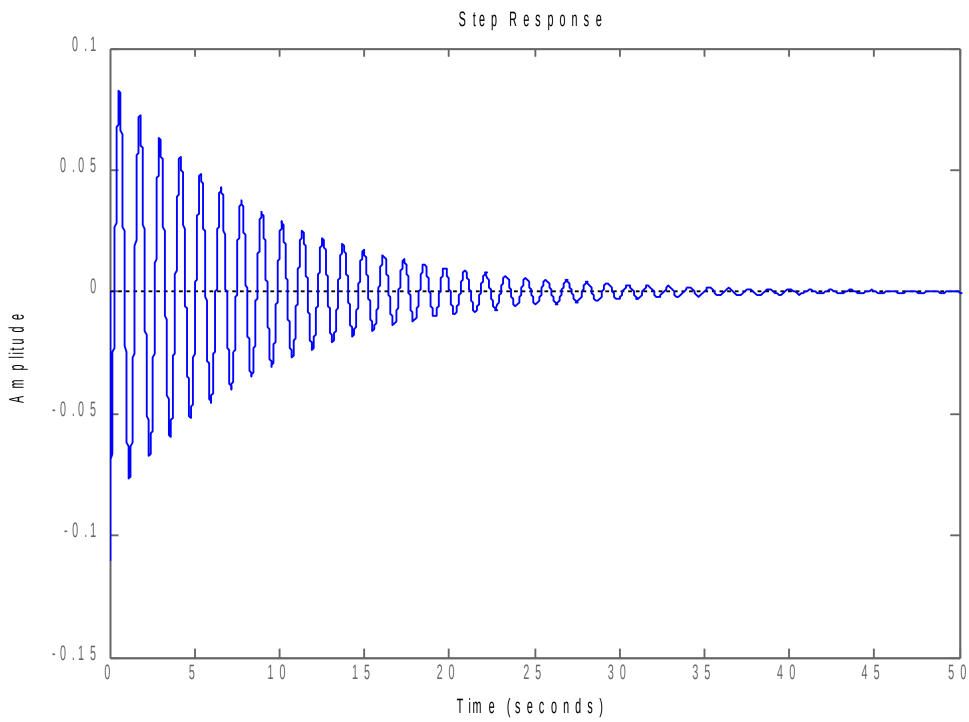
```
m1 = 2500;
m2 = 320;
k1 = 80000;
k2 = 500000;
b1 = 350;
b2 = 15020;

nump = [(m1+m2)     b2     k2];
denp = [(m1*m2)     (m1*(b1+b2))+(m2*b1)     (m1*(k1+k2))+(m2*k1)+(b1*b2)     (b1*k2)+(b2*k1)     k1*k2];
G1 = tf(nump,denp);

numDis = [-(m1*b2)-(m1*k2)     0     0];
denDis = [(m1*m2)     (m1*(b1+b2))+(m2*b1)     (m1*(k1+k2))+(m2*k1)+(b1*b2)     (b1*k2)+(b2*k1)     k1*k2];
G2 = tf(0.1*numDis,denDis);
step(G1)
numf = numDis;
denf = nump;
F = tf(numf,denf);
```

Utilizzando Matlab possiamo visualizzare come l'originale sistema a catena aperta lavora (senza alcun controllo di feedback).

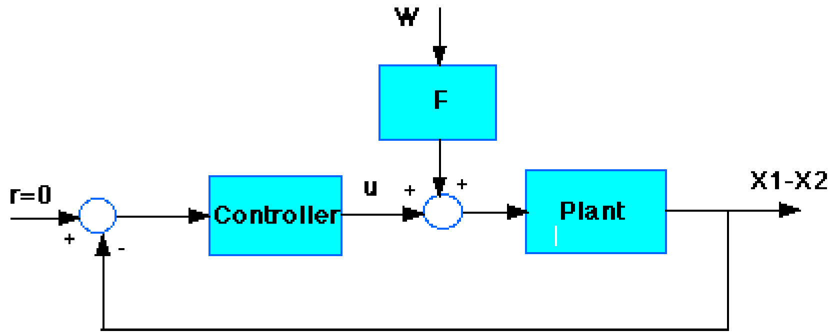
Dal grafico sottostante che riguarda la risposta a catena aperta per una forza in input a gradino unitario, possiamo vedere che il sistema è sotto-smorzato.



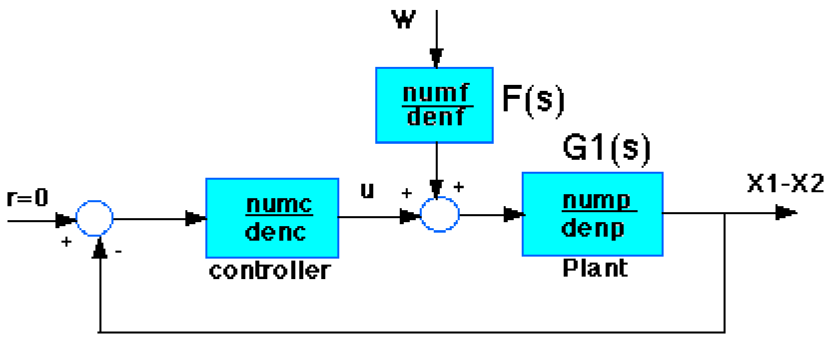
Le persone sedute nel bus sentiranno una piccola oscillazione; l'errore a regime è di circa 0,013 millimetri. Inoltre, il bus impiega un tempo molto lungo per raggiungere una stato stazionario, cosa che porta delle sensazioni sgradevoli ai passeggeri, in quanto il tempo di assestamento risulta essere molto lungo.
Una soluzione che permette di ridurre il tempo d'assestamento del bus e conseguentemente lo scomfort dei passeggeri è di aggiungere un controllore in retroazione al sistema:



Da questo grafico riguardante la risposta della catena aperta per un tratto di disturbo di 0.1 metri, possiamo vedere che quando il bus passa su una protuberanza di 10 centimetri di grandezza sulla strada, il bus oscillerà per un tempo eccessivamente lungo (100 secondi) con una maggiore ampiezza, 13 centimetri, rispetto all'impatto iniziale. Con una tale oscillazione il passeggero non sarà comodamente seduto nel veicolo; inoltre questo grande sobbalzo e il lungo tempo di assestamento provocano dei danni al sistema di sospensione. La soluzione a questo problema è quella di aggiungere un controllore di retroazione nel sistema per migliorarne le prestazioni; lo schema a blocchi del sistema a catena chiusa, considerando nullo l'ingresso e valutando solo l'effetto dei disturbi esterni, è il seguente:



Dalle funzioni di trasferimento e dallo schema soprastante, siamo in grado di disegnare il diagramma a blocchi del sistema bus-sospensioni come segue:



Da questo schema vediamo le relazioni tra i due grafici:

$Plant = nump / denp$ $\qquad$ $F * Plant = numDis / denDis$ $\qquad$ $F = numDis / (denDis * Plant)$

ed F risulta essere:

$$F = \frac{numDis * denp}{denDis * nump} = \frac{numDis}{nump} = \frac{numf}{denf}$$

dove nump, denp, numDis e denDis sono definiti nel codice Matlab sopra.

CAPITOLO 3:
3.1 Progettazione di un controllore PID

Nella pratica, spesso il legame ingresso /uscita da controllare è noto solo parzialmente. È tuttavia possibile ottenere un comportamento soddisfacente del sistema ad anello chiuso tramite l'inserimento di un controllore PID (Proporzionale, Integrale, Derivativo).
Il controllo Proporzionale-Integrale-Derivativo, è un sistema dotato di retroazione negativa, e viene ampiamente utilizzato nei sistemi di controllo. Grazie ad un input che determina il valore attuale è in grado di reagire ad un valore dell'eventuale errore positivo o negativo tendendo a 0. La reazione a questo errore può essere controllata e regolata rendendo il dispositivo molto versatile.
La funzione di trasferimento per un controllore PID è del tipo:

$$K_p+\frac{K_I}{s}+K_D*s=(K_D*s^2+K_P*s+K_I)/s$$

dove $\mathbf{K_P}$ è il guadagno proporzionale all'errore, $\mathbf{K_I}$ è il guadagno proporzionale all'integrale dell'errore, $\mathbf{K_D}$ è il guadagno proporzionale alla derivata dell'errore; assumiamo che nel controllore avremo bisogno di tutti e tre i guadagni. Iniziamo dando dei valori possibili ai guadagni: $\mathbf{K_P}$ = 208025 , $\mathbf{K_I}$ = 832100 e $\mathbf{K_D}$ = 624075. Questo si può implementare in Matlab inserendo il seguente codice:

K_D = 208025;
K_P = 832100;
K_I = 624075;
contr = tf([K_D K_P K_I],[1 0]);

Tramite un'ulteriore riga di codice possiamo simulare la risposta del sistema (la differenza X_1-X_2) per un disturbo a gradino dovuto alla strada:

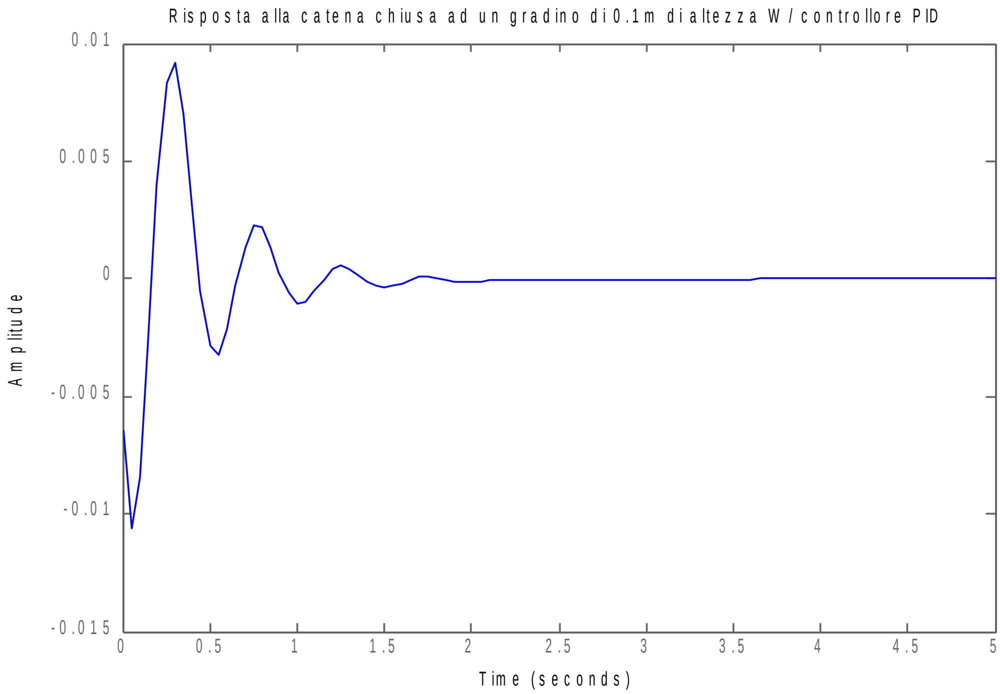
*sys_cl = F*feedback(F*G1,contr);*

3.2 Risposta della catena chiusa

Con l'inserimento dell'ultima riga di codice in Matlab, è stata definita la funzione di trasferimento per la catena chiusa la quale rappresenta l'impianto, il disturbo e il controllore. Vediamo la risposta della catena chiusa di questo sistema ad un gradino prima di iniziare il processo di controllo. Si sta per utilizzare un gradino di 0.1m di altezza come disturbo e per simulare questo, quello che bisogna fare è moltiplicare **sys_cl** per 0.1. Si deve aggiungere dunque il seguente codice Matlab di seguito a quello precedentemente inserito nel file:

t = 0:0.05:5;
*step(0.1*sys_cl,t)*
title('Risposta alla catena chiusa ad un gradino di 0.1m di altezza W/ controllore PID')

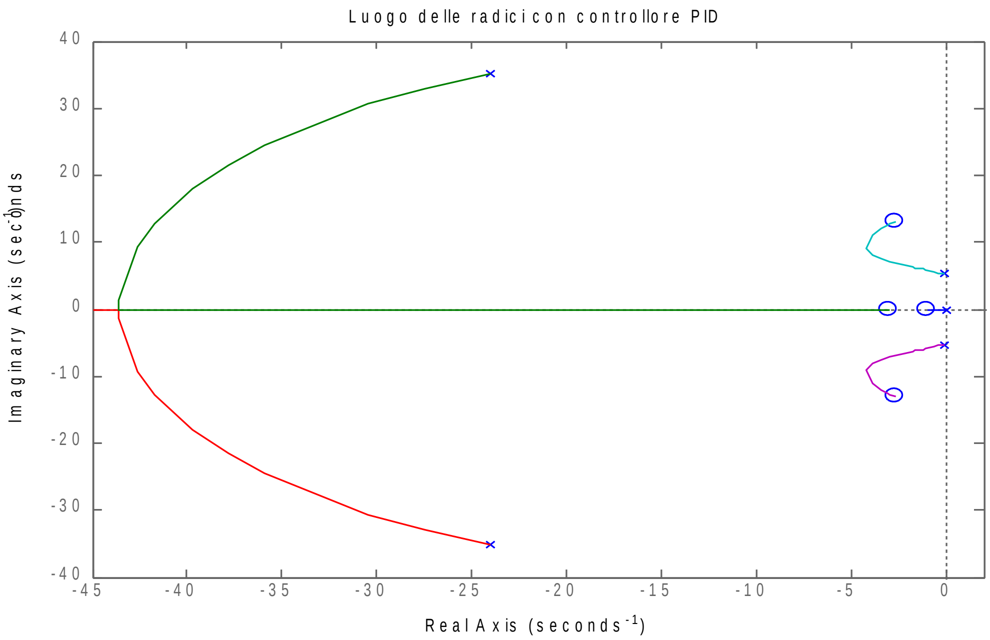
si può vedere la risposta (X_1-X_2) al gradino W nel grafico sottostante:



Dal grafico si vede che il picco massimo è di 9 mm, che più grande dei 5 mm richiesti dalle specifiche, però si osserva che il tempo di assestamento è soddisfatto, infatti è inferiore ai 5 secondi. Per scegliere un guadagno appropriato che porterebbe ad un'uscita ragionevole, si inizia con il scegliere un polo e due zeri per il controllore PID. Un polo di questo controllore deve essere messo al valore 0 e uno degli zeri deve essere molto vicino al polo nell'origine, al valore 1. L'altro zero possiamo metterlo distante dal primo zero, al valore 3, anzi siamo in grado di adattare la posizione del secondo zero per fare in modo che il sistema soddisfi i requisiti. Aggiungendo il seguente codice Matlab al file, si può adattare la posizione del secondo zero ed avere un'idea approssimativa di quale guadagno usare per $\mathbf{K_P}$, $\mathbf{K_I}$, $\mathbf{K_D}$:

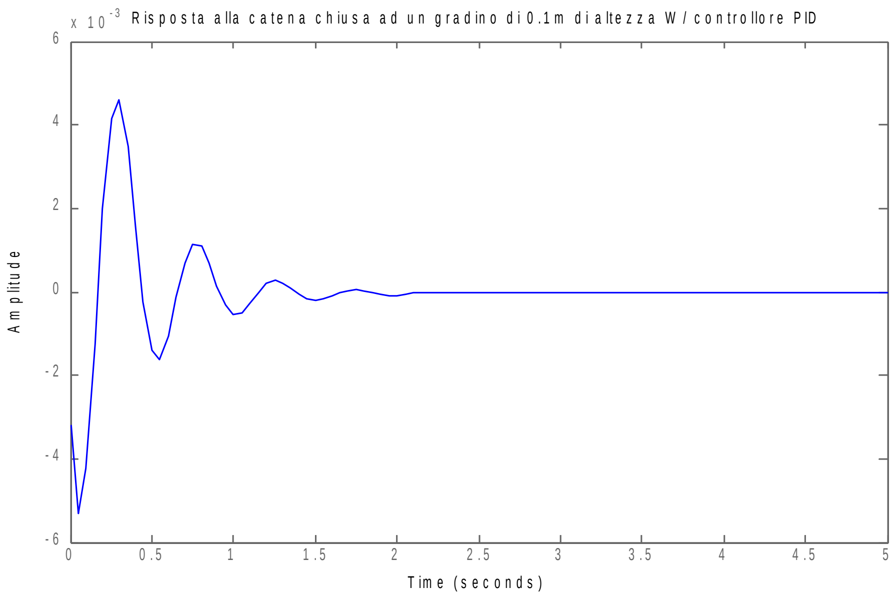
```
z1 = 1;
z2 = 3;
p1 = 0;
numc = conv([1  z1],[1  z2]);
denc = [1  p1];
contr = tf(numc,denc);
rlocus(contr*G1)
title('Luogo delle radici con controllore PID')
[K,p] = rlocfind(contr*G1)
```

Dal grafico sottostante si vedono i poli e gli zeri della catena chiusa e si possono scegliere il guadagno e i poli dominanti.

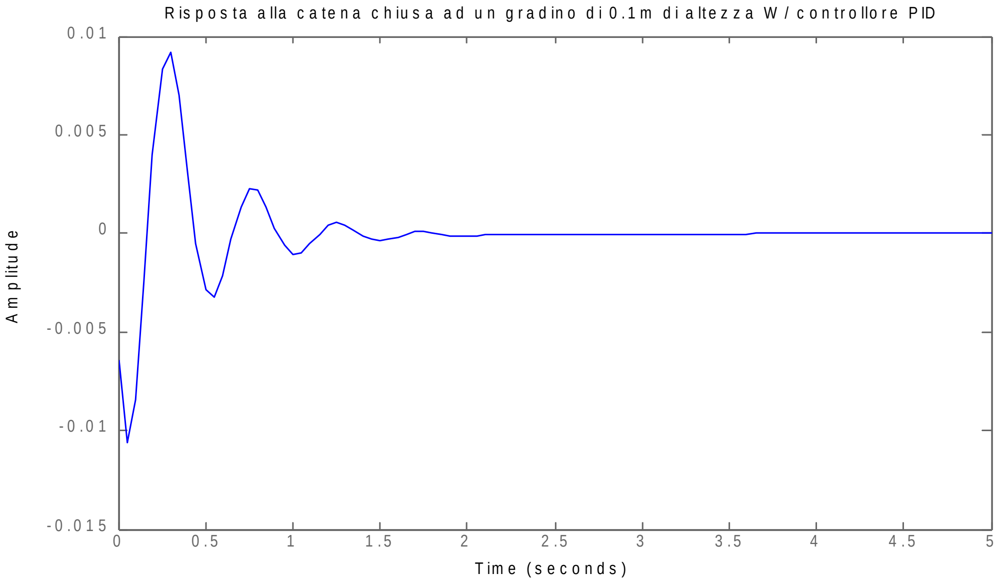


3.3 Scegliere i guadagni per il controllore PID

Avendo a disposizione la funzione di trasferimento della catena chiusa, il controllo del sistema si riduce ad una scelta adeguata delle variabili **K_P**, **K_I**, **K_D**.
Dal grafico soprastante si vede che il sistema ha maggiore smorzamento di quanto viene richiesto nelle specifiche, però si osserva anche un tempo di assestamento alquanto breve. Questa risposta però non soddisfa la richiesta di avere un overshoot del 5%. Il problema potrebbe essere risolto regolando in modo adeguato le variabili **K_P**, **K_I**, **K_D** per trovare una migliore risposta del sistema. Moltiplicando per un fattore 2 tutte e tre le variabili osserviamo il seguente cambiamento riportato nella figura sotto:



Si può notare la differenza con il controllore PID a basso guadagno precedente:



Si osserva che la sovra-elongazione e il tempo di assestamento soddisfano ai requisiti del sistema; l'overshoot percentuale è circa il 5% dell'ampiezza d'ingresso mentre il tempo di assestamento è di 2 secondi che è inferiore ai 5 secondi richiesti dalle specifiche.

Dalle precedenti osservazioni si può concludere che il metodo di progettazione PID controlla adeguatamente il sistema.

CAPITOLO 4:
4.1 Progettazione di un controllore tramite luogo delle radici

Il metodo del luogo delle radici è un procedimento grafico che permette di studiare lo spostamento dei poli di una funzione di trasferimento a catena chiusa al variare di un parametro K. Tramite questo parametro K si può determinare la stabilità del sistema e quindi determinarne la stabilità o meno.
I poli del sistema nella catena aperta possono essere ottenuti tramite il comando Matlab:

R = roots(denp)

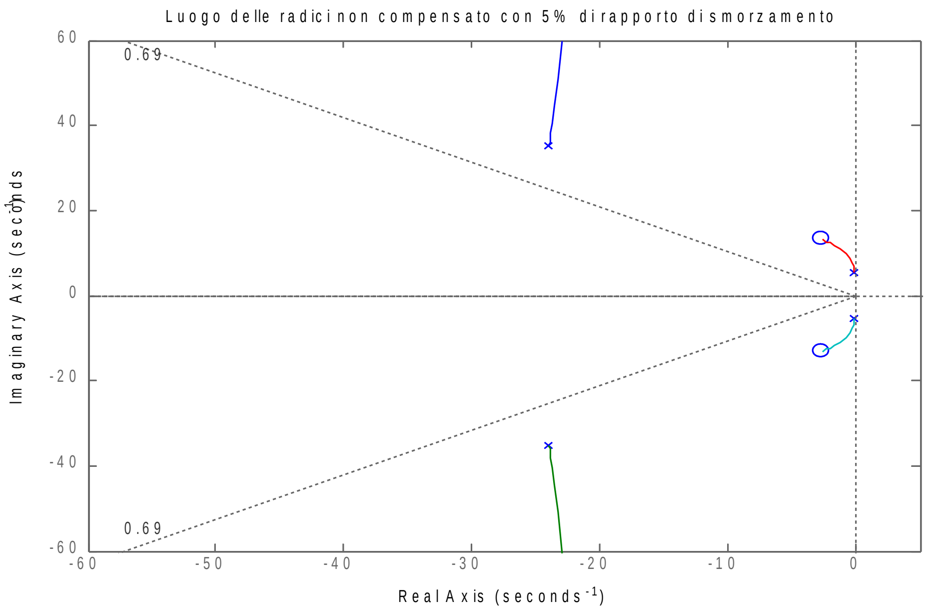
Come risposta si ottiene:

R = -23.9758 +35.1869i
-23.9758 -35.1869i
-0.1098 + 5.2504i
-0.1098 – 5.2504i

I poli dominanti sono le radici -0.1098+/-5.2504i, che sono vicine all'asse immaginario con un piccolo rapporto di smorzamento.
L'idea principale della progettazione del luogo delle radici è stimare la risposta della catena chiusa dal grafico del luogo delle radici della risposta della catena aperta. Aggiungendo zeri e/o poli al sistema originale, il luogo delle radici e così anche la risposta della catena chiusa verranno modificati. Il luogo delle radici per il sistema può essere ottenuto aggiungendo il seguente codice in Matlab:

rlocus(G1)
z = -log(0.05)/sqrt(pi^2+(log(0.05)^2))
sgrid(z,0)

si può dunque vedere nel grafico sottostante il luogo delle radici:



Dalle specifiche si richiede che la sovra-elongazione, SE%, debba essere inferiore al 5% mentre il rapporto di smorzamento, zeta, può essere trovato dall'approssimazione dell'equazione del rapporto di smorzamento

$$z = -\log(\%SE/100)/\sqrt{\pi^2 + [\log(\%SE/100)^2]}$$

Il comando **sgrid** è utilizzato per sovrapporre la linea desiderata della percentuale della sovra-elongazione nel luogo delle radici della catena chiusa.

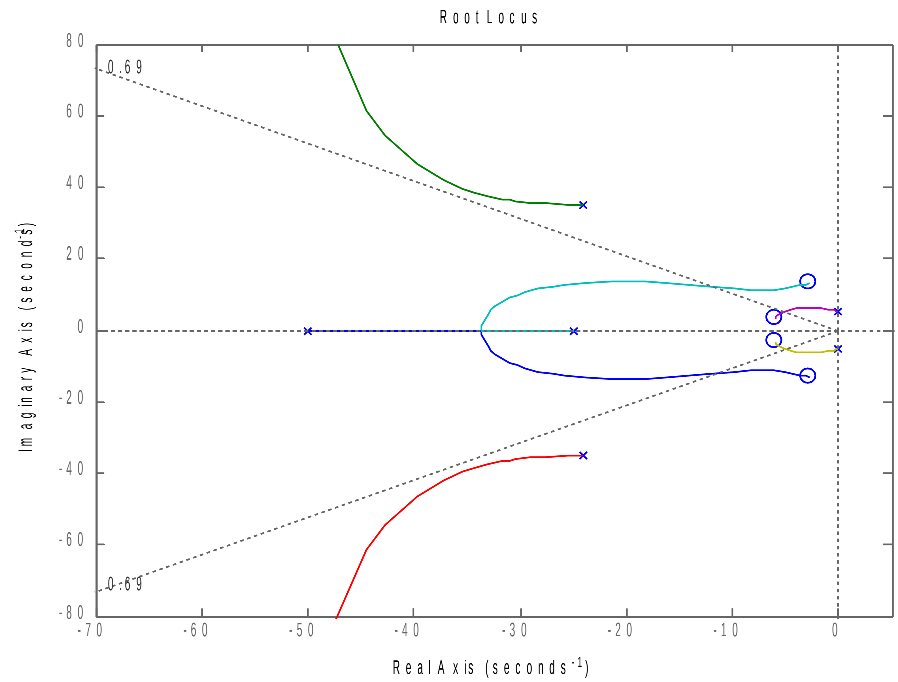
Dal grafico soprastante, si può vedere che ci sono due coppie di zeri e poli che sono molto vicine tra loro. Questi poli e zeri sono quasi sull'asse immaginario, potrebbero rendere il sistema bus marginalmente stabile e questo potrebbe causare qualche problema. Si devono muovere tutti i poli e zeri nel semipiano sinistro quanto più possibile, per evitare che il sistema diventi instabile. Bisogna mettere due zeri molto vicini ai due poli sull'asse immaginario del sistema non compensato, per cancellare l'effetto delle coppie polo-zero. Inoltre, si dovranno mettere altri due poli più a sinistra sull'asse reale per ottenere una risposta rapida.

4.2 Luogo delle radici

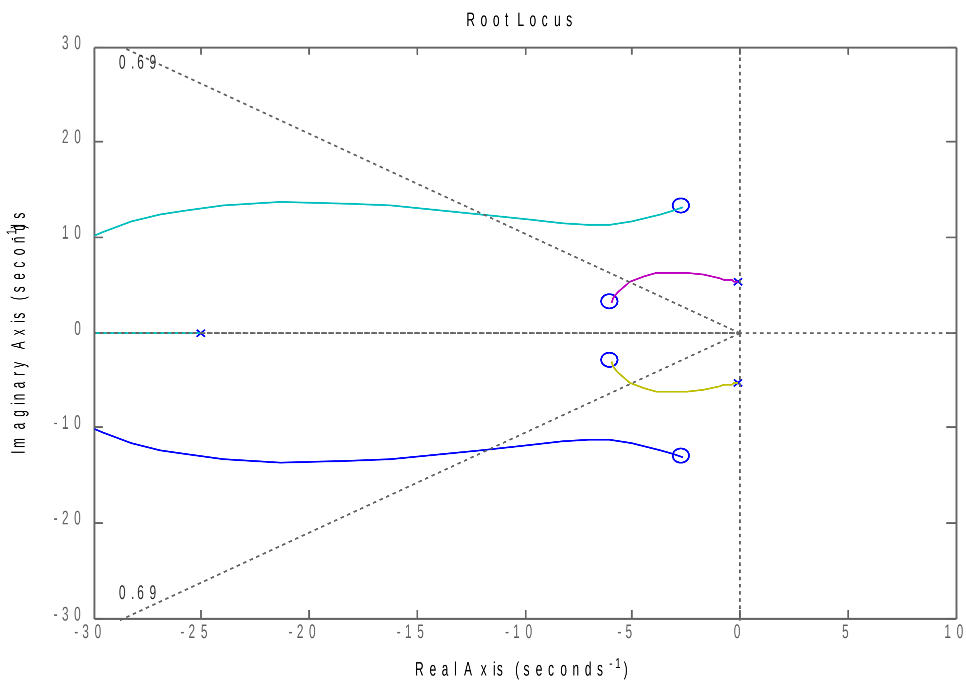
Nella realizzazione del luogo delle radici abbiamo bisogno di due zeri vicini ai due poli sull'asse complesso. Inoltre si necessita anche di due poli posti molto a sinistra per spostare il luogo a sinistra. Nel nostro caso si devono mettere i poli a 25 e 50 e gli zeri a 3+/-3i inserendo il seguente codice:

```
z1 = 6+3i;
z2 = 6-3i;
p1 = 25;
p2 = 50;
numc = conv([1  z1],[1  z2]);
denc = conv([1  p1],[1  p2]);
contr = tf(numc,denc);

rlocus(contr*G1)
```

Il nuovo luogo delle radici risulta essere il seguente:



Se ci si focalizza su un intervallo degli assi più piccolo, si riesce a vedere meglio dove vengono posizionati gli zeri e poli nel grafico:

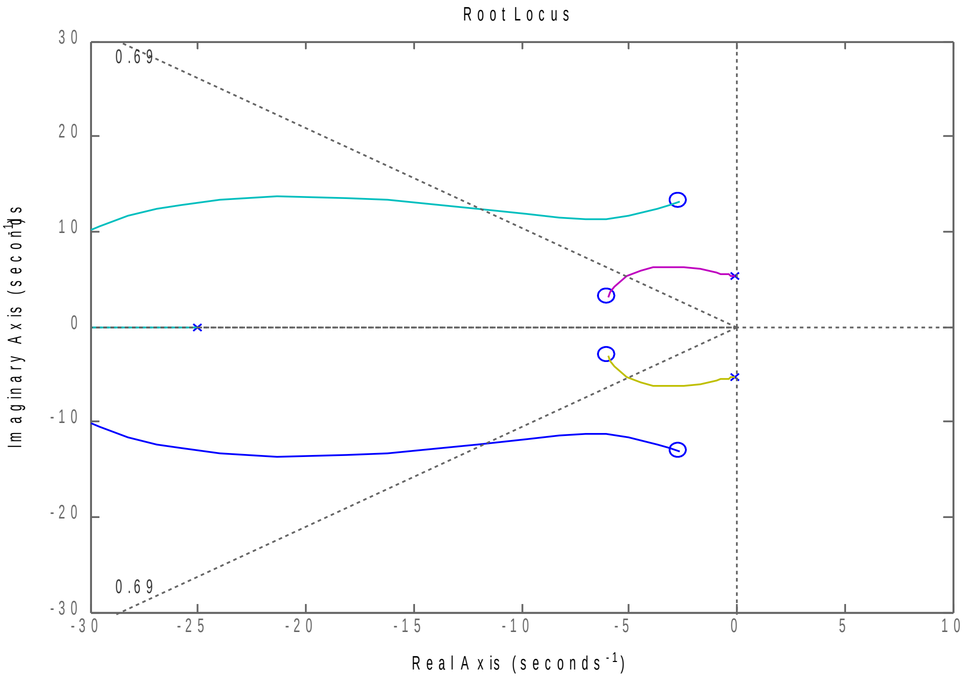


Questa risulta essere la scelta ideale per gli zeri del controllore, in quanto provando a spostare ancora gli zeri più a sinistra cambia di conseguenza il luogo delle radici e gli zeri risulterebbero fuori dalla regione d'interesse.

4.3 Trovare il guadagno dal luogo delle radici

Avendo spostato il luogo delle radici attraverso la linea del rapporto di smorzamento del 5%, si può scegliere un guadagno in grado di soddisfare i requisiti di progettazione. Si desidera che il tempo di assestamento e la sovra-elongazione siano i più piccoli possibile. Per ottenere una piccola sovra-elongazione e una risposta rapida, è necessario selezionare un guadagno corrispondente ad un punto sul luogo delle radici vicino all'asse reale e lontano dall'asse immaginario o il punto nel quale il luogo delle radici attraversa la linea dello smorzamento desiderato. Di conseguenza scelgo un K che mi porta gli zeri il più possibile dentro la regione d'interesse. Esiste un comando apposito in Matlab per fare questo aggiungendo il seguente codice:

*[k,poles] = rlocfind(contr*G1)*



Se si selezionano un punto nel grafico che sia vicino agli zeri d'interesse, si vedono i seguenti risultati:

selected_point = -2.9428 -13.0435i
K = 7.8476e+006
*poles = 1.0e+02 **

-0.5150 + 1.7126i
-0.5150 - 1.7126i
-0.0495 + 0.1171i
-0.0495 - 0.1171i
-0.0514 + 0.0533i
-0.0514 - 0.0533i

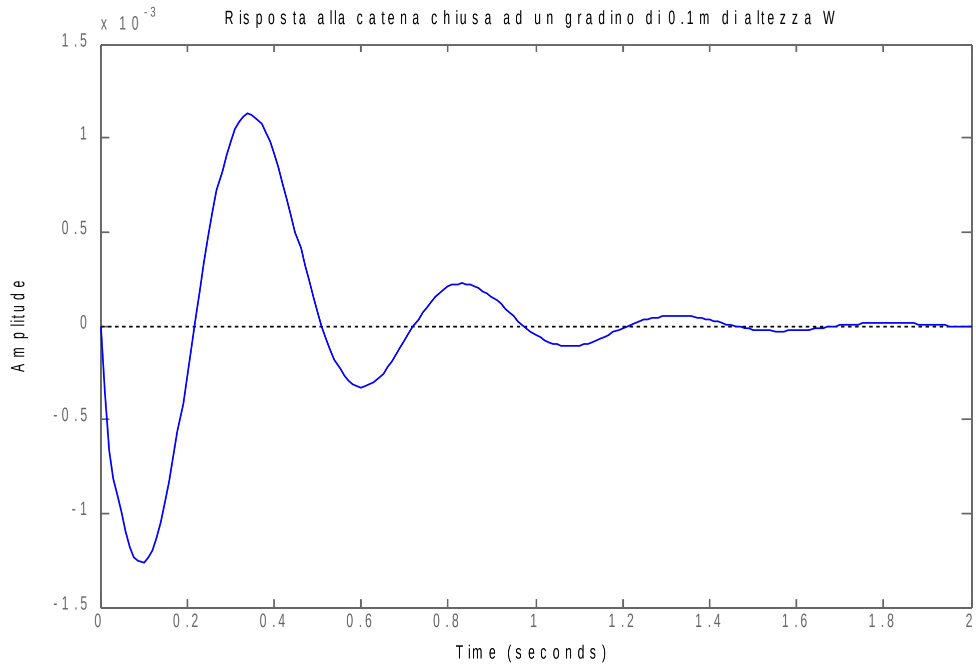
Si vede che il valore restituito da Matlab non può essere esattamente lo stesso, ma deve almeno avere lo stesso ordine di grandezza. Questo valore restituito può essere utilizzato come il guadagno per il compensatore.

4.4 Risposta della catena chiusa

Si può ora vedere come si comporta la risposta al gradino della catena chiusa con questo compensatore. Bisogna tenere presente che si sta usando un gradino di 0.1 metri d'altezza come disturbo e per simulare questo basta moltiplicare **sys_cl** di 0,1. Aggiungendo i seguenti comandi in Matlab:

t = 0:0.01:2;
*step(0.1*sys_cl,t)*
title('Risposta alla catena chiusa ad un gradino di 0.1m di altezza W')

otteniamo il seguente grafico:



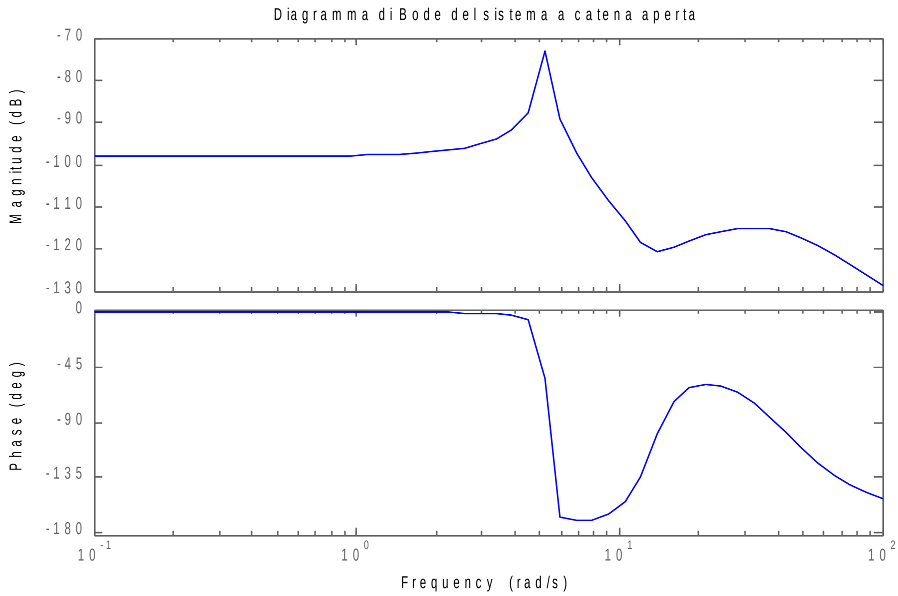
Da questo grafico si vede che quando il bus trova un salto di 0,1 metri nella strada, la massima deviazione del corpo del bus dalle ruote è di circa 1,25 mm e l'oscillazione impostata a 2 secondi e quindi questa risposta soddisfa ai requisiti della progettazione.

CAPITOLO 5:
5.1 Analisi dinamica del sistema in catena chiusa, studio del controllore in frequenza

Uno strumento molto flessibile che ci permette di agire sul guadagno d'anello in modo da assicurare ad esempio la stabilità in catena chiusa e un margine di fase sufficientemente elevato è il diagramma di Bode. L'idea principale della progettazione basata sulla frequenza è di usare il diagramma di Bode della funzione di trasferimento della catena aperta per stimare la risposta della catena chiusa. Aggiungendo un controllore al sistema cambia il diagramma di Bode della catena aperta, quindi la risposta della catena chiusa cambierà anch'essa. Per prima cosa si disegni il diagramma di Bode per la funzione di trasferimento originale della catena aperta; si deve dunque aggiungere il seguente codice in Matlab:

```
w = logspace(-1,2);
bode(G1,w)
```

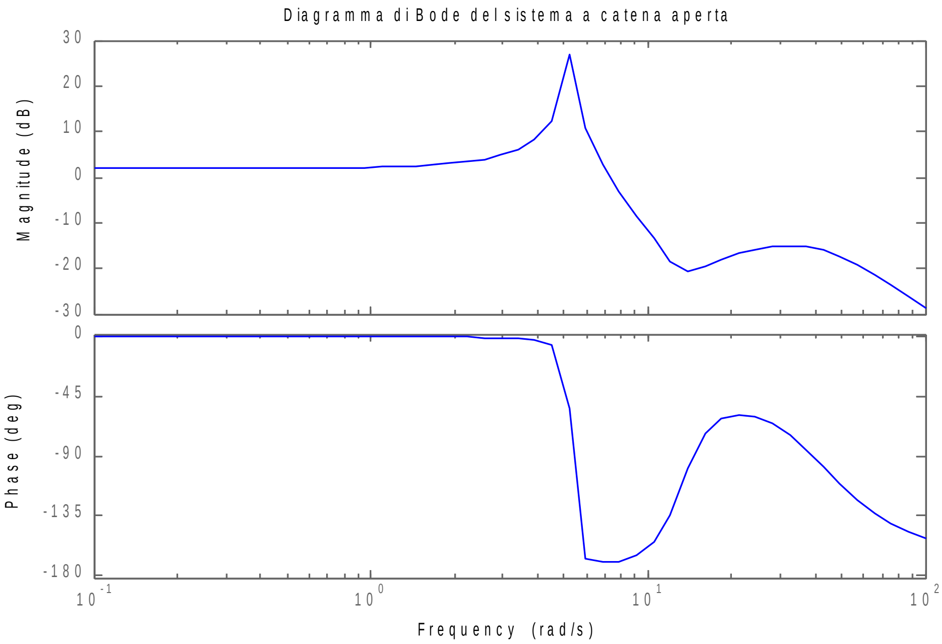
Si ottengono quindi i seguenti diagrammi di Bode, sia il diagramma dell'ampiezza sia quello per la fase:



Per comodità nel rappresentare sistemi con diverse frequenze proprie del sistema, si normalizza e si scala quello che si è trovato prima di tracciare il diagramma di Bode, in modo che l'asintoto della bassa frequenza di ogni termine sia a 0 decibel. Questa normalizzazione ottenuta aggiustando il guadagno, K, rende più facile l'aggiunta dei componenti del diagramma di Bode. L'effetto di K è di spostare la curva, nel diagramma delle ampiezze, in alto se si aumenta K, o in basso se si decrementa K di una quantità pari a 20*log(K), ma il guadagno, K, non ha l'effetto nel grafico della fase. Perciò dal grafico precedente, K deve essere uguale a 100 dB o 100000 dB per spostare la curva nel grafico delle ampiezze da 0 dB a 0,1 rad/s. Si deve aggiungere:

```
K = 100000;
bode(K*G1,w)
```

e risultano i seguenti diagrammi:



5.2 Aggiunta di due controllori regolatori

Dal diagramma di Bode nella figura soprastante, si vede che la curva nel diagramma della fase è concava di circa 5 rad/s. In primo luogo, si cerca di aggiungere una fase positiva attorno a questa regione, in modo che la fase resti al di sopra della linea di -180 gradi. Dal momento che un grande margine di fase porta ad una piccola sovra-elongazione, si vuole aggiungere almeno 140 gradi di fase positiva nella zona vicina ai 5 rad/s. Dal momento che un solo controllore non può aggiungere più di 90 gradi, si devono usare due controllori regolatori.

Per ottenere **T** e **a**, che sono i parametri che ci permettono di traslare il diagramma di Bode, si devono seguire i seguenti passi:

1: Determinare quanta fase positiva abbiamo bisogno:

Dal momento che si necessità di 140 gradi in totale, si richiedono 70 gradi per ogni controllore.

2: Determinare qual'è la frequenza alla quale aggiungere la fase:

In questo caso la frequenza deve essere di 5,0 rad/s.

3: Determinare la costante dall'equazione sottostante:

Questo determina lo spazio tra zero e polo per l'aggiunta della massima fase desiderata.

$$a = \frac{1 - \sin(70°)}{1 + \sin(70°)} = 0.031091$$

4: Determinare T e a*T dalle seguenti equazioni:

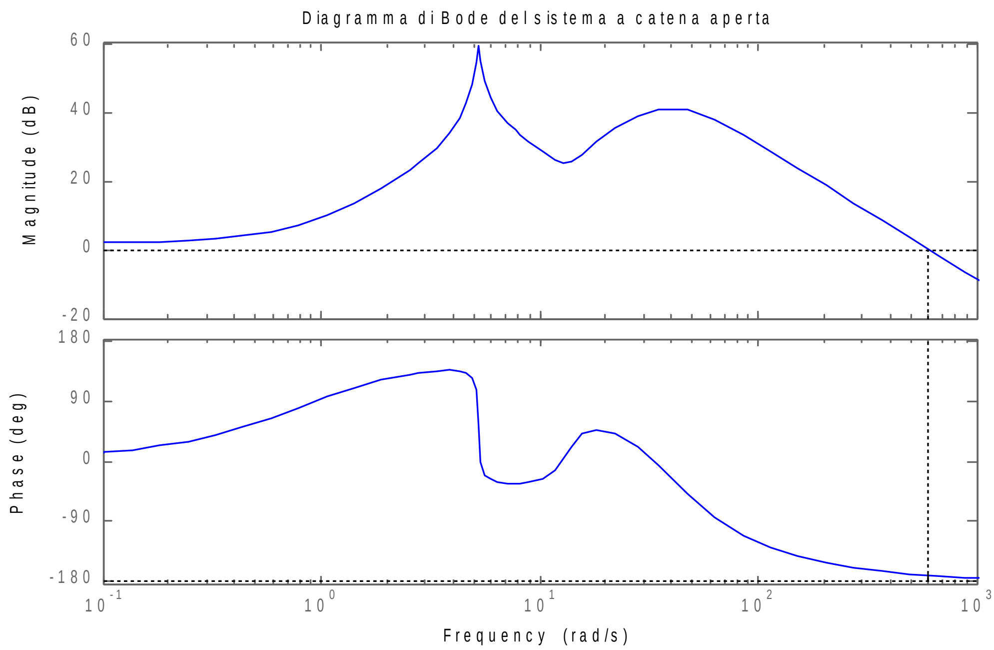
Queste determinano le frequenze d'angolo alle quali la massima fase può essere aggiunta alla frequenza desiderata.

$$T = \frac{1}{w \cdot \sqrt{a}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{0.031091}} = 1.13426 \qquad aT = \frac{\sqrt{a}}{w} = \frac{\sqrt{0.031091}}{5} = 0.035265$$

Per aggiungere i due controllori si deve utilizzare il seguente codice Matlab:

```
a = (1-sin(70/180*pi))/(1+sin(70/180*pi));
w = 5;
T = 1/(w*sqrt(a));
aT = sqrt(a)/w;
numc = conv([T 1], [T 1]);
denc = conv([aT 1], [aT 1]);
contr = tf(numc,denc);
margin(K*contr*G1)
```

Si otteniamo il seguente diagramma di Bode:



Da questo grafico si vede che la porzione concava del diagramma della fase è sopra a -180 gradi ora, ed il margine di fase è abbastanza grande per i criteri di progettazione.

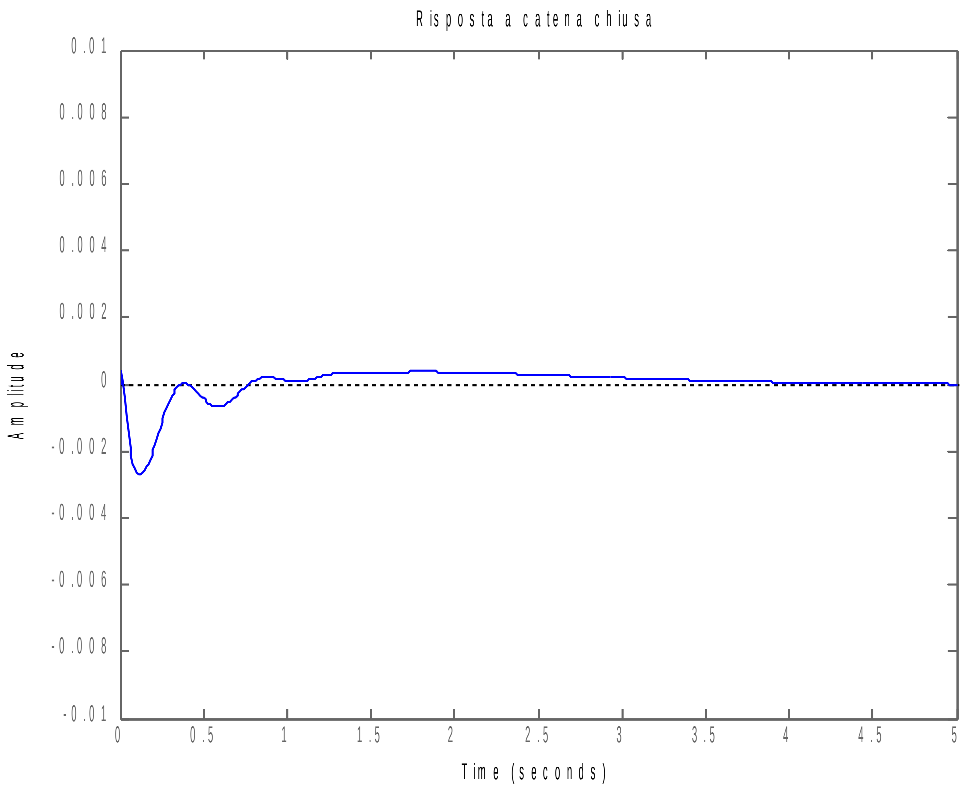
A questo punto si può osservare come l'uscita (la distanza X_1-X_2) risponde ad un urto sulla strada (W).

5.3 Risposta della catena chiusa

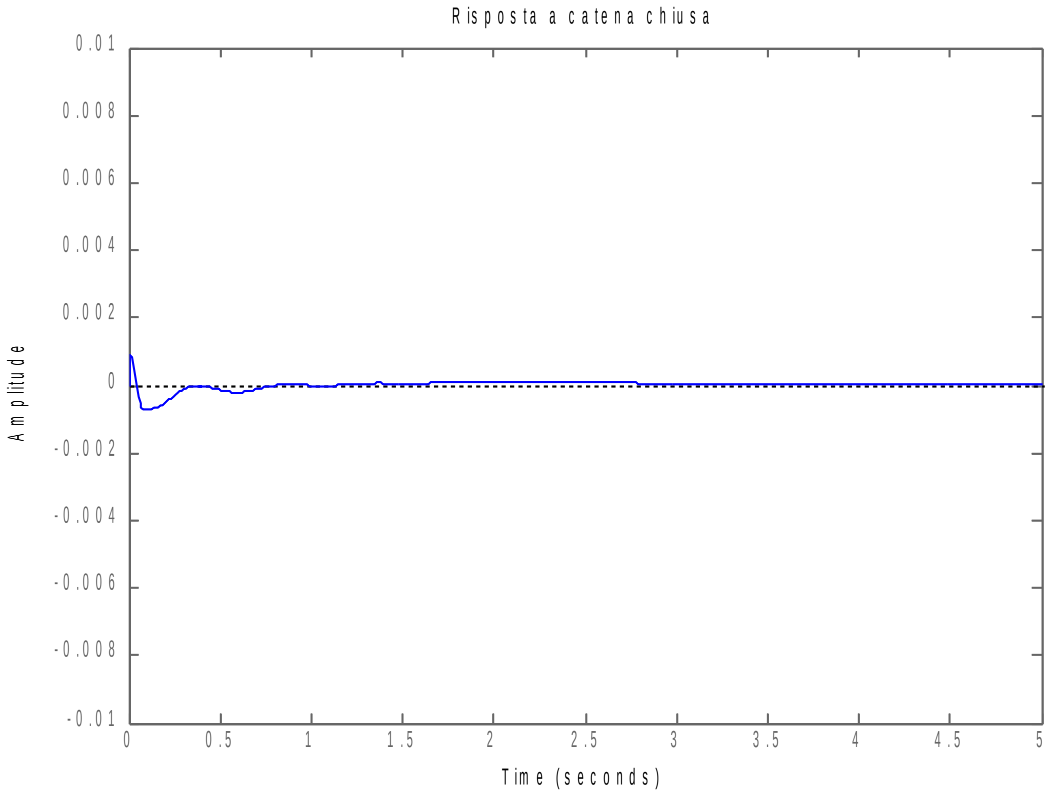
Focalizziamo l'attenzione su come appare la risposta al gradino; avendo un gradino di disturbo di 0,1 metri, per simularne l'effetto si deve semplicemente moltiplicare il sistema per la costante 0,1 tramite il seguente codice:

```
t = 0:0.01:5;
step(0.1*sys_cl,t)
axis([0 5 -.01 .01])
```

e risulta il seguente grafico:



L'ampiezza della curva risultante è molto più piccola della percentuale di sovra-elongazione richiesta e il tempo di assestamento è inferiore a 5 secondi. Si può vedere che l'ampiezza della risposta in uscita è inferiore di 0,001 metri o dell'1% dell'ampiezza dell'ingresso dopo 4 secondi. Perciò si può dire che il tempo di assestamento è di 4 secondi. Dal grafico di Bode soprastante, si nota che incrementando il guadagno incrementerà la frequenza di attraversamento e così la risposta sarà più veloce. Aggiungendo il seguente codice in Matlab si può vedere come si comporta il sistema variandone il guadagno: sostituendo **numc** con **numc = 4*conv([T 1],[T 1])** si ottiene il seguente grafico:



Da questo grafico si vede che la percentuale di sovra-elongazione è intorno a 0,15 mm inferiore al grafico precedente e il tempo di assestamento è inferiore a 5 secondi; questa risposta soddisfa dunque ai requisiti di progettazione.

CAPITOLO 6:
6.1 Risoluzione del problema tramite Simulink

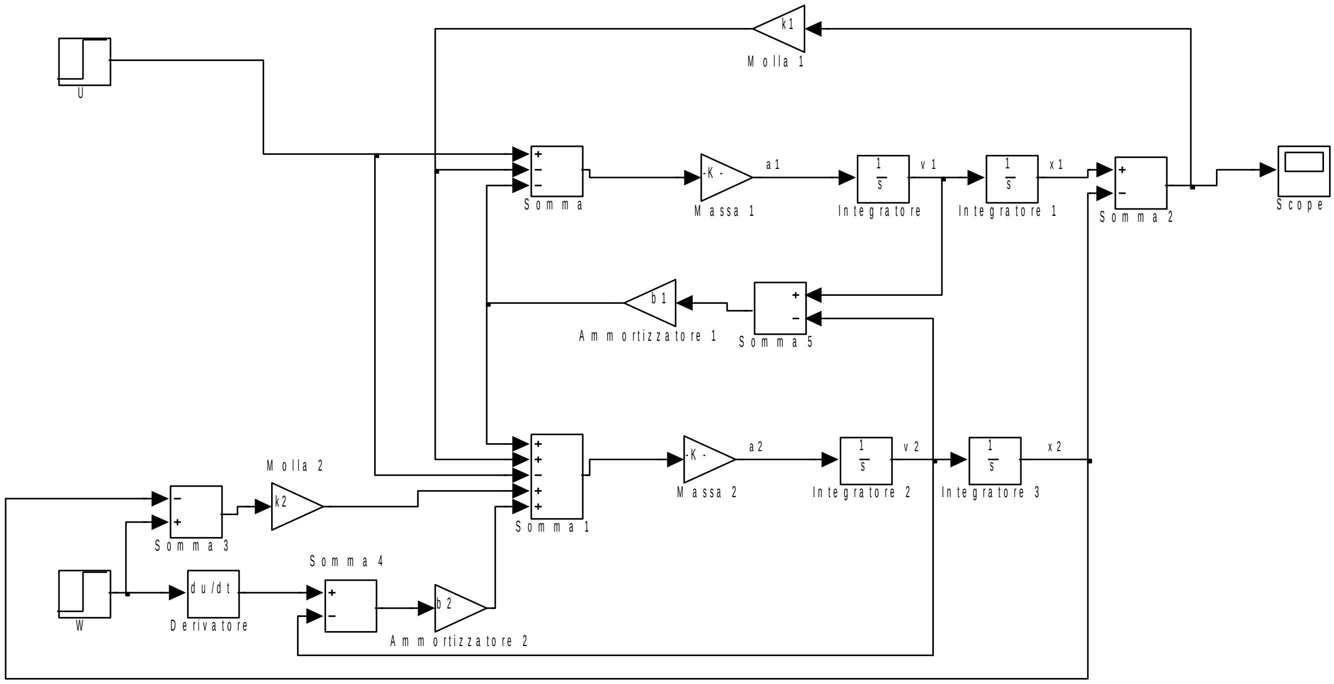
Il problema del controllo delle sospensioni può essere risolto tramite uno strumento di Matlab, Simulink.
Questo strumento permette di descrivere tramite vari blocchi, il comportamento dei singoli pezzi del sistema bus -sospensioni e permette di studiarne il comportamento in conseguenza di disturbi esterni.
Questo sistema sarà modellato sommando le forze che agiscono su entrambe le masse (corpo e sospensione) e integrando le accelerazioni di ciascuna massa due volte per fornire velocità e posizioni. La legge di Newton dovrà perciò essere applicata a ciascuna massa . In primo luogo, si devono modellare gli integrali delle accelerazioni delle masse.

$$\iint \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \int \frac{dx_1}{dt} = x_1 \qquad \iint \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \int \frac{dx_2}{dt} = x_2$$

Questi verranno descritti nel sistema da 2 blocchi integratori; poi bisogna utilizzare la legge di Newton per le due masse nel modo seguente:

$$\frac{1}{M_1} \sum_1 F = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \qquad \frac{1}{M_2} \sum_1 F = \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

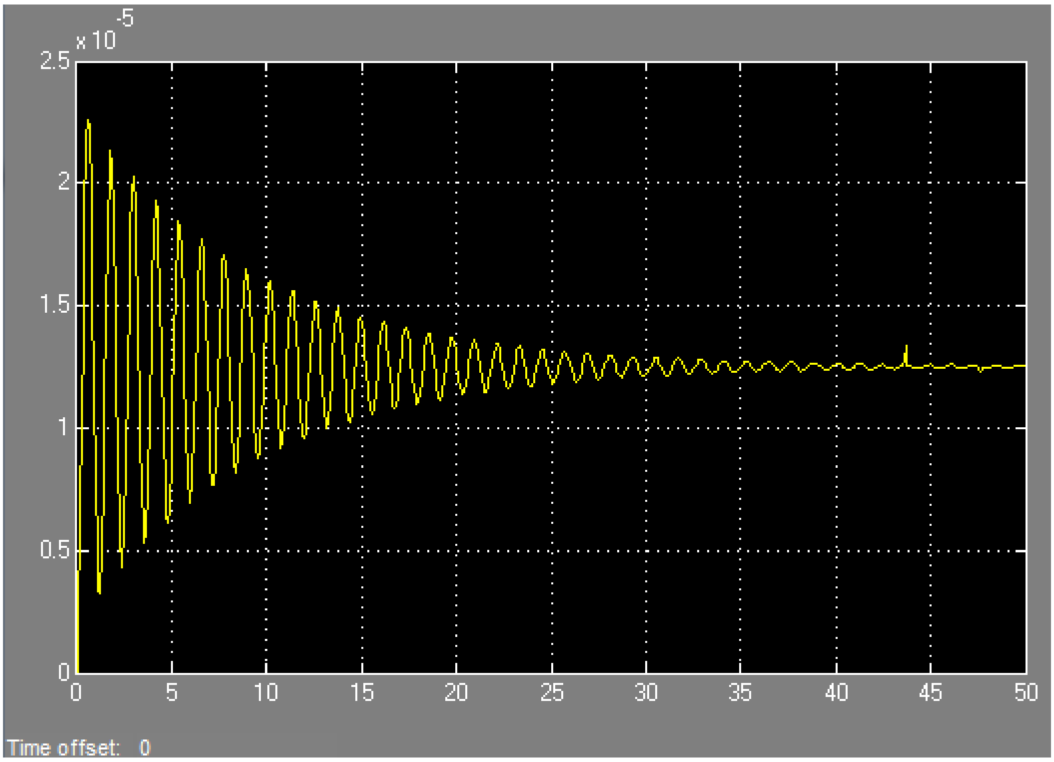
Per emulare la legge di Newton sulle 2 masse basta aggiungere due blocchi con guadagno rispettivamente $1/m_1$ e $1/m_2$ prima degli integratori, quindi aggiungere 2 sommatori che sommeranno le forze in gioco nelle rispettive 2 masse. Ora si devono aggiungere le forze che agiscono nelle 2 masse e che possono essere espresse tramite dei blocchi che esprimono il guadagno; in primo luogo, si aggiunge la forza dovuta alla Molla 1; questa forza è uguale ad una costante, k_1 volte la differenza $(X_1 - X_2)$. Dopodiché si aggiunge la forza dovuta all'Ammortizzatore 1; questa forza è uguale a b_1 volte la differenza $(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)$.
Mancano da aggiungere altre due forze; la prima è dovuta alla Molla 2 ed agisce solo sulla Massa 2, ma dipende dal profilo del terreno, W. La forza dovuta dalla Molla 2 è uguale a k_2 volte la differenza $(X_2 - W)$.
Successivamente si deve aggiungere la forza dovuta dall'Ammortizzatore 2; questa forza è pari a b_2 volte $(\dot{X}_2 - \dot{W})$. Poiché non vi è alcun segnale esistente rappresentante la derivata di W è necessario generare questo segnale; W verrà quindi generata tramite un blocco a gradino. L'ultima forza da aggiungere è l'ingresso U che agisce tra le due masse ed è rappresentato anche questo da un blocco a gradino.
Lo schema risultante è quello sotto e rappresenta il sistema bus-sospensione soggetto a disturbo ed ingresso.



Per simulare l'effetto di questo sistema bisogna impostare nel menù "Parametri della Simulazione" alcuni parametri del sistema; innanzitutto si deve impostare il campo "Tempo del gradino" del disturbo a 0 e il campo "Valore finale" a 0 così da valutare l'effetto del solo ingresso U. Ora bisogna impostare l'ingresso U; impostiamo il campo "Tempo del gradino" a 0 e "Valore finale" a 1 in modo che l'ingresso sia un impulso al tempo 0. Infine nel campo "Tempo d'arresto" bisogna impostare il valore 50 in modo che si possa vedere come reagisce il sistema in un tempo abbastanza lungo. Adesso che tutti i parametri per la simulazione sono impostati bisogna settare i parametri per i guadagni relativi alle forze in gioco inserendo il seguente codice nel Prompt di Matlab :

$m_1 = 2500;$
$m_2 = 320;$
$k_1 = 80000;$
$k_2 = 500000;$
$b_1 = 350;$
$b_2 = 15020;$

Ora si può avviare la simulazione e cliccando sul blocco Scope si può vedere la risposta della catena aperta come si osserva nel grafico sottostante:



6.2 Spazio di Stato Completo in Retroazione

Nell'esempio “spazio di stato per il controllo delle sospensione di un bus” un controllo in retroazione a stati completo è stato progettato retroazionando i seguenti cinque stati:

$$\left[x_1 \quad \frac{dx_1}{dt} \quad y_1 = x_1 - x_2 \quad \int y_1 \right]^T$$

Per il controllore si è usata la seguente matrice di guadagno in retroazione:

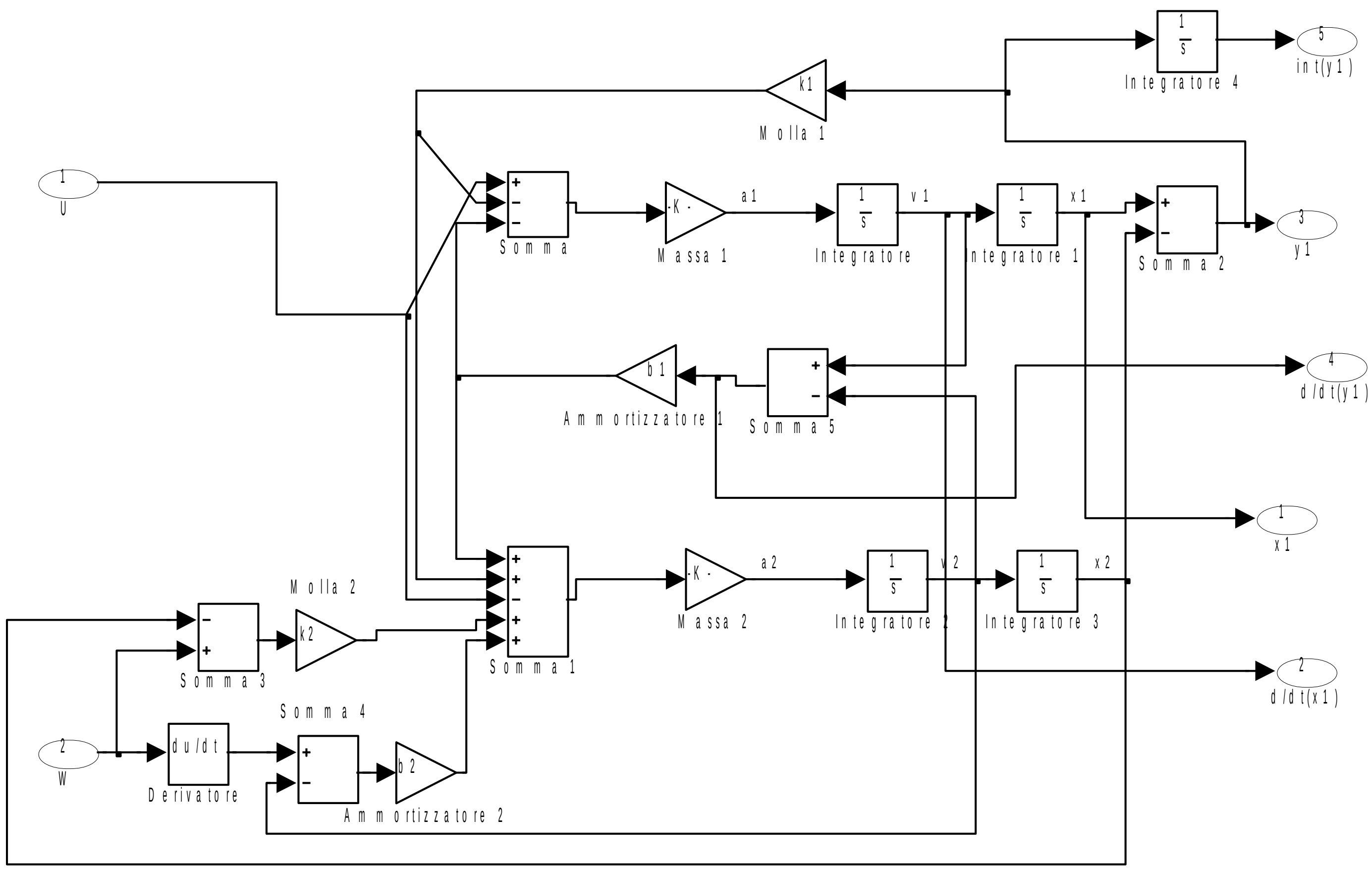
$$K = \left[0 \quad 2.3\,e6 \quad 5\,e8 \quad 0 \quad 8\,e6 \right]$$

Per realizzarlo in Simulink, il sistema a catena aperta precedente deve essere contenuto in un blocco di Sottosistema; bisogna quindi fare una copia del sistema precedentemente realizzato dentro al blocco di Sottosistema; il blocco rappresentante l'ingresso viene etichettato da U, mentre il blocco rappresentante l'uscita viene etichettato da y_1. Infine W che era rappresentato dal blocco Step viene ora sostituito da un blocco In ed etichettato con W.

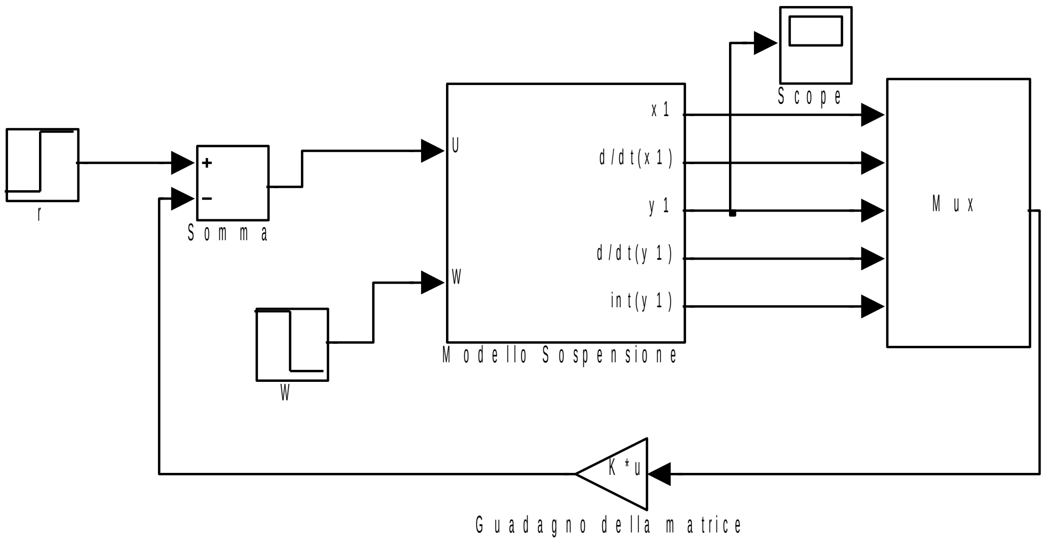
Si devono ora generare gli altri stati d'uscita per il blocco di Sottosistema. Bisogna inserire 3 nuovi blocchi Out: il primo etichettato con d/dt(y_1) che viene collegato tra Ammortizzatore 1 e Somma 5, il secondo etichettato con x_1 che viene collegato tra Integratore 1 e Somma 2 ed infine il terzo etichettato da d/dt(x_1) collegato tra Integratore ed Integratore 1. L'ultimo stato da generare è l'integrale di y_1; per crearlo basta aggiungere un blocco Integratore 4 che in input riceverà l'uscita di Somma 2 e in uscita verrà collegato ad un blocco Out etichettato da int(y_1).

Siccome gli stati d'uscita saranno usati nella forma di un vettore, è importante numerarli nel modo adeguato; il blocco Out x_1 deve essere etichettato con 1, il blocco Out d/dt(x_1) con 2, il blocco Out y_1 con 3, il blocco Out

$d/dt(y_1)$ con 4, e il blocco Out $int(y_1)$ con 5. Il sistema infine si presenterà nel seguente modo:



Si può ora chiudere il blocco di Sottosistema e rinominarlo Modello di Sospensione; vanno ora aggiunti ulteriori blocchi per realizzare un controllo in retroazione a stati completo. Per prima cosa si deve creare un vettore di segnale in uscita dalle 5 uscite scalari del Modello di Sospensione da moltiplicare per il guadagno della matrice K. Si devono collegare le 5 uscite del Modello Sospensione con i 5 ingressi del Multiplexer appena aggiunto che realizzerà il prodotto tra le 5 uscite. Ora si deve chiudere la catena e per fare questo basta inserire un blocco Matrice Guadagno impostandone il valore a K; colleghiamo l'uscita del multiplexer con l'ingresso di questa e l'uscita di questo con l'ingresso negativo di un nuovo blocco sommatore chiamato Somma, mentre l'uscita del blocco Somma viene collegata con l'ingresso denominato U del blocco Modello Sospensione.
Per concludere, si inserisce un blocco Step denominato r con i campi “Tempo di Step” e “Valore Finale” impostati a 0, collegato in uscita all'ingresso + del blocco somma, e si aggiunga un altro blocco Step denominato W all'ingresso W del blocco Modello Sospensione, con il campo “Tempo di Step” impostato a 0 e “Valore Finale” impostato a -0.1. Come ultimo blocco si deve inserire un blocco Scope che ci permette di vedere l'andamento della risposta del sistema per via grafica. Ecco come si presenta la rappresentazione tramite blocchi:



6.3 Risposta della catena chiusa

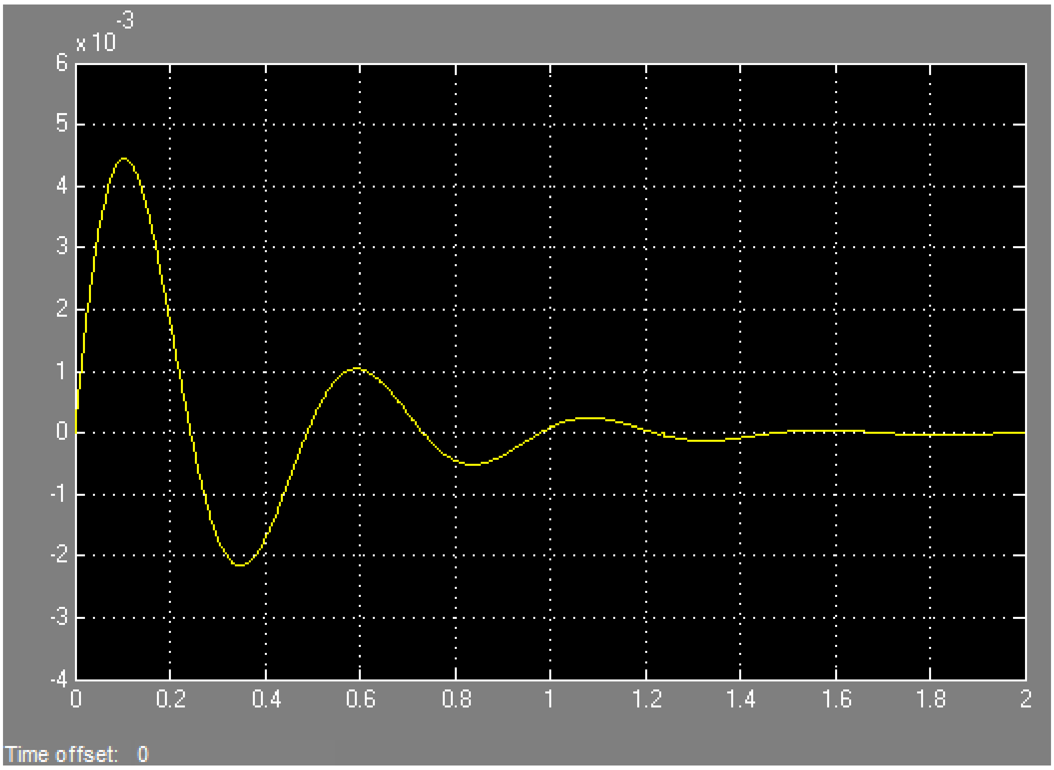
Vogliamo ora vedere la risposta della catena chiusa; per simulare il sistema si devono prima impostare dei parametri. Selezioniamo Parameters dal menù Simulation ed inseriamo 2 nel campo “Tempo d'arresto”; le richieste di progettazione richiedono un tempo d'assestamento inferiore ai 5 secondi e quindi il tempo da noi impostato soddisfa le nostre esigenze. Mancano da impostare i parametri fisici; questi possono essere impostati tramite i seguenti comandi nel Prompt di Matlab:

$m_1 = 2500;$
$m_2 = 320;$
$k_1 = 80000;$
$k_2 = 500000;$
$b_1 = 350;$
$b_2 = 15020;$

L'ultimo passo consiste nell'assegnare i valori alla matrice del guadagno di retroazione K. Per fare ciò basta che si inserisca il seguente comando nel prompt di Matlab:

$$K=[0 \quad 2.3e6 \quad 5e8 \quad 0 \quad 8e6]$$

Adesso si può simulare il sistema e vederne la risposta alla catena chiusa cliccando sopra al blocco Scope; il risultato è il seguente grafico:



Da questo grafico possiamo osservare che sono rispettati sia il requisito di avere un tempo d'assestamento inferiore ai 5 secondi, sia una sovra-elongazione inferiore al 5% rispetto alla grandezza del disturbo stradale; quindi il sistema rispetta le specifiche di progettazione.

Riferimenti bibliografici

- **Dispensa di Controlli Automatico, Sandro Zampieri**
- **Modellistica, analisi e controllo di sospensioni attive per autoveicoli, Alessandro Pisano**
- **www.engin.umich.edu, Control tutorials for Matlab and Simulink**