

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PADOVA

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria dell'Informazione

Tesi di Laurea

Modellistica e controllo di un manovellismo di spinta

Relatore:

Prof.ssa Maria Elena Valcher

Laureanda:

Virginia Manzolini

21 febbraio 2013

Anno Accademico 2012/2013

Indice

1	Descrizione del sistema	1
1.1	Modello I/O	2
1.2	Modello di stato non lineare	4
1.3	Analisi dei punti di equilibrio ad ingressi nulli	4
1.4	Modello di stato linearizzato	8
1.5	Funzione di trasferimento del sistema linearizzato	9
2	Sistema linearizzato in catena aperta	10
2.1	Stabilità	10
2.2	Risposta al gradino	10
2.3	Diagrammi di Bode	11
2.4	Diagramma di Nyquist	14
3	Analisi delle specifiche di controllo	15
3.1	Specifiche nel dominio del tempo	15
3.2	Specifiche nel dominio della frequenza	15
4	Progetto del controllore	19
4.1	Errore a regime permanente e tipo del sistema retroazionato	19
4.2	Controllore di tipo I	19
4.3	Controllore di tipo PI	23
4.4	Controllore di tipo PID	25
4.5	Controllore PID con rete ritardatrice	28
A	Codice Matlab	32

Capitolo 1

Descrizione del sistema

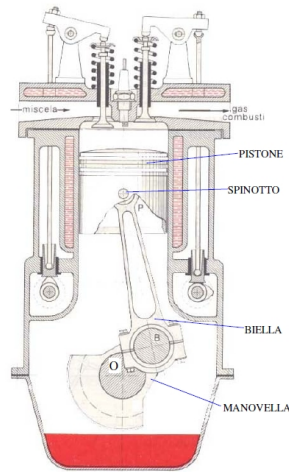


Figura 1.1: Schema di un manovellismo di spinta centrato

Un manovellismo di spinta, altrimenti detto dispositivo biella-manovella, è un sistema mediante il quale è possibile convertire il moto rotatorio continuo in un moto rettilineo alternato e viceversa. Esso viene solitamente impiegato nei motori alternativi a combustione interna o a vapore ed anche nelle macchine a fluido quali compressori e pompe.

Il sistema si compone principalmente di un pistone o stantuffo, una biella e una manovella. La manovella è un'asta vincolata a muoversi attorno al punto O con moto rotatorio impresso da un motore. La biella è collegata ai suoi due estremi, detti testa e piede di biella, rispettivamente alla manovella e al pistone. La rotazione della manovella fa muovere lo stantuffo con velocità variabile lungo una traiettoria rettilinea tra due punti estremi chiamati pun-

to morto superiore (PMS) e punto morto inferiore (PMI). Questi vengono detti punti morti perché sono punti in corrispondenza dei quali la velocità del pistone è nulla.

1.1 Modello I/O

Per derivare l'equazione differenziale che descrive la dinamica del sistema si consideri lo schema riportato in figura.

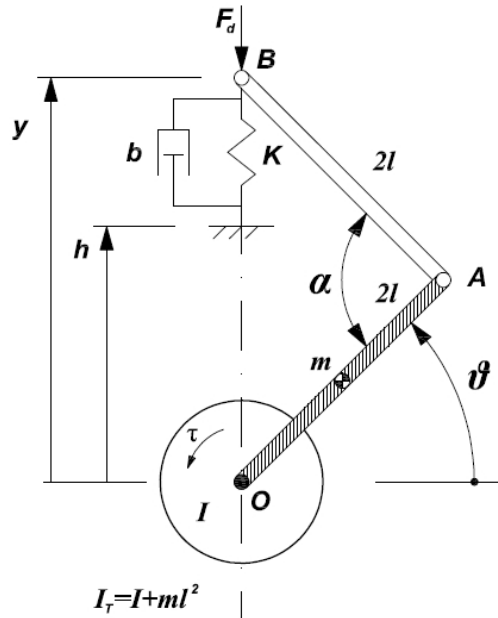


Figura 1.2: Schema di un manovellismo di spinta centrato

Il manovellismo è composto da una puleggia di inerzia I , una manovella (asta OA), rigidamente ancorata alla puleggia, e una biella (asta AB) entrambe di lunghezza $2l$ e massa rispettivamente M e m . L'estremità B è collegata ad una struttura fissa, posta ad altezza h sulla verticale passante per O, mediante uno smorzatore lineare di coefficiente b e una molla di costante elastica K . In questo punto (B) inoltre viene applicata una forza di disturbo F_d . L'asta OA è rigidamente ancorata alla puleggia che viene mossa per mezzo di un motore controllabile direttamente in coppia τ . θ indica la posizione angolare dell'asta OA.

Nella seguente tabella vengono riportati parametri del modello e i loro valori:

lunghezza aste	l	1 m
massa puleggia-asta OA	M	0.5 kg
inerzia puleggia-asta OA	I_T	2.5 kg m ²
altezza struttura fissa	h	3 m
coefficiente di smorzamento	b	2 N s/m
costante elastica	K	50 N/m
accelerazione di gravit�	g	9.8 m/s

Detta F_1 la somma vettoriale delle forze agenti sul punto B, vale la relazione:

$$F_1 = K(y - h) + b\dot{y} + F_d. \quad (1.1)$$

Indichiamo con F_3 e F_4 le reazioni vincolari (lungo le direzioni x e y) tra le due sbarrette.

Applicando la seconda legge di Newton alla sbarretta AB si ottiene la seguente equazione

$$m\ddot{y}_c = -F_1 - F_3 - mg \quad (1.2)$$

dove y_c   la coordinata sull'asse y del centro di massa (baricentro) della sbarretta AB.

Inoltre, essendo il sistema rotazionale,   necessario utilizzare l'equazione dei momenti. Ponendosi in un sistema solidale con il punto B si ottiene

$$ml^2\ddot{\theta} = ml(g + \ddot{y}) \cos \theta + 2l \cos \theta F_3 + 2l \sin \theta F_4 \quad (1.3)$$

mentre ponendosi in un sistema solidale con il punto O l'equazione che si ottiene   la seguente

$$(I + Ml^2)\ddot{\theta} = -Mgl \cos \theta + \tau + F_3 2l \cos \theta - F_4 2l \sin \theta \quad (1.4)$$

Le variabili y e y_c si possono esprimere come funzioni dell'angolo θ

$$y = 4l \sin \theta \quad (1.5)$$

$$y_c = 3l \sin \theta \quad (1.6)$$

Sostituendo (1.5) e (1.6) in (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4) si ottengono 4 equazioni nelle 6 variabili F_1 , F_3 , F_4 , θ , τ e F_d .

Le prime tre variabili vengono eliminate esplicitando F_1 da (1.1) e F_3 da (1.2)

e sostituendole in (1.3) e (1.4). Infine, sommando le ultime due equazioni ottenute, si giunge ad un'unica equazione differenziale nelle variabili θ , τ e F_d

$$\begin{aligned} \left[I + Ml^2 + 8ml^2 \cos^2 \theta + ml^2 \right] \ddot{\theta} = & (-3m - M)gl \cos \theta + 8ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + \\ & + \tau - 4Kl \cos \theta (4l \sin \theta - h) - 16bl^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} - 4l \cos \theta F_d \end{aligned} \quad (1.7)$$

Se si assume M molto maggiore rispetto a m il modello può essere approssimato come segue

$$I_T \ddot{\theta} = \tau - 8Kl^2 \sin(2\theta) + l(4Kh - Mg) \cos \theta - 16bl^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} - 4l \cos \theta F_d \quad (1.8)$$

dove $I_T = I + Ml^2$ rappresenta l'inerzia complessiva del sistema puleggia-asta OA.

1.2 Modello di stato non lineare

Dal modello I/O appena derivato è possibile derivare un modello in forma di stato non lineare. Il sistema è descritto da due variabili di stato $x = [x_1 \ x_2]^T = [\theta \ \dot{\theta}]^T$. Scegliendo come uscita y del sistema l'angolo θ e come ingresso il vettore $u = [\tau \ F_d]^T$, formato dalla coppia manipolabile τ e dalla forza di disturbo F_d , si ottiene il seguente modello

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{I_T} [-16bl^2 \cos^2 x_1 x_2 - 8Kl^2 \sin(2x_1) + l(4Kh - mg) \cos x_1 + \\ \quad + \tau - 4F_d l \cos x_1] \\ y = x_1 \end{cases}$$

1.3 Analisi dei punti di equilibrio ad ingressi nulli

Assumendo ingressi nulli $\tau = 0$ e $F_d = 0$ e imponendo la condizione $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, valida per i punti di equilibrio, nell'equazione (1.8) si giunge a

$$(16Kl \sin \bar{\theta} - 4Kh + mg) \cos \bar{\theta} = 0$$

Risolvendo

$$\cos \bar{\theta} = 0 \quad (1.9)$$

si ottengono due punti di equilibrio: $\bar{\theta}_1 = \frac{\pi}{2}$ e $\bar{\theta}_2 = -\frac{\pi}{2}$, mentre da

$$\sin \bar{\theta} = \frac{4Kh - mg}{16Kl} \quad (1.10)$$

si ottengono $\bar{\theta}_3 = \arcsin(\frac{4Kh-mg}{16Kl})$ e $\bar{\theta}_4 = \pi - \bar{\theta}_3$.

Bisogna ora studiare la stabilità dei quattro punti appena trovati. Per fare ciò si considera il modello di stato non lineare precedentemente derivato, assumendo nulli gli ingressi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{I_T} [-16bl^2 \cos^2 x_1 x_2 - 8Kl^2 \sin(2x_1) + l(4Kh - mg) \cos x_1] \end{cases}$$

Linearizzandolo attorno a $\bar{\theta}_1$, si ottiene la seguente matrice iacobiana

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

con $a_{21} = \frac{df_2(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{1}{I_T} (16Kl^2 - l(4Kh - mg))$ che ha autovalori $\lambda_1 = \sqrt{a_{21}}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{a_{21}}$, che si trovano rispettivamente nel semipiano destro aperto e nel sinistro, perciò il sistema linearizzato è instabile e, per il teorema della linearizzazione, $\bar{\theta}_1$ è punto di equilibrio instabile anche per il sistema non lineare.

Con l'ausilio di Matlab sono stati tracciati i seguenti grafici, che descrivono le evoluzioni temporali delle due variabili di stato del sistema linearizzato attorno a $\bar{\theta}_1$ partendo dalla condizione iniziale $x_0 = [x_{01} \ x_{02}]^T = [1 \ 0.5]^T$

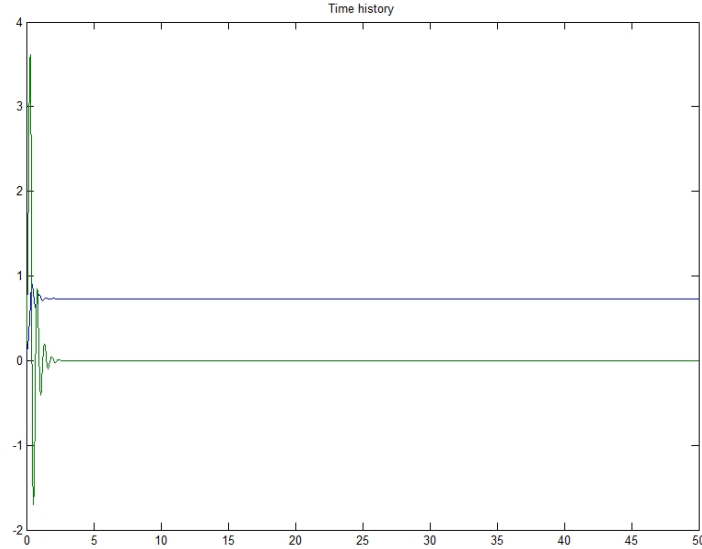


Figura 1.3: Evoluzione temporale delle variabili di stato x_1 e x_2

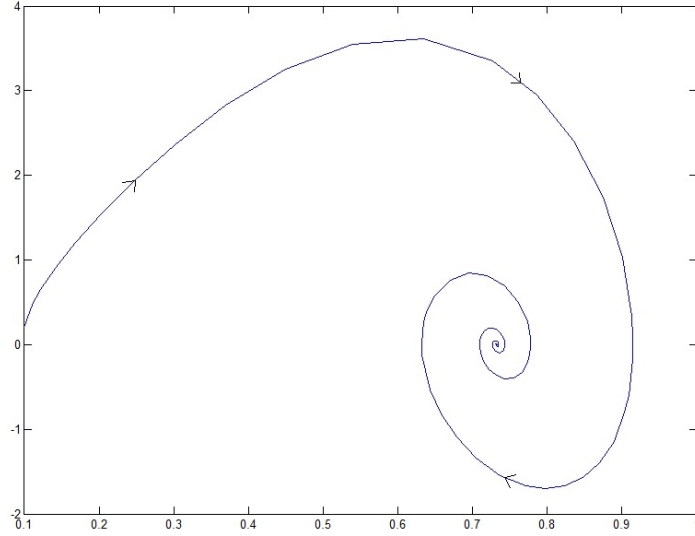


Figura 1.4: Traiettorie di stato del sistema linearizzato attorno a $\bar{\theta}_1$

I grafici confermano che si tratta di un equilibrio instabile.

Anche $\bar{\theta}_2$ è un punto di equilibrio instabile, infatti ripetendo l'analisi per questo punto si giunge alla matrice iacobiana

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

dove $a_{21} = \frac{df_2(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{1}{I_T}(16Kl^2 + l(4Kh - mg))$ che ha un autovalore nel semipiano destro aperto. Il sistema linearizzato attorno a $\bar{\theta}_3$ invece è caratterizzato dalla matrice iacobiana

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

con $a_{21} = \frac{df_2(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{1}{I_T}(-16Kl^2 + \frac{(4Kh - mg)^2}{16K})$ e $a_{22} = \frac{df_2(x_1, x_2)}{dx_2} = \frac{1}{I_T}(-16bl^2 + \frac{b}{(4K)^2}(4Kh - mg)^2)$, che ha come polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - a_{22}\lambda - a_{21}.$$

Essendo a_{21} e a_{22} , positivi la regola dei segni di Cartesio assicura che gli autovalori della matrice siano entrambi nel semipiano sinistro aperto e di conseguenza il sistema linearizzato risulta essere asintoticamente stabile. Quindi,

per il teorema di linearizzazione, $\bar{\theta}_3$ é un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare. Anche in questo caso vengono riportati, a conferma della stabilità del punto, i grafici che descrivono l'evoluzione temporale del sistema linearizzato attorno a $\bar{\theta}_3$ partendo dalla condizione iniziale $x_0 = [x_{01} \ x_{02}]^T = [1 \ 0.5]^T$.

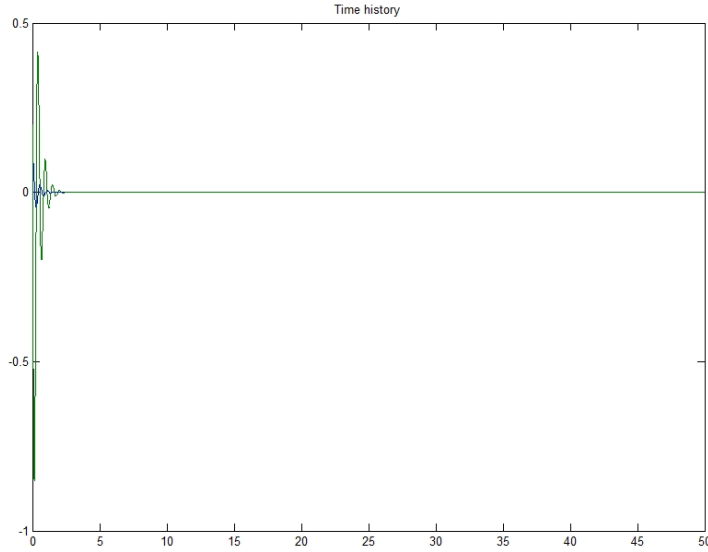


Figura 1.5: Evoluzione temporale delle variabili di stato x_1 e x_2

Linearizzando attorno a $\bar{\theta}_4$ si ottiene

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

con $a_{21} = \frac{df_2(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{1}{I_T}(-16Kl^2 \cos(2\bar{\theta}_4) - l(4Kh - mg) \sin \bar{\theta}_4)$ e $a_{22} = \frac{df_2(x_1, x_2)}{dx_2} = \frac{1}{I_T}(-16bl^2 \cos^2 \bar{\theta}_4)$, che analogamente al caso di $\bar{\theta}_3$ ha due autovalori a parte reale negativa. Anche questo punto quindi risulta essere asintoticamente stabile sia nel sistema linearizzato che in quello non lineare.

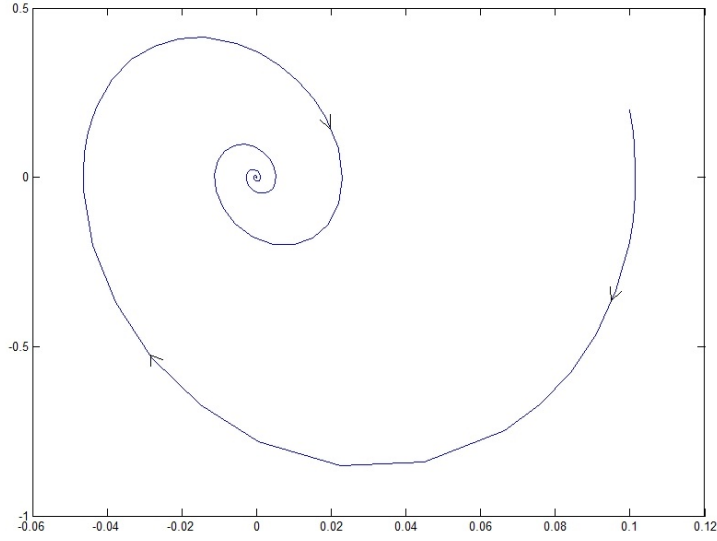


Figura 1.6: Traiettorie di stato del sistema linearizzato attorno a $\bar{\theta}_3$

1.4 Modello di stato linearizzato

Per rendere possibile il progetto di un controllore è necessario linearizzare il sistema nell'intorno di un suo punto di equilibrio. Si sceglie di approssimare il sistema in un intorno del punto $\bar{\theta}_3$ e quindi vengono definite le nuove variabili $\tilde{x} = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2]^T = [x_1 - \bar{\theta}_3 \ x_2]^T$. Si ottiene il sistema in forma di stato lineare

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ y = C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases}$$

in cui le matrici A , B , C e D sono definite nel seguente modo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = -\frac{16Kl^2}{I_T} \cos(2\bar{\theta}_3) - \frac{l}{I_T}(4Kh - mg) \sin \bar{\theta}_3 \text{ e}$$

$$a_{22} = -\frac{16bl^2}{I_T} \cos^2 \bar{\theta}_3$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$b_{21} = \frac{1}{I_T} \text{ e}$$

$$b_{22} = -\frac{4l \cos \bar{\theta}_3}{I_T}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine sostituendo i valori numerici si ottengono

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -143 & -5.72 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & -1.07 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5 Funzione di trasferimento del sistema linearizzato

Dal modello di stato precedentemente derivato si può calcolare la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}B + D = [G_u(s) \quad G_d(s)]$$

$$G_u(s) = \frac{0.4}{s^2 + 5.72s + 143}$$

$$G_d(s) = \frac{-1.07}{s^2 + 5.72s + 143}$$

dove $G_u(s) = \frac{Y(s)}{T(s)}$ e $G_d(s) = \frac{Y(s)}{F_D(s)}$ rappresentano rispettivamente la funzione di trasferimento tra l'ingresso manipolabile τ e l'uscita e tra l'ingresso di disturbo F_d e l'uscita.

Capitolo 2

Sistema linearizzato in catena aperta

2.1 Stabilità

Viene ora esaminato il sistema in catena aperta descritto dalla $G_u(s)$. Essendo la rappresentazione disponibile per $G_u(s)$ irriducibile, per studiare la stabilità del sistema è necessario controllare se il polinomio

$$d(s) = s^2 + 5.72s + 143$$

è di Hurwitz. Essendo $d(s)$ un polinomio di secondo grado è sufficiente far ricorso alla regola dei segni di Cartesio che assicura la presenza di due radici a parte reale negativa: il sistema è quindi BIBO stabile. A conferma di ciò, col comando `roots` di Matlab, che restituisce le radici di un polinomio, si ottengono come poli di $G_u(s)$

$$\lambda_1 = -2.86 + i11.6112$$

$$\lambda_2 = -2.86 - i11.6112$$

Essendo queste due radici complesse coniugate a parte reale negativa danno luogo a modi oscillatori smorzati. Il risultato era prevedibile poiché il sistema approssima quello non lineare nell'intorno di un punto asintoticamente stabile e ci si aspetta quindi che lo sia anche il sistema approssimato.

2.2 Risposta al gradino

$G_u(s)$ descrive un sistema del secondo ordine caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati $\lambda_{1,2} = \sigma \pm \omega$ e può quindi essere espresso nella

forma

$$G_u(s) = \frac{K_b}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2}$$

dove K_b è il guadagno di Bode, $\omega_n = |\lambda_{1,2}| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ è la pulsazione naturale e $\xi = -\frac{\sigma}{\omega}$ il coefficiente di smorzamento. Analizzando la risposta al gradino del sistema valutiamo il tempo di assestamento, cioè il tempo necessario affinché l'uscita si porti e si mantenga definitivamente in un intorno del valore finale $w_{-1}(+\infty) = 2.800 \cdot 10^{-3}$. Precisamente calcoliamo in tempo di assestamento all'1%, tempo impiegato dal sistema per portare l'uscita nella fascia tra $0.99w_{-1}(+\infty) = 2.772 \cdot 10^{-3}$ e $1.01w_{-1}(+\infty) = 2.828 \cdot 10^{-3}$. Per un sistema del secondo ordine il tempo di assestamento è esprimibile come

$$t_s = \frac{1}{2\xi\omega_n} \ln \frac{10000}{1 - \xi^2}$$

e con tale formula otteniamo $t_s = 1.6228s$. La massima sovraelongazione percentuale, cioè l'escursione massima rispetto al valore di regime, è esprimibile come

$$S_{\%} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} 100\%$$

e vale, quindi $S_{\%} = 45.99\%$. Inoltre essendo $G_u(0) = \frac{0.4}{143} \neq 0$ il sistema insegue il gradino con un errore di regime permanente, costante, non nullo e pari a

$$e_{rp} = 1 - G_u(0) = 0.9972$$

2.3 Diagrammi di Bode

Dai diagrammi di Bode di G_u si nota la presenza di un picco di risonanza. Ciò era prevedibile osservando il coefficiente di smorzamento $|\xi| = 0.24 < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Il picco si trova in corrispondenza alla pulsazione di risonanza

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} = 11.248 \text{ rad/s}$$

ed ha un'ampiezza

$$|M_{rel}|_{db} = 20 \log(2|\xi|\sqrt{1 - \xi^2}) \cong -6.63 \text{ dB}$$

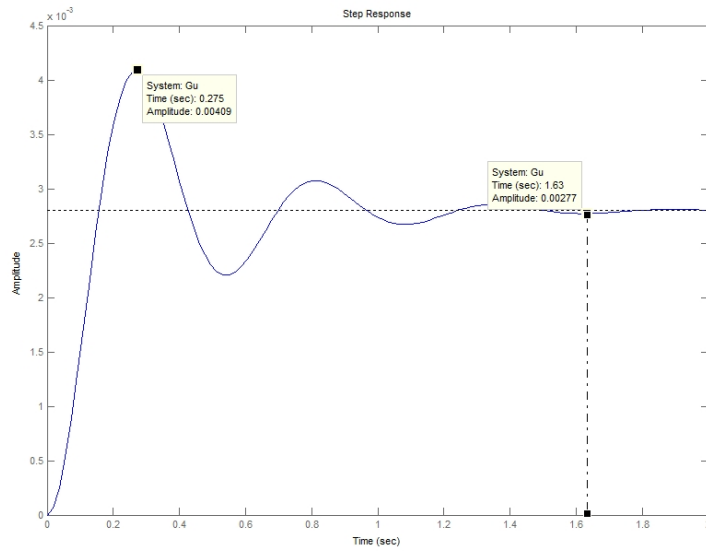


Figura 2.1: Risposta al gradino del sistema di funzione di trasferimento $G_u(s)$

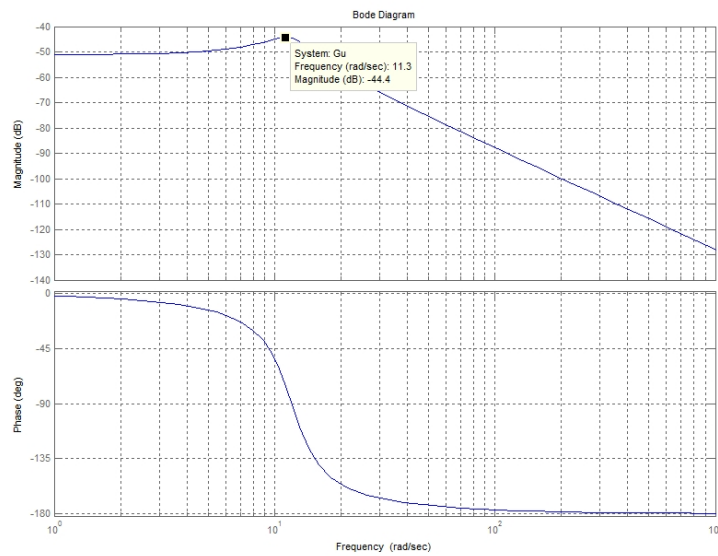


Figura 2.2: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase di $G_u(s)$

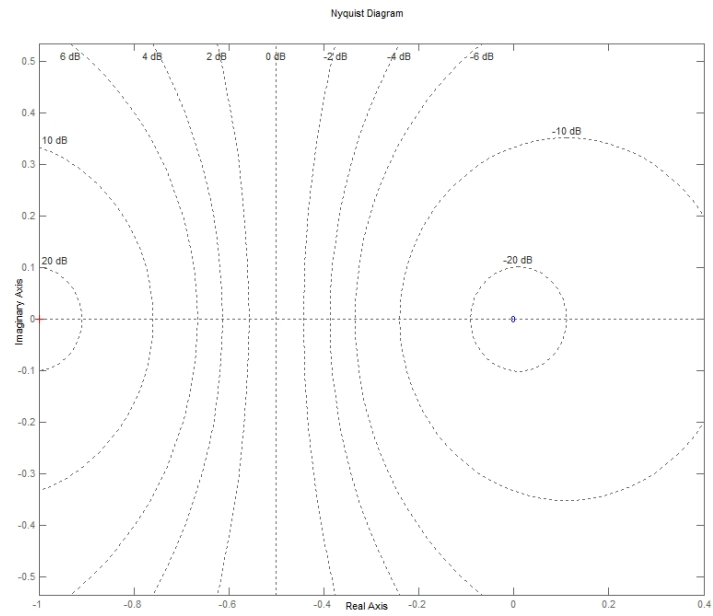


Figura 2.3: Diagramma di Nyquist di $G_u(s)$

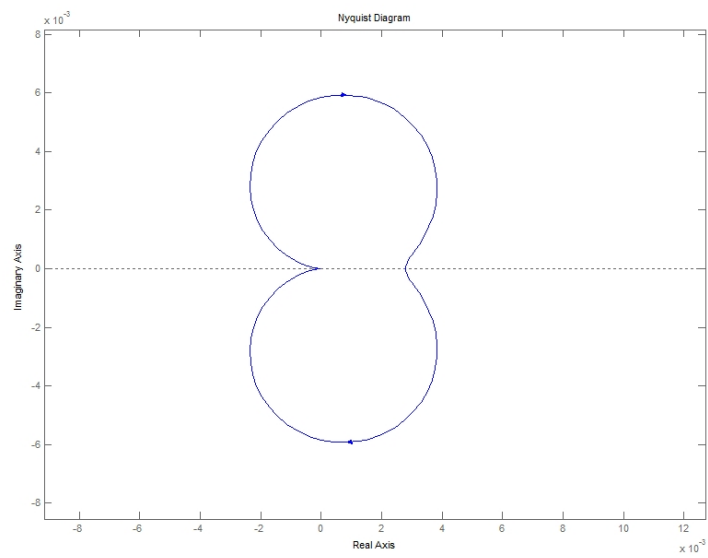


Figura 2.4: Zoom del diagramma di Nyquist di $G_u(s)$

2.4 Diagramma di Nyquist

Come si può notare, il diagramma di Nyquist si mantiene interamente al finito, in particolare non esce mai dalla circonferenza di raggio unitario e centro l'origine, e non passa per il punto $-1 + j0$ del piano complesso: è allora possibile applicare il criterio di Nyquist. Il diagramma non compie alcun giro attorno al punto $-1 + j0$, cioè $N = 0$, e la funzione di trasferimento $G_u(s)$ è BIBO stabile, quindi per il criterio ridotto di Nyquist si può concludere che il sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G_u(s)$ sarà BIBO stabile a sua volta.

Capitolo 3

Analisi delle specifiche di controllo

3.1 Specifiche nel dominio del tempo

Per garantire un corretto funzionamento del manovellismo si richiede che

- la posizione angolare θ che descrive la configurazione del manovellismo passi da un valore iniziale di $\theta(t = 0) = \pi/6$ al valore $\theta(t \rightarrow +\infty) = \pi/3$, entrando e mantenendosi nella fascia $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{300} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{300}$ entro e non oltre i 10 ms;
- il max valore di θ , θ_{max} , non superi mai $\theta^* = \frac{9}{24}\pi$;
- assumendo che la forza di disturbo agente sul sistema sia del tipo $F_d(t) = 75 \sin(\omega_d t)$, l'effetto di questa oscillazione sull'uscita sia inferiore a $\frac{\pi}{300}$ per $\omega_d \leq 10$ rad/s;
- supponendo di misurare la posizione angolare θ con un sensore che presenta delle imperfezioni costruttive che comportano un rumore additivo sulla misura del tipo $\nu = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{20k} \sin(\omega_k t + k\frac{\pi}{3})$ con $\omega_k = (1 + \frac{(k-1)}{20})10^4 \text{ rad/s}$, $k = 1, 2, 3$ gli effetti del rumore di misura siano inferiori a ± 0.005 rad.

3.2 Specifiche nel dominio della frequenza

Lo schema di controllo che verrà utilizzato è riportato in Figura 3.1. Il sistema descritto da $G_u(s)$ è chiuso in retroazione unitaria negativa e viene preceduto da un dispositivo di controllo con funzione di trasferimento $C(s)$ mediante il

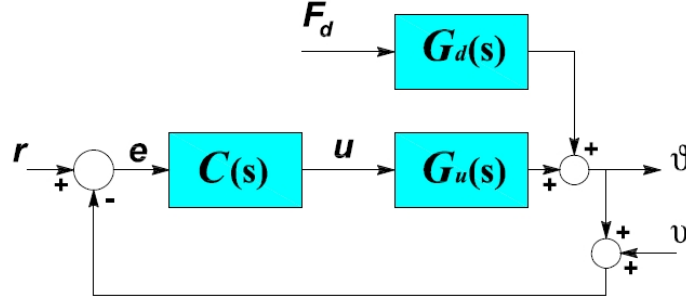


Figura 3.1: Schema a blocchi complessivo

quale si cercherà di soddisfare tutte le specifiche precedentemente elencate. Si cercherà inoltre di progettare il controllore in modo tale che il sistema complessivo chiuso in retroazione sia ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti. Facendo riferimento a questo schema le specifiche nel dominio del tempo vengono tradotte in specifiche nel dominio della frequenza. La richiesta di entrare nella fascia $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{300} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{300}$ entro e non oltre i 10 ms equivale a richiedere un tempo di assestamento T_a al 2% inferiore ai 10 ms. Per un sistema del secondo ordine esiste un legame tra tempo di assestamento e pulsazione di attraversamento ω_n

$$e^{-\xi\omega_n T_a} = 0.02$$

$$-\xi\omega_n T_a = \ln 0.02 = -4$$

$$\omega_n = \frac{4}{\xi T_a} \approx 1000 \text{ rad/s}$$

Il massimo valore θ_{max} raggiunto da θ è invece legato alla sovraelongazione dalla relazione

$$S_{\%} = \frac{\theta_{max} - \theta(\infty)}{\theta(\infty) - \theta(0)} 100\% = \frac{\frac{9}{24}\pi - \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}} 100\% \leq 25\%$$

e in un sistema del secondo ordine la sovraelongazione può essere espressa come

$$S_{\%} = e^{(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})} 100\%$$

$$\xi = 0.40$$

ed essendo il margine di fase $M_\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

$$M_\varphi \approx 40^\circ$$

Si consideri ora la specifica riguardante l'effetto della forza di disturbo sull'uscita. Per derivare la funzione di trasferimento tra l'ingresso di disturbo F_d e l'uscita del sistema θ si assumano nulli nello schema descritto in Figura 3.1 l'ingresso r e il rumore di misura ν

$$\Theta(s) = G_d(s)F_d(s) + C(s)G_u(s)E(s)$$

Nelle condizioni in cui è stato posto il sistema $E(s) = -\Theta(s)$ e quindi si ha

$$\Theta(s) = G_d(s)F_d(s) - C(s)G_u(s)\Theta(s)$$

da cui si trova la funzione di trasferimento

$$\bar{G}(s) = \frac{\Theta(s)}{F_d(s)} = \frac{G_d(s)}{1 + C(s)G_u(s)}$$

Il controllore $C(S)$ sarà progettato in modo da rendere il sistema chiuso in retroazione BIBO stabile. Supponendo che le condizioni iniziali del sistema siano tali da garantire un'evoluzione libera convergente a zero si può approssimare l'effetto sull'uscita della forza F_d con la sola risposta a regime permanente che, per ingressi sinusoidali, ha la seguente forma

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega)|75 \sin(\omega_d t + \angle \bar{G}(j\omega))$$

Si deve ora imporre che l'uscita generata dalla forza di disturbo, la cui espressione è appena stata trovata, sia inferiore a $\frac{\pi}{300}$

$$|y(t)| \leq \frac{\pi}{300}$$

ed essendo nel caso peggiore $\sin(\omega_d t + \angle \bar{G}(j\omega)) = 1$ si ottiene

$$|75\bar{G}(j\omega)| = \left| \frac{75G_d(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_u(j\omega)} \right| \leq \frac{\pi}{300}$$

Come si può vedere dalla Figura 3.2, $|G_d|_{dB} \leq -37.8$ dB, cioè $|G_d| \leq 0.014$ nelle frequenze di interesse $\omega_d \leq 10$ rad/s, quindi

$$|1 + C(j\omega)G_u(j\omega)| \cong |C(j\omega)G_u(j\omega)| \geq 100$$

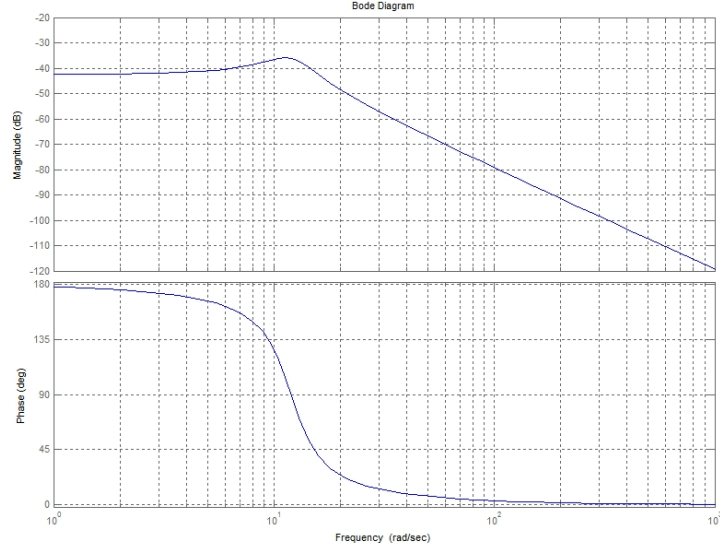


Figura 3.2: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase di $G_d(s)$

$$|C(j\omega)G_u(j\omega)| \geq 40 \text{ dB}$$

Per la specifica sul rumore di misura si segue il procedimento appena adottato per quella sugli effetti della forza di disturbo. La funzione di trasferimento è

$$\frac{\Theta(s)}{N(s)} = \frac{C(s)G_u(s)}{1 + C(s)G_u(s)}$$

e introducendo le medesime approssimazioni si ottiene

$$|C(j\omega)G_u(j\omega)| \leq \frac{0.005}{\sum_{k=1}^3 \frac{1}{20k}}$$

$$|C(j\omega)G_u(j\omega)| \leq -25 \text{ dB}$$

Riassumendo, le specifiche che il sistema deve soddisfare sono

- pulsazione di attraversamento $\omega_n \approx 1000 \text{ rad/s}$
- margine di fase almeno pari a $M_\varphi \approx 40^\circ$
- $|1 + C(j\omega)G_u(j\omega)| \cong |C(j\omega)G_u(j\omega)| \geq 40 \text{ dB}$ per frequenze inferiori a 10 rad/s
- $|C(j\omega)G_u(j\omega)| \leq -25 \text{ dB}$ per frequenze superiori a 10^4 rad/s

Capitolo 4

Progetto del controllore

In questo capitolo si procede alla sintesi di una serie di compensatori allo scopo di trovarne uno che soddisfi tutte le specifiche precedentemente descritte e che, inserito nello schema di controllo presentato nel precedente capitolo, permetta al sistema di ottenere le prestazioni desiderate. È sempre consigliabile limitare la complessità del controllore, in quanto questa si traduce spesso nella complessità della sua realizzazione pratica. Si cercherà quindi di introdurre nel controllore il minor numero di zeri e poli per mantenerlo il più possibile semplice, compatibilmente con il soddisfacimento delle specifiche.

4.1 Errore a regime permanente e tipo del sistema retroazionato

I compensatori che verranno progettati dovranno fare in modo che il sistema ad anello chiuso inseguia i segnali costanti in ingresso con errore di regime permanente nullo e quindi sia di tipo 1. È dunque necessario che la funzione in catena aperta $C(s)G_u(s)$ presenti un polo nell'origine e dunque tutti i controllori che verranno esaminati dovranno essere del tipo

$$C(s) = \frac{K_c}{s} C_o(s)$$

4.2 Controllore di tipo I

Per primo si consideri un compensatore integrale (di tipo I) descritto da una funzione di trasferimento molto semplice del tipo

$$C_I(s) = \frac{K_i}{s}$$

Modificando il guadagno K_i in maniera opportuna si può cercare di soddisfare la specifica sulla pulsazione di taglio. Un valore che permette di ottenere un diagramma delle ampiezze con ω_a molto prossima a quella desiderata (10^3 rad/s) è

$$K_i = 250 \cdot 10^7.$$

Dalla Figura 4.1 si può notare che anche le specifiche riguardanti il rumore di misura e la reiezione del disturbo vengono rispettate, tuttavia il margine di fase è di $M_\varphi = -90^\circ$ ed è ben lontano da quello richiesto. Inoltre la funzione di trasferimento del sistema in catena aperta $C_I(s)G_u(s)$ non ha poli nel semipiano destro aperto e presenta un guadagno $K_b(C_I)K_b(G_u)$ positivo: in questi casi secondo il criterio di Bode il sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se il sistema in catena aperta presenta un margine di fase positivo. Di conseguenza il margine di fase che abbiamo ottenuto è non solo insoddisfacente dal punto di vista del rispetto delle specifiche ma lo è anche per quanto riguarda la stabilità BIBO, essenziale in ogni sistema di controllo. La conferma dell'instabilità del sistema chiuso in retroazione si ha osservando la sua risposta al gradino in Figura 4.2 e il diagramma di Nyquist di $C_I(s)G_u(s)$ nelle Figure 4.3 e 4.4. Il diagramma modificato compie 2 giri in senso orario attorno al punto $-1 + j0$ ($N = -2$) e la funzione di trasferimento ha un numero di poli a parte reale positiva pari a $n_{G+} = 0$, quindi la funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa ha $n_{W+} = 2$ poli a parte reale positiva e risulta perciò instabile. Il guadagno K_i però non influenza in alcun modo il margine di fase e quindi non si riesce a trovare un controllore di tipo I che renda BIBO stabile il sistema e soddisfi la specifica sul margine di fase. É dunque necessario l'impiego di un controllore più complesso che permetta l'aggiunta di zeri stabili che hanno l'effetto di alzare il diagramma delle fasi.

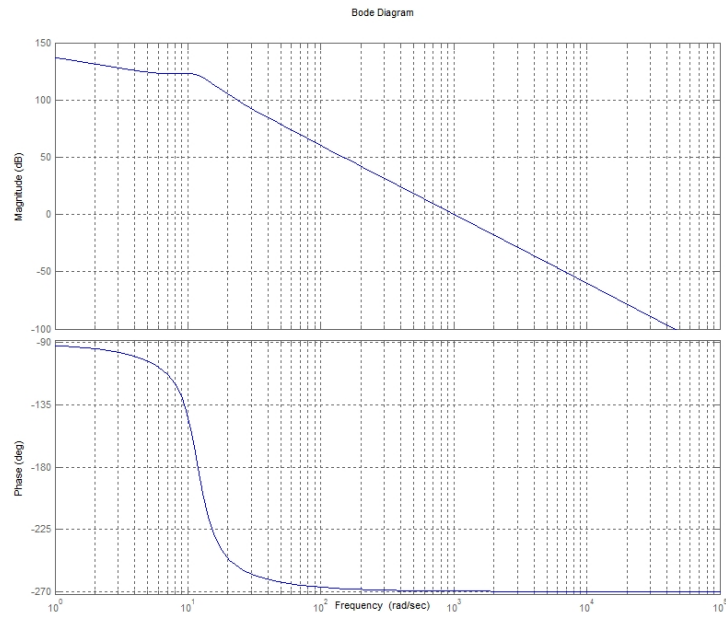


Figura 4.1: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase di $C_I(s)G_u(s)$

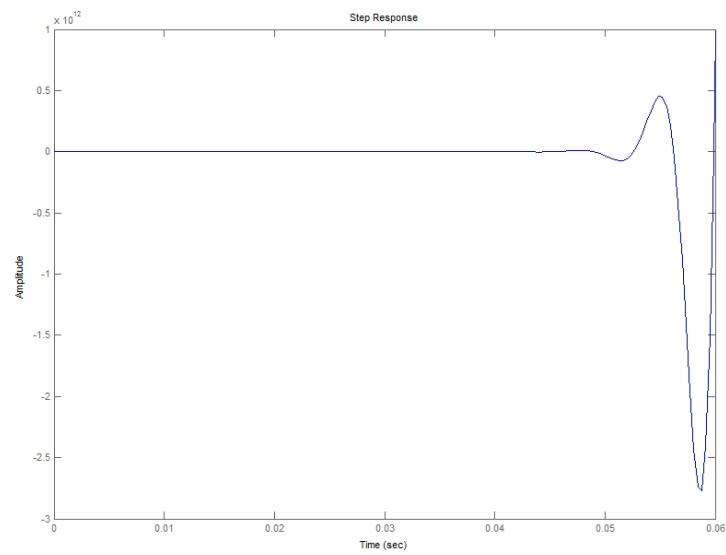


Figura 4.2: Risposta al gradino di $C_I(s)G_u(s)$ chiuso in retroazione

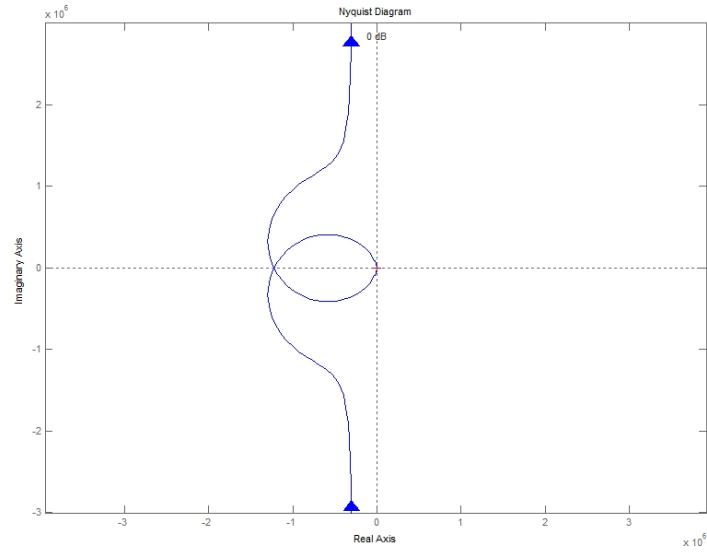


Figura 4.3: Diagramma di Nyquist di $C_I(s)G_u(s)$

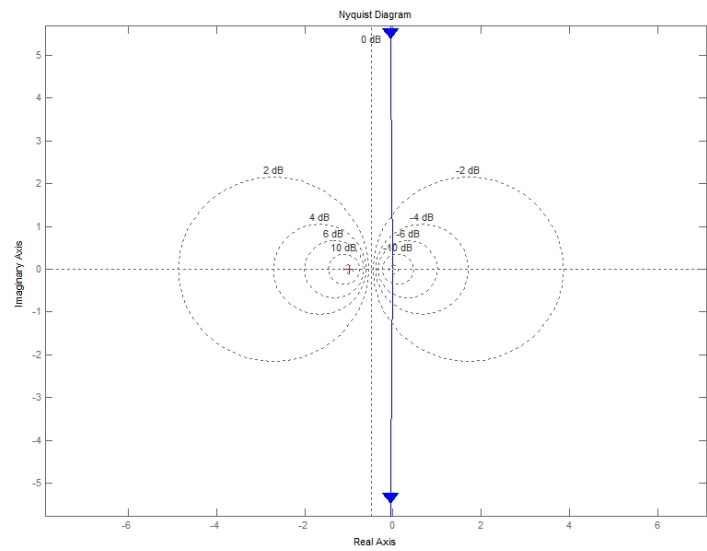


Figura 4.4: Ingrandimento del diagramma di Nyquist di $C_I(s)G_u(s)$

4.3 Controllore di tipo PI

Si consideri un controllore di tipo PI (proporzionale e integrale) descritto da una funzione di trasferimento del tipo

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p}{s}(s + \tau)$$

dove $\tau = \frac{K_i}{K_p}$, il quale permette l'aggiunta di uno zero rispetto al controllore analizzato in precedenza. Aggiustando i valori K_p e K_i si riescono a soddisfare le specifiche sulla pulsazione di attraversamento, reiezione del disturbo e rumore di misura. Ad esempio con $K_i = 168 \cdot 10^6$ e $K_p = 28 \cdot 10^5$ si ottengono i diagrammi di Bode rappresentati in Figura 4.5. Si può notare un miglioramento del margine di fase che è diventato di $M_\varphi \approx 0^\circ$ ma è ancora insufficiente per garantire la stabilità del sistema retroazionato, come pure il soddisfacimento della specifica. Il criterio di Nyquist esteso infatti permette di concludere che la funzione di trasferimento in catena chiusa presenta ancora 2 poli a parte reale positiva e quindi il sistema resta instabile.

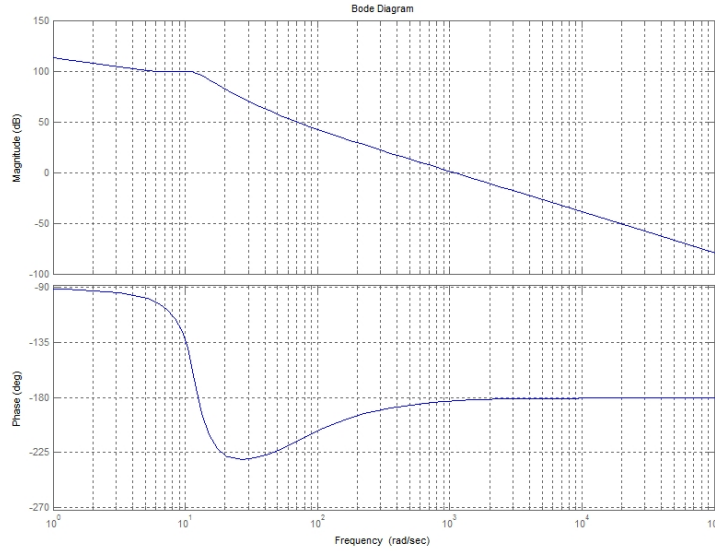


Figura 4.5: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase di $C_{PI}(s)G_d(s)$

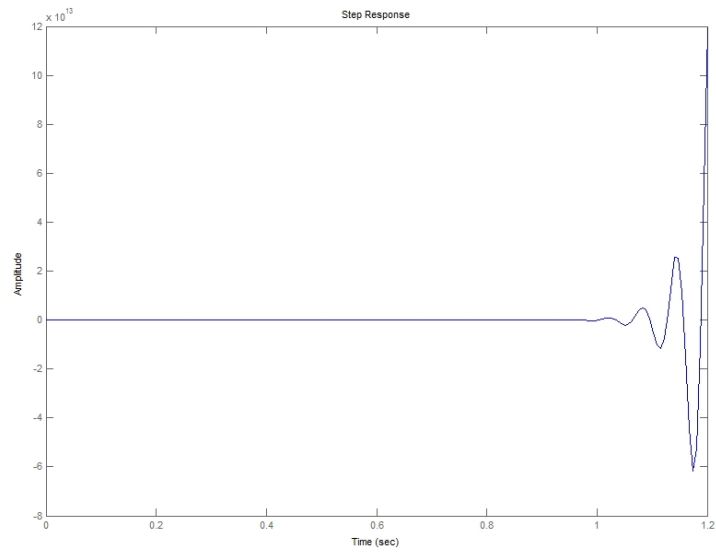


Figura 4.6: Risposta al gradino di $C_{PI}(s)G_u(s)$ chiuso in retroazione

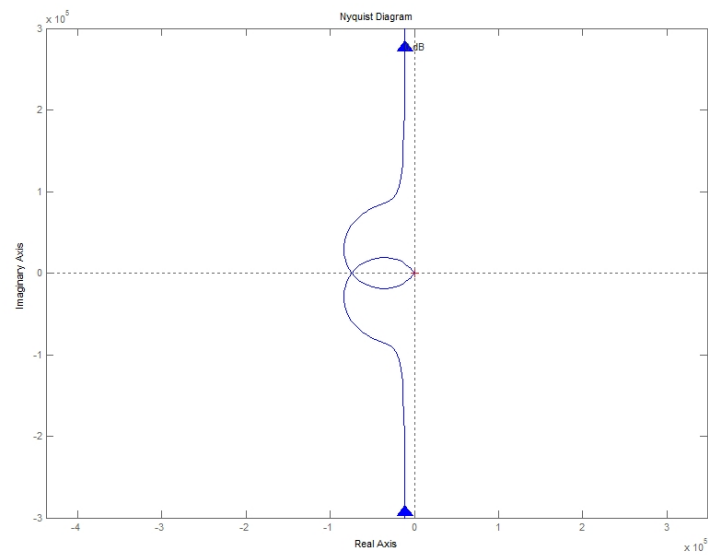


Figura 4.7: Diagramma di Nyquist di $C_{PI}(s)G_u(s)$

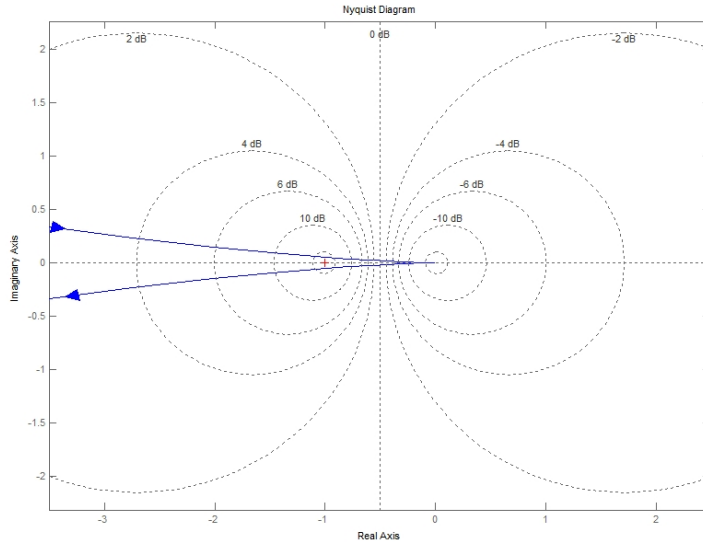


Figura 4.8: Ingrandimento del diagramma di Nyquist di $C_{PI}(s)G_u(s)$

4.4 Controllore di tipo PID

Si prende ora in esame un controllore di tipo PID (proporzionale, integrale e derivativo) la cui funzione di trasferimento

$$C_{PID}(s) = \frac{K_i}{s} + K_p + K_d s = \frac{K_i}{s} \left(1 + \frac{K_p}{K_i} s + \frac{K_d}{K_i} s^2 \right)$$

può essere anche riscritta come

$$C_{PID}(s) = \frac{K_i}{s} (s + \tau_1)(s + \tau_2).$$

L'aggiunta di un ulteriore zero permette di aumentare il margine di fase e portarlo a valori positivi che, per quanto afferma il criterio di Bode, rendono stabile il sistema retroazionato: ad ulteriore conferma al diagramma di Nyquist si può applicare il criterio di Nyquist ridotto, essendo il sistema in catena

aperta BIBO stabile, e quindi osservando che $N = 0$ si può concludere che il sistema retroazionato è BIBO stabile. Con i valori $K_i = 2100$, $\tau_1 = 150$ e $\tau_2 = 200$, si ottiene un controllore con pulsazione di attraversamento pari a quella desiderata, margine di fase superiore a 40° e ampiezza del diagramma di Bode ben superiore ai 40 dB richiesti per pulsazioni minori di 10 rad/s. Dalla risposta al gradino in Figura 4.10 infatti si può notare che il tempo di assestamento è di circa 9.72 ms e che la sovraelongazione è del 22%. Tuttavia l'ampiezza del diagramma di Bode per pulsazioni superiori a 10^4 rad/s è più alta dei -25 dB richiesti ed infatti dalla Figura 4.11 si vede che l'oscillazione dell'uscita dovuta al rumore di misura è ben più grande del limite dei ± 0.005 . Modificando il guadagno e la posizione dei due zeri si riesce a soddisfare quest'ultima specifica ma questo comporta sempre un abbassamento eccessivo del margine di fase e il conseguente aumento della sovraelongazione oltre i limiti imposti dalle specifiche.

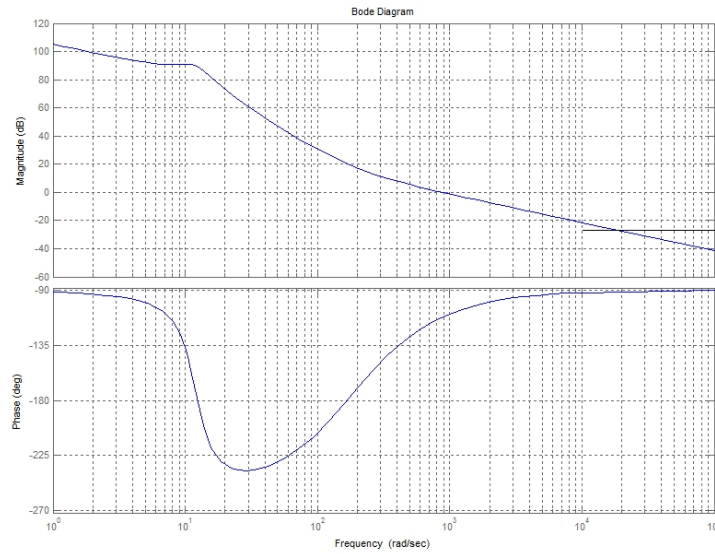


Figura 4.9: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase di $C_{PID}(s)G_u(s)$

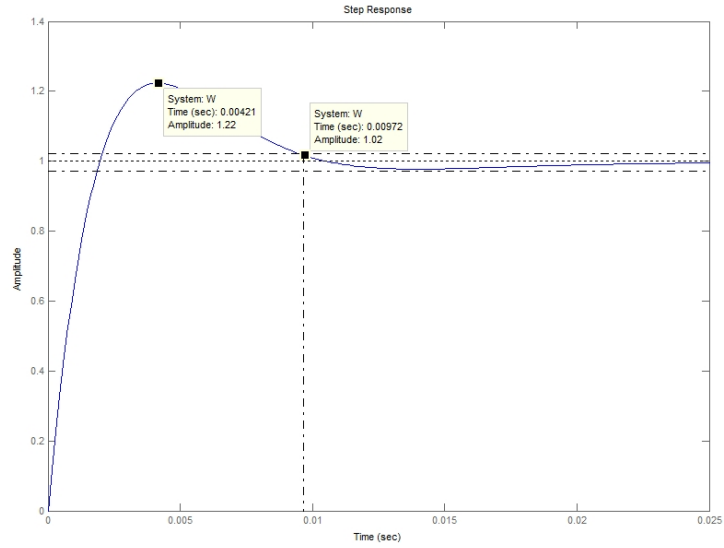


Figura 4.10: Risposta al gradino di $C_{PID}(s)G_u(s)$ chiuso in retroazione

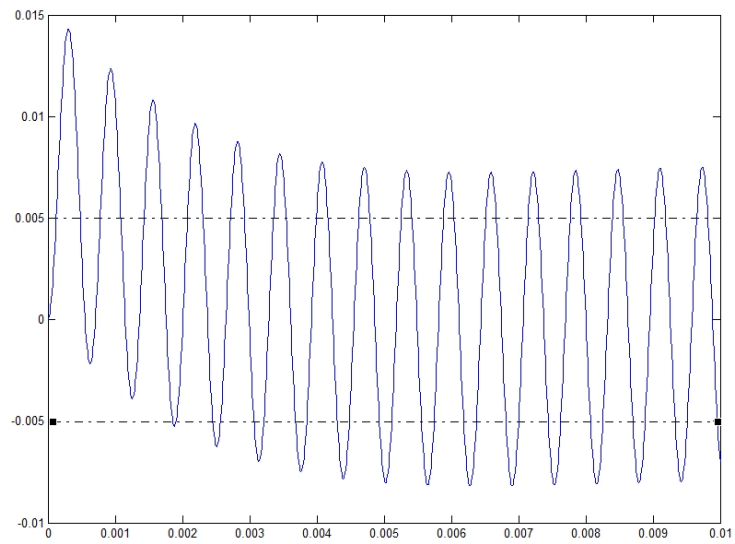


Figura 4.11: Effetto sull'uscita dovuto al rumore di misura con $C_{PID}(s)$

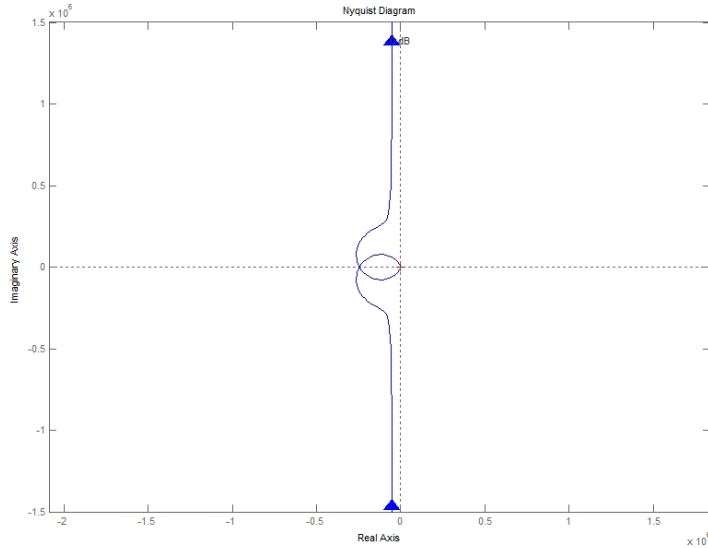


Figura 4.12: Diagramma di Nyquist di $C_{PID}(s)G_u(s)$

4.5 Controllore PID con rete ritardatrice

Il controllore precedentemente descritto soddisfa tutte le specifiche tranne quella relativa al rumore di misura. Per cercare di migliorarlo viene inserita una rete ritardatrice per abbassare l'ampiezza per frequenze superiori a $10^4 rad/s$.

$$C_{rit}(s) = \frac{785.75(s + 40)(s + 155)(s + 9800)}{s(s + 2000)}$$

Con questo controllore il sistema retroazionato è stabile perché il margine di fase è positivo e inoltre si ottiene un tempo di assestamento di $9.84ms$, una sovraelongazione percentuale del 19% e l'oscillazione dell'uscita ovuta al rumore di misura dopo $1.71ms$ si mantiene entro la fascia ± 0.005 .

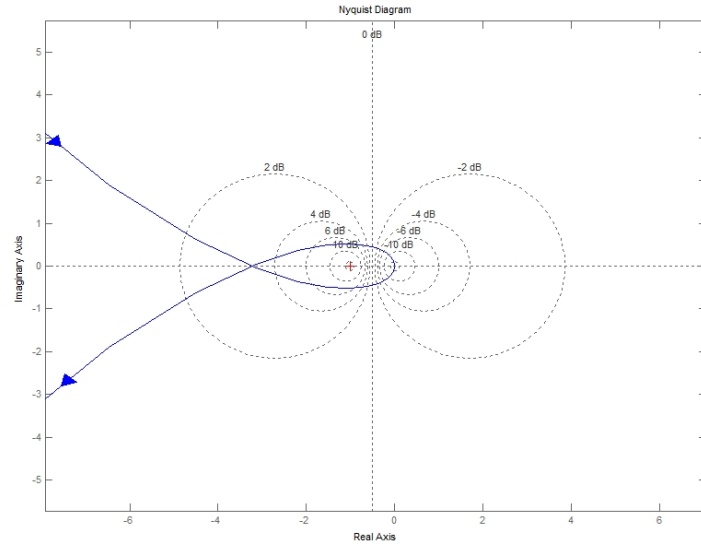


Figura 4.13: Ingrandimento del diagramma di Nyquist di $C_{PID}(s)G_u(s)$

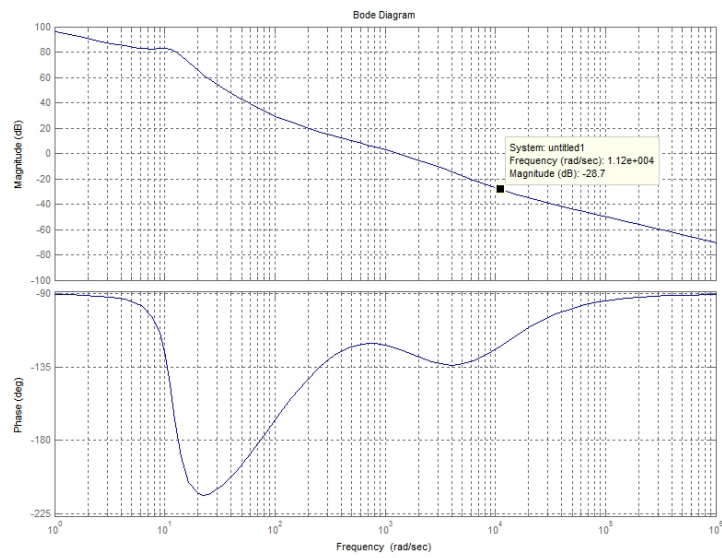


Figura 4.14: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase di $C_{rit}(s)G_u(s)$

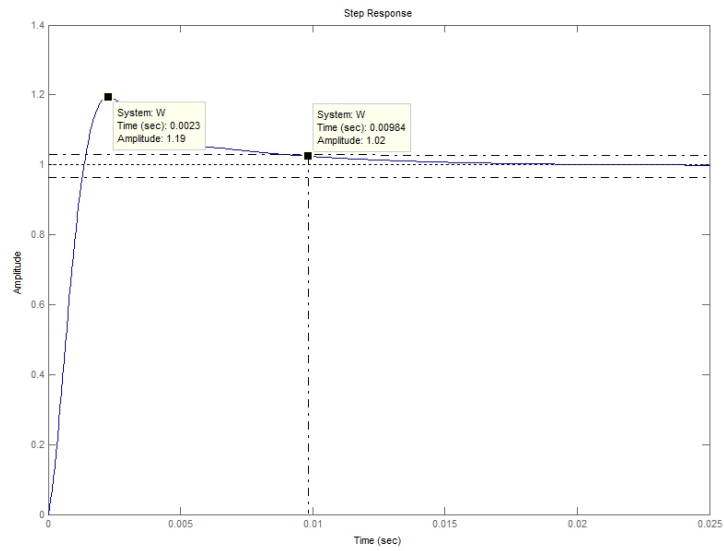


Figura 4.15: Risposta al gradino di $C_{rit}(s)G_u(s)$ chiuso in retroazione

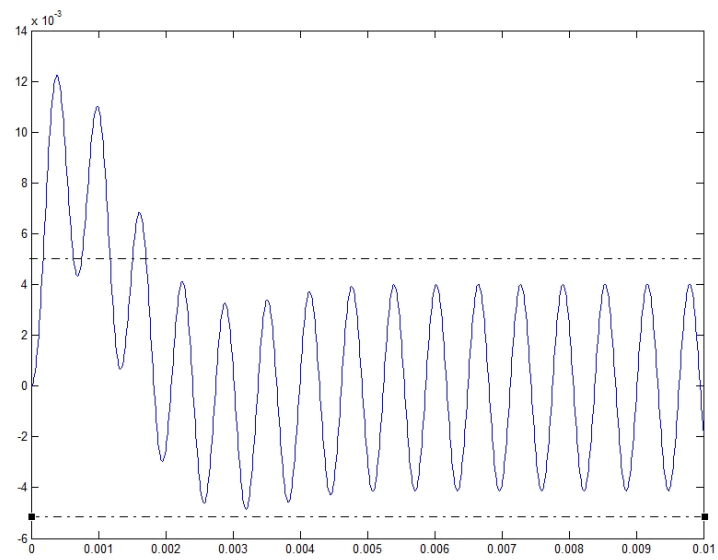


Figura 4.16: Effetto sull'uscita dovuto al rumore di misura con $C_{rit}(s)$

Appendice A

Codice Matlab

```
%%analisi di Gu(s)%%
%%diagrammi di Bode%%
Gu=tf([-0.4],[1 5.72 143]);
bode(Gu)
grid on

%%diagramma di Nyquist di Gu(s)%%
figure
nyquist(Gu)
axis equal
grid on

%%risposta al gradino di Gu(s)%%
figure
step(Gu)

%%controllore di tipo I%%
Ki=2499683403;
CIGu=tf([0.4*Ki],[1 5.72 143 0]);

%%Bode%%
figure
bode(CIGu)
grid on

%%nyquist%%
sys=tf([1],[1]);
W=feedback(CIGu,sys);
```

```

figure
nyquist(W)
axis equal
grid on

%%risposta al gradino%%
figure
step(W)

%%controllore di tipo PI%%
zPI=[-60];
pPI=[0];
kPI=[2800000];
CPI=zpk(zPI,pPI,kPI);
CPI=tf(CPI);

%%Bode%%
bode(CPI*Gu)
grid on

%%Nyquist%%
figure
nyquist(CPI*Gu)
axis equal
grid on

%%risposta al gradino%%
figure
W=feedback(CPI*Gu,sys);
step(W)

%%controllore di tipo PID%%
zPID=[-150 -200];
pPID=[0];
kPID=[2100];
CPID=zpk(zPID,pPID,kPID);
CPID=tf(CPID);

%%Bode%%
bode(CPID*Gu)
grid on

```

```

%%Nyquist%%
figure
nyquist(CPID*Gu)
axis equal
grid on

%%risposta al gradino%%
figure
W=feedback(CPID*Gu,sys);
step(W)

%%rumore di misura%%
t=(0:0.00001:0.01);
n=0.092*sin(10000*t);
y=lsim(W,n,t);
figure
plot(t,y)

%%controllore PID con rete ritardatrice%%
zRIT=[-40 -155 -9800];
pRIT=[0 -2000];
kRIT=[785.75];
CRIT=zpk(zRIT,pRIT,kRIT);
CRIT=tf(CRIT);

%%Bode%%
bode(CRIT*Gu)
grid on

%%Nyquist%%
figure
nyquist(RIT*Gu)
axis equal
grid on

%%risposta al gradino%%
figure
W=feedback(RIT*Gu,sys);
step(W)

```

```
%%rumore di misura%%  
t=(0:0.00001:0.01);  
n=0.092*sin(10000*t);  
y=lsim(W,n,t);  
figure  
plot(t,y)
```

Bibliografia

- [1] Bisiacco M., Braghetto S. (2010), *Teoria dei sistemi dinamici*, Esculapio, Bologna
- [2] Bisiacco M., Valcher M.E. (2008), *Controlli automatici*, Libreria Progetto, Padova
- [3] Pidatella C., Pidatella D., Ferrari Aggradi G.(2010), *Corso di meccanica*, terza edizione, Zanichelli, Bologna
- [4] *Istituto Pesenti*,
<http://www.istitutopesenti.it/dipartimenti/meccanica/meccanica/biella.pdf>
Data ultimo accesso 21/01/2013