

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PADOVA



FACOLTÀ DI INGEGNERIA BIOMEDICA
TESI DI LAUREA TRIENNALE
A.A. 2012/2013

STUDIO IN MATLAB/SIMULINK DEL CONTROLLO IN VELOCITÀ DI UN MOTORE ELETTRICO ALIMENTATO IN CONTINUA

Laureando:
Luca Ranela Sabatelli

Relatore:
Prof. Alessandro Beghi

INDICE

Sommario	5
Introduzione	7
Capitolo 1	9
Modellizzazione matematica.....	9
1.1 Funzione di trasferimento	10
1.2 Spazio di Stato	11
Capitolo 2	13
Studio del sistema motore elettrico in catena aperta	13
2.1 Specifiche richieste al sistema.....	13
2.2 Stabilità del sistema.....	14
2.3 Risposta ad impulso unitario	15
2.4 Risposta a gradino unitario.....	16
2.5 Risposta alla rampa	16
2.6 Risposta alla sinusoide.....	17
Capitolo 3	19
Progettazione del controllore	19
3.1 Progettazione del controllore tramite lo studio in frequenza	19
3.1.1 Specifiche di controllo e definizione parametri	20
3.1.2 Rete anticipatrice.....	21
3.1.3 Diagramma di Nyquist	26
3.2 Progettazione del controllore PID	27
3.2.1 Controllore Proporzionale P	29
3.2.2 Controllore Proporzionale-Derivativo PD.....	30
3.2.3 Controllore PID	32
3.3 Progettazione del controllore tramite Luogo delle Radici	35
3.3.1 Specifiche di controllo e definizione dei parametri.....	35
3.3.2 Determinazione controllore	35
3.4 Confronto tra i controllori	38
Capitolo 4	41
Rilezione dei disturbi del sistema in catena chiusa	41
4.1 Attrito sull'albero motore	41
4.2 Disturbo tra controllore e funzione di trasferimento.....	42
4.3 Disturbo in uscita della funzione di trasferimento	44

Conclusioni.....	45
Bibliografia	47

Sommario

L'intento di questo elaborato, composto per la tesi triennale in ingegneria biomedica, è di descrivere le fasi di analisi e progettazione del sistema di controllo di velocità in un motore elettrico alimentato in corrente continua.

Per redigere questa trattazione si sono utilizzate le conoscenze acquisite durante il corso di fondamenti di automatica tenuto dal professor Zampieri presso l'università di Padova.

La tesi si apre con un'analisi del sistema e del problema in esso individuato, con consecutiva determinazione del modello matematico. La seconda parte si occupa della progettazione vera e propria del controllore, in base ai vincoli e alle prestazioni da noi fissate. Il controllore verrà sviluppato e discusso sotto tre diversi metodi di progettazione:

- la sintesi tramite reti correttrici nel dominio della frequenza
- la sintesi tramite lo studio del luogo delle radici
- la sintesi tramite controllori PID

Infine, si è valutato l'effetto dei disturbi che possono agire nel sistema controllato.

Per capire e rappresentare tutti i punti esposti precedentemente si è fatto uso del programma di calcolo Matlab e in particolar modo di due pacchetti contenuti al suo interno: sisotool e simulink.

Introduzione

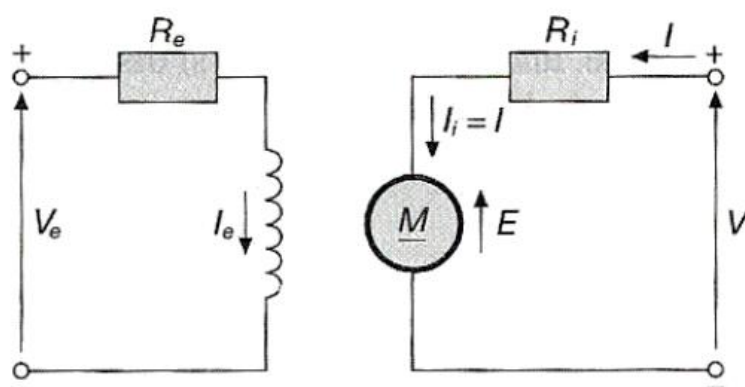
Col termine motore elettrico si definisce una macchina elettrica in grado di trasformare proporzionalmente una tensione continua in ingresso in una coppia motrice in uscita, quindi convertono energia elettrica in energia meccanica.

Essi hanno un'importanza fondamentale nella società moderna, perchè grazie a tale correlazione tra ingresso uscita è possibile modulare la velocità del motore a proprio piacere. Proprio per questo motivo essi sono utilizzati nelle più diverse applicazioni che vanno dai sistemi industriali, passando per dispositivi medici fino ad arrivare ai dispositivi più comuni.

Il motore elettrico è costituito da due parti principali: il rotore e lo statore.

Lo statore rappresenta la parte esterna, l'involucro della nostra macchina e genera un flusso magnetico costante, il cui valore dipende dall'intensità di corrente che scorre nelle sue spire interne.

Le spire che compongono il sistema possono essere rappresentate come la serie di un'induttanza e una resistenza. Lo schema semplificato può essere rappresentato come in figura.



La corrente elettrica passa in un avvolgimento di spire che si trova nel rotore. Questo avvolgimento crea un campo elettromagnetico al passaggio di corrente. Questo campo elettromagnetico è a sua volta immerso in un altro campo magnetico creato dallo statore, il quale è caratterizzato dalla presenza di due o più elettrocalamite. Il rotore per induzione elettromagnetica inizia a girare, in quanto il campo magnetico del rotore tende ad allinearsi a quello dello statore.

Durante la rotazione il sistema costituito dalle spazzole e dal collettore commuta l'alimentazione elettrica degli avvolgimenti del rotore in modo che il campo magnetico dello statore e quello del rotore non raggiungano mai l'allineamento perfetto, in tal modo si ottiene la continuità della rotazione. Questo motore è alimentato a corrente continua, ma il sistema delle spazzole fa sì che la polarità all'interno degli avvolgimenti del rotore sia alternata durante la rotazione, quindi tecnicamente lavora come un motore in corrente alternata.

Capitolo 1

Modellizzazione matematica

I motori elettrici, che ormai stanno alla base di un qualsiasi macchinario d'uso comune, si suddividono in base al tipo di corrente che li alimenta. Si suddividono infatti in motori a corrente alternata oppure a corrente continua.

I problemi relativi a questi motori sono molteplici, ma si vuole concentrare l'attenzione sul controllo della velocità del motore in corrente continua. Consideriamo il circuito elettrico semplificato relativo a questo motore.

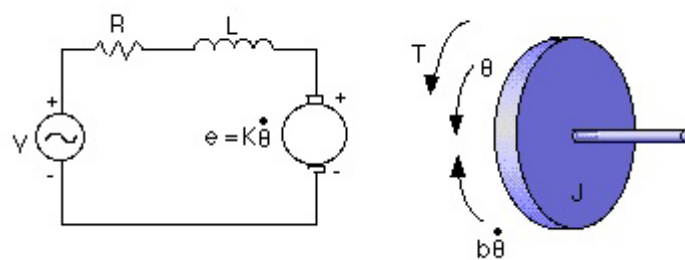


Figura 1.a: schematizzazione del motore elettrico

Dalla schematizzazione di Figura 1.a si può notare che si è andato ad alimentare il motore con un generatore variabile di tensione e si è considerata l'impedenza interna del motore come una serie tra un'induttanza e una resistenza alla quale si è messo in serie il motore elettrico ideale.

Il motore è libero di ruotare con una velocità pari a $\dot{\theta}$, che è proporzionale alla tensione fornita al motore espressa dall'equazione $e = K_e \cdot \dot{\theta}$ (K_e = costante di proporzionalità della velocità angolare del motore).

Servendoci delle leggi di Kirchhoff andiamo a scrivere l'equazione delle correnti della maglia costituita da queste componenti elettriche.

Si ottiene l'equazione:

$$-v + Ri + L \frac{\partial}{\partial t} i + e = 0$$

La parte rotante del motore, detta rotore, viene messa in rotazione attraverso una forza, detta coppia T , che è dovuta alla corrente presente nelle armature del motore, descritta dalla relazione $T = K_t \cdot i$ con K_t costante delle armature.

Si può osservare che il motore elettrico è soggetto a due principali forze che ne rallentano la rotazione.

Una è dovuta all'attrito delle parti meccaniche del motore in movimento, l'attrito è proporzionale al movimento che si ricava dalla derivata della velocità, ottenendo una relazione del tipo: $F_b = -B \cdot \dot{\theta}$.

Un'altra forza, sempre presente, detta di inerzia è dovuta alla resistenza che il corpo del motore genera opponendosi all'accelerazione angolare ed è quindi pari a: $F_a = -J \cdot \ddot{\theta}$.

Tenendo conto delle forze che agiscono nella nostra parte rotoria del motore, possiamo scrivere il sistema di equazioni che regola la velocità di rotazione è:

$$\begin{cases} L \frac{\partial}{\partial t} i + Ri = v - K_c \frac{\partial}{\partial t} \theta \\ J \frac{\partial}{\partial t} \theta + B \frac{\partial}{\partial t} \theta = K_i \cdot i \end{cases}$$

1.1 Funzione di trasferimento

Dato il modello matematico è possibile ricavare la relazione che lega gli ingressi all'uscita. Servendoci delle trasformate di Laplace, si riesce a trasformare le componenti del sistema di equazioni nel dominio del tempo in un sistema di equazioni nel dominio di Laplace, sfruttando la relazione

$$\dot{x}(t) \rightarrow sX(s) - x(0)$$

Si ottiene quindi il sistema:

$$\begin{cases} L(sI(s) - I(0)) + RI(s) = V(s) - K_c(s\theta(s) - \theta(0)) \\ J(s^2\theta(s) - \theta(0)) + B(s\theta(s) - \theta(0)) = K_t I(s) \end{cases}$$

Per facilitare la risoluzione dell'equazione imponiamo che le condizioni iniziali $\theta(0)$ e $i(0)$ siano nulle e che le costanti interne del motore siano uguali, cioè $K_t = K_c = K$.

L'equazione risulta quindi essere:

$$\begin{cases} L(sI(s)) + RI(s) = V(s) - K(s\theta(s)) \\ J(s^2\theta(s)) + B(s\theta(s)) = KI(s) \end{cases}$$

Si ricava con alcuni passaggi matematici la relazione tra l'ingresso in tensione $V(s)$ e la velocità angolare del rotore in uscita $\dot{\theta}(s)$. Si ottiene quindi che la funzione di trasferimento, cioè rapporto tra uscita e ingresso, è:

$$G_1(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(sL + R)(sJ + B) + K^2}$$

Si ricava facilmente con alcuni passaggi matematici la relazione tra l'ingresso dato dalla coppia torcente applicata al albero motore $T(s)$ e la velocità angolare del rotore in uscita $\dot{\theta}(s)$.

Questo ingresso è spesso da attribuirsi agli attriti che si generano durante la rotazione del rotore o da attriti agenti sul corpo messo in rotazione dal motore.

Si ottiene quindi che la funzione di trasferimento è:

$$G_2(s) = \frac{\dot{\theta}}{T} = \frac{Ls + R}{(Ls + R)(Js + B) + K^2}$$

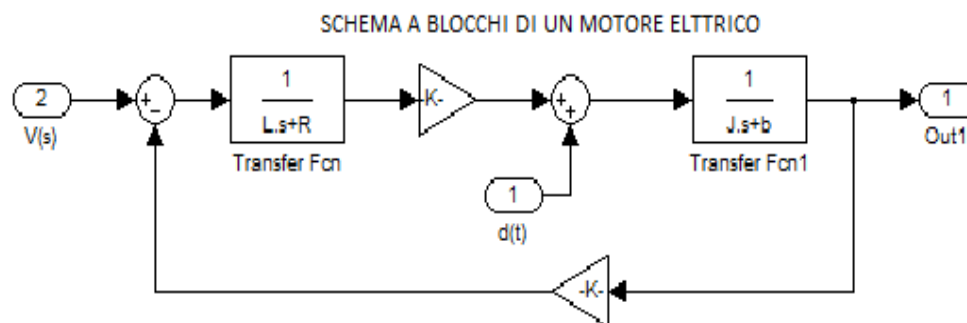


Figura 1.1: Schema a blocchi di un motore elettrico alimentato in continua

1.2 Spazio di Stato

Scriviamo ora le nostre equazioni in forma di spazio di stato, questo particolare metodo utilizza la notazione matriciale. Si utilizzano le principali regole che sono alla base dell'algebra lineare per riscrivere in forma matriciale il sistema fisico.

Poniamo come variabili di ingresso la velocità di rotazione e la tensione applicata dal generatore, mentre in uscita la sola velocità di rotazione. Facendo alcuni passaggi matematici si ottiene la seguente espressione in forma di spazio di stato:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v$$
$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix}$$

Capitolo 2

Studio del sistema motore elettrico in catena aperta

In questo capitolo si analizzerà la stabilità del sistema e la sua risposta in catena aperta alle sollecitazioni in ingresso dei segnali canonici.

Per realizzare un controllore è necessario impostare i parametri fisici del sistema da controllare, ovvero il valore di tutti i componenti che vi sono contenuti.

- Resistenza $R = 1\Omega$
- Induttanza elettrica $L = 0.5H$
- Momento di inerzia $J = 0.01 \frac{kg^2}{s^2}$
- Smorzamento del sistema meccanico $B = 0.1Nms$
- Le costanti $K_t = K_c = K = 0.01$

Con questi parametri la funzione di trasferimento del motore elettrico avente come ingresso la tensione V e come uscita la velocità angolare dell'albero $\dot{\theta}$ è :

$$G(s) = \frac{0.01}{(0.01s + 1)(0.001s + 1) + 0.01^2} = \frac{0.01}{0.0001s^2 + 0.011s + 0.1001}$$

Grazie ai seguenti comandi si inserisce la funzione di trasferimento nel work space di Matlab:

```
J=0.01; b=0.1; K=0.01; R=1; L=0.5;  
num=K;  
den=[(J*L) ((J*R)+(L*b)) ((b*R)+K^2)];  
motor=tf(num,den); % Funzione di trasferimento tra l'ingresso v(t) e l'uscita.
```

2.1 Specifiche richieste al sistema

Le specifiche di progetto impongono che dato un ingresso a gradino si dovrà ottenere in uscita dal sistema un segnale che rispetti determinati vincoli, i quali sono:

- Errore a regime minore del 1%
- Sovraelongazione minore del 5%
- Tempo di assestamento minore di 2 secondi

L'errore a regime è l'errore di inseguimento della variabile controllata, $\dot{\theta}$, rispetto al riferimento che vogliamo inseguire.

La sovraelongazione rappresenta l'escursione massima della risposta rispetto al valore di regime, rapportata in percentuale al valore di regime.

Il tempo di assestamento dà un'indicazione su quanto tempo impiega il transitorio iniziale affinché l'uscita rimanga generalmente entro il 5 % del valore a regime.

2.2 Stabilità del sistema

Il concetto di stabilità è fondamentale nell'analisi del funzionamento di un sistema fisico: questa proprietà fa riferimento alla capacità del sistema stesso di riportarsi spontaneamente in una condizione di equilibrio nel caso venga sollecitato e spinto in un altro stato.

Un sistema lineare tempoinvariante si dice stabile semplicemente se risponde ad un ingresso limitato con una uscita limitata, invece se risponde con una uscita che tende a zero il sistema dicesi stabile asintoticamente. Un sistema lineare tempo invariante si dice instabile se risponde ad un ingresso limitato con una uscita non limitata (divergente).

Utilizzando il Criterio di Routh si va a dimostrare che il denominatore della funzione di trasferimento $G(s)$ è un polinomio di Hurwitz, cioè un polinomio che possiede solamente radici a parte reale strettamente negativa. Tale criterio si basa sulla costruzione di una tabella attraverso un determinato algoritmo che opera sui coefficienti del polinomio.

Data la funzione caratteristica del polinomio nella forma: $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

Per applicare il criterio di Routh occorre anzitutto costruire con i coefficienti del polinomio la tabella di Routh.

$$\begin{array}{c|cccc}
 n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
 n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
 n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots \\
 n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots &
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{cases}
 b_{n-2} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \\
 b_{n-4} = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \\
 \dots
 \end{cases}$$

Le righe della tabella sono contraddistinte con i numeri $n, n-1, \dots$ e sono di lunghezza decrescente: l'ultima riga, (la numero 0) ha un solo elemento.

Teorema di Routh

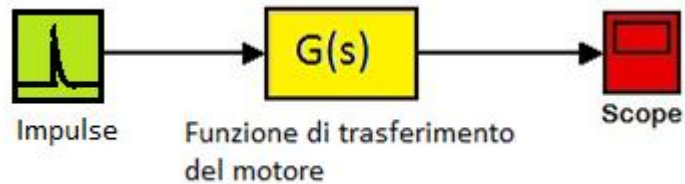
Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella, considerati successivamente, corrisponde una radice con parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice con parte reale negativa.

In questo caso $G(s) = \frac{0.01}{0.0001s^2 + 0.011s + 0.1001}$, la tabella di Routh che ne deriva è:

2	0.0001	0.1001	Non vi è alcuna variazione di segno tra i coefficienti della prima colonna, sono tutti positivi. Si può dire per il criterio di Routh che la funzione di trasferimento $G(s)$ è asintoticamente stabile e presenterà quindi solo poli a parte reale strettamente negativa.
1	0.011		
0	1,1001		

2.3 Risposta ad impulso unitario

Tramite il programma di rappresentazione numerica Matlab si rappresenta l'uscita del sistema al cui ingresso è stato introdotto un impulso unitario.



Matlab tramite la seguente istruzione consente di tracciare il grafico della risposta:

```
impulse(motor,0:0.1:4);           %disegno la risposta al gradino
```

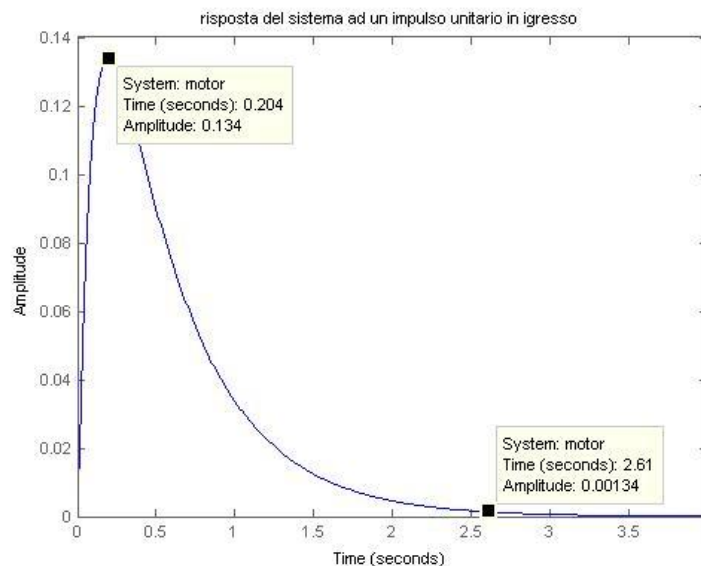


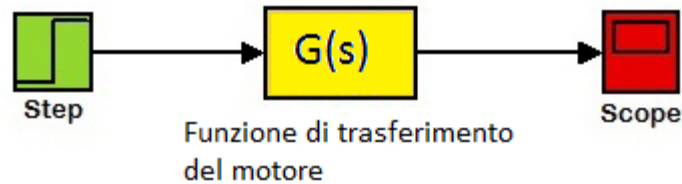
Figura 2.3: Risposta del motore elettrico ad un ingresso ad impulso

Dal grafico in Figura 2.3 si nota che l'uscita risente dell'ingresso e segue il suo andamento, ma con un attenuazione di circa un 90%. Si raggiunge il picco di velocità con $\dot{\theta} = 0.134 \text{ rad/sec}$ in un tempo di 0.204 sec. Dopo aver segnato questo picco il motore inizia a smorzare la velocità, che cala seguendo un andamento esponenziale fino a fermare la sua rotazione in un tempo abbastanza lento di circa 3 sec, che induce a pensare ad una capacità smorzante del motore ridotta.

La risposta all'impulso mostra, come si era già dimostrato in precedenza, che il sistema è BIBO-stabile poichè la risposta $y(t)$ all'impulso è sommabile e quindi $\int_0^{+\infty} |y(t)| dt < +\infty$.

2.4 Risposta a gradino unitario

Si va a rappresentare l'uscita del sistema perturbato da un segnale canonico a gradino unitario in ingresso.



Tramite Matlab con il seguente comando si ottiene il grafico in Figura 2.4.

```
step(motor,0:0.1:4);           %disegno la risposta al gradino
```

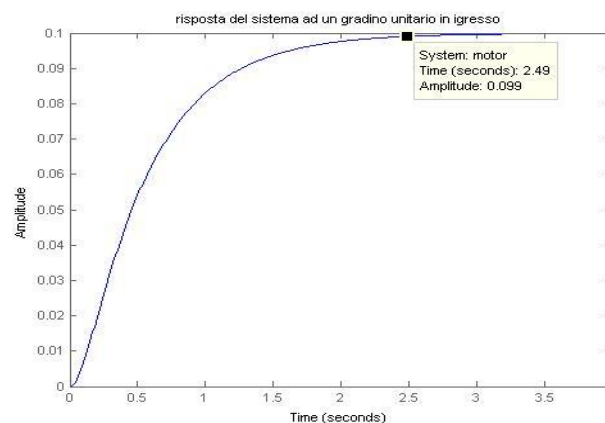


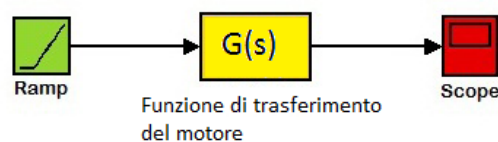
Figura 2.4: Risposta del motore elettrico ad un gradino unitario

Il grafico mostra che la risposta al gradino durante il transitorio iniziale non cresce immediatamente come un esponenziale, ma presenta una impercettibile deflessione verso il basso prima di assumere l'andamento esponenziale per portarsi a regime. Questo fenomeno è dovuto al fatto che vi è la presenza di un polo non dominante nella funzione di trasferimento iniziale che mi porta a spostare la curva, anche se di poco, verso il basso.

Inoltre si nota che il sistema, sottoposto a questo tipo di ingresso, ha un tempo di assestamento di circa 2.49 sec, molto più elevato di quello richiesto dalle specifiche, e un valore massimo di velocità pari a $\dot{\theta} = 0.1 \text{ rad/sec}$, dieci volte inferiore all'uscita desiderata visto che dovrebbe raggiungere il valore dell'ingresso 1 rad/sec .

2.5 Risposta alla rampa

Nuovamente tramite Matlab, si va a rappresentare l'uscita del sistema al cui ingresso s'introduce un segnale a rampa.



Utilizzando i seguenti comandi si ottiene il grafico di Figura 2.5.

```
t = 0:0.1:10;           %dominio del tempo valido
u = (t);                %funzione d'ingresso
lsim(motor,u,t);        %risposta della funz di trasf nel dominio del tempo all'ingresso
```

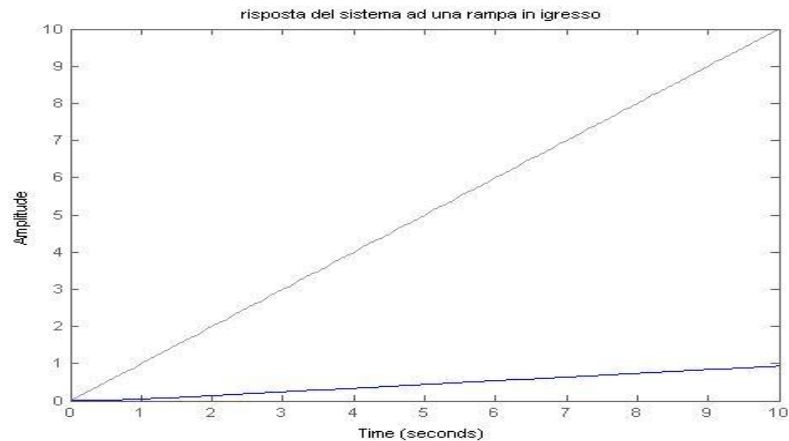


Figura 2.2 Risposta del motore elettrico ad un ingresso canonico di tipo rampa

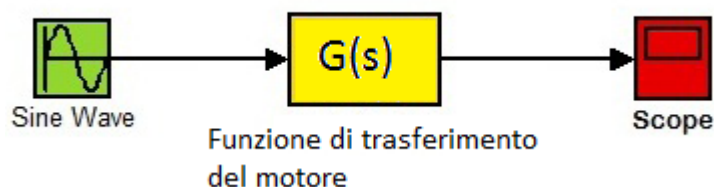
La risposta alla rampa produce un'uscita la cui velocità cresce linearmente al passare del tempo. Si può verificare che, se si aumenta il dominio del tempo preso in esame, la risposta cresce illimitatamente teoricamente. Infatti nella pratica non sarebbe realizzabile questa condizione perchè i limiti meccanici delle componenti porterebbero ad una limitazione massima della velocità, che se tenuta per un tempo troppo elevato potrebbe portare alla deformazione dei componenti e quindi alla rottura del dispositivo.

Si osserva che il sistema attenua in maniera evidente il segnale d'ingresso, portando così ad un errore a regime infinito. Da questo si deduce che l'uscita non raggiungerà mai a transitorio esaurito il segnale d'ingresso.

Questo è dovuto al fatto che la FDT del motore non presenta poli nell'origine, che attenuerebbero l'errore a regime portandolo ad un valore finito, risultando così essere un sistema di tipo 0.

2.6 Risposta alla sinusoide

Si va a vedere l'andamento dell'ultimo ingresso canonico, immettendo nel sistema un segnale di tipo sinusoidale di ampiezza unitaria.



Con il seguente codice Matlab si riesce ad ottenere il grafico in Figura 2.6.

```

t = 0:0.1:20;      %dominio del tempo valido
u = cos (t);        %funzione d'ingresso
lsim(motor,u,t);    %risposta della funz di trasf nel dominio del tempo all'ingresso

```

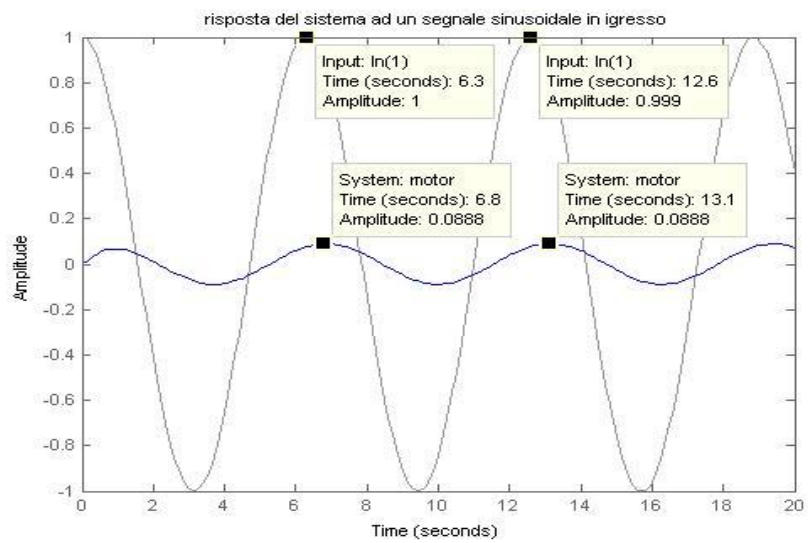
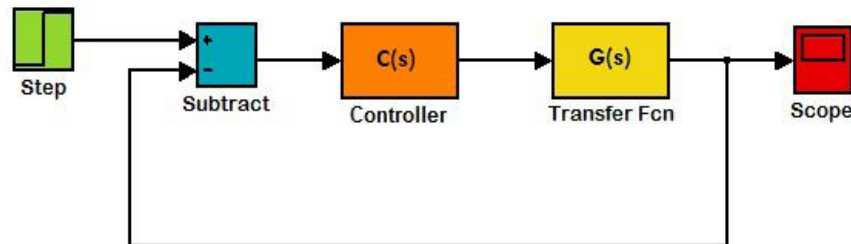


Figura 2.3 Risposta del motore elettrico ad un ingresso sinusoidale

Capitolo 3

Progettazione del controllore

In questo capitolo si va a vedere lo studio di un controllore da anteporre al motore mediante tre tipologie di progettazione differenti in modo che l'uscita rispetti le specifiche di progetto date.



Il controllore verrà sviluppato e discusso sotto tre diversi metodi di progettazione:

- la sintesi tramite reti correttrici nel dominio della frequenza
- la sintesi tramite lo studio del luogo delle radici
- la sintesi tramite controllori PID

Si andrà successivamente a vedere le differenze per capire quale controllore risulta essere il migliore.

3.1 Progettazione del controllore tramite lo studio in frequenza

Un modo per sviluppare la rete di controllo è quello di studiare la risposta in frequenza del sistema. La risposta in frequenza $W(j\omega)$ di un sistema definita come la trasformata di Fourier della risposta impulsiva $\omega(t)$: $W(j\omega) = F(\omega(t))$

Nell'ipotesi di BIBO-stabilità si può affermare che l'asse immaginario fa certamente parte della regione di convergenza della funzione di trasferimento $W(s)$. In questa situazione si può dire che la risposta in frequenza altro non è che la funzione di trasferimento valutata per $s = j\omega$.

Poiché la risposta in frequenza è una funzione complessa di variabile reale, per rappresentarla è necessario lavorare in un ambiente tridimensionale. Potendo però descrivere un numero complesso tramite la sua rappresentazione di modulo e fase, è possibile tracciare i diagrammi di Bode che graficano rispettivamente la variazione del modulo e della fase rispetto alla pulsazione ω . Il diagramma di Bode del modulo è per comodità espresso in scala semilogaritmica in ascissa, in ordinata viene invece visualizzato il valore del modulo espresso in decibel (dB) tramite la trasformazione:

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20 \log |W(j\omega)|$$

Si analizza il comportamento del motore nel dominio della frequenza andando a vedere l'andamento dei diagrammi di Bode. Ci si aiuta disegnando il diagramma con la funzione di Matlab:

`bode(motor)`

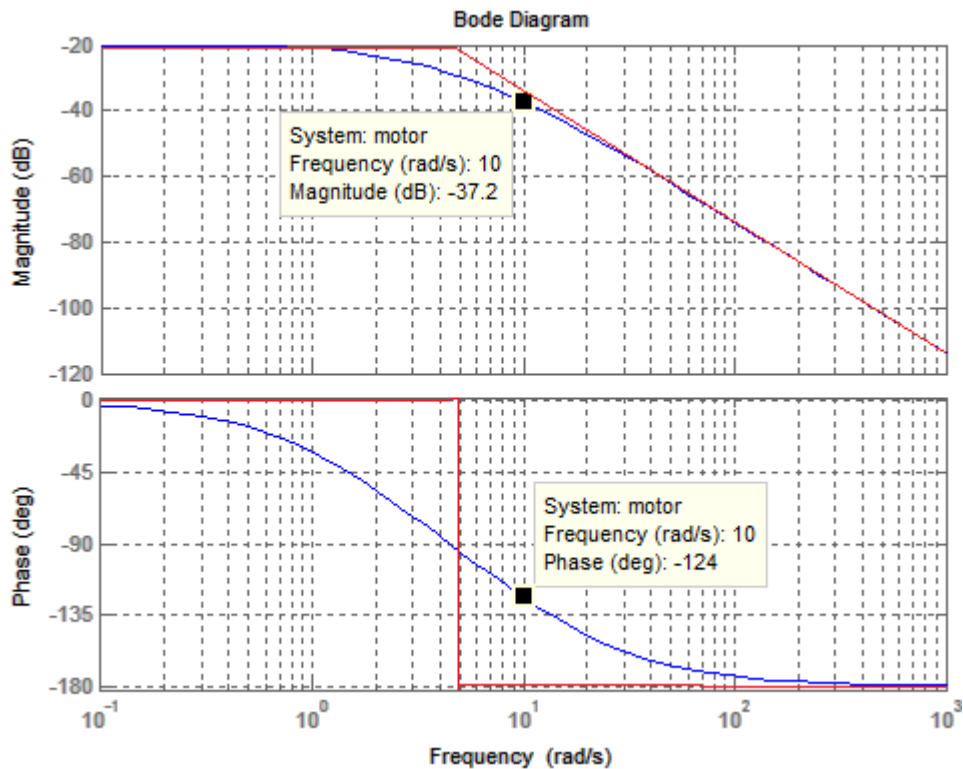


Figura 3.1: Diagramma di bode della funzione di trasferimento del motore elettrico $G(j\omega)$

Si può estrepolare dal diagramma del modulo, in Figura 3.1, che il sistema motore presenta un'attenuazione evidente di -20dB già a basse frequenze.

Alla pulsazione di taglio a circa 4 rad/sec l'amplificazione del segnale decresce con pendenza di -40dB/decade per frequenze maggiori.

Se ne deduce che immettendo un segnale a qualsiasi frequenza esso verrà sicuramente attenuato, come si era già visto in precedenza con l'introduzione dei segnali canonici.

3.1.1 Specifiche di controllo e definizione parametri

Dalle specifiche di progetto si dovrà riuscire a individuare il controllore migliore che consenta di mantenere il sistema all'interno dei vincoli imposti che sono:

- Errore a regime minore dell' 1%
- Sovraelongazione minore del 5%
- Tempo di assestamento minore di 2 secondi

L'errore a regime è in relazione al guadagno statico della nostra funzione di trasferimento $G(s)$. La relazione che intercorre tra il guadagno a regime del sistema K_B e l'errore a regime ε è:

$$K_B = \frac{1}{\varepsilon}$$

La sovraelongazione S , che rappresenta l'escursione massima della risposta rispetto al valore di regime rapportata in percentuale al valore di regime, è legata proporzionalmente

al margine di fase m_φ della funzione di trasferimento $G(s)$. Infatti al crescere del margine di fase la sovralongazione tende a diminuire seguendo una legge approssimata del tipo:

$$m_\varphi = 1 - 0.8 \cdot S$$

Essa è importante perchè, se troppo elevata, potrebbe portare alla rottura del sistema meccanico o d'alcune sue parti.

Il tempo d'assestamento dà un'indicazione su quanto tempo impiega il transitorio iniziale affinché l'uscita rimanga entro il 5% del valore a regime.

Questo parametro ci permette di capire quanto impiega il sistema a raggiungere la velocità designata. La relazione che intercorre tra il tempo d'assestamento T_a e la pulsazione di attraversamento ω_A è la seguente:

$$\omega_A = \frac{4.6}{\xi T_a}$$

Dove ξ si ricava dalla formula del margine di fase:

$$S = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \rightarrow \xi = \sqrt{\frac{\ln(S)^2}{\pi^2 + \ln(S)^2}}$$

Con le specifiche di progetto date si ottengono i seguenti parametri per iniziare lo studio del controllore:

- $K_B = 100$
- $m_\varphi \geq 0.96 \text{ rad} \approx 55^\circ$
- $\omega_A = 10 \text{ rad/sec}$ con $T_a \approx 0.6666 \text{ sec} \ll 2 \text{ sec}$

3.1.2 Rete anticipatrice

Per andare a realizzare la rete correttrice più idonea per il controllo del motore si analizza il diagramma di Bode del sistema in catena aperta. Avendo visto che il grafico di Bode della $G(j\omega)$ non presenta una pulsazione di attraversamento sarà necessario introdurre un'amplificazione in modo tale che $|G(j\omega)|$ attraversi l'asse degli 0dB.

Fortunatamente Matlab contiene una funzione che data la FDT e la pulsazione di attraversamento desiderata restituisce l'errore a regime (err), la fase (phase) e la pulsazione di attraversamento ω_A : $[err, phase, w] = bode(motor, 10)$

La funzione di Matlab restituisce un errore pari $\varepsilon = 0.0139$, basterà amplificare la funzione di trasferimento del motore di un fattore circa uguale a $\frac{1}{\varepsilon} = 72$.

Basterà andare a studiare il diagramma di Bode di $|72 \cdot G(j\omega)|$ con il comando:

`bode(72*motor)`

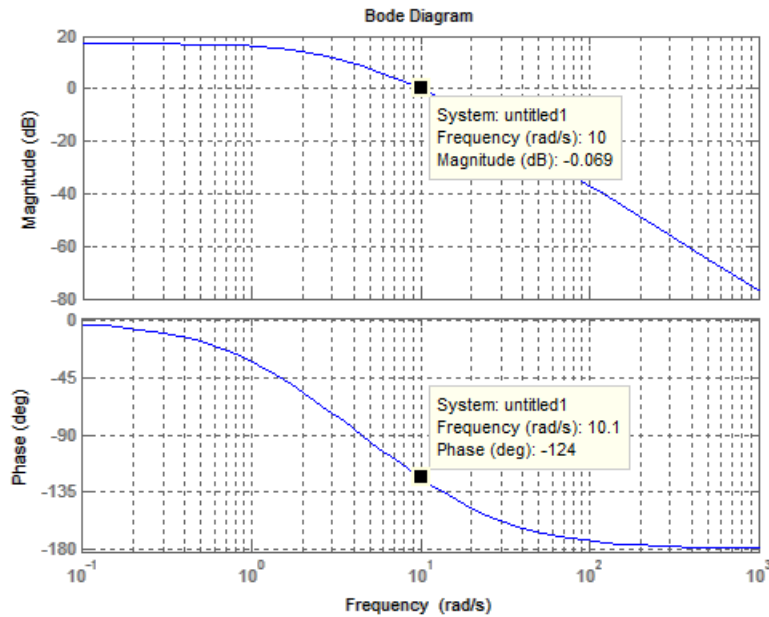


Figura 3.1.2.a: Grafico di Bode di $72 \cdot G(j\omega)$

Come si vede dalla Figura 3.1.2.a nei pressi della frequenza di attraversamento desiderata $\omega_A = 10$ la nostra funzione di trasferimento assume rispettivamente:

$$\begin{cases} |G(j\omega_A)| = 0,069 \text{ dB} \approx 0 \text{ dB} \\ m_\varphi = -124^\circ + 180^\circ = 56^\circ \end{cases}$$

Si nota come l'amplificazione apportata al sistema ottenga la pulsazione di attraversamento richiesta. Il margine di fase ottenuto pur rispettando le specifiche richieste è preferibile aumentarlo per ottenere una stabilità maggiore del sistema, sarà necessario aumentare anche il modulo della funzione in modo da ottenere l'errore a regime inferiore o uguale a 1%.

Questo tipo di correzioni sono compatibili con una semplice rete anticipatrice.

Innanzitutto si vanno a studiare i parametri del controllore che permettano al sistema di avere un errore a regime dell' 1% dato un ingresso a gradino.

Si va a scrivere il sistema in catena aperta $W(s)$ in forma di bode, come prodotto tra il controllore $C(s)$ e il sistema motore da controllare $G(s)$, ne deriva:

$$W(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{K_w}{s^{h_w}} \bar{W}(s) \quad \bar{W}(0) = 1$$

Sapendo che $G(s)$ e $C(s)$ sono nella forma:

$$G(s) = \frac{K_g}{s^{h_g}} \bar{G}(s) \quad \bar{G}(0) = 1$$

$$C(s) = \frac{K_c}{s^{h_c}} \bar{C}(s) \quad \bar{C}(0) = 1$$

Visto che è richiesto della specifiche un errore a regime dell'1%, $W(s)$ deve essere un sistema di tipo 0 e non presentare poli nell'origine, $h_w = 0$, inoltre $K_w = K_B = 100$.

Avendo imposto i parametri della funzione $W(s)$ in modo da rispettare le specifiche date, si ricavano i valori di K_g e di h_g mettendo in forma di bode la FDT del motore.

$$G(s) = \frac{0.01}{0.0001s^2 + 0.011s + 0.1001} = \frac{0.1}{1 + 0.11s + 0.001s^2}$$

Si ricava quindi che $K_g = 0.1$ ed essendo $G(s)$ un sistema di tipo 0 non presenta alcun polo nell'origine, allora $h_g = 0$.

Avendo i parametri di $G(s)$ è possibile determinare, tramite semplici relazioni, anche quelli di $C(s)$. Si vanno a ricavare le componenti del controllore $C(s)$, andando ad analizzare le relazioni tra le tre funzioni :

$$W(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{K_w}{s^{h_w}} \bar{W}(s) = \frac{K_g}{s^{h_g}} \bar{G}(s) \cdot \frac{K_c}{s^{h_c}} \bar{C}(s) = \frac{K_g \cdot K_c}{s^{h_g+h_c}} \bar{G}(s) \cdot \bar{C}(s)$$

Allora:

$$K_w = K_g \cdot K_c \Rightarrow K_c = \frac{K_w}{K_g} = 1000$$

$$h_w = h_g + h_c \Rightarrow h_c = h_w - h_g = 0$$

Si risolve il problema del margine di fase andando a modificare con una rete anticipatrice la pendenza con la quale il grafico del modulo $G(j\omega)$ attraversa l'asse reale e il punto di attraversamento ω_A .

Avendo un controllore del tipo:

$$\bar{C}(s) = \frac{1 + sT_1}{1 + sT_2} \quad T_1, T_2 > 0$$

Basterà posizionare uno zero $= \frac{1}{T_1}$ in 1 per non far iniziare a scendere il modulo appena supera l'asse delle ascisse e un polo $= \frac{1}{T_2}$ in 0.01 per ottenere una pulsazione di attraversamento vicino a quella desiderata $\omega_A = 10$.

Sapendo che $T_1 = \frac{1}{\text{zero}} = 1$ e $T_2 = \frac{1}{\text{polo}} = \frac{1}{0.01}$ otteniamo così il seguente controllore:

$$C(s) = 1000 \cdot \frac{1 + s}{1 + 100 \cdot s}$$

Trovato il tipo di rete con cui devo controllare il sistema, si va a disegnare il diagramma di Bode della funzione di trasferimento moltiplicata per il controllore per vedere se rispetta tutte le specifiche richieste. Si utilizza il seguente codice Matlab per disegnare i grafici:

```
Zo = 1;           %zero in 1
Po = 100;         %polo in 0.1
contr = 1000*tf([Zo 1],[Po 1]); %funz di trasf controllore
bode(contr*motor); %disegno Bode sistema
margin(control*motor); %evidenzia margine di fase e pulsazione di attraversamento
```

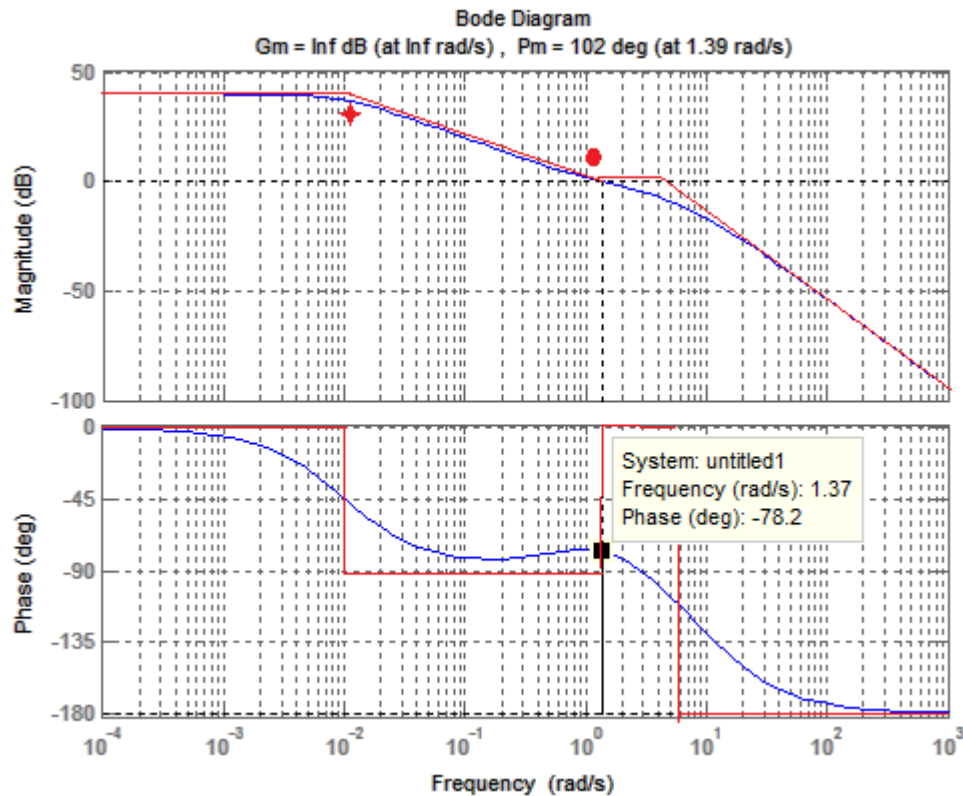


Figura 3.1.2b: Diagramma di bode del sistema controllato con la rete anticipatrice

Siamo riusciti ad ottenere sia un'amplificazione del segnale di 40dB, rispettando così l'errore percentuale dell'1%, sia un $m_\varphi = \varphi + 180^\circ = 102^\circ \gg 55^\circ$ per la pulsazione di $\omega_A = 2 \text{ rad/sec}$ che è inferiore della pulsazione prefissata da specifiche per avere un tempo di assestamento inferiore di 2 secondi.

Andiamo a vedere, sempre utilizzando Matlab, come si comporta il sistema a catena chiusa quando viene sollecitato con un gradino unitario in ingresso.

```
sys_cl=feedback(contr*motor,1); %funzione di trasferimento in catena chiusa
t=0:0.01:10; %vettore tempo nel quale vado ad analizzare il segnale
step(sys_cl,t) %grafico dell'uscita
```

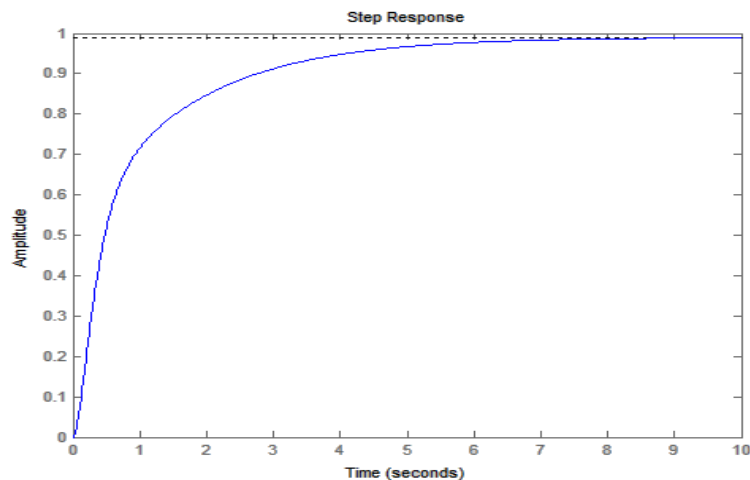


Figura 3.1.2.c: Risposta al gradino del sistema controllato con rete anticipatrice

Si può notare dall'andamento dell'uscita in Fig. 3.1.2.c che l'errore a regime è circa del 1% e non presenta sovraelongazioni, ma avendo abbassato la pulsazione di attraversamento si è ottenuto un tempo di assestamento maggiore di quello richiesto dalle specifiche.

Si può ora andare a variare solamente il guadagno in modo tale che la pulsazione di attraversamento si avvicini a quella data dalla specifiche $\omega_A = 10 \text{ rad/sec}$, inoltre si migliorerebbe l'errore a regime mantenendo comunque il margine di fase più alto delle specifiche richieste. Si prende allora $K_c=4500$.

$$C(s) = 4500 \cdot \frac{1 + s}{1 + 100 \cdot s}$$

Il diagramma di bode risulta essere:

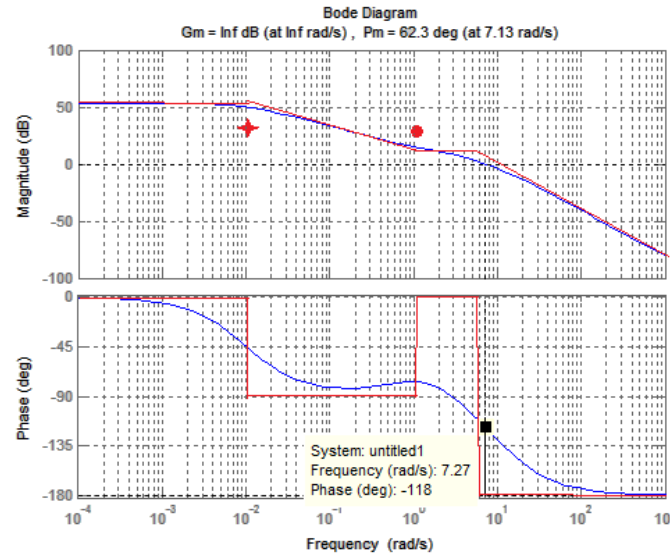


Figura 3.1.2.d: Diagramma di bode del sistema controllato

Si ottiene quindi la pulsazione di attraversamento desiderata, anche se il margine di fase $m_\varphi = \varphi + 180^\circ = 62^\circ > 55^\circ$ si è ridotto notevolmente. Ci si aspetta comunque che l'uscita rispetti le specifiche di progetto.

Se si perturba nuovamente il sistema con l'ingresso a gradino risulta:

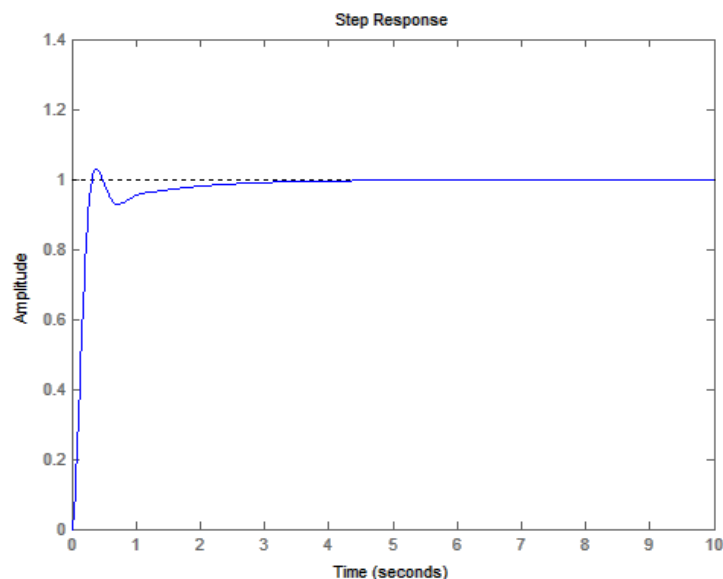


Figura 3.1.2.e: Risposta al gradino del sistema controllato

Dal segnale in Figura 3.1.2.e si nota come il controllore trovato $C(s) = 4500 \cdot \frac{1+s}{1+100 \cdot s}$ rispetti tutte le specifiche di progetto.

3.1.3 Diagramma di Nyquist

Un'altra possibile raffigurazione bidimensionale è data dal diagramma di Nyquist che traccia sul piano complesso la risposta in frequenza, vista come una curva parametrica in funzione della variazione della pulsazione e con annesso il relativo verso di percorrenza al variare di ω .

Il diagramma di Nyquist è direttamente ricavabile dal quello di Bode; si considerano semplicemente i valori di modulo e fase ad una data frequenza come due punti del piano complesso, ricavati in funzione della frequenza stessa. Il risultato sarà quindi una curva parametrica. Il diagramma di Nyquist risulta utile soprattutto perché permette di studiare la stabilità di un sistema reattozionato con la sola conoscenza della funzione di trasferimento del sistema da far agire in retroazione. L'analisi di stabilità attraverso il diagramma di Nyquist si basa sull'omonimo criterio.

Teorema (Criterio di Nyquist)

Data una funzione razionale propria $G(s) \in \mathcal{R}(s)$, si supponga che sia noto il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathcal{R}$ e che tale diagramma soddisfi la seguente condizione:

- *$1 + G(s)$ non abbia né zeri né poli sull'asse immaginario*

Allora si può contare il numero di giri che il diagramma di Nyquist fa intorno al punto $1 + i0$ al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$.

Perché il sistema si possa definire stabile il numero di giri dovrà essere uguale alla differenza $n_{G+} - n_{W+}$, dove n_{G+} e n_{W+} rappresentano, rispettivamente, il numero di poli a parte reale positiva di $G(s)$ ed il numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Si studia il diagramma di Nyquist della sola funzione di trasferimento del motore utilizzando il comando matlab:

```
nyquist(contr*motor);
```

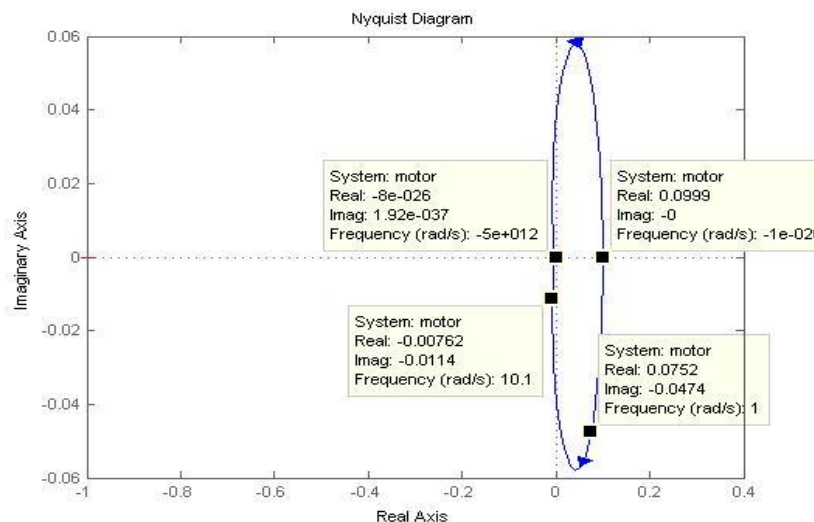


Figura 3.1.3.a Diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento del motore elettrico $G(j\omega)$

Il diagramma di Nyquist, in Figura 3.1.3.a, mostra come la curva non compia alcun giro attorno al punto $-1+i0$. Avendo studiato in precedenza la funzione e avendo riconosciuto che i suoi poli sono tutti a parte reale strettamente negativa, allora $n_{G+} = 0$.

Questo è sufficiente per affermare, applicando il criterio di Nyquist, che la semplice retroazione del sistema motore da luogo ad un sistema ancora BIBO-stabile.

Per riuscire a studiare il sistema in uscita si necessita di capire come trasportare i parametri di progetto, ω_A e m_φ , da un diagramma all'altro. La frequenza di attraversamento, che nel diagramma di Bode s'identifica con l'attraversamento da parte della curva del modulo della FDT con la retta di 0dB, nel diagramma di Nyquist la si ritrova quando il grafico si sovrappone alla circonferenza unitaria centrata nell'origine, questo perchè la circonferenza rappresenta tutti i punti del piano complesso ad avere modulo pari a uno.

Per quanto riguarda il margine di fase in Nyquist rappresenta l'angolo tra il punto $-1+i0$ e il punto sovracitato della pulsazione di attraversamento.

Si può quindi capire che anche da questo grafico si possono andare a studiare i fenomeni di sovraelongazione e di oscillazioni dovuti alla prossimità della curva al punto critico $-1+i0$.

Si va ora a vedere l'effetto della rete anticipatrice $C(s)$ sul diagramma di Nyquist.

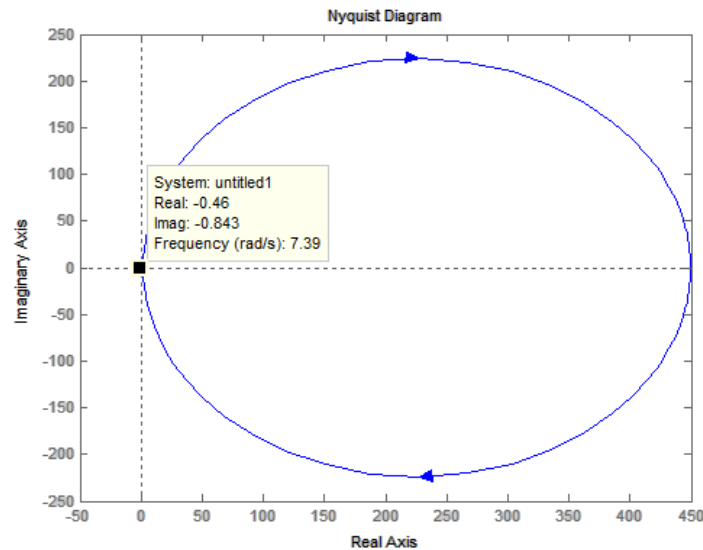


Figura 3.1.3.b: Grafico di Nyquist della funzione motore controllata dalla rete a sella

Si nota come anche la retroazione unitaria del sistema controllato dalla rete anticipatrice rimanga BIBO-stabile. Infatti il grafico in Figura 3.1.3.b mostra come la curva non compia alcuna rotazione intorno al punto $-1+i0$. Ciò che è più interessante è il punto di attraversamento che in questo caso si è avvicinato al punto critico raggiungendo un margine di fase 62° .

Con il diminuire del margine di fase e con l'avvicinamento del grafico al punto $-1+i0$ sorgono i problemi di sovraelongazione e di oscillazioni che tendono a degenerare fino all'instabilità se la curva arrivasse a toccare o ad inglobare al suo interno il punto critico.

3.2 Progettazione del controllore PID

Il controllore PID viene utilizzato nel campo industriale per realizzare l'elaborazione del segnale d'ingresso, di un sistema retroazionato, andando di fatto a modificare la funzione di trasferimento d'interesse al fine di limitarne l'errore a regime e la sovraelongazione. L'acronimo PID indica i tre tipi di guadagno utilizzati: Proporzionale, Integrato e Derivativo.

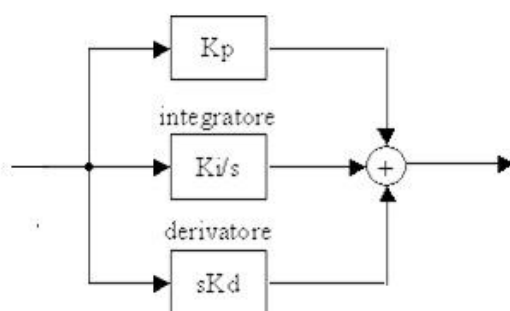
I tre diversi blocchi sono posti in parallelo agendo tutti sul medesimo segnale d'ingresso in modo tale che ogni blocco agisca indipendentemente. Essi possono essere usati

singolarmente oppure possono essere combinati fra loro rendendo così il PID un controllore molto duttile.

Ogni blocco presenta determinate caratteristiche:

- Un controllore Proporzionale avrà l'effetto di ridurre i tempi di salita e diminuire l'errore a regime permanente. Sfortunatamente ci aspettiamo che induca un incremento della sovraelongazione dell'uscita;
- Un controllore Integrativo avrà l'effetto di eliminare l'errore a regime e ridurre il tempo di salita. Aumentano però le sovraelongazioni e gli effetti sul transitorio, quindi il sistema può diventare instabile;
- Un controllore Derivativo avrà l'effetto di diminuire le sovraelongazioni e i transitori, inducendo così un aumento di stabilità per il sistema. Però questo tipo di controllore non può essere facilmente realizzato quindi viene sempre abbinato con uno o entrambi i controllori precedenti.

Lo schema a blocchi che si adotta è il seguente:



Il controllore PID mette in relazione il segnale di ingresso $u(t)$ con l'errore che si commette nella retroazione $e(t)$, ottenendo la seguente relazione:

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{\partial e(t)}{\partial t}$$

Viene rappresentato dalla funzione di trasferimento:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

Dove:

- K_p è il fattore di proporzionalità con il segnale d'errore;
- K_i è il fattore di proporzionalità con l'integrale del segnale d'errore;
- K_d è il fattore di proporzionalità con la derivata del segnale d'errore.

Se il controllore PID viene posto in retroazione ad un generico sistema, si ha che le variazioni dei coefficienti permettono di agire sulle prestazioni del sistema generalmente come riportato dalla seguente tabella:

Coefficiente	Tempo di salita	Sovraelongazione	Tempo di assestamento	Errore a regime
K_p	Decresce	Cresce	Cambia poco	Decresce
K_i	Decresce	Cresce	Cresce	Eliminato
K_d	Cambia di poco	Decresce	Decresce	Cambia poco

La progettazione della funzione di trasferimento del controllore $C(s)$ viene fatta in maniera euristica mediante approssimazioni successive, inserendo diversi valori di K_p , K_i , K_d e vedendo quali valori delle variabili sono quelli che soddisfano al meglio le specifiche di controllo.

Non c'è nessuna limitazione sull'ordine di grandezza dei coefficienti utilizzati che potrebbero anche essere nulli, si vanno a vagliare i casi in cui i controllori saranno di tipo P (se $K_i = K_d = 0$), PD (se $K_i = 0$) e l'intero PID.

3.2.1 Controllore Proporzionale P

Si parte realizzando il controllore più facile, composto unicamente da un amplificatore con guadagno K_p . Come già visto per lo studio in frequenza un'ottimo guadagno di partenza potrebbe essere $K_p=72$ (valore per il quale il modulo della funzione in frequenza passava per la pulsazione di attraversamento $\omega_A = 10$).

Avendo ottenuto un valore di K_p di partenza andiamo a variare il coefficiente K_p per determinare il valore più indicato, in modo che il sistema rispetti le specifiche date.

Prendiamo un range molto ampio di valori scansionandolo con scala semi-logartmica. Si traccia, sempre utilizzando Matlab, il grafico per valori di K_p : 0.1, 1, 10, 72, 100, 200, 500, 1000.

```
Kp_vett=[ 0.1, 1, 10, 72, 100, 200, 500, 1000 ]; %imposto valori di Kp
figure(1)
for n=1:length(kp_vett)
    kp=kp_vett(n);                                %imposto valore corrente di Kp
    sys=feedback(kp*motor,1);                      %retroazione del sistema per il contr
    step(sys,0:0.001:2)                            %disegno grafico
    hold on
    legend('0.1', '1', '10', '72', '100', '200', '500', '1000');
    Title('Risposta a gradino per i diversi valori di Kp');
end
```

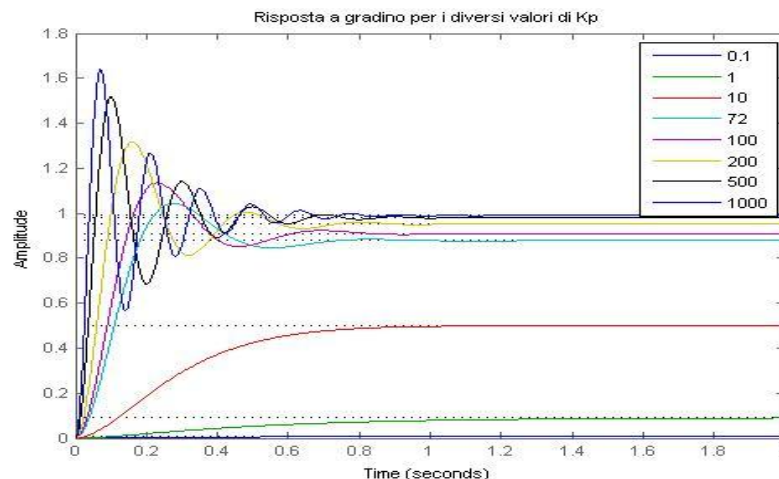


Figura3.2.1.a: Risposta al gradino della funzione controllata da P al variare di K_p

Si vede che il guadagno che dà il risultato migliore è quello per $K_p = \frac{1}{\varepsilon} = 72$ come già dimostrato precedentemente. Come si era già preannunciato un controllore puramente proporzionale induce però una sovralongazione superiore alle specifiche richieste come si nota in Figura 3.2.1.a.

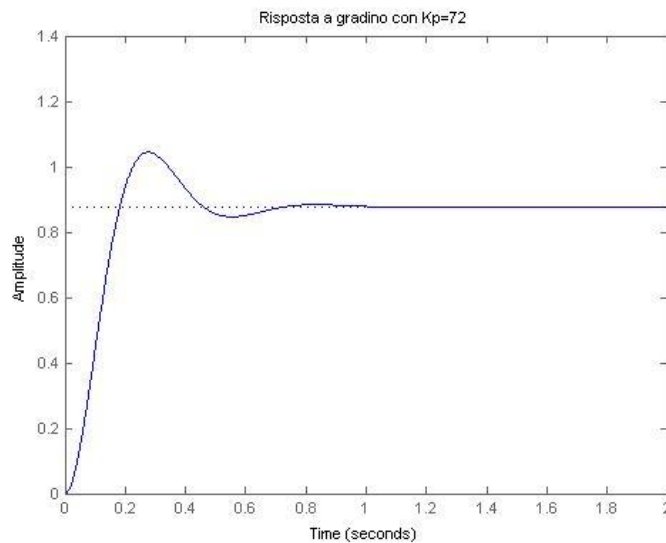


Figura 3.2.1.b: Risposta al gradino per $K_p=72$

3.2.2 Controllore Proporzionale-Derivativo PD

Avendo visto che il controllore P non è sufficiente si va a studiare il comportamento del sistema quando inseriamo un controllore Proporzionale-Derivativo.

In questo caso dovremmo trovare il valore di due guadagni, uno relativo al guadagno proporzionale e uno a quello derivativo. Procediamo come nel paragrafo precedente tracciando i grafici per valori di K_p e K_d : 0.1, 1, 10, 100, 1000.

```

kp_vett=[ 0.1, 1, 10, 72, 100, 1000]; %valori di Kp
kd_vett=[ 0.1, 1, 10, 100, 1000]; %valori di Kd
for n=1:length(kp_vett) %ciclo for per Kp
figure(1)
subplot(3,2,n)
kp=kp_vett(n); %imposto il valore di Kp
for m=1:length(kd_vett) %ciclo for per Kd
kd=kd_vett(m); %imposto valore per Kd
contr=tf([kd kp],1) %scrivo il controllore PD
sys=feedback(contr*motor,1); %retroazione del sistema per il contr
step(sys,0:0.001:2) %disegno grafico
hold on
end
s=strcat('Kd variabile e Kp=', num2str(kp_vett(n)));
title(s);
end

```

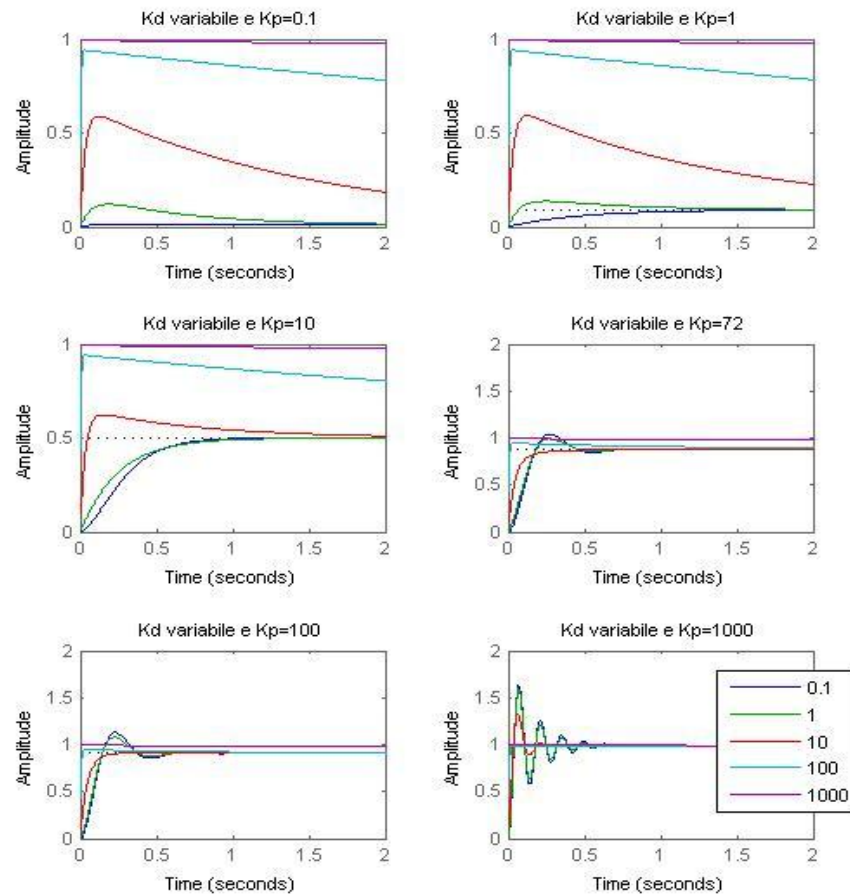


Figura 3.2.2.a: Risposta al gradino della funzione controllata con PD al variare di K_p e K_d

Si può notare come il sistema sia più vicino, rispetto al controllore precedente P, alle specifiche richieste. Soprattutto per il valore $K_p=100$. Andiamo ora a vedere nel dettaglio la risposta al gradino per $K_p=100$ variando K_d .

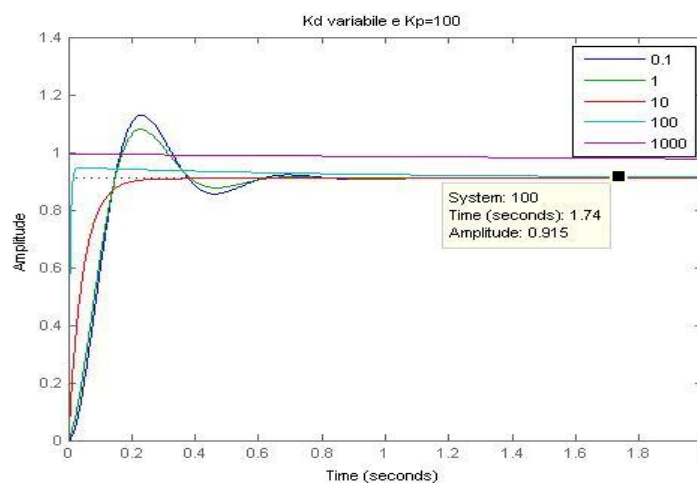


Figura 3.2.2.b: Risposta in dettaglio per $K_p=100$ e K_d variabile

Come si deduce dalla Figura 3.2.2.b si può notare che il segnale d'uscita migliore si ha per $K_p=100$ e $K_d=10$ perchè presenta una sovraelongazione quasi nulla. Il problema è che l'errore a regime è circa del 9% >> 1% richiesto.

Non è quindi sufficiente utilizzare un controllore del tipo proporzionale-derivativo.

3.2.3 Controllore PID

Il controllore PID permetterà di soddisfare al meglio le specifiche di controllo e soprattutto di ottenere l'errore a regime richiesto.

Come fatto per i precedenti controllori andiamo a determinare i vari valori di K_i , mantenendo costanti K_p e K_d ottenuti durante la progettazione dei controllori P e PD, visto che il controllore puramente integrativo che andiamo a mettere in parallelo al controllore PD agisce diminuendo l'errore a regime ed inoltre visto che l'uscita non presentava sovraelongazioni non sarà un problema se il coefficiente K_i ne introdurrà alcune di poco rilievo.

Fisso quindi $K_p=100$ e $K_d=10$ e basterà trovare il valore più appropriato di K_i .

```
kd=10;
kp=110;
kivect=[ 0.1, 1, 10, 100, 200, 500, 1000 ];           %imposto valori di Ki
figure(1)                                              %ciclo per Ki
for n=1:length(kivect)
    ki=kivect(n); %imposto valore corrente di Ki
    contr=tf([kd kp ki],[1 0]);                       %funz di trasf controllore
    sys=feedback(contr*motor,1);                       %retroazione del sistema per il contr
    step(sys,0:0.001:2)                                %disegno grafico
    hold on
end
legend('0.1', '1', '10', '100', '200', '500', '1000');
Title('Risposta a diversi valori di Ki');
```

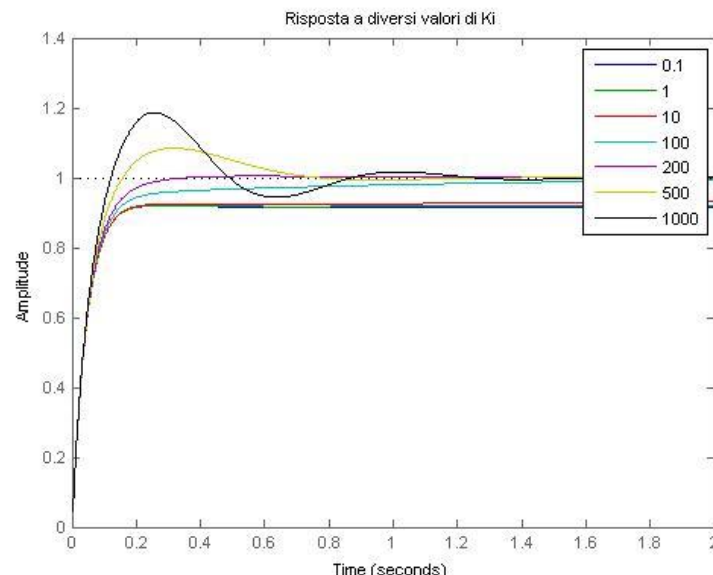


Figura 3.2.3.a: Risposta al gradino del sistema controllato tramite PID con $K_p=100$, $K_d=10$, K_i variabile

Dal grafico si osserva che per i valori di $K_i \geq 100$ si raggiunge il valore desiderato dell'errore a regime, per valori di $K_i \geq 500$ si iniziano a vedere delle sovraelongazioni

dovute alla troppa velocità con cui il sistema cresce. I valori migliori sono quindi quelli tra 100 e 200.

Si può notare che per $K_i=100$ si ha il raggiungimento della velocità d'uscita desiderata ma in un tempo più lento rispetto a valori di K_i più prossimi a 200.

Si preferisce quindi cercare il valore migliore in un intorno di 200. Studiamo il sistema per questi valori.

```
kd=10;
kp=100;
ki_vett=[180, 190, 200, 210, 220];           %imposto valori di Ki
figure(2)
for n=1:length(ki_vett)                       %ciclo per Ki
    ki=ki_vett(n);                             %imposto valore corrente di Ki
    contr=tf([kd kp ki],[1 0]);                %funz di trasf controllore
    sys=feedback(contr*motor,1);               %retroazione del sistema per il contr
    step(sys,0:0.001:2)                       %disegno grafico
    hold on
end
legend('180', '190', '200', '210', '220');
Title('Risposta a diversi valori di Ki');
```

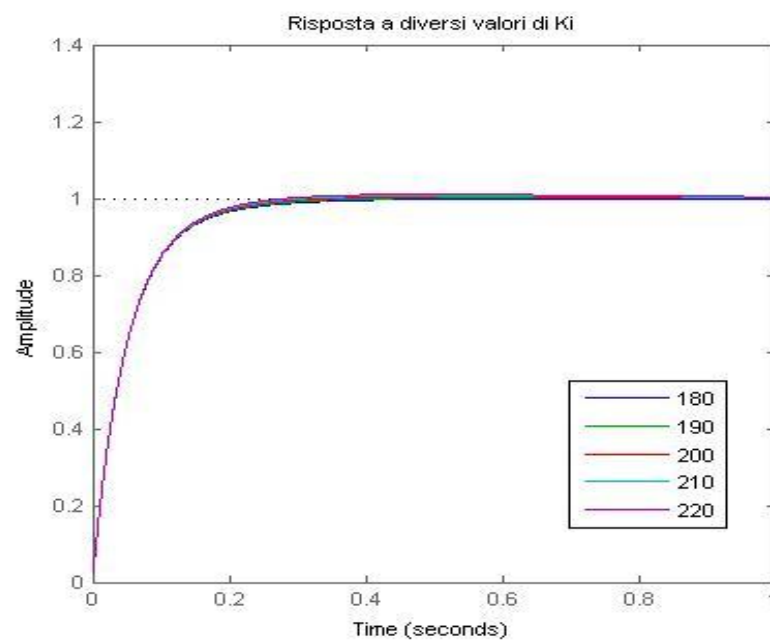


Figura 3.2.3.b: Dtettaglio della risposta per identificare il K_i migliore

Dal grafico si può notare come siano vicine le risposte dei vari sistemi ad una variazione così limitata del valore di K_i . Tutti i valori di K_i vagliati rientrano all'interno delle specifiche richieste, si è deciso di tenere il valore centrale con $K_i=200$.

Il PID che rende stabile il sistema e soddisfa le specifiche ha come valori:

- $K_p=100$
- $K_d=10$
- $K_i=200$

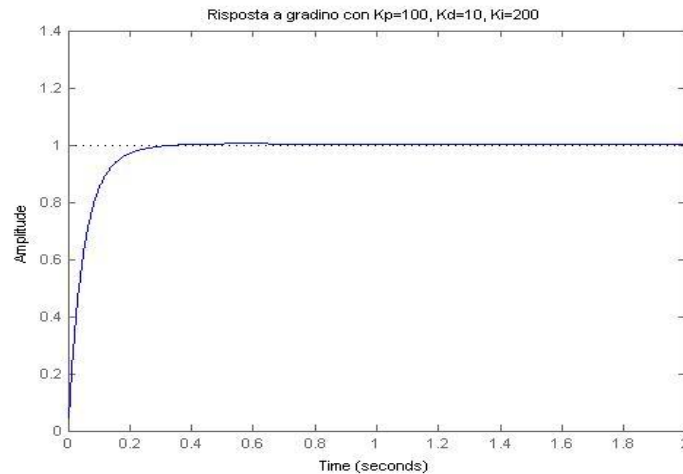


Figura 3.2.3.c: Risposta al gradino della funzione controllata con PID

La funzione di trasferimento del controllore PID è:

$$C(s) = \frac{10s^2 + 100s + 200}{s}$$

Il controllore così costituito risulta però essere improprio, non esistendo nella realtà alcun controllore non proprio, dobbiamo rendere proprio il PID trovato. Per ovviare a questo problema basterà introdurre un polo in alta frequenza, così da non modificare nulla nella risposta al gradino durante il transitorio.

Introducendo il polo, per esempio, in $\omega = \frac{K_d}{5K_p} = 0.02$ il controllore definitivo avrà una funzione di trasferimento:

$$C_{PID}(s) = \frac{10s^2 + 100s + 200}{s(1 + 0.02s)}$$

Andiamo a studiare la risposta a gradino del PID realizzabile.

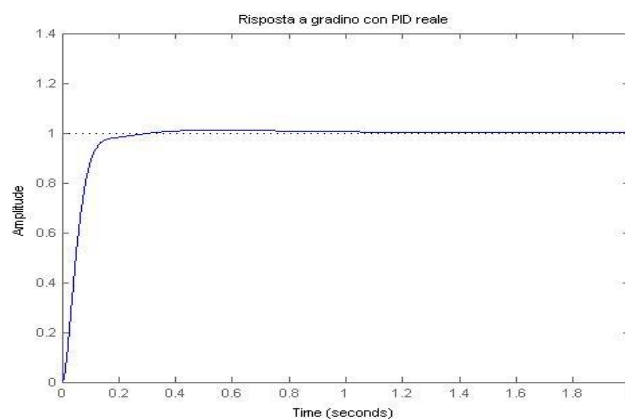


Figura 3.2.3.d: Risposta al gradino della funzione con trollata con PID reale

Si nota quindi che l'aggiunta del polo ad alte frequenze, come avevamo già annunciato, non è andata ad influire sul comportamento del sistema alla sollecitazione al gradino unitario.

Esso supera abbondantemente le specifiche richieste, avendo un tempo di salita di circa 0.2 secondi, una sovraelongazione inferiore al 1% ed errore a regime nullo.

3.3 Progettazione del controllore tramite Luogo delle Radici

Questo metodo consiste nel tracciare il luogo delle radici relativo alla FDT del motore e determinare le regioni di piano in cui il sistema soddisfa le specifiche desiderate. Trovate queste regioni di piano si realizzerà un controllore tramite il posizionamento di zeri e poli nella regione di interesse in modo da soddisfare al meglio le specifiche richieste dal problema.

3.3.1 Specifiche di controllo e definizione dei parametri

Si circoscrive la regione di piano dove si andrà a modificare la FDT del motore.

Data da specifica la sovraelongazione, che deve essere inferiore al 5%, si ottiene tramite la

formula già vista $S = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \rightarrow \xi = \sqrt{\frac{\ln(S)^2}{\pi^2 + \ln(S)^2}}$, l'angolo $\varphi = \cos(\xi)$, che rappresenta la pendenza delle due semirette che mi limitano il piano negativo delle ascisse; delimitando così la zona entro la quale i poli della funzione in catena chiusa danno una sovraelongazione inferiore al 5%.

Dato il tempo d'assestamento possiamo ulteriormente limitare il piano, ci possiamo calcolare il valore di $\sigma = \frac{4.6}{Ta} = 2.3$. Dato questo valore si può tracciare un retta in -2.3 che stabilisce che i poli a sinistra di questa retta daranno luogo ad una risposta con un tempo di assestamento inferiore di 2 secondi.

Quindi i parametri che dovremo andare a controllare durante la scelta del controllore saranno: $\varphi = 0.8$, $\xi = 0.69$, $\sigma = 2.3$.

3.3.2 Determinazione controllore

Per prima cosa si visualizza tramite Matlab il luogo delle radici della sola funzione di trasferimento del motore e la regione d'interesse, dove i parametri sono tutti soddisfatti.

```
rlocus(motor);    %disegna il luogo  
sgrid(0.8,0);    %traccia l'angolo  
sigrid(2.3);     %traccia il sigma
```

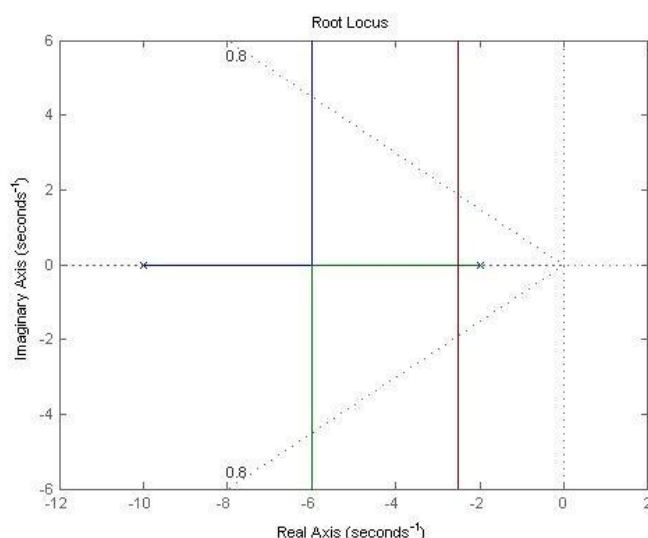


Figura 3.3.2.a: Luogo delle radici di G(s)

Il grafico mostra la regione di piano ottenuta con i comandi *sgrid* (.8,0), che traccia le due semirette che limitano la sovraelongazione, e *sigrid*(2.3), che traccia la retta verticale per il tempo di assestamento.

Si nota dal grafico in Figura 3.3.2.a come alcune porzioni del luogo delle radici della FDT del motore non siano contenute all'interno della regione d'interesse.

Mantenendo il luogo delle radici invariato non si riuscirà ad ottenere nessuna delle specifiche di sistema richieste. Dobbiamo procedere aggiungendo al luogo dei poli e degli zeri in modo da ottenere una rappresentazione che stia all'interno della nostra regione desiderata.

Tramite Sisotool, un particolare pacchetto di Matlab, è possibile posizionare i poli e gli zeri del controllore nel luogo delle radici, modificando in tempo reale il luogo e la caratteristica d'uscita del sistema in catena chiusa.

Innanzitutto si osserva che la caratteristica d'uscita del motore non soddisfa la velocità desiderata, quindi procediamo con l'inserire nel controllore un guadagno, il quale dovrà essere elevato per permetterci di ottenere il valore atteso.

Lo imponiamo a 50, visto che in precedenza 72 era un ottimo valore di partenza, si ottiene il grafico:

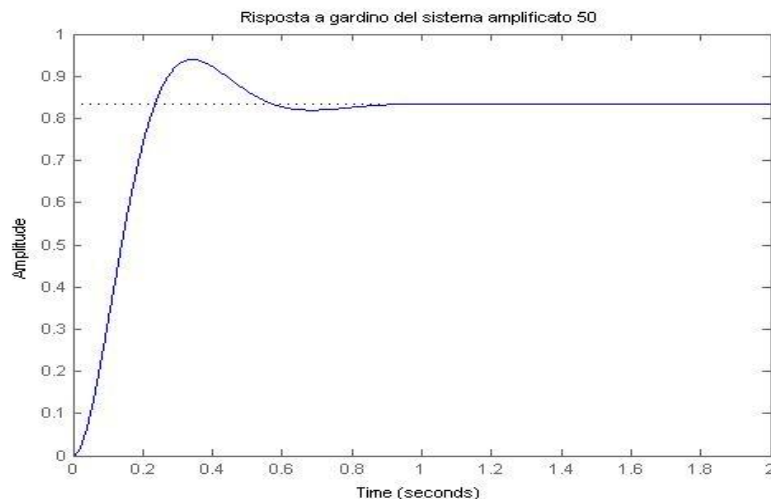


Figura 3.3.2.b: Risposta al gradino del sistema amplificato di 50

Come già visto in precedenza la singola amplificazione non basta a soddisfare le specifiche visto che porta all'aumento della sovraelongazione e non basta per ottenere l'errore a regime ad un valore sufficientemente basso.

L'aggiunta di un guadagno elevato aumenta la rapidità di risposta del sistema e quindi porta ad avere un tempo di assestamento concorde alle specifiche.

Per migliorare il valore a regime, il metodo migliore è quello di inserire un polo stabile molto vicino all'asse immaginario in -0.01. Infatti i poli migliorano il valore a regime dell'uscita, ma la vicinanza all'asse immaginario fa sì che ci sia un aumento della sovraelongazione e del tempo di assestamento perché è "lento" rispetto agli altri.

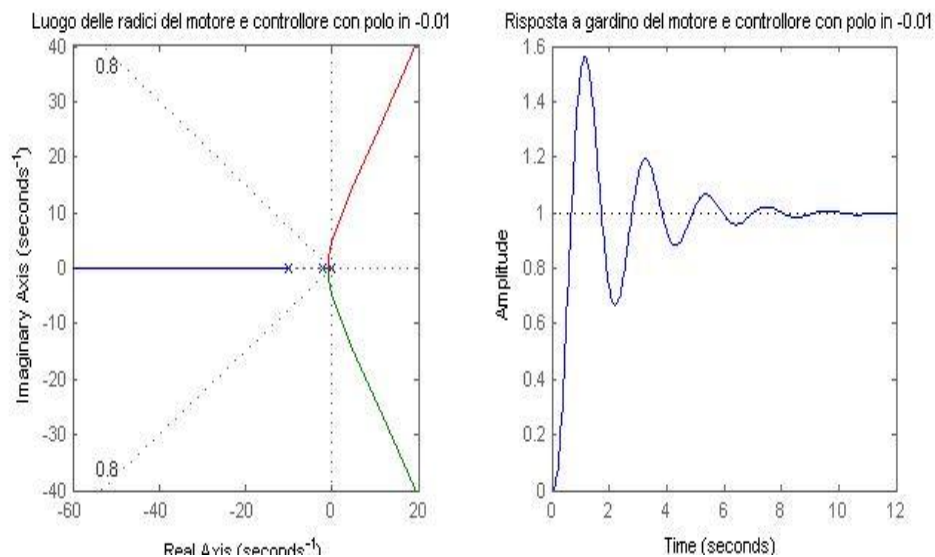


Figura 3.3.2.c: Grafico di Nyquist e risposta al gradino della FDT a cui è stato aggiunto un polo in -0.01

Si osserva che, dopo aver aggiunto il polo in -0.01, l'uscita raggiunge il valore a regime desiderato, solo che impiega molto più tempo per raggiungere tale valore e lo fa compiendo delle sovraelongazioni molto marcate. Questo problema è facilmente risolvibile introducendo uno zero nel controllore, infatti gli zeri hanno il compito di stabilizzare l'uscita, ridurre le sovraelongazioni e i tempi di assestamento. Quindi introduciamo uno zero in -1.

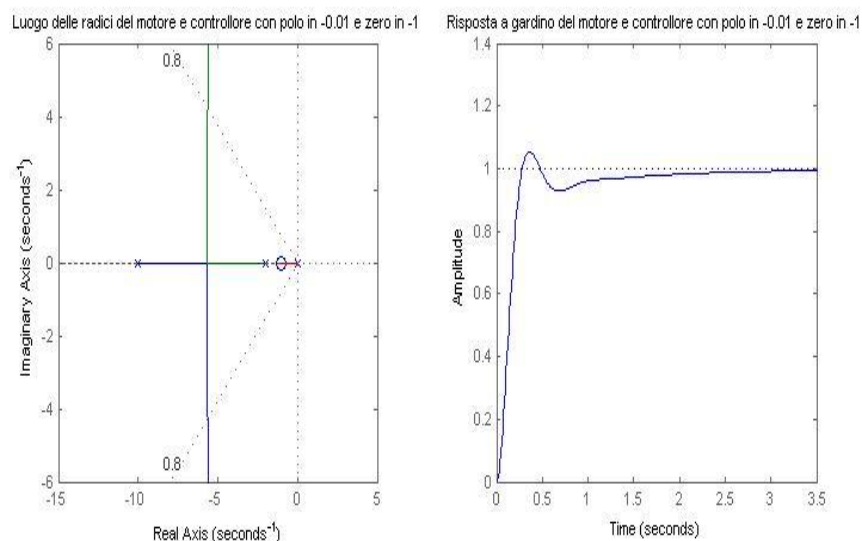


Figura 3.3.2.d: Grafico di Nyquist e risposta al gradino della FDT controllata tramite C(s)

Aggiungendo uno zero in -1 si ottiene il grafico dell'uscita che rispecchia tutte le specifiche che erano state imposte dal problema. Infatti il tempo di assestamento è minore di 2 secondi, la sovraelongazione è minore del 5% e l'errore a regime è inferiore del 1%. La funzione, nel dominio di Laplace, del controllore trovato con il metodo di sintesi del luogo delle radici è il seguente:

$$C(s) = 50 \frac{(s + 1)}{(s + 0.01)}$$

3.4 Confronto tra i controllori

Trovati i controllori con i tre diversi metodi, si mettono a confronto per andare a vedere qual'è il controllore migliore per il sistema.

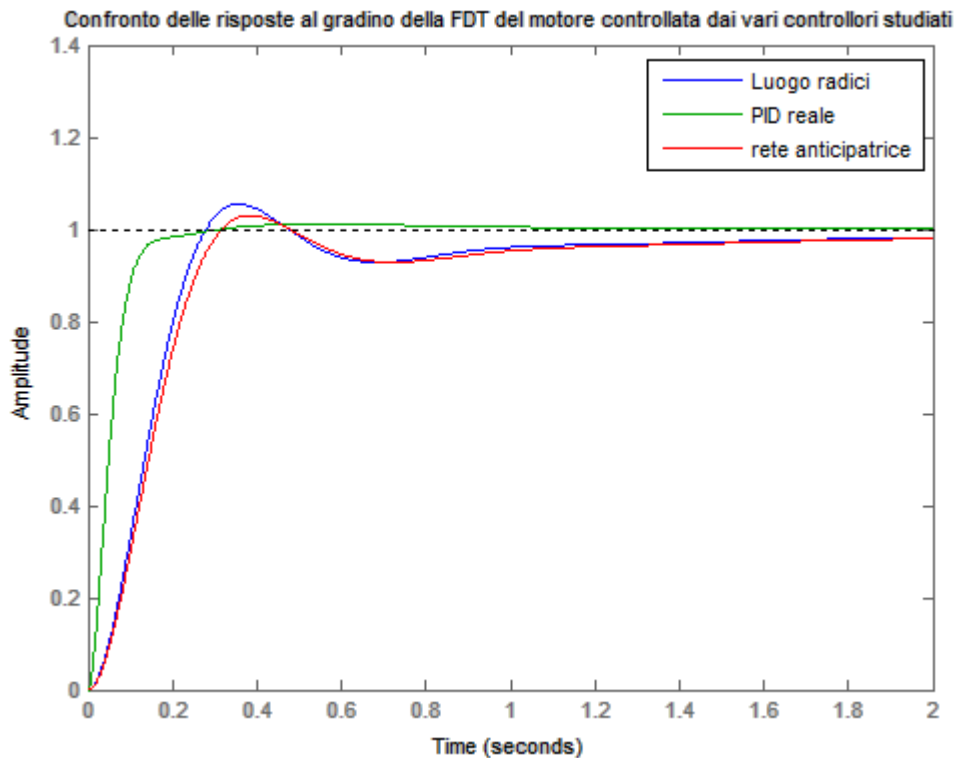


Figura 3.4.a: Confronto delle risposte al gradino della FDT del motore controllata dai vari controllori studiati

Il grafico mostra che sia il controllore progettato mediante il metodo del luogo delle radici sia quello ottenuto mediante lo studio in frequenza sono peggiori del PID reale.

	Tempo di salita	Tempo di assestamento	Sovraelongazione
Risposta in frequenza	0.29	0.97	3%
Luogo delle radici	0.28	0.96	5%
PID	0.13	0.13	1%

Si può notare come sia marcata la somiglianza della risposta tra la FDT controllata tramite il controllore ottenuto sia mediante il luogo delle radici che con la rete anticipatrice ricavata con lo studio in frequenza rispetto al PID.

Il controllore PID è quello che presenta gli aspetti migliori fra tutti i controllori presi in esame. Il transitorio è veloce, infatti si esaurisce nel giro di un secondo, raggiunge il valore a regime desiderato in un tempo molto al di sotto di quello richiesto dalle specifiche e non presenta sovraelongazioni degne di nota durante il transitorio iniziale.

Un'ultima analisi qualitativa si può fare sul segnale $u(t)$, l'ingresso del sistema reale. In tutta la trattazione svolta non ci si è mai preoccupati dell'andamento di tale segnale o comunque non si è andato a studiare il tipo di segnale prodotto in uscita il controllore.

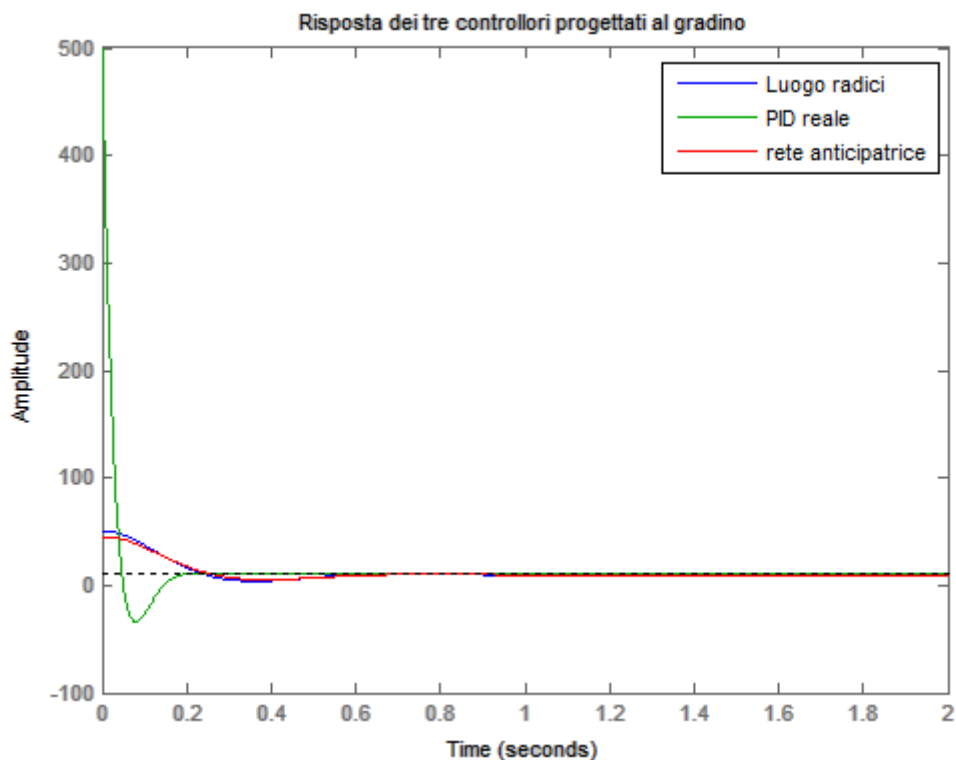


Figura 3.4.b: Uscita dai controllori quando agisce un segnale di tipo gradino

Uno dei problemi principali in cui si incorre è quello della saturazione: il segnale $u(t)$ potrebbe raggiungere valori troppo elevati in ampiezza, che potrebbero comportare un rischio per il sistema reale se venisse sottoposto a tale ingresso. Per evitare ciò, subito dopo il blocco del controllore, si inserisce solitamente un saturatore che ha appunto il compito di limitare l'ampiezza del segnale in modo che non superi una soglia critica per la integrità del sistema.

Si può notare in Figura 3.4.b come sia evidente questo fenomeno per l'uscita del segnale dal controllore PID reale, rispetto agli altri due controllori studiati che hanno un andamento simile e limitato.

S'intuisce quindi che la risposta così rapida e con sovralongazione quasi nulla che mostrava l'uscita del sistema controllato tramite PID era dato dal fatto che l'uscita del controllore nel transitorio iniziale consuma una quantità enorme di energia rispetto agli altri controllori.

Se si volesse andare a limitare questo consumo di energia eccessivo introducendo dopo il PID un saturatore, in maniera tale da limitare la potenza sfruttabile, si comprometterebbe la caratteristica d'uscita e quindi gli eventuali vantaggi che l'utilizzo del PID comporta.

Capitolo 4

Reiezione dei disturbi del sistema in catena chiusa

Dopo aver studiato il comportamento del sistema in catena chiusa perturbato da un ingresso a gradino, si vuole andare a vedere come reagisce il sistema e soprattutto come si comporta il controllore se s'introduce un disturbo in varie posizioni all'interno del sistema. Come controllore si è voluto usare il PID che presentava le prestazioni migliori di quelli presi in esame.

Fin d'ora si è supposto che il sistema fosse privo di disturbi di ogni tipo, ora ci si pone il problema di come reagisce il dispositivo alle sollecitazioni esterne non desiderate.

Si vuole andare a veder il comportamento dell'uscita se agisce:

- il disturbo generato dall'attrito sull'albero motore;
- il disturbo fra il controllore e la funzione di trasferimento;
- il disturbo dopo il blocco della funzione di trasferimento.

Si utilizza il pacchetto simulink, del programma Matlab, che permette di simulare i diversi casi.

4.1 Attrito sull'albero motore

Nel caso di un motore elettrico di cui si voglia controllare la velocità un tipico disturbo può essere rappresentato da un momento torcente T applicato dall'esterno all'asse del motore stesso. Se si considera il sistema retroazionato composto dai 2 blocchi, rappresentanti uno il controllore e l'altro il motore, il disturbo in esame entra all'interno del secondo blocco, com'è mostrato in Figura 4.1.a. Un tale disturbo può essere rappresentato da un segnale a gradino che inizia in un'istante da tempo qualsiasi quando il motore è già a regime in maniera da darci la possibilità di studiare il comportamento del sistema e, qualora sia necessario, modificare opportunamente il controllore.

Il sistema ottenuto che si va a rappresentare tramite schemi a blocchi con simulink e risulta:

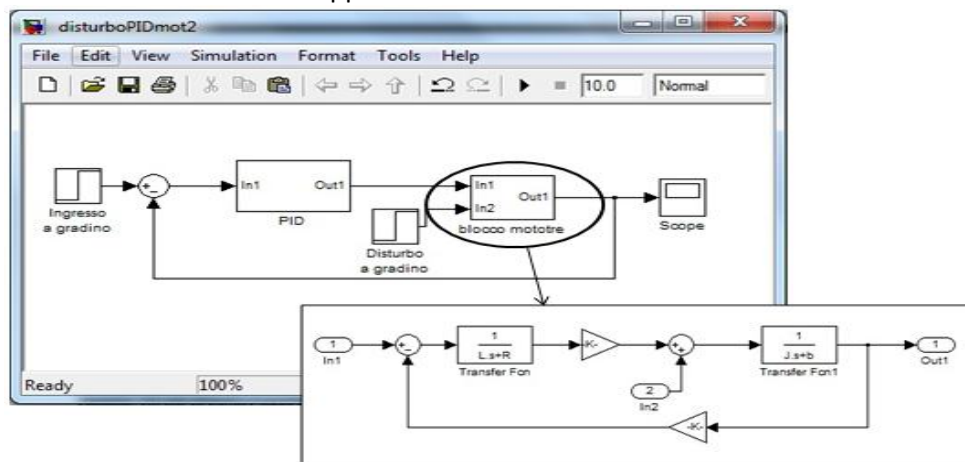


Figura4.1.a: Schematizzazione tramite simulink del motore controllato da PID a cui è stato applicato un disturbo sull'albero motore

Quando il disturbo (gradino agente dopo 3 secondi rispetto all'ingresso e con ampiezza di -0.5) entra nel sistema controllato si nota che l'uscita subisce un secondo transitorio, quasi identico al primo, che porta la caratteristica ad un valore nullo. Infatti, come mostrato in Figura 4.1.b, quando inizia ad agire l'attrito sull'albero motore l'uscita assume valore quasi

nullo pe poi tornare al valore di regime dopo un tempo di assestamento di circa 0.4 secondi. Per andare a vedere quando potesse influire questo disturbo sull'uscita, siamo andati a modificare l'ampiezza del disturbo. Si è notato che già per sollecitazioni basse di ampiezza 0.5 il sistema all'istante di applicazione tende a fermarsi, raggiungendo lo zero, per poi ripartire eseguendo un secondo transitorio.

Per coppie esterne maggiori di moto opposto al verso del motore si è visto che l'albero motore per un periodo cambierebbe addirittura verso di rotazione per portarsi dopo un modesto transitorio al valore a regime.

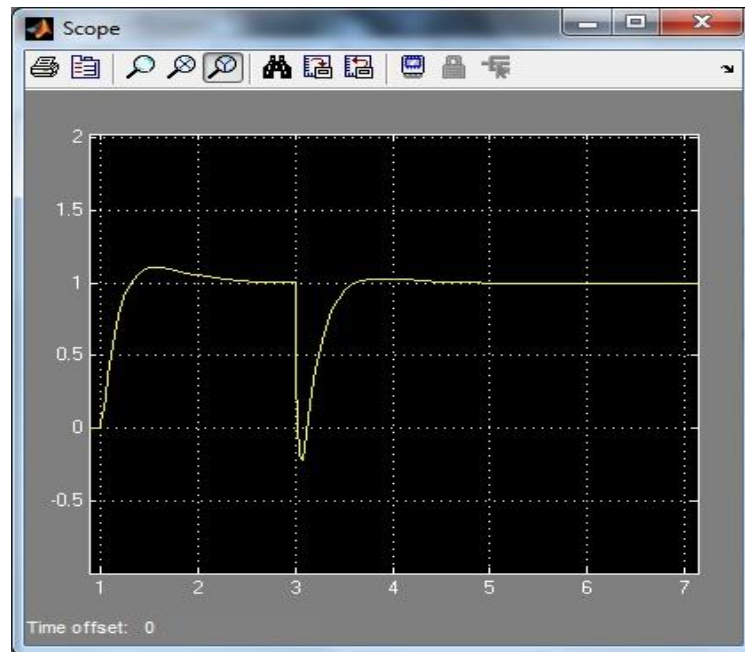


Figura 4.1.b: Grafico dell'uscita del sistema sottoposto ad un disturbo sull'albero motore

4.2 Disturbo tra controllore e funzione di trasferimento

Si inserisce ora il disturbo tra il controllore e la FDT del motore. Il sistema così ottenuto tramite simulink è quello mostrato in Figura 4.2.a.

Osservando attentamente il grafico in Figura 4.2.b si nota che la caratteristica d'uscita subisce una leggera variazione subito dopo che il segnale di disturbo entra in azione.

Infatti cresce, anche se in maniera quasi impercettibile, il valore dell'uscita sopra al punto desiderato. Questa variazione non è molto evidente visto che per ottenere un risultato visibile si è dovuto introdurre un disturbo a gradino di ampiezza 500, perchè il sistema riesce a correggere l'errore introdotto quasi subito impiegando come per il disturbo precedente circa un secondo per tornare al valore dell'ingresso.

Possiamo dire che il sistema controllato con PID, se subisce un disturbo tra il controllore e la funzione di trasferimento, riesce a correggerlo senza modificare troppo la caratteristica d'uscita, anche se impiega alcuni secondi per tornare al valore di regime.

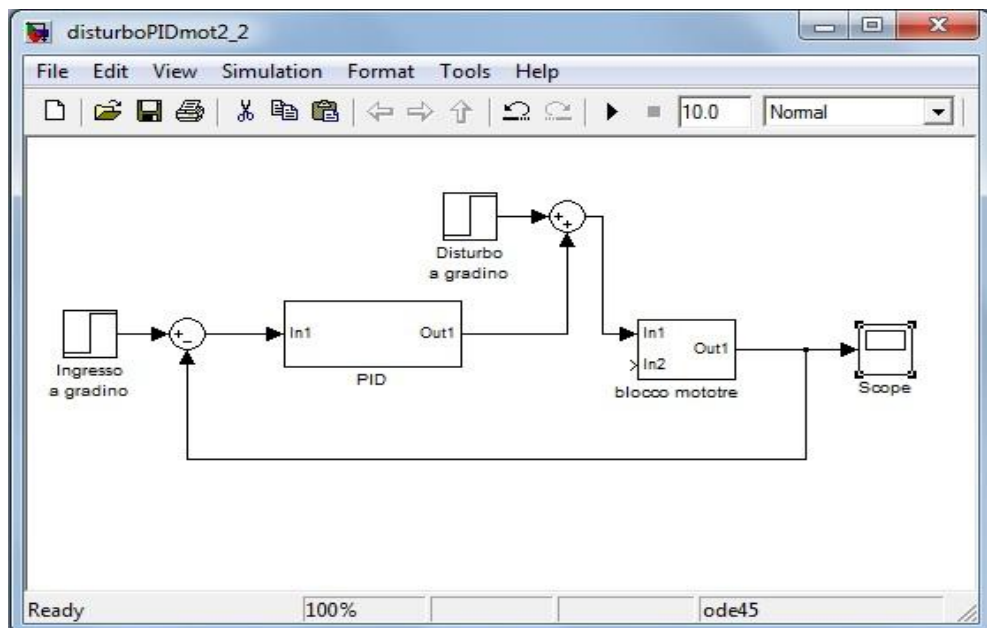


Figura 4.2.a: sistema sottoposto ad un disturbo tra il controllore ed il blocco motore

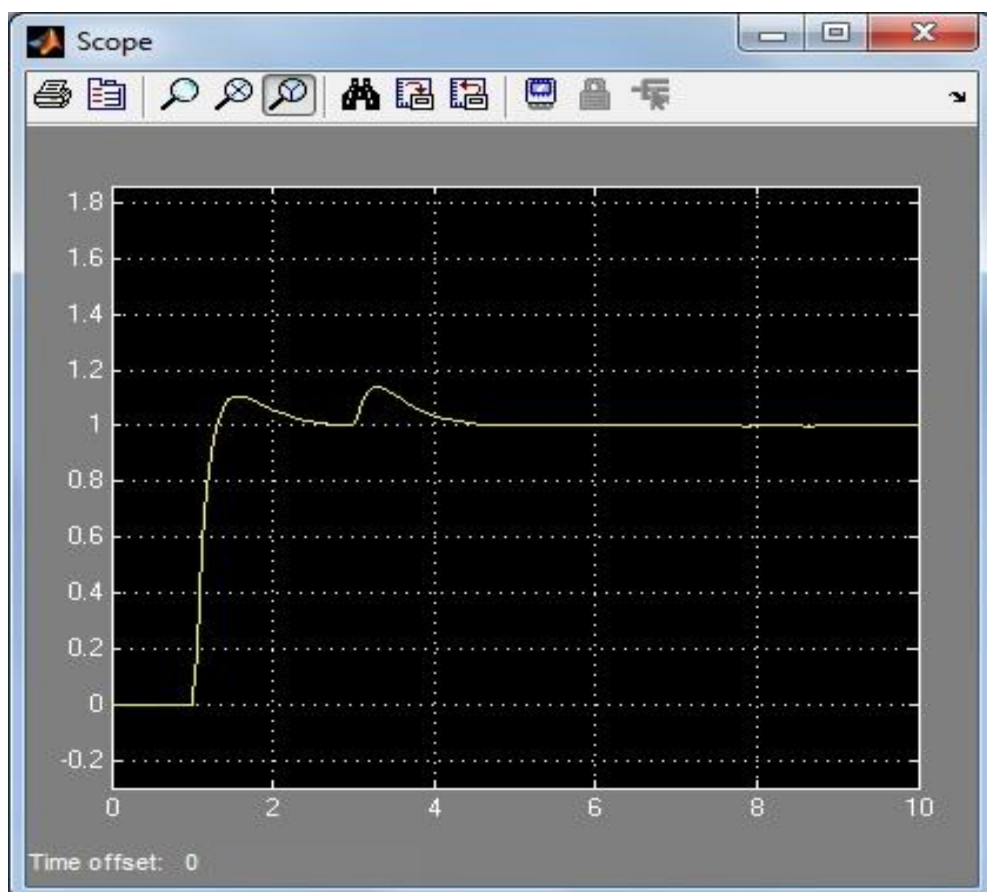


Figura 4.2.b: Grafico dell'uscita del sistema sollecitato da un disturbo tra controllora e blocco motore

4.3 Disturbo in uscita della funzione di trasferimento

In fine si va ad inserire il disturbo subito dopo la funzione di trasferimento, ma prima della catena di retroazione come è mostrato in Figura 4.3.a.

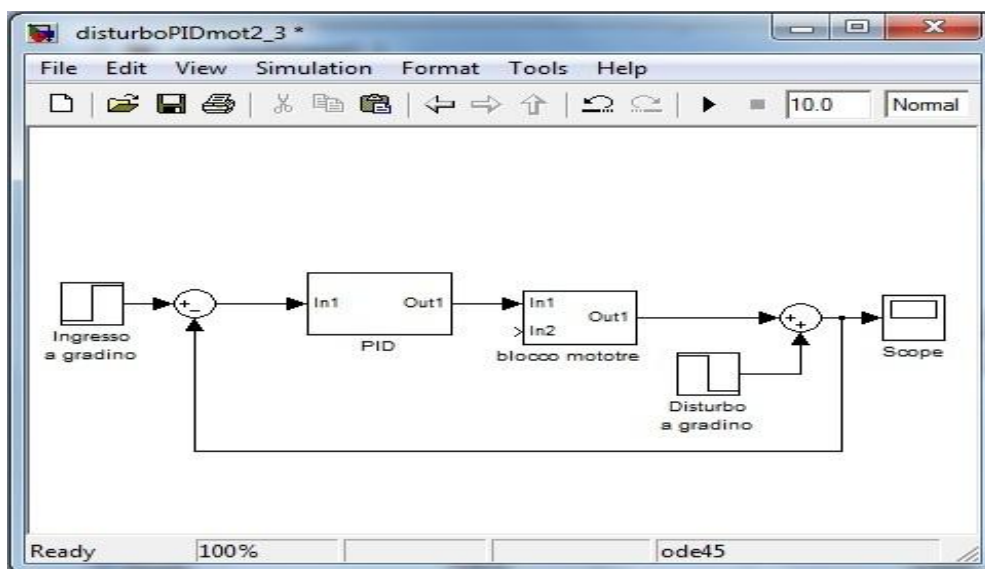


Figura 4.3.a: Sistema sollecitato da un disturbo in uscita del sistema in catena aperta

Il grafico dell'uscita rappresentato in Figura 4.3.b, presenta un picco negativo nel punto in cui il disturbo, segnale a gradino con ampiezza di -1 , entra in azione con un ritardo di 3 secondi, avendo il disturbo valore nominale uguale e opposto a quello in ingresso, all'istante $t=3\text{sec}$ l'uscita assume valore nullo, portandolo dopo un breve transitorio alla velocità desiderata.



Figura 4.3.b: Grafico dell'uscita del sistema sollecitato dal disturbo applicato a valle del sistema motore

Conclusioni

Sono riuscito a raggiungere l'obiettivo dell'elaborato, ovvero realizzare un controllore per comandare la velocità del motore in continua. Le tre strade adottate per ottenere il sistema di controllo hanno portato tutte ad ottenere un controllore che rispetta i vincoli di progetto, anche se diverse per approccio e metodo.

Si evince dal grafico in Figura 3.4.a che il controllore PID così ottenuto tra i tre risulta essere il migliore questo perchè il controllore PID ha una notevole efficacia nella regolazione di un'ampia gamma di processi industriali, inoltre:

- Tecniche di taratura semplici ed automatiche applicabili anche quando il modello dell'impianto è poco noto
- Importanza e convenienza economica della standardizzazione
- Possono essere usati come elementi base di schemi di controllo articolati (es.: controllo in cascata) portando notevolissimi miglioramenti delle prestazioni

I PID hanno successo perchè rappresentano una soluzione non facilmente superabile, in generale, nel rapporto efficacia/costo.

Bibliografia

[1] Sandro Zampieri, Dispensa di Controlli Automatici, Libreria Progetto, Padova.

Siti:

[2] Control System Principles,
<http://www.control-systems-principles.co.uk/downloads.html>.

[3] <http://www.engin.umich.edu/class/ctms/examples/motor/motor.htm>.