

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

TESI DI LAUREA IN  
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE  
(Laurea triennale DM 270/04)

FILTRI ATTIVI DI SECONDO ORDINE  
E REALIZZAZIONI CIRCUITALI

*Relatore : Gaudenzio Meneghesso*

*Laureando : Francesco Vulpone*

Anno Accademico 2011-2012

## INDICE

1- Introduzione.....	3
2- Classificazione dei filtri.....	5
3- Filtri di primo ordine.....	9
4- Filtri di secondo ordine.....	13
4.1- Approssimazione di Butterworth.....	13
4.2- Approssimazione di Chebyshev.....	15
4.3- Approssimazione di Bessel.....	18
4.4- Approssimazione di Cauer.....	19
4.5- Approssimazione inversa di Chebyshev.....	20
5- Realizzazioni circuitali.....	23
5.1- Sallen & Key.....	23
5.2- Retroazione negativa multipla.....	28
6- Bibliografia.....	31



## 1. INTRODUZIONE

I filtri sono dei sistemi di elaborazione di segnali elettrici. Quando un segnale è posto in ingresso al filtro, ciò che si ottiene è il segnale di ingresso privato di alcune frequenze. Per essere più chiari, un segnale può essere espresso tramite serie di Fourier come

$$s(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos j\omega_s t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin j\omega_s t$$

ed il filtro altera l'ampiezza dei coefficienti  $a_i$  e  $b_i$ .

Assumiamo che i componenti utilizzati, e i filtri stessi, siano LTI.

Un sistema è *lineare* se vale il principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero se

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

Si dice invece *tempo-invariante* se una traslazione temporale dell'ingresso comporta un'eguale traslazione temporale all'uscita

$$\text{se } f(x(t)) = y(t) \text{ allora } f(x(t - T)) = y(t - T)$$

Un'altra importante proprietà dei filtri è la simmetria Hermitiana, ovvero

$$H(-s) = H^*(s)$$

che comporta una simmetria pari del modulo della risposta in frequenza, mentre la fase ha simmetria dispari.

I filtri vengono utilizzati nella stragrande maggioranza degli apparecchi elettronici che ci circondano, come radio, televisori, lettori audio ecc. Quando ad esempio ci sintonizziamo su un canale TV o su una determinata stazione radio, di tutto il segnale elettrico fornito dall'antenna, selezioniamo solamente la banda che riguarda quel determinato canale o stazione, eliminando tutte le frequenze che non ne fanno parte.

In un impianto di trasmissione, se si vuole restare sull'esempio precedente, la circuiteria può ritardare in maniera differente le armoniche del segnale, compromettendo l'intelleggibilità dell'informazione; gli equalizzatori di fase rendono uniformi tali ritardi, mantenendo fedele l'informazione.



## 2. CLASSIFICAZIONE DEI FILTRI

I filtri possono essere distinti secondo vari criteri: un primo criterio è la tipologia del segnale su cui lavora. Il filtro è analogico, se il segnale è a tempo continuo, discreto se il segnale è a tempo discreto. In particolare, verranno trattati filtri a tempo continuo.

Un filtro può essere passivo, se realizzato unicamente con componenti passivi, come induttori, condensatori e resistori, o attivo se comprende anche l'uso di elementi attivi, come gli amplificatori operazionali.

Se il filtro varia l'ampiezza delle armoniche del segnale, possiamo individuare filtri passa basso, passa alto, passa banda ed elimina banda. In questa categoria va inserito anche l'equalizzatore di ampiezza. Se invece agisce sul ritardo delle componenti del segnale, possiamo individuare gli equalizzatori di fase.

Prima di differenziare i filtri a seconda delle frequenze che attenuano, definiamo dei concetti che ci possono aiutare

-BANDA PASSANTE: è la banda dove l'attenuazione è sempre minore di un certo valore  $\alpha_{\max}$ .

-BANDA ATTENUATA: è la banda dove l'attenuazione è sempre maggiore di un certo valore  $\alpha_{\min}$ .

-BANDA DI TRANSIZIONE: è la banda compresa tra la banda passante e quella attenuata.

### Filtro PASSA BASSO

Il filtro passa basso (LP) ideale lascia passare inalterate le componenti del segnale al di sotto di una certa frequenza di taglio e taglia quelle oltre tale frequenza.

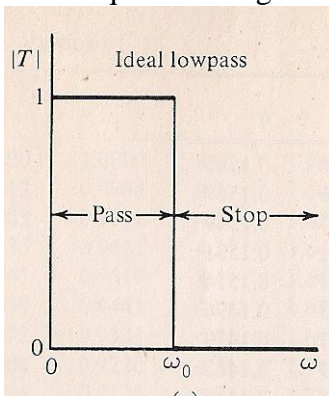


Figura 2.1 Filtro ideale passa basso

Quello reale, invece, presenta un'attenuazione lieve prima della frequenza di taglio, in accordo con la definizione di banda passante, e una forte attenuazione oltre la frequenza minima della banda attenuata.

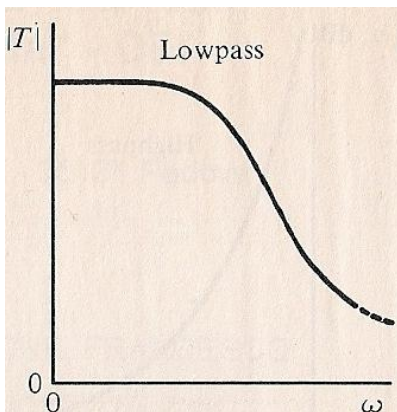


Figura 2.2 Filtro passa basso reale

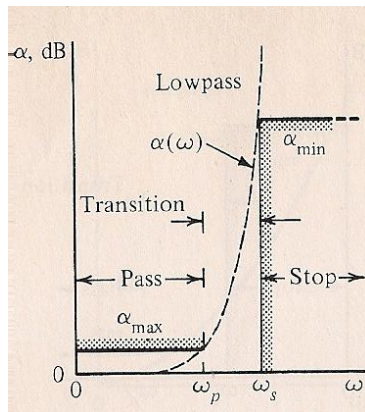


Figura 2.3 Andamento dell'attenuazione in un filtro passa basso reale

### Filtro PASSA ALTO

Il filtro passa alto (HP) è in un certo senso il duale del LP. Nel caso ideale le frequenze sopra la frequenza di taglio passano inalterate, mentre quelle al di sotto sono tagliate.

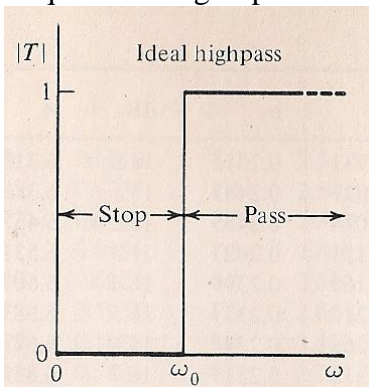


Figura 2.4 Filtro passa alto ideale

Nel caso reale, invece, individuamo la banda passante al di sopra della frequenza di taglio, e, prima di una frequenza inferiore a quella di taglio, la banda attenuata.

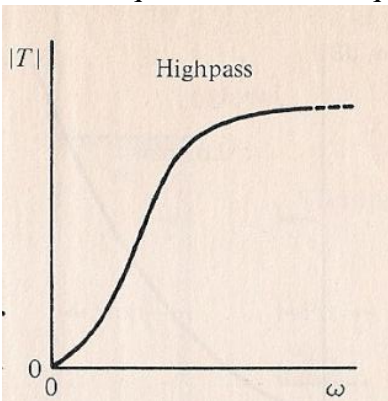


Figura 2.5 Filtro passa alto reale

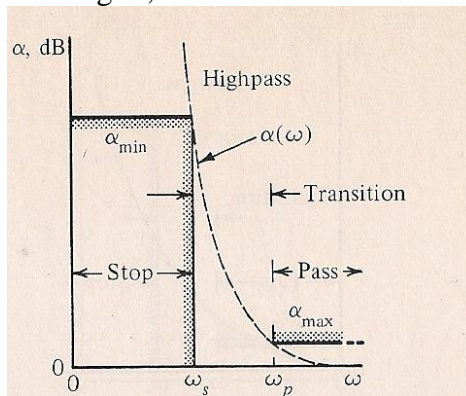


Figura 2.6 Andamento dell'attenuazione in un filtro passa alto

### Filtro PASSA BANDA

Il filtro passa banda (BP) ideale, lascia passare inalterate le frequenze in una certa banda, comprese tra una frequenza di taglio superiore e una inferiore, mentre taglia quelle al di fuori di questo intervallo.

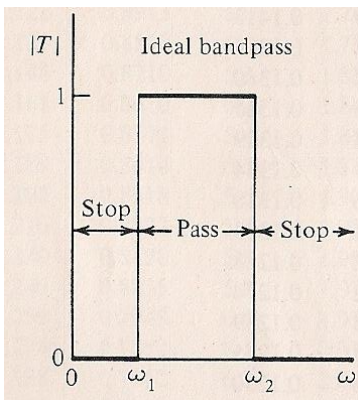


Figura 2.7 Filtro passa banda ideale

Per il filtro reale, individuiamo le frequenze  $f_1 < f_2 < f_3 < f_4$  tali per cui tra  $f_2$  e  $f_3$  c'è la banda passante, mentre per frequenze minori di  $f_1$  e maggiori di  $f_4$  vi è la banda attenuata.

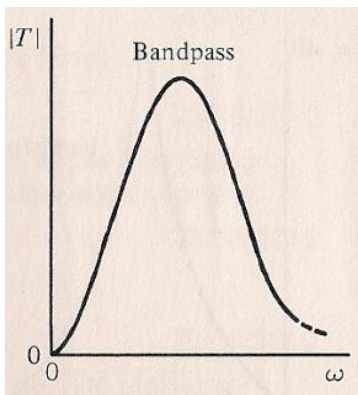


Figura 2.8 Filtro passa banda reale

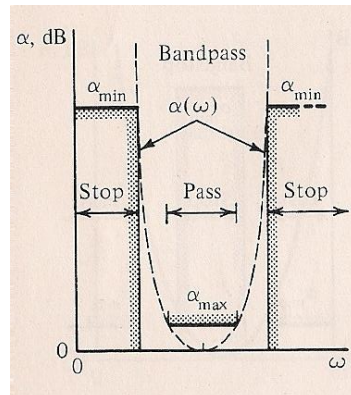


Figura 2.9 Andamento dell'attenuazione in un filtro passa banda reale

### Filtro ELIMINA BANDA

Il filtro elimina banda (NOTCH) ideale si comporta in maniera complementare al BP, tagliando le frequenze all'interno di un dato intervallo e facendo passare inalterate quelle al di fuori.

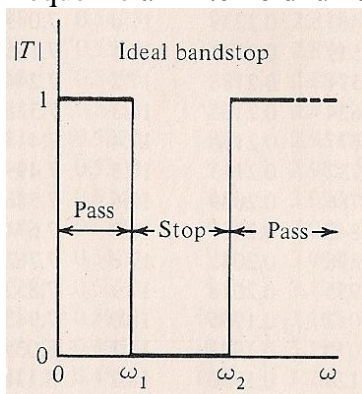


Figura 2.10 Filtro elimina banda ideale

Per quanto riguarda il filtro reale, considerando le frequenze sopra indicate, abbiamo lo scambio di banda passante ed attenuata.

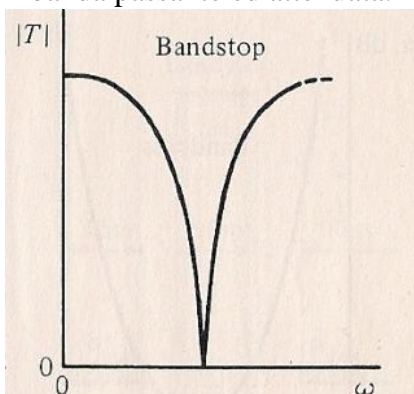


Figura 2.11 Filtro elimina banda ideale

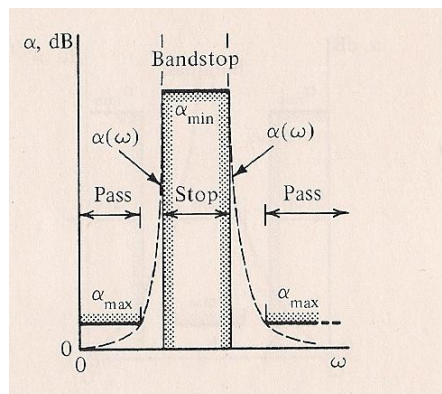


Figura 2.12 Andamento dell'attenuazione in un filtro elimina banda ideale

**Filtro PASSA TUTTO**

Il filtro passa tutto (AP) viene detto anche equalizzatore di fase, in quanto non modifica l'ampiezza delle frequenze ma ne va a variare la fase.

**Equalizzatori di ampiezza**

In questi filtri, l'attenuazione delle varie armoniche varia in funzione della frequenza; non ha senso parlare di banda passante e banda attenuata.

### 3. FILTRI DI PRIMO ORDINE

Si definisce *ordine* di un filtro, il numero di poli della sua funzione di trasferimento. Per i filtri di primo ordine, quindi, le funzioni di trasferimento avranno tutte un solo polo, come vedremo in seguito.

Cominciamo osservando il comportamento di due circuiti RC-serie.

Prima però ricordiamo che, nel dominio di Laplace, l'impedenza di un resistore è identica alla sua resistenza, mentre quella di un condensatore è  $\frac{1}{sC}$ .

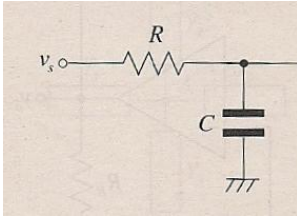


Figura 3.1 Circuito passa basso passivo

Calcolando la tensione di uscita sul condensatore, otteniamo

$$V_C = V_S \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = V_S \frac{1}{1 + sRC}$$

Passando al calcolo della funzione di trasferimento

$$H_{LP} = \frac{V_C}{V_S} = \frac{V_S \frac{1}{1 + sRC}}{V_S} = \frac{1}{1 + sRC}$$

Questa funzione di trasferimento caratterizza un filtro passa basso, infatti, calcolandola per  $s=j\omega$  e facendone i limiti per  $\omega \rightarrow 0$  (basse frequenze) e per  $\omega \rightarrow \infty$  (alte frequenze) abbiamo

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H_{LP}(j\omega) = 0 \qquad \lim_{\omega \rightarrow 0} H_{LP}(j\omega) = 1$$

Considerando il circuito di figura 3.2 e facendo gli stessi calcoli, otteniamo un filtro passa alto

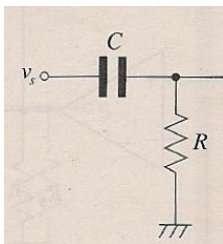


Figura 3.2 Circuito passa alto passivo

$$V_R = V_S \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = V_S \frac{R}{\frac{1 + sRC}{sC}} = V_S \frac{sRC}{1 + sRC}$$

$$H_{HP} = \frac{V_R}{V_S} = \frac{V_S \frac{sRC}{1 + sRC}}{V_S} = \frac{sRC}{1 + sRC}$$

Passando ora al limite

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H_{HP}(j\omega) = 0 \qquad \lim_{\omega \rightarrow \infty} H_{HP}(j\omega) = 1$$

Se ai due precedenti circuiti si pone l'uscita nell'ingresso non invertente di un amplificatore operazionale, otteniamo un filtro HP o LP attivo (figure 3.3 e 3.4 rispettivamente), con guadagno dato da  $K = 1 + \frac{R_B}{R_A}$

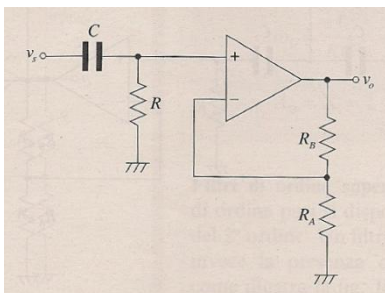


Figura 3.3 Filtro attivo passa alto di ordine uno (non invertente)

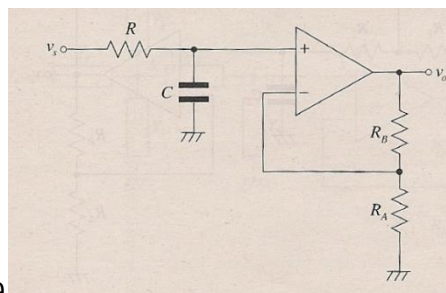


Figura 3.4 Filtro attivo passa basso di ordine uno (non invertente)

Il valore  $\frac{1}{RC}$  corrisponde a  $\omega_0$ , frequenza di taglio del filtro.

La realizzazione circuitale appena vista è una delle due possibili; oltre a questa c'è anche quella a retroazione negativa realizzata nella seguente maniera.

Analizzando il circuito passa basso in figura 3.5

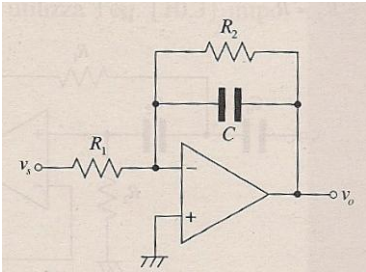


Figura 3.5 Filtro attivo basso di ordine uno (retroazione negativa)

$$V_+ = V_- = 0V$$

Il parallelo tra  $R_2$  e  $C$  fornisce l'impedenza  $Z_P = \frac{R_2}{sC R_2 + 1} = \frac{R_2}{1 + sCR_2}$

Eguagliando le correnti al morsetto non invertente

$$\frac{V_S - V_-}{R_1} = \frac{V_- - V_O}{Z_P} \Rightarrow \frac{V_S}{R_1} = \frac{-V_O}{\frac{R_2}{1 + sCR_2}} \Rightarrow H_{LP} = \frac{V_O}{V_S} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + sCR_2}$$

Con  $K = \lim_{\omega \rightarrow 0} H_{LP}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1}$  mentre  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H_{LP}(j\omega) = 0$

In questo caso  $\omega_0 = \frac{1}{CR_2}$

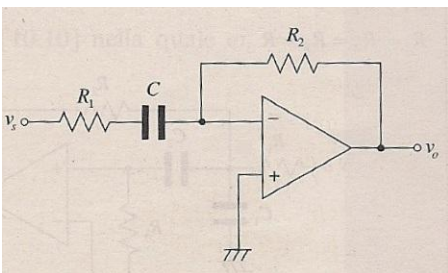


Figura 3.6 Filtro attivo passa alto di ordine uno (retroazione negativa)

Per il circuito passa alto di figura 3.6, abbiamo invece che la serie tra condensatore e resistenza mi fornisce l'impedenza  $Z_S = R_1 + \frac{1}{sC} = \frac{1 + sCR_1}{sC}$

$$\frac{V_S - V_-}{Z_S} = \frac{V_- - V_O}{R_2} \Rightarrow \frac{-V_O}{R_2} = \frac{V_S}{\frac{1 + sCR_1}{sC}} \Rightarrow H_{HP} = \frac{V_O}{V_S} = -\frac{R_1}{R_2} \frac{sCR_2}{1 + sCR_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{sCR_1}{1 + sCR_1}$$

Con  $K = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H_{HP}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1}$  mentre  $\lim_{\omega \rightarrow 0} H_{HP}(j\omega) = 0$

In questo caso  $\omega_0 = \frac{1}{CR_1}$

Tali filtri presentano un banda passante lineare, mentre in banda attenuata il diagramma di Bode del modulo presenta una pendenza di 20dB/dec, positivi per il HP, negativi per il LP.

Il valore del modulo in corrispondenza della frequenza di taglio è -3dB nel caso dei filtri passivi, mentre nel caso dei filtri attivi è di 3dB inferiore a  $H_{HP}(\infty)$  oppure  $H_{LP}(0)$ .

Per quanto riguarda il diagramma di Bode della fase, distinguiamo i due casi delle configurazioni invertente e non invertente. Nel primo caso, la fase del filtro passa basso parte da 180° per arrivare a 90°, passando per 135° in corrispondenza della frequenza di taglio; nel passa alto parte invece da -90°, passa per -135° in corrispondenza della frequenza di taglio, per poi arrivare a -180°.

Nel caso della configurazione non invertente, i diagrammi sono traslati di 180° (coerentemente con lo sfasamento dovuto a un guadagno negativo); il filtro passa basso parte da 0°, passa per -45° in corrispondenza della frequenza di taglio, per poi raggiungere l'asintoto dei -90°, mentre il passa alto parte da 90°, passa per 45°, e raggiunge l'asintoto degli 0°.



## 4. FILTRI DI SECONDO ORDINE

I filtri di secondo ordine presentano una funzione di trasferimento con due poli, il che permette di aggiungere il filtro passa banda, e quindi anche il notch, ai filtri di nostro interesse.

La pendenza del diagramma di Bode del modulo nella banda attenuata è di 40dB/dec (in valore assoluto), mentre in banda passante, si presentano varie situazioni, di modulo lineare o con picchi, a seconda dell'approssimazione che applichiamo. Allo stesso modo, la fase può variare in maniera costante o meno a seconda dell'approssimazione utilizzata.

Le principali approssimazioni della funzione di trasferimento sono cinque:

- approssimazione di Butterworth
- approssimazione di Bessel
- approssimazione di Chebyshev
- approssimazione di Cauer
- approssimazione inversa di Chebyshev

### 4.1 APPROSSIMAZIONE DI BUTTERWORTH

Mediante l'approssimazione di Butterworth il filtro ottiene una risposta piatta in banda passante e un'attenuazione monotona in banda attenuata.

Si può studiare la funzione di trasferimento di un filtro ideale LP normalizzato (guadagno unitario da 0 a 1rad/sec e nullo altrove) e, con opportune trasformazioni, ricondursi agli altri tipi di filtri.

Partiamo da una generica f.d.t. nella forma

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

e poniamo, in accordo con la normalizzazione,  $N(s) = 1$ . Otteniamo

$$H(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Per avvicinarci al caso ideale, dove alle basse frequenze il modulo della risposta in frequenza è piatto, dobbiamo fare in modo che le derivate di  $|H(s)|$ , in prossimità di  $\omega = 0$ , siano nulle.

Se si considera  $|D(j\omega)|^2 = a_0^2 + b_1\omega^2 + b_2\omega^4 + \dots + \omega^{2n}$  e si sviluppa  $|H(j\omega)|^2$  in serie di MacLaurin si ottiene

$$|D(j\omega)|^{-2} = |D(0)|^{-2} + \omega(|D(0)|^{-2})' + \omega^2 \frac{(|D(0)|^{-2})''}{2} + \dots + \omega^{2n} \frac{(|D(0)|^{-2})^{(2n)}}{(2n)!}$$

È possibile realizzare le specifiche ed annullare al massimo le prime  $2n - 1$  derivate, ponendo a zero i  $b_i$  e, concordemente alla normalizzazione, consideriamo  $a_0 = 1$ , ottenendo

$$|H(s)|^2|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$$

Nel nostro caso, per i filtri di ordine  $n=2$ , risulta

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^4}$$

Per determinare i poli di tale funzione si opera la sostituzione  $\omega = -js$ , pertanto essi sono le soluzioni di  $1 + s^4 = 0$ .

Le radici risultano complesse, posizionate sulla circonferenza goniometrica con angoli di  $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$  e  $315^\circ$ . Le radici che andiamo a considerare sono quelle poste  $135^\circ$  e  $225^\circ$ , ovvero  $s_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $s_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$  in quanto a parte reale negativa e quindi stabili.

Poiché  $s$  è un numero complesso,

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{B_2(s)B_2(-s)}$$

$$B_2(s) = (s - s_1)(s - s_2) = \left(s + \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}s + s^2$$

Tale polinomio è detto *polinomio di Butterworth (di ordine 2)* ed è denominatore della nostra f.d.t., che quindi risulta essere

$$H(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s^2}$$

Nel caso in cui la frequenza di taglio  $\omega_0$  sia diversa da  $1\text{rad/sec}$ , la risposta di Butterworth diventa

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}$$

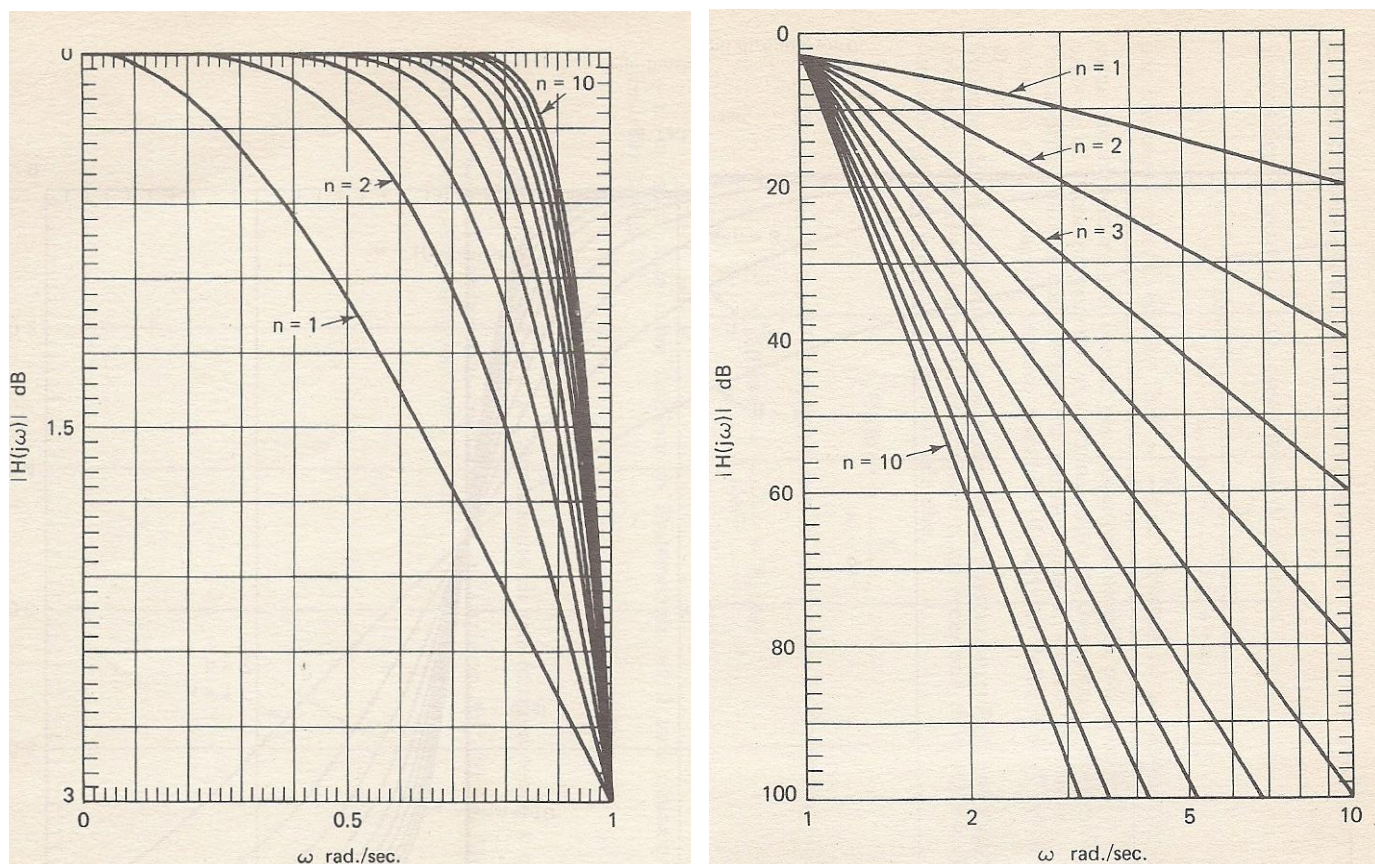


Figura 4.1 Modulo della risposta in frequenza di un filtro di Butterworth, al variare di  $n$

## 4.2 APPROSSIMAZIONE DI CHEBYSHEV

Con l'approssimazione di Chebyshev, gli scostamenti sono minori, in modulo, rispetto a quelli della risposta di Butterworth, e sono distribuiti lungo l'intera banda passante, formando delle ondulazioni. Il modulo quadro della risposta in frequenza risulta essere

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

con  $C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ , detto polinomio di Chebyshev, definito come

$$C_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \begin{cases} \cos\left(n \cos^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right), & \left|\frac{\omega}{\omega_0}\right| \leq 1 \\ \cosh\left(n \cosh^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right), & \left|\frac{\omega}{\omega_0}\right| > 1 \end{cases}$$

Se  $\left|\frac{\omega}{\omega_0}\right| \leq 1$ , mediante formule trigonometriche ricaviamo

$$\cos((n+1)x) = 2 \cos(nx) \cos(x) - \cos((n-1)x)$$

da cui deriva

$$C_{n+1} = 2 \frac{\omega}{\omega_0} C_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - C_{n-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow C_2 = 2 \frac{\omega}{\omega_0} C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - C_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow C_2 = 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1$$

In tal situazione abbiamo che il modulo della risposta in frequenza oscilla tra 1 e  $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ , e presenta due massimi. Nel caso generale ne presenterebbe  $n$ , pari all'ordine del filtro (esempio il figura 4.2(a-b), per  $n=6$ ).

Possiamo rendere la rappresentazione di  $C_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  la medesima per ogni  $\frac{\omega}{\omega_0}$  servendoci delle rappresentazioni di coseno e coseno iperbolico

$$\cosh(jx) = \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

e

$$\cosh^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -j \cos^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \ln\left(\frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}\right)$$

Si ottiene quindi, per il coseno

$$e^{jx} = e^{jn \ln\left(\frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}\right)} = \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}\right)^{-n}$$

$$e^{-jx} = e^{-jn \ln \left( \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \right)} = \left( \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \right)^{-n}$$

E per il coseno iperbolico

$$e^x = e^{n \ln \left( \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \right)} = \left( \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \right)^n$$

$$e^{-x} = e^{-n \ln \left( \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \right)} = \left( \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \right)^{-n}$$

Quindi in entrambi i casi

$$C_n \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{\left( \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \right)^n + \left( \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \right)^{-n}}{2}$$

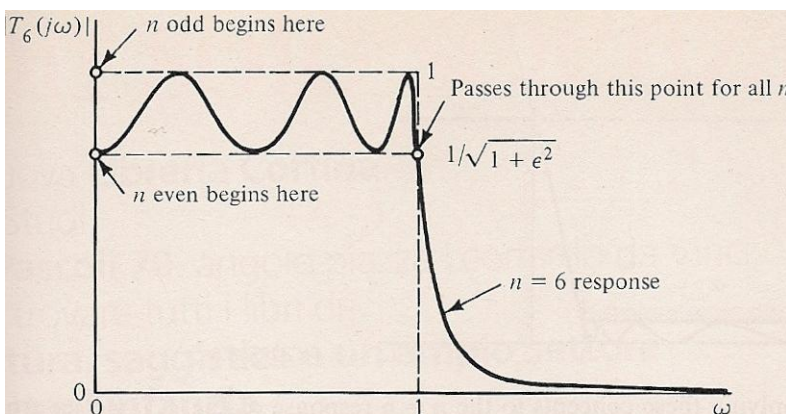


Figura 4.2(a) Modulo della risposta di Chebyshev per  $n=6$

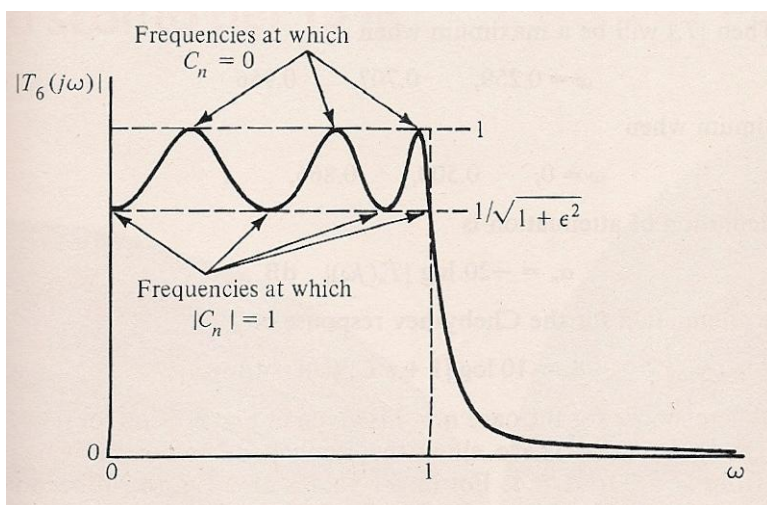


Figura 4.2(b) Modulo della risposta di Chebyshev per  $n=6$

Come fatto per il filtro di Butterworth, possiamo ricavare la f.d.t. determinando i poli di  $|H(s)|^2$  (per semplicità  $\omega_0 = 1$ ).

Per trovare i poli dobbiamo annullare il denominatore

$$1 + \varepsilon^2 C_2^2\left(\frac{s}{j}\right) = 0 \Rightarrow C_2\left(\frac{s}{j}\right) = \pm j \frac{1}{\varepsilon}$$

Studiamo i passaggi solamente per  $\omega < 1$ , poiché i risultati sono i medesimi per  $\omega > 1$ .

$$C_2(-js) = \cos(2 \cos^{-1}(-js))$$

$$\cos^{-1}(-js) = u + jv \quad (\ddagger)$$

da qui

$$C_2(-js) = \cos(2u + j2v) = \cos(2u) \cosh(2v) - j \operatorname{sen}(2u) \operatorname{senh}(2v) = \pm j \frac{1}{\varepsilon}$$

per cui

$$\cos(2u) \cosh(2v) = 0; \quad \operatorname{sen}(2u) \operatorname{senh}(2v) = \pm \frac{1}{\varepsilon}$$

Il coseno iperbolico è sempre non nullo, quindi si deve annullare il coseno, e ciò avviene per

$$u_k = \frac{\pi}{4}(2k + 1) \quad k = 0,1,2,3 \Rightarrow \operatorname{sen}(2u_k) = \pm 1 \Rightarrow v_k = \pm \frac{1}{2} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Tornando alla  $(\ddagger)$  otteniamo

$$s_k = j \cos(u_k + jv_k) = j \cos\left(\frac{\pi}{4}(2k + 1) + jv_k\right)$$

e dividendo  $s$  in parte reale  $\sigma$  e immaginaria  $\omega$

$$\sigma_k = \pm \operatorname{senh}(v_k) \operatorname{sen}\left(\frac{2k + 1}{4} \pi\right); \quad \omega_k = \cosh(v_k) \cos\left(\frac{2k + 1}{4} \pi\right)$$

I poli a parte reale negativa saranno quelli da noi considerati per costruire  $H(s)$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2} s \alpha + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}$$

con

$$\alpha = \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right); \quad \beta = \cosh\left(\frac{1}{2} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

### 4.3 APPROSSIMAZIONE DI BESSEL-THOMSON

Con l'approssimazione di Bessel-Thomson miriamo ad avere uno sfasamento lineare di tutte le frequenze della banda passante.

Per capire come ottenere una f.d.t. che conferisca un ritardo costante in banda, consideriamo la relazione I/O di un blocco ideale con la funzione di ritardare semplicemente il segnale

$$Out(t) = In(t - T)$$

dove  $T$  è il tempo, costante, di ritardo. Passando nel dominio di Laplace

$$Out(s) = In(s)e^{-sT} \Leftrightarrow H(s) = \frac{Out(s)}{In(s)} = e^{-sT}$$

Ricorrendo alle funzioni iperboliche si può riscrivere la f.d.t. come

$$\frac{1}{\sinh sT + \cosh sT} = \frac{1}{1 + \coth sT}$$

Espandendo in serie di MacLaurin seno e coseno iperbolici si ricava l'approssimazione della cotangente tramite l'approccio di Storch: in tale approccio, si divide coseno per seno, si inverte, si ripete la divisione e si continua col procedimento arrestandosi al termine desiderato.

$$\cosh sT = 1 + \frac{(sT)^2}{2!} + \frac{(sT)^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh sT = sT + \frac{(sT)^3}{3!} + \frac{(sT)^5}{5!} + \dots$$

$$\coth sT = \frac{1}{sT} + \frac{1}{\frac{3}{sT} + \frac{1}{\frac{5}{sT} + \frac{1}{\frac{7}{sT} + \dots}}}$$

Il risultato è il rapporto di due polinomi identificabili come un coseno iperbolico a numeratore e un seno iperbolico a denominatore; la somma di numeratore e denominatore è un'approssimazione di  $e^{sT}$ , per quanto visto prima. Nel caso  $n=2$  si ha quindi

$$\coth sT = \frac{1}{sT} + \frac{1}{\frac{3}{sT}} = \frac{3 + (sT)^2}{3sT}$$

e la somma di numeratore e denominatore da  $(sT)^2 + 3sT + 3$ , detto *polinomio di Bessel*. Affinché

$$H(0) = 1, \text{ dev'essere } H(s) = \frac{3}{(sT)^2 + 3sT + 3}$$

Il ritardo di un filtro di Bessel, data la sua  $H(s)$ , si ottiene mediante la derivata negativa della fase rispetto a  $\omega$

$$\begin{aligned} \text{Arg}(H(j\omega)) &= \text{Arg}(e^{-j\omega T}) = \text{Arg}(\cos(-\omega T) + j\text{sen}(-\omega T)) = \tan^{-1} \frac{\text{sen}(-\omega T)}{\cos(-\omega T)} = -\omega T \\ -\frac{d\text{Arg}(H(j\omega))}{d\omega} &= -\frac{d(-\omega T)}{d\omega} = T \end{aligned}$$

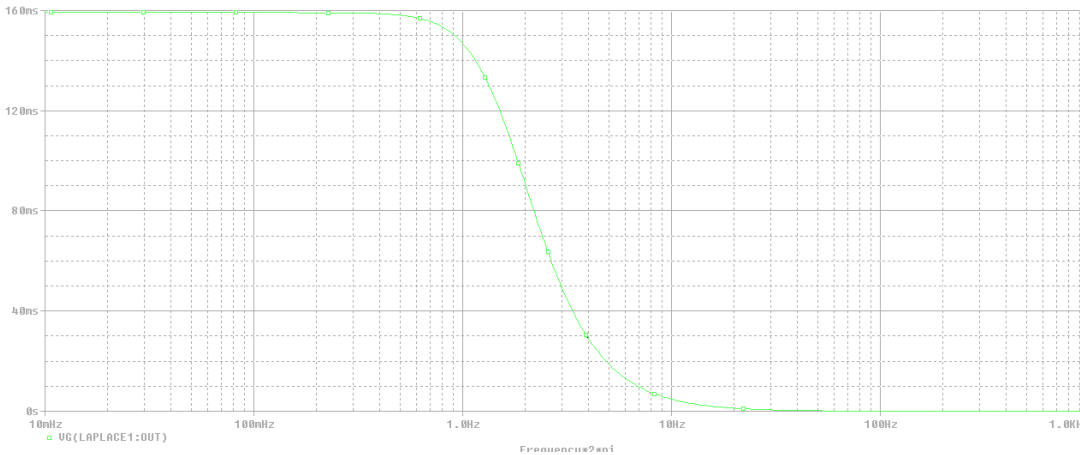


Figura 4.3 Andamento del ritardo per un filtro di Bessel di ordine 2

#### 4.4 APPROSSIMAZIONE DI CAUER

Nelle tipologie di filtri finora affrontate possiamo notare che hanno funzioni di trasferimento costituite solamente da poli e prive di zeri. Le risposte di Cauer e quella inversa di Chebyshev, invece, prevedono di inserire degli zeri, modificando la struttura della f.d.t. che, in particolare con le approssimazioni di Butterworth e Chebyshev, si vede essere

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + [F(j\omega)]^2}$$

Il risultato che vogliamo ottenere è raggiungibile ponendo  $F(j\omega) = R_n(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$ , rapporto di due polinomi

$$R_n^2(j\omega) = \frac{N(j\omega)N(-j\omega)}{D(j\omega)D(-j\omega)} \Rightarrow |H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(j\omega)} = \frac{D(j\omega)D(-j\omega)}{D(j\omega)D(-j\omega) + \varepsilon^2 N(j\omega)N(-j\omega)}$$

Tale tipologia di filtro presenta delle ondulazioni sia in banda passante che, in maniera molto più accentuata, in banda attenuata.

Se prendiamo un esempio di progettazione di un filtro con  $\frac{\omega_s}{\omega_0} = 1.5$ ,  $\alpha_{min} = 50\text{dB}$ ,  $\alpha_{max} = 0.5\text{dB}$ , se lo realizzassimo con un'approssimazione di Butterworth avremmo un ordine  $n=17$ , con Chebyshev  $n=8$ , mentre con Cauer  $n=5$ .

#### 4.5 APPROSSIMAZIONE INVERSA DI CHEBYSHEV

Come detto poc' anzi, l'approssimazione inversa di Chebyshev mira a posizionare degli zeri. Per ottenere la f.d.t. si parte da quella di Chebyshev

$$|H_C(j\omega)|^2 \Rightarrow 1 - |H_C(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2(\omega)}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)}$$

e si sostituisce  $1/\omega$  a  $\omega$ , ottenendo

$$|H_{IC}(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{1 + \varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}$$

Il diagramma del modulo che si ottiene è piatto in banda passante e presenta delle ondulazioni in banda attenuata.

Per quanto riguarda la determinazione della f.d.t. di Chebyshev-inverso, si deve procedere nel trovare poli e zeri di  $|H_{IC}(s)|^2$ .

I poli si ottengono sostituendo semplicemente  $\frac{1}{s}$  in luogo di  $s$  nella risposta di Chebyshev  $H_C(s)$

$$\begin{aligned} (s - p_1)(s - p_2) &\xrightarrow{s \rightarrow \frac{1}{s}} \left(\frac{1}{s} - p_1\right)\left(\frac{1}{s} - p_2\right) = \frac{1}{s^2}(1 - sp_1)(1 - sp_2) = \frac{p_1 p_2}{s^2} \left(\frac{1}{p_1} - s\right)\left(\frac{1}{p_2} - s\right) = \\ &= \frac{p_1 p_2}{s^2} \left(s^2 + \frac{2\sqrt{2}\alpha s}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2}\right) \end{aligned}$$

mentre per gli zeri si può partire trovando le soluzioni di

$$\cos(2 \cos^{-1}(\omega)) = 0 \Rightarrow \cos^{-1}(\omega) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad k = 1 \Rightarrow \omega = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\omega = -js \Rightarrow s = j \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{j}{\sqrt{2}}$$

se  $-\frac{j}{\sqrt{2}}$  è soluzione lo è anche  $\frac{j}{\sqrt{2}}$ , ottenendo al numeratore

$$\begin{aligned} \left(s - \frac{j}{\sqrt{2}}\right)\left(s + \frac{j}{\sqrt{2}}\right) &\xrightarrow{s \rightarrow \frac{1}{s}} \left(\frac{1}{s} - j\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{s} + j\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{s^2}\left(1 - j\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + j\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2s^2}(\sqrt{2} - js)(\sqrt{2} + js) = \\ &= \frac{1}{2s^2}(s^2 + 2) \end{aligned}$$

da cui

$$H(s) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{s^2 + 2}{s^2 + \frac{2\sqrt{2}\alpha s}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2}}$$

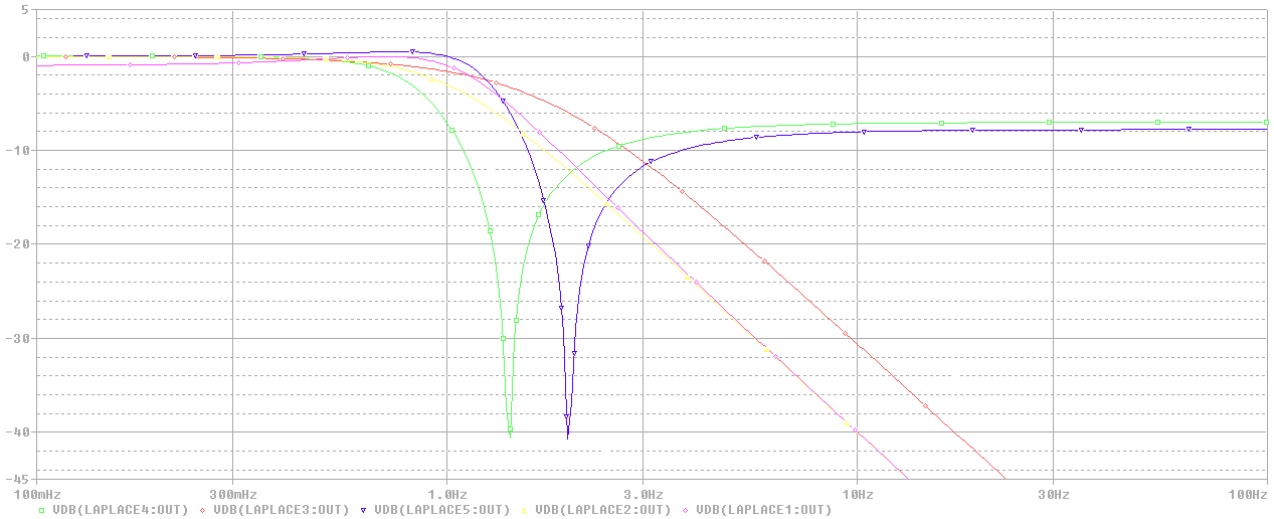


Figura 4.4 Confronto del modulo della risposta di Butterworth (giallo), Chebyshev (viola), Bessel (rosso), Cauer (blu) e Chebyshev inversa (verde) per  $n=2$

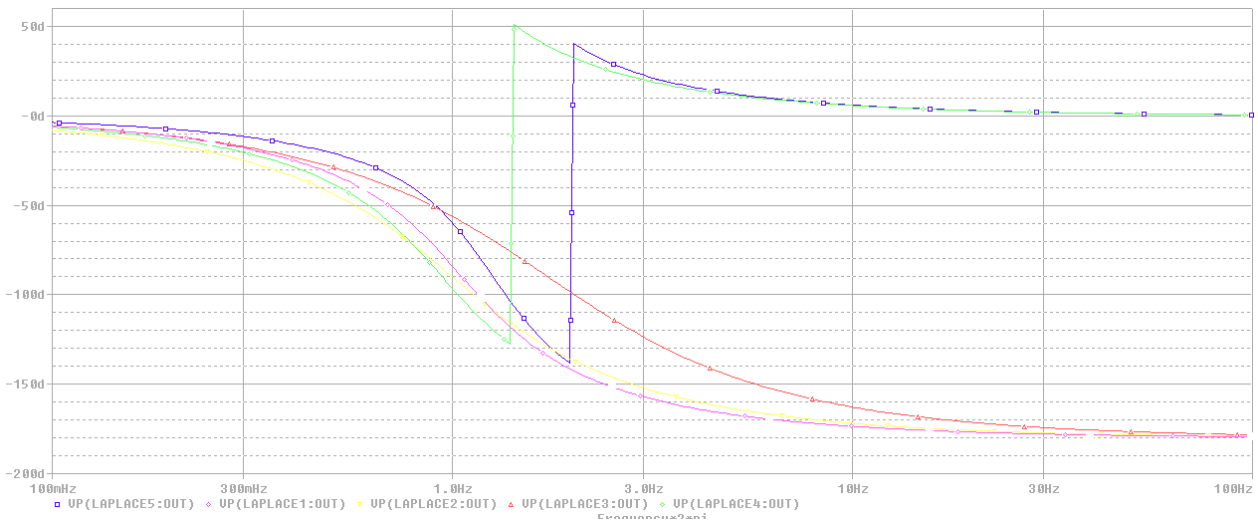


Figura 4.5 Confronto del modulo della risposta di Butterworth (giallo), Chebyshev (viola), Bessel (rosso), Cauer (blu) e Chebyshev inversa (verde) per  $n=2$

Finora abbiamo visto le approssimazioni per il filtro passa basso. L'idea ora è quella di trovare una funzione che mappi la banda passante e quella attenuata di un passa alto e di un passa banda (ed elimina banda) nelle corrispondenti di un filtro passa basso; in tal maniera si può risolvere il problema per un passa basso per poi riportarsi al problema di partenza.

La generica funzione di trasferimento con caratteristiche passa-basso è

$$H_{LP}(s') = \frac{K\omega_0^2}{s'^2 + 2\xi\omega_0 s' + \omega_0^2}$$

Scegliamo per semplicità  $\omega_0 = 1$ , quindi

$$H_{LP}(s') = \frac{K\omega_0^2}{s'^2 + 2\xi s' + 1}$$

Sia  $s'$  la frequenza complessa del filtro passa basso e  $s$  la nuova frequenza complessa. La funzione di trasformazione è  $s' = f(s)$ .

Prendiamo  $f_{HP}(s) = \frac{\omega_0}{s}$ ; tale funzione mappa l'intervallo  $[j\omega_0; +\infty)$  di  $s$  nell'intervallo  $[-j; 0]$  di  $s'$ , e l'intervallo  $(-\infty; -j\omega_0]$  di  $s$  in  $[0; j]$  di  $s'$ .  $f_{HP}(s)$  rappresenta dunque la trasformazione da un filtro passa alto a uno passa basso.

Se si opera la sostituzione  $s' = f_{HP}(s)$  in  $H_{LP}(s)$  otteniamo

$$H_{HP}(s) = H_{LP}(s) = \frac{K\omega_0^2}{\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^2 + 2\xi \frac{\omega_0}{s} + 1} = \frac{Ks^2}{s^2 + 2\xi s\omega_0 + \omega_0^2}$$

Per ottenere la trasformazione da un filtro passa banda, la funzione invece è

$$f_{BP}(s) = \frac{1}{B} \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} = \frac{1}{B} \left( s + \frac{\omega_0^2}{s} \right)$$

con  $B = \omega_2 - \omega_1$  (larghezza di banda),  $\omega_2$  e  $\omega_1$  frequenze di taglio (rispettivamente superiore e inferiore) e  $\omega_0^2 = \omega_2\omega_1$ .

Infatti abbiamo che

$$f_{BP}(j\omega_1) = f_{BP}(-j\omega_2) = -j; \quad f_{BP}(-j\omega_1) = f_{BP}(j\omega_2) = j$$

ovvero la banda passante è mappata da  $[j\omega_1; j\omega_2]$  ( $[-j\omega_2; -j\omega_1]$ ) in  $s$  a  $[-j; j]$  in  $s'$ .

La trasformazione che lega il passa banda all'elimina banda, è la stessa che lega il passa basso al passa alto; infatti, similmente agli ultimi due, la banda passante del passa banda diventa attenuata nell'elimina banda e viceversa.

$$f_{BE}(s) = \frac{1}{f_{BP}(s)}$$

## 5. REALIZZAZIONI CIRCUITALI

Le possibili realizzazioni circuitali che verranno esposte sono due: quella di Sallen & Key, o VCVS (Voltage Controlled Voltage Source) e a retroazione negativa multipla.

Nel denominatore delle funzioni di trasferimento dei filtri è presente il termine di *smorzamento*  $\xi$ ; più tale termine è superiore, in modulo, a  $1/\sqrt{2}$ , più il diagramma della fase ha una transizione lenta in prossimità della pulsazione di taglio, mentre se lo smorzamento tende a 0, il diagramma della fase è sempre più ripido attorno alla pulsazione di taglio, e il modulo ivi presenta una sovralongazione. Quando si parla di un filtro, spesso, al posto della sovralongazione si parla di *fattore di merito*  $Q$ , legato al precedente parametro tramite la relazione  $Q = 1/2\xi$ .

### 5.1 SALLEN & KEY

#### -Passa Basso

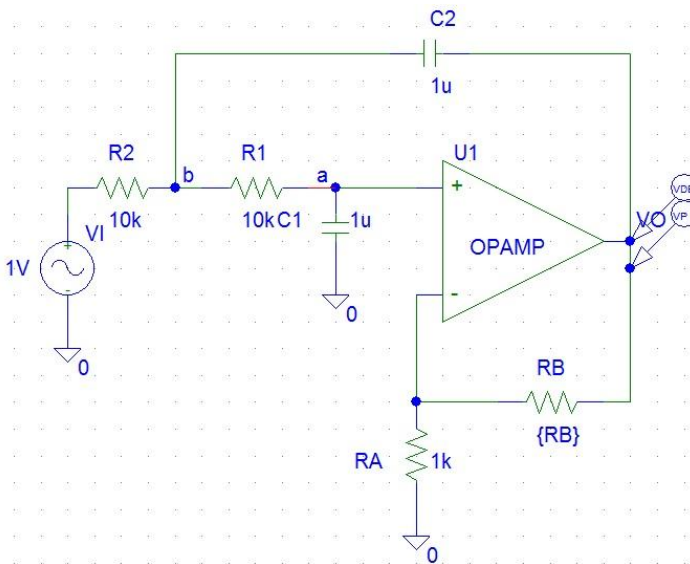


Figura 5.1 Schema elettrico di un filtro LP realizzato con Sallen & Key

Essendo l'AO in configurazione non invertente

$$v_o = v_a \left( 1 + \frac{R_B}{R_A} \right) \quad \text{con} \quad 1 + \frac{R_B}{R_A} = A$$

Nodo a:

$$\frac{v_b - v_a}{R_2} = v_a s C_2 \Rightarrow v_b = \frac{v_o}{A} (1 + s R_2 C_2)$$

Nodo b:

$$\begin{aligned} \frac{v_i - v_b}{R_1} &= \frac{v_b - v_a}{R_2} + (v_b - v_o) s C_1 \Rightarrow \frac{v_i}{R_1} + \frac{v_a}{R_2} + v_o s C_1 = v_b \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + s C_1 \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{v_i}{R_1} = v_o \frac{R_2 + s C_2 R_2^2 + s C_2 R_1 R_2 + s C_1 R_1 R_2 + s^2 R_1 R_2^2 C_1 C_2 - s A C_1 R_1 R_2}{A R_1 R_2} \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{v_o}{v_I} = \frac{\frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-A}{R_2 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Che è nella forma di una f.d.t. con caratteristiche “passa basso”

$$H(s) = \frac{K \omega_0^2}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Se per semplicità scegliamo tutti i condensatori uguali e i resistori  $R_1$  ed  $R_2$  uguali, otterremo

$$H(s) = \frac{A \frac{1}{R^2 C^2}}{s^2 + s \left( \frac{3-A}{RC} \right) + \frac{1}{R^2 C^2}}$$

Le variabili di progetto sono quindi

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}; \xi = \frac{1}{2Q} = \frac{3-A}{2}; K = A = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

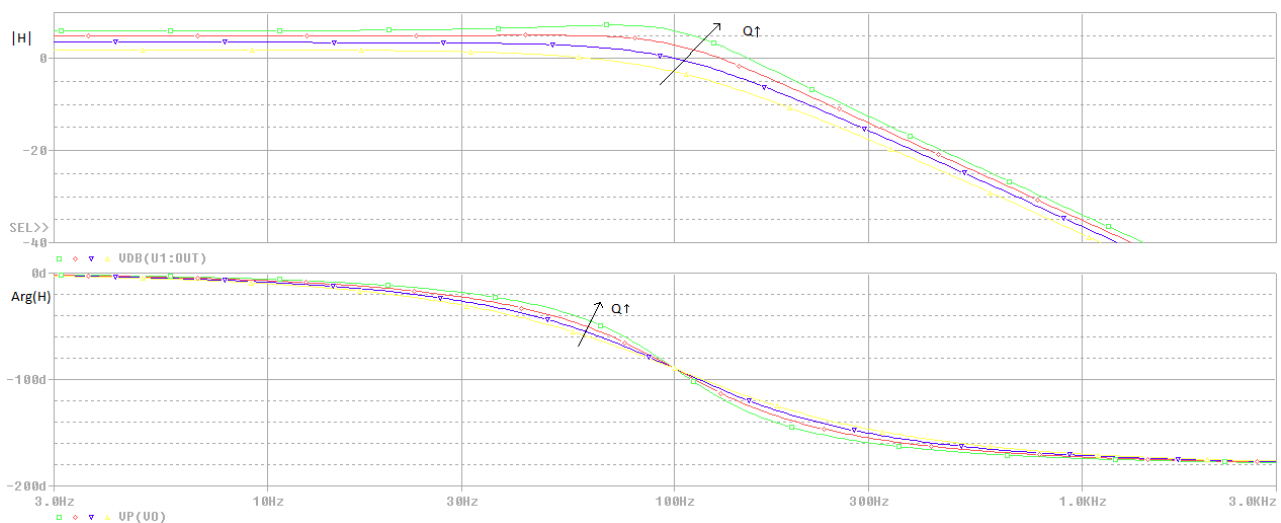


Figura 5.2 Filtro passa basso realizzato con un circuito di Sallen & Key, al variare dello smorzamento

## -Passa Alto

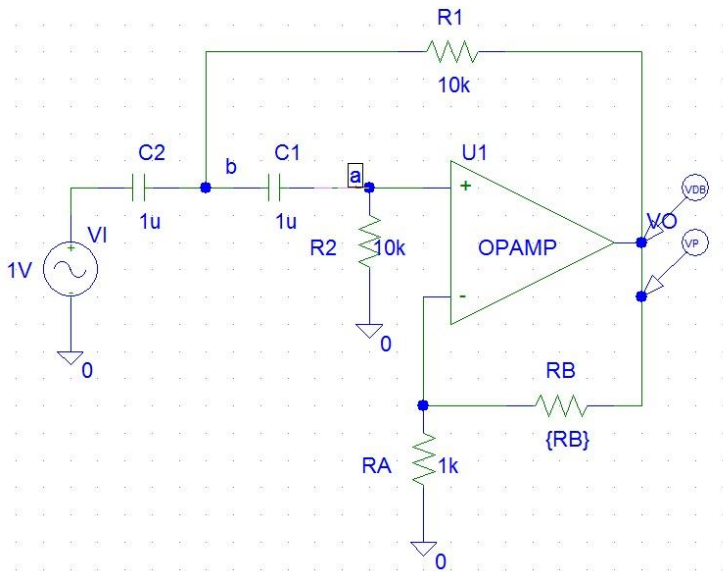


Figura 5.3 Schema elettrico di un filtro HP realizzato con Sallen & Key

Per ottenere un filtro passa-alto è sufficiente scambiare la posizione delle resistenze con quella dei condensatori.

Nodo  $a$ :

$$(v_b - v_a)sC_2 = \frac{v_a}{R_2} \Rightarrow v_b = \frac{v_o}{A} \frac{1 + sR_2C_2}{sR_2C_2}$$

Nodo  $b$ :

$$(v_i - v_b)sC_1 = \frac{v_b - v_o}{R_1} + (v_b - v_a)sC_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_i s C_1 = \frac{v_o}{A} \left( \frac{1 + sR_2C_2}{sR_2C_2} \right) \left( \frac{sR_1C_1 + sR_1C_2 + 1}{R_1} \right) - v_o \frac{sR_1C_2}{KR_1} =$$

$$= v_o \frac{-AsR_2C_2 - s^2R_1R_2C_2^2 + 1 + sC_1R_1 + sC_2R_1 + sR_2C_2 + s^2R_1R_2C_2^2 + s^2C_2C_1R_1R_2}{AsR_1R_2C_2}$$

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{As^2}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1-A}{R_2C_2} \right) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

Che è nella forma di una f.d.t. con caratteristiche “passa alto”

$$H(s) = \frac{Ks^2}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Se per semplicità scegliamo tutti i condensatori uguali e i resistori  $R_1$  ed  $R_2$  uguali, otterremo

$$H(s) = \frac{As^2}{s^2 + s \left( \frac{3-A}{RC} \right) + \frac{1}{R^2C^2}}$$

Le variabili di progetto sono quindi

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}; \xi = \frac{1}{2Q} = \frac{3-A}{2}; K = A = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

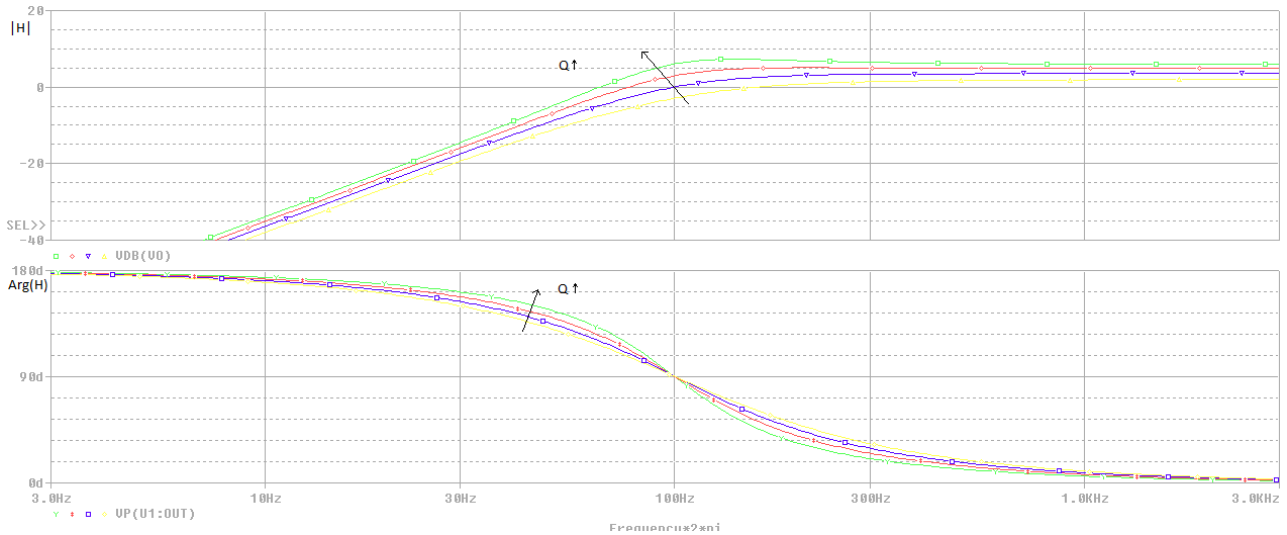


Figura 5.4 Filtro passa alto realizzato con un circuito di Sallen & Key, al variare dello smorzamento

### -Passa Banda

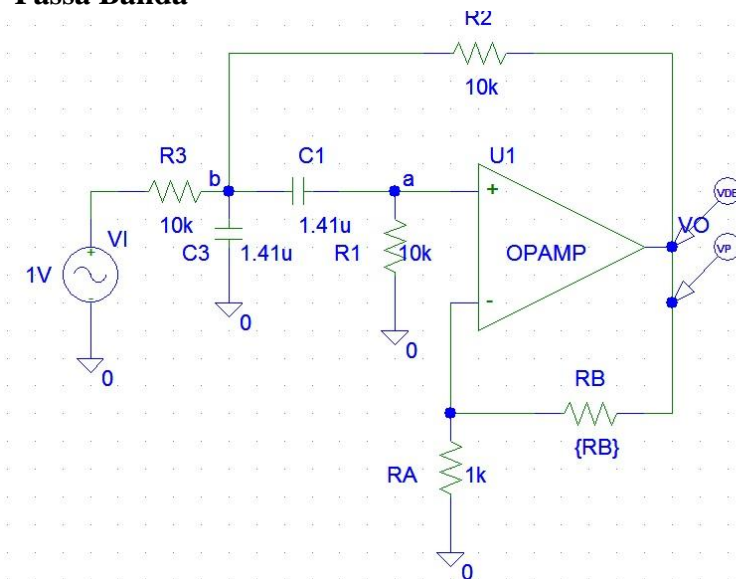


Figura 5.5 Schema elettrico di un filtro BP realizzato con Sallen & Key

Un filtro passa-banda può essere realizzato ponendo in cascata un filtro passa-basso e uno passa-alto, se la banda è sufficientemente larga, altrimenti si può ricorrere a un unico circuito VCVS. Nodo  $a$ :

$$(v_b - v_a)sC_2 = \frac{v_a}{R_2} \Rightarrow v_b = \frac{v_o}{A} \frac{1 + sR_2C_2}{sR_2C_2}$$

Nodo *b*:

$$\frac{v_I - v_b}{R_3} = v_b s C_1 + (v_b - v_a) s C_2 + \frac{v_b - v_O}{R_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_I}{R_3} = v_O \left( \frac{R_1 + R_3 + s C_1 R_1 R_3 + s C_2 R_1 R_3}{A R_1 R_3} \frac{1 + s R_2 C_2}{s R_2 C_2} - \frac{s C_2}{A} - \frac{1}{R_2} \right) =$$

$$= v_O \left( \frac{R_1 + R_3 + s C_1 R_1 R_3 + s C_2 R_1 R_3 + s R_1 R_2 C_2 + s R_3 R_2 C_2 + s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 + s^2 C_2^2 R_1 R_2 R_3 - s^2 C_2^2 R_1 R_2 R_3 - A s C_2 R_2 R_3}{A s C_2 R_1 R_2 R_3} \right)$$

$$H(s) = \frac{v_O}{v_I} = \frac{A s \frac{1}{R_3 C_1}}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1-A}{R_1 C_1} \right) + \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Che è nella forma di una f.d.t. con caratteristiche “passa banda”

$$H(s) = \frac{K s \frac{\omega_0}{Q}}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Se per semplicità scegliamo tutti i condensatori uguali e i resistori  $R_1$ ,  $R_2$  ed  $R_3$  uguali, otterremo

$$H(s) = \frac{A s \frac{1}{RC}}{s^2 + s \left( \frac{4-A}{RC} \right) + \frac{2}{R^2 C^2}}$$

Le variabili di progetto sono quindi

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC}; \xi = \frac{1}{2Q} = \frac{4-A}{2\sqrt{2}}; K = \frac{A}{4-A}$$

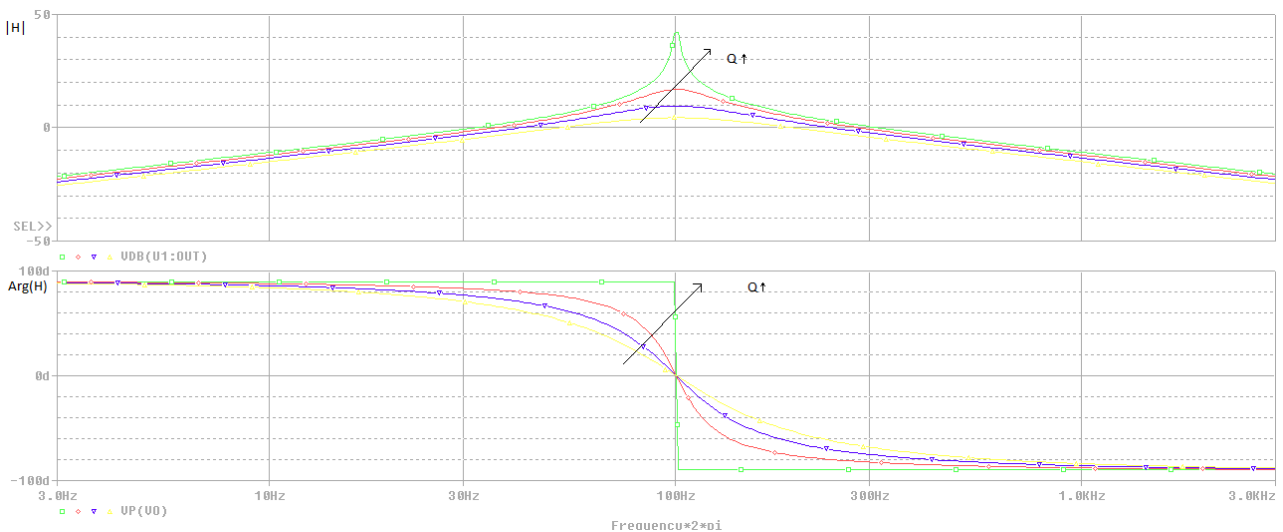


Figura 5.6 Filtro passa banda realizzato con un circuito di Sallen & Key, al variare dello smorzamento

## 5.2 RETROAZIONE NEGATIVA MULTIPLA

### -Passa Basso

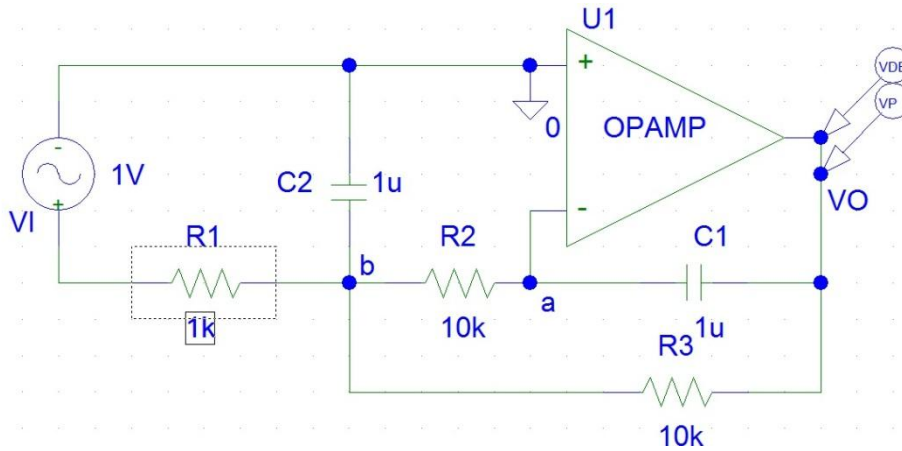


Figura 5.7 Schema elettrico di un filtro LP realizzato con una retroazione negativa multipla

L'AO è in retroazione negativa, quindi vale in cortocircuito virtuale tra i due ingressi, invertente e non invertente; ciò implica che  $v_a = v_- = v_+ = 0V$ . Questo vale anche per le successive analisi dei circuiti passa-alto e passa-banda.

Nodo  $a$ :

$$\frac{v_b}{R_2} = -v_O s C_2 \Rightarrow v_b = -v_O s R_2 C_2$$

Nodo  $b$ :

$$\begin{aligned} \frac{v_I - v_b}{R_1} &= \frac{v_b}{R_2} + \frac{v_b - v_O}{R_3} + v_b s C_1 \Rightarrow \frac{v_I}{R_1} = v_b \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + s C_1 \right) - \frac{v_O}{R_3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v_I}{R_1} &= -v_O \left( \frac{s C_2 R_2^2 R_3 + s C_2 R_1 R_2 R_3 + s C_2 R_1 R_2^2 + s^2 C_1 C_2 R_1 R_2^2 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v_O}{v_I} &= \frac{-\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} \right) + \frac{1}{C_1 C_2 R_2 R_3}} \end{aligned}$$

che è nella forma di una f.d.t. "passa basso" vista sopra, con i seguenti parametri

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}; K = -\frac{R_3}{R_1}; \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1} \left( \sqrt{\frac{R_2 R_3}{R_1^2}} + \sqrt{\frac{R_3}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_3}} \right)}$$

**-Passa Alto**

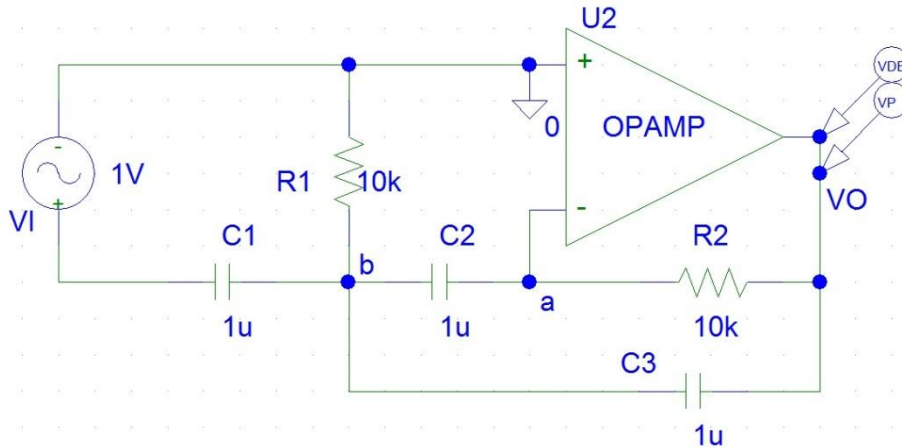


Figura 5.8 Schema elettrico di un filtro HP realizzato in retroazione negativa multipla

Nodo a:

$$-\frac{v_o}{R_2} = v_b s C_2 \Rightarrow v_b = -v_o \frac{1}{s R_2 C_2}$$

Nodo b:

$$(v_I - v_b) s C_1 = \frac{v_b}{R_1} + (v_b - v_o) s C_3 + v_b s C_3 \Rightarrow v_I s C_1 = v_b \left( s C_1 + s C_3 + s C_2 + \frac{1}{R_1} \right) - v_o s C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_I s C_1 = -v_o \left( \frac{s C_1 R_1 + s C_2 R_1 + s C_3 R_1 + s^2 C_3 C_2 R_1 R_2 + 1}{s R_1 R_2 C_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_o}{v_I} = \frac{-s \frac{C_1}{C_3}}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_2 C_3} + \frac{C_1}{R_2 C_2 C_3} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_3}}$$

che è nella forma di una f.d.t. “passa alto” vista sopra, con i seguenti parametri

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_3}}; K = -\frac{C_1}{C_3}; \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_1}{R_2} \left( \frac{C_1}{\sqrt{C_2 C_3}} + \sqrt{\frac{C_3}{C_2}} + \sqrt{\frac{C_2}{C_3}} \right)}$$

## -Passa Banda

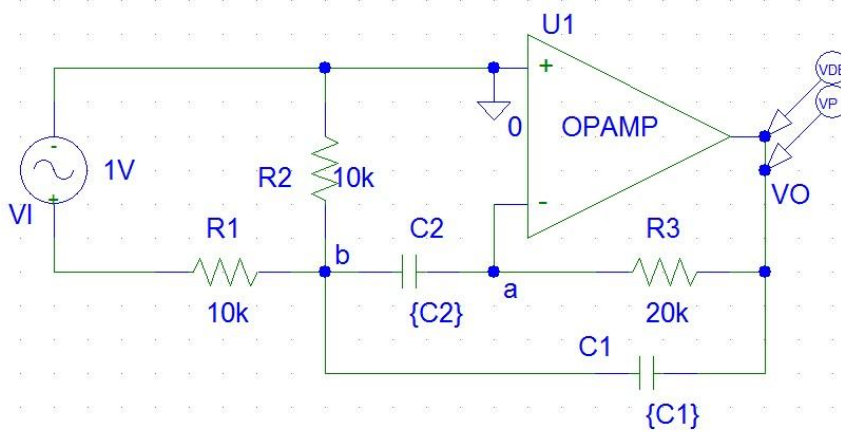


Figura 5.9 Schema elettrico di un filtro BP realizzato in retroazione negativa multipla

Nodo  $a$ :

$$-\frac{v_o}{R_3} = v_b s C_2 \Rightarrow v_b = -v_o \frac{1}{s R_3 C_2}$$

Nodo  $b$ :

$$\frac{v_I - v_b}{R_1} = \frac{v_b}{R_2} + (v_b - v_o) s C_1 + v_b s C_2 \Rightarrow \frac{v_I}{R_1} = v_b \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + s C_2 + s C_1 \right) - v_o s C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_I}{R_1} = -v_o \left( \frac{s C_1 R_1 R_2 + s C_2 R_1 R_2 + s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 + R_1 + R_2}{s R_1 R_2 R_3 C_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_o}{v_I} = \frac{-s \frac{1}{R_1 C_1}}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} \right) + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

che è nella forma di una f.d.t. “passa banda” vista sopra, con i seguenti parametri

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}; K = -\frac{R_3 C_2}{R_1 (C_1 + C_2)}; \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_1 R_2 C_2}{R_3 (R_1 + R_2)}} \left( \sqrt{\frac{1}{C_2}} + \sqrt{\frac{1}{C_1}} \right)$$

Nella realizzazione a retroazione negativa multipla non abbiamo operato la semplificazione delle resistenze e dei condensatori uguali in quanto  $K$  e  $\xi$  avrebbero perso la dipendenza da  $R$  e  $C$ , assumendo valori fissi.

Possiamo osservare, che nel circuito passa banda, variando il fattore di merito varia anche la larghezza della banda passante; essa risulta essere più stretta, quanto più il fattore di merito è elevato. Possiamo inoltre notare che la realizzazione di Sallen & Key con le resistenze tra loro uguali e i condensatori tra loro uguali, presenta una forte limitazione per quanto riguarda l'amplificazione; se il guadagno dell'amplificatore in configurazione non invertente è troppo elevato (superiore a 3 nel HP e LP, 4 nel BP), i poli sono a parte reale negativa, conferendo instabilità.

## **6. BIBLIOGRAFIA**

M. E. Van Valkenburg – "Analog filter design" – Holt, Rinehart and Winston

A. Liberatore, S. Manetti – "La progettazione dei filtri elettronici" – edizioni medica

Wai Kai Chen – "Passive and active filters (theory and implementations)" – John Wiley & Sons

Z. H. Meiksin – "Complete guide to active filter design, op amps, & passive components" –  
prentice hall