



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei sistemi industriali

**TESI DI LAUREA IN INGEGNERIA
MECCANICA E MECCATRONICA**

(Laurea triennale EX DM270/04-curriculum meccanico)

**ANALISI TRIDIMENSIONALE AGLI ELEMENTI FINITI DI UNA TRAVE
CON SEZIONE AD I SOGGETTA A FLESSIONE E TORSIONE**

Relatore: Chiar.mo Prof. Marino Quaresimin

Correlatore: Ing. Paolo Andrea Carraro

Laureando: Giacomo Brisotto

ANNO ACCADEMICO 2011-2012

Indice

CAPITOLO 1 - Cenni sul calcolo analitico	1
1.1 Equazione di Navier	1
1.2 Equazione di Jourawskj	2
1.3 Analogia idrodinamica	4
CAPITOLO 2 - Creazione del modello tridimensionale	5
2.1 Determinazione degli elementi	5
2.2 Creazione e suddivisione dell' area	6
2.3 Creazione della mesh	7
2.4 Modello tridimensionale	9
CAPITOLO 3 - Trave soggetta ad una forza concentrata all'estremità	11
3.1 Definizione del carico	11
3.2 CALCOLO ANALITICO	15
3.3 SEZIONE I	16
3.4 SEZIONE II	22
3.5 SEZIONE III	28
3.6 SEZIONE IV	34
3.7 SEZIONE V	40
3.8 SEZIONE VI	46
CAPITOLO 4 - Trave soggetta a momento torcente	53
4.1 Definizione del carico	53
4.2 CALCOLO ANALITICO	58
4.3 SEZIONE I	59
4.4 SEZIONE II	64
4.5 SEZIONE III	68
4.6 SEZIONE IV	72
4.7 SEZIONE V	76
4.8 SEZIONE VI	80
5. CONCLUSIONI	85
5.1 Trave a flessione	85
5.2 Trave a torsione	86

Introduzione

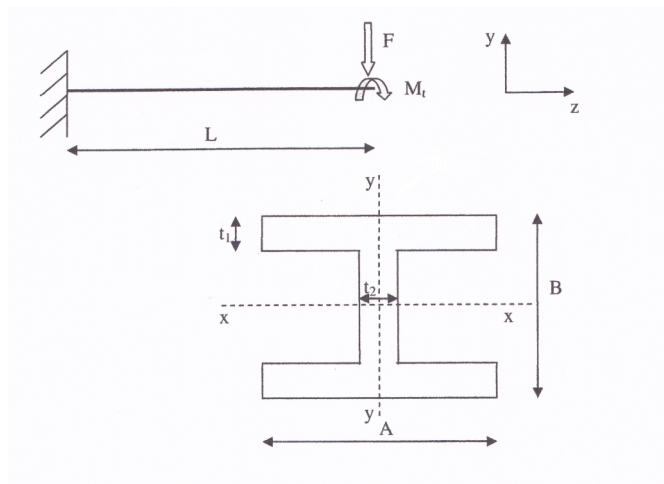
Grazie allo sviluppo incrementale dell'informatica negli ultimi decenni si sono diffusi software in grado di risolvere problemi complessi di analisi elastica e strutturale in diversi campi dell'ingegneria. La maggior parte di questi utilizzano il metodo degli elementi finiti (*FEM*), il quale garantisce soluzioni approssimate del problema preso in esame.

In questa esperienza è stato utilizzato *Ansys*, un software di calcolo *FEM*, per l'analisi di un componente meccanico soggetto ad una forza concentrata e ad un momento torcente. I valori ottenuti dall'analisi con il metodo degli elementi finiti sono stati confrontati con i valori di sollecitazione dati da formulazioni analitiche sulla base di studi teorici.

Le relazioni analitiche sono attribuibili a casi generici e rappresentano il comportamento del componente il più delle volte in modo irrealistico, quindi in modo poco approssimato e qualitativo.

Lo scopo di questa esperienza è stato quello di evidenziare lo scostamento dei valori di tali relazioni con i risultati ottenuti al *FEM*, il quale rappresenta con buona qualità il comportamento reale del componente. Il caso specifico analizzato è una trave di lunghezza L , con sezione ad I, soggetta ad una forza concentrata F all'estremità e ad un momento torcente M_t . Per prima cosa è stato realizzato un modello tridimensionale della trave con il software *Ansys*. Per sei sezioni del modello equispaziate lungo la lunghezza della trave e per ciascuna condizione di carico, si sono riportati:

- i *contour plot* sull'intera sezione delle componenti tensionali significative;
- i grafici relativi all'andamento delle stesse tensioni lungo i percorsi (*path*) confrontandole con i risultati delle formulazioni analitiche note.



Trave incastrata di lunghezza L , con sezione ad I, soggetta a flessione e torsione

CAPITOLO 1

1. Cenni sul calcolo analitico

1.1 Equazione di Navier

$$\sigma = \frac{M}{J_{xx}} y \quad (1.1)$$

y = distanza dal baricentro della sezione;

J_{xx} = momento d'inerzia della sezione rispetto l'asse x .

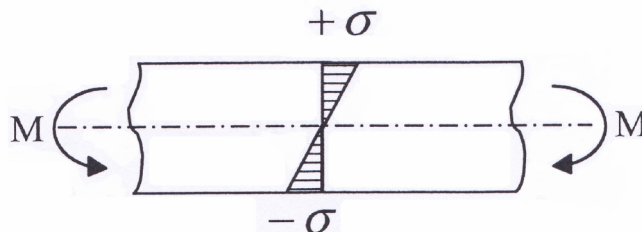
Con tale equazione si definisce lo sforzo σ normale alla superficie nel caso in cui la trave sia soggetta a momento flettente puro M ; tuttavia è valevole anche nel caso di flessione composta.

Questa equazione la si può applicare a patto che siano rispettate le seguenti condizioni:

- la forza che induce il momento flettente sia applicata al baricentro;
- la geometria della sezione della trave sia simmetrica rispetto l'asse y ;
- le sezioni piane rimangono piane anche dopo l'applicazione dello sforzo.

La formulazione presa in esame permette di affermare che le tensioni dovute a flessione:

- sono nulle sull'asse baricentrico;
- sono massime sulle superfici esterne della trave;
- cambiano segno al di sopra e al di sotto dell'asse baricentrico.



Distribuzione dello sforzo normale in una trave soggetta a momento flettente puro.

1.2 Equazione di Jourawskj

$$\tau = \frac{TS_{xx}}{J_{xx}b} \quad (1.2)$$

S_{xx} = momento statico del primo ordine dell'area dell'elemento considerato;

J_{xx} = momento d'inerzia della sezione rispetto l'asse x;

b = larghezza della trave.

Questa equazione rappresenta lo stato di tensioni τ dovuto alle sollecitazioni di taglio T , ed essa è valida se:

- la geometria della sezione della trave sia simmetrica rispetto l'asse y;
- lungo la larghezza b le τ devono essere costanti;
- la sezione sia rettangolare con rapporto h/b elevato.

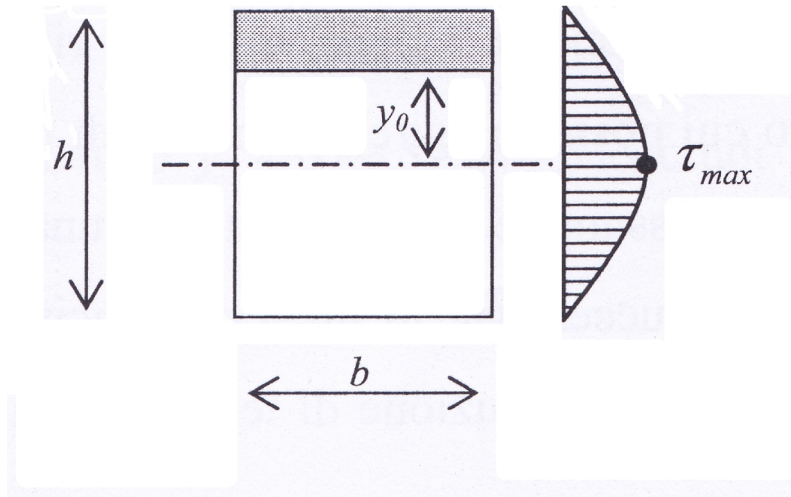


Figura 1.1. Distribuzione delle tensioni tangenziali in una trave a sezione rettangolare. Le τ assumono un andamento parabolico, registrando un valore massimo nell'asse di simmetria.

Nel caso di sezione rettangolare si può osservare che, considerata una linea orizzontale distante y_0 dall'asse baricentrico, l'andamento di S_{xx} nell'equazione di Jourawskj sia parabolico con y_0 :

$$S_{xx} = \int_A y dA = \int_{y_0}^{\frac{h}{2}} y b dy = \frac{by^2}{2} \Big|_{y_0}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_0^2 \right) \quad (1.3)$$

Considerando che T , J_{xx} e b sono delle costanti, l'andamento delle τ è parabolico, ed esse sono nulle sulla superficie, e massime in corrispondenza dell'asse baricentrico, dove $y_0 = 0$.

Nel caso specifico di una trave a sezione ad I sottoposta a taglio e momento flettente, la distribuzione delle tensioni richiede un'analisi più dettagliata rispetto al caso appena studiato. Dobbiamo innanzitutto analizzare separatamente il comportamento sull'anima e sulle ali.

Sull'anima agisce solamente una componente di tensione τ_{xy} , mentre sulle ali agiscono sia le τ_{xz} che le τ_{xy} .

Sull'anima si assume che le componenti tensionali agiscano parallelamente all'asse y e che siano uniformemente distribuite lungo lo spessore t . Da questa ipotesi si può utilizzare tranquillamente l'equazione di Jourawskj, prendendo in considerazione il momento d'inerzia dell'intera sezione.

Nella giunzione tra ali e anima si ha una discontinuità delle τ_{xy} , imputabile alla sola variazione dello spessore all'interno della (1.2), secondo un fattore t_2/A , nel passaggio dallo studio da anima ad ali. In realtà la τ_{xy} nelle ali esiste solo in un breve tratto in corrispondenza della giunzione con l'anima, e per equilibrio al di fuori di questo si annulla. Sempre nelle ali la τ_{xz} nasce per reciprocità delle tensioni tangenziali e quindi per mantenere l'equilibrio dell'elemento considerato. Applicando l'equazione di Jourawskj si può dedurre che le τ_{xz} sono linearmente dipendenti alla posizione in x , e raggiungono il valore massimo nell'asse di simmetria e un valore nullo agli estremi.

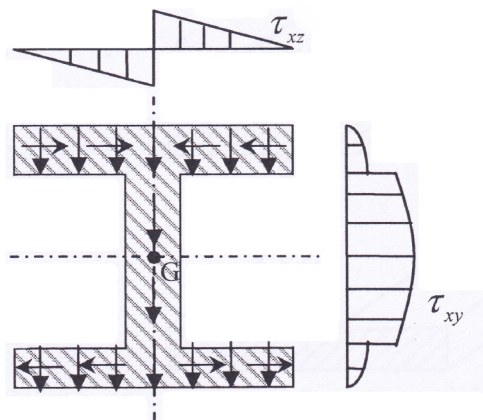


Figura 1.2. Distribuzione teorica delle tensioni tangenziali in una trave a sezione ad I. Si

può notare l'andamento inverosimile delle τ_{xy} nelle giunzioni tra anima e ali.

1.3 Analogia idrodinamica

Lo studio della torsione per sezioni non circolari è notevolmente complicato, per questo si ricorre all'analogia idrodinamica, ovvero si presuppone che le linee di flusso delle tensioni in una sezione di una trave soggetta a torsione sia paragonabile all'andamento delle linee di flusso di un fluido ideale in rotazione stazionaria all'interno della stessa sezione.

Sulla base di ciò, Prandtl propose un metodo semplificativo per ottenere delle soluzioni approssimate al problema della torsione.

Per il caso di una sezione a parete sottile a profilo aperto si può utilizzare la seguente formula per approssimare il comportamento delle τ di una trave in torsione:

$$\tau = \frac{M_t}{J_t} t \quad (1.4)$$

$$J_t = \frac{1}{3} \sum_i L_i t_i^3 \quad (1.5)$$

t = spessore rettangolo preso in considerazione;

J_t = momento d'inerzia di tipo polare.

Applicando un momento torcente M_t ad una trave a sezione a parete sottile a profilo aperto, si avrà τ massima nel tratto di sezione in cui lo spessore t è maggiore.

CAPITOLO 2

2. Creazione del modello tridimensionale

Per la creazione della trave tridimensionale è stato utilizzato il software Ansys.

E' importante sottolineare che questo software non ha una logica di modellazione 3D veloce e intuitiva, ma garantisce buoni livelli di approssimazione nella soluzione dei problemi strutturali.

Come prima cosa sono stati scelti il tipo di elementi costituenti la trave, definite le specifiche del materiale di cui è composta, il modello geometrico e successivamente il modello numerico rappresentato dalla *mesh*.

2.1 Determinazione degli elementi

E' importante premettere che il metodo degli elementi finiti fornisce soluzioni approssimate, e il grado di approssimazione è tanto più accurato quanto migliore è la *mesh*. Quindi maggiore è il numero di elementi con il quale si andrà a definire il modello, maggiore sarà l'accuratezza delle soluzioni.

La scelta del numero di elementi richiede un'analisi di convergenza, che determina il numero massimo di elementi per cui si ha convergenza dei risultati e al di sopra del quale non conviene andare oltre per motivi di tempo e denaro. Infatti oltre un certo limite di elementi scelti non vi è un notevole miglioramento delle soluzioni che giustifichi un maggior tempo necessario al calcolo e maggiori investimenti economici. Si decide di scegliere un elemento piano a 8 nodi che una volta estruso diverrà un elemento *brick* a 20 nodi.

Per quanto riguarda il tipo di materiale si definiscono le caratteristiche di un generico materiale metallico:

- modulo elastico $E_x = 206000$ [Mpa];
- coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$.

2.2 Creazione e suddivisione dell' area

Per la creazione del modello geometrico si definirà prima la sezione e quindi l'area, ed in un secondo momento si estruderà, creando così la trave in tre dimensioni.

Nel piano xy si definisce l'area della sezione presa in esame in questo studio andando a definire i *keypoints* dei vertici per poi congiungerli con il comando *lines*. Inoltre si aggiungono all'interno dell'area altre linee, le quali serviranno per ottenere una migliore suddivisione dell'area totale. Al risultato finito si ottiene:

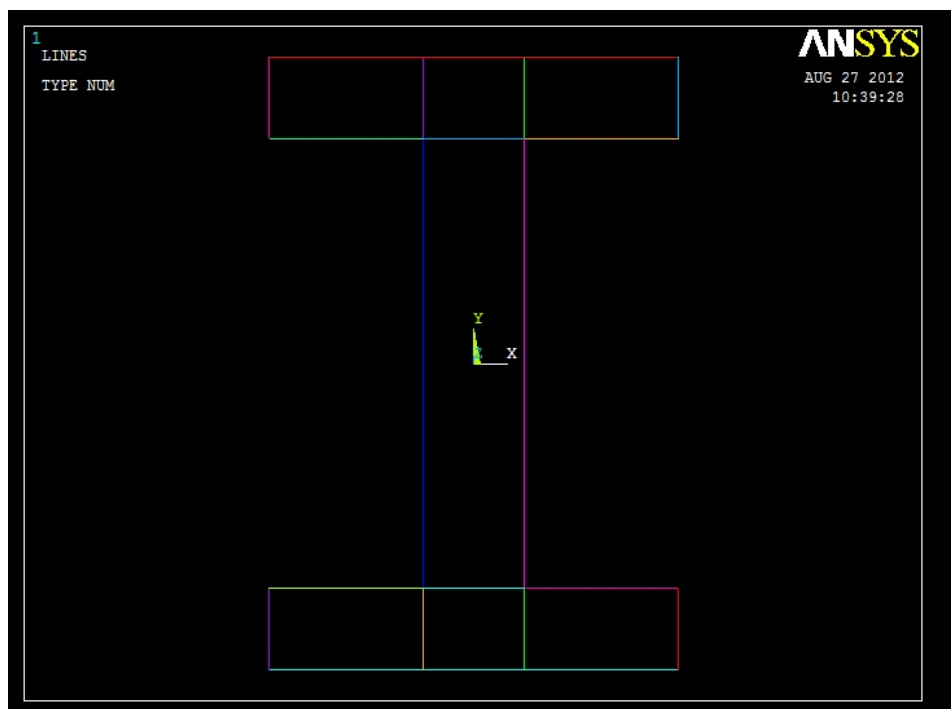


Figura 2.1. Creazione della sezione della trave, da notare le linee interne che serviranno alla successiva suddivisione dell'area.

Ora si deve dividere l'area totale in sottoaree con il comando *Preprocessor /modeling /operate /booleans /divide /area by line* in modo che in una successiva operazione di *mesh*, essa sia fatta distintamente per ogni sottoarea.

2.3 Creazione della mesh

Con questa operazione si vanno a definire gli elementi numerici nelle sottoaree appena create, e per ottenere una buona approssimazione dei risultati finali si cerca di creare degli elementi il più possibile regolari e di forma quadrata.

Operativamente si vanno a suddividere le linee esterne alle aree facendo attenzione a effettuare la stessa suddivisione per lati opposti in modo da garantire la simmetria nella suddivisione.

Tramite il percorso *Preprocessor/ Mesching/ size cntrls/ lines/ picked lines* si sceglie il numero di divisioni ($n^\circ \text{ div}$), il quale caratterizza l'intensità della *mesh*.

Ora per creare la *mesh* sull'intera area si possono percorrere due differenti strade:

- *mesh* di tipo *mapped* la quale è molto regolare e controllabile dall'utente, infatti si consiglia sempre l'utilizzo di quest'ultima;
- *mesh* di tipo *free* che lascia più libertà al software nella creazione della *mesh*, che generalmente viene sconsigliata.

Si sceglie la *mesh* di tipo *mapped* seguendo il percorso *Preprocessor/ Mesching /Mesh /Areas /3 or 4 sided* e si selezionano tutte le aree (*pick all*).

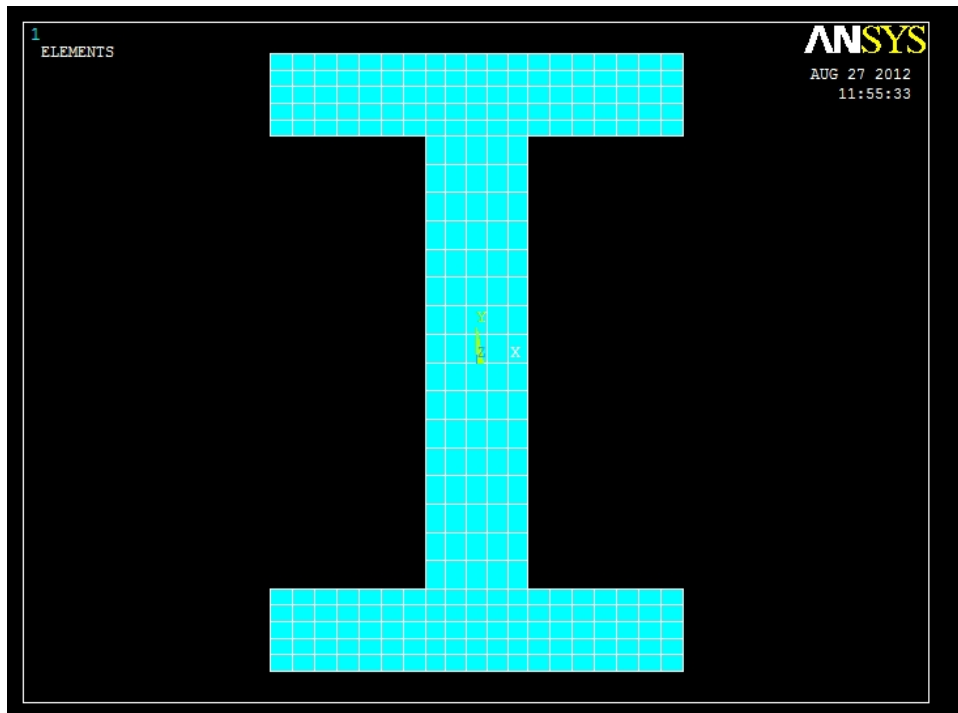


Figura 2.2. Visualizzazione degli elementi definiti mediante la creazione di *mesh* di tipo *Mapped*.

In un secondo momento si è scelto di intensificare la *mesh* nei punti in cui sono presenti brusche variazioni geometriche, laddove si possono avere concentrazioni di sforzo da non sottovalutare. Quindi in queste zone è fondamentale analizzare un numero di nodi maggiore per individuare un valore affidabile della tensione di picco. L'operazione è stata fatta selezionando i singoli elementi: *Mesching/Modify Mesh/Refine At/Elements*.

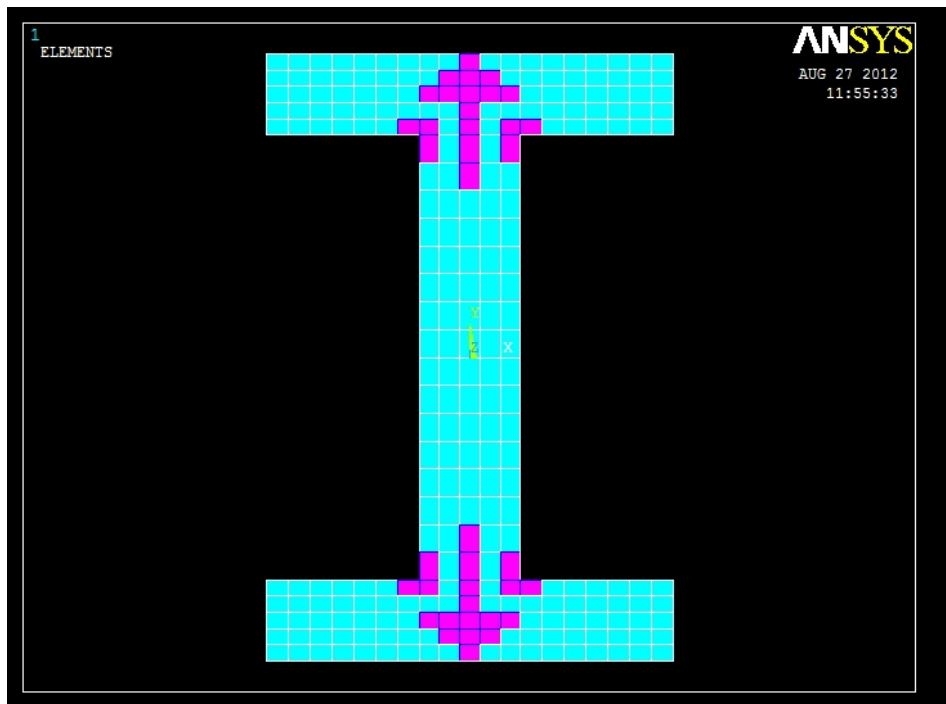


Figura 2.3. Selezione degli elementi per l'intensificazione della mesh.

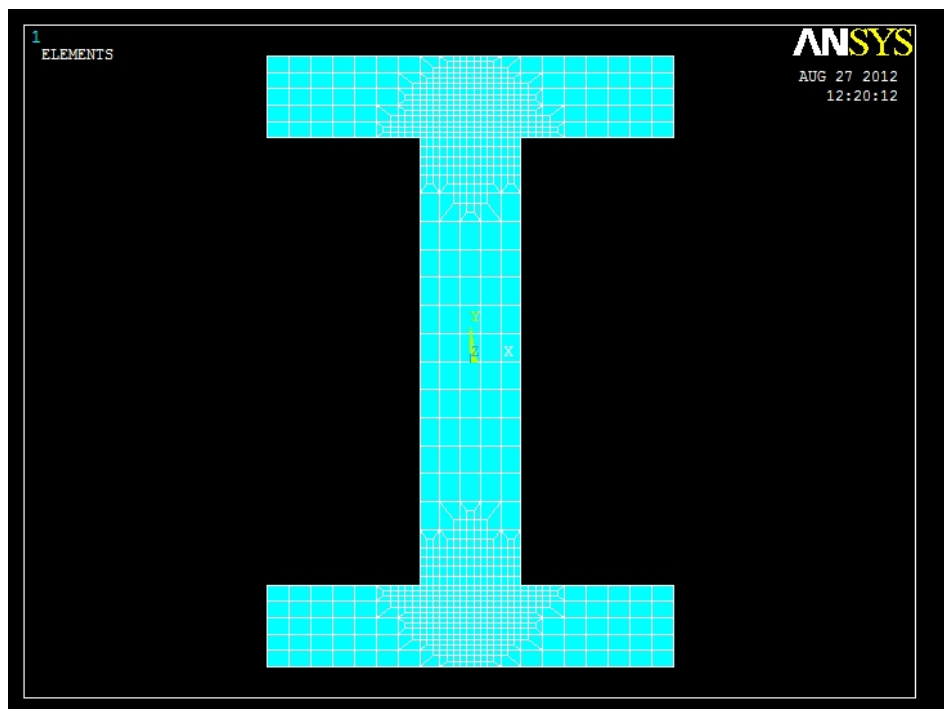


Figura 2.4. Risultato ottenuto dopo l'intensificazione della mesh.

2.4 Modello tridimensionale

Una volta creato il modello geometrico e numerico bidimensionale della sezione, per creare il modello dell'intera trave basta estrarre l'area presa in esame fino ad ora.

Prima di tutto bisogna definire il tipo di elemento solido che si usa in campo tridimensionale; la scelta ricade su un *brick* da 20 nodi. Una volta fatto ciò si settano le impostazioni di estrusione selezionando l'elemento solido citato sopra, si decide il numero di elementi solidi da creare e si eliminano le sottoaree create in precedenza (*Modeling/operate/extrude/Elem Ext Opts*).

Poi si effettua l'estrusione dell'area secondo i tre campi di *Offset*: (*Modeling /operate/extrude / area/ By XYZ Offset*).

Si è ottenuto così il modello geometrico e numerico tridimensionale della trave con sezione ad I.

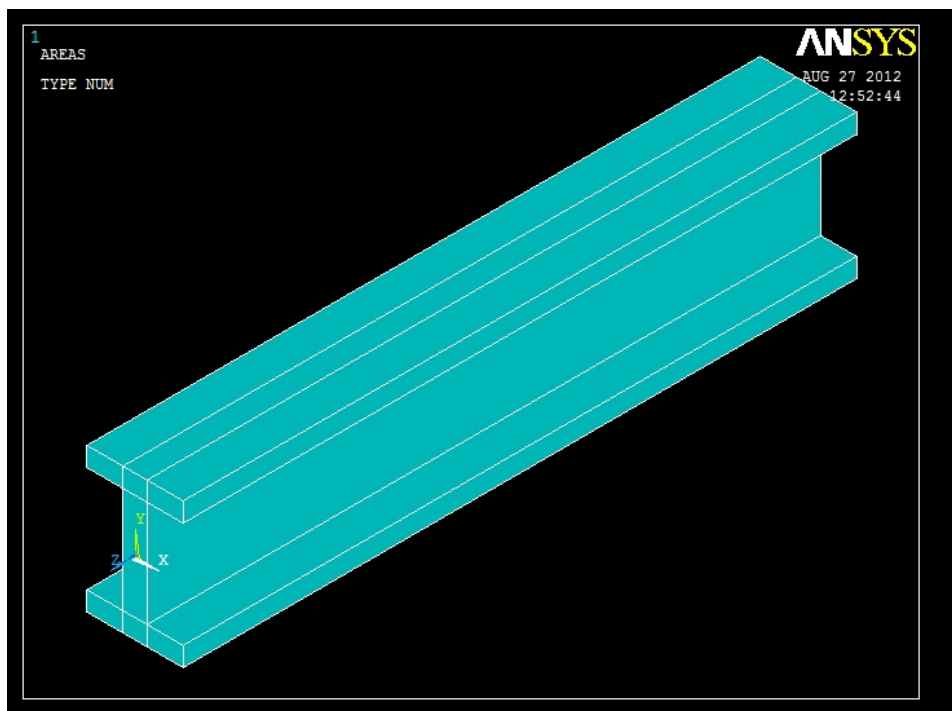


Figura 2.5. *Modello geometrico di una trave a sezione ad I.*

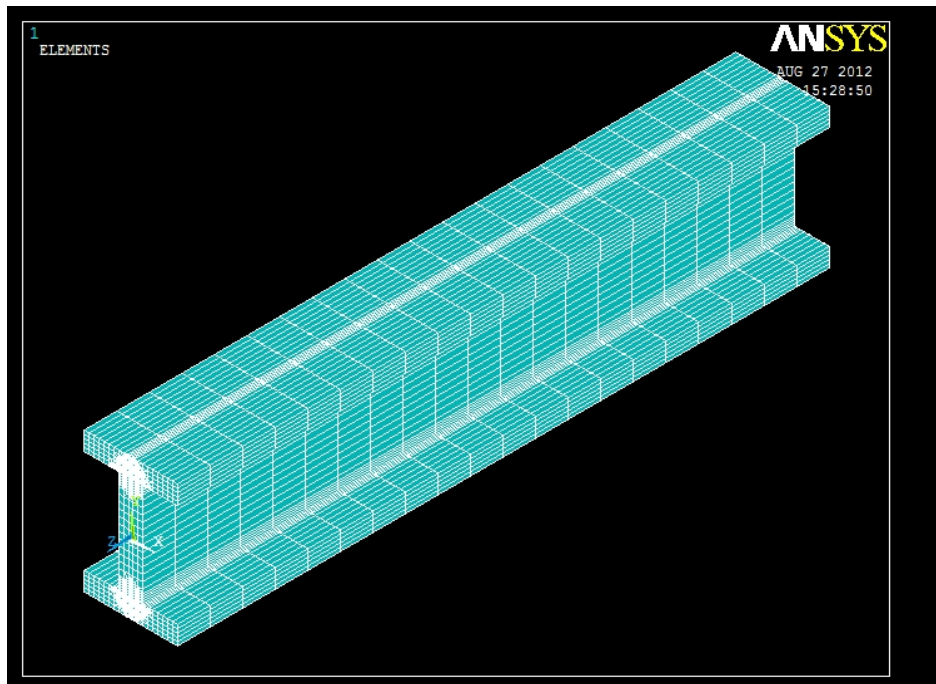


Figura 2.6. *Modello numerico di una trave a sezione ad I.*

CAPITOLO 3

3. Trave soggetta ad una forza concentrata all'estremità

3.1 Definizione del carico

Come prima cosa si è definito l'incastro per un' estremità della trave eliminando i 3 gradi di libertà di tutti i nodi dell'area iniziale: *Preprocessor /Loads/ Define Loads/ Apply/ Structural /displacement /on areas*.

Ora si applica il carico all'altra estremità della trave, ripartendo la forza F su tutti i nodi costituenti lo spigolo superiore; la suddivisione della forza sull'intero spigolo rende l'applicazione del carico più realistico. Una volta selezionati i nodi di interesse dal menù *Select* vi si applica la forza: *Preprocessor/ Loads/ Define Loads/ Apply/ Structural/ Force/ On nodes*. Bisogna comunque fare attenzione a immettere il valore assoluto della forza diviso il numero di nodi.

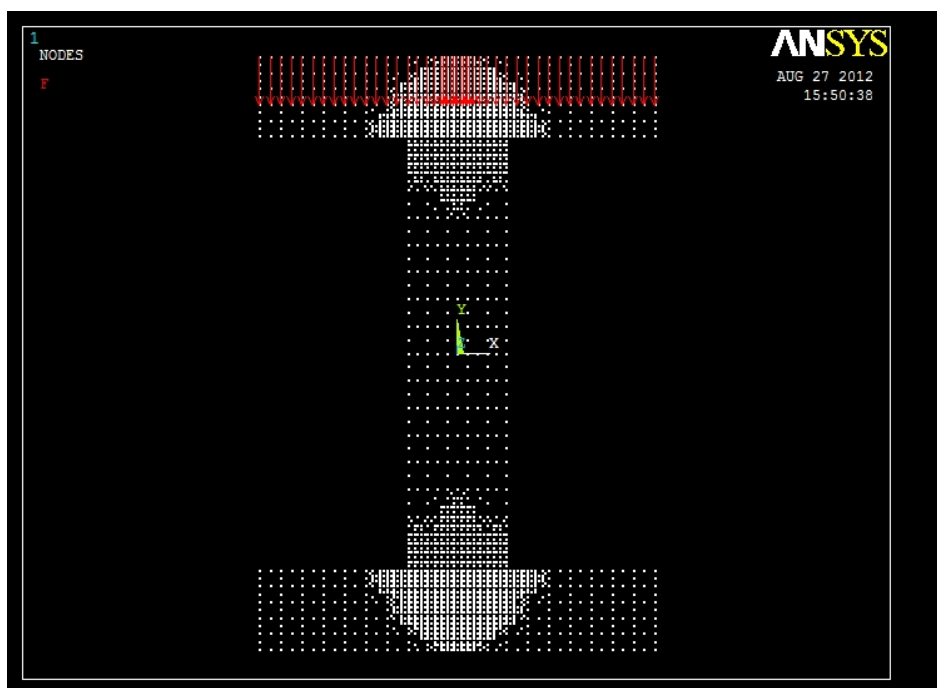


Figura 3.1. Applicazione del carico ripartito sui nodi all'estremità della trave.

Ora si procede con la soluzione dell'intero modello: *Solution /Solve/ Current LS*. Per ottenere delle tensioni come risultati, il programma converte gli spostamenti nodali dei singoli elementi in sollecitazioni.

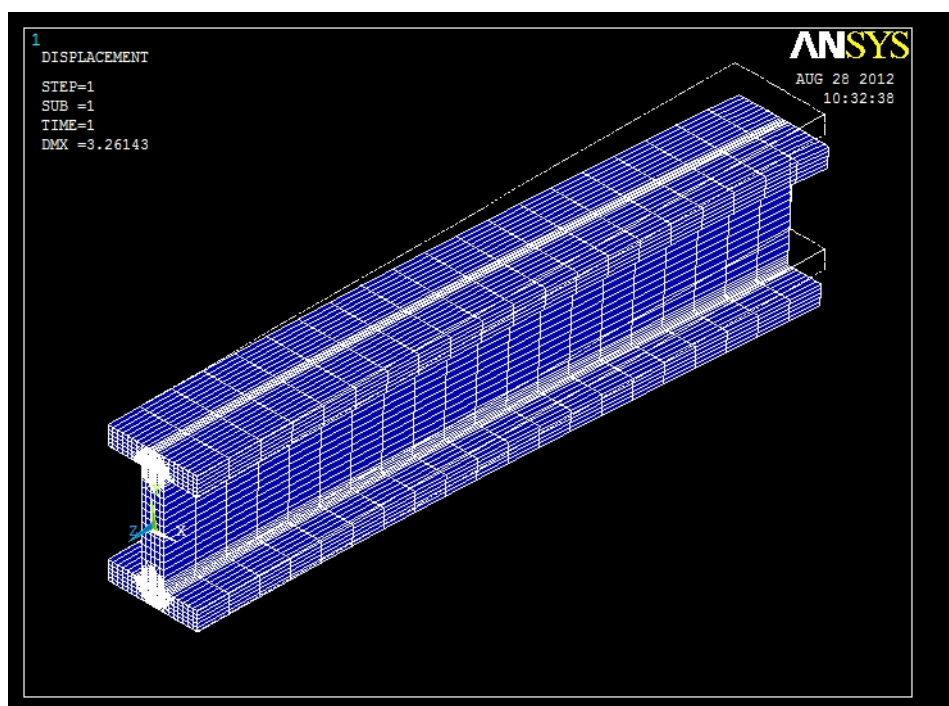


Figura 3.2. Deformata della trave soggetta a carico concentrato all'estremità.

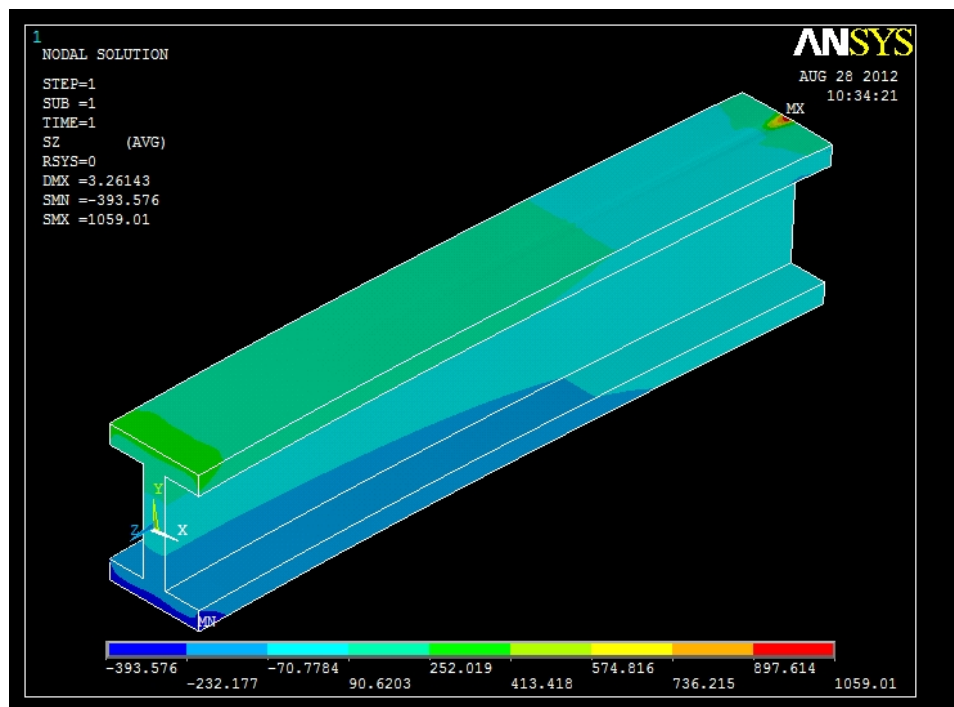


Figura 3.3. Distribuzione dello sforzo normale rispetto l'asse z dovuto a flessione. Si può notare come i punti più sollecitati siano quelli lungo le superfici esterne in corrispondenza dell'incastro (dove il momento flettente è massimo).

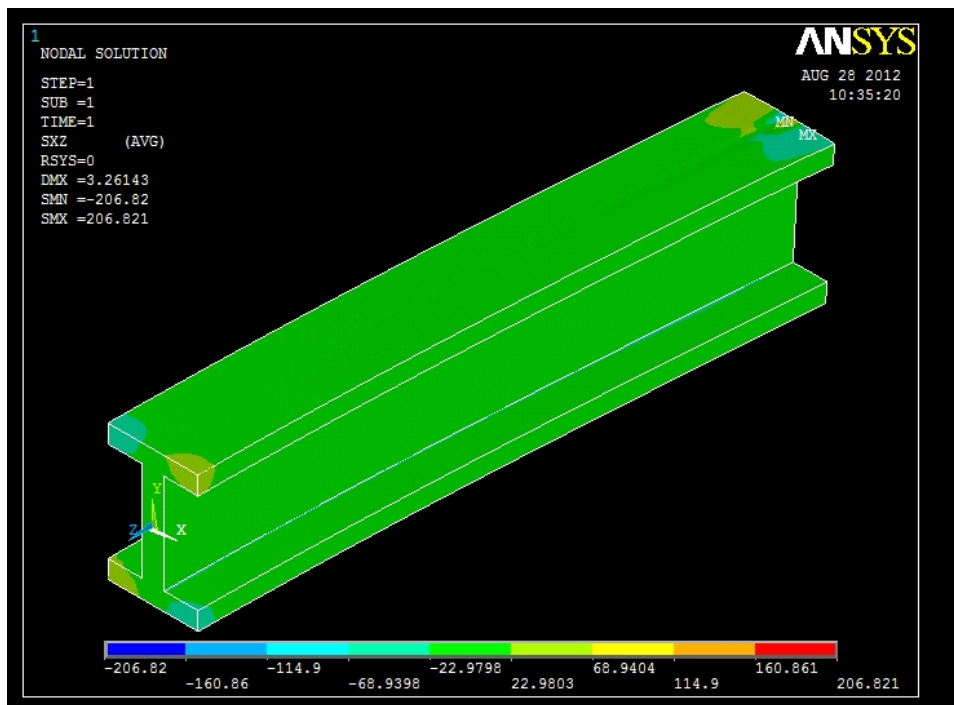


Figura 3.4. Le tensioni tangenziali τ_{zx} rimangono pressoché ad un valore costante e relativamente basso lungo tutta la trave, eccetto negli spigoli esterni nella zona vicino all'incastro.

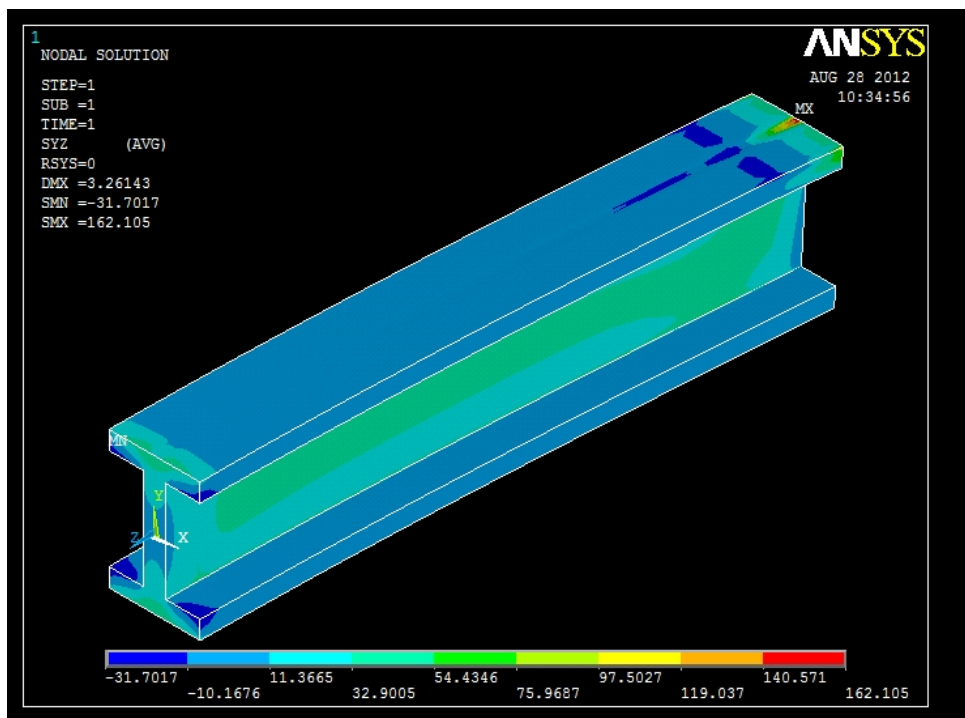


Figura 3.5. Le tensioni tangenziali τ_{zy} assumono valori significativi nell'anima della trave e in corrispondenza dei punti di applicazione del carico.

Per confrontare i risultati ottenuti analiticamente a quelli definiti con Ansys si vanno ad analizzare sei sezioni equispaziate lungo la lunghezza della trave; per comodità si è scelta una distanza di 140 mm tra una sezione e l'altra.

Per le sezioni è stato scelto un percorso (*path*) comune nel quale viene fatta l'acquisizione delle sollecitazioni significative dei nodi presenti nel path preso in considerazione. E' importante distinguere la *path 1* disposta verticalmente per valori di Y_G compresi tra -75 mm e 75 mm, la quale si utilizza per lo studio delle σ_z e delle τ_{zy} . La *path 2* si trova in posizione orizzontale per valori di X_G tra -55 mm e 55 mm, necessaria per l'analisi delle τ_{zx} .

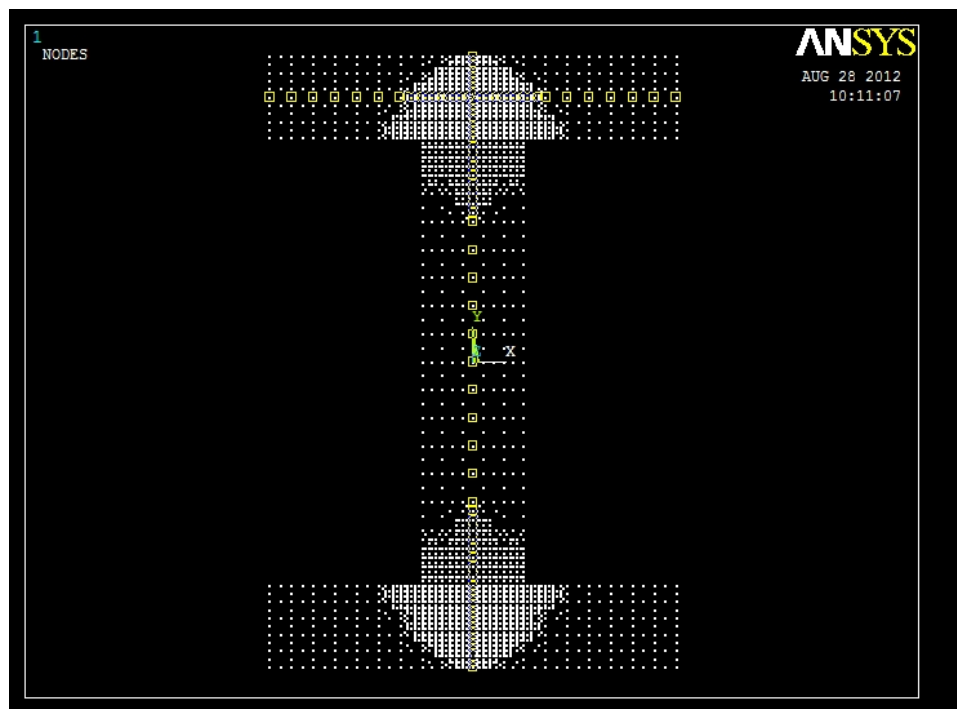


Figura 3.6. I nodi evidenziati in giallo rappresentano le path utilizzata in tutte le sezioni per lo studio del comportamento a flessione della trave.

3.2 CALCOLO ANALITICO

Per quanto riguarda lo sforzo a flessione si è utilizzata l'equazione di Navier:

$$\sigma = \frac{M}{J_{xx}} y$$

Con $M = F \times b$, dove b è il braccio, dipendente dalla sezione che si sta analizzando, y è la distanza dall'asse neutro e per il momento d'inerzia dell'intera sezione si ha:

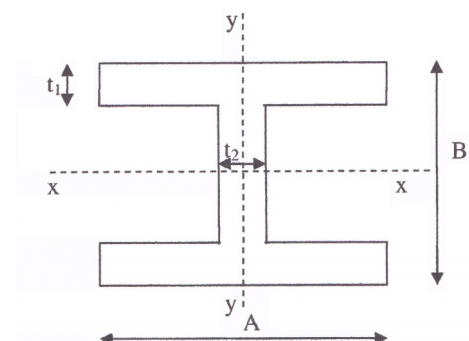
$$J_{xx} = \frac{1}{12} AB^3 - \frac{1}{12} (A - t_2)(B - 2t_1)^3 = 19806250 [mm^4]$$

$$A = 100mm$$

$$B = 150mm$$

$$t_1 = 20mm$$

$$t_2 = 25mm$$



Applicando l'equazione di Jourawskj $\tau = \frac{FS_{xx}}{J_{xx}b}$ (1.2) si determinano le tensioni tangenziali

causate dalla forza di taglio F .

Sull'anima si considera il solo contributo delle τ_{zy} , calcolate per valori di y compresi tra (-55,+55) [mm]. Sotto questa ipotesi la (1.2) è valida, con $b = 25$ [mm], $F = 100000$ [N], $J_{xx} = 19806250$ [mm⁴], e il momento statico pari a:

$$S_{xx} = At_1\left(\frac{B}{2} - \frac{t_1}{2}\right) + t_2(55 - Y_G)(55 + Y_G)\frac{1}{2}$$

Le τ_{zy} sulle ali sono state studiate per valori di y compresi tra (-75: -55,75:55) [mm] con un valore di $b = 100$ [mm], e un momento statico pari a:

$$S_{xx} = A\left(\frac{B}{2} - y\right) + \left(\frac{B}{2} + y\right)\frac{1}{2}$$

Il contributo delle τ_{zx} si studierà solo nelle ali, per valori di x compresi tra (-65 e +65)mm e per $y = 65$ mm, applicando Jourawskj con $b = 20$ [mm] e $S_{xx} = \int Y_G dA = Y_G \int t_1 dx = Y_G t_1 x$.

Per le sei sezioni i valori analitici di sforzo tangenziale sono i medesimi. Per quanto riguarda lo sforzo normale è diverso per ogni sezione a causa della variazione del momento flettente.

3.3 SEZIONE I

Lo sforzo normale a flessione calcolato secondo Navier risulta:

$$\sigma = \frac{M}{J_{xx}} y$$

Con:

$$M = F \times b = 100000 \text{ [N]} \times 700 \text{ [mm]} = 70000 \text{ [Nm]}$$

Tabella 3.1. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavati al fem., e messi a confronto con i valori calcolati analiticamente nella sezione dove è presente l'incastro.

VALORI CALCOLATI DAL FEM					VALORI ANALITICI			
X_G [mm]	Y_G [mm]	σ_Z [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	σ_Z [Mpa]	S_{xx} [mm ³]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa] ali
0,00	-75,00	-210,06	-0,81	0,00	-265,07	0,00	0,00	
0,00	-73,67	-208,21	0,71	0,00	-260,36	9908,66	0,50	
0,00	-72,33	-205,02	2,42	0,00	-255,64	19646,86	0,99	
0,00	-71,00	-201,21	4,03	0,00	-250,93	29200,00	1,47	
0,00	-69,67	-197,27	5,47	0,00	-246,22	38575,46	1,95	
0,00	-68,33	-193,33	6,80	0,00	-241,51	47780,06	2,41	
0,00	-67,00	-189,44	8,11	0,00	-236,79	56800,00	2,87	
0,00	-65,67	-185,61	9,45	0,00	-232,08	65642,26	3,31	
0,00	-64,33	-181,82	10,84	0,00	-227,37	74313,26	3,75	
0,00	-63,00	-178,05	12,29	0,00	-222,66	82800,00	4,18	
0,00	-61,67	-174,31	13,79	0,00	-217,95	91109,06	4,60	
0,00	-60,33	-170,57	15,34	0,00	-213,23	99246,46	5,01	
0,00	-59,00	-166,84	16,90	0,00	-208,52	107200,00	5,41	
0,00	-57,67	-163,11	18,45	0,00	-203,81	114975,86	5,81	
0,00	-56,33	-159,38	19,96	0,00	-199,09	122579,66	6,19	
0,00	-55,00	-155,64	21,39	0,00	-194,38	130000,00	26,25	
0,00	-52,71	-149,21	23,56	0,00	-186,28	133085,83	26,88	
0,00	-50,42	-142,77	25,32	0,00	-178,19	136039,08	27,47	
0,00	-48,13	-136,31	26,69	0,00	-170,09	138862,30	28,04	
0,00	-45,83	-129,85	27,74	0,00	-161,98	141554,20	28,59	
0,00	-43,54	-123,39	28,58	0,00	-153,89	144113,68	29,10	
0,00	-41,25	-116,92	29,28	0,00	-145,79	146542,97	29,60	
0,00	-38,96	-110,44	29,87	0,00	-137,69	148840,93	30,06	
0,00	-36,67	-103,98	30,39	0,00	-129,59	151006,64	30,50	
0,00	-34,38	-97,50	30,88	0,00	-121,49	153041,99	30,91	
0,00	-27,50	-78,05	32,09	0,00	-97,19	158359,38	31,98	
0,00	-20,63	-58,57	33,01	0,00	-72,89	162495,12	32,82	
0,00	-13,75	-39,06	33,67	0,00	-48,60	165449,22	33,41	
0,00	-6,88	-19,54	34,07	0,00	-24,30	167221,68	33,77	
0,00	0,00	0,12	34,20	0,00	0,00	167812,50	33,89	
0,00	6,88	19,54	34,07	0,00	24,30	167221,68	33,77	
0,00	13,75	39,06	33,67	0,00	48,60	165449,22	33,41	
0,00	20,63	58,57	33,01	0,00	72,89	162495,12	32,82	
0,00	27,50	78,05	32,09	0,00	97,19	158359,38	31,98	
0,00	34,38	97,50	30,88	0,00	121,49	153041,99	30,91	
0,00	36,67	103,98	30,39	0,00	129,59	151006,64	30,50	
0,00	38,96	110,44	29,87	0,00	137,69	148840,93	30,06	
0,00	41,25	116,93	29,27	0,00	145,79	146542,97	29,60	
0,00	43,54	123,39	28,58	0,00	153,89	144113,68	29,10	
0,00	45,83	129,85	27,74	0,00	161,98	141554,20	28,59	
0,00	48,13	136,32	26,69	0,00	170,09	138862,30	28,04	
0,00	50,42	142,77	25,32	0,00	178,19	136039,08	27,47	
0,00	52,71	149,21	23,56	0,00	186,28	133085,83	26,88	
0,00	55,00	155,64	21,39	0,00	194,38	130000,00	26,25	
0,00	56,33	159,38	19,96	0,00	199,09	122579,66	6,19	
0,00	57,67	163,11	18,45	0,00	203,81	114975,86	5,81	

0,00	59,00	166,84	16,90	0,00	208,52	107200,00	5,41	
0,00	60,33	170,57	15,33	0,00	213,23	99246,46	5,01	
0,00	61,67	174,31	13,78	0,00	217,95	91109,06	4,60	
0,00	63,00	178,05	12,28	0,00	222,66	82800,00	4,18	
0,00	64,33	181,80	10,83	0,00	227,37	74313,26	3,75	
0,00	65,67	185,58	9,44	0,00	232,08	65642,26	3,31	
0,00	67,00	189,40	8,09	0,00	236,79	56800,00	2,87	
0,00	68,33	193,28	6,74	0,00	241,51	47780,06	2,41	
0,00	69,67	197,20	5,36	0,00	246,22	38575,46	1,95	
0,00	71,00	201,36	4,06	0,00	250,93	29200,00	1,47	
0,00	72,33	205,94	2,90	0,00	255,64	19646,86	0,99	
0,00	73,67	206,79	1,97	0,00	260,36	9908,66	0,50	
0,00	75,00	211,19	-3,82	0,00	265,07	0,00	0,00	
-50,00	65,00	183,20	0,75	0,50				0,00
-44,64	65,00	184,09	0,49	-1,96				-1,76
-39,29	65,00	183,44	0,41	-3,55				-3,51
-33,93	65,00	183,50	0,51	-5,12				-5,27
-28,57	65,00	183,59	0,85	-6,83				-7,03
-23,21	65,00	183,64	1,72	-8,48				-8,79
-17,86	65,00	183,69	3,71	-9,64				-10,55
-16,07	65,00	183,67	4,77	-9,54				-11,14
-14,29	65,00	183,68	5,82	-9,29				-11,72
-12,50	65,00	183,69	6,88	-8,72				-12,31
-10,83	65,00	183,69	7,80	-7,91				-12,85
-9,17	65,00	183,69	8,56	-6,89				-13,40
-7,50	65,00	183,69	9,16	-5,72				-13,95
-5,83	65,00	183,69	9,59	-4,48				-14,50
-4,17	65,00	183,69	9,88	-3,21				-15,04
-2,50	65,00	183,69	10,06	-1,93				-15,59
-0,83	65,00	183,69	10,14	-0,64				-16,14
0,83	65,00	183,69	10,14	0,64				16,14
2,50	65,00	183,69	10,06	1,93				15,59
4,17	65,00	183,69	9,88	3,21				15,04
5,83	65,00	183,69	9,59	4,48				14,50
7,50	65,00	183,69	9,16	5,72				13,95
9,17	65,00	183,69	8,56	6,89				13,40
10,83	65,00	183,69	7,80	7,91				12,85
12,50	65,00	183,69	6,88	8,72				12,31
14,29	65,00	183,68	5,82	9,29				11,72
16,07	65,00	183,67	4,77	9,54				11,14
17,86	65,00	183,69	3,71	9,64				10,55
23,21	65,00	183,64	1,72	8,48				8,79
28,57	65,00	183,59	0,85	6,83				7,03
33,93	65,00	183,50	0,51	5,12				5,27
39,29	65,00	183,44	0,41	3,55				3,51
44,64	65,00	184,09	0,49	1,96				1,76
50,00	65,00	183,20	0,75	-0,50				0,00

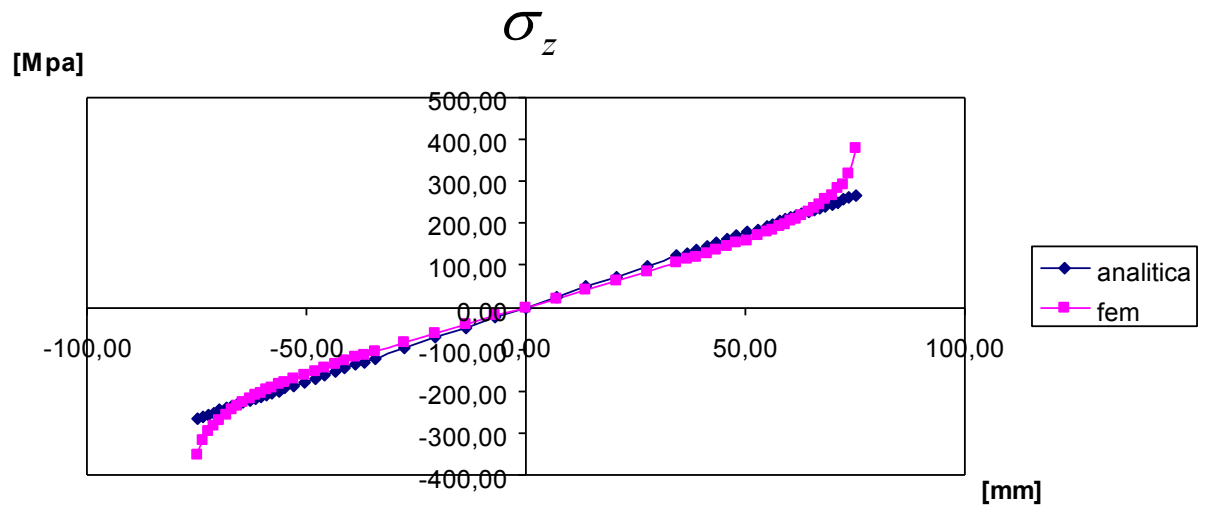


Figura 3.7. Nella zona della superficie esterna il calcolo analitico sottostima i valori ricavati dal fem. Questa incongruenza è dovuto alla vicinanza della sezione analizzata all'incastro.

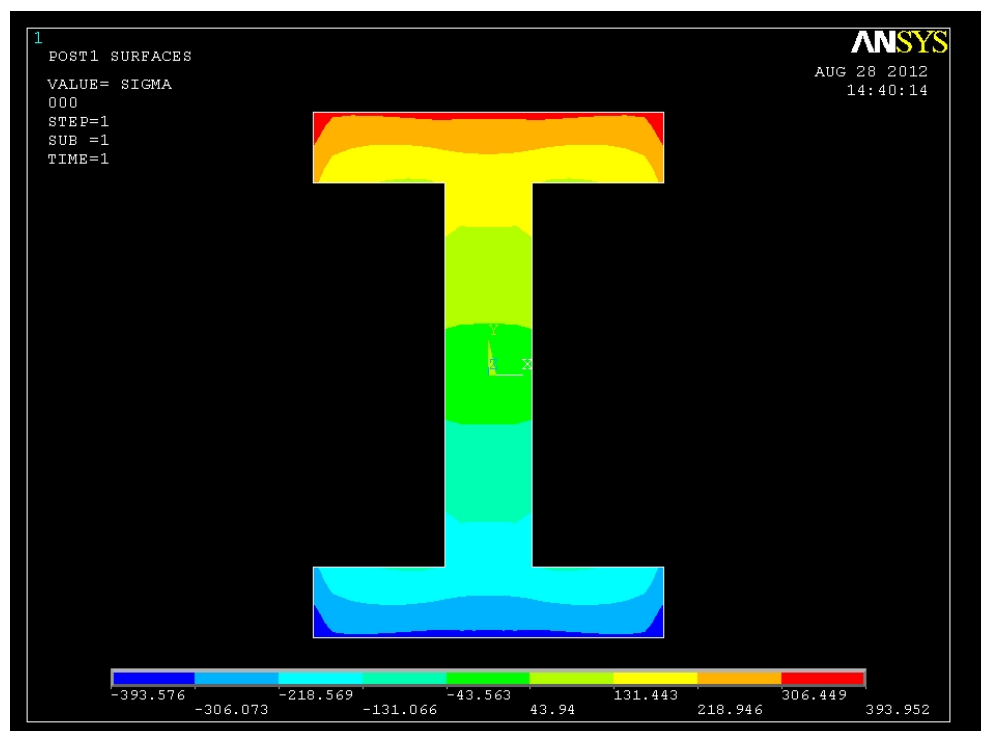


Figura 3.8. Come si può notare dal contour plot i valori di sforzo massimo si hanno sulle due estremità per poi annullarsi nel baricentro, ciò conferma quanto visto in teoria.

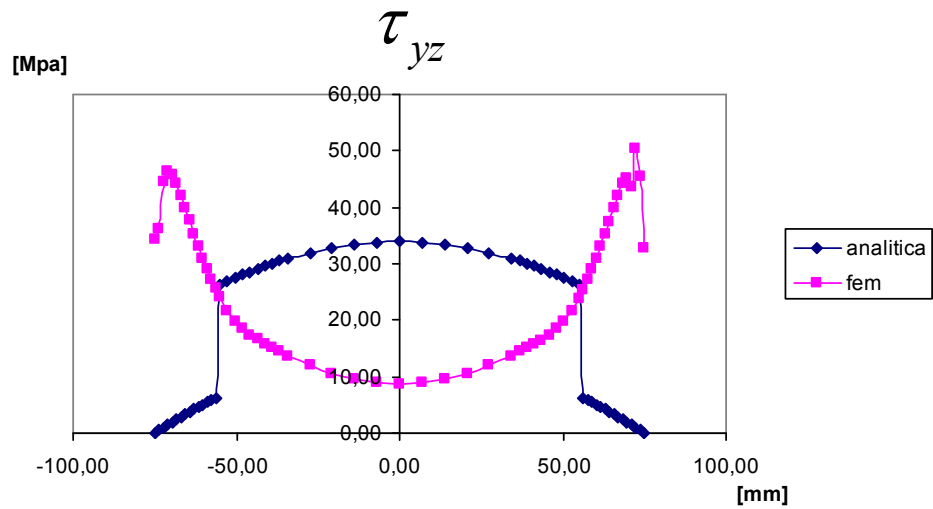


Figura 3.9. Nel caso delle tensioni tangenziali lungo y non vi è alcun legame tra calcolo analitico e calcolo al fem. Il motivo può essere attribuito alla vicinanza della sezione analizzata con l'incastro.

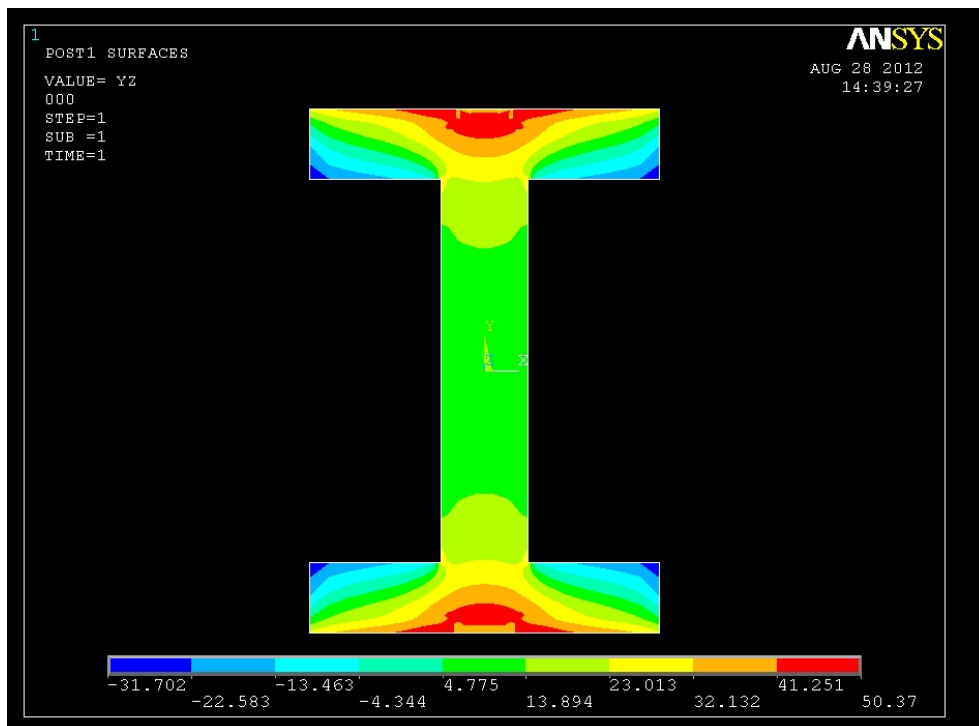


Figura 3.8. Si ha una distribuzione anomala della componente tangenziale lungo y.

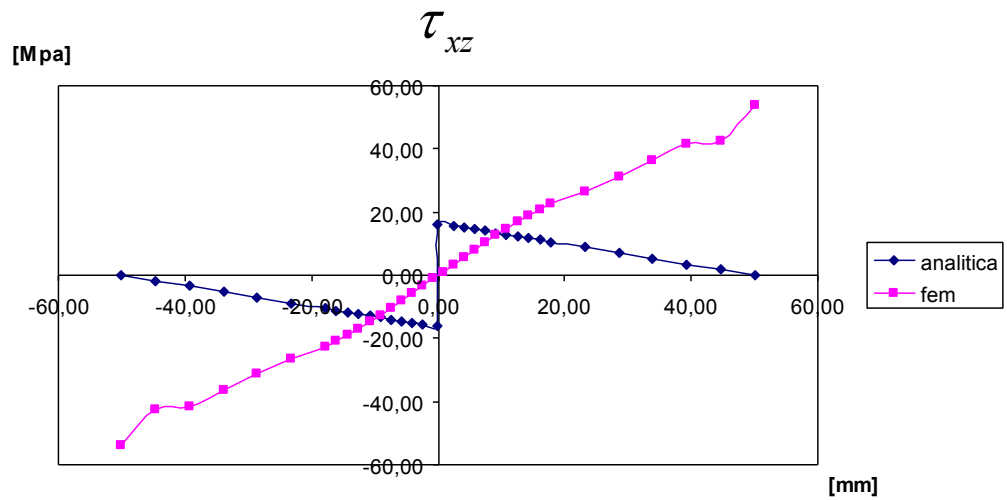


Figura 3.9. Lo studio della componente tangenziale lungo z nelle sole ali non ha alcun legame tra calcolo analitico e calcolo al fem per i motivi precedentemente detti.

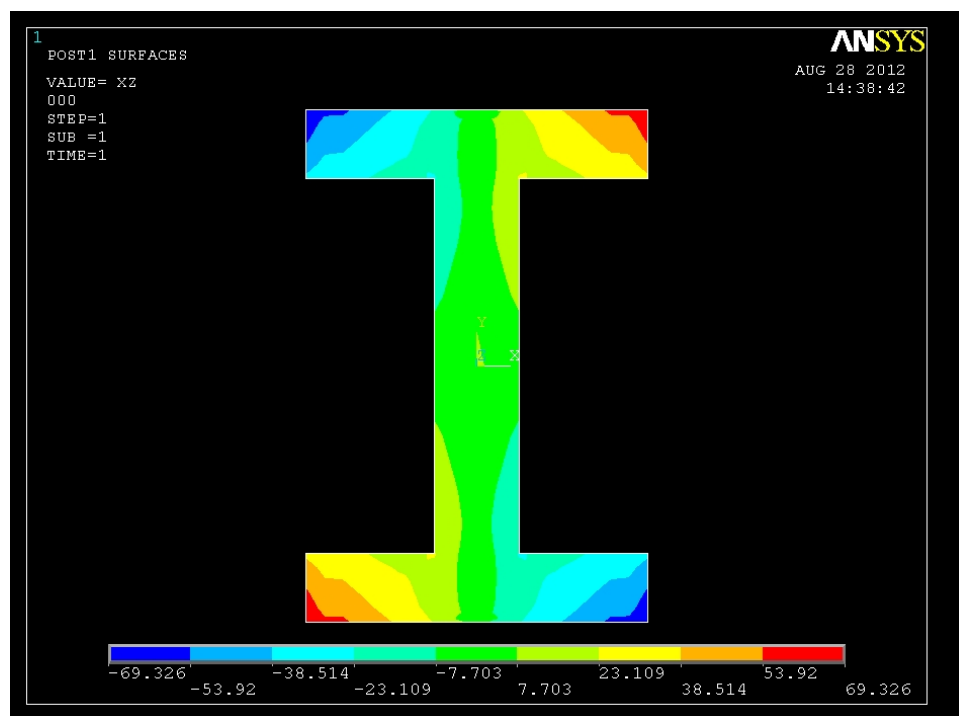


Figura 3.8. Anche in questo caso si ha una distribuzione anomala della componente tangenziale lungo z .

Con lo studio della prima area non si è potuto analizzare l'equazione di Jourawskj, in quanto si è riscontrata la totale incongruenza tra il calcolo analitico e quello al *fem* per quanto riguarda le tensioni tangenziali lungo y e lungo z. Da ciò si può constatare che lo studio ad elementi finiti di aree vicine a vincoli può dare valori inverosimili. Tuttavia nel caso dello sforzo normale lungo z si è potuta apprezzare una notevole somiglianza tra valori analitici e valori al *fem*, nonostante una sottostima del calcolo analitico nelle zone esterne. in una prima analisi quindi si può verificare che l'equazione di Navier garantisce una buona approssimazione anche in caso di superfici in condizioni particolari.

3.4 SEZIONE II

Lo sforzo normale a flessione calcolato secondo Navier risulta:

$$\sigma = \frac{M}{J_{xx}} y$$

$$M = F \times b = 100000 \text{ [N]} \times (700-140) \text{ [mm]} = 56000 \text{ [Nm]}$$

Tabella 3.2. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavate al *fem* e messe a confronto con i valori calcolati analiticamente per la sezione ad una distanza di 140mm dall'incastro.

VALORI CALCOLATI DAL FEM						VALORI ANALITICI		
X_G [mm]	Y_G [mm]	σ_Z [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	σ_Z [Mpa]	S'_{xx} [mm ³]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa] ali
0,00	-75,00	-210,06	-0,81	0,00	-212,05	0,00	0,00	
0,00	-73,67	-208,21	0,71	0,00	-208,29	9908,66	0,50	
0,00	-72,33	-205,02	2,42	0,00	-204,51	19646,86	0,99	
0,00	-71,00	-201,21	4,03	0,00	-200,74	29200,00	1,47	
0,00	-69,67	-197,27	5,47	0,00	-196,98	38575,46	1,95	
0,00	-68,33	-193,33	6,80	0,00	-193,20	47780,06	2,41	
0,00	-67,00	-189,44	8,11	0,00	-189,44	56800,00	2,87	
0,00	-65,67	-185,61	9,45	0,00	-185,67	65642,26	3,31	
0,00	-64,33	-181,82	10,84	0,00	-181,89	74313,26	3,75	

0,00	-63,00	-178,05	12,29	0,00	-178,13	82800,00	4,18
0,00	-61,67	-174,31	13,79	0,00	-174,36	91109,06	4,60
0,00	-60,33	-170,57	15,34	0,00	-170,58	99246,46	5,01
0,00	-59,00	-166,84	16,90	0,00	-166,82	107200,00	5,41
0,00	-57,67	-163,11	18,45	0,00	-163,05	114975,86	5,81
0,00	-56,33	-159,38	19,96	0,00	-159,28	122579,66	6,19
0,00	-55,00	-155,64	21,39	0,00	-155,51	130000,00	26,25
0,00	-52,71	-149,21	23,56	0,00	-149,03	133085,83	26,88
0,00	-50,42	-142,77	25,32	0,00	-142,55	136039,08	27,47
0,00	-48,13	-136,31	26,69	0,00	-136,07	138862,30	28,04
0,00	-45,83	-129,85	27,74	0,00	-129,59	141554,20	28,59
0,00	-43,54	-123,39	28,58	0,00	-123,11	144113,68	29,10
0,00	-41,25	-116,92	29,28	0,00	-116,63	146542,97	29,60
0,00	-38,96	-110,44	29,87	0,00	-110,15	148840,93	30,06
0,00	-36,67	-103,98	30,39	0,00	-103,67	151006,64	30,50
0,00	-34,38	-97,50	30,88	0,00	-97,19	153041,99	30,91
0,00	-27,50	-78,05	32,09	0,00	-77,75	158359,38	31,98
0,00	-20,63	-58,57	33,01	0,00	-58,31	162495,12	32,82
0,00	-13,75	-39,06	33,67	0,00	-38,88	165449,22	33,41
0,00	-6,88	-19,54	34,07	0,00	-19,44	167221,68	33,77
0,00	0,00	0,12	34,20	0,00	0,00	167812,50	33,89
0,00	6,88	19,54	34,07	0,00	19,44	167221,68	33,77
0,00	13,75	39,06	33,67	0,00	38,88	165449,22	33,41
0,00	20,63	58,57	33,01	0,00	58,31	162495,12	32,82
0,00	27,50	78,05	32,09	0,00	77,75	158359,38	31,98
0,00	34,38	97,50	30,88	0,00	97,19	153041,99	30,91
0,00	36,67	103,98	30,39	0,00	103,67	151006,64	30,50
0,00	38,96	110,44	29,87	0,00	110,15	148840,93	30,06
0,00	41,25	116,93	29,27	0,00	116,63	146542,97	29,60
0,00	43,54	123,39	28,58	0,00	123,11	144113,68	29,10
0,00	45,83	129,85	27,74	0,00	129,59	141554,20	28,59
0,00	48,13	136,32	26,69	0,00	136,07	138862,30	28,04
0,00	50,42	142,77	25,32	0,00	142,55	136039,08	27,47
0,00	52,71	149,21	23,56	0,00	149,03	133085,83	26,88
0,00	55,00	155,64	21,39	0,00	155,51	130000,00	26,25
0,00	56,33	159,38	19,96	0,00	159,28	122579,66	6,19
0,00	57,67	163,11	18,45	0,00	163,05	114975,86	5,81
0,00	59,00	166,84	16,90	0,00	166,82	107200,00	5,41
0,00	60,33	170,57	15,33	0,00	170,58	99246,46	5,01
0,00	61,67	174,31	13,78	0,00	174,36	91109,06	4,60
0,00	63,00	178,05	12,28	0,00	178,13	82800,00	4,18
0,00	64,33	181,80	10,83	0,00	181,89	74313,26	3,75
0,00	65,67	185,58	9,44	0,00	185,67	65642,26	3,31
0,00	67,00	189,40	8,09	0,00	189,44	56800,00	2,87
0,00	68,33	193,28	6,74	0,00	193,20	47780,06	2,41
0,00	69,67	197,20	5,36	0,00	196,98	38575,46	1,95
0,00	71,00	201,36	4,06	0,00	200,74	29200,00	1,47
0,00	72,33	205,94	2,90	0,00	204,51	19646,86	0,99
0,00	73,67	206,79	1,97	0,00	208,29	9908,66	0,50
0,00	75,00	211,19	-3,82	0,00	212,05	0,00	0,00
-50,00	65,00	183,20	0,75	0,50			0,00
-44,64	65,00	184,09	0,49	-1,96			-1,76
-39,29	65,00	183,44	0,41	-3,55			-3,51
-33,93	65,00	183,50	0,51	-5,12			-5,27

-28,57	65,00	183,59	0,85	-6,83	-7,03
-23,21	65,00	183,64	1,72	-8,48	-8,79
-17,86	65,00	183,69	3,71	-9,64	-10,55
-16,07	65,00	183,67	4,77	-9,54	-11,14
-14,29	65,00	183,68	5,82	-9,29	-11,72
-12,50	65,00	183,69	6,88	-8,72	-12,31
-10,83	65,00	183,69	7,80	-7,91	-12,85
-9,17	65,00	183,69	8,56	-6,89	-13,40
-7,50	65,00	183,69	9,16	-5,72	-13,95
-5,83	65,00	183,69	9,59	-4,48	-14,50
-4,17	65,00	183,69	9,88	-3,21	-15,04
-2,50	65,00	183,69	10,06	-1,93	-15,59
-0,83	65,00	183,69	10,14	-0,64	-16,14
0,83	65,00	183,69	10,14	0,64	16,14
2,50	65,00	183,69	10,06	1,93	15,59
4,17	65,00	183,69	9,88	3,21	15,04
5,83	65,00	183,69	9,59	4,48	14,50
7,50	65,00	183,69	9,16	5,72	13,95
9,17	65,00	183,69	8,56	6,89	13,40
10,83	65,00	183,69	7,80	7,91	12,85
12,50	65,00	183,69	6,88	8,72	12,31
14,29	65,00	183,68	5,82	9,29	11,72
16,07	65,00	183,67	4,77	9,54	11,14
17,86	65,00	183,69	3,71	9,64	10,55
23,21	65,00	183,64	1,72	8,48	8,79
28,57	65,00	183,59	0,85	6,83	7,03
33,93	65,00	183,50	0,51	5,12	5,27
39,29	65,00	183,44	0,41	3,55	3,51
44,64	65,00	184,09	0,49	1,96	1,76
50,00	65,00	183,20	0,75	-0,50	0,00

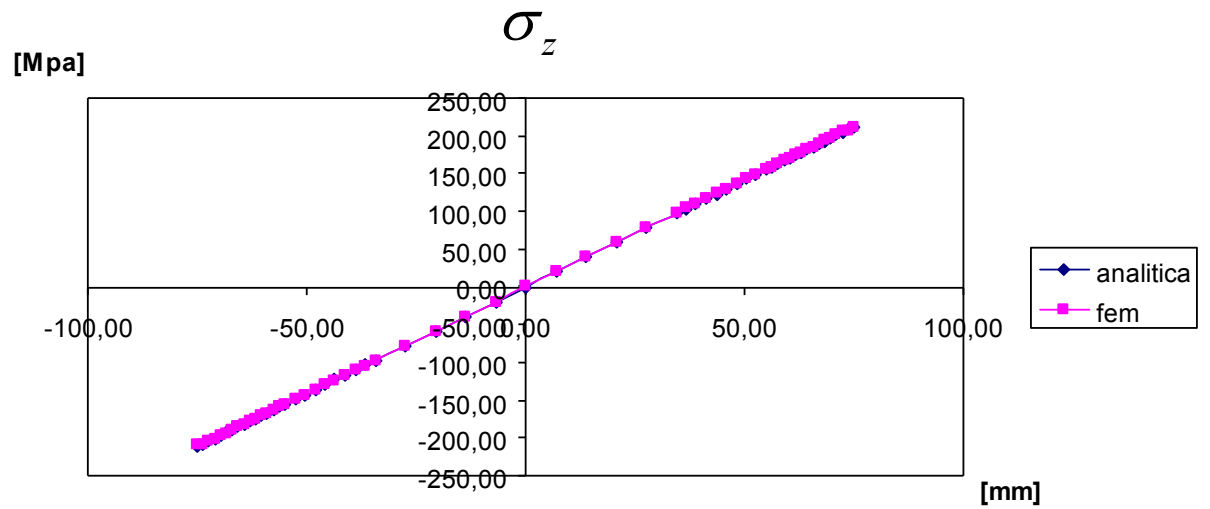


Figura 3.9. I valori analitici sono del tutto simili a quelli calcolati dal fem. Nei nodi sulle estremità della sezione si registra una sovrastima di circa 1 Mpa nel calcolo analitico. Un'altra cosa da notare è che i valori di sollecitazione sono inferiori rispetto la prima sezione studiata; ciò è causato da un valore di momento flettente minore.

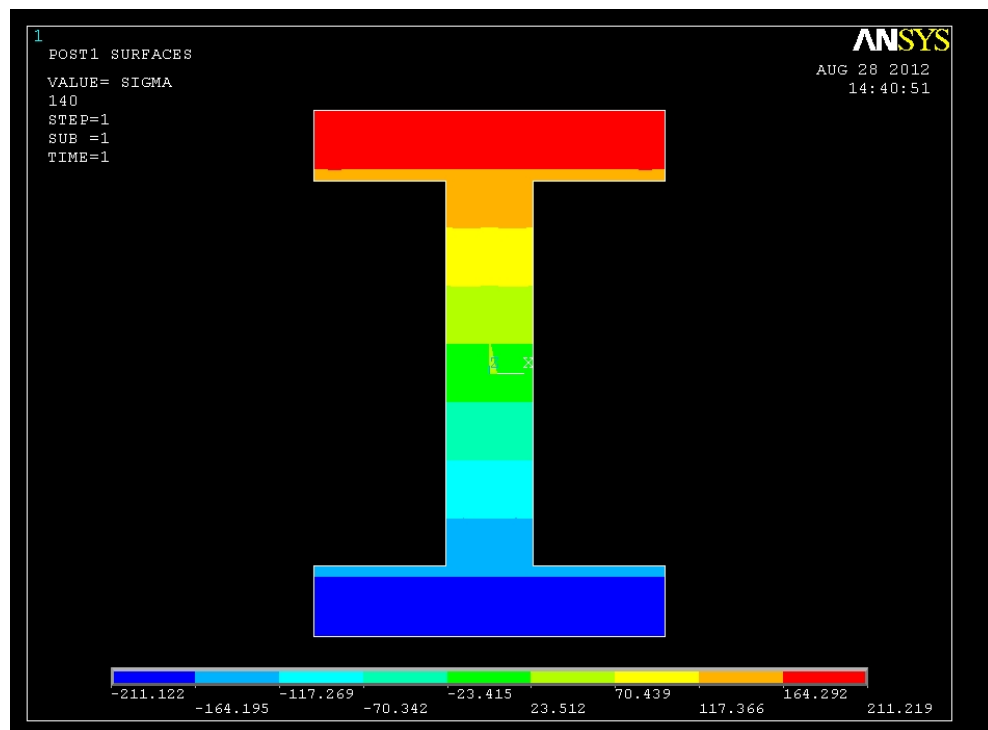


Figura 3.10. Come si può notare dal contour plot i valori di sforzo massimo si hanno sulle due estremità della sezione per poi annullarsi nel baricentro.

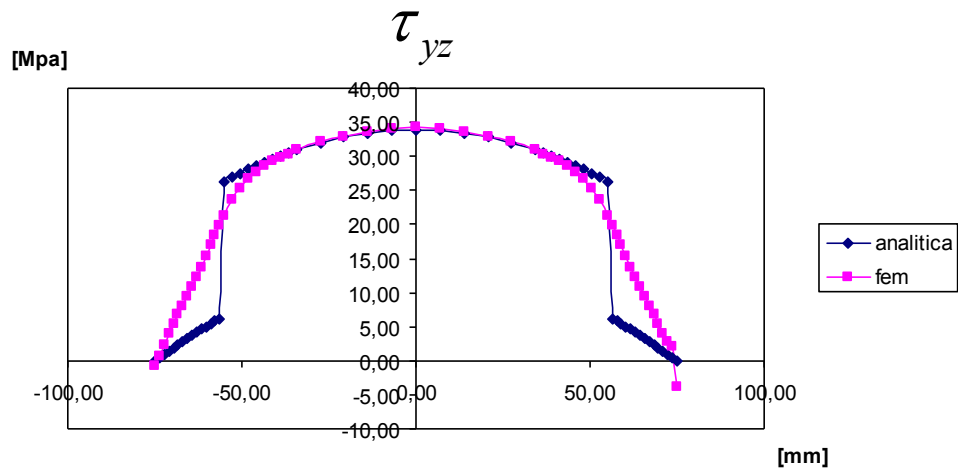


Figura 3.11. Analizzando le tensioni tangenziali lungo y si può notare la limitazione dell'equazione di Jourawskij nel caso di sezioni complesse. Infatti nel punto di giunzione tra ali e anima c'è una discontinuità della curva analitica, mentre la diminuzione della tensione nel caso reale è più dolce.

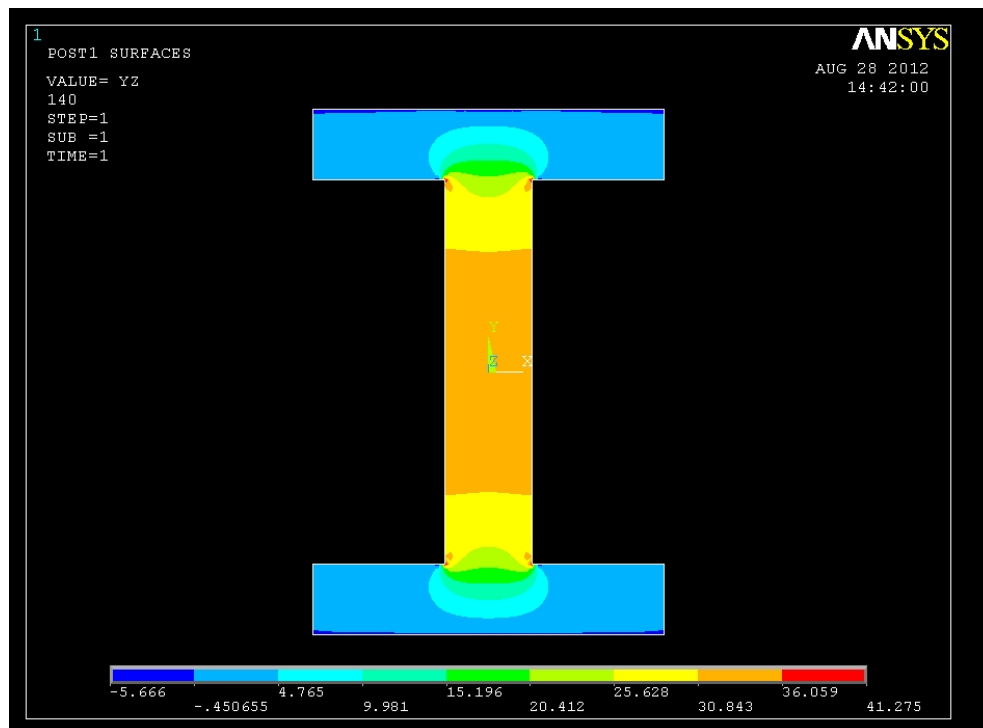


Figura 3.12. Si può notare come nell'anima vi sia una distribuzione delle τ_{yz} totalmente prevedibile, nelle ali una componente pressoché trascurabile, e nella giunzione tra ali e anima vi è una situazione difficilmente calcolabile analiticamente.

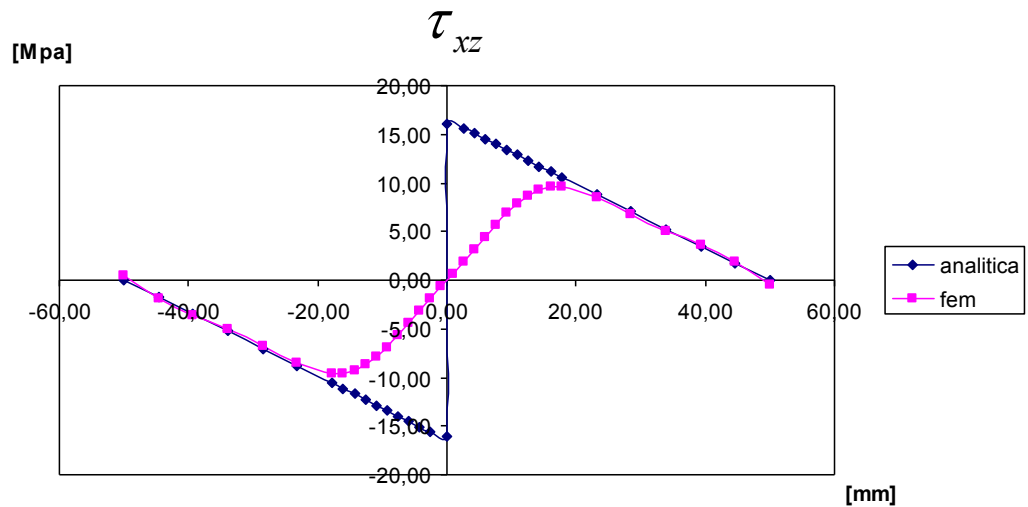


Figura 3.13. Nel caso delle tensioni tangenziali lungo z vi è una sovrastima di circa 5 Mpa da parte delle formulazioni analitiche. Le due curve nel tratto più esterno delle ali sono molto simile, ma nella zona perturbata dagli spigoli, la formulazione analitica non prende in considerazione l'effetto di questi ultimi.

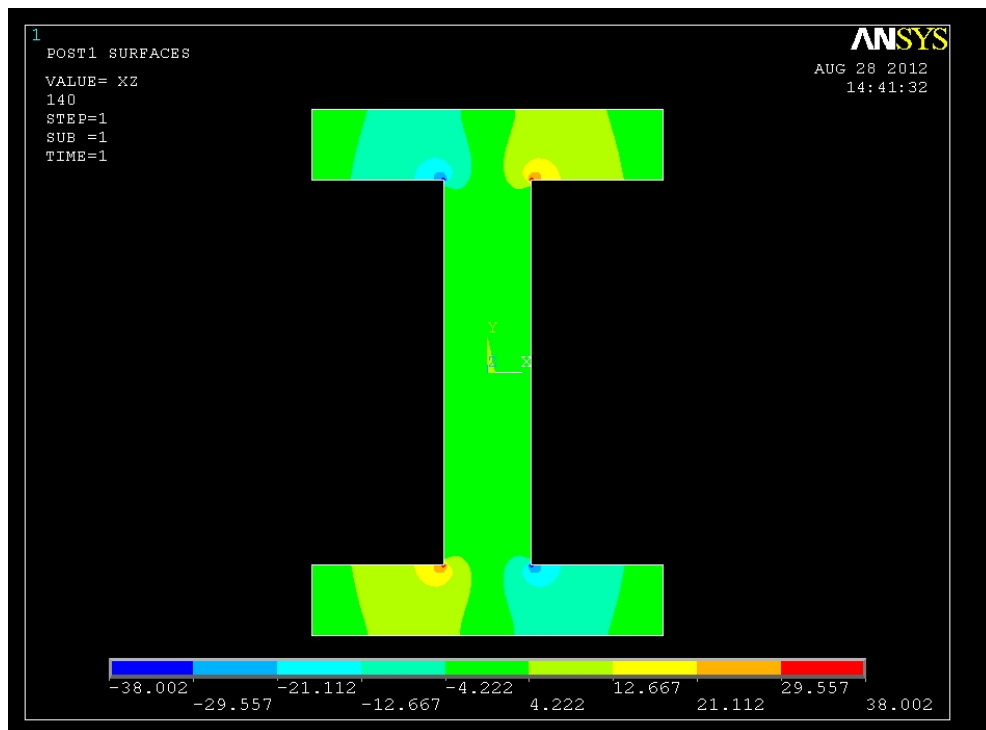


Figura 3.14. Nell'anima vi è un valore pressoché trascurabile della componente in x della tensione tangenziale. Nelle ali viene confermato il diagramma in figura 3.13. Si riesce inoltre a notare come negli spigoli interni si raggiunga il valore massimo, a causa di una brusca variazione geometrica.

3.5 SEZIONE III

Lo sforzo normale a flessione calcolato secondo Navier risulta:

$$\sigma = \frac{M}{J_{xx}} y$$

$$M = F \times b = 100000 \text{ [N]} \times (700-280) \text{ [mm]} = 42000 \text{ [Nm]}$$

Tabella 3.3. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavate al fem e messe a confronto con i valori calcolati analiticamente per la sezione ad una distanza di 280mm dall'incastro.

VALORI CALCOLATI DAL FEM						VALORI ANALITICI		
X_G [mm]	Y_G [mm]	σ_Z [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	σ_Z [Mpa]	S_{xx} [mm ³]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa] ali
0,00	-75,00	-158,59	-0,24	0,00	-159,04	0,00	0,00	
0,00	-73,67	-156,44	1,27	0,00	-156,21	9908,66	0,50	
0,00	-72,33	-153,48	2,69	0,00	-153,39	19646,86	0,99	
0,00	-71,00	-150,54	3,97	0,00	-150,56	29200,00	1,47	
0,00	-69,67	-147,69	5,25	0,00	-147,73	38575,46	1,95	
0,00	-68,33	-144,87	6,58	0,00	-144,90	47780,06	2,41	
0,00	-67,00	-142,06	7,96	0,00	-142,08	56800,00	2,87	
0,00	-65,67	-139,24	9,39	0,00	-139,25	65642,26	3,31	
0,00	-64,33	-136,42	10,88	0,00	-136,42	74313,26	3,75	
0,00	-63,00	-133,60	12,40	0,00	-133,59	82800,00	4,18	
0,00	-61,67	-130,77	13,97	0,00	-130,77	91109,06	4,60	
0,00	-60,33	-127,94	15,55	0,00	-127,94	99246,46	5,01	
0,00	-59,00	-125,12	17,14	0,00	-125,11	107200,00	5,41	
0,00	-57,67	-122,29	18,71	0,00	-122,29	114975,86	5,81	
0,00	-56,33	-119,46	20,21	0,00	-119,46	122579,66	6,19	
0,00	-55,00	-116,63	21,64	0,00	-116,63	130000,00	26,25	
0,00	-52,71	-111,77	23,80	0,00	-111,77	133085,83	26,88	
0,00	-50,42	-106,91	25,52	0,00	-106,91	136039,08	27,47	
0,00	-48,13	-102,05	26,85	0,00	-102,05	138862,30	28,04	
0,00	-45,83	-97,20	27,88	0,00	-97,19	141554,20	28,59	
0,00	-43,54	-92,34	28,68	0,00	-92,33	144113,68	29,10	
0,00	-41,25	-87,48	29,34	0,00	-87,47	146542,97	29,60	
0,00	-38,96	-82,62	29,91	0,00	-82,61	148840,93	30,06	
0,00	-36,67	-77,76	30,40	0,00	-77,75	151006,64	30,50	
0,00	-34,38	-72,89	30,86	0,00	-72,89	153041,99	30,91	
0,00	-27,50	-58,31	31,97	0,00	-58,31	158359,38	31,98	
0,00	-20,63	-43,73	32,81	0,00	-43,74	162495,12	32,82	
0,00	-13,75	-29,16	33,40	0,00	-29,16	165449,22	33,41	

0,00	-6,88	-14,58	33,76	0,00	-14,58	167221,68	33,77
0,00	0,00	-0,42	33,88	0,00	0,00	167812,50	33,89
0,00	6,88	14,58	33,76	0,00	14,58	167221,68	33,77
0,00	13,75	29,15	33,40	0,00	29,16	165449,22	33,41
0,00	20,63	43,73	32,81	0,00	43,74	162495,12	32,82
0,00	27,50	58,31	31,97	0,00	58,31	158359,38	31,98
0,00	34,38	72,89	30,86	0,00	72,89	153041,99	30,91
0,00	36,67	77,76	30,40	0,00	77,75	151006,64	30,50
0,00	38,96	82,62	29,90	0,00	82,61	148840,93	30,06
0,00	41,25	87,48	29,34	0,00	87,47	146542,97	29,60
0,00	43,54	92,34	28,68	0,00	92,33	144113,68	29,10
0,00	45,83	97,19	27,88	0,00	97,19	141554,20	28,59
0,00	48,13	102,05	26,85	0,00	102,05	138862,30	28,04
0,00	50,42	106,91	25,52	0,00	106,91	136039,08	27,47
0,00	52,71	111,77	23,80	0,00	111,77	133085,83	26,88
0,00	55,00	116,63	21,64	0,00	116,63	130000,00	26,25
0,00	56,33	119,46	20,21	0,00	119,46	122579,66	6,19
0,00	57,67	122,29	18,71	0,00	122,29	114975,86	5,81
0,00	59,00	125,12	17,15	0,00	125,11	107200,00	5,41
0,00	60,33	127,94	15,56	0,00	127,94	99246,46	5,01
0,00	61,67	130,76	13,98	0,00	130,77	91109,06	4,60
0,00	63,00	133,58	12,41	0,00	133,59	82800,00	4,18
0,00	64,33	136,39	10,87	0,00	136,42	74313,26	3,75
0,00	65,67	139,21	9,35	0,00	139,25	65642,26	3,31
0,00	67,00	142,06	7,86	0,00	142,08	56800,00	2,87
0,00	68,33	144,98	6,43	0,00	144,90	47780,06	2,41
0,00	69,67	148,02	5,17	0,00	147,73	38575,46	1,95
0,00	71,00	150,96	4,33	0,00	150,56	29200,00	1,47
0,00	72,33	152,83	3,82	0,00	153,39	19646,86	0,99
0,00	73,67	155,03	2,43	0,00	156,21	9908,66	0,50
0,00	75,00	161,13	-4,69	0,00	159,04	0,00	0,00
-50,00	65,00	137,84	0,60	0,08			0,00
-44,64	65,00	137,84	0,41	-1,82			-1,76
-39,29	65,00	137,80	0,36	-3,49			-3,51
-33,93	65,00	137,84	0,48	-5,27			-5,27
-28,57	65,00	137,83	0,84	-7,01			-7,03
-23,21	65,00	137,83	1,71	-8,65			-8,79
-17,86	65,00	137,84	3,69	-9,79			-10,55
-16,07	65,00	137,81	4,75	-9,67			-11,14
-14,29	65,00	137,81	5,82	-9,41			-11,72
-12,50	65,00	137,81	6,87	-8,83			-12,31
-10,83	65,00	137,81	7,79	-8,01			-12,85
-9,17	65,00	137,81	8,56	-6,97			-13,40
-7,50	65,00	137,81	9,15	-5,80			-13,95
-5,83	65,00	137,81	9,57	-4,54			-14,50
-4,17	65,00	137,81	9,86	-3,25			-15,04
-2,50	65,00	137,81	10,03	-1,95			-15,59
-0,83	65,00	137,80	10,11	-0,65			-16,14
0,83	65,00	137,80	10,11	0,65			16,14
2,50	65,00	137,81	10,03	1,95			15,59
4,17	65,00	137,81	9,86	3,25			15,04
5,83	65,00	137,81	9,57	4,54			14,50
7,50	65,00	137,81	9,15	5,80			13,95
9,17	65,00	137,81	8,56	6,97			13,40

10,83	65,00	137,81	7,79	8,01	12,85
12,50	65,00	137,81	6,87	8,83	12,31
14,29	65,00	137,81	5,82	9,41	11,72
16,07	65,00	137,81	4,75	9,67	11,14
17,86	65,00	137,84	3,69	9,79	10,55
23,21	65,00	137,83	1,71	8,65	8,79
28,57	65,00	137,83	0,84	7,01	7,03
33,93	65,00	137,84	0,48	5,27	5,27
39,29	65,00	137,80	0,36	3,49	3,51
44,64	65,00	137,84	0,41	1,82	1,76
50,00	65,00	137,84	0,60	-0,08	0,00

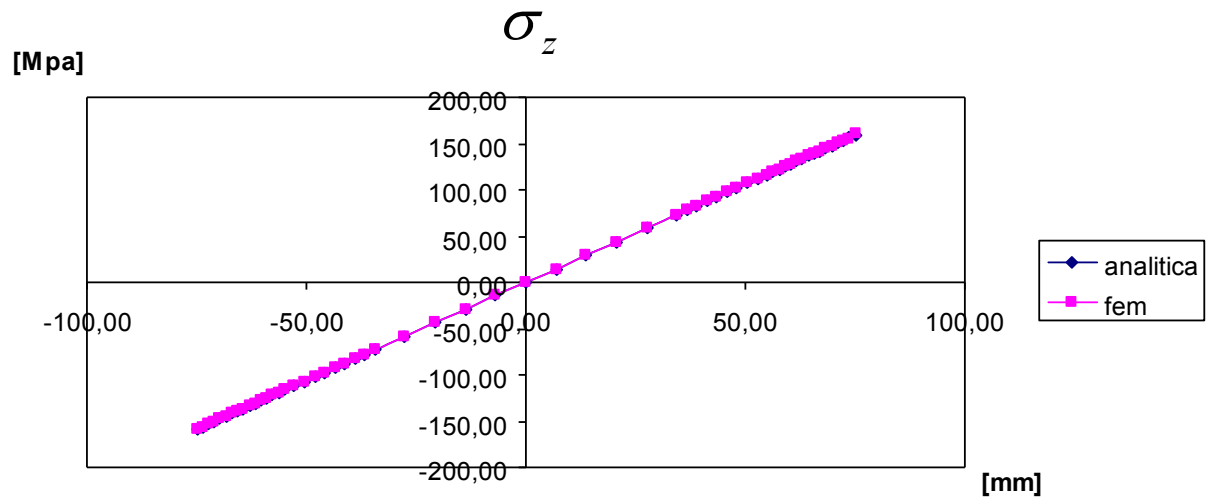


Figura 3.15. I valori analitici sono del tutto simili a quelli calcolati dal fem. Nei nodi alle estremità si registra una sovrastima di circa 0,5 Mpa nel calcolo analitico.

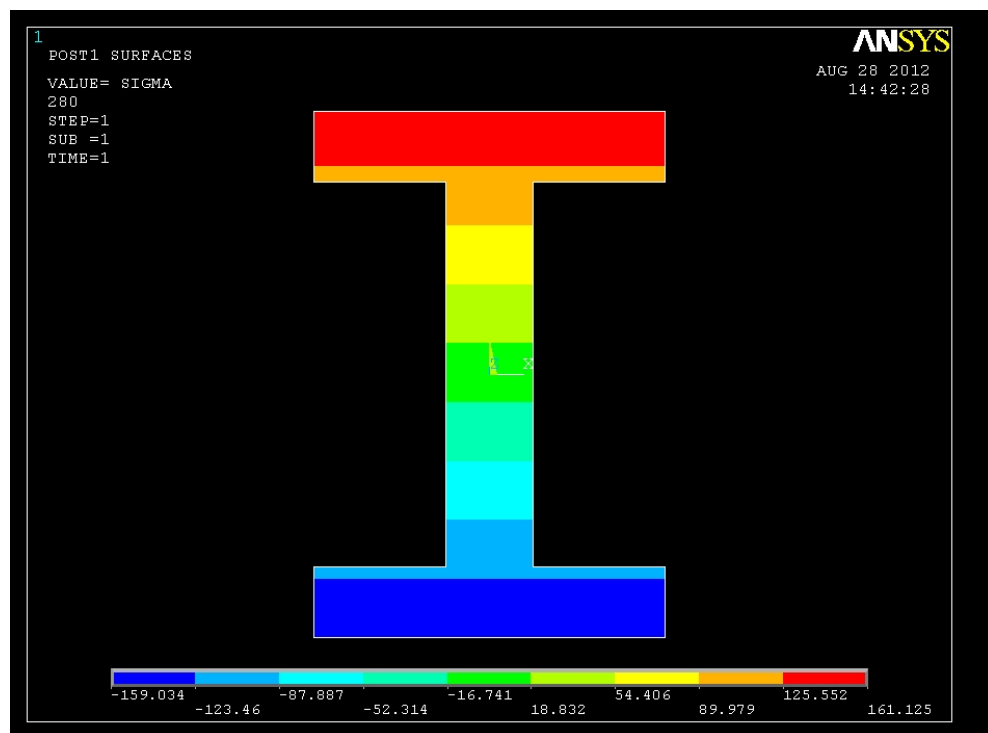


Figura 3.16. Come si può notare dal contour plot i valori di sforzo massimo si hanno sulle due superfici esterne per poi annullarsi nel baricentro.

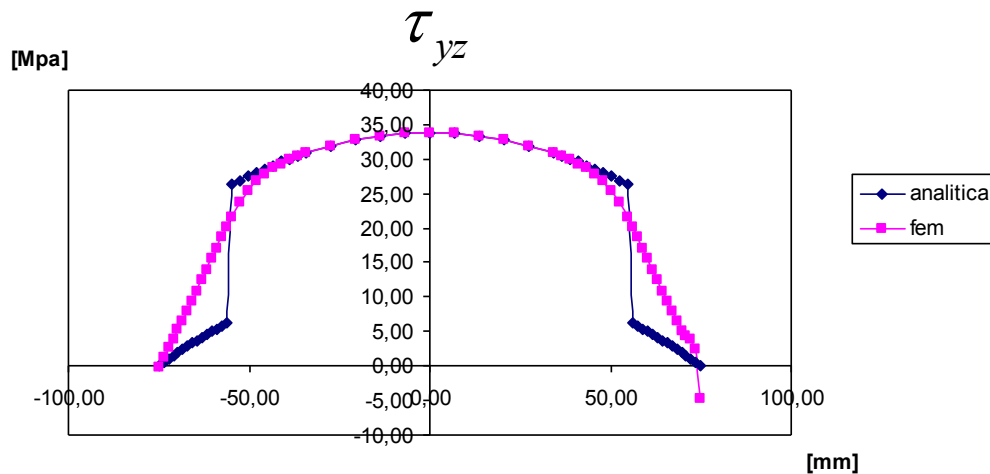


Figura 3.17. Nel caso delle tensioni tangenziali lungo y vi è uno scarto di meno di 1 Mpa tra le due curve. Analizzando le tensioni tangenziali lungo y si può notare la limitazione dell'equazione di Jourawskj nel caso di sezioni complesse. Infatti si può notare come nel punto di giunzione tra ali e anima ci sia una discontinuità della curva analitica, mentre la diminuzione della tensione nel caso reale è più dolce.

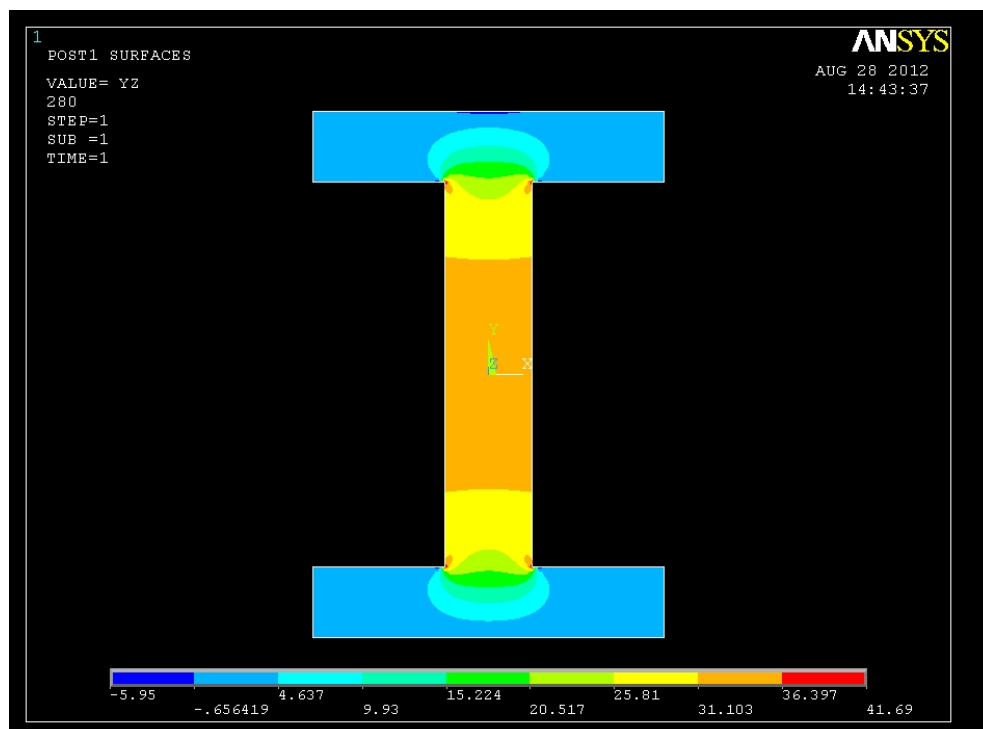


Figura 3.18. Si può notare come nell'anima vi sia una distribuzione delle τ_{yz} totalmente prevedibile, nelle ali una componente pressoché trascurabile, e nella giunzione tra ali e anima vi è una situazione difficile da calcolare analiticamente. Viene inoltre registrato il valore massimo sugli spigoli interni della sezione.

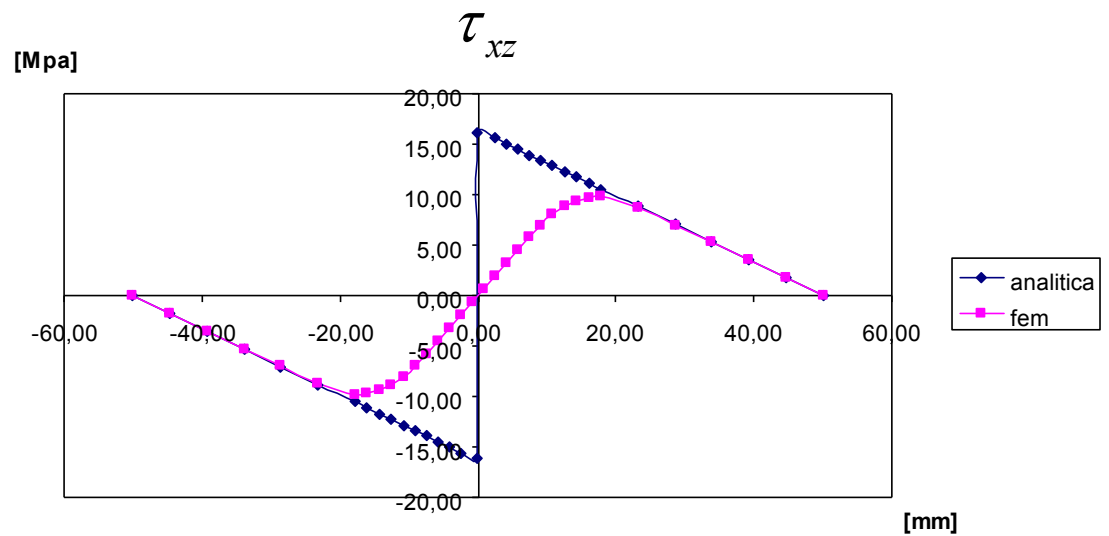


Figura 3.19. Nel caso delle tensioni tangenziali lungo z vi è una sovrastima di circa 5 Mpa. Le due curve nel tratto più esterno delle ali sono molto simile, ma nella zona perturbata dagli spigoli, la formulazione analitica non prende in considerazione l'effetto di questi ultimi.

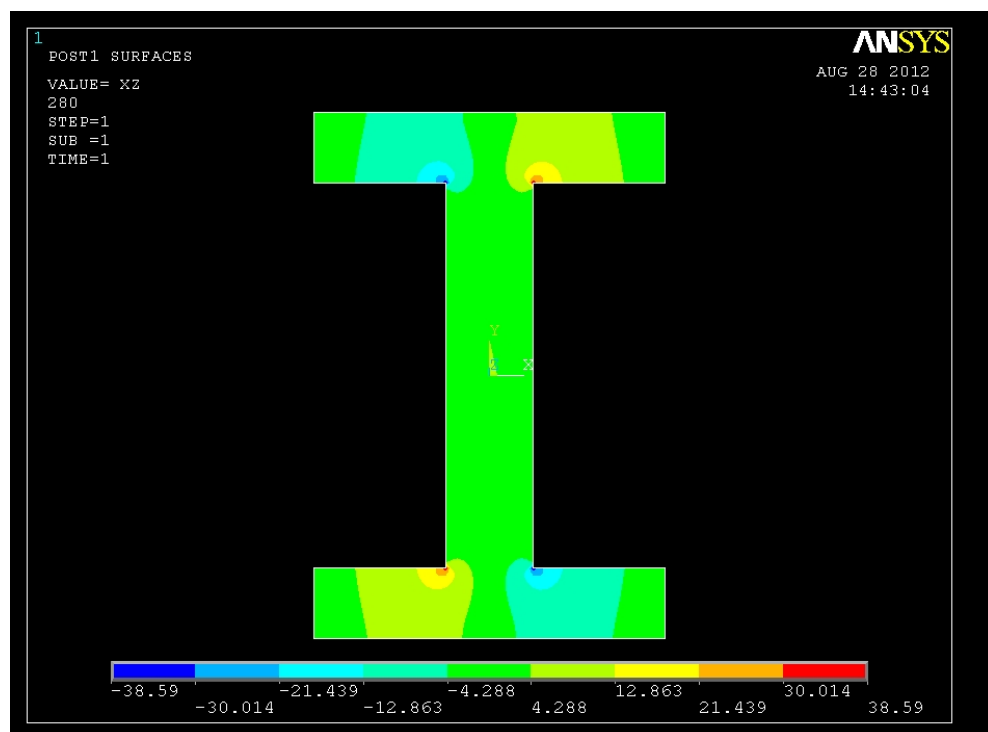


Figura 3.20. Nell'anima vi è un valore pressoché trascurabile della componente in x della tensione tangenziale. Nelle ali viene confermato il diagramma in figura 3.19. Si riesce inoltre a notare come negli spigoli interni si raggiunga il valore massimo.

3.6 SEZIONE IV

Lo sforzo normale a flessione calcolato secondo Navier risulta:

$$\sigma = \frac{M}{J_{xx}} y$$

$$M = F \times b = 100000 \text{ [N]} \times (700-420) \text{ [mm]} = 28000 \text{ [Nm]}$$

Tabella 3.4. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavate al fem e messe a confronto con i valori calcolati analiticamente per la sezione ad una distanza di 420 mm dall'incastro.

VALORI CALCOLATI DAL FEM						VALORI ANALITICI		
X_G [mm]	Y_G [mm]	σ_Z [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	σ_Z [Mpa]	S_{xx} [mm ³]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa] ali
0,00	-75,00	-105,95	-0,92	0,00	-106,03	0,00	0,00	
0,00	-73,67	-104,28	1,32	0,00	-104,14	9908,66	0,50	
0,00	-72,33	-102,29	2,64	0,00	-102,26	19646,86	0,99	
0,00	-71,00	-100,38	3,91	0,00	-100,37	29200,00	1,47	
0,00	-69,67	-98,51	5,23	0,00	-98,49	38575,46	1,95	
0,00	-68,33	-96,63	6,59	0,00	-96,60	47780,06	2,41	
0,00	-67,00	-94,74	7,99	0,00	-94,72	56800,00	2,87	
0,00	-65,67	-92,86	9,43	0,00	-92,83	65642,26	3,31	
0,00	-64,33	-90,97	10,91	0,00	-90,95	74313,26	3,75	
0,00	-63,00	-89,08	12,44	0,00	-89,06	82800,00	4,18	
0,00	-61,67	-87,19	14,00	0,00	-87,18	91109,06	4,60	
0,00	-60,33	-85,31	15,59	0,00	-85,29	99246,46	5,01	
0,00	-59,00	-83,42	17,18	0,00	-83,41	107200,00	5,41	
0,00	-57,67	-81,53	18,75	0,00	-81,52	114975,86	5,81	
0,00	-56,33	-79,65	20,26	0,00	-79,64	122579,66	6,19	
0,00	-55,00	-77,76	21,69	0,00	-77,75	130000,00	26,25	
0,00	-52,71	-74,53	23,85	0,00	-74,51	133085,83	26,88	
0,00	-50,42	-71,29	25,58	0,00	-71,27	136039,08	27,47	
0,00	-48,13	-68,05	26,92	0,00	-68,03	138862,30	28,04	
0,00	-45,83	-64,82	27,94	0,00	-64,79	141554,20	28,59	
0,00	-43,54	-61,58	28,75	0,00	-61,56	144113,68	29,10	
0,00	-41,25	-58,34	29,40	0,00	-58,31	146542,97	29,60	
0,00	-38,96	-55,11	29,96	0,00	-55,07	148840,93	30,06	
0,00	-36,67	-51,87	30,46	0,00	-51,84	151006,64	30,50	
0,00	-34,38	-48,63	30,91	0,00	-48,60	153041,99	30,91	
0,00	-27,50	-38,92	32,01	0,00	-38,88	158359,38	31,98	
0,00	-20,63	-29,20	32,84	0,00	-29,16	162495,12	32,82	
0,00	-13,75	-19,49	33,43	0,00	-19,44	165449,22	33,41	

0,00	-6,88	-9,77	33,77	0,00	-9,72	167221,68	33,77
0,00	0,00	-0,54	33,88	0,00	0,00	167812,50	33,89
0,00	6,88	9,67	33,75	0,00	9,72	167221,68	33,77
0,00	13,75	19,39	33,38	0,00	19,44	165449,22	33,41
0,00	20,63	29,11	32,77	0,00	29,16	162495,12	32,82
0,00	27,50	38,84	31,92	0,00	38,88	158359,38	31,98
0,00	34,38	48,56	30,80	0,00	48,60	153041,99	30,91
0,00	36,67	51,81	30,34	0,00	51,84	151006,64	30,50
0,00	38,96	55,05	29,85	0,00	55,07	148840,93	30,06
0,00	41,25	58,29	29,28	0,00	58,31	146542,97	29,60
0,00	43,54	61,53	28,62	0,00	61,56	144113,68	29,10
0,00	45,83	64,78	27,82	0,00	64,79	141554,20	28,59
0,00	48,13	68,02	26,80	0,00	68,03	138862,30	28,04
0,00	50,42	71,26	25,47	0,00	71,27	136039,08	27,47
0,00	52,71	74,50	23,75	0,00	74,51	133085,83	26,88
0,00	55,00	77,73	21,60	0,00	77,75	130000,00	26,25
0,00	56,33	79,61	20,17	0,00	79,64	122579,66	6,19
0,00	57,67	81,49	18,66	0,00	81,52	114975,86	5,81
0,00	59,00	83,36	17,09	0,00	83,41	107200,00	5,41
0,00	60,33	85,25	15,48	0,00	85,29	99246,46	5,01
0,00	61,67	87,14	13,86	0,00	87,18	91109,06	4,60
0,00	63,00	89,06	12,26	0,00	89,06	82800,00	4,18
0,00	64,33	91,02	10,70	0,00	90,95	74313,26	3,75
0,00	65,67	93,03	9,22	0,00	92,83	65642,26	3,31
0,00	67,00	95,06	7,91	0,00	94,72	56800,00	2,87
0,00	68,33	97,04	6,87	0,00	96,60	47780,06	2,41
0,00	69,67	98,79	6,19	0,00	98,49	38575,46	1,95
0,00	71,00	99,71	5,62	0,00	100,37	29200,00	1,47
0,00	72,33	99,05	4,11	0,00	102,26	19646,86	0,99
0,00	73,67	104,89	1,12	0,00	104,14	9908,66	0,50
0,00	75,00	109,20	-7,50	0,00	106,03	0,00	0,00
-50,00	65,00	92,15	0,60	0,01			0,00
-44,64	65,00	92,08	0,40	-1,76			-1,76
-39,29	65,00	92,08	0,36	-3,48			-3,51
-33,93	65,00	92,07	0,48	-5,24			-5,27
-28,57	65,00	92,06	0,84	-6,97			-7,03
-23,21	65,00	92,06	1,71	-8,61			-8,79
-17,86	65,00	92,03	3,67	-9,75			-10,55
-16,07	65,00	92,00	4,68	-9,64			-11,14
-14,29	65,00	91,96	5,74	-9,38			-11,72
-12,50	65,00	91,95	6,78	-8,81			-12,31
-10,83	65,00	91,95	7,69	-7,99			-12,85
-9,17	65,00	91,95	8,45	-6,97			-13,40
-7,50	65,00	91,97	9,03	-5,80			-13,95
-5,83	65,00	91,98	9,45	-4,55			-14,50
-4,17	65,00	92,00	9,72	-3,26			-15,04
-2,50	65,00	92,02	9,88	-1,96			-15,59
-0,83	65,00	92,02	9,96	-0,65			-16,14
0,83	65,00	92,02	9,96	0,65			16,14
2,50	65,00	92,02	9,88	1,96			15,59
4,17	65,00	92,00	9,72	3,26			15,04
5,83	65,00	91,98	9,45	4,55			14,50
7,50	65,00	91,97	9,03	5,80			13,95
9,17	65,00	91,95	8,45	6,97			13,40

10,83	65,00	91,95	7,69	7,99	12,85
12,50	65,00	91,95	6,78	8,81	12,31
14,29	65,00	91,96	5,74	9,38	11,72
16,07	65,00	92,00	4,68	9,64	11,14
17,86	65,00	92,03	3,67	9,75	10,55
23,21	65,00	92,06	1,71	8,61	8,79
28,57	65,00	92,06	0,84	6,97	7,03
33,93	65,00	92,07	0,48	5,24	5,27
39,29	65,00	92,08	0,36	3,48	3,51
44,64	65,00	92,08	0,40	1,76	1,76
50,00	65,00	92,15	0,60	-0,01	0,00

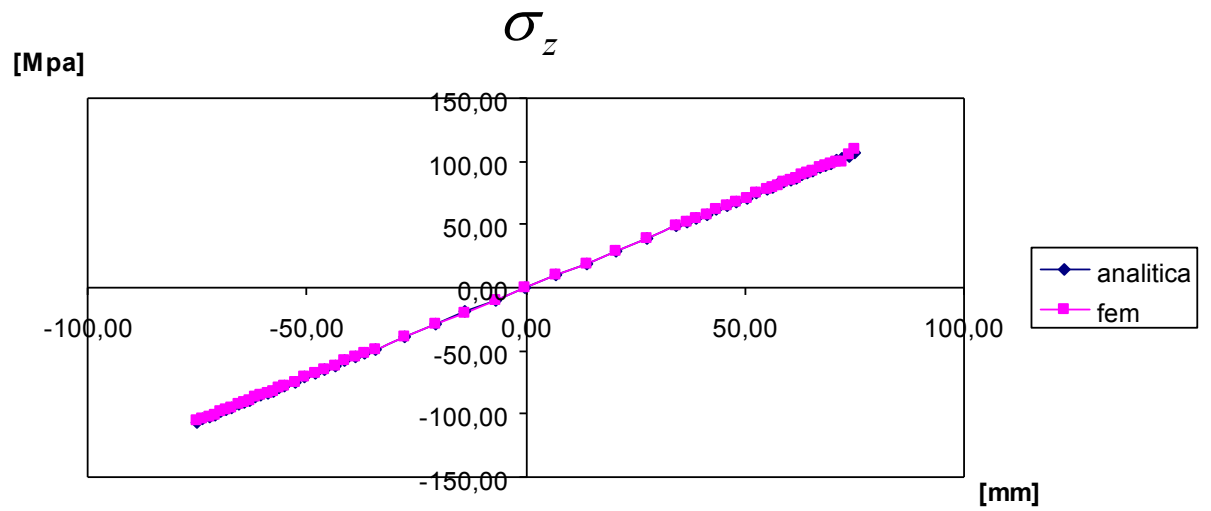


Figura 3.21. I valori analitici sono del tutto simili a quelli calcolati dal fem.

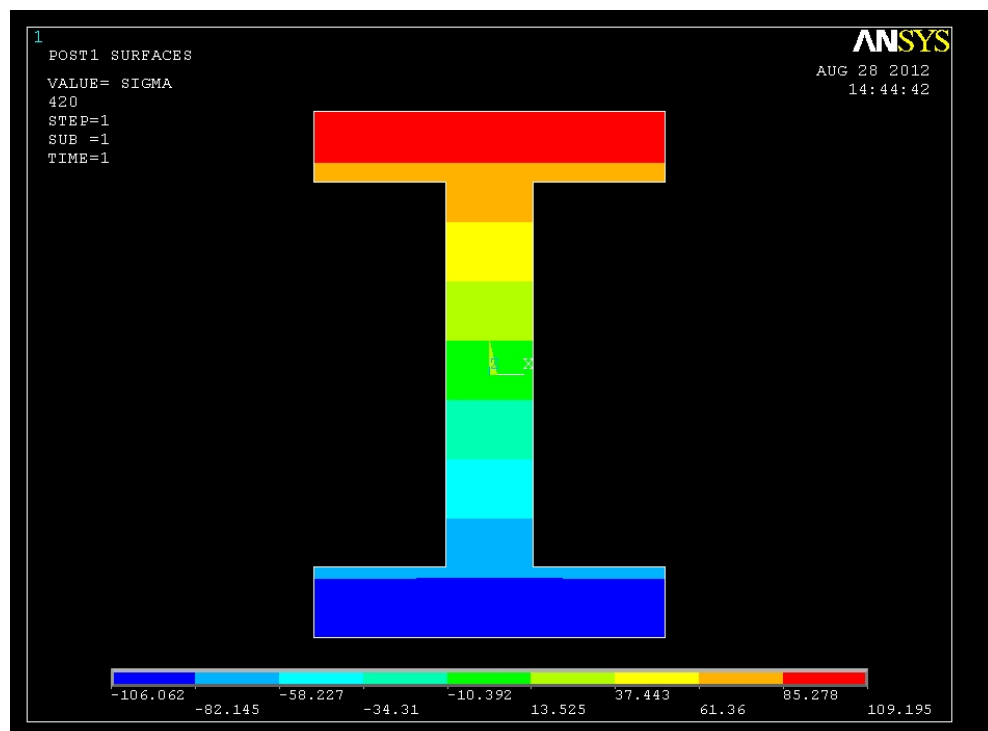


Figura 3.22. Come si può notare dal contour plot i valori di sforzo massimo si hanno sulle due superfici esterne per poi annullarsi nel baricentro.

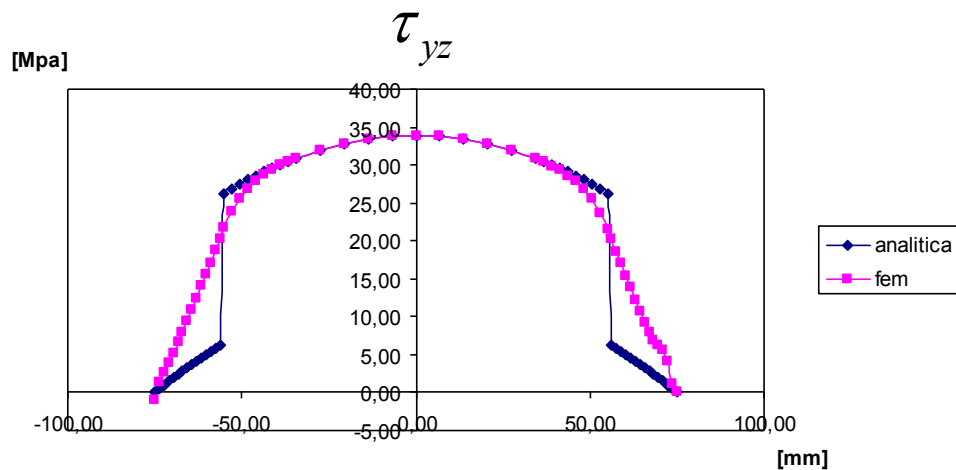


Figura 3.23. Nel caso delle tensioni tangenziali lungo y vi è uno scarto di meno di 1 Mpa tra le due curve. Analizzando le tensioni tangenziali lungo y si può notare la limitazione dell'equazione di Jourawskj nel caso di sezioni complesse. Infatti si può notare come nel punto di giunzione tra ali e anima ci sia una discontinuità della curva analitica, mentre la diminuzione della tensione nel caso reale è più dolce.

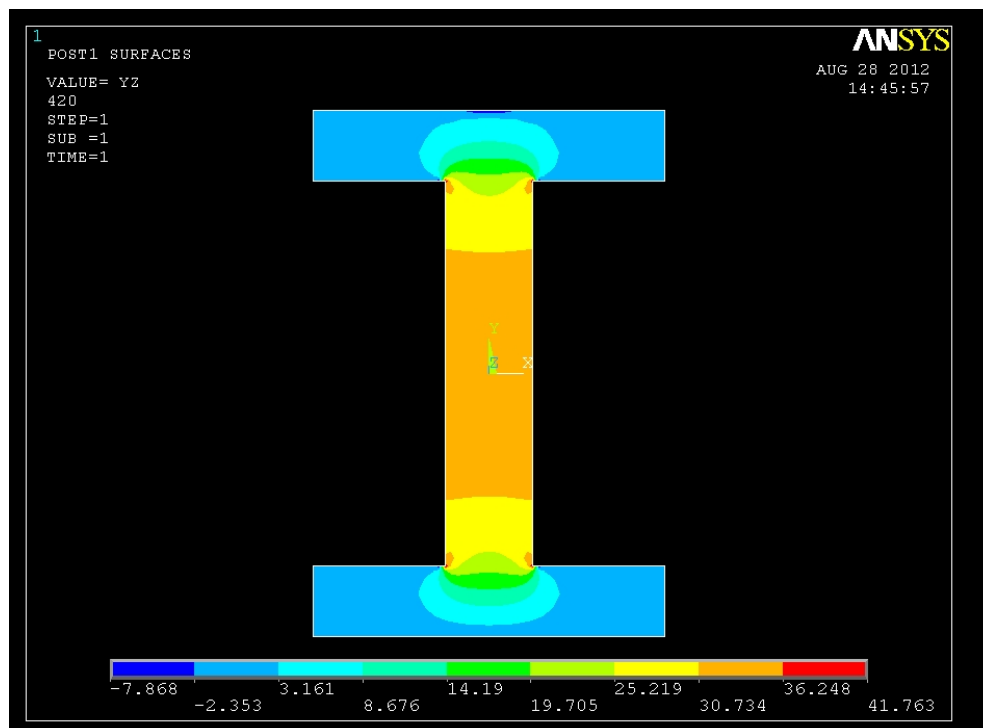


Figura 3.23. Si può notare come nell'anima vi sia una distribuzione delle τ_{yz} totalmente prevedibile, nelle ali una componente pressoché trascurabile, e nella giunzione tra ali e anima vi è una situazione difficile da calcolare analiticamente. Viene inoltre registrato il valore massimo sugli spigoli interni della sezione.

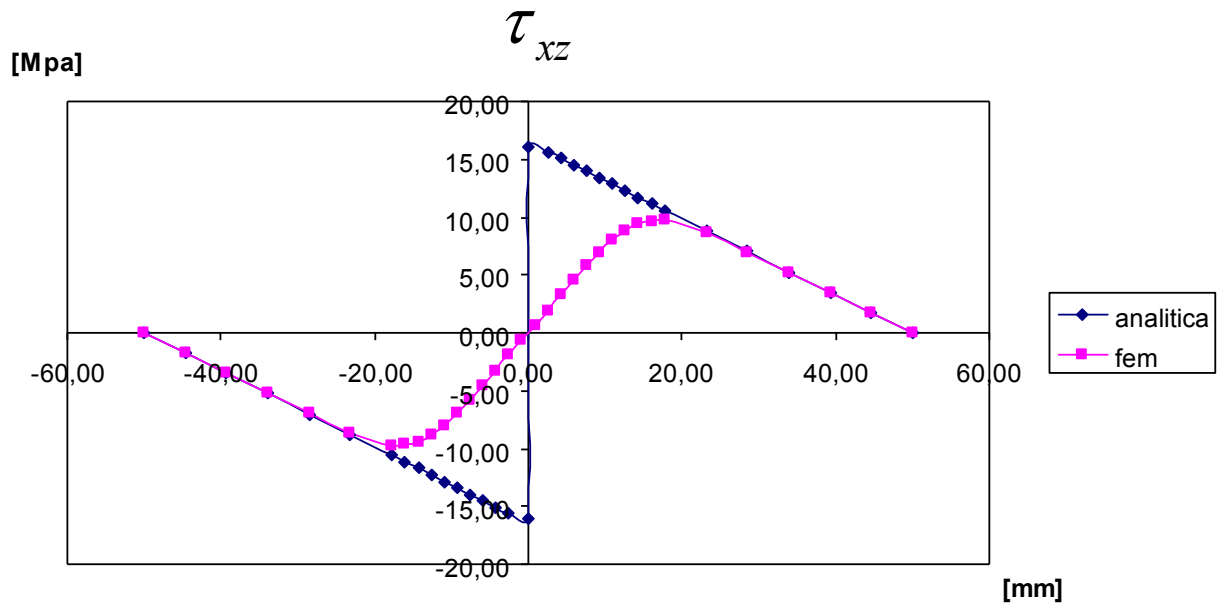


Figura 3.24. Nel caso delle tensioni tangenziali lungo z si sovrastima analiticamente di 5 Mpa. Le due curve nel tratto più esterno delle ali sono molto simili, ma nella zona perturbata dagli spigoli, la formulazione analitica non prende in considerazione l'effetto di questi ultimi.

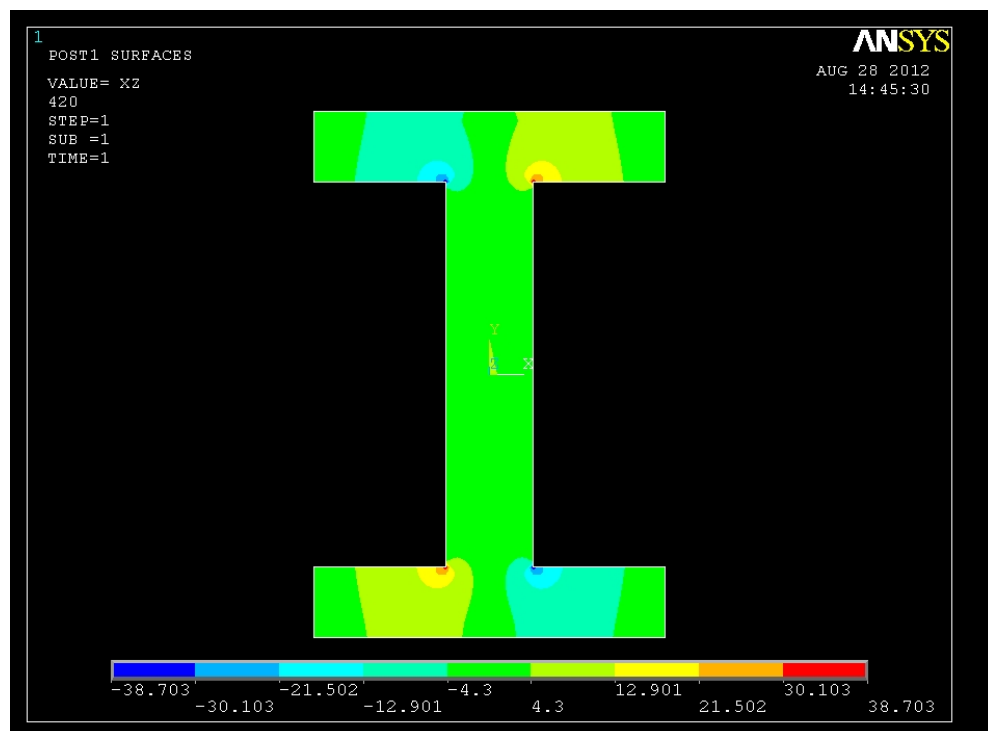


Figura 3.25. Nell'anima vi è un valore pressoché trascurabile della componente in x della tensione tangenziale. Nelle ali viene confermato il diagramma in figura 3.19. Si riesce inoltre a notare come negli spigoli interni si raggiunga il valore massimo.

3.7 SEZIONE V

Lo sforzo normale a flessione calcolato secondo Navier risulta:

$$\sigma = \frac{M}{J_{xx}} y$$

$$M = F \times b = 100000 \text{ [N]} \times (700-560) \text{ [mm]} = 14000 \text{ [Nm]}$$

Tabella 3.4. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavate al fem e messe a confronto con i valori calcolati analiticamente per la sezione ad una distanza di 560 mm dall'incastro.

VALORI CALCOLATI DAL FEM						VALORI ANALITICI		
X_G [mm]	Y_G [mm]	σ_Z [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	σ_Z [Mpa]	S_{xx} [mm ³]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa] ali
0,00	-75,00	-52,25	-0,39	0,00	-53,01	0,00	0,00	
0,00	-73,67	-51,24	1,47	0,00	-52,07	9908,66	0,50	
0,00	-72,33	-50,27	2,94	0,00	-51,13	19646,86	0,99	
0,00	-71,00	-49,25	4,38	0,00	-50,19	29200,00	1,47	
0,00	-69,67	-48,31	5,88	0,00	-49,24	38575,46	1,95	
0,00	-68,33	-47,36	7,41	0,00	-48,30	47780,06	2,41	
0,00	-67,00	-46,42	8,97	0,00	-47,36	56800,00	2,87	
0,00	-65,67	-45,49	10,58	0,00	-46,42	65642,26	3,31	
0,00	-64,33	-44,57	12,23	0,00	-45,47	74313,26	3,75	
0,00	-63,00	-43,67	13,94	0,00	-44,53	82800,00	4,18	
0,00	-61,67	-42,77	15,68	0,00	-43,59	91109,06	4,60	
0,00	-60,33	-41,89	17,45	0,00	-42,65	99246,46	5,01	
0,00	-59,00	-41,03	19,22	0,00	-41,70	107200,00	5,41	
0,00	-57,67	-40,17	20,96	0,00	-40,76	114975,86	5,81	
0,00	-56,33	-39,34	22,63	0,00	-39,82	122579,66	6,19	
0,00	-55,00	-38,51	24,21	0,00	-38,88	130000,00	26,25	
0,00	-52,71	-37,12	26,59	0,00	-37,26	133085,83	26,88	
0,00	-50,42	-35,76	28,47	0,00	-35,64	136039,08	27,47	
0,00	-48,13	-34,41	29,90	0,00	-34,02	138862,30	28,04	
0,00	-45,83	-33,06	30,96	0,00	-32,40	141554,20	28,59	
0,00	-43,54	-31,72	31,77	0,00	-30,78	144113,68	29,10	
0,00	-41,25	-30,37	32,41	0,00	-29,16	146542,97	29,60	
0,00	-38,96	-29,02	32,92	0,00	-27,54	148840,93	30,06	
0,00	-36,67	-27,66	33,35	0,00	-25,92	151006,64	30,50	
0,00	-34,38	-26,29	33,73	0,00	-24,30	153041,99	30,91	
0,00	-27,50	-22,12	34,50	0,00	-19,44	158359,38	31,98	
0,00	-20,63	-17,85	34,88	0,00	-14,58	162495,12	32,82	
0,00	-13,75	-13,44	34,93	0,00	-9,72	165449,22	33,41	
0,00	-6,88	-8,88	34,67	0,00	-4,86	167221,68	33,77	
0,00	0,00	-4,14	34,11	0,00	0,00	167812,50	33,89	
0,00	6,88	0,77	33,29	0,00	4,86	167221,68	33,77	
0,00	13,75	5,88	32,24	0,00	9,72	165449,22	33,41	

0,00	20,63	11,18	30,98	0,00	14,58	162495,12	32,82
0,00	27,50	16,66	29,57	0,00	19,44	158359,38	31,98
0,00	34,38	22,28	28,00	0,00	24,30	153041,99	30,91
0,00	36,67	24,18	27,43	0,00	25,92	151006,64	30,50
0,00	38,96	26,08	26,83	0,00	27,54	148840,93	30,06
0,00	41,25	28,00	26,18	0,00	29,16	146542,97	29,60
0,00	43,54	29,93	25,45	0,00	30,78	144113,68	29,10
0,00	45,83	31,87	24,60	0,00	32,40	141554,20	28,59
0,00	48,13	33,83	23,58	0,00	34,02	138862,30	28,04
0,00	50,42	35,80	22,30	0,00	35,64	136039,08	27,47
0,00	52,71	37,77	20,72	0,00	37,26	133085,83	26,88
0,00	55,00	39,75	18,83	0,00	38,88	130000,00	26,25
0,00	56,33	40,87	17,62	0,00	39,82	122579,66	6,19
0,00	57,67	41,98	16,39	0,00	40,76	114975,86	5,81
0,00	59,00	43,06	15,17	0,00	41,70	107200,00	5,41
0,00	60,33	44,08	14,01	0,00	42,65	99246,46	5,01
0,00	61,67	45,02	12,97	0,00	43,59	91109,06	4,60
0,00	63,00	45,82	12,08	0,00	44,53	82800,00	4,18
0,00	64,33	46,40	11,35	0,00	45,47	74313,26	3,75
0,00	65,67	46,68	10,74	0,00	46,42	65642,26	3,31
0,00	67,00	46,58	10,10	0,00	47,36	56800,00	2,87
0,00	68,33	46,14	9,12	0,00	48,30	47780,06	2,41
0,00	69,67	45,70	7,23	0,00	49,24	38575,46	1,95
0,00	71,00	46,07	3,54	0,00	50,19	29200,00	1,47
0,00	72,33	49,95	-1,94	0,00	51,13	19646,86	0,99
0,00	73,67	68,31	-3,71	0,00	52,07	9908,66	0,50
0,00	75,00	43,16	-12,52	0,00	53,01	0,00	0,00
-50,00	65,00	48,55	0,41	0,03			0,00
-44,64	65,00	48,25	0,38	-1,59			-1,76
-39,29	65,00	48,03	0,56	-3,14			-3,51
-33,93	65,00	47,85	0,83	-4,72			-5,27
-28,57	65,00	47,68	1,24	-6,25			-7,03
-23,21	65,00	47,47	2,09	-7,68			-8,79
-17,86	65,00	47,23	4,00	-8,69			-10,55
-16,07	65,00	47,37	5,05	-8,59			-11,14
-14,29	65,00	47,37	6,06	-8,29			-11,72
-12,50	65,00	47,27	7,14	-7,71			-12,31
-10,83	65,00	47,21	8,06	-6,92			-12,85
-9,17	65,00	47,09	8,87	-5,93			-13,40
-7,50	65,00	46,96	9,58	-4,84			-13,95
-5,83	65,00	46,82	10,15	-3,72			-14,50
-4,17	65,00	46,69	10,59	-2,61			-15,04
-2,50	65,00	46,59	10,89	-1,55			-15,59
-0,83	65,00	46,54	11,05	-0,51			-16,14
0,83	65,00	46,54	11,05	0,51			16,14
2,50	65,00	46,59	10,89	1,55			15,59
4,17	65,00	46,69	10,59	2,61			15,04
5,83	65,00	46,82	10,15	3,72			14,50
7,50	65,00	46,96	9,58	4,84			13,95
9,17	65,00	47,09	8,87	5,93			13,40
10,83	65,00	47,21	8,06	6,92			12,85
12,50	65,00	47,27	7,14	7,71			12,31
14,29	65,00	47,37	6,06	8,29			11,72
16,07	65,00	47,37	5,05	8,59			11,14

17,86	65,00	47,23	4,00	8,69	10,55
23,21	65,00	47,47	2,09	7,68	8,79
28,57	65,00	47,68	1,24	6,25	7,03
33,93	65,00	47,85	0,83	4,72	5,27
39,29	65,00	48,03	0,56	3,14	3,51
44,64	65,00	48,25	0,38	1,59	1,76
50,00	65,00	48,55	0,41	-0,03	0,00

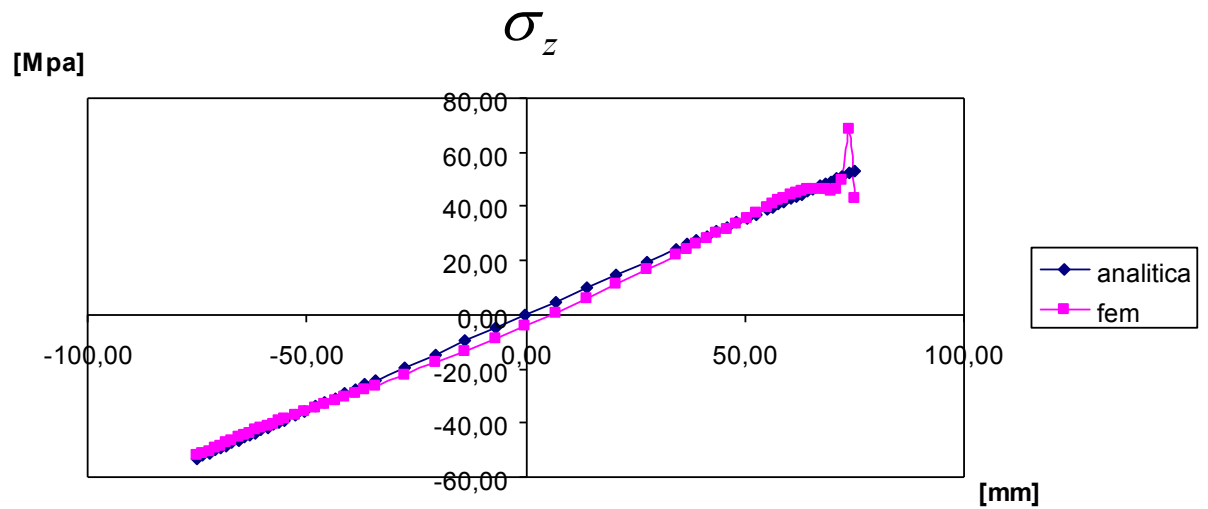


Figura 3.26. In questo grafico si nota uno scostamento anomalo delle due curve, questo è dovuto alla vicinanza dell'area analizzata alla sezione in cui vi è applicato il carico concentrato. Il penultimo nodo analizzato fa registrare un valore di 68,31 Mpa

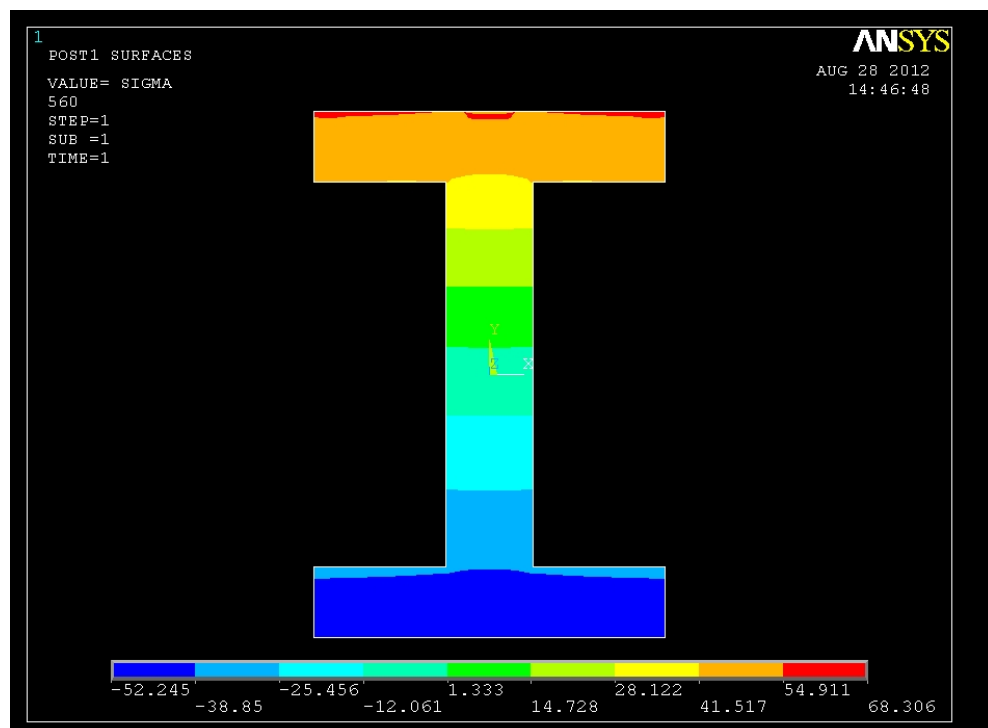


Figura 3.27. Questo contour plot conferma la vicinanza dell'area analizzata al carico, in quanto nella superficie superiore lo sforzo è maggiore rispetto in quella inferiore. Teoricamente i due valori dovrebbero coincidere.

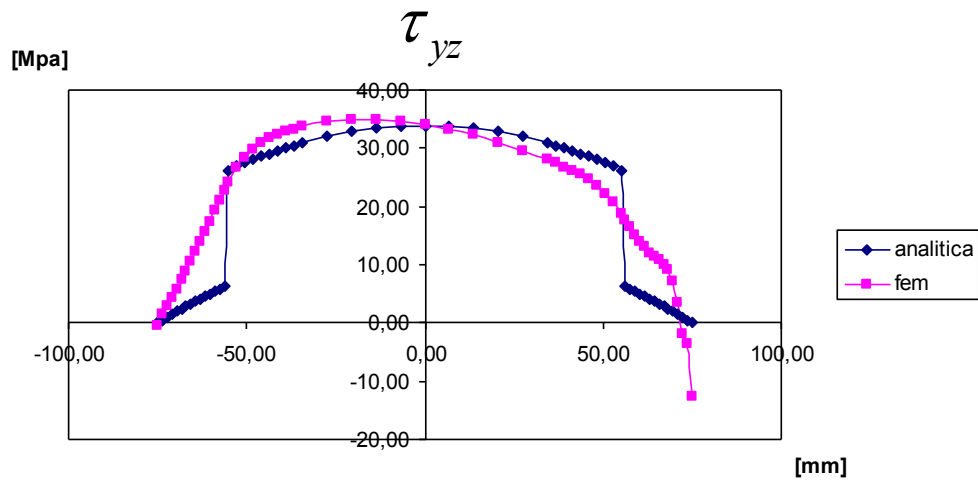


Figura 3.27. Il comportamento della curva calcolata dal fem risulta asimmetrico, non vi è congruenza con i valori analitici e vi è una sottostima di oltre 1 Mpa del valore di tensione massimo calcolato analiticamente. Tutto ciò è attribuibile alla vicinanza del carico all'area studiata.

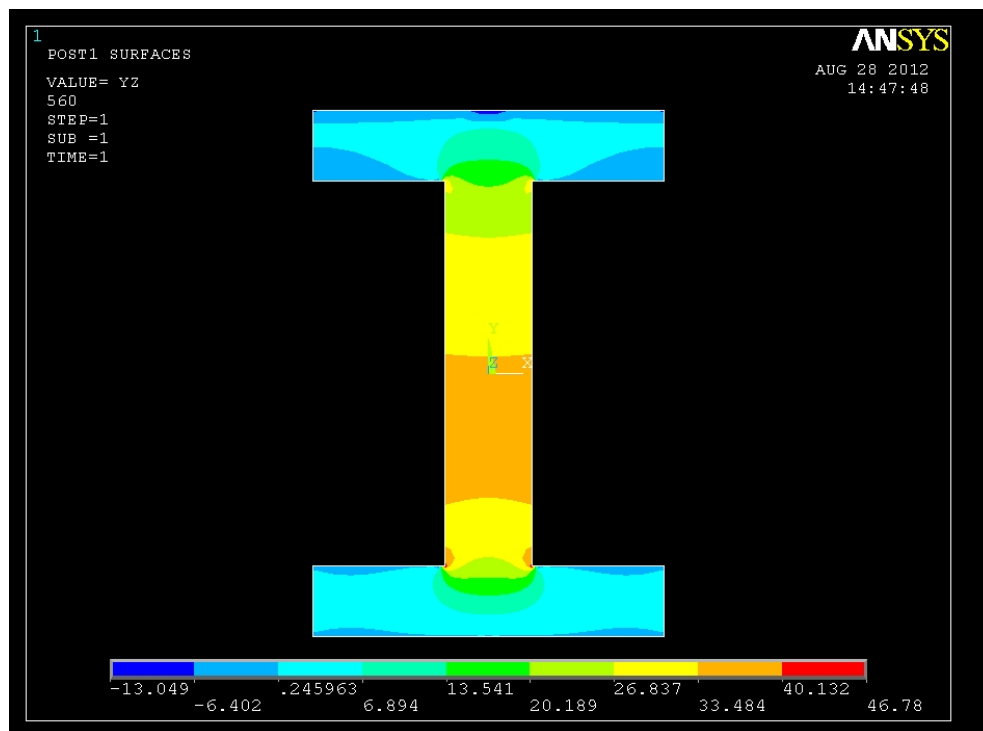


Figura 3.28. Si riesce facilmente a notare che la zona dell'anima sottostante al baricentro è maggiormente sollecitata rispetto a quella superiore. Ciò conferma il grafico visto in figura 3.27.

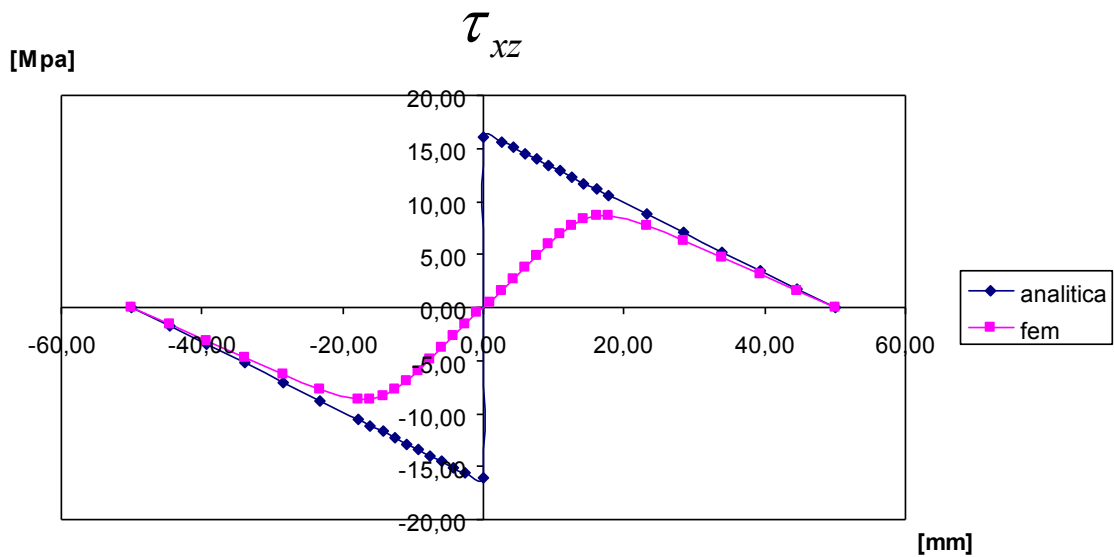


Figura 3.29. Nel caso delle tensioni tangenziali lungo z vi è una sovrastima di circa 5 Mpa. Le due curve nel tratto più esterno delle ali sono molto simile, ma nella zona perturbata dagli spigoli dovuti alla giunzione con l'anima, la formulazione analitica non prende in considerazione l'incidenza di tali spigoli.

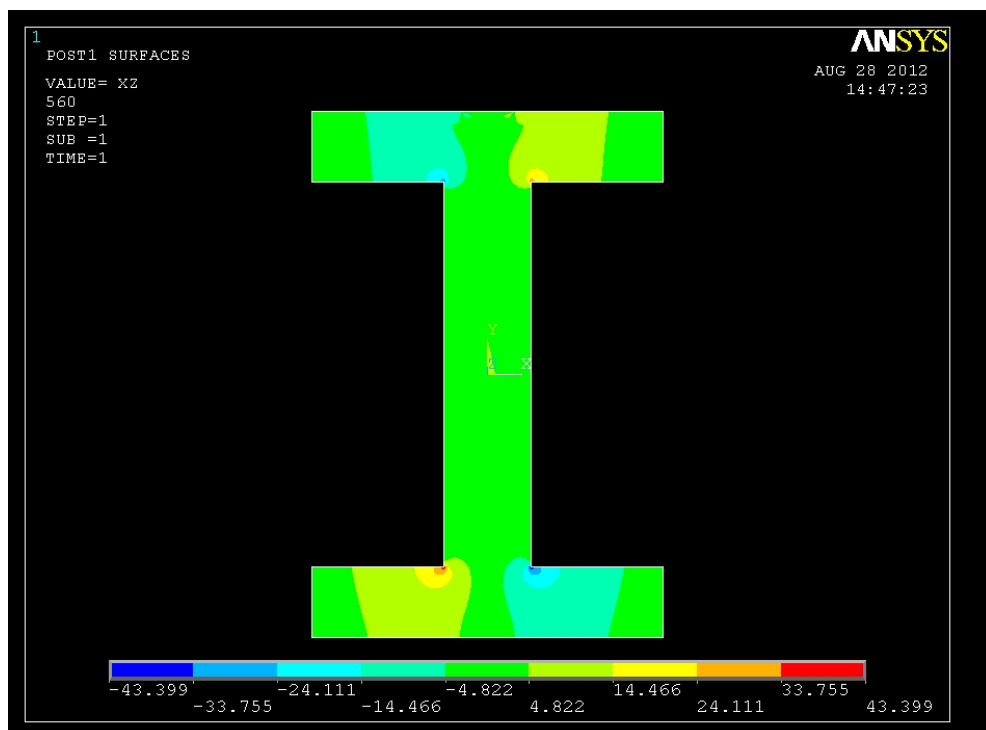


Figura 3.30. Nell'anima vi è un valore pressoché trascurabile della componente in x della tensione tangenziale. Nelle ali viene confermato il diagramma in figura 3.19. Si riesce inoltre a notare come negli spigoli interni si raggiunga il valore massimo, viene maggiormente evidenziato dell'ala inferiore.

3.8 SEZIONE VI

Lo sforzo normale a flessione calcolato secondo Navier risulta nullo in quanto si sta considerando l'ultima sezione, in cui è applicato il carico e quindi il braccio risulta nullo.

Tabella 3.4. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavate al fem e messe a confronto con i valori calcolati analiticamente per la sezione ad una distanza di 700 mm dall'incastro.

VALORI CALCOLATI DAL FEM						VALORI ANALITICI		
X_G [mm]	Y_G [mm]	σ_Z [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	σ_Z [Mpa]	S_{xx} [mm ³]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa] ali
0,00	-75,00	2,01	-0,65	0,00	0,00	0,00	0,00	
0,00	-73,67	-0,38	0,11	0,00	0,00	9908,66	0,50	
0,00	-72,33	2,05	-0,95	0,00	0,00	19646,86	0,99	
0,00	-71,00	0,49	-0,97	0,00	0,00	29200,00	1,47	
0,00	-69,67	0,73	-1,12	0,00	0,00	38575,46	1,95	
0,00	-68,33	0,76	-1,19	0,00	0,00	47780,06	2,41	
0,00	-67,00	0,75	-1,21	0,00	0,00	56800,00	2,87	
0,00	-65,67	0,73	-1,17	0,00	0,00	65642,26	3,31	
0,00	-64,33	0,72	-1,08	0,00	0,00	74313,26	3,75	
0,00	-63,00	0,72	-0,95	0,00	0,00	82800,00	4,18	
0,00	-61,67	0,73	-0,77	0,00	0,00	91109,06	4,60	
0,00	-60,33	0,74	-0,56	0,00	0,00	99246,46	5,01	
0,00	-59,00	0,76	-0,33	0,00	0,00	107200,00	5,41	
0,00	-57,67	0,78	-0,69	0,00	0,00	114975,86	5,81	
0,00	-56,33	0,80	0,20	0,00	0,00	122579,66	6,19	
0,00	-55,00	0,82	0,46	0,00	0,00	130000,00	26,25	
0,00	-52,71	0,86	0,87	0,00	0,00	133085,83	26,88	
0,00	-50,42	0,90	1,20	0,00	0,00	136039,08	27,47	
0,00	-48,13	0,92	1,44	0,00	0,00	138862,30	28,04	
0,00	-45,83	0,92	1,59	0,00	0,00	141554,20	28,59	
0,00	-43,54	0,91	1,69	0,00	0,00	144113,68	29,10	
0,00	-41,25	0,93	1,75	0,00	0,00	146542,97	29,60	
0,00	-38,96	0,92	1,81	0,00	0,00	148840,93	30,06	
0,00	-36,67	0,89	1,85	0,00	0,00	151006,64	30,50	
0,00	-34,38	0,86	1,91	0,00	0,00	153041,99	30,91	
0,00	-27,50	0,85	2,09	0,00	0,00	158359,38	31,98	
0,00	-20,63	0,85	2,37	0,00	0,00	162495,12	32,82	
0,00	-13,75	0,86	2,75	0,00	0,00	165449,22	33,41	
0,00	-6,88	0,88	3,25	0,00	0,00	167221,68	33,77	
0,00	0,00	0,88	3,90	0,00	0,00	167812,50	33,89	
0,00	6,88	0,86	4,77	0,00	0,00	167221,68	33,77	
0,00	13,75	0,80	5,94	0,00	0,00	165449,22	33,41	
0,00	20,63	0,63	7,54	0,00	0,00	162495,12	32,82	

0,00	27,50	0,34	9,70	0,00	0,00	158359,38	31,98
0,00	34,38	-0,21	12,66	0,00	0,00	153041,99	30,91
0,00	36,67	-0,55	13,73	0,00	0,00	151006,64	30,50
0,00	38,96	-1,03	15,06	0,00	0,00	148840,93	30,06
0,00	41,25	-1,49	16,49	0,00	0,00	146542,97	29,60
0,00	43,54	-2,18	18,11	0,00	0,00	144113,68	29,10
0,00	45,83	-3,11	19,96	0,00	0,00	141554,20	28,59
0,00	48,13	-4,33	22,11	0,00	0,00	138862,30	28,04
0,00	50,42	-5,90	24,68	0,00	0,00	136039,08	27,47
0,00	52,71	-7,78	27,86	0,00	0,00	133085,83	26,88
0,00	55,00	-9,95	31,75	0,00	0,00	130000,00	26,25
0,00	56,33	-11,48	34,67	0,00	0,00	122579,66	6,19
0,00	57,67	-13,26	37,89	0,00	0,00	114975,86	5,81
0,00	59,00	-15,35	41,59	0,00	0,00	107200,00	5,41
0,00	60,33	-17,85	45,86	0,00	0,00	99246,46	5,01
0,00	61,67	-20,85	50,80	0,00	0,00	91109,06	4,60
0,00	63,00	-24,44	56,55	0,00	0,00	82800,00	4,18
0,00	64,33	-28,74	63,24	0,00	0,00	74313,26	3,75
0,00	65,67	-33,76	71,03	0,00	0,00	65642,26	3,31
0,00	67,00	-39,43	80,09	0,00	0,00	56800,00	2,87
0,00	68,33	-45,61	90,37	0,00	0,00	47780,06	2,41
0,00	69,67	-51,34	101,50	0,00	0,00	38575,46	1,95
0,00	71,00	-48,30	112,46	0,00	0,00	29200,00	1,47
0,00	72,33	-27,60	113,27	0,00	0,00	19646,86	0,99
0,00	73,67	-31,43	69,58	0,00	0,00	9908,66	0,50
0,00	75,00	1059,00	148,67	0,00	0,00	0,00	0,00
-50,00	65,00	-22,31	66,85	0,17			0,00
-44,64	65,00	-16,98	44,81	2,67			-1,76
-39,29	65,00	-13,22	39,61	3,85			-3,51
-33,93	65,00	-13,67	38,90	3,64			-5,27
-28,57	65,00	-13,99	38,97	2,50			-7,03
-23,21	65,00	-13,76	39,02	1,38			-8,79
-17,86	65,00	-14,88	39,98	1,38			-10,55
-16,07	65,00	-17,08	40,90	3,09			-11,14
-14,29	65,00	-18,30	42,58	4,55			-11,72
-12,50	65,00	-19,34	44,40	6,58			-12,31
-10,83	65,00	-20,66	46,86	8,70			-12,85
-9,17	65,00	-22,38	49,95	10,33			-13,40
-7,50	65,00	-24,38	53,64	11,20			-13,95
-5,83	65,00	-26,52	57,79	10,94			-14,50
-4,17	65,00	-28,62	61,91	9,27			-15,04
-2,50	65,00	-30,31	65,25	6,23			-15,59
-0,83	65,00	-31,25	67,13	2,20			-16,14
0,83	65,00	-31,25	67,13	-2,20			16,14
2,50	65,00	-30,31	65,25	-6,23			15,59
4,17	65,00	-28,62	61,91	-9,27			15,04
5,83	65,00	-26,52	57,79	-10,94			14,50
7,50	65,00	-24,38	53,64	-11,20			13,95
9,17	65,00	-22,38	49,95	-10,33			13,40
10,83	65,00	-20,66	46,86	-8,70			12,85
12,50	65,00	-19,34	44,40	-6,58			12,31
14,29	65,00	-18,30	42,58	-4,55			11,72
16,07	65,00	-17,08	40,90	-3,09			11,14
17,86	65,00	-14,88	39,98	-1,38			10,55

23,21	65,00	-13,76	39,02	-1,38	8,79
28,57	65,00	-13,99	38,97	-2,50	7,03
33,93	65,00	-13,67	38,90	-3,64	5,27
39,29	65,00	-13,22	39,61	-3,85	3,51
44,64	65,00	-16,98	44,81	-2,67	1,76
50,00	65,00	-22,31	66,85	-0,17	0,00

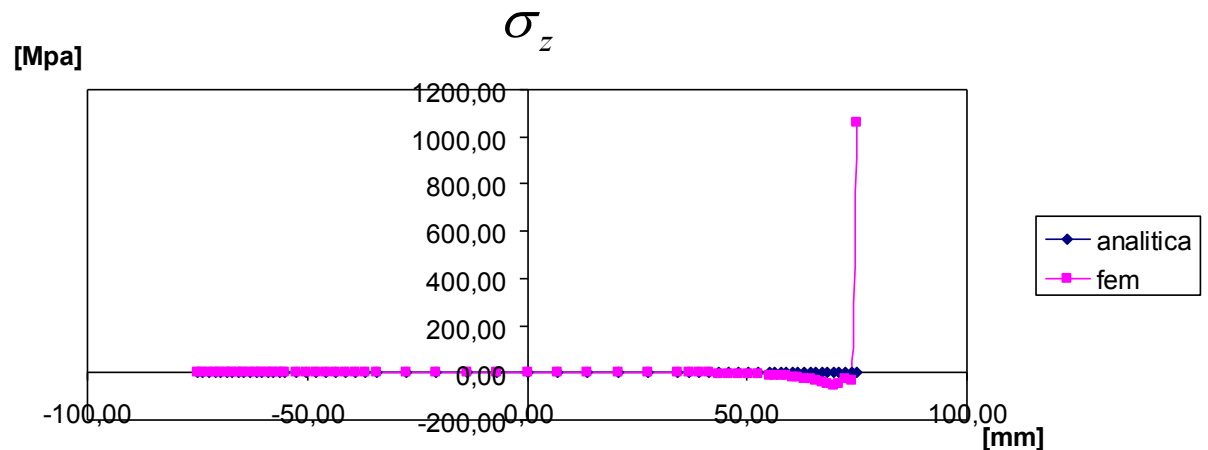


Figura 3.31. In questo caso si ha momento flettente nullo e quindi il relativo sforzo normale lo sarà a sua volta. I valori delle due curve coincidono a meno di uno scarto di 1 Mpa. A causa della vicinanza al carico nella parte superiore dell'area vengono registrati dal fem valori totalmente incompatibili con la realtà.

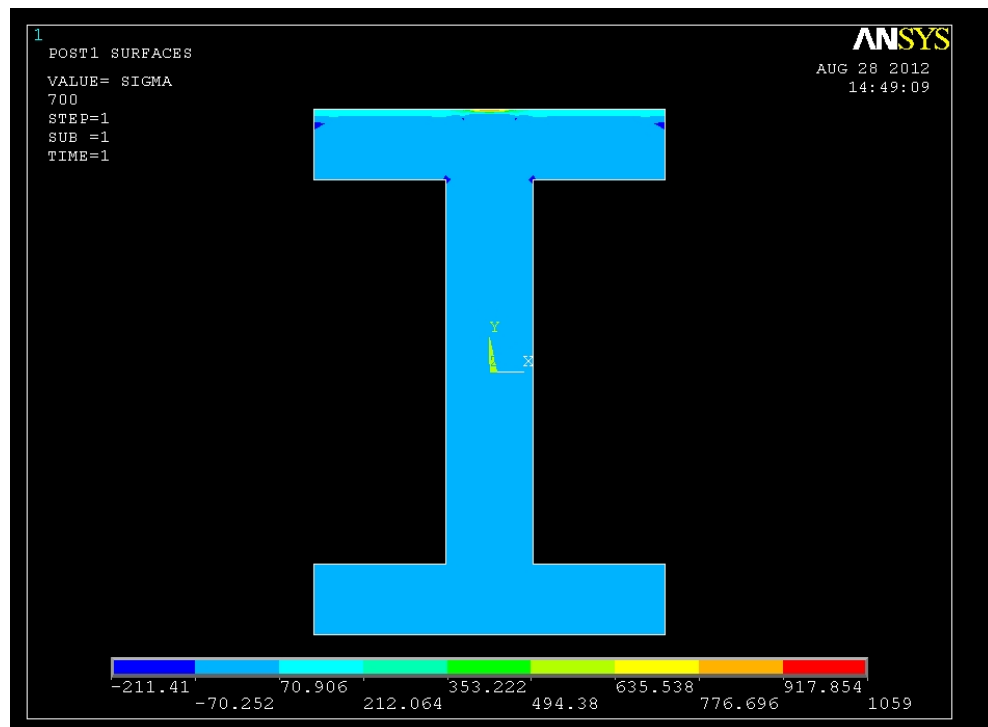


Figura 3.32. Viene registrato un valore pressoché costante dello sforzo normale dovuto a flessione totalmente incongruente con le circostanze. Da notare un incremento del valore nella superficie estrema superiore, dove vi è applicato il carico concentrato.

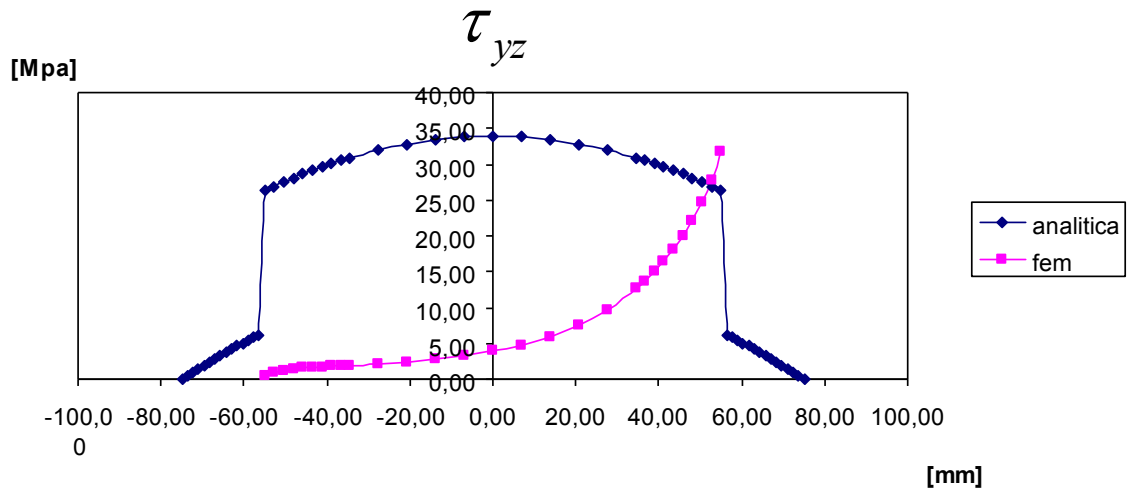


Figura 3.33. Vengono registrati valori completamente inverosimile il che conferma l'incapacità del programma di calcolo ad elementi finiti di lavorare dei pressi di zone laddove sono presenti carichi esterni.

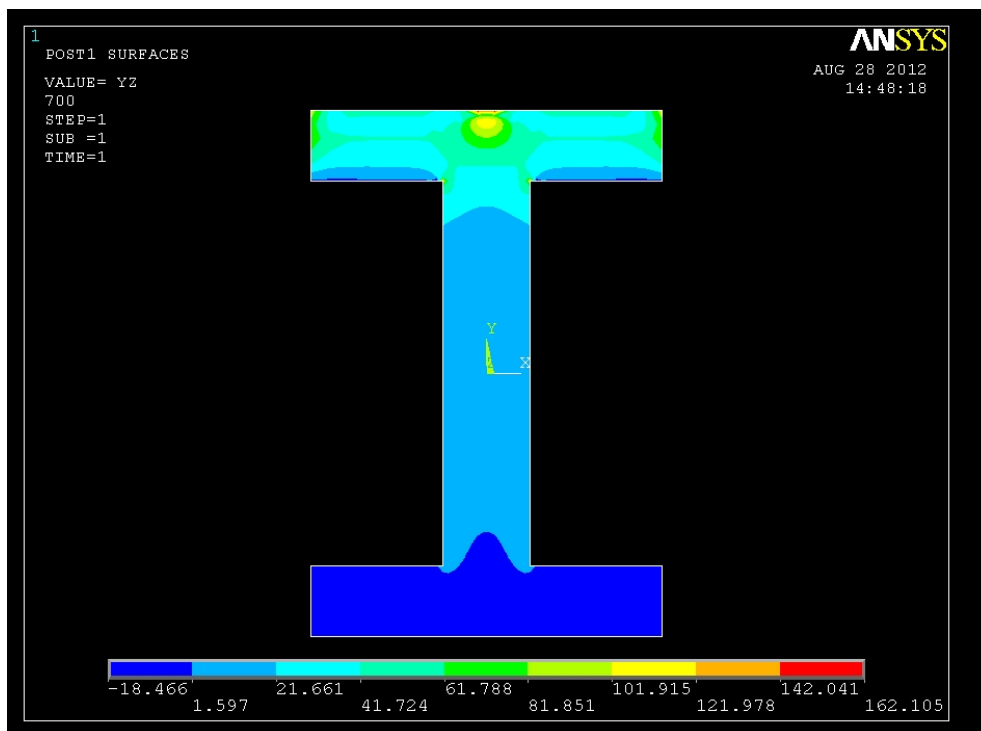


Figura 3.34. Distribuzione delle tensioni tangenziali lungo y.

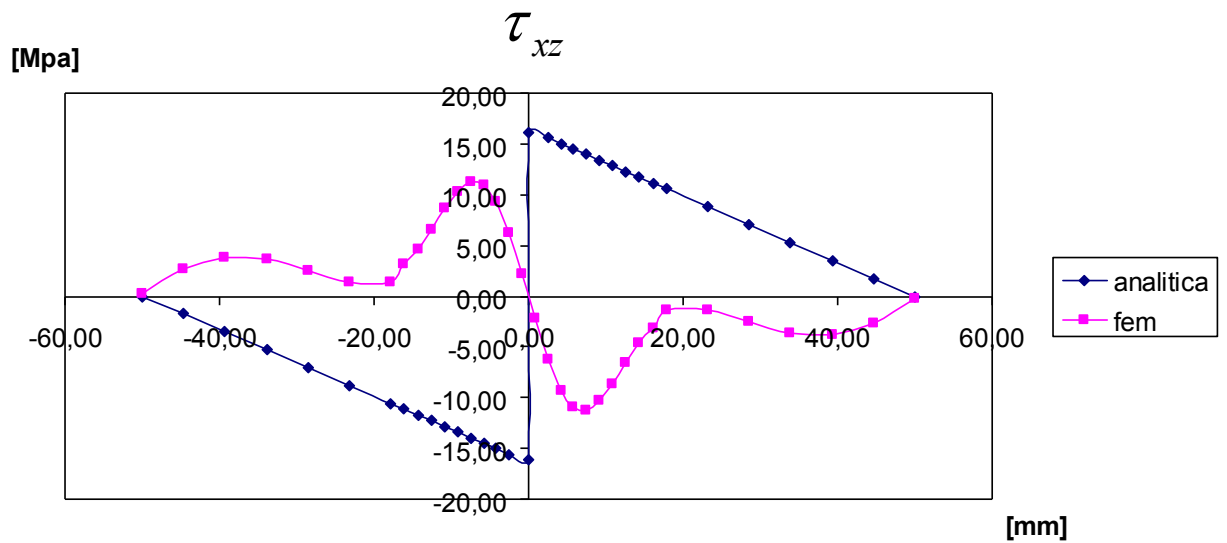


Figura 3.35. Lungo le ali vi è un comportamento anomalo delle tensioni tangenziali lungo z . Del tutto giustificato in quanto sopra l'ala presa in considerazione viene applicato il carico.

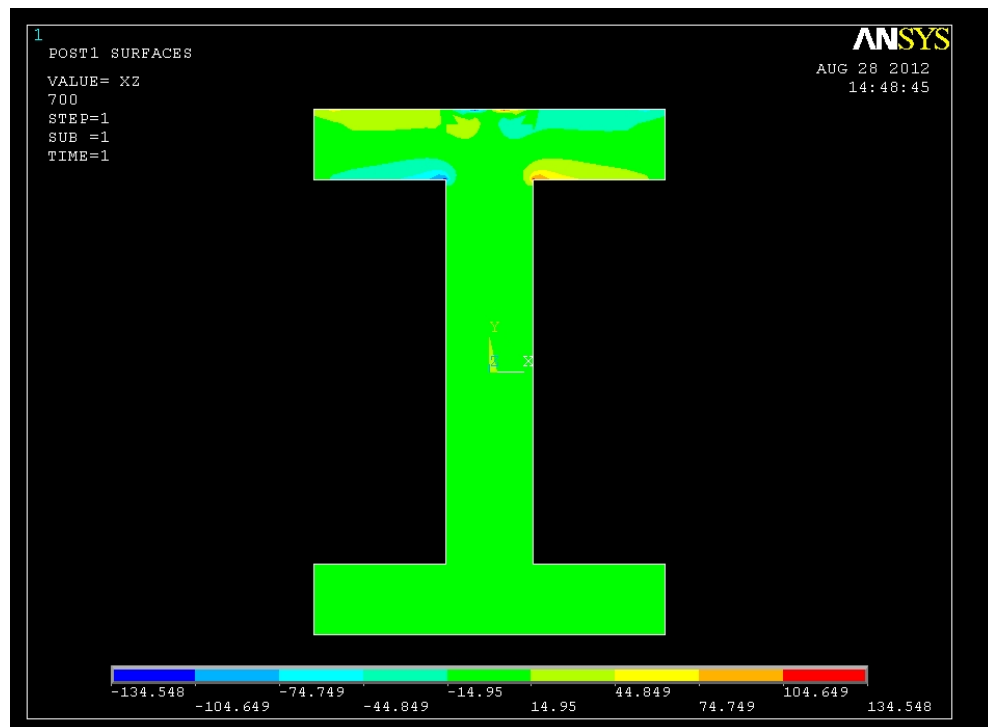


Figura 3.36. Il fenomeno visto nel diagramma di figura 3.35 viene evidenziato ancor meglio qui, dove si vede una distribuzione perturbata delle tensioni nell'ala in cui viene applicata la Forza concentrata.

CAPITOLO 4

4. Trave soggetta a momento torcente

4.1 Definizione del carico

Partendo dal modello geometrico e numerico precedentemente definito ora si deve definire il tipo di vincoli e di carichi.

Come prima cosa si definisce l'incastro per un' estremità della trave eliminando i 3 gradi di libertà di tutti i nodi dell'area iniziale: *Preprocessor /Loads/ Define Loads/ Apply/ Structural /displacement /on areas*.

Ora per simulare un momento torcente è necessario applicare sulle linee alle estremità dell'ultima sezione della trave due forze di modulo uguale e verso opposto. La suddivisione delle forze sui singoli nodi dello spigolo superiore ed inferiore rende l'applicazione del carico più realistico. Una volta selezionati i nodi della linea suddetta dal menù *Select* si applica la forza ai nodi: *Preprocessor/Loads/Define Loads/Apply/Structural/Force/On nodes*. È importante prestare attenzione a immettere il valore assoluto della forza diviso il numero di nodi e il braccio, che in questo caso è 75mm.

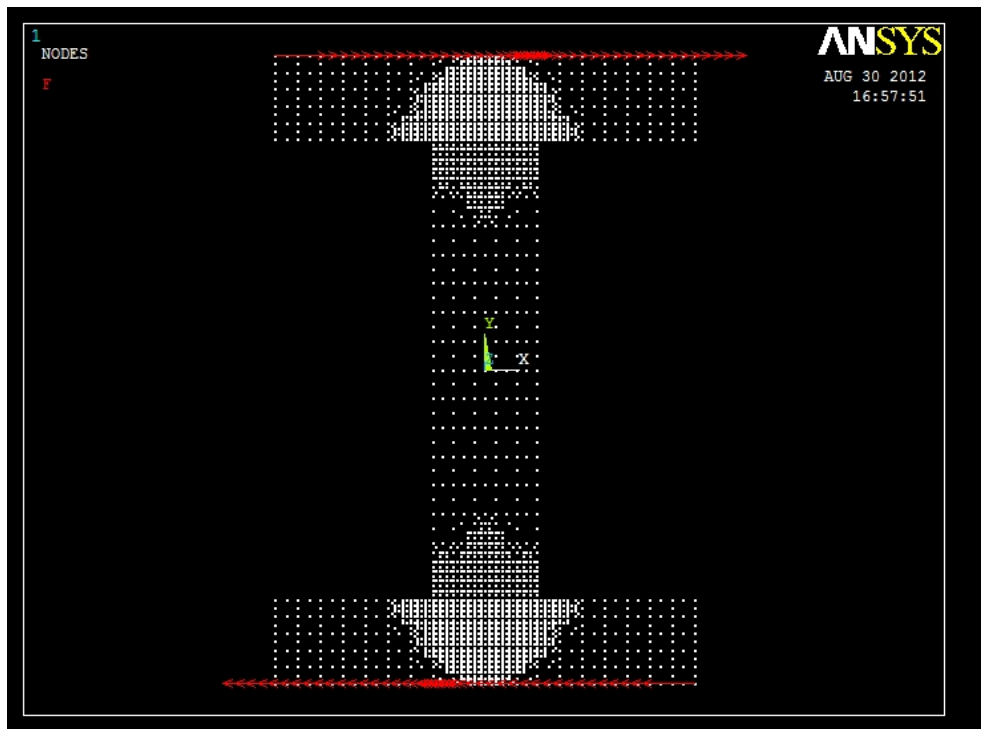


Figura 4.1. *Applicazione del carico alle due estremità dell'ultima sezione della trave. Le due forze sono di uguale intensità ma con verso opposto. Ciò simula un momento torcente.*

Ora si procede con la soluzione: *Solution/Solve/Current LS*. Per ottenere delle sollecitazioni come risultati, il programma converte gli spostamenti nodali degli elementi in sollecitazioni.

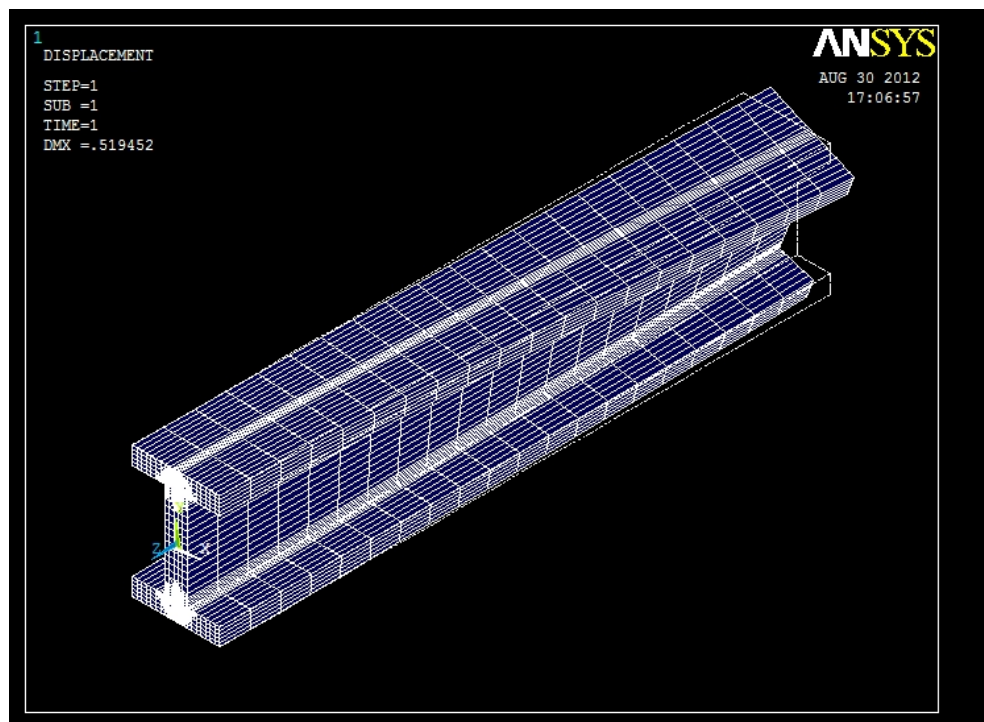


Figura 4.2. Deformata della trave soggetta a momento torcente.

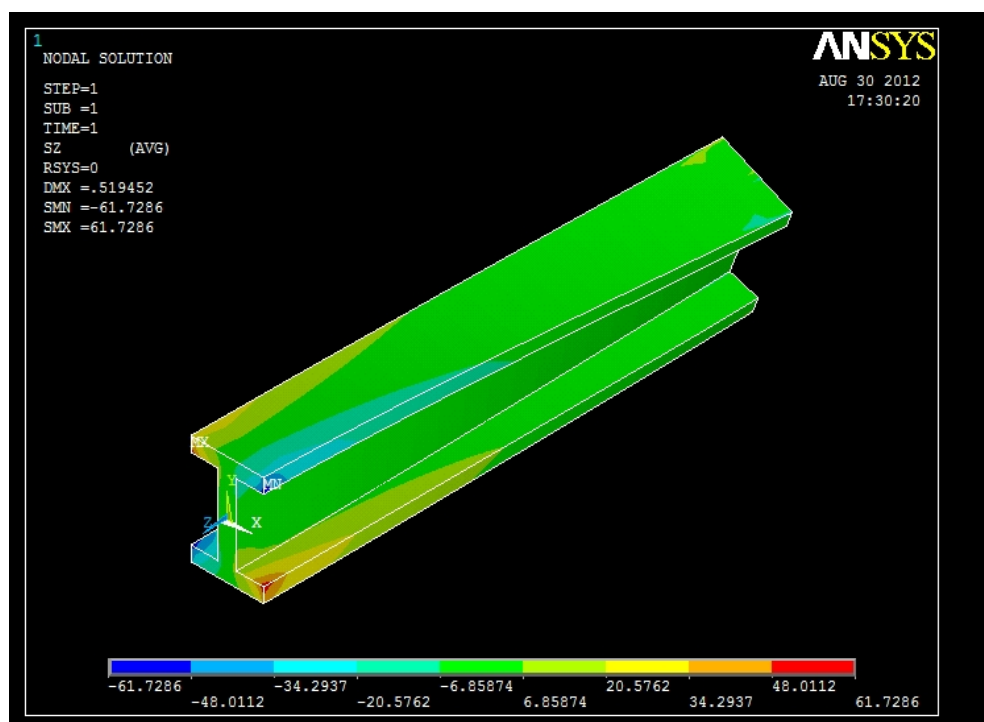


Figura 4.3. Distribuzione dello sforzo normale in direzione z dovuto al momento torcente. Si può notare come i punti più sollecitati siano quelli sugli spigoli all'incastro. In realtà tale situazione di sforzo normale è dovuta all'applicazione di due forze opposte anziché un momento torcente vero e proprio.

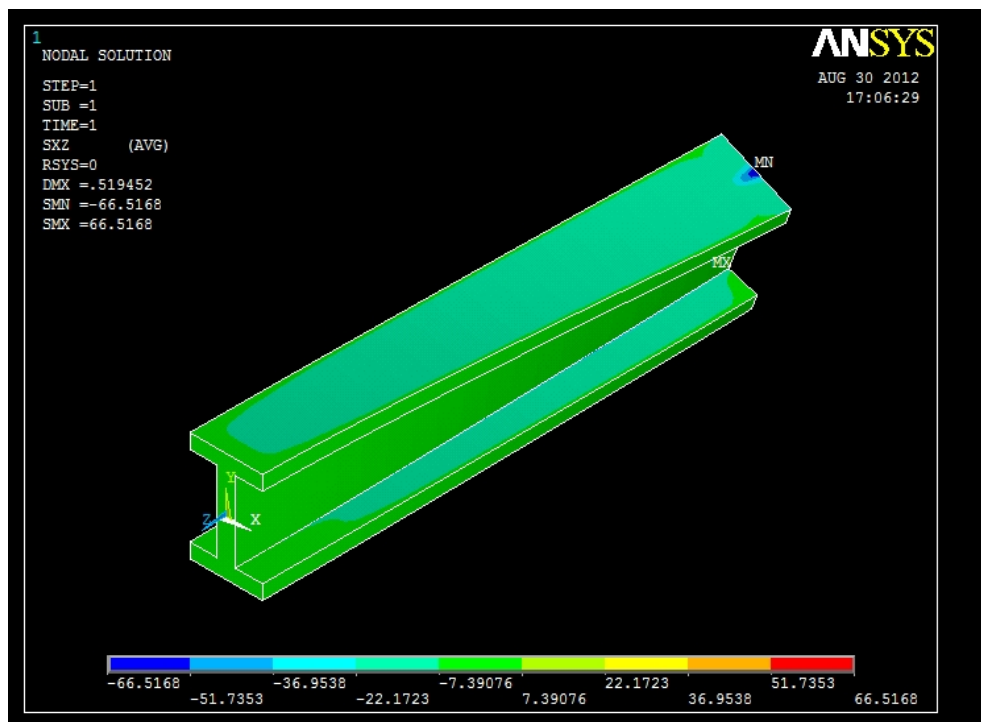


Figura 4.4. Si può notare che le tensioni tangenziali τ_{zx} assumono valori significativi sulle superfici delle ali.

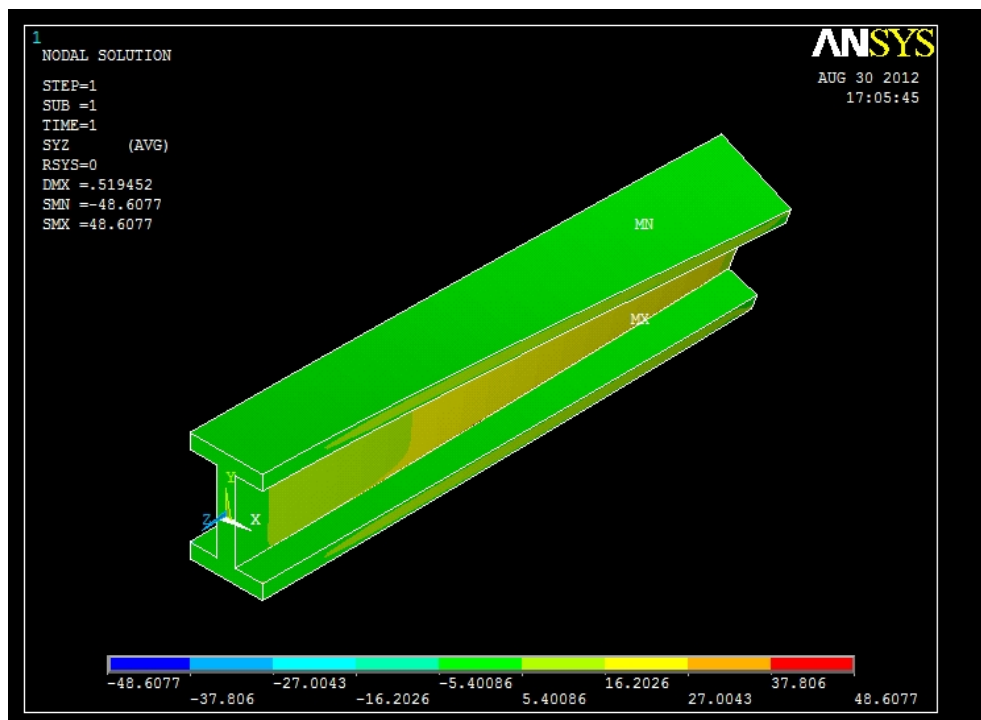


Figura 4.5. Le tensioni tangenziali τ_{zy} assumono valori significativi sulla superficie dell'anima.

Per confrontare i risultati ottenuti analiticamente a quelli definiti con *Ansys* si vanno ad analizzare sei sezioni equispaziate lungo la lunghezza della trave; per comodità si è scelta una distanza di 140 mm tra una sezione e l'altra, partendo a numerarle dalla sezione dove è presente l'incastro.

In ogni sezione è stato scelto un percorso (*path*) nel quale viene fatta l'acquisizione delle sollecitazioni significative dei nodi lungo la *path*.

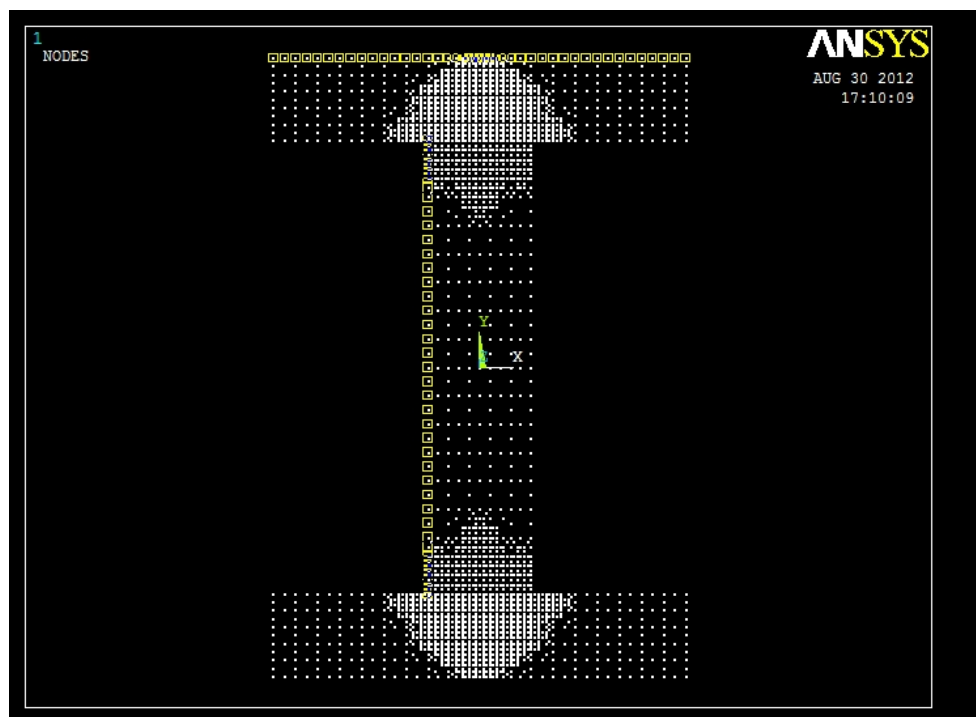


Figura 4.6. *Path* utilizzato in tutte le sezioni per lo studio della trave soggetta a momento torcente.

4.2 CALCOLO ANALITICO

Viene utilizzato il metodo dell'analogia fluidodinamica per lo studio delle tensioni dovute alla torsione. Si fa uso della semplificazione di Prandtl:

$$\tau = \frac{M_t}{J_t} t$$

$$J_t = \frac{1}{3} \sum_i L_i t_i^3 = \frac{1}{3} \left[(A * t_1^3) * 2 + (B - t_1) * t_2^3 \right] = \frac{1}{3} \left[(100 * 20^3) * 2 + 130 * 25^3 \right] = 1210417 [mm^4]$$

t = spessore rettangolo preso in considerazione;

J_t = momento d'inerzia di tipo polare;

Nel caso dello studio delle sollecitazioni lungo le ali si ha:

$$\tau_{xz} = \frac{M_t}{J_t} t_1 = \frac{1000000 [Nmm]}{1210417 [mm^4]} 20 [mm] = 16.52 [Mpa]$$

Per quanto riguarda lo studio dell'anima si ha:

$$\tau_{yz} = \frac{M_t}{J_t} t_2 = \frac{1000000 [Nmm]}{1210417 [mm^4]} 25 [mm] = 20.65 [Mpa]$$

La procedura e i risultati analitici sono gli stessi per tutte le sezioni della trave analizzate.

4.3 SEZIONE I

La prima sezione analizzata è quella in cui è presente l'incastro, e quindi tutti i nodi non hanno alcun grado di libertà. Ci si aspettano quindi valori inverosimili registrati dal *fem*.

Tabella 4.1. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavate al *fem*, messe a confronto con i valori calcolati analiticamente per la sezione iniziale in cui è presente l'incastro.

VALORI CALCOLATI AL FEM				VALORI ANALITICI	
X_G [mm]	Y_G [mm]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]
-12,50	-55,00	-0,23	0,69	-20,65	
-12,50	-53,85	-0,32	0,73	-20,65	
-12,50	-52,71	-0,41	0,77	-20,65	
-12,50	-51,56	-0,57	0,78	-20,65	
-12,50	-50,42	-0,74	0,80	-20,65	
-12,50	-49,27	-0,82	0,79	-20,65	
-12,50	-48,13	-0,89	0,79	-20,65	
-12,50	-46,98	-0,98	0,74	-20,65	
-12,50	-45,83	-1,07	0,68	-20,65	
-12,50	-43,54	-1,11	0,78	-20,65	
-12,50	-41,25	-1,14	0,88	-20,65	
-12,50	-37,81	-1,18	0,83	-20,65	
-12,50	-34,38	-1,22	0,78	-20,65	
-12,50	-30,94	-1,21	0,69	-20,65	
-12,50	-27,50	-1,21	0,60	-20,65	
-12,50	-24,06	-1,19	0,52	-20,65	
-12,50	-20,63	-1,18	0,43	-20,65	
-12,50	-17,19	-1,16	0,36	-20,65	
-12,50	-13,75	-1,14	0,28	-20,65	
-12,50	-10,31	-1,13	0,21	-20,65	
-12,50	-6,88	-1,12	0,14	-20,65	
-12,50	-3,44	-1,12	0,07	-20,65	
-12,50	0,00	-1,11	0,00	-20,65	
-12,50	3,44	-1,12	-0,07	-20,65	
-12,50	6,88	-1,12	-0,14	-20,65	
-12,50	10,31	-1,13	-0,21	-20,65	
-12,50	13,75	-1,14	-0,28	-20,65	
-12,50	17,19	-1,16	-0,36	-20,65	
-12,50	20,63	-1,18	-0,43	-20,65	
-12,50	24,06	-1,19	-0,52	-20,65	
-12,50	27,50	-1,21	-0,60	-20,65	
-12,50	30,94	-1,21	-0,69	-20,65	

-12,50	34,38	-1,22	-0,78	-20,65	
-12,50	37,81	-1,18	-0,83	-20,65	
-12,50	41,25	-1,14	-0,88	-20,65	
-12,50	43,54	-1,11	-0,78	-20,65	
-12,50	45,83	-1,07	-0,68	-20,65	
-12,50	46,98	-0,98	-0,74	-20,65	
-12,50	48,13	-0,89	-0,79	-20,65	
-12,50	49,27	-0,82	-0,79	-20,65	
-12,50	50,42	-0,74	-0,80	-20,65	
-12,50	51,56	-0,57	-0,78	-20,65	
-12,50	52,71	-0,41	-0,77	-20,65	
-12,50	53,85	-0,32	-0,73	-20,65	
-12,50	55,00	-0,23	-0,69	-20,65	
-50,00	75,00	3,09	-6,08		-16,52
-47,32	75,00	2,70	-5,52		-16,52
-44,64	75,00	2,31	-4,96		-16,52
-41,96	75,00	2,17	-5,06		-16,52
-39,29	75,00	2,03	-5,16		-16,52
-36,61	75,00	1,91	-4,90		-16,52
-33,93	75,00	1,78	-4,65		-16,52
-31,25	75,00	1,67	-4,38		-16,52
-28,57	75,00	1,56	-4,12		-16,52
-25,89	75,00	1,45	-3,88		-16,52
-23,21	75,00	1,35	-3,64		-16,52
-20,54	75,00	1,23	-3,43		-16,52
-17,86	75,00	1,12	-3,23		-16,52
-15,18	75,00	0,97	-3,05		-16,52
-12,50	75,00	0,82	-2,87		-16,52
-10,00	75,00	0,59	-2,71		-16,52
-7,50	75,00	0,37	-2,55		-16,52
-5,83	75,00	0,18	-2,42		-16,52
-4,17	75,00	-0,49	-2,30		-16,52
-3,33	75,00	0,59	-2,25		-16,52
-2,50	75,00	0,12	-2,20		-16,52
-1,67	75,00	0,10	-2,26		-16,52
-0,83	75,00	0,86	-2,32		-16,52
0,00	75,00	-0,42	-2,32		-16,52
0,83	75,00	-0,86	-2,32		-16,52
1,67	75,00	-0,10	-2,26		-16,52
2,50	75,00	-0,12	-2,20		-16,52
3,33	75,00	-0,59	-2,25		-16,52
4,17	75,00	0,49	-2,30		-16,52
5,83	75,00	-0,18	-2,42		-16,52
7,50	75,00	-0,37	-2,55		-16,52
10,00	75,00	-0,59	-2,71		-16,52
12,50	75,00	-0,82	-2,87		-16,52
15,18	75,00	-0,97	-3,05		-16,52
17,86	75,00	-1,12	-3,23		-16,52
20,54	75,00	-1,23	-3,43		-16,52
23,21	75,00	-1,35	-3,64		-16,52
25,89	75,00	-1,45	-3,88		-16,52
28,57	75,00	-1,56	-4,12		-16,52
31,25	75,00	-1,67	-4,38		-16,52
33,93	75,00	-1,78	-4,65		-16,52

36,61	75,00	-1,91	-4,90	-16,52
39,29	75,00	-2,03	-5,16	-16,52
41,96	75,00	-2,17	-5,06	-16,52
44,64	75,00	-2,31	-4,96	-16,52
47,32	75,00	-2,70	-5,52	-16,52
50,00	75,00	-3,09	-6,08	-16,52
		valori medi		
		-0,96	-3,62	

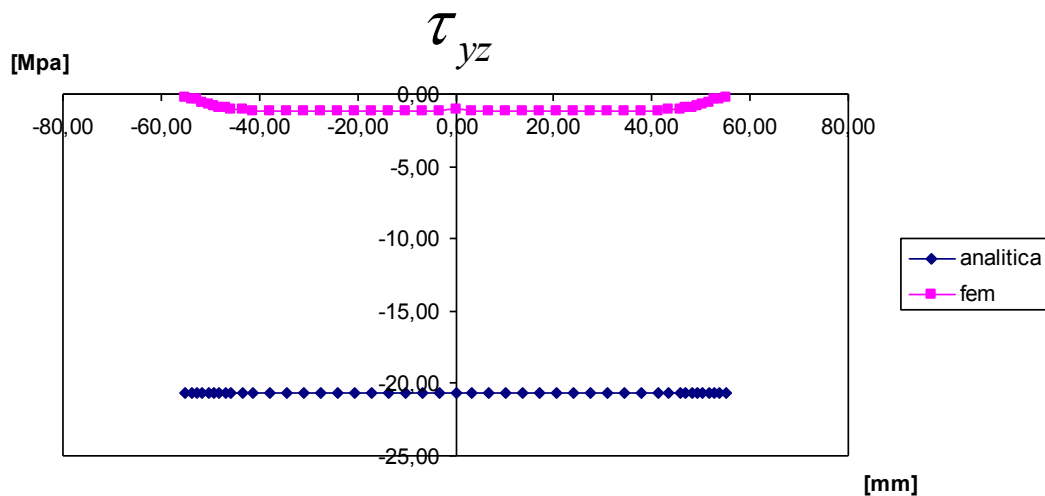


Figura 4.7. Lungo l'anima vi è un valore registrato al fem pressoché costante, ma vi è una sovrastima di circa 20 Mpa da parte dei valori analitici. Ciò è inverosimile, ma considerando che si sta analizzando l'area in cui è presente l'incastro può essere accettato.

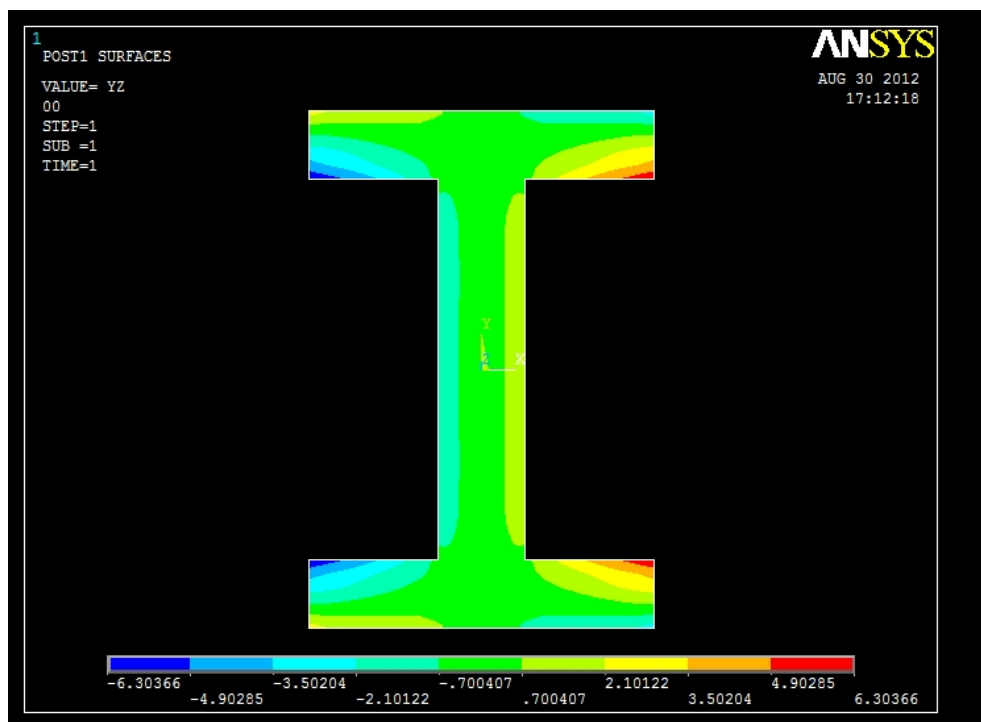


Figura 4.8. Si può notare che i valori delle tensioni lungo y nei punti esterni sono maggiori rispetto i valori registrati internamente. Questo è congruo alla similitudine idrodinamica. Lungo le ali si notano però dei valori inverosimili e questo è dovuto alla vicinanza dei vincoli alla sezione analizzata.

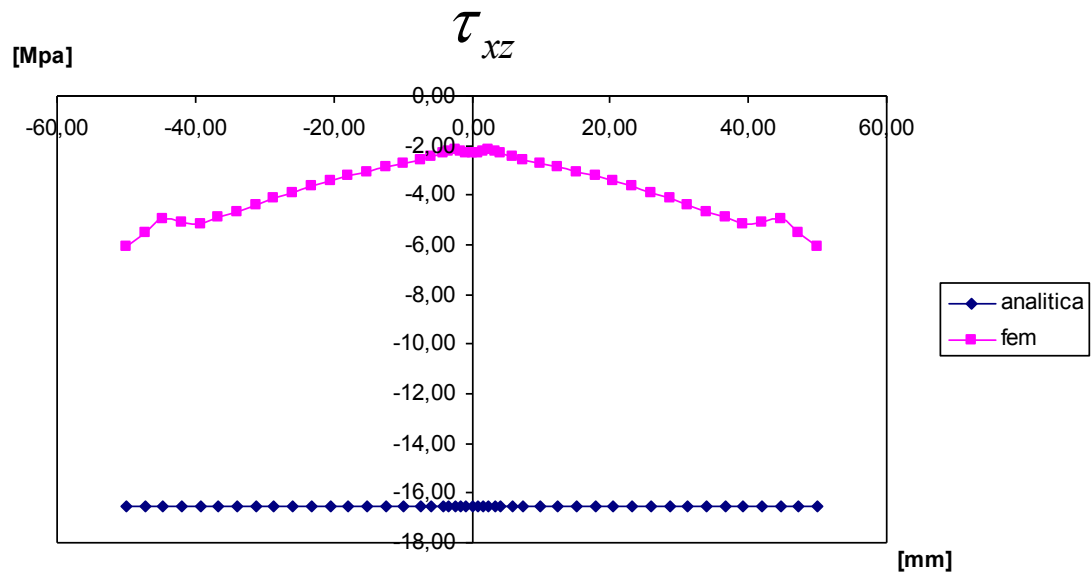


Figura 4.9. Lungo le ali vi è una sovrastima di circa 15 Mpa da parte dei valori analitici. Ciò è inverosimile, ma è giustificato dalla posizione dell'area analizzata.

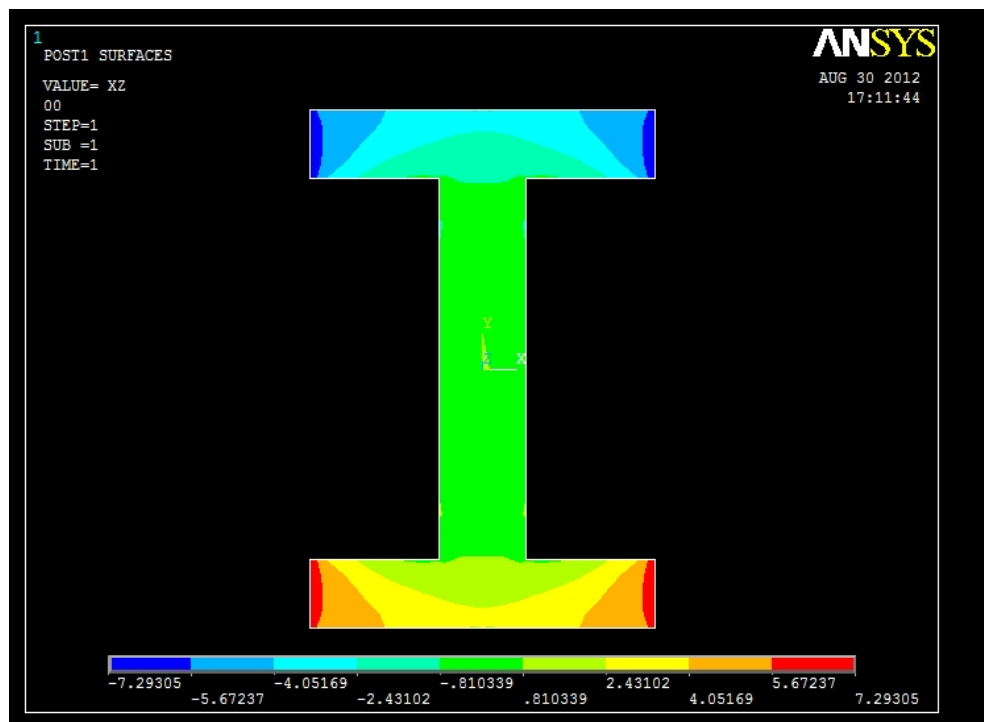


Figura 4.10. Lungo le ali viene registrato un andamento anomalo delle componenti tangenziali lungo x.

4.4 SEZIONE II

Tabella 4.2. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavate al fem, messe a confronto con i valori calcolati analiticamente per la sezione ad una distanza di 140mm dall'incastro.

VALORI CALCOLATI AL FEM				VALORI ANALITICI	
X_G [mm]	Y_G [mm]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]
-12,50	-55,00	-16,47	-15,36	-20,65	
-12,50	-53,85	-14,76	-6,70	-20,65	
-12,50	-52,71	-13,04	1,96	-20,65	
-12,50	-51,56	-12,97	0,80	-20,65	
-12,50	-50,42	-12,90	-0,36	-20,65	
-12,50	-49,27	-12,74	-0,14	-20,65	
-12,50	-48,13	-12,57	0,08	-20,65	
-12,50	-46,98	-12,50	0,02	-20,65	
-12,50	-45,83	-12,43	-0,04	-20,65	
-12,50	-43,54	-12,36	-0,02	-20,65	
-12,50	-41,25	-12,30	-0,01	-20,65	
-12,50	-37,81	-12,28	-0,01	-20,65	
-12,50	-34,38	-12,25	-0,01	-20,65	
-12,50	-30,94	-12,24	-0,01	-20,65	
-12,50	-27,50	-12,23	-0,01	-20,65	
-12,50	-24,06	-12,23	-0,01	-20,65	
-12,50	-20,63	-12,23	-0,01	-20,65	
-12,50	-17,19	-12,23	-0,01	-20,65	
-12,50	-13,75	-12,23	0,00	-20,65	
-12,50	-10,31	-12,24	0,00	-20,65	
-12,50	-6,88	-12,24	0,00	-20,65	
-12,50	-3,44	-12,24	0,00	-20,65	
-12,50	0,00	-12,24	0,00	-20,65	
-12,50	3,44	-12,24	0,00	-20,65	
-12,50	6,88	-12,24	0,00	-20,65	
-12,50	10,31	-12,24	0,00	-20,65	
-12,50	13,75	-12,23	0,00	-20,65	
-12,50	17,19	-12,23	0,01	-20,65	
-12,50	20,63	-12,23	0,01	-20,65	
-12,50	24,06	-12,23	0,01	-20,65	
-12,50	27,50	-12,23	0,01	-20,65	
-12,50	30,94	-12,24	0,01	-20,65	
-12,50	34,38	-12,25	0,01	-20,65	
-12,50	37,81	-12,28	0,01	-20,65	
-12,50	41,25	-12,30	0,01	-20,65	
-12,50	43,54	-12,36	0,02	-20,65	
-12,50	45,83	-12,43	0,04	-20,65	
-12,50	46,98	-12,50	-0,02	-20,65	
-12,50	48,13	-12,57	-0,08	-20,65	
-12,50	49,27	-12,74	0,14	-20,65	
-12,50	50,42	-12,90	0,36	-20,65	

-12,50	51,56	-12,97	-0,80	-20,65	
-12,50	52,71	-13,04	-1,96	-20,65	
-12,50	53,85	-14,76	6,70	-20,65	
-12,50	55,00	-16,47	15,36	-20,65	
-50,00	75,00	-0,60	-0,68		-16,52
-47,32	75,00	-0,32	-3,84		-16,52
-44,64	75,00	-0,05	-6,99		-16,52
-41,96	75,00	-0,05	-8,11		-16,52
-39,29	75,00	-0,05	-9,22		-16,52
-36,61	75,00	-0,04	-9,82		-16,52
-33,93	75,00	-0,04	-10,42		-16,52
-31,25	75,00	-0,04	-10,81		-16,52
-28,57	75,00	-0,03	-11,20		-16,52
-25,89	75,00	-0,03	-11,52		-16,52
-23,21	75,00	-0,03	-11,83		-16,52
-20,54	75,00	-0,02	-12,17		-16,52
-17,86	75,00	-0,02	-12,51		-16,52
-15,18	75,00	-0,02	-12,89		-16,52
-12,50	75,00	-0,02	-13,28		-16,52
-10,00	75,00	-0,01	-13,61		-16,52
-7,50	75,00	-0,06	-13,95		-16,52
-5,83	75,00	-0,01	-14,06		-16,52
-4,17	75,00	0,03	-14,17		-16,52
-3,33	75,00	-0,04	-14,21		-16,52
-2,50	75,00	-0,08	-14,24		-16,52
-1,67	75,00	-0,04	-14,28		-16,52
-0,83	75,00	-0,04	-14,31		-16,52
0,00	75,00	0,05	-14,31		-16,52
0,83	75,00	0,04	-14,31		-16,52
1,67	75,00	0,04	-14,28		-16,52
2,50	75,00	0,08	-14,24		-16,52
3,33	75,00	0,04	-14,21		-16,52
4,17	75,00	-0,03	-14,17		-16,52
5,83	75,00	0,01	-14,06		-16,52
7,50	75,00	0,06	-13,95		-16,52
10,00	75,00	0,01	-13,61		-16,52
12,50	75,00	0,02	-13,28		-16,52
15,18	75,00	0,02	-12,89		-16,52
17,86	75,00	0,02	-12,51		-16,52
20,54	75,00	0,02	-12,17		-16,52
23,21	75,00	0,03	-11,83		-16,52
25,89	75,00	0,03	-11,52		-16,52
28,57	75,00	0,03	-11,20		-16,52
31,25	75,00	0,04	-10,81		-16,52
33,93	75,00	0,04	-10,42		-16,52
36,61	75,00	0,04	-9,82		-16,52
39,29	75,00	0,05	-9,22		-16,52
41,96	75,00	0,05	-8,11		-16,52
44,64	75,00	0,05	-6,99		-16,52
47,32	75,00	0,32	-3,84		-16,52
50,00	75,00	0,60	-0,68		-16,52
valori medi					
			-12,70	-11,29	

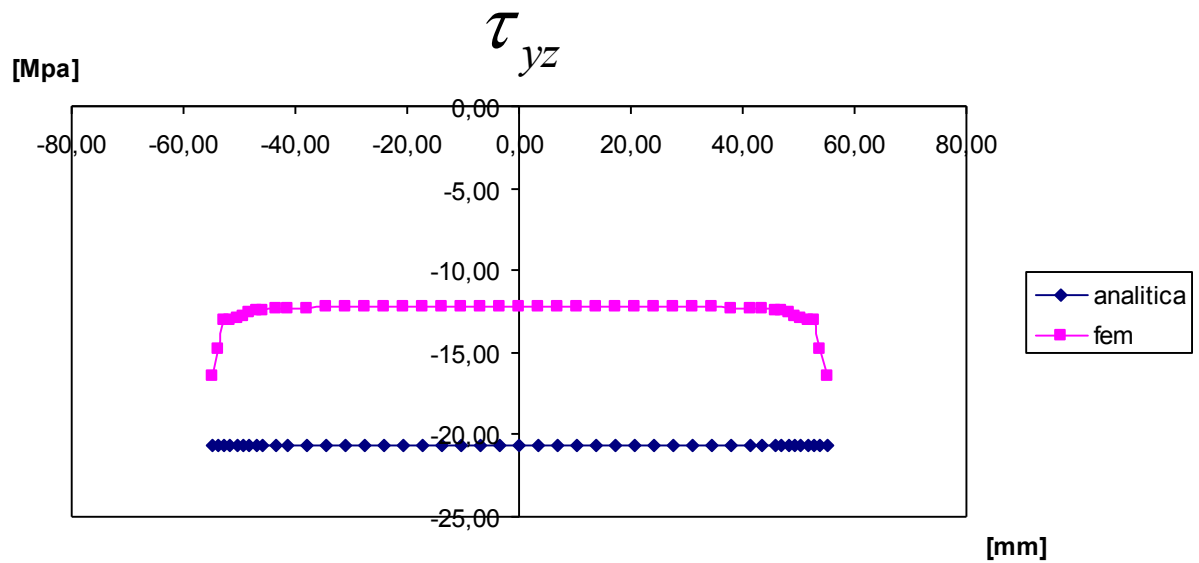


Figura 4.11. Nonostante si stia analizzando un'area lontana da vincoli o carichi si registra uno scostamento dei valori analitici di circa 8 Mpa dal valore medio dei valori forniti dal fem. Ciò è imputabile al considerevole spessore dell'anima il che causa un'eccessiva approssimazione della teoria di Prantl.

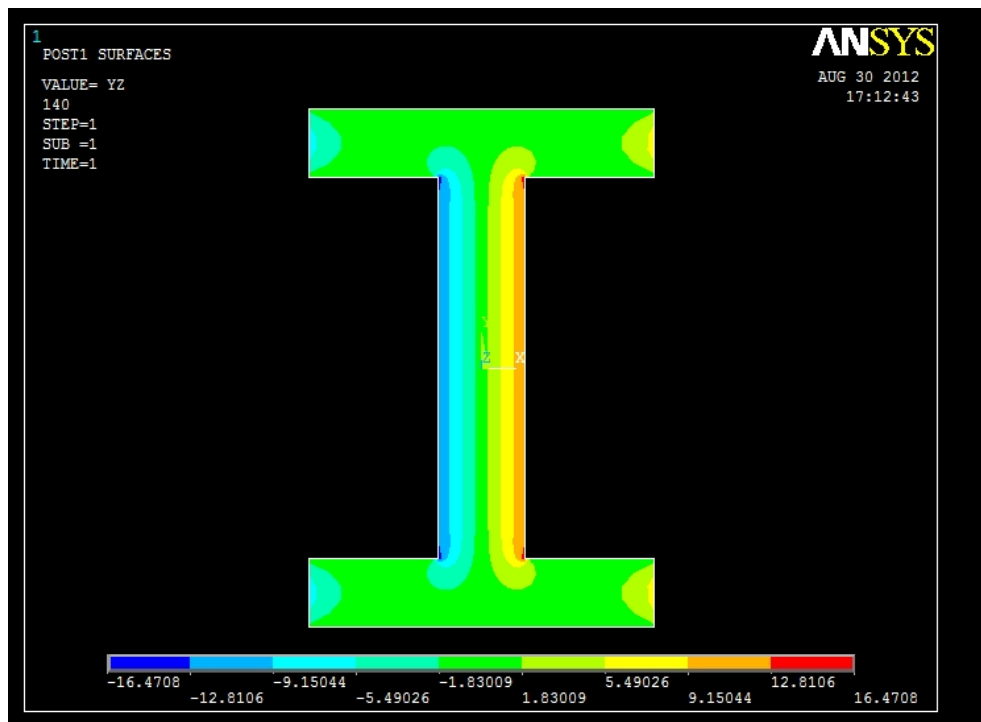


Figura 4.12. I valori più significativi della componente lungo y della tensione a torsione si hanno sulla superficie esterna dell'anima come ci si aspettava.

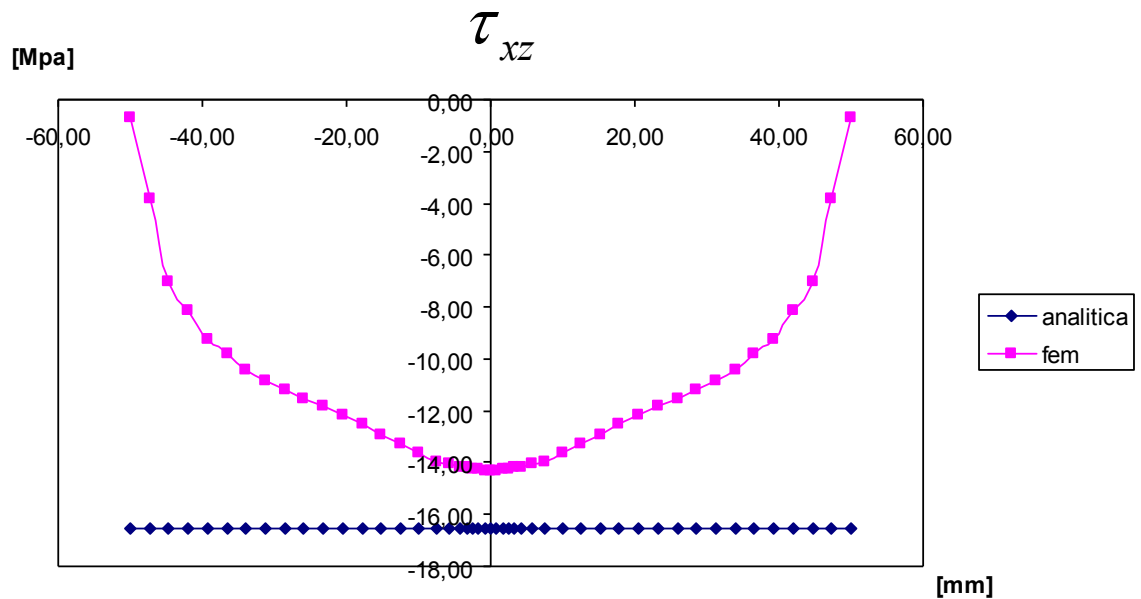


Figura 4.13. Lungo le ali vi è una sovrastima di circa 2 Mpa da parte dei valori analitici rispetto al valore massimo misurato sull'asse y di simmetria.

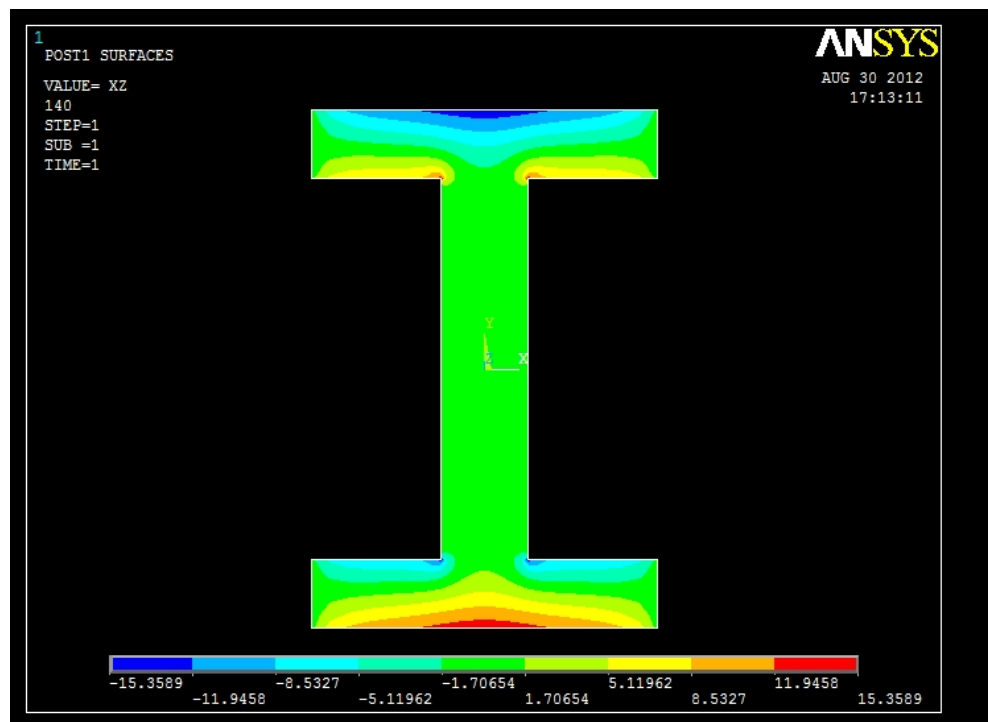


Figura 4.14. Si può notare come lungo la superficie esterna delle ali la componente in x della tensione a valori pressoché nulli negli spigoli esterni, e si ha un graduale aumento fino al raggiungimento del valore massimo lungo l'asse y di simmetria.

4.5 SEZIONE III

Tabella 4.2. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavate al fem, messe a confronto con i valori calcolati analiticamente per la sezione ad una distanza di 280mm dall'incastro.

VALORI CALCOLATI AL FEM				VALORI ANALITICI	
X_G [mm]	Y_G [mm]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]
-12,50	-55,00	-26,21	-24,92	-20,65	
-12,50	-53,85	-22,95	-10,86	-20,65	
-12,50	-52,71	-19,70	3,20	-20,65	
-12,50	-51,56	-19,42	1,32	-20,65	
-12,50	-50,42	-19,14	-0,56	-20,65	
-12,50	-49,27	-18,76	-0,21	-20,65	
-12,50	-48,13	-18,37	0,15	-20,65	
-12,50	-46,98	-18,17	0,06	-20,65	
-12,50	-45,83	-17,97	-0,03	-20,65	
-12,50	-43,54	-17,77	-0,02	-20,65	
-12,50	-41,25	-17,57	0,00	-20,65	
-12,50	-37,81	-17,45	0,00	-20,65	
-12,50	-34,38	-17,33	0,00	-20,65	
-12,50	-30,94	-17,29	0,00	-20,65	
-12,50	-27,50	-17,25	0,00	-20,65	
-12,50	-24,06	-17,24	0,00	-20,65	
-12,50	-20,63	-17,23	0,00	-20,65	
-12,50	-17,19	-17,22	0,00	-20,65	
-12,50	-13,75	-17,22	0,00	-20,65	
-12,50	-10,31	-17,22	0,00	-20,65	
-12,50	-6,88	-17,22	0,00	-20,65	
-12,50	-3,44	-17,22	0,00	-20,65	
-12,50	0,00	-17,22	0,00	-20,65	
-12,50	3,44	-17,22	0,00	-20,65	
-12,50	6,88	-17,22	0,00	-20,65	
-12,50	10,31	-17,22	0,00	-20,65	
-12,50	13,75	-17,22	0,00	-20,65	
-12,50	17,19	-17,22	0,00	-20,65	
-12,50	20,63	-17,23	0,00	-20,65	
-12,50	24,06	-17,24	0,00	-20,65	
-12,50	27,50	-17,25	0,00	-20,65	
-12,50	30,94	-17,29	0,00	-20,65	
-12,50	34,38	-17,33	0,00	-20,65	
-12,50	37,81	-17,45	0,00	-20,65	
-12,50	41,25	-17,57	0,00	-20,65	
-12,50	43,54	-17,77	0,02	-20,65	
-12,50	45,83	-17,97	0,03	-20,65	
-12,50	46,98	-18,17	-0,06	-20,65	
-12,50	48,13	-18,37	-0,15	-20,65	
-12,50	49,27	-18,76	0,21	-20,65	

-12,50	50,42	-19,14	0,56	-20,65	
-12,50	51,56	-19,42	-1,32	-20,65	
-12,50	52,71	-19,70	-3,20	-20,65	
-12,50	53,85	-22,95	10,86	-20,65	
-12,50	55,00	-26,21	24,92	-20,65	
-50,00	-75,00	0,72	-1,00		-16,52
-47,32	-75,00	0,35	-5,17		-16,52
-44,64	75,00	0,01	-9,34		-16,52
-41,96	75,00	0,00	-10,70		-16,52
-39,29	-75,00	0,01	-12,05		-16,52
-36,61	-75,00	0,01	-12,73		-16,52
-33,93	-75,00	0,01	-13,41		-16,52
-31,25	-75,00	0,01	-13,80		-16,52
-28,57	-75,00	0,01	-14,19		-16,52
-25,89	-75,00	0,01	-14,51		-16,52
-23,21	-75,00	0,01	-14,84		-16,52
-20,54	-75,00	0,01	-15,23		-16,52
-17,86	-75,00	0,00	-15,62		-16,52
-15,18	-75,00	0,01	-16,12		-16,52
-12,50	-75,00	0,01	-16,62		-16,52
-10,00	-75,00	0,00	-17,07		-16,52
-7,50	75,00	0,01	-17,53		-16,52
-5,83	75,00	0,00	-17,68		-16,52
-4,17	-75,00	0,00	-17,84		-16,52
-3,33	-75,00	0,01	-17,88		-16,52
-2,50	-75,00	0,01	-17,92		-16,52
-1,67	-75,00	0,00	-17,97		-16,52
-0,83	75,00	0,00	-18,02		-16,52
0,00	-75,00	0,00	-18,02		-16,52
0,83	-75,00	0,00	-18,02		-16,52
1,67	75,00	0,00	-17,97		-16,52
2,50	75,00	0,01	-17,92		-16,52
3,33	75,00	0,01	-17,88		-16,52
4,17	75,00	0,00	-17,84		-16,52
5,83	-75,00	0,00	-17,68		-16,52
7,50	-75,00	0,01	-17,53		-16,52
10,00	75,00	0,00	-17,07		-16,52
12,50	75,00	0,01	-16,62		-16,52
15,18	75,00	0,01	-16,12		-16,52
17,86	75,00	0,00	-15,62		-16,52
20,54	75,00	0,01	-15,23		-16,52
23,21	75,00	0,01	-14,84		-16,52
25,89	75,00	0,01	-14,51		-16,52
28,57	75,00	0,01	-14,19		-16,52
31,25	75,00	0,01	-13,80		-16,52
33,93	75,00	0,01	-13,41		-16,52
36,61	75,00	0,01	-12,73		-16,52
39,29	75,00	0,01	-12,05		-16,52
41,96	-75,00	0,00	-10,70		-16,52
44,64	-75,00	0,01	-9,34		-16,52
47,32	75,00	0,35	-5,17		-16,52
50,00	75,00	0,72	-1,00		-16,52
valori medi					
		-18,42	-14,31		

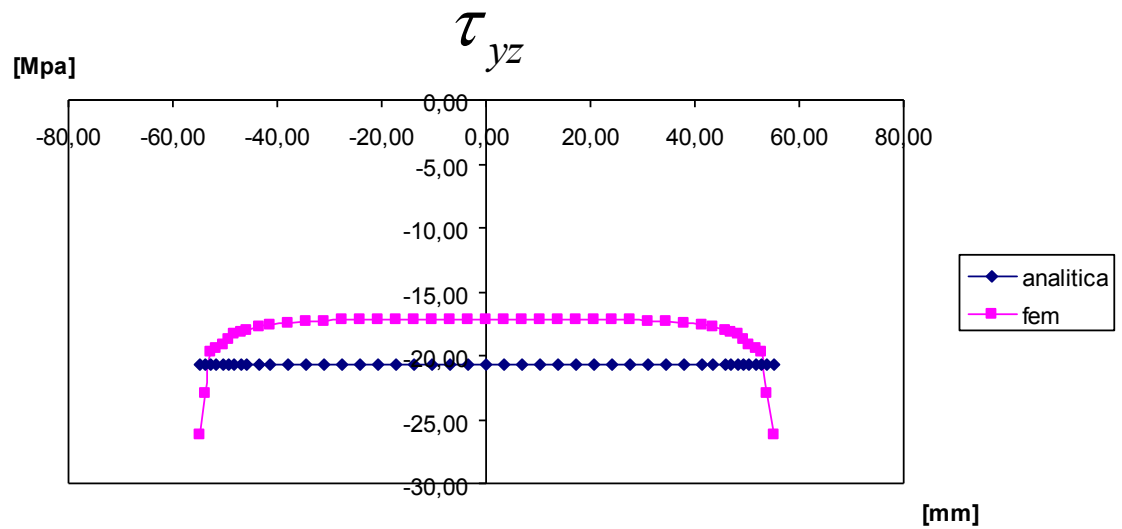


Figura 4.15. Il valore calcolato sovrastima di circa 2 Mpa il valore medio della tensione calcolato al fem.

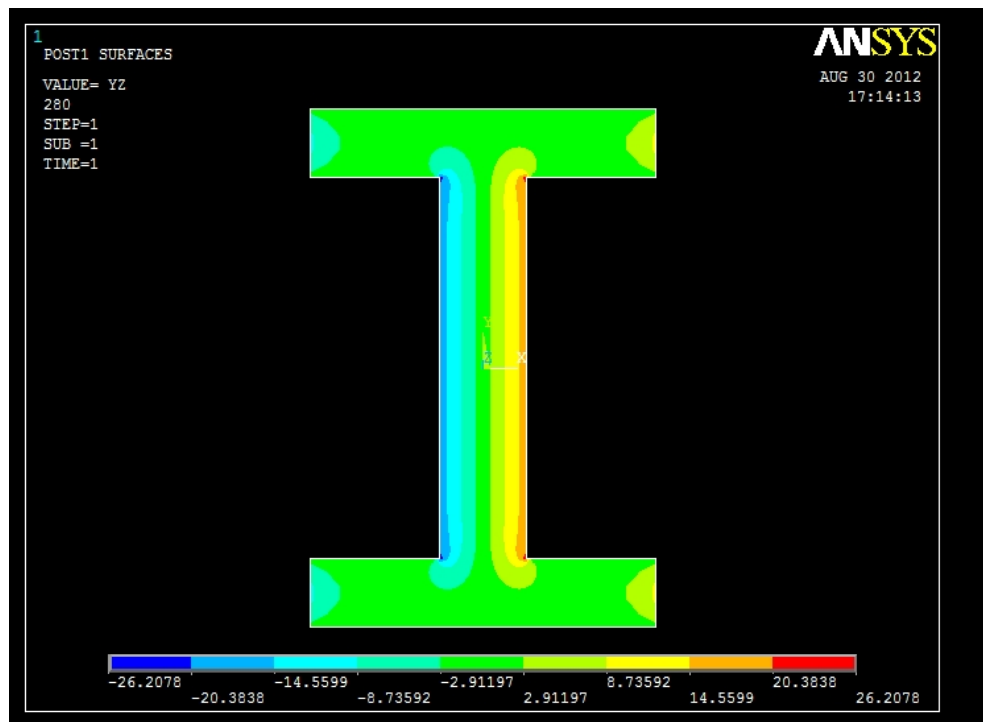


Figura 4.16. I valori più significativi della componente lungo y della tensione a torsione si hanno sulla superficie esterna dell'anima come ci si aspettava.

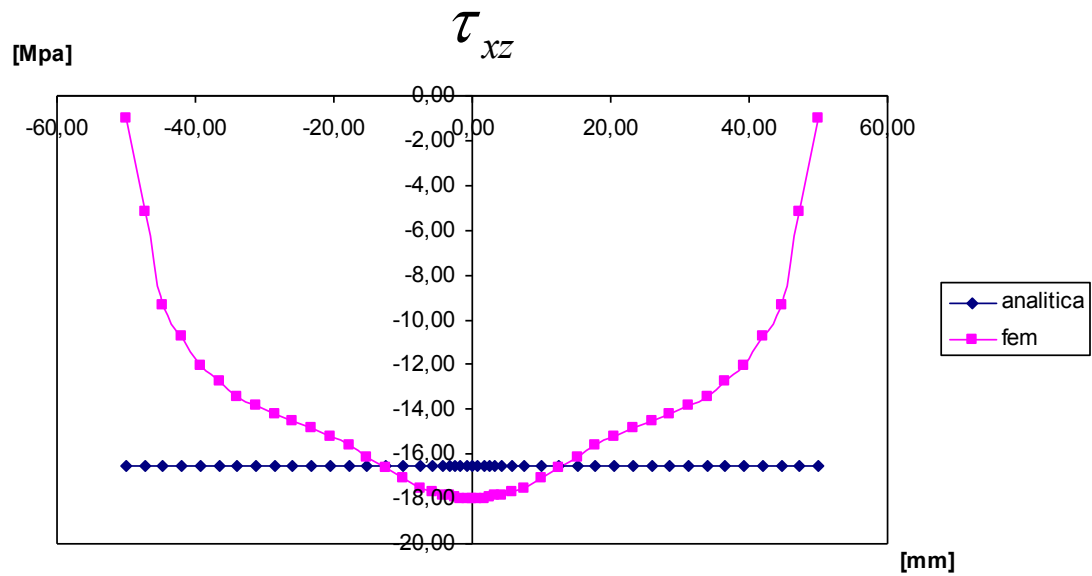


Figura 4.17. Lungo le ali vi è una sovrastima di circa 2 Mpa da parte dei valori analitici rispetto il valore medio dei dati forniti al fem.

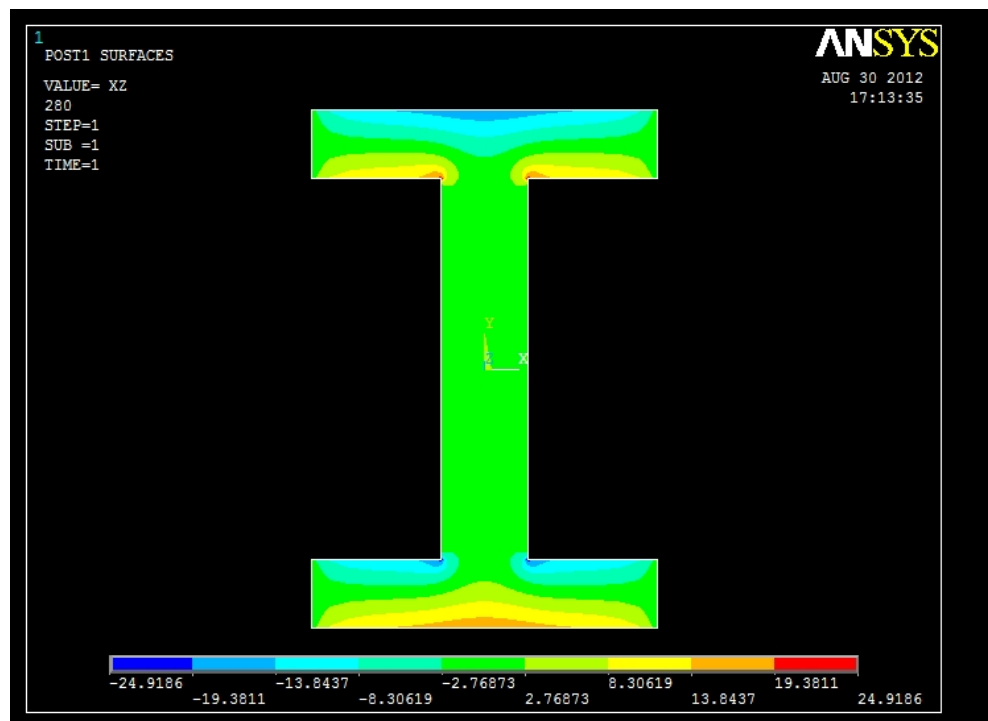


Figura 4.18. Si può notare come lungo la superficie esterna delle ali la componente in x della tensione ha valori pressoché nulli negli spigoli esterni, e si ha un graduale aumento fino al raggiungimento del valore massimo lungo l'asse y di simmetria.

4.6 SEZIONE IV

Tabella 4.2. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavate al fem, messe a confronto con i valori calcolati analiticamente per la sezione ad una distanza di 420mm dall'incastro.

VALORI CALCOLATI AL FEM				VALORI ANALITICI	
X_G [mm]	Y_G [mm]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]
-12,50	-55,00	-31,03	-29,67	-20,65	
-12,50	-53,85	-27,01	-12,93	-20,65	
-12,50	-52,71	-22,99	3,81	-20,65	
-12,50	-51,56	-22,60	1,58	-20,65	
-12,50	-50,42	-22,22	-0,66	-20,65	
-12,50	-49,27	-21,72	-0,24	-20,65	
-12,50	-48,13	-21,22	0,18	-20,65	
-12,50	-46,98	-20,95	0,07	-20,65	
-12,50	-45,83	-20,69	-0,03	-20,65	
-12,50	-43,54	-20,41	-0,01	-20,65	
-12,50	-41,25	-20,14	0,00	-20,65	
-12,50	-37,81	-19,96	0,00	-20,65	
-12,50	-34,38	-19,78	0,00	-20,65	
-12,50	-30,94	-19,72	0,00	-20,65	
-12,50	-27,50	-19,66	0,00	-20,65	
-12,50	-24,06	-19,64	0,00	-20,65	
-12,50	-20,63	-19,61	0,00	-20,65	
-12,50	-17,19	-19,61	0,00	-20,65	
-12,50	-13,75	-19,60	0,00	-20,65	
-12,50	-10,31	-19,60	0,00	-20,65	
-12,50	-6,88	-19,59	0,00	-20,65	
-12,50	-3,44	-19,59	0,00	-20,65	
-12,50	0,00	-19,59	0,00	-20,65	
-12,50	3,44	-19,59	0,00	-20,65	
-12,50	6,88	-19,59	0,00	-20,65	
-12,50	10,31	-19,60	0,00	-20,65	
-12,50	13,75	-19,60	0,00	-20,65	
-12,50	17,19	-19,61	0,00	-20,65	
-12,50	20,63	-19,61	0,00	-20,65	
-12,50	24,06	-19,64	0,00	-20,65	
-12,50	27,50	-19,66	0,00	-20,65	
-12,50	30,94	-19,72	0,00	-20,65	
-12,50	34,38	-19,78	0,00	-20,65	
-12,50	37,81	-19,96	0,00	-20,65	
-12,50	41,25	-20,14	0,00	-20,65	
-12,50	43,54	-20,41	0,01	-20,65	
-12,50	45,83	-20,69	0,03	-20,65	
-12,50	46,98	-20,95	-0,07	-20,65	
-12,50	48,13	-21,22	-0,18	-20,65	
-12,50	49,27	-21,72	0,24	-20,65	

-12,50	50,42	-22,22	0,66	-20,65	
-12,50	51,56	-22,60	-1,58	-20,65	
-12,50	52,71	-22,99	-3,81	-20,65	
-12,50	53,85	-27,01	12,93	-20,65	
-12,50	55,00	-31,03	29,67	-20,65	
-50,00	75,00	-0,84	-1,09		-16,52
-47,32	75,00	-0,40	-5,81		-16,52
-44,64	75,00	0,31	-10,52		-16,52
-41,96	75,00	0,13	-12,01		-16,52
-39,29	75,00	-0,48	-13,49		-16,52
-36,61	75,00	-0,80	-14,20		-16,52
-33,93	75,00	-0,11	-14,91		-16,52
-31,25	75,00	-0,88	-15,30		-16,52
-28,57	75,00	-0,64	-15,69		-16,52
-25,89	75,00	-0,74	-16,02		-16,52
-23,21	75,00	-0,83	-16,35		-16,52
-20,54	75,00	-0,26	-16,76		-16,52
-17,86	75,00	0,31	-17,18		-16,52
-15,18	75,00	-0,42	-17,73		-16,52
-12,50	75,00	-0,11	-18,28		-16,52
-10,00	75,00	0,12	-18,78		-16,52
-7,50	75,00	0,14	-19,28		-16,52
-5,83	75,00	0,79	-19,40		-16,52
-4,17	75,00	0,20	-19,52		-16,52
-3,33	75,00	-0,53	-19,54		-16,52
-2,50	75,00	-0,13	-19,56		-16,52
-1,67	75,00	-0,69	-19,61		-16,52
-0,83	75,00	-0,12	-19,66		-16,52
0,00	75,00	0,27	-19,66		-16,52
0,83	75,00	0,12	-19,66		-16,52
1,67	75,00	0,69	-19,61		-16,52
2,50	75,00	0,13	-19,56		-16,52
3,33	75,00	0,53	-19,54		-16,52
4,17	75,00	-0,20	-19,52		-16,52
5,83	75,00	-0,79	-19,40		-16,52
7,50	75,00	-0,14	-19,28		-16,52
10,00	75,00	-0,12	-18,78		-16,52
12,50	75,00	0,11	-18,28		-16,52
15,18	75,00	0,42	-17,73		-16,52
17,86	75,00	-0,31	-17,18		-16,52
20,54	75,00	0,26	-16,76		-16,52
23,21	75,00	0,83	-16,35		-16,52
25,89	75,00	0,74	-16,02		-16,52
28,57	75,00	0,64	-15,69		-16,52
31,25	75,00	0,88	-15,30		-16,52
33,93	75,00	0,11	-14,91		-16,52
36,61	75,00	0,80	-14,20		-16,52
39,29	75,00	0,48	-13,49		-16,52
41,96	75,00	-0,13	-12,01		-16,52
44,64	75,00	-0,31	-10,52		-16,52
47,32	75,00	0,40	-5,81		-16,52
50,00	75,00	0,84	-1,09		-16,52
valori medi					
-21,21			-15,77		

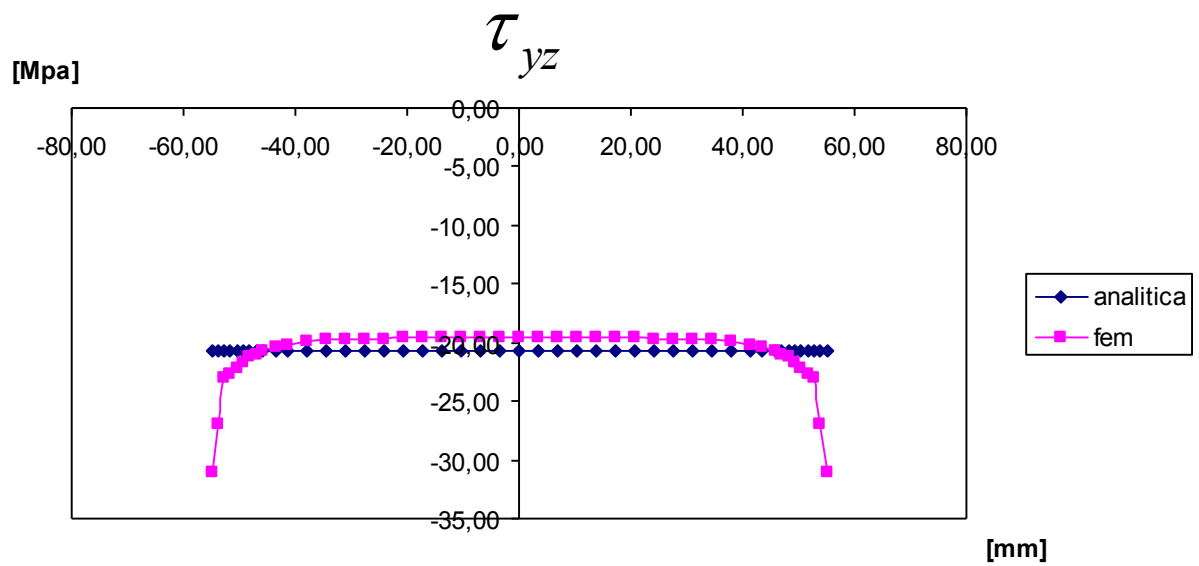


Figura 4.19. Il valore calcolato sottostima di circa 1 Mpa il valore medio della tensione calcolato al fem.

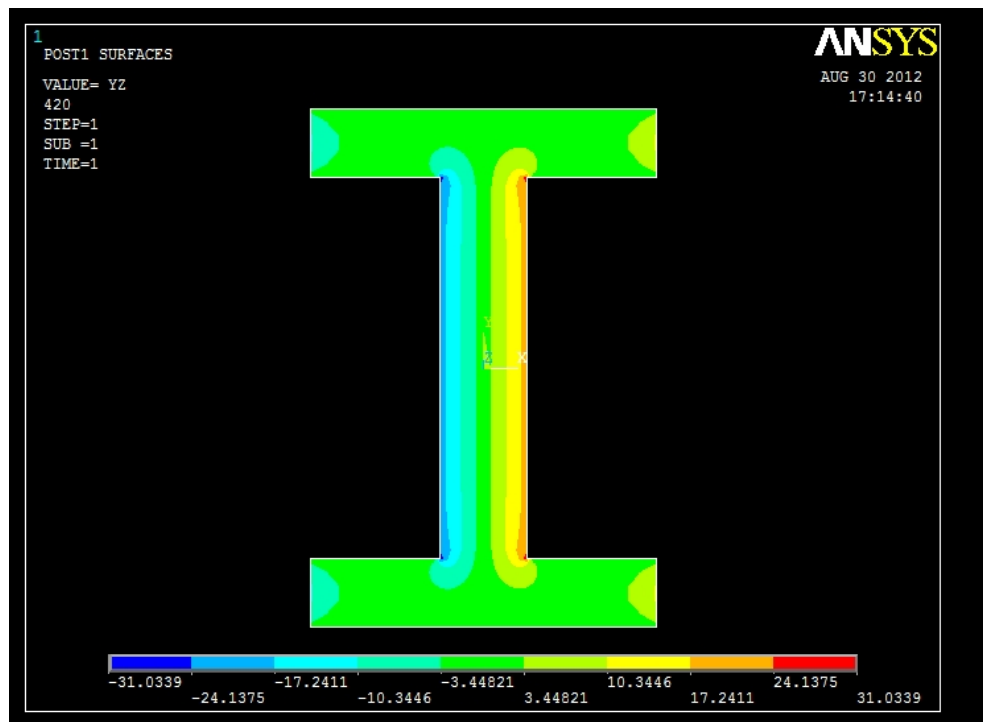


Figura 4.20. I valori più significativi della componente lungo y della tensione a torsione si hanno sulla superficie esterna dell'anima come ci si aspettava.

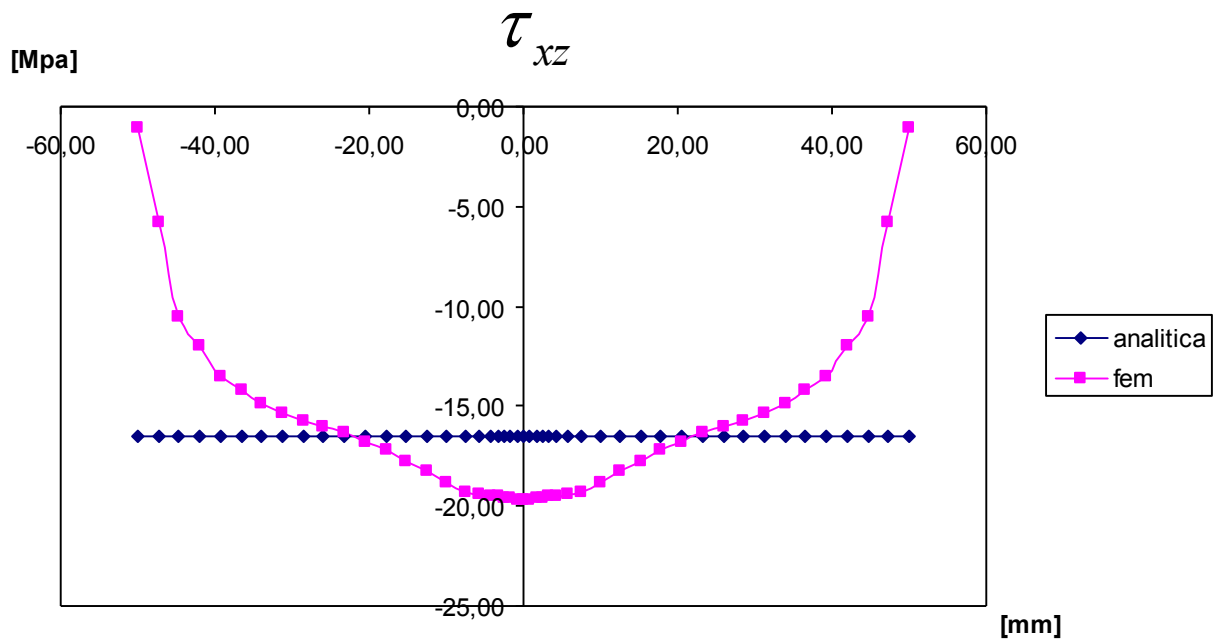


Figura 4.21. Lungo le ali vi è una sovrastima di meno di 1 Mpa da parte dei valori analitici rispetto il valore medio dei dati forniti al fem.

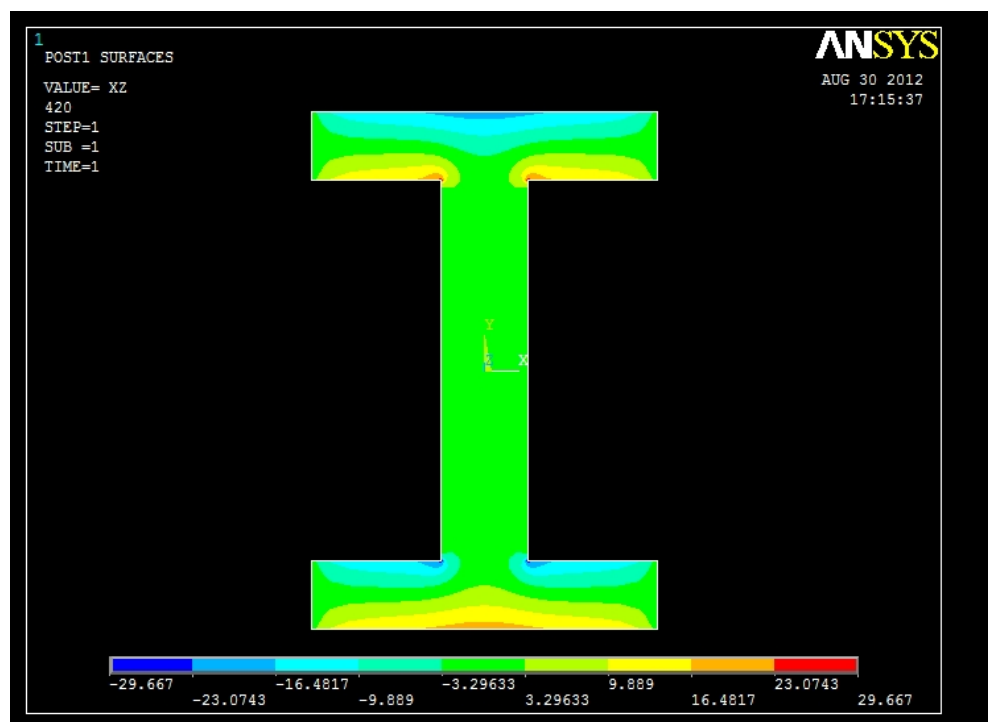


Figura 4.22. Si può notare come lungo la superficie esterna delle ali la componente in x della tensione ha valori pressoché nulli negli spigoli esterni, e si ha un graduale aumento fino al raggiungimento del valore massimo lungo l'asse y di simmetria.

4.7 SEZIONE V

Tabella 4.2. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavate al fem, messe a confronto con i valori calcolati analiticamente per la sezione ad una distanza di 560mm dall'incastro.

VALORI CALCOLATI AL FEM				VALORI ANALITICI	
X_G [mm]	Y_G [mm]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]
-12,50	-55,00	-33,14	-31,69	-20,65	
-12,50	-53,85	-28,84	-13,81	-20,65	
-12,50	-52,71	-24,54	4,06	-20,65	
-12,50	-51,56	-24,13	1,68	-20,65	
-12,50	-50,42	-23,72	-0,70	-20,65	
-12,50	-49,27	-23,19	-0,26	-20,65	
-12,50	-48,13	-22,66	0,19	-20,65	
-12,50	-46,98	-22,37	0,08	-20,65	
-12,50	-45,83	-22,09	-0,03	-20,65	
-12,50	-43,54	-21,81	-0,01	-20,65	
-12,50	-41,25	-21,54	0,00	-20,65	
-12,50	-37,81	-21,39	0,00	-20,65	
-12,50	-34,38	-21,25	0,00	-20,65	
-12,50	-30,94	-21,23	0,00	-20,65	
-12,50	-27,50	-21,21	0,00	-20,65	
-12,50	-24,06	-21,22	0,00	-20,65	
-12,50	-20,63	-21,23	0,00	-20,65	
-12,50	-17,19	-21,25	0,00	-20,65	
-12,50	-13,75	-21,27	0,00	-20,65	
-12,50	-10,31	-21,29	0,00	-20,65	
-12,50	-6,88	-21,30	0,00	-20,65	
-12,50	-3,44	-21,31	0,00	-20,65	
-12,50	0,00	-21,32	0,00	-20,65	
-12,50	3,44	-21,31	0,00	-20,65	
-12,50	6,88	-21,30	0,00	-20,65	
-12,50	10,31	-21,29	0,00	-20,65	
-12,50	13,75	-21,27	0,00	-20,65	
-12,50	17,19	-21,25	0,00	-20,65	
-12,50	20,63	-21,23	0,00	-20,65	
-12,50	24,06	-21,22	0,00	-20,65	
-12,50	27,50	-21,21	0,00	-20,65	
-12,50	30,94	-21,23	0,00	-20,65	
-12,50	34,38	-21,25	0,00	-20,65	
-12,50	37,81	-21,39	0,00	-20,65	
-12,50	41,25	-21,54	0,00	-20,65	
-12,50	43,54	-21,81	0,01	-20,65	
-12,50	45,83	-22,09	0,03	-20,65	
-12,50	46,98	-22,37	-0,08	-20,65	
-12,50	48,13	-22,66	-0,19	-20,65	
-12,50	49,27	-23,19	0,26	-20,65	

-12,50	50,42	-23,72	0,70	-20,65	
-12,50	51,56	-24,13	-1,68	-20,65	
-12,50	52,71	-24,54	-4,06	-20,65	
-12,50	53,85	-28,84	13,81	-20,65	
-12,50	55,00	-33,14	31,69	-20,65	
-50,00	75,00	-0,87	-0,74		-16,52
-47,32	75,00	-0,43	-5,73		-16,52
-44,64	75,00	0,13	-10,73		-16,52
-41,96	75,00	0,11	-12,22		-16,52
-39,29	75,00	0,90	-13,72		-16,52
-36,61	75,00	-0,38	-14,41		-16,52
-33,93	75,00	-0,17	-15,11		-16,52
-31,25	75,00	-0,13	-15,50		-16,52
-28,57	75,00	-0,88	-15,89		-16,52
-25,89	75,00	-0,95	-16,22		-16,52
-23,21	75,00	-0,10	-16,56		-16,52
-20,54	75,00	-0,45	-17,00		-16,52
-17,86	75,00	0,13	-17,45		-16,52
-15,18	75,00	-0,34	-18,06		-16,52
-12,50	75,00	-0,81	-18,68		-16,52
-10,00	75,00	0,16	-19,17		-16,52
-7,50	75,00	0,40	-19,65		-16,52
-5,83	75,00	0,44	-19,60		-16,52
-4,17	75,00	0,48	-19,55		-16,52
-3,33	75,00	0,27	-19,47		-16,52
-2,50	75,00	0,73	-19,39		-16,52
-1,67	75,00	0,18	-19,42		-16,52
-0,83	75,00	-0,36	-19,44		-16,52
0,00	75,00	0,19	-19,44		-16,52
0,83	75,00	0,36	-19,44		-16,52
1,67	75,00	-0,18	-19,42		-16,52
2,50	75,00	-0,73	-19,39		-16,52
3,33	75,00	-0,27	-19,47		-16,52
4,17	75,00	-0,48	-19,55		-16,52
5,83	75,00	-0,44	-19,60		-16,52
7,50	75,00	-0,40	-19,65		-16,52
10,00	75,00	-0,16	-19,17		-16,52
12,50	75,00	0,81	-18,68		-16,52
15,18	75,00	0,34	-18,06		-16,52
17,86	75,00	-0,13	-17,45		-16,52
20,54	75,00	0,45	-17,00		-16,52
23,21	75,00	0,10	-16,56		-16,52
25,89	75,00	0,95	-16,22		-16,52
28,57	75,00	0,88	-15,89		-16,52
31,25	75,00	0,13	-15,50		-16,52
33,93	75,00	0,17	-15,11		-16,52
36,61	75,00	0,38	-14,41		-16,52
39,29	75,00	-0,90	-13,72		-16,52
41,96	75,00	-0,11	-12,22		-16,52
44,64	75,00	-0,13	-10,73		-16,52
47,32	75,00	0,43	-5,73		-16,52
50,00	75,00	0,87	-0,74		-16,52
valori medi					
-22,78				-15,89	

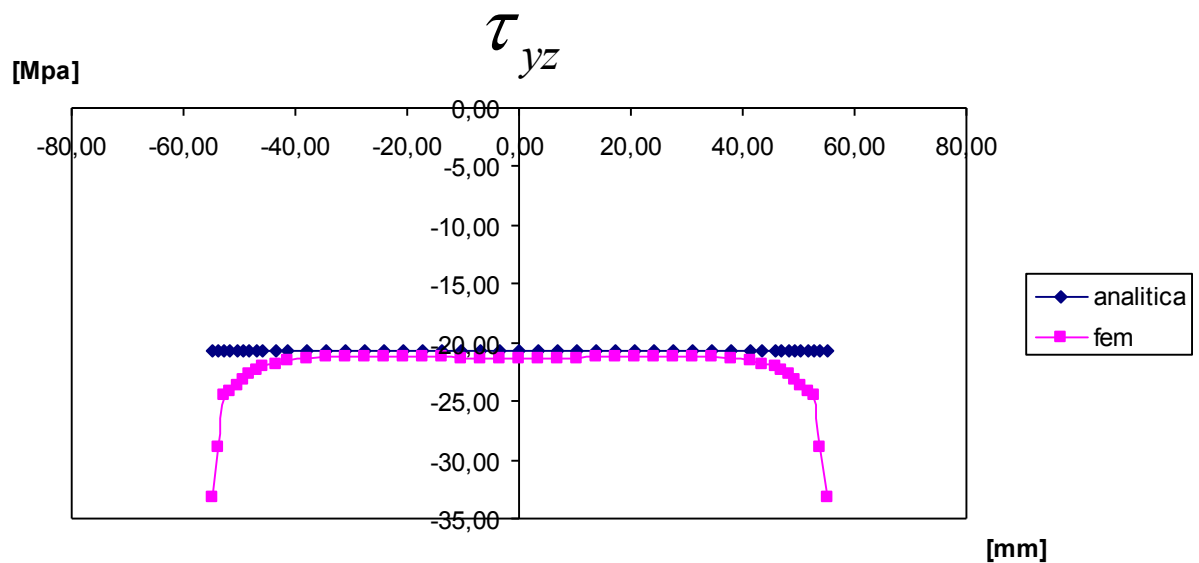


Figura 4.22. Il valore calcolato sottostima di più di 1 Mpa il valore medio della tensione calcolata al fem.

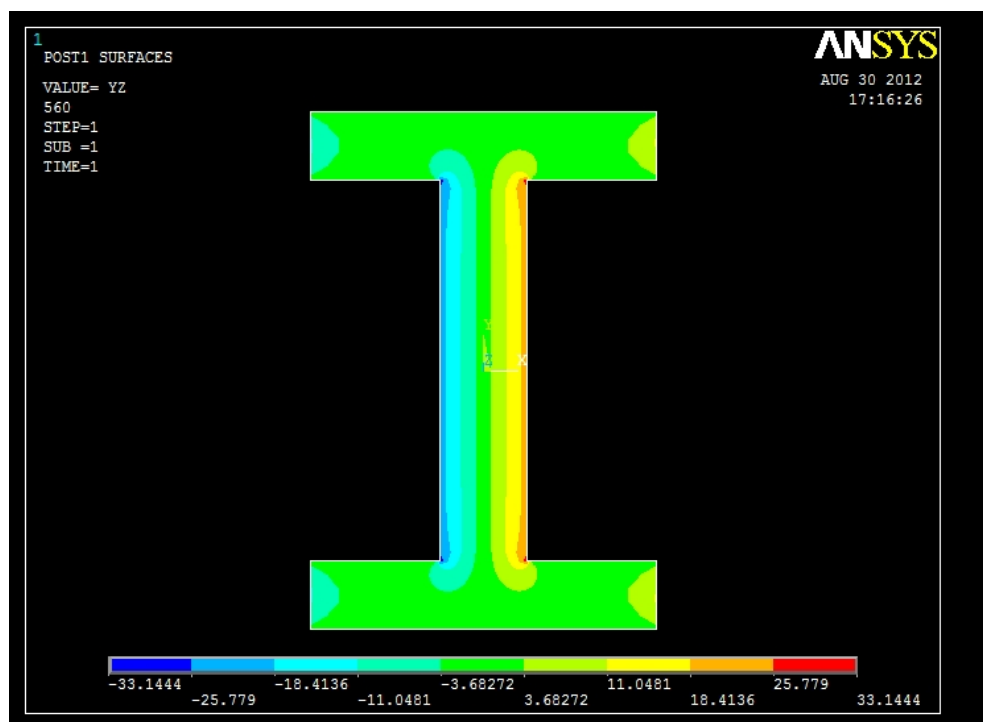


Figura 4.23. I valori più significativi della componente lungo y della tensione a torsione si hanno sulla superficie esterna dell'anima come ci si aspettava.

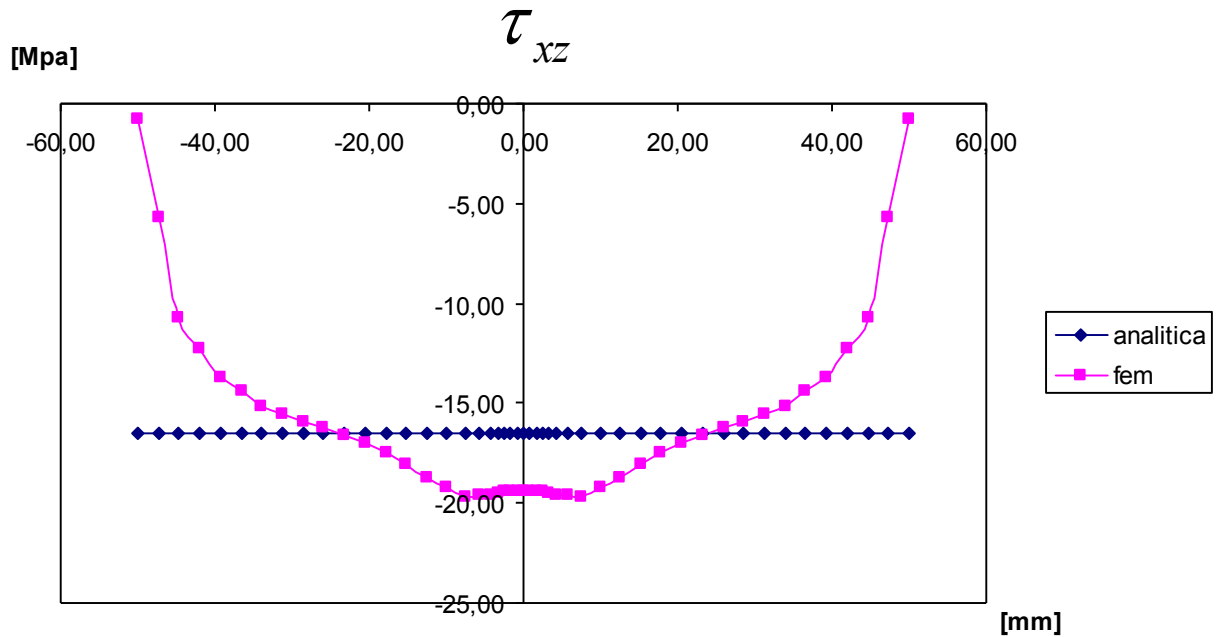


Figura 4.24. Lungo le ali vi è una sovrastima di meno di 1 Mpa da parte dei valori analitici rispetto il valore medio dei dati forniti al fem.

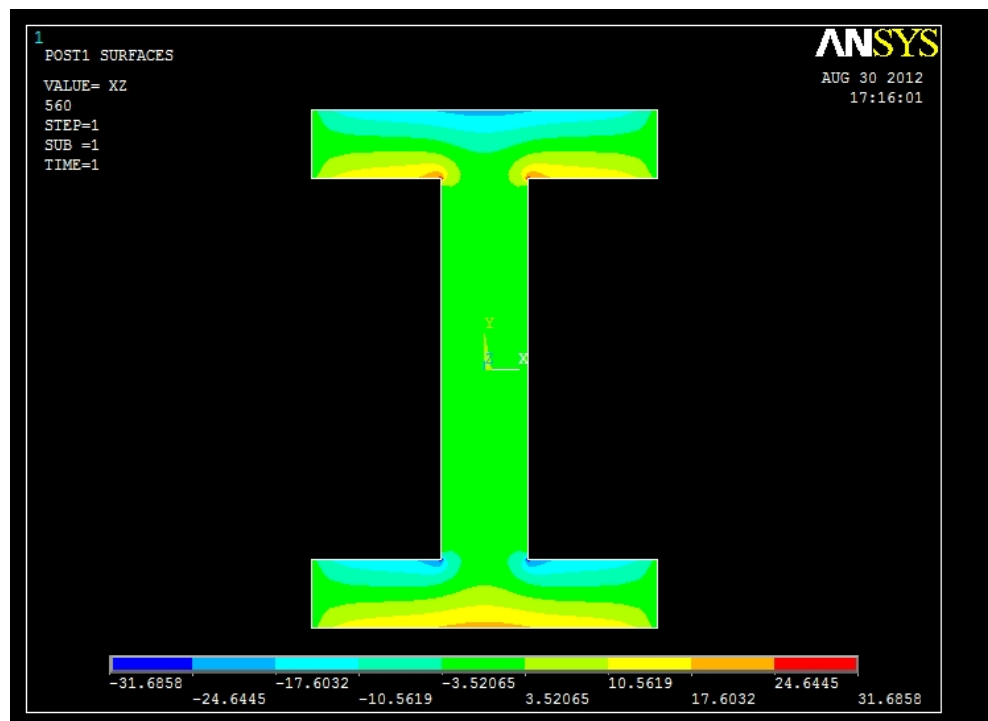


Figura 4.25. Si può notare come lungo la superficie esterna delle ali la componente in x della tensione ha valori pressoché nulli negli spigoli esterni, e si ha un graduale aumento fino al raggiungimento del valore massimo lungo l'asse y di simmetria.

4.8 SEZIONE VI

Tabella 4.2. Valori delle componenti di sollecitazione significative lungo la path ricavate al fem, messe a confronto con i valori calcolati analiticamente per la sezione finale in cui è applicato il momento torcente. In quest' area ci aspettiamo un calcolo da parte del fem anomalo.

VALORI CALCOLATI AL FEM				VALORI ANALITICI	
X_G [mm]	Y_G [mm]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]	τ_{zy} [Mpa]	τ_{zx} [Mpa]
-12,50	-55,00	-13,99	-13,30	-20,65	
-12,50	-53,85	-12,87	-5,76	-20,65	
-12,50	-52,71	-11,75	1,78	-20,65	
-12,50	-51,56	-11,45	0,75	-20,65	
-12,50	-50,42	-11,15	-0,28	-20,65	
-12,50	-49,27	-10,86	-0,08	-20,65	
-12,50	-48,13	-10,57	0,11	-20,65	
-12,50	-46,98	-10,42	0,06	-20,65	
-12,50	-45,83	-10,28	0,00	-20,65	
-12,50	-43,54	-9,95	-0,02	-20,65	
-12,50	-41,25	-9,62	-0,04	-20,65	
-12,50	-37,81	-9,61	0,00	-20,65	
-12,50	-34,38	-9,60	0,03	-20,65	
-12,50	-30,94	-9,66	0,02	-20,65	
-12,50	-27,50	-9,72	0,01	-20,65	
-12,50	-24,06	-9,78	0,01	-20,65	
-12,50	-20,63	-9,83	0,01	-20,65	
-12,50	-17,19	-9,88	0,01	-20,65	
-12,50	-13,75	-9,92	0,00	-20,65	
-12,50	-10,31	-9,94	0,00	-20,65	
-12,50	-6,88	-9,97	0,00	-20,65	
-12,50	-3,44	-9,98	0,00	-20,65	
-12,50	0,00	-9,98	0,00	-20,65	
-12,50	3,44	-9,98	0,00	-20,65	
-12,50	6,88	-9,97	0,00	-20,65	
-12,50	10,31	-9,94	0,00	-20,65	
-12,50	13,75	-9,92	0,00	-20,65	
-12,50	17,19	-9,88	-0,01	-20,65	
-12,50	20,63	-9,83	-0,01	-20,65	
-12,50	24,06	-9,78	-0,01	-20,65	
-12,50	27,50	-9,72	-0,01	-20,65	
-12,50	30,94	-9,66	-0,02	-20,65	
-12,50	34,38	-9,60	-0,03	-20,65	
-12,50	37,81	-9,61	0,00	-20,65	
-12,50	41,25	-9,62	0,04	-20,65	
-12,50	43,54	-9,95	0,02	-20,65	
-12,50	45,83	-10,28	0,00	-20,65	
-12,50	46,98	-10,42	-0,06	-20,65	
-12,50	48,13	-10,57	-0,11	-20,65	
-12,50	49,27	-10,86	0,08	-20,65	

-12,50	50,42	-11,15	0,28	-20,65	
-12,50	51,56	-11,45	-0,75	-20,65	
-12,50	52,71	-11,75	-1,78	-20,65	
-12,50	53,85	-12,87	5,76	-20,65	
-12,50	55,00	-13,99	13,30	-20,65	
-50,00	75,00	-4,59	-10,63		-16,52
-47,32	75,00	-1,68	-14,42		-16,52
-44,64	75,00	1,24	-18,21		-16,52
-41,96	75,00	0,65	-18,09		-16,52
-39,29	75,00	0,54	-17,97		-16,52
-36,61	75,00	0,14	-18,14		-16,52
-33,93	75,00	-0,27	-18,32		-16,52
-31,25	75,00	-0,21	-18,56		-16,52
-28,57	75,00	-0,15	-18,81		-16,52
-25,89	75,00	-0,15	-19,12		-16,52
-23,21	75,00	-0,16	-19,43		-16,52
-20,54	75,00	0,23	-19,88		-16,52
-17,86	75,00	0,61	-20,33		-16,52
-15,18	75,00	-0,13	-21,38		-16,52
-12,50	75,00	-0,31	-22,42		-16,52
-10,00	75,00	-0,57	-27,66		-16,52
-7,50	75,00	-0,83	-32,89		-16,52
-5,83	75,00	-0,75	-44,08		-16,52
-4,17	75,00	-0,67	-55,27		-16,52
-3,33	75,00	-0,60	-60,02		-16,52
-2,50	75,00	-0,54	-64,77		-16,52
-1,67	75,00	-0,27	-65,64		-16,52
-0,83	75,00	-0,45	-66,52		-16,52
0,00	75,00	0,28	-66,52		-16,52
0,83	75,00	0,45	-66,52		-16,52
1,67	75,00	0,27	-65,64		-16,52
2,50	75,00	0,54	-64,77		-16,52
3,33	75,00	0,60	-60,02		-16,52
4,17	75,00	0,67	-55,27		-16,52
5,83	75,00	0,75	-44,08		-16,52
7,50	75,00	0,83	-32,89		-16,52
10,00	75,00	0,57	-27,66		-16,52
12,50	75,00	0,31	-22,42		-16,52
15,18	75,00	0,13	-21,38		-16,52
17,86	75,00	-0,61	-20,33		-16,52
20,54	75,00	-0,23	-19,88		-16,52
23,21	75,00	0,16	-19,43		-16,52
25,89	75,00	0,15	-19,12		-16,52
28,57	75,00	0,15	-18,81		-16,52
31,25	75,00	0,21	-18,56		-16,52
33,93	75,00	0,27	-18,32		-16,52
36,61	75,00	-0,14	-18,14		-16,52
39,29	75,00	-0,54	-17,97		-16,52
41,96	75,00	-0,65	-18,09		-16,52
44,64	75,00	-1,24	-18,21		-16,52
47,32	75,00	1,68	-14,42		-16,52
50,00	75,00	4,59	-10,63		-16,52
valori medi					
			-10,48	-30,89	

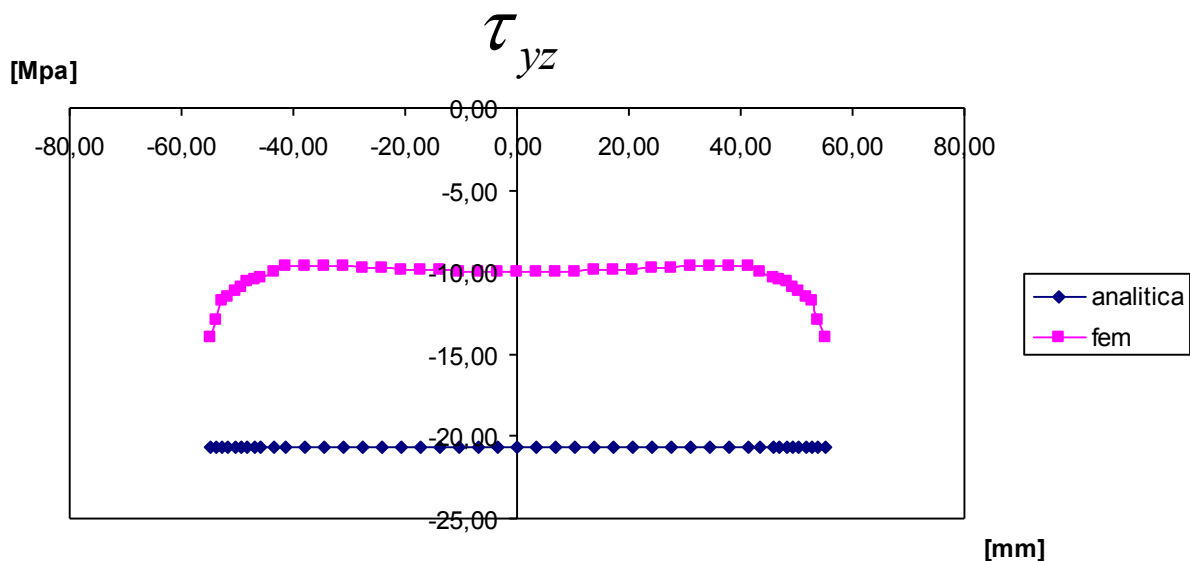


Figura 4.26. Il valore calcolato sovrastima di oltre 10 Mpa il valore medio della tensione calcolato dal fem. Ciò è causato dalla vicinanza dei carichi.

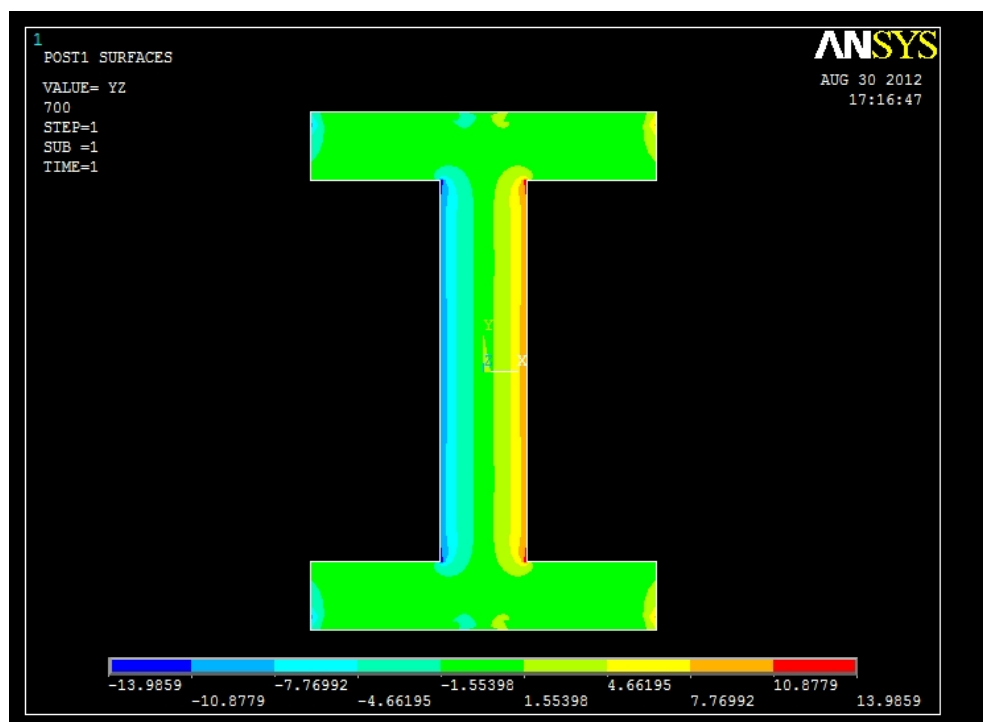


Figura 4.27. I valori più significativi della componente lungo y della tensione a torsione si hanno sulla superficie esterna dell'anima come ci si aspettava. A causa dell'applicazione dei carichi su quest'area sono presenti dei valori di tensione anomali in direzione y anche lungo le ali.

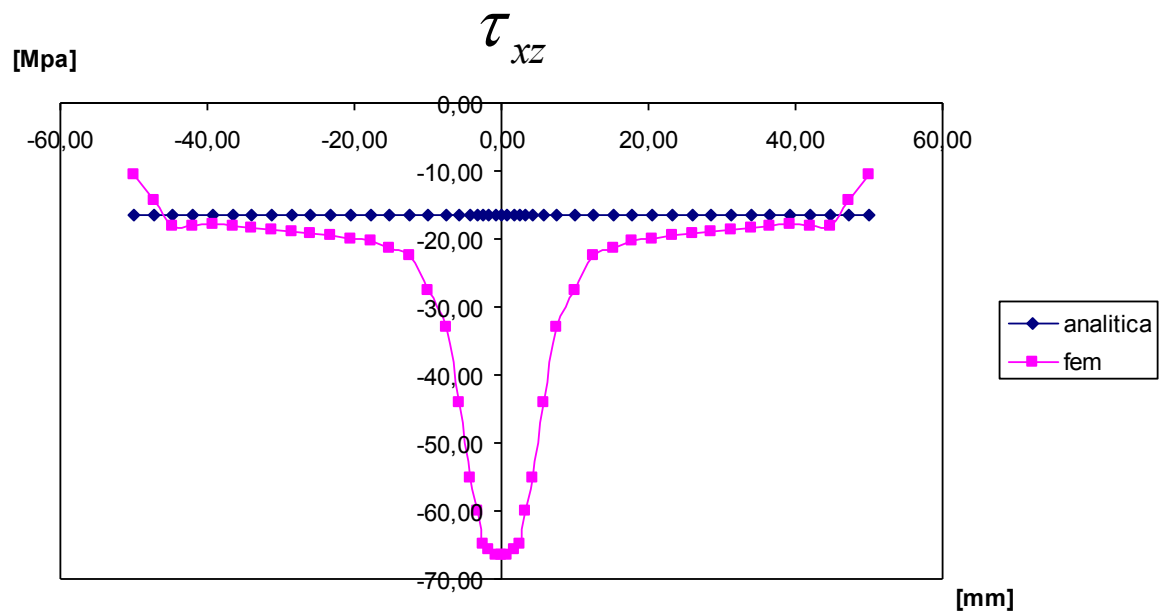


Figura 4.27. Lungo le ali vi è una sottostima di circa 14 Mpa nel calcolo analitico rispetto il valore medio dei dati forniti dal fem.

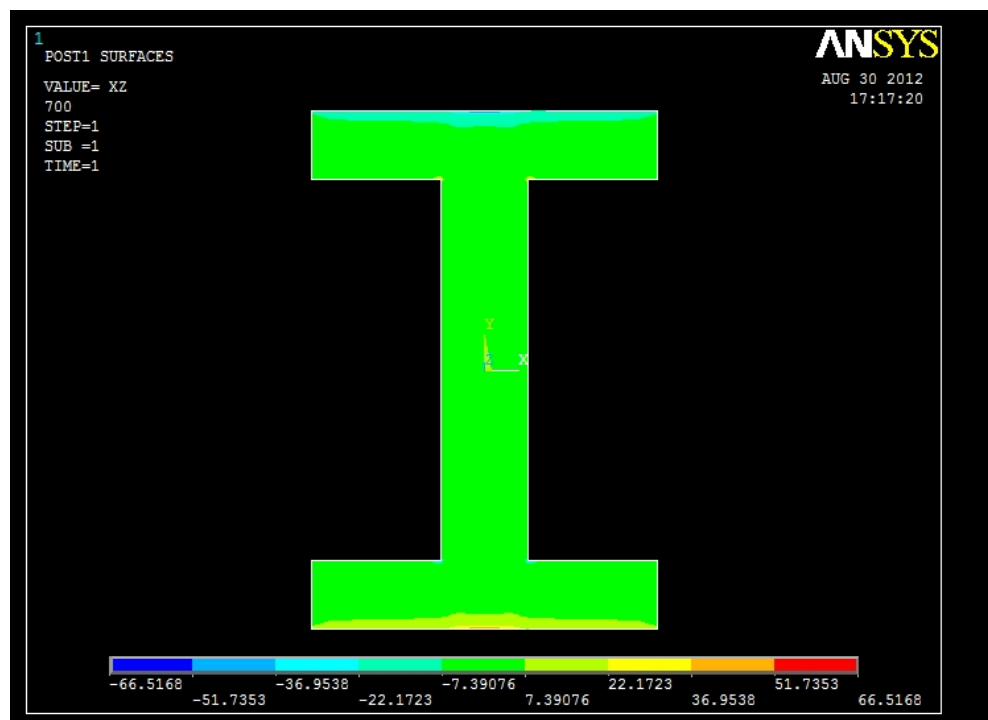


Figura 4.28. Lungo le superfici superiori delle ali si noti come i valori delle tensioni rimangono pressoché costanti. Si ha un valore di picco in un intorno limitato nei pressi dell'asse y di simmetria.

5. CONCLUSIONI

5.1 Trave a flessione

Si è potuto verificare che l'equazione di Navier garantisce una buona approssimazione di calcolo, infatti escludendo le aree in cui vi erano vincoli o carichi applicati, i valori calcolati analiticamente non hanno mai sovrastimato di più di 1 Mpa i dati ottenuti dal calcolo agli elementi finiti.

Nell'incastro si è potuto apprezzare uno scostamento massimo di 5 Mpa rispetto agli sforzi normali calcolati al fem, mentre nell'area di applicazione del carico concentrato vi è una totale incongruenza tra i due valori.

Lo studio delle tensioni tangenziali con l'equazione di Jourawskj si è rilevato più complicato, infatti come visto in teoria, questa esperienza ha confermato che può essere applicata solo in presenza di sezioni rettangolari, come ha dimostrato lo studio delle tensioni tangenziali in direzione y. In ogni caso è stato possibile notare che in un caso reale le τ_{zy} sono presenti nell'intera anima e in una piccola parte delle ali nella congiunzione con l'anima stessa.

La relazione di Jourawskj ha garantito una buona approssimazione nella zona centrale dell'anima per poi andare a sovrastimare fino a 5 Mpa le sollecitazioni dei nodi vicini alla congiunzione tra anima e ali; infatti nel caso reale le τ_{zy} vengono influenzate dalla presenza delle ali. Da questa osservazione viene messa in evidenza la limitazione di Jourawskj nel caso di sezioni complesse; in ogni caso i risultati forniti da tale equazione risultano a vantaggio della sicurezza progettuale.

Le tensioni tangenziali in direzione x sono state analizzate nelle sole ali in quanto, come visto dall'analisi fem, nell'anima assumono un valore nullo o trascurabile.

Agli estremi delle ali le τ_{zx} sono nulle per equilibrio, mentre al centro della sezione assumono il valore massimo. Nella zona centrale, laddove vi è una incongruenza tra la forma delle due curve, vi è una sovrastima di 5 Mpa dovuta alla perturbazione causata dalla presenza degli spigoli di giunzione tra anima e ala.

Si può concludere che l'equazione di Navier non presenta particolari restrizioni per l'ottenimento di risultati verosimili, mentre con la teoria di Jourawskj è necessario prendere in

considerazione la sezione di cui si sta facendo l'analisi in quanto, se si utilizza una sezione non rettangolare e non si adottano specifici provvedimenti, si incorre in risultati poco veritieri.

5.2 Trave a torsione

Il calcolo delle tensioni dovute a momento torcente è stato fatto utilizzando la formulazione di Prandtl, la quale si basa sull'analogia idrodinamica. Nella sezione in cui è presente l'incastro e in quella in cui è applicato il momento torcente, si può notare l'impossibilità da parte di Ansys di definire dei valori verosimili.

Per quanto riguarda tutte le altre sezioni, la componente τ_{yz} assume valori significativi solo sull'anima, e raggiunge valori massimi sulle superfici esterne. Negli spigoli di congiunzione tra anima e ali si manifestano dei valori di picco a causa della brusca variazione geometrica. Tali valori non vengono considerati nel calcolo analitico e per questo si può notare la diversità delle due curve. Il valore medio delle τ_{yz} nelle prime due sezioni dopo l'incastro viene sovrastimato dal calcolo analitico di circa 5 Mpa, mentre nelle due aree prima del carico i due approcci determinano valori di τ_{yz} pressoché identici. Da non trascurare però è il valore massimo assunto al *fem* dalle τ_{yz} nelle zone limitrofe agli spigoli, abbondantemente superiore a quello analitico.

Le τ_{xz} vengono analizzate esclusivamente sulle ali e in tutti i casi forniscono valori nulli alle estremità per motivi di equilibrio, mentre nelle vicinanze dell'asse di simmetria raggiungono il loro valore massimo. Questo non accade se si prendono in considerazione i valori analitici che come nel caso delle τ_{yz} forniscono un valore costante lungo tutto il percorso considerato; per questo è necessario confrontare il valore medio fornito dal calcolo al *fem* con quelli ricavati dalla teoria. In questo caso i calcoli analitici sovrastimano di massimo 5 Mpa quelli che sono i valori reali.

Riferimenti bibliografici

Marino Quaresimin e Michele Zappalorto (anno accademico 2011-2012). *Lezioni ed Esercizi di Costruzione di Macchine e Laboratorio*