



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI INGEGNERIA
DIPARTIMENTO DI COSTRUZIONI E
TRASPORTI
CORSO DI LAUREA DI INGEGNERIA CIVILE

TESI DI LAUREA

MODELLAZIONE NUMERICA DI PROBLEMI
IDRO-TERMO-MECCANICI
NEI MEZZI POROSI PARZIALMENTE SATURI

Laureando: **Gabriele Giacometti**

Relatore: Dr. Ing. **LORENZO SANAVIA**
Correlatore: Dr. Ing. **LORIS LUISON**

Anno accademico 2010-2011



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI INGEGNERIA
DIPARTIMENTO DI COSTRUZIONI E
TRASPORTI
CORSO DI LAUREA DI INGEGNERIA CIVILE

TESI DI LAUREA

MODELLAZIONE NUMERICA DI PROBLEMI
IDRO-TERMO-MECCANICI
NEI MEZZI POROSI PARZIALMENTE SATURI

Laureando: **Gabriele Giacometti**

Relatore: Dr. Ing. **LORENZO SANAVIA**

Correlatore: Dr. Ing. **LORIS LUISON**

Anno accademico 2010-2011

Non ho particolari talenti, sono soltanto appassionatamente curioso.
(Albert Einstein da una lettera a Carl Seelig, 11 marzo 1952)

Si è curiosi soltanto nella misura in cui si è istruiti.
(Jean-Jacques Rousseau)

Ringrazio la mia famiglia per il sostegno datomi nelle mie scelte e per l'aver sempre creduto nelle mie capacità.

Ringrazio il professor Sanavia per l'impegno profuso nel seguire questo lavoro e per l'insegnamento di nuove conoscenze utili a soddisfare la mia curiosità.

Ringrazio il dottor Luison L. per l'aiuto profuso nei miei confronti.

INDICE

<u>PREMESSA</u>	1
<u>CAPITOLO 1</u>	
Modello matematico	3
1.1 Introduzione	3
1.2 Equazioni di equilibrio macroscopico	5
1.2.1 Equazioni lineari di equilibrio della quantità di moto	8
1.2.2 Equazioni di equilibrio di massa	9
1.2.3 Equazioni di bilancio energetico	10
1.3 Equazioni costitutive	11
1.3.1 Condizioni iniziali ed al contorno	13
1.4 Formulazione agli elementi finiti	15
1.4.1 Algoritmo per l'elasto-plasticità	17
1.5 Riferimenti bibliografici	18
<u>CAPITOLO 2</u>	
Il metodo degli elementi finiti	21
2.1 Introduzione e generalità	21
2.1.1 Formulazione delle caratteristiche dell'elemento finito	22
2.1.2 Brevi cenni sui metodi di calcolo della matrice di rigidezza	25
2.1.3 Assemblaggio della matrice di rigidezza	27
2.1.4 Convergenza del metodo degli spostamenti	28
2.1.5 Considerazioni finali sul metodo agli elementi finiti	29
2.2 Riferimenti bibliografici	30

CAPITOLO 3

	Il codice Comes-Geo	31
3.1	Caratteristiche generali	31
3.2	Richiami di meccanica dei mezzi porosi saturi e parzialmente saturi	32
3.3	Suddivisione del volume in elementi finiti	35
3.4	Il metodo di Newton-Rapson	39
3.4.1	Integrazione numerica, metodo di Gauss	39
3.4.2	Dati in ingresso (pre-processamento)	41
3.5	Algoritmo di commutazione (switch)	42
3.5.1	Introduzione	42
3.5.2	Algoritmo di base, oscillazioni delle variabili, convergenza dello schema numerico	44
3.5.3	Errore di troncamento dell'algoritmo di commutazione	53
3.5.4	Switch per nodi saturi, switch per elementi completamente saturi	58
3.5.5	Confronto dei due switch proposti con due esempi: subsidenza; consolidazione del terreno	66
3.6	Teoria della consolidazione monodimensionale di Terzaghi	96
3.6.1	Esempio di consolidazione, parallelismo Comes Geo – Terzaghi	102
3.7	Riferimenti bibliografici	113

CAPITOLO 4

	Legge costitutiva termo-elasto-plastica	115
4.1	Effetti termici indotti	115
4.1.1	Risposta del terreno ai cicli di riscaldamento e raffreddamento	116
4.1.2	Variazione della pressione di preconsolidazione rispetto alla temperatura	118
4.1.3	Variazione dell'angolo di attrito rispetto alla temperatura	118
4.2	Modello costitutivo per il comportamento termo-elasto-plastico dei terreni	119
4.2.1	Termo-elasticità	119
4.2.2	Termo-plasticità	121
4.2.2.1	<i>Meccanismo termo-elasto-plastico isotropo</i>	123
4.2.2.2	<i>Meccanismo termo-plastico deviatorico</i>	125
4.2.2.3	<i>Accoppiamento dei meccanismi</i>	127

4.3	Risultati numerici in letteratura	128
4.3.1	Consolidazione isotropa dopo riscaldamento	128
4.3.2	Consolidazione isotropa in seguito a cicli di riscaldamento e raffreddamento	129
4.3.3	Test sull'argilla naturale (Boom-clay) condotto da Baldi e al. (1991)	130
4.4	Riferimenti bibliografici	131

CAPITOLO 5

Il modello costitutivo

termo-idro-elasto-plastico ACMEG-TS 133

5.1	La parziale saturazione nel suolo	135
5.1.1	Comportamento meccanico	135
5.1.1.1	<i>Effetti della suzione sul comportamento della compressione in condizioni isoterme</i>	135
5.1.1.2	<i>Effetti della suzione sul comportamento della compressione in condizioni non isoterme</i>	138
5.1.2	Conclusioni	139
5.2	Il modello ACMEG-TS	141
5.2.1	Meccanismo isotropo plastico	141
5.2.2	Meccanismo deviatorico plastico	143
5.2.3	Accoppiamento tra i due meccanismi plastici	144
5.3	Parte costitutiva della ritenzione idrica	147
5.3.1	ACMEG-IDRO	149
5.3.2	Confronto	152
5.4	Riferimenti bibliografici	153

CAPITOLO 6

Validazione dell'implementazione del modello ACMEG-TS nel codice f.e. COMES-GEO

6.1	Introduzione	155
6.2	Validazione di ACMEG-TS con Aboustit	158
6.2.1	Dati in ingresso (pre-processamento)	158

6.2.2	Risultati (post-processamento)	161
6.3	Validazione elasto-plastica con ACMEG-TS e Boom-clay	164
6.3.1	Dati in ingresso (pre-processamento)	164
6.3.2	Risultati (post-processamento)	168
6.4	Casi elastici, senza drenaggio, meccanici, termici, o misti	171
6.4.1	Risultati (post-processamento)	171
6.5	Casi elastoplastici, senza drenaggio, meccanici, termo-meccanici	180
6.5.1	Risultati(post-processamento)	180
6.6	Casi elastoplastici, con drenaggio, termo-meccanici	183
6.6.1	Risultati(post-processamento)	183
6.7	Riferimenti bibliografici	193

PREMESSA

Negli ultimi anni è stato riscontrato un interesse sempre più crescente sulle problematiche inerenti il comportamento termo-meccanico dei terreni grazie ad innovative applicazioni tecnologiche quali:

- stoccaggio di scorie radioattive ad alta attività (Laloui & Modaressi, 2002);
- accumulazione termica (Burger e al., 1985);
- accumulazione di gas serra;
- strutture geotermiche (Laloui e al., 2003);
- attività di perforazione, estrazione e iniezione per la produzione di petrolio o gas metano;
- cavi interrati dell'alta tensione (Mitchell e al., 1982);
- Fenomeni di subsidenza;
- Fenomeni di movimento franoso;

Scopo della tesi è stata l'applicazione ad alcuni casi reali, di interesse ingegneristico e sociale, della legge costitutiva termo-elasto-plastica per terreni saturi e parzialmente saturi implementata nel codice **COMES-GEO** (proprietà dell'Università di Padova). Tale software applica il metodo degli elementi finiti allo studio dei mezzi porosi multifase, con una legge termo-plastica adatta principalmente per i terreni a grana fine, sviluppata dal Dr Lyesse Laloui, L., docente dell'Università di Losanna, (**EPFL – Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne**), dal Dr Cane Cekerevac e dal Dr Bertrand François.

CAPITOLO 1

MODELLO MATEMATICO

1.1 INTRODUZIONE

Negli ultimi anni è stato evidenziato un aumento dell'interesse nelle analisi termo-idromeccaniche di materiali saturi e insaturi, dovuto ad un'ampia gamma di applicazioni in ingegneria. Gli esempi tipici appartengono all'ambito geo-meccanico, dove varie problematiche sono di forte attrattiva per la comunità di ricerca. In questo lavoro viene presentato uno spunto nello sviluppo di un modello fisico, matematico e numerico adatto alla simulazione dei problemi geo-meccanici di ingegneria.

Viene proposta l'applicazione di un modello termo-elasto-plastico per mezzi porosi multifase (geomateriali) ad un caso reale e di interesse ingegneristico tramite il codice F.E.M., geometricamente lineare, COMES-GEO [1]. Il materiale multifase è modellato come un mezzo poroso e deformabile dove si considerano i flussi di calore, dell'acqua e del gas [1],[2],[3], come ricordato nella sezione 1.2. Nella fattispecie, la fase gassosa è modellata come un gas ideale composto da aria secca e vapore acqueo, considerati specie miscibili. Sono contemplati i cambiamenti di fase dell'acqua (evaporazione-condensazione, adsorbimento-deadsorbimento), lo scambio di calore attraverso conduzione e convezione, ed il calore latente del liquido (generalmente acqua). Le variabili indipendenti sono gli spostamenti, la pressione capillare, la pressione del gas e la temperatura. Le equazioni governanti, riportate a livello macroscopico nella sezione 1.2, si basano su procedure di *averaging* (mediazione, teoria ibrida della miscela), seguendo il modello Termo-Idro-Meccanico generale sviluppato in [1]. Le equazioni di equilibrio macroscopico sono discretizzate nello spazio e nel tempo (vedi sezione 1.4). In particolare, è seguita la procedura di Galerkin per la discretizzazione nello spazio, mentre il Metodo Trapezoidale Generalizzato è usato per l'integrazione nel tempo. Sono supposte piccole deformazioni e condizioni di carico quasi-statico. La pressione di vapore risulta

essere inferiore alla pressione di saturazione dell'acqua (cavitazione)¹ in corrispondenza delle bande di taglio nel caso di sabbie dense (materiale dilatante) in condizioni non drenate, come osservato sperimentalmente in [4] e [5]. Ciò non si riscontra quando si assumono parametri di sabbia sciolta (materiale contraente) e materiale granulare con flusso plastico isocoro. Vari esempi sono stati simulati per dare risalto all'importanza di un modello multifase non-isotermico per la simulazione del comportamento idro-termomeccanico di terreni saturi e parzialmente saturi. Riguardo alle proprietà di regolarizzazione dei flussi di acqua del modello multifase, dovuto alla presenza di un operatore Laplaciano nell'equazione di equilibrio di massa dei liquidi quando viene utilizzata la legge del Darcy, il lettore interessato può vedere [6] e [12]. La scala di lunghezza interna, I_w , contenuta nel modello è presentata in [13]. Ulteriori funzioni interessanti sull'efficacia di I_w sono presenti in [14] e [15]. Qui viene evidenziato che, per varie simulazioni numeriche precedentemente accennate, un singolo modello THM può essere usato con successo ([15], [16]) ed in modo diretto.

¹ La cavitazione (rapido cambiamento di fase a temperatura ambiente) può accadere quando il valore assoluto della pressione dell'acqua è minore o uguale alla pressione di saturazione alla temperatura considerata (trascurando la tensione superficiale all'interfaccia delle bolle di vapore che si generano). Per la condizione di equilibrio termodinamico, la pressione di vapore all'interfaccia fra materiale poroso saturo e parzialmente saturo è uguale, a $T = 20^\circ\text{C}$, al valore di saturazione di 2338,8 Pa (cioè 98986,2 Pa con riferimento alla pressione atmosferica).

1.2 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO MACROSCOPICO

Il modello matematico completo necessario per simulare il comportamento transitorio termo-idro-meccanico (THM) di mezzi porosi completamente e/o parzialmente saturati è sviluppato in [1] e [3] utilizzando i processi di media (*averaging*, Hassanizadeh e Gray [19]-[21]). Il modello fisico di base è brevemente riassunto in questa sezione per ragioni di completezza.

Il mezzo poroso parzialmente saturo è trattato come un sistema multifase composto da $\pi = 1, \dots, k$ costituenti, con i vuoti dello scheletro solido (s) riempiti di acqua (w) e gas (g). Quest'ultimo viene assunto come miscela ideale di due specie: aria secca (ga , gas non condensabile) e vapore acqueo (gw , gas condensabile). Usando la teoria ibrida delle miscele e teoremi di media nello spazio è possibile definire un volume elementare rappresentativo (R.E.V.) delle caratteristiche fisico-meccaniche del mezzo multifasico.

Nel R.E.V. le singole fasi verranno considerate come sovrapposte ed accoppiate secondo le proprietà fisiche di interesse che influiscono alla definizione del comportamento meccanico-fisico dell'insieme.

Al volume elementare rappresentativo (R.E.V) viene associato un volume $dv(x, t)$ nella configurazione deformata, $B_t \subset \mathcal{R}^3$ dove x è il vettore delle coordinate spaziali e t è il tempo attuale, in modo tale che le equazioni microscopiche integrate sul dominio e formino le equazioni macroscopiche dell'equilibrio [1], [3] (Figura 1).

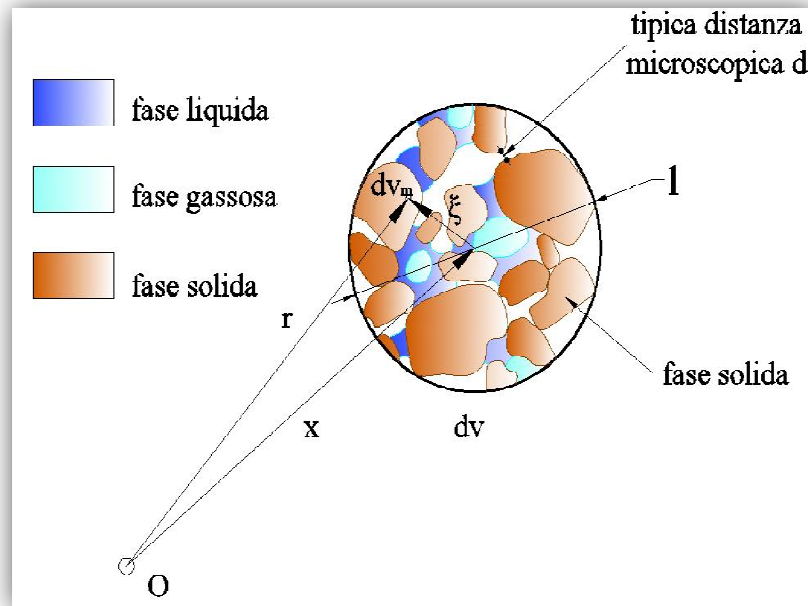


Figura 1. Elemento rappresentativo di volume (R.E.V.) di un mezzo poroso composto da una fase solida e due fluide.

A livello macroscopico il mezzo poroso è modellato con un volume continuo sostitutivo B_t , con frontiera ∂B_t , che riempie l'intero dominio simultaneamente, mentre i liquidi reali ed il solido riempiono soltanto una parte del volume stesso. In questo continuo sostitutivo ogni costituente π ha una densità ridotta ottenuta attraverso la frazione di volume:

$$\eta^\pi(x, t) = \frac{dv^\pi(x, t)}{dv(x, t)}$$

[1.1]

Nel modello generale [1] sono presi in considerazione:

- la forza inerziale;
- la conduzione di calore;
- la convezione di calore;
- la diffusione di vapore;
- il flusso dell'acqua (dovuto a gradienti di pressione o ad effetti di capillarità);
- i cambiamenti di fase dell'acqua (evaporazione e condensazione) all'interno dei pori.

Il solido è deformabile e non polare; i fluidi, il solido e i campi termici sono accoppiati. Tutti i liquidi sono in contatto con la fase solida. I costituenti sono assunti per essere isotropi, omogenei, immiscibili (tranne aria secca e vapore) e chimicamente non reagenti. Nel medesimo volume rappresentativo si suppone l'equilibrio termico locale fra la matrice solida, il gas e le fasi liquide, in modo che la temperatura sia la stessa per tutti i costituenti. Lo stato del mezzo è descritto da:

p^c pressione capillare

p^g pressione del gas

T temperatura assoluta

$u = [u_x, u_y]$ spostamenti della matrice solida

Nelle zone parzialmente sature, l'acqua è separata dal relativo vapore da un menisco concavo (acqua capillare). A causa della curvatura di questo menisco, l'equazione di equilibrio di assorbimento (vedi [22]) dà la relazione fra la pressione capillare $p^c(x, t)$, la pressione del gas $p^g(x, t)$, il t e la pressione dell'acqua $p^w(x, t)$, [22]:

$$p^c = p^g - p^w$$

[1.2]

La pressione nei pori è definita positiva se di compressione per i fluidi, mentre la tensione è definita positiva se di trazione per la fase solida.(Fig.2)

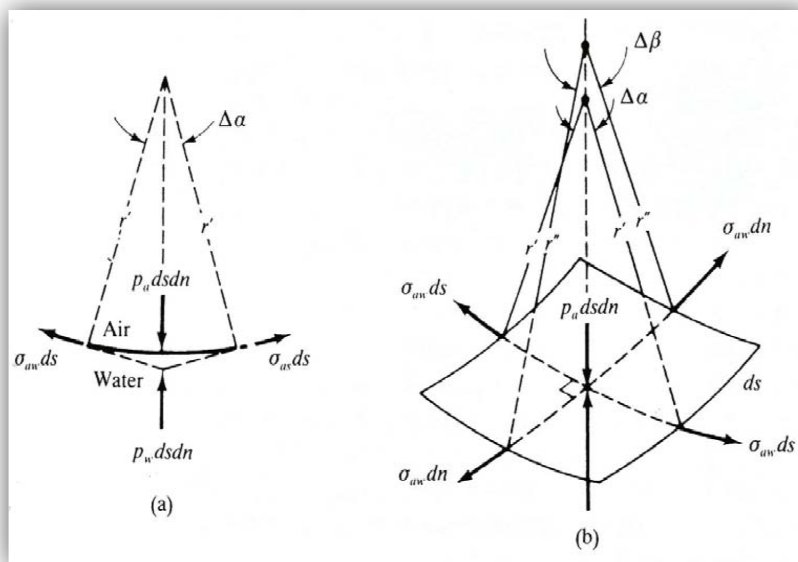


Figura 2. Rappresentazione della pressione capillare.

Inoltre, nella teoria multifase dei materiali è comune presupporre come riferimento il moto del solido e descrivere i liquidi in termini di moto relativo al solido. Ciò significa introdurre la velocità dei fluidi come relativa rispetto al solido. La velocità relativa dei fluidi $v^{\pi s}(x, t)$ (o velocità di diffusione) è data da:

$$v^{\pi s}(x, t) = v^{\pi}(x, t) - v^s(x, t) \quad \text{con } \pi = g, w \quad [1.3]$$

e sarà descritta dalla legge di Darcy.

Vengono ora ricapitolate le equazioni macroscopiche di equilibrio del modello implementato.

Sono ottenute introducendo le seguenti ipotesi nel modello sviluppato in [1]:

- al livello microscopico, il mezzo poroso è supposto per essere costituito da componenti incompressibili di acqua e solido, mentre il gas è considerato comprimibile;
- il processo è considerato come quasi-statico ed è sviluppato in una struttura geometricamente lineare.

1.2.1 Equazioni lineari di equilibrio della quantità di moto

L'equazione lineare di equilibrio della quantità di moto della miscela in termini di tensione totale di Cauchy $\sigma(x, t)$ assume la forma:

$$\text{div } \sigma + \rho g = 0 \quad [1.4]$$

in cui $\rho(x, t)$ è la densità della miscela:

$$\rho = [1 - n]\rho^s + nS_w\rho^s + nS_g\rho^g \quad [1.5]$$

dove $n(x, t)$ è la porosità $S_w(x, t)$ e $S_g(x, t)$ sono rispettivamente il grado di saturazione dell'acqua e del gas.

La tensione totale di Cauchy può essere scomposta seguendo il principio delle tensioni efficace:

$$\sigma = \sigma' - [p - S_w p^c] \mathbf{1} \quad [1.6]$$

dove $\sigma'(x, t)$ è il tensore efficace modificato delle tensioni di Cauchy e $\mathbf{1}$ è il tensore identità di secondo grado. Questa forma che utilizza la saturazione come funzione peso per le pressioni parziali è stata introdotta per la prima volta in una media volumetrica [23] (vedi anche [24] e [25]) ed è termodinamicamente consistente ([22], [34] e recentemente anche [9]). La forma di Eq. [1.6] suppone il grano incompressibile (rispetto allo scheletro), che è ipotesi comune nella meccanica dei terreni (per rappresentare il grano comprimibile, il coefficiente α di Biot dovrebbe comparire davanti alla pressione del solido; questo risulta importante nelle rocce e nel calcestruzzo).

1.2.2 Equazioni di equilibrio di massa

L'equazione di conservazione di massa per lo scheletro solido, l'acqua ed il vapore è:

$$\begin{aligned} & n[\rho^w - \rho^{gw}] \left[\frac{\partial S_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] + [\rho^w S_w + \rho^{gw} [1 - S_w]] \operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \\ & + [1 - S_w] n \left[\frac{\partial \rho^{gw}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{gw}}{\partial p^c} \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] - \operatorname{div} \left(\rho^g \frac{M_a M_w}{M_g^2} D_g^{gw} \operatorname{grad} \left(\frac{\partial p^{gw}}{\partial p^c} \right) \right) + \\ & - \operatorname{div} \left(\rho^w \frac{k k^{rw}}{\mu^w} [\operatorname{grad}(p^g) - \operatorname{grad}(p^c) - \rho^w g] \right) - \operatorname{div} \left(\rho^{gw} \frac{k k^{rg}}{\mu^g} [\operatorname{grad}(p^g) - \rho^g g] \right) - \beta_{swg} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad [1.7]$$

dove, in particolare $k(x, t)$ è il tensore di permeabilità intrinseca, $k^{rw}(x, t)$ la permeabilità relativa dell'acqua, $\mu^w(x, t)$ la viscosità dell'acqua e $\beta_{swg} = \beta_s [1 - n] [S_g \rho^g + S_w \rho^w]$. I flussi entranti e uscenti sono stati descritti usando la legge di Fick Eq. (13) per la diffusione del vapore nella fase gassosa e dalla legge di Darcy per il flusso d'acqua e gas.

Analogamente l'equazione di equilibrio di massa per l'aria secca è:

$$\begin{aligned}
 & -\rho^{ga} \left[\frac{\partial S_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] - \beta_s \rho^{ga} [1-n][1-S_w] \frac{\partial T}{\partial t} + [1-S_w] \rho^{ga} \operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \\
 & + [1-S_w] n \left[\frac{\partial \rho^{ga}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{ga}}{\partial p^g} \frac{\partial p^g}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{ga}}{\partial p^c} \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] - \operatorname{div} \left(\rho^g \frac{M_a M_w}{M_g^2} D_g^{ga} \operatorname{grad} \left(\frac{\partial p^{ga}}{\partial p^g} \right) \right) \\
 & - \operatorname{div} \left(\rho^{ga} \frac{k k^{rg}}{\mu^g} [\operatorname{grad}(p^g) - \rho^g g] \right) = 0
 \end{aligned}$$

[1.8]

le quantità $S_w(x, t)$, $S_g(x, t)$, $k^{rw}(x, t)$, $k^{rg}(x, t)$ sono definite al livello costitutivo, come descritto nella sezione 1.3.

1.2.3 Equazioni di bilancio energetico

L'equazione di bilancio energetico della miscela è:

$$\begin{aligned}
 & (\rho C_p)_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_w C_p^w v^w \left[\frac{k k^{rw}}{\mu^w} [-\operatorname{grad}(p^g) + \operatorname{grad}(p^c) + \rho^w g] \right] \cdot \operatorname{grad} T \\
 & + \rho_g C_p^g v^g \left[\frac{k k^{rg}}{\mu^g} [-\operatorname{grad}(p^g) + \rho^g g] \right] \cdot \operatorname{grad} T - \operatorname{div}(\chi_{\text{eff}} \operatorname{grad} T) = -\dot{m}_{\text{vap}} \Delta H_{\text{vap}}
 \end{aligned}$$

[1.9]

dove, in particolare, $\dot{m}_{\text{vap}} \Delta H_{\text{vap}}$ considera il contributo dell'evaporazione e della condensazione. Questa equazione di equilibrio contempla lo scambio di calore per conduzione e convezione come pure lo scambio di calore latente (vedi [1]) e trascura i termini relativi al lavoro meccanico indotto dalle variazioni di densità, dovute ai mutamenti di temperatura delle fasi, e dai cambiamenti di frazione di volume; l'equazione dell'equilibrio più generale di A è sviluppata dentro [18].

1.3 EQUAZIONI COSTITUTIVE

Si valuta la pressione $p^g(x, t)$. Per una miscela gassosa di aria secca e di vapore acqueo, si introduce la legge ideale dei gas perché l'aria umida è supposta essere una miscela perfetta di due gas ideali. L'equazione di stato del gas perfetto, cioè l'equazione di Clapeyron e la legge di Dalton applicate all'aria secca, ga , al vapore acqueo, gw , all'aria umida, g , danno:

$$\begin{aligned} p^{ga} &= \frac{\rho^{ga} RT}{M_a} & p^{gw} &= \frac{\rho^{gw} RT}{M_w} \\ p^g &= p^{ga} + p^{gw} & \rho^g &= \rho^{ga} + \rho^{gw} \end{aligned} \quad [1.10]$$

Nelle zone parzialmente sature, l'equilibrio della pressione del vapore acqueo, $p^{gw}(x, t)$, si può ottenere dall'equazione di Kelvin-Laplace

$$p^{gw} = p^{gws}(T) e^{\frac{\rho^{gw} RT}{M_w}} \quad [1.11]$$

dove la pressione di saturazione del vapore acqueo, $p^{gws}(x, t)$, dipendendo soltanto dalla temperatura $T(x, t)$, può essere calcolata con l'equazione di Clausius-Clapeyron o con correlazione empirica. La saturazione, $S_\pi(x, t)$, e la permeabilità relativa, $k^\pi(x, t)$, sono funzioni della pressione capillare, p^c , e della temperatura, T , determinate sperimentalmente:

$$S_\pi = S_\pi(p^c, T) \quad k^\pi = k^\pi(p^c, T) \quad \pi = w, g$$

Per la miscela binaria di gas, aria secca e vapore acqueo, la legge di Fick dà le seguenti velocità relative $v_g^\pi = v^\pi - v^g$ ($\pi = ga, gw$) della specie che si diffondono:

$$v_g^{ga} = -\frac{M_a M_w}{M_g^2} D_g^{ga} \text{grad} \left(\frac{\partial p^{ga}}{\partial p^g} \right) = \frac{M_a M_w}{M_g^2} D_g^{ga} \text{grad} \left(\frac{\partial p^{gw}}{\partial p^g} \right) = -v_g^{gw} \quad [1.12]$$

dove D_g^{ga} è il tensore efficace di diffusione ed M_g è la massa molare della miscela del gas:

$$\frac{1}{M_g} = \frac{\rho^{gw}}{\rho^g} \frac{1}{M_w} + \frac{\rho^{ga}}{\rho^g} \frac{1}{M_a} \quad [1.13]$$

Si suppone che il comportamento elasto-plastico dello scheletro solido sia descritto dalla teoria classica di elasto-plasticità, indipendente dal rateo, per problemi geometricamente lineari. Per semplicità la funzione dello snervamento che limita le tensioni efficaci, $\sigma'(x,t)$, è quella di Drucker-Prager, che considera il comportamento dilatante o contraente di sabbie dense o sciolte rispettivamente. L'implementazione della legge costitutiva ACMEG-TS, ispirata alla CamClay verrà discusso in appositi capitoli. Il *return mapping* e il tensore di consistenza tangente sono sviluppati risolvendo i diversi comportamenti della superficie di snervamento di Drucker-Prager nella zona d'apice e usando il concetto di plasticità multi-meccanismo, e seguendo un'idea suggerita in [26] nel caso di flusso plastico associato e di flusso plastico (deviatorico) non associato. Il 'return mapping' e il tensore di consistenza tangente usati per le simulazioni numeriche sono sviluppati in [27] per hardening/softening isotropo lineare e plasticità volumetrico-deviatorica non associata nel caso di grandi deformazioni elasto-plastiche; qui si considera solo il caso geometricamente lineare.

Il comportamento meccanico dello scheletro solido è supposto essere governato dalla funzione di energia libera di Helmholtz, nella forma:

$$\Psi = \Psi(\varepsilon^e, \xi)$$

dipendente dal tensore delle piccole deformazioni elastiche, $\varepsilon^e(x,t)$, e dalla variabile interna scalare di deformazione di hardening, $\xi = \xi(x,t)$, cioè la deformazione plastica equivalente. La seconda legge della termodinamica fornisce, attraverso la limitazione dell'isotropia, le relazioni costitutive

$$\sigma' = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} \quad q = - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad [1.14]$$

e la disuguaglianza di dispersione

$$\sigma' : \dot{\varepsilon}^e - q \dot{\xi} \geq 0 \quad [1.15]$$

dove $q(x, t)$ è la variabile interna di stress che valuta l'evoluzione della superficie di snervamento nello spazio delle tensioni. Le equazioni di sviluppo per i termini rateo della disuguaglianza di dispersione [1.15] possono essere ricavate dal postulato della massima dispersione plastica nel caso di flusso plastico associato [28]:

$$\dot{\varepsilon}^c = \dot{\varepsilon} - \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial q} \qquad \dot{\xi} = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial q} \quad [1.16]$$

soggette alle classiche condizioni di carico/scarico di Kuhn-Tucker

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad F(\sigma', q) \leq 0 \quad \dot{\gamma} F = 0 \quad [1.17]$$

in cui $\dot{\gamma}$ è il parametro continuo di consistenza e F la funzione di snervamento isotropo.

1.3.1 Condizioni iniziali e al contorno

Per concludere sono necessarie le condizioni iniziali e al contorno. Le condizioni iniziali specificano completamente lo stato delle variabili primarie di stato al tempo $t=t_0$, in tutto il dominio analizzato, B , e il relativo contorno, ∂B :

$$\left(\partial B = \partial B_\pi \cup \partial B_\pi^q, \pi = g, c, T, u \right) \quad p^g = p_0^g, p^c = p_0^c, T = T_0, u = u_0, \text{ su } B \cup \partial B \quad [1.18]$$

Le condizioni al contorno (BC) possono essere del tipo di Dirichlet su ∂B_π per $t \geq t_0$:

$$p^g = \hat{p}^g, \text{ su } \partial B_g \quad p^c = \hat{p}^c, \text{ su } \partial B_c \quad T = \hat{T}, \text{ su } \partial B_T \quad u = \hat{u}, \text{ su } \partial B_u \quad [1.19]$$

o del tipo di Cauchy (BC miste) su ∂B_π^q per $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} & \left(n S_g \rho^{ga} v^{gs} + J_d^{ga} \right) \cdot n = q^{ga}, \text{ su } \partial B_g^q \\ & \left(n S_w \rho^w v^{ws} + n S_g \rho^{gw} v^{gs} + J_d^{gw} \right) \cdot n = q^{gw} + q^w + \beta_c \left(\rho^{gw} - \rho_\infty^{gw} \right), \text{ su } \partial B_c^q \\ & \left(n S_w \rho^w v^{ws} \Delta H_{\text{vap}} - \chi_{\text{eff}} \text{grad} T \right) \cdot n = q^T + q^w + \alpha_c (T - T_\infty) + \epsilon \sigma_0 (T^4 - T_\infty^4), \text{ su } \partial B_T^q \\ & \sigma \cdot n = \bar{t}, \text{ su } \partial B_u^q \end{aligned} \quad [1.20]$$

dove $n(x, t)$ è il vettore unitario normale, che punta verso il gas circostante, $q^{ga}(x, t)$, $q^{gw}(x, t)$, $q^w(x, t)$, $q^T(x, t)$ sono rispettivamente i flussi imposti di aria secca, del vapore acqueo, dell'acqua e il flusso imposto di calore, e $\bar{t}(x, t)$ è il vettore di trazione imposta relativa al tensore totale di Cauchy; $\rho_\infty^{gw}(x, t)$ e $T_\infty(x, t)$ sono la densità del vapore acqueo e la temperatura nel campo lontano della fase gassosa indisturbata, $e(x, t)$ è l'emissività dell'interfaccia, σ_0 la costante di Stefan-Boltzmann, mentre $\alpha_c(x, t)$ e $\beta_c(x, t)$ sono coefficienti di calore convettivo e di scambio di massa. Le condizioni al contorno con solo i flussi imposti sono dette condizioni di Neumann. Le condizioni al contorno relative solamente a scambi di calore e umidità dette condizioni di Robin.

1.4 FORMULAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI

Il modello agli elementi finiti è derivato dall'applicazione della procedura di Galerkin per l'integrazione spaziale ed il Metodo dei Trapezi Generalizzato per l'integrazione temporale della forma debole delle equazioni di equilibrio della sezione 2 (vedi per esempio [1]).

In particolare, dopo la discretizzazione spaziale all'interno della formulazione isoparametrica, si ottiene il seguente sistema di equazioni, non simmetrico, non lineare e accoppiato:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{gg} & \mathbf{C}_{gc} & \mathbf{C}_{gt} & \mathbf{C}_{gu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{cc} & \mathbf{C}_{ct} & \mathbf{C}_{cu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{tc} & \mathbf{C}_{tt} & \mathbf{C}_{tu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}^g \\ \bar{\mathbf{p}}^c \\ \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{gg} & \mathbf{K}_{gc} & \mathbf{K}_{gt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{cg} & \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ct} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{tg} & \mathbf{K}_{tc} & \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{ug} & \mathbf{K}_{uc} & \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}^g \\ \bar{\mathbf{p}}^c \\ \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_g \\ \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_t \\ \mathbf{f}_u \end{bmatrix} \quad [1.21]$$

dove gli spostamenti del solido, $u(x,t)$, la pressione capillare, $p^c(x,t)$, e del gas, $p^g(x,t)$, e la temperatura, $T(x,t)$, sono espressi nell'intero dominio da funzioni di forma matriciale $N_u(x)$, $N_c(x)$, $N_g(x)$, $N_T(x)$ e dai vettori dei valori nodali $u = N_u \bar{u}$, $p^c = N_c \bar{p}^c$, $p^g = N_g \bar{p}^g$, $T = N_T \bar{T}$.

In una forma più concisa l'Eq. [1.21] può essere scritta come:

$$C \frac{\partial X}{\partial t} + KX = F \quad [1.22]$$

Le differenze finite nel tempo sono usate per la soluzione del problema dei valori iniziali in uno step finito nel tempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Seguendo il Metodo dei Trapezi Generalizzato come indicato in [1], l'Eq. [1.22] può essere riscritta al tempo t_{n+1} usando le relazioni

$$\left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_{n+\theta} = \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta t}$$

$$X_{n+\theta} = [1-\theta]X_n + \theta X_{n+1}, \text{ con } \theta = [0,1], \quad [1.23]$$

dove X_n e X_{n+1} sono i vettori di stato ai tempi t_n e t_{n+1} , così da ottenere

$$G(X_{n+1}) = [C + \theta \Delta t K]_{n+0} X_{n+1} - [C - [1 - \theta] \Delta t K]_{n+0} X_n - \Delta t F_{n+0} = 0 \quad [1.24]$$

Generalmente in letteratura si suggerisce l'uso di $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ per un'analisi linearizzata accurata e stabile. Nella sezione degli esempi, è stata utilizzata l'integrazione implicita nel tempo ($\theta = 1$).

Dopo l'integrazione nel tempo, il sistema di equazioni non lineari viene linearizzato, così si ottiene il sistema di equazioni che può essere risolto numericamente (in forma compatta)

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{X_{n+1}^i} \Delta \mathbf{X}_{n+1}^{i+1} \cong -\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^i) \quad [1.25]$$

con il simbolo $(\bullet)_{n+1}^{i+1}$ che indica l'iterazione corrente ($n+1$) nel passo temporale corrente ($i+1$) e dove lo Jacobiano ha la forma seguente

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{X_{n+1}^i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G^g}{\partial \bar{p}^g} & \frac{\partial G^g}{\partial \bar{p}^c} & \frac{\partial G^g}{\partial \bar{T}} & \frac{\partial G^g}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial G^c}{\partial \bar{p}^g} & \frac{\partial G^c}{\partial \bar{p}^c} & \frac{\partial G^c}{\partial \bar{T}} & \frac{\partial G^c}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial G^T}{\partial \bar{p}^g} & \frac{\partial G^T}{\partial \bar{p}^c} & \frac{\partial G^T}{\partial \bar{T}} & \frac{\partial G^T}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial G^u}{\partial \bar{p}^g} & \frac{\partial G^u}{\partial \bar{p}^c} & \frac{\partial G^u}{\partial \bar{T}} & \frac{\partial G^u}{\partial \bar{u}} \end{bmatrix} \quad [1.26]$$

A causa del forte accoppiamento tra il problema meccanico, quello termico ed il problema dei fluidi nei pori, una soluzione unica di (1.26) è preferibile usando lo schema di Newton.

Per concludere, il vettore soluzione viene aggiornato tramite la relazione incrementale:

$$\mathbf{X}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{X}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{X}_{n+1}^{i+1} \quad [1.27]$$

1.4.1 Algoritmo per l'elasto-plasticità

Il problema del calcolo di ε^e , ξ , σ' è tipicamente risolto da un operatore composto da un previsore elastico e da un correttore plastico [29]. Il calcolo dello stato elastico di tentativo, $(\bullet)^{\text{tr}}$, è basato sul “congelamento” del flusso plastico al tempo t_{n+1} , cioè $\dot{\varepsilon}^p = \cos t$ conseguentemente $\dot{\varepsilon}^p = 0$. $[\varepsilon_{n+1}^e]^{\text{tr}}$ è ottenuto dal passo di carico per mezzo di $[\varepsilon_{n+1}^e]^{\text{tr}} = \varepsilon_{n+1}$. Il corrispondente stato elastico di tentativo è ottenuto dalla funzione di energia libera iperelastica:

$$\sigma'_{n+1}{}^{\text{tr}} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} \right] \varepsilon^e, \text{ con } \varepsilon^e = [\varepsilon_{n+1}^e]^{\text{tr}} \quad [1.28]$$

$$\mathbf{q}_{n+1}{}^{\text{tr}} = - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right] \xi, \text{ con } \xi = \xi_{n+1}{}^{\text{tr}} \quad [1.29]$$

Se questo stato di tentativo è ammissibile, esso non viola la disuguaglianza $F_{n+1}{}^{\text{tr}} = F(\sigma'_{n+1}{}^{\text{tr}}, \mathbf{q}_{n+1}{}^{\text{tr}}) \leq 0$ e lo stato tensionale è quindi già stato computato. Altrimenti si applica la *return mapping* o la procedura di correttore plastico al fine di valutare $\Delta \gamma_{n+1}$ che soddisfi la condizione di consistenza $F_{n+1} = 0$.

Noto $\Delta \gamma_{n+1}$ la deformazione plastica equivalente viene computata tramite l'integrazione di Eulero all'indietro dell'Eq. [1.29]

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \Delta \gamma_{n+1} \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1} \quad [1.30]$$

Le componenti di tensione di Cauchy sono allora calcolate dalla legge costitutiva iperelastica Eq. [1.28] con l'energia libera $\Psi = \hat{\Psi}(\varepsilon^e, \xi)$, scritta in funzione delle componenti elastiche principali di deformazione e delle deformazioni plastiche equivalenti (per l'incrudimento lineare isotropo), è:

$$\hat{\Psi} = \frac{L}{2} [\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e]^2 + G [\varepsilon_1^{e2} + \varepsilon_2^{e2} + \varepsilon_3^{e2}] + \frac{1}{2} h \xi^2 \quad [1.31]$$

dove L ed G sono le costanti elastiche di Lamé' e h il modulo d'incrudimento lineare.

1.5 RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Lewis R.W., Schrefler B.A., *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*. 2nd edn. Wiley, Chichester (1998)
2. Gawin D., Baggio P., Schrefler B.A., *Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media*. Int J Num Meth Fluids 20(7):967–987 (1995)
3. Schrefler B.A., *Mechanics and thermodynamics of saturated-unsaturated porous materials and quantitative solutions*. Appl Mech Review 55(4):351–388 (2002)
4. Mokni M., Desrues J., *Strain localisation measurements in undrained plane-strain biaxial tests on hostun RF sand*. Mech Cohesive-Frictional Materials 4:419–441 (1998)
5. Vardoulakis J., Sulem J., *Bifurcation analysis in geomechanics*. Blakie Academic and Professional, London (1995)
6. Schrefler B.A., Sanavia L., Majorana C.E., *A multiphase medium model for localisation and postlocalisation simulation in geomaterials*. Mech Cohesive-Frictional Mater 1:95–114 (1996)
7. Gawin D., Sanavia L., Schrefler B.A., *Cavitation modelling in saturated geomaterials with application to dynamic strain localisation*. Int J Num Meth Fluids 27:109–125 (1998)
8. Schrefler B.A., Sanavia L., Gawin D., *Modelling of strain localisation in fully saturated soils*. In: Adachi T., Oka F., Yashima A. (eds) *Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, Balkema, Rotterdam (1998)
9. Borja R.J., *Cam-clay plasticity. Part V: A mathematical framework for three-phase deformation and strain localisation analyses of partially saturated porous media*. Comp Meth Appl Mech Engrg 193:5301–5338 (2004)
10. Ehlers W., Graf T., Ammann M., *Deformation and localization analysis of partially saturated soil*. Comp Meth Appl Mech Engrg 193:2885–2910 (2004)
11. Sanavia L., Gawin D., Pesavento F., Rossetto M., Schrefler B.A., *Numerical analysis of non-isothermal multiphase geomaterials with application to strain localisation simulation of initially water saturated soils*. In: Proceedings of the Complas VII, VII International Conference on Computational Plasticity, Barcelona, Spain April 7–10 (on CD) (2003)
12. Diebels S., Ehlers W., Ellsiepen P., Volk W., *On the regularization of shear band phenomena in liquid-saturated and empty soils*. In: Brillard A., Ganghoffer J.F. (eds) *Proceedings of the*

- Euromech Colloquium 378 on Nonlocal Aspects in Solid Mechanics*, University of Mulhouse, 58–63 (1998)
13. Zhang H.W., Sanavia L., Schrefler B.A., *An internal length scale in strain localisation of multiphase porous media*. *Mech Cohesive-Frictional Mater* 4:443–460 (1999)
 14. Zhang H.W., Schrefler B.A., *Gradient dependent plasticity model and dynamic strain localisation analysis of saturated and partially saturated porous media: one-dimensional model*. *Eur J Mech A/Solids* 19:503–524 (2000)
 15. Schrefler B.A., Zhang H.W., Sanavia L., *Interaction between different internal length scales in fully and partially saturated porous media-the 1-d case*. *Int J Numer Anal Meth geomech*, accepted
 16. Zhang H.W., Schrefler B.A., *Particular aspects of internal length scales in strain localisation analysis of multiphase porous materials*. *Comput Meth Appl Mech Eng* 193:2867–2884 (2004)
 17. Goldstein R.J., Eckert E.R.G., Ibele W.E., et al., *Heat transfer a review of 2001 literature*. *Int J Heat and Mass Transfer* 11:1887–1992 (2003)
 18. Khalili N., Loret B., *An Elasto-Plastic Model for non-isothermal analysis of flow and deformation in unsaturated porous media: formulation*. *Int J Solids and Struct* 38:8305–8330 (2001)
 19. Hassanizadeh M., Gray W.G., *General conservation equations for multi-phase system: 1. Averaging technique*. *Adv Water Resources* 2:131–144 (1979)
 20. Hassanizadeh M., Gray W.G., *General conservation equations for multi-phase system: 2. Mass, momenta, energy and entropy equations*. *Adv Water Resources* 2:191–201 (1979)
 21. Hassanizadeh M., Gray W.G., *General conservation equations for multi-phase system: 3. Constitutive theory for porous media flow*. *Adv Water Resources* 3:25–40 (1980)
 22. Gray W.G., Hassanizadeh M., *Unsaturated Flow Theory including Interfacial Phenomena*. *Water Resources Res* 27(8):1855–1863 (1991)
 23. Schrefler B.A., *The finite element method in soil consolidation (with applications to surface subsidence) (Ph.D. Thesis)*. University College of Swansea, C/Ph/76/84, Swansea (UK) (1984)
 24. Sanavia L., Schrefler B.A., Steinmann P., *A formulation for an unsaturated porous medium undergoing large inelastic strains*, *Computational Mechanics*, vol. 28. p. 137-151 (2002)

25. Schrefler B.A., Simoni L., Li X., Zienkiewicz O.C., *Mechanics of partially saturated porous media*. In: Desai C.S., Gioda G. (eds) *Numerical Methods and Constitutive Modelling in Geomechanics, CISM Courses and Lectures, No 311*. Springer-Verlag (1990)
26. Hofstetter G., Taylor R.L., *Treatment of the corner region for Drucker-Prager type plasticity*. ZAMM Z angew Math Mech 71:589–591 (1991)
27. Alonso E.E., Gens A., Josa A., *A constitutive model for partially saturated soils*, Géotechnique, vol. 40, p. 403-430 (1990)
28. Bolzon G., Schrefler B.A., Zienkiewicz O.C., *Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states*, Géotechnique, vol. 46, p. 279-289 (1996)
29. Simo J.C., Hughes T.J.R., *Computational inelasticity*. Springer (1998)
30. Gawin D., Pesavento F., Schrefler B.A., *Modelling of hygro-thermal behaviour and damage of concrete at temperature above the critical point of water*. Int J Numer Anal Meth Geomech 26:537–562 (2002)
31. Gawin D., Baggio P., Schrefler B.A., *Modelling heat and moisture transfer in deformable porous building materials*. Arch of Civil Engng 42:325–349 (1996)
32. Gawin D., Pesavento F., Schrefler B.A., *Simulation of damage-permeability coupling in hygro-thermo-mechanical analysis of concrete at high temperature*. Commun Numer Meth Eng 18:113–119 (2002)
33. Schrefler B.A., Gawin D., *The effective stress principle: incremental or finite form?* Int J Numer Anal Meth Geomech 20:785–815 (1996)
34. Gray W.G., Schrefler B.A. *Thermodynamic approach to effective stress in partially saturated porous media*. Eur J Mech A/Solids 20:521–538 (2001)
35. Gawin D., Schrefler B.A., *Thermo-hydro-mechanical analysis of partially saturated porous materials*. Eng Comput 13(7):113–143 (1996)
36. Lanza L., *Il moto nella zona insatura*. Corso di Gestione delle risorse idriche. Dipartimento di Ingegneria Ambientale. Università degli Studi di Genova. Italia:1-8 (2004)

CAPITOLO 2

IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

2.1 INTRODUZIONE E GENERALITÀ

Il metodo degli elementi finiti è una tecnica di calcolo atta a fornire una soluzione numerica approssimata e discreta per problemi fisici complessi privi di formulazioni analitiche atte a simulare e prevedere il comportamento di un sistema meccanico-fisico soggetto ad un insieme di condizioni al contorno (forze, spostamenti, flussi, ...).

Quindi tale tecnica di previsione del comportamento di un sistema fisico si basa sulla discretizzazione del dominio geometrico in un numero finito di punti o nodi, sui quali sussistono le incognite del problema utili per descrivere il comportamento dell'insieme.

A tale approssimazione non continua della geometria del dominio, viene associata una formulazione variazionale atta a definire il comportamento energetico dei fenomeni fisici che si verificano nel sistema discretizzato.

L'arricchimento del modello discreto con forme differenziali capaci di legare le incognite ai dati di contorno e condizionamento del sistema, viene poi completato dalle fasi di post processamento, anche per mezzo di leggi costitutive.

Il corpo (assunto continuo cioè ad infiniti gradi di libertà) è suddiviso in serie di elementi che sono:

- di volume finito e forma semplice;
- non compenetranti tra loro;
- connessi tra loro in un numero finito di elementi chiamati nodi;
- tali per cui gli spostamenti di un punto interno di un elemento siano funzione degli spostamenti nodali tramite opportune funzioni dette "funzioni di spostamento".

Ogni nodo è caratterizzato da un certo numero di “qualità” generalizzate dette *gradi di libertà* che variano a seconda del tipo di problema studiato ed il cui numero, per ogni elemento, dipende dal grado di approssimazione che si è scelto per poter rappresentare la variazione degli spostamenti nei punti interni dell’elemento (lineare, quadratica ecc..). I gradi di libertà hanno un significato fisico potendo rappresentare spostamenti, rotazioni, sforzi, temperature, pressioni ecc.. Il loro numero per ciascun nodo e il numero dei nodi stessi caratterizzano il comportamento del singolo elemento.

2.1.1 Formulazione delle caratteristiche dell’elemento finito

Gli spostamenti nodali sono alcune incognite del problema. Si sceglie una serie di funzioni per definire univocamente lo stato deformativo dentro ogni elemento finito in funzione degli spostamenti nodali. Partendo dalle deformazioni iniziali e utilizzando le proprietà costitutive del materiale si può definire lo stato di tensione dell’elemento e il suo confine:

$$\{F\}^e = [K]^e \{\Delta\}^e \quad [2.1]$$

$\{F\}^e$ = vettore di forze concentrate nei nodi, in equilibrio con le tensioni sull’elemento

$[K]^e$ = matrice di rigidità dell’elemento

$\{\Delta\}^e$ = vettore degli spostamenti

Dall’assemblaggio delle equazioni relative ad ogni elemento si ottengono le equazioni globali di equilibrio dell’intera struttura.

Supponendo, per esempio, di avere un elemento triangolare inserito all'interno di un sistema di riferimento (Figura 3) e fissati per ogni nodo due gradi di libertà (rappresentati per comodità dagli spostamenti orizzontali e verticali), per legare tra loro gli spostamenti del generico punto con quelli relativi ai nodi si introducono delle funzioni di forma, come di seguito riportato:

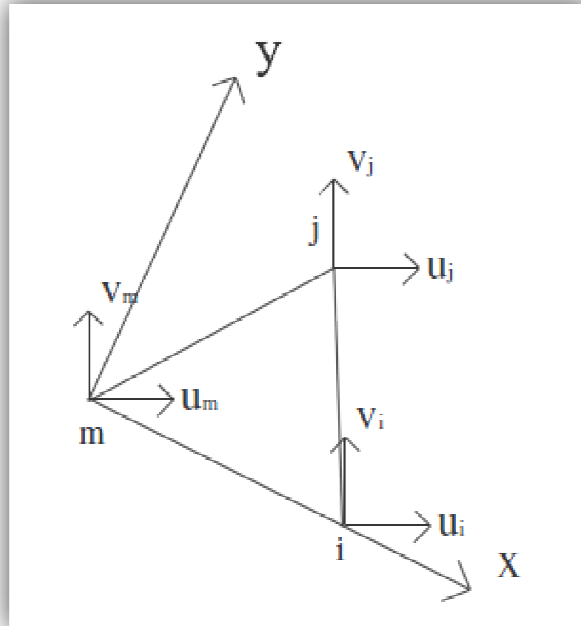


Figura 3. Elemento triangolare con due gradi di libertà per ogni nodo.

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \{f(x, y)\}^e = [N]^e \{\Delta\}^e$$

[2.2]

e indica determinato nodo

$[N]^e$ = matrice delle funzioni di forma con le seguenti proprietà:

$N_i(x_i, y_i) = 1$ se calcolata nel nodo cui si riferisce

$N_j(x_j, y_j) = N_m(x_m, y_m) = 0$ se calcolata rispetto ad un qualsiasi altro nodo

Esistono tante funzioni forma $N(x, y)$ quanti sono i nodi. La generica matrice delle funzioni di forma ha un aspetto di questo tipo:

$$[N]^e = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad [2.3]$$

mentre la generica matrice dello spostamento dei nodi ha una forma di questo tipo:

$$\{\Delta\}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad [2.4]$$

Calcolato il vettore di spostamento del generico punto dell'elemento, esso deve essere legato alle deformazioni dell'elemento, in modo biunivoco.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ z \end{Bmatrix}$$

[2.5]

Quest'ultima unita alla precedente porta a:

$$\{\varepsilon\}^e = [B]^e \{\Delta\}^e \quad [2.6]$$

Considerando inoltre i vettori delle deformazioni e delle tensioni iniziali si ottiene, in forma matriciale:

$$\{\sigma\}^e = [D]^e (\{\varepsilon\}^e - \{\varepsilon_0\}^e) + \{\sigma_0\}^e \quad [2.7]$$

$[D]^e$ = matrice che tiene conto della legge costitutiva del materiale

In questo modo si riesce a considerare nella giusta misura anche la legge costitutiva del materiale e il legame $[\sigma] - [\varepsilon]$.

Osservando l'equazione iniziale e la sua inversa:

$$\{F\}^e = [K]^e \{\Delta\}^e \quad \{\Delta\}^e = [C]^e \{F\}^e \quad \text{in cui } [K]^e = ([C]^e)^{-1} \quad [2.8]$$

si vede che si possono utilizzare due metodi:

- il “metodo degli spostamenti” che prevede il calcolo della matrice di rigidità $[K]^e$ con la prima equazione;
- il “metodo delle forze” che prevede il calcolo della matrice di flessibilità $[C]^e$ con la seconda equazione.

Il metodo di più largo utilizzo è il metodo degli spostamenti, che a sua volta si specifica in ulteriori due metodi: il metodo diretto con il quale si ottiene un vettore di carichi concentrati (lumped) ed il metodo variazionale o energetico con il quale si ottiene un vettore di carichi distribuiti (consistent).

2.1.2 Brevi cenni sui metodi di calcolo della matrice di rigidità.

Di seguito vengono riportati dei brevi cenni sui metodi per il calcolo della matrice di rigidità, citati nel paragrafo precedente, caratteristici del metodo degli spostamenti.

Il metodo diretto

Con questo metodo si può procedere in due modi:

Trattando ogni elemento K_{ij} della matrice di rigidità come un coefficiente calcolabile a partire dalle relazioni di equilibrio.

Si considera che ogni elemento della matrice rappresenti la forza su un nodo in grado di mantenere uno spostamento unitario nella sua direzione di applicazione qualora tutti gli altri spostamenti nodali siano nulli. In generale le relazioni nodali calcolate nella direzione degli spostamenti nodali e conseguenti ad uno spostamento unitario imposto, rappresentano gli elementi della colonna della matrice di rigidezza relativa a quello spostamento. Inoltre la somma degli elementi di una colonna deve essere nulla, poiché tali elementi rappresentano le forze agenti su un nodo in equilibrio (*metodo dei coefficienti di influenza*).

Usando le equazioni di elasticità.

Si esprime il campo degli spostamenti interni all'elemento in funzione degli spostamenti nodali mediante le funzioni di forma N per passare poi al campo delle tensioni e delle deformazioni, per mezzo delle equazioni viste in precedenza e delle leggi costitutive (*metodo delle equazioni dell'elasticità*).

Il metodo variazionale o energetico

Anche con questo metodo si può procedere in due modi:

Sfruttando il *principio dei lavori virtuali* $\delta U = \delta W$ in cui U rappresenta l'energia di deformazione immagazzinata a causa dello spostamento e W il lavoro fatto dai carichi.

Tale principio viene applicato al singolo elemento finito in modo da ottenere:

$$[K]^e \{\Delta\}^e = \{F\}^e + \{F_{\varepsilon_0}\}^e + \{F_b\}^e \{F_{\sigma_0}\}^e + \{F_p\}^e$$

[2.9]

$\{F\}^e$ = forze nodali

$\{F_{\varepsilon_0}\}^e$ = vettore equivalente delle deformazioni iniziali

$\{F_b\}^e$ = forze di massa

$\{F_{\sigma_0}\}^e$ = vettore equivalente delle tensioni iniziali

$\{F_p\}^e$ = vettore equivalente dei carichi superficiali distribuiti

Sfruttando *il principio di minimo dell'energia potenziale* $\Pi = U + W$ in cui U è l'energia di deformazione e W il potenziale dei carichi applicati. Tra tutti i sistemi di spostamenti ammissibili quello che soddisfa le condizioni di equilibrio fa assumere all'energia potenziale totale un valore stazionario.

$$\delta\Pi = \delta U + \delta W \quad [2.10]$$

Essa porta ad ottenere delle equazioni differenziali o algebriche che sono equazioni di equilibrio, affinché tale equilibrio sia stabile deve essere: $\delta\Pi^2 = \delta U^2 + \delta W^2 > 0$, cioè Π deve assumere valore minimo. Calcolata la matrice di rigidezza per ogni elemento finito, con uno dei metodi precedenti, è necessario assemblare il tutto, passando dal sistema di riferimento locale del singolo nodo ad un sistema globale attraverso l'uso di una matrice di trasformazione:

$$\begin{aligned} \{\Delta\} &= [T]\{\Delta g\} & [T] & \text{la matrice di passaggio dal sistema locale a quello globale} \\ \{Fl\} &= [T]\{Fg\} & & \text{per permettere il passaggio dalle forze locali a quelle globali} \end{aligned}$$

2.1.3 Assemblaggio della matrice di rigidezza

Riferendosi al sistema di riferimento globale si ha:

$$\{R\} = [K]\{\Delta\} \quad [2.11]$$

Chiamata $\{R\}$ la matrice che raccoglie i contributi di tutte le forze agenti sul sistema e assemblando gli elementi che convergono al generico nodo q si può scrivere:

$$R_i = \sum_{j=1}^m F_i^{(j)} \quad [2.12]$$

m = numero di elementi che convergono al generico nodo q

R_i = generico elemento della matrice $\{R\}$ rappresentante il carico esterno agente su q

$F_i^{(j)}$ = forze equivalenti nodali dell'elemento j nella direzione di R_i agenti su q

Inoltre denominando con n il numero dei gradi di libertà e riferendosi alla matrice di rigidezza assemblata si ha:

$$R^i = \sum_{k=1}^n K_{ln} \Delta_k \quad [2.13]$$

Δ_k = generico grado di libertà nel riferimento globale

K_{ln} = generico elemento della matrice assemblata, ottenuto con il contributo dei termini di rigidezza dei singoli elementi

La soluzione del sistema [2.11] consiste in un insieme di n equazioni lineari in n incognite, essendo n il numero dei gradi di libertà. In alcuni problemi specifici, ad esempio progetti o verifiche strutturali, è necessario fare riferimento a metodi risolutivi molto complessi a causa dell'elevata dimensione del sistema costitutivo e della mancanza di simmetria nella matrice da risolvere.

2.1.4 Convergenza del metodo degli elementi finiti

Il metodo degli elementi finiti permette di ottenere una soluzione approssimata di un problema tramite la soluzione di un sistema di equazioni differenziali; comunque la soluzione deve sempre convergere al valore esatto del problema. Per verificare ciò si usano dei criteri di convergenza che permettono di formulare la matrice di rigidezza degli elementi sapendo a priori il tipo e l'entità dell'errore che si può commettere. Ovvero l'elemento finito di base utilizzato nella discretizzazione deve essere tale che al crescere del numero totale di elementi utilizzati per rappresentare il continuo in forma discreta la soluzione ottenuta numericamente deve tendere asintoticamente verso la soluzione esatta analitica. Gli aspetti principali che possono influenzare la convergenza sono:

- la precisione dei risultati
- il tempo di calcolo impiegato

Esistono vari criteri per verificare la convergenza di una certa suddivisione, per completezza si cita il *Patch-Test*. Esso consiste nell'imporre un campo di spostamenti per un certo gruppo di elementi tale da produrre uno stato di deformazione costante, nel verificare che gli spostamenti dei nodi corrispondano con il campo originale e che ciascun elemento abbia un appropriato valore di deformazione e tensione costante in tutti i punti.

2.1.5 Considerazioni finali sul metodo agli elementi finiti

Spesso gli elementi complessi con nodi anche sui lati hanno una velocità di convergenza maggiore rispetto agli elementi semplici perciò, a parità di risultati, occorrono pochi elementi complessi per ottenere lo stesso effetto di molti elementi semplici.

In generale l'elemento, descritto dalla sua funzione di forma N_i , si dice isoparametrico qualora gli stessi parametri N_i vengano utilizzati per descrivere sia le coordinate del punto generico in funzione delle coordinate nodali sia gli spostamenti del punto generico in funzione degli spostamenti nodali. Di conseguenza la conoscenza delle funzioni di forma fa capo alla determinazione della matrice di rigidezza.

Spesso nella fase di integrazione numerica si devono utilizzare opportuni metodi utili per minimizzare l'errore d'integrazione. Si citano per completezza il metodo di *Newton - Cotes* e quello di *Gauss*.

Il metodo degli elementi finiti può essere considerato una sottoclasse del metodo generale di *Ritz* in cui le funzioni N_i sono continue e definite non all'interno del dominio Ω (totale) ma in sottodomini (elementi finiti) ottenuti discretizzando il dominio Ω . Tali funzioni dovranno perciò soddisfare solo a certe condizioni di continuità e non ad ogni condizione al contorno. Con questa suddivisione nascono delle semplificazioni; per esempio ogni funzione N_i può essere posta uguale ad un polinomio di grado poco elevato o comunque ad una funzione di semplice rappresentazione. Nei tratti di frontiera comuni a due elementi devono essere soddisfatte le condizioni di continuità delle N_i affinché la funzione integranda assuma valori finiti.

2.2 RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The finite element method*. Vol.1, 1nd edn. Wiley, Chichester
2. Gambolati G., *Lezioni di metodi numerici per ingegneria e scienze applicate*, 2edn. libreria Cortina, (1997)

CAPITOLO 3

IL CODICE COMES-GEO

3.1 CARATTERISTICHE GENERALI

Il codice Comes–Geo implementa l’analisi meccanica dei materiali multifasici porosi con pori tra loro connessi nei quali possa avvenire il flusso di una o più fasi liquide. E’ inoltre possibile considerare anche le interazioni tra la fase fluida e quella solida permettendo lo studio di tutti i casi che coinvolgano situazioni di parziale saturazione.

I geomateriali (terreni, rocce e conglomerati cementizi) sono gli esempi più comuni di materiali porosi. Questo codice consente uno studio realistico su base numerica della struttura dei materiali porosi in condizioni di parziale o totale saturazione: le possibilità di impiego sono molto vaste, basti pensare alle analisi delle dighe in condizioni di sismicità, alla stabilità dei pendii od alla subsidenza, fenomeni in cui lo stato di saturazione dei pori riveste un ruolo molto importante nell’evoluzione dei fenomeni.

Le variabili associate al problema (e quindi i gradi di libertà) sono cinque: temperatura, pressione capillare, pressione del gas e spostamenti orizzontali e verticali, nell’approssimazione a condizioni piane o assialsimmetriche.

La soluzione del problema è possibile solo grazie all’impostazione di opportune equazioni di conservazione ed equilibrio, come verrà di seguito illustrato.

Questo codice è stato sviluppato dall’*Università di Padova* e qui ne verranno esposti gli elementi teorici e le soluzioni numeriche più importanti.

Alla fine di questo capitolo verrà presentata una sezione dedicata allo studio della consolidazione di un tratto di terreno, in condizioni totalmente sature, tramite la teoria analitica della consolidazione monodimensionale di Terzaghi, ed i risultati confrontati con quelli ottenuti dal codice Comes-Geo per il medesimo tratto. I risultati saranno pressoché identici.

3.2 RICHIAMI DI MECCANICA DEI MEZZI POROSI SATURI E PARZIALMENTE SATURI

Il comportamento meccanico dei mezzi porosi saturi o parzialmente saturi dipende da vari fattori tra cui: le forze d'inerzia, i flussi fluidi in forma accoppiata con la deformazione dello scheletro solido e i cambiamenti di fase dovuti a scambi termici o a variazioni di pressione. Le varie fasi (solida, liquida e gassosa) possono essere accoppiate solo se si considera l'effetto che la variazione delle variabili di stato produce sulle altre fasi presenti, istante per istante.

E' necessario rappresentare il mezzo multifase come un continuo, in modo che le varie fasi presenti interagiscano tra loro.

Su queste basi, il comportamento meccanico del modello adottato può essere descritto dalle seguenti teorie:

- *La teoria delle miscele.*
- *La teoria ibrida delle miscele.*
- *La teoria classica di Biot* (teoria fenomenologica che generalizza la teoria monodimensionale della consolidazione di Terzaghi) estesa al campo dinamico e a quello parzialmente saturo.

La *teoria delle miscele* ha come ipotesi fondamentale il fatto che tutti i componenti del sistema multifase siano contemporaneamente presenti in ogni punto di tutto lo spazio occupato dal mezzo poroso, supposto continuo e a domini sovrapposti. Il comportamento di ogni fase e le relative interazioni sono perciò rappresentabili da un campo di variabili continue. Tale teoria è di tipo macroscopico, poiché adotta un'analogia scala, essendo interessata solo alla distribuzione continua dei costituenti nello spazio. In tale ambito sono utilizzabili le leggi della meccanica classica del continuo.

La *teoria ibrida delle miscele*, al contrario, è definita su scala microscopica: considerato un punto e preso nel suo intorno un volume infinitesimo dv , rappresentativo del mezzo multifase, le varie fasi componenti, pur a contatto tra loro, sono distinte e occupano solo una parte di questo dominio, e anche le variabili che le caratterizzano (temperatura, pressioni, spostamenti...), pur essendo continue all'interno di ogni fase, sono discontinue

all'interno del volume rappresentativo e, a maggior ragione, nel mezzo multifase in cui sono diffuse. Tuttavia, poiché a causa della complessità geometrica del mezzo poroso è molto difficile risolvere le equazioni di bilancio a livello microscopico, è necessario l'utilizzo dei teoremi della media per permettere il passaggio dalla scala microscopica a quella macroscopica. Si ottiene un sostituto continuo del mezzo multifase (discretizzato in precedenza) in cui le varie fasi e le loro caratteristiche sono mediate e perciò distribuite con continuità su tutto il dominio in cui risultano sovrapposte.

La teoria ibrida delle miscele costituisce il tramite tra l'analisi microscopica e quella macroscopica permettendo l'utilizzo delle leggi di bilancio della meccanica classica (equazioni di equilibrio, continuità e conservazione) che risultano integrate, ovvero mediate sull'elemento locale rappresentativo del dominio microscopico, su tutto quello macroscopico, per essere poi localizzate. Si possono così ricostruire le equazioni della teoria delle miscele e quelle *della teoria di Biot* per tener conto della consolidazione dei terreni.

I costituenti del mezzo multifase sono i seguenti:

- lo scheletro solido
- la fase acquosa
- la fase gassosa, costituita dalla miscela di gas perfetti di aria secca e di vapore acqueo

Fatte queste considerazioni preliminari, si può procedere con la scrittura delle equazioni di bilancio che a livello macroscopico, per il mezzo poroso non isoterma in condizione di parziale saturazione, si basano sulle seguenti ipotesi:

- lo scheletro solido del mezzo sia deformabile
- tutte le fasi siano in contatto con lo scheletro solido
- i costituenti sono supposti immiscibili ad eccezione dell'aria secca e del vapore acqueo e chimicamente non reagenti
- esista equilibrio termodinamico fra le fasi presenti in un punto, ossia le fasi nell'intorno infinitesimo di un punto abbiano la stessa temperatura
- siano possibili scambi di calore fra le fasi occupanti punti a temperatura diversa e flussi di acqua, vapore acqueo ed aria secca. In tal modo è possibile

tenere conto della conduzione e convezione del calore, della diffusione del vapore, dei flussi fluidi dovuti ai gradienti di pressione ed agli effetti capillari e dei cambiamenti di fase dell'acqua (evaporazione e condensazione) contenuta nei pori

- i costituenti siano comprimibili
- i costituenti siano non polari

Le equazioni di equilibrio scritte a livello microscopico sono poi estese a livello macroscopico, attraverso un processo di integrazione prima sul volume rappresentativo dv e poi sul volume totale V del mezzo poroso. Tutte le quantità macroscopiche possono essere ottenute da quelle microscopiche utilizzando i già citati teoremi della media, attraverso i quali è possibile definire opportuni operatori. Su tali basi, rispetto a quanto già detto in precedenza, si definiscono così:

- equazioni di conservazione della massa per la fase solida, liquida e gassosa (miscela di gas e vapore)
- equazione di bilancio dell'energia (bilancio dell'entalpia)
- equazione di bilancio del momento lineare per un mezzo multifase
- equazioni costitutive per il bilancio termodinamico
- equazioni costitutive per la descrizione del comportamento meccanico del mezzo poroso

Il modello viene chiuso dalla definizione delle leggi costitutive dei materiali e dalle condizioni al contorno. Le equazioni differenziali ottenute in precedenza necessitano di condizioni iniziali e al contorno. Le prime si impongono sulla pressione della fase gassosa, sulla pressione capillare, sugli spostamenti, sulle velocità di deformazione dello scheletro solido e sulla temperatura (ovvero sulle variabili del problema). Le condizioni al contorno sono invece rappresentate dai valori che le variabili di stato e i loro flussi devono assumere sul contorno del dominio multifase.

3.3 SUDDIVISIONE DEL VOLUME IN ELEMENTI FINITI

La soluzione delle equazioni differenziali precedentemente citate non può essere ottenuta attraverso procedimenti analitici semplici. Infatti si tratta di un sistema di equazioni alle derivate parziali nello spazio e nel tempo, accoppiato e non lineare a causa dei legami costitutivi delle fasi fluide e del materiale e la complessa geometria del problema. Soluzioni analitiche sono possibili solo in casi monodimensionali molto semplici: si fa quindi ricorso ad una soluzione approssimata per via numerica. Questo modello è risolto con l'uso del metodo degli elementi finiti per discretizzare il sistema di equazioni nello spazio e nel tempo, utilizzando in particolare la teoria di Galerkin per il metodo dei residui pesati.

La regione di interesse viene suddivisa in un certo numero di elementi di forma semplice, gli elementi finiti. (Figura 4)

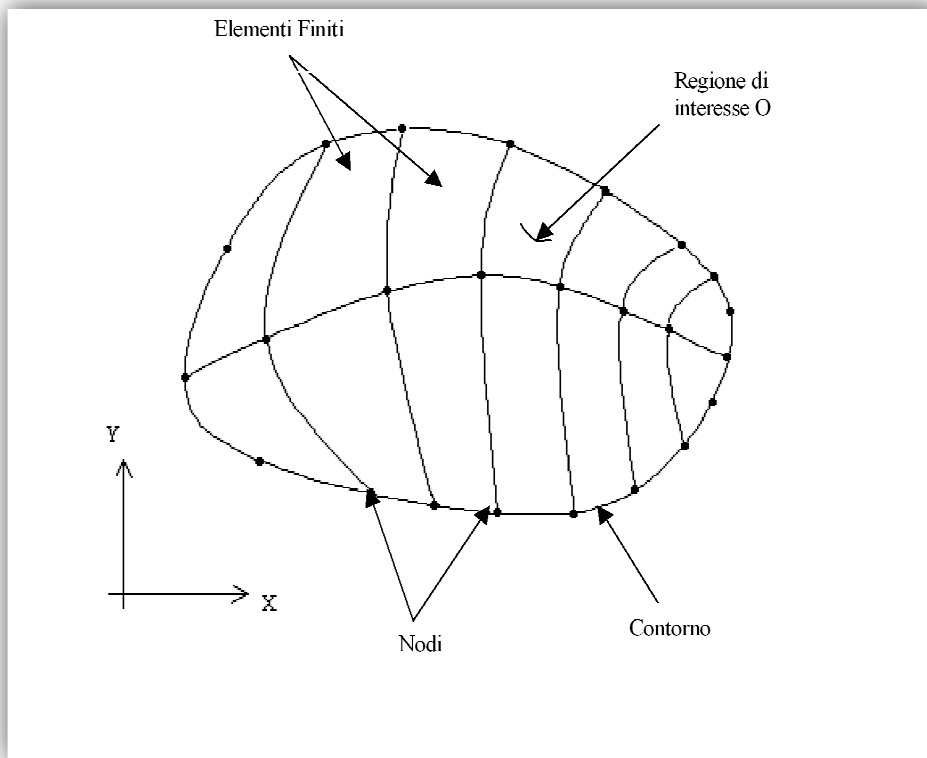
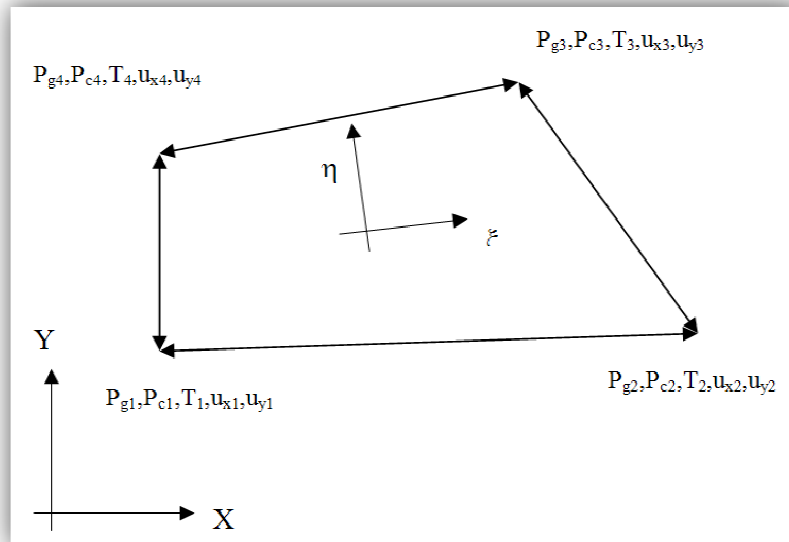


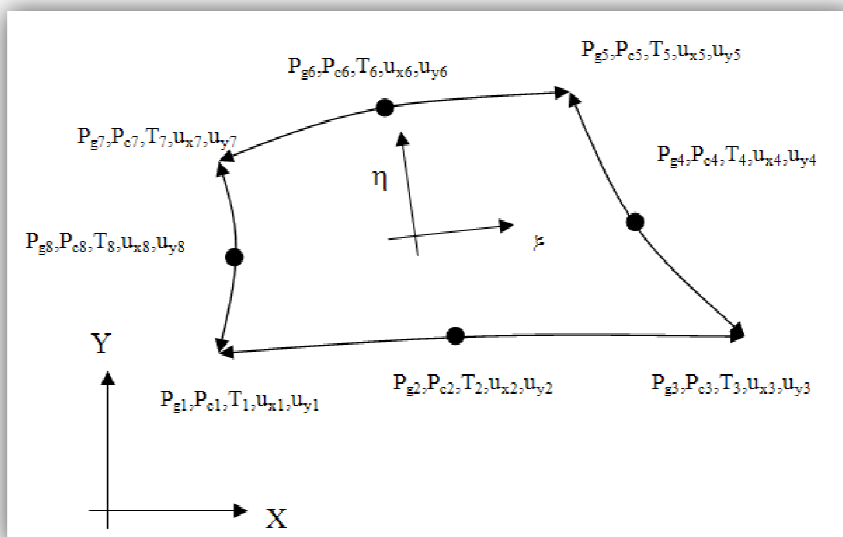
Figura 4. Suddivisione del dominio e definizione degli elementi caratteristici

Gli elementi finiti base della suddivisione attuata sul continuo possono essere di vario tipo, considerando che ogni nodo possiede cinque gradi di libertà (pressione del gas e capillare, temperatura, spostamenti orizzontali e verticali) si possono individuare:

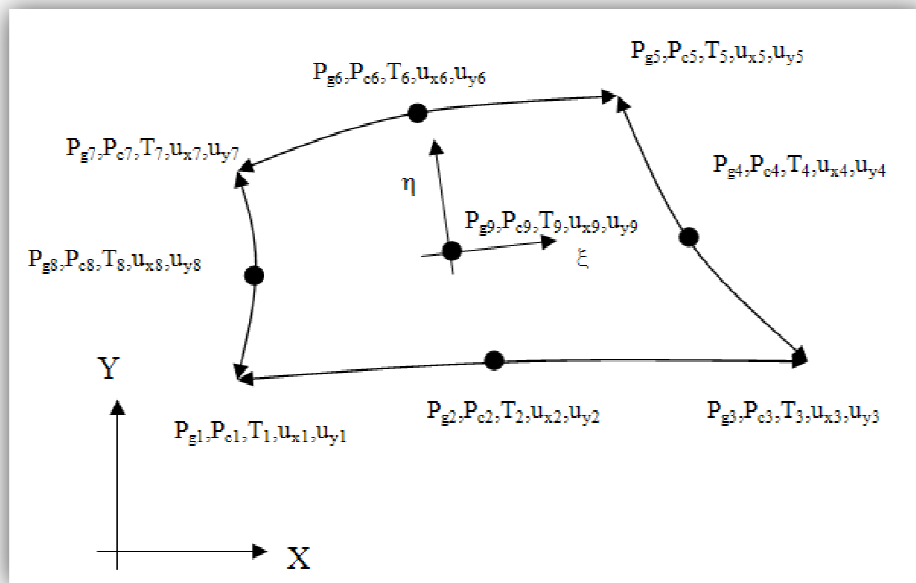
- elementi triangolari a tre nodi e quindici gradi di libertà
- elementi quadrangolari a quattro nodi e venti gradi di libertà



- elementi quadrangolari ad otto nodi e quaranta gradi di libertà



- elementi quadrangolari a nove nodi e quarantacinque gradi di libertà



Per ogni elemento viene definita una serie di nodi in cui si valuta il valore delle variabili incognite. Esse, per ogni singolo elemento, possono essere espresse in termini approssimati attraverso particolari funzioni di forma per cui:

$$\begin{aligned} p_g &= p_g(t) = \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}}_g(t), & p_c &= p_c(t) = \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}}_c(t), \\ T &= T(t) = \mathbf{N}_t \bar{\mathbf{T}}(t), & \mathbf{u} &= \mathbf{u}(t) = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}}(t). \end{aligned}$$

[3.1]

in cui le lettere soprascritte indicano un'approssimazione. Le precedenti possono essere sostituite nelle relative equazioni differenziali, dando origine, con il contributo delle condizioni al contorno, ad una serie di equazioni residuali che sono definibili tali a causa della natura approssimata delle eguaglianze precedenti.

Il metodo dei residui pesati prevede l'introduzione dei seguenti integrali:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_x \mathbf{R}_x d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_x \mathbf{R}_x (b.c.) d\Gamma = \mathbf{0}$$

[3.2]

in cui \mathbf{N}_x sono i pesi o funzioni test, \mathbf{R}_x i residui per le equazioni e $\mathbf{R}_x(b.c.)$ i residui per le condizioni al contorno.

La forma integrale o debole delle equazioni di trasferimento di massa e calore (e delle altre equazioni richieste per completare il modello), ottenute per mezzo della procedura di Galerkin, può essere espressa attraverso una forma “matriciale” del tipo:

$$\begin{aligned}
 C_{gg}\dot{\bar{p}}_g + C_{gc}\dot{\bar{p}}_c + C_{gt}\dot{\bar{T}} + C_{gu}\dot{\bar{u}} + K_{gg}\bar{p}_g + K_{gc}\bar{p}_c + K_{gt}\bar{T} + f_g &= 0 \\
 C_{cg}\dot{\bar{p}}_g + C_{cc}\dot{\bar{p}}_c + C_{ct}\dot{\bar{T}} + C_{cu}\dot{\bar{u}} + K_{cg}\bar{p}_g + K_{cc}\bar{p}_c + K_{ct}\bar{T} + f_c &= 0 \\
 C_{ig}\dot{\bar{p}}_g + C_{ic}\dot{\bar{p}}_c + C_{it}\dot{\bar{T}} + C_{iu}\dot{\bar{u}} + K_{ig}\bar{p}_g + K_{ic}\bar{p}_c + K_{it}\bar{T} + f_t &= 0 \\
 C_{ug}\dot{\bar{p}}_g + C_{uc}\dot{\bar{p}}_c + C_{ut}\dot{\bar{T}} + C_{uu}\dot{\bar{u}} + f_u &= 0
 \end{aligned}$$

[3.3]

che può essere espressa nella forma compatta $C(x)\dot{x} + K(x)x + f(x) = 0$ in cui $x^T = \{\bar{p}_g, \bar{p}_c, \bar{T}, \bar{u}\}$ è il vettore delle variabili, $C(x)$, $K(x)$ e $f(x)$ sono opportuni coefficienti ottenuti dall’assemblaggio delle equazioni precedenti.

3.4 IL METODO DI NEWTON–RAPHSON

Questo metodo serve per la discretizzazione del problema nel tempo, attraverso uno schema alle differenze finite. Con riferimento alla precedente equazione compatta si può scrivere:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}_{n+1}) \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta t} + \mathbf{K}(\mathbf{x}_{n+1}) \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{0} \quad [3.4]$$

in cui n è il numero di passi temporali e Δt è la lunghezza del time step stesso.

Questo sistema di equazioni non è lineare e la relativa soluzione può essere ottenuta attraverso una procedura alla Newton–Raphson del tipo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C}(\mathbf{x}_{n+1}^l) (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) + \mathbf{C}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \right] \Delta \mathbf{x}_{n+1}^l + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{K}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \mathbf{x}_{n+1}^l + \mathbf{K}(\mathbf{x}_{n+1}^l) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \right] \Delta \mathbf{x}_{n+1}^l = \\ & = - \left[\mathbf{C}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \frac{\mathbf{x}_{n+1}^l - \mathbf{x}_n}{\Delta t} + \mathbf{K}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \mathbf{x}_{n+1}^l + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \right] \end{aligned} \quad [3.5]$$

in cui l è l'indice di iterazione e alla fine di ogni iterazione le variabili sono aggiornate secondo la relazione $\mathbf{x}_{n+1}^{l+1} = \mathbf{x}_{n+1}^l + \Delta \mathbf{x}_{n+1}^l$.

3.4.1 Integrazione numerica, metodo di Gauss

Per l'integrazione numerica viene implementato nel codice il metodo di Gauss che produce:

$$\int \mathbf{F}(r, s) dr ds = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \mathbf{F}(r_i, s_j) \quad [3.6]$$

in cui $\mathbf{F}(r, s)$ è la generica funzione integranda e $\alpha_{i,j}$ sono i pesi da attribuire a seconda del numero di punti ovvero di intervalli in cui si è suddiviso il dominio della funzione stessa.

In questo caso l'integrale è doppio poiché la funzione è a due variabili (i cui limiti sono -1 e $+1$) per cui la precedente diventa:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s) dr ds = \sum_i \alpha_i \int_{-1}^{+1} F(r_i, s) ds \quad \text{ovvero} \quad \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s) dr ds = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j)$$

[3.7]

Nel codice COMES-GEO esiste la possibilità di scegliere un diverso ordine di integrazione ed un diverso numero di punti di Gauss. La scelta dipende soprattutto dal tipo di elemento che si adotta.

Il codice procede all'assemblaggio delle equazioni determinate per i singoli elementi e alla determinazione della soluzione approssimata.

Il risultato generale del processo si può riassumere, per semplicità in un sistema matriciale del tipo:

$$Ax = b$$

in cui la matrice A è estesa, sparsa, bandata e generalmente non simmetrica. La procedura risolutiva usata nel codice COMES-GEO si basa sul metodo di Gauss, sviluppato da Irons, chiamato *metodo della soluzione frontale*, il cui vantaggio consiste nel fatto che esso assembla le equazioni ed elimina le variabili allo stesso tempo.

L'analisi sequenziale di ogni elemento procede seguendo i seguenti passi:

- assemblaggio delle equazioni con la matrice A
- controllo delle equazioni assemblate nel sistema
- condensazione delle equazioni dal sistema (attraverso l'eliminazione Gaussiana) per tutti i gradi di libertà
- si ritorna al passo iniziale per l'elemento successivo

La matrice A viene ridotta in una forma triangolare superiore, per poter così determinare a ritroso il processo di soluzione per il vettore x .

3.4.2 Dati in ingresso (pre-processamento)

I files di input possono essere suddivisi in quattro sezioni contenenti:

- dati generali relativi al problema in esame (nome del file, titolo del problema)
- dati generali di identificazione del problema (numero e durata dei time steps, tipo di elementi scelti, numero di iterazioni ecc.)
- dati relativi al numero e tipo di nodi ed alla mesh generata
- dati relativi alle condizioni iniziali ed alle condizioni al contorno (per definire i valori delle variabili che caratterizzano il problema, rispetto ai nodi da esse condizionati).

3.5 ALGORITMO DI COMMUTAZIONE (SWITCH)

3.5.1 *Introduzione*

Molti software che si propongono di studiare i fenomeni termo-idro-meccanici dei mezzi porosi, non prendono in considerazione modelli fisici estremamente complessi, adottando una serie di semplificazioni di varia natura. Alcune ipotesi assunte sono: matrice del solido rigida [5 - 6]; pressione del gas nel mezzo poroso costante [6 - 7 - 8]; nessun cambio di fase per l'acqua con formazione di una miscela di gas e vapore [8 - 9]; fenomeni isotermici; pressione capillare assunta come costante; ...

Il codice di calcolo Comes-Geo trascura molte di queste ipotesi con un modello numerico che considera fenomeni di lenta transizione in un dominio poroso deformabile con flussi di calore, flussi d'acqua e flussi di gas. Una delle ipotesi più restrittive che condiziona i codici di calcolo per mezzi porosi riguarda il differente numero di componenti costitutivi del modello nel caso in cui ci si trovi a simulare condizioni sature o parzialmente sature.

Infatti i casi che si possono verificare sono molteplici:

- un dominio saturo può passare in condizioni parzialmente sature;
- un dominio parzialmente saturo può raggiungere condizioni di saturazione;
- un dominio può essere contraddistinto da diversi sottodomini con differente grado di saturazione (sia saturi che parzialmente saturi); vi possono essere anche evoluzioni delle caratteristiche di saturazione della simulazione, non note a priori.

Generalmente il modello di un sistema agli elementi finiti è indipendente dal dominio o dalle sue evoluzioni fisiche.

Invece nei mezzi porosi saturi o parzialmente saturi nelle aree che si trovano in uno stato di completa saturazione, l'equazione differenziale di bilancio di massa per l'aria secca, non può più far parte delle equazioni costitutive del modello.

E' facile capire come non abbia senso prevedere un bilancio di equilibrio delle masse del gas o dei flussi di gas, laddove non è prevista la presenza del gas stesso.

Dal punto di vista numerico, l'inserimento nel modello di un'equazione differenziale che si presenta sotto forma di identità nulla per i gradi di libertà del nodo rappresentanti la

pressione del gas, nei nodi rappresentativi delle aree sature, azzerava il determinante della matrice del sistema costitutivo, rendendo mal condizionato qualsiasi schema risolutivo adottato ed impossibile la soluzione numerica.

Di fatto si potrebbe pensare a due modelli simili, uno adatto per i mezzi porosi parzialmente saturi, e l'altro ridotto, adatto per i mezzi porosi saturi.

Ipotesi semplificative [10 - 11] per evitare questa dualità miravano a fissare il dominio delle simulazioni in uno schema di calcolo:

- saturo: trascurata la pressione del gas e l'equazione di bilancio delle specie gassose;
- parzialmente saturo: adozione di un grado di saturazione massima ($S_{w,max} = 0.9975$) prossimo al valore unitario, tale da evitare il malcondizionamento numerico, rendendo comunque quasi nulla la presenza di gas nel volume elementare rappresentativo (REV);

Al contrario la soluzione adottata nel codice di calcolo Comes Geo, sin dalle prime fasi di sviluppo teorico del software, si basa su un particolare algoritmo che ad ogni passo temporale (*time step*) dell'integrazione numerica, verifica le condizioni di saturazione presenti nel dominio o nel sottodominio, imponendo eventuali condizioni al contorno aggiuntive che permettano l'adozione del modello più completo per tutti i casi possibili. E' evidente come ciò soddisfi un maggior numero di casi nel modo più realistico, potendo prevedere sia simulazioni con diversi sottodomini distinti, alcuni saturi, altri parzialmente saturi, sia simulazioni con un'evoluzione varia dei sottodomini con diverso grado di saturazione. Tale parte dell'algoritmo viene chiamata con l'appellativo di *switch* (commutatore).

3.5.2 *Algoritmo di base, oscillazioni delle variabili, convergenza dello schema numerico*

Come già fatto notare, lo *switch* inizialmente implementato in Comes Geo (di base), consta di due fasi:

- verifica delle condizioni di saturazione: viene svolta valutando se la pressione capillare nei nodi di un elemento finito (sottodominio elementare della geometria di una simulazione) risulta inferiore alla *bubbling pressure* (la *bubble pressure*, p_b , corrispondente alla *suzione d'ingresso aria*, suction air-entry value s_e , è il minimo valore di pressione capillare al di sotto della quale la fase di gas diviene discontinua e forma delle bolle [12]);
- commutazione: preservando un modello fisico per i mezzi porosi parzialmente saturi, nei sottodomini in cui vi è la completa saturazione, viene imposta una condizione al contorno che vincola la pressione del gas alla pressione atmosferica (*boundary value condition* $p_g = p_{atm} = 101325Pa$), modificando l'identità nulla mal condizionante il sistema risolutivo in un valore determinato e compatibile.

Come si può leggere in *Thermo-hydro-mechanical analysis of partially saturated porous materials*, articolo di Dariusz Gawin [13]:

During computations a problem arises when the medium is fully saturated because in this case the gas pressure p_g is undefined and the capillary pressure has no physical meaning and, on the other hand, the state of the liquid water in the medium is describe by two variables (since in such situation there are only two DOF on top of solid displacement: liquid pressure p_w and temperature T).

The problem is treated with a formal modification of the relationship between saturarion S_w and capillary pressure p_c : when the saturation S_w becomes equal to one, the sign of the capillary pressure is formally set negative and the value equal to the pressure in the liquid above gas pressure ($p_c = p_g - p_w$). For fully

saturated state we use equation $v_w = -\frac{KK_{re}}{\mu_w}(\nabla p_w - \rho_w b) \wedge p_c < p_b$ for description of liquid flow, while gas pressure is set to equal to the atmospheric pressure (the dry air conservation equation is dropped).

Nella computazione sorge un problema quando il mezzo è completamente saturo, perchè in questo caso la pressione del gas è indefinita e la pressione capillare non sviluppa un significato fisico e, d'altro canto, lo stato dell'acqua libera nel mezzo poroso è descritto da due variabili (quindi in questa situazione ci sono solo due DOF oltre agli spostamenti del solido: la pressione del liquido e la temperatura).

Il problema viene trattato con una modificazione formale della relazione tra la saturazione e la pressione capillare: quando la saturazione diviene uguale ad uno, il segno della pressione capillare è settato formalmente come negativo ed in valore uguale alla pressione del liquido sopra la pressione del gas ($p_c = p_g - p_w$). Per uno stato completamente saturo, noi utilizziamo

l'equazione $v_w = -\frac{KK_{re}}{\mu_w}(\nabla p_w - \rho_w b) \wedge p_c < p_b$ per descrivere il flusso di liquido, mentre la

pressione del gas è posta pari alla pressione atmosferica (l'equazione di conservazione dell'aria secca viene tralasciata).

La pressione del gas assume il valore della pressione atmosferica, poiché il programma lavorando con il valore assoluto della stessa, deve rappresentare la condizione al contorno presente in superficie del provino o sul piano campagna di un terreno. La pressione capillare non può assumere il significato fisico di menisco, laddove non vi è una superficie di separazione fra due fasi distinte, una gassosa ed una liquida. Per questo motivo, al di sotto di un valore di pressione identificativo della formazione di bolle di gas nel mezzo poroso, la pressione capillare assumerà il valore della pressione idrostatica dell'acqua.

Per verificare la correttezza delle assunzioni di Comes Geo può essere fatto un raffronto con la teoria della consolidazione monodimensionale di Terzaghi in un semplice esempio di compattazione di una colonnina di terreno, sotto l'azione di un carico esterno in condizioni isoterme.

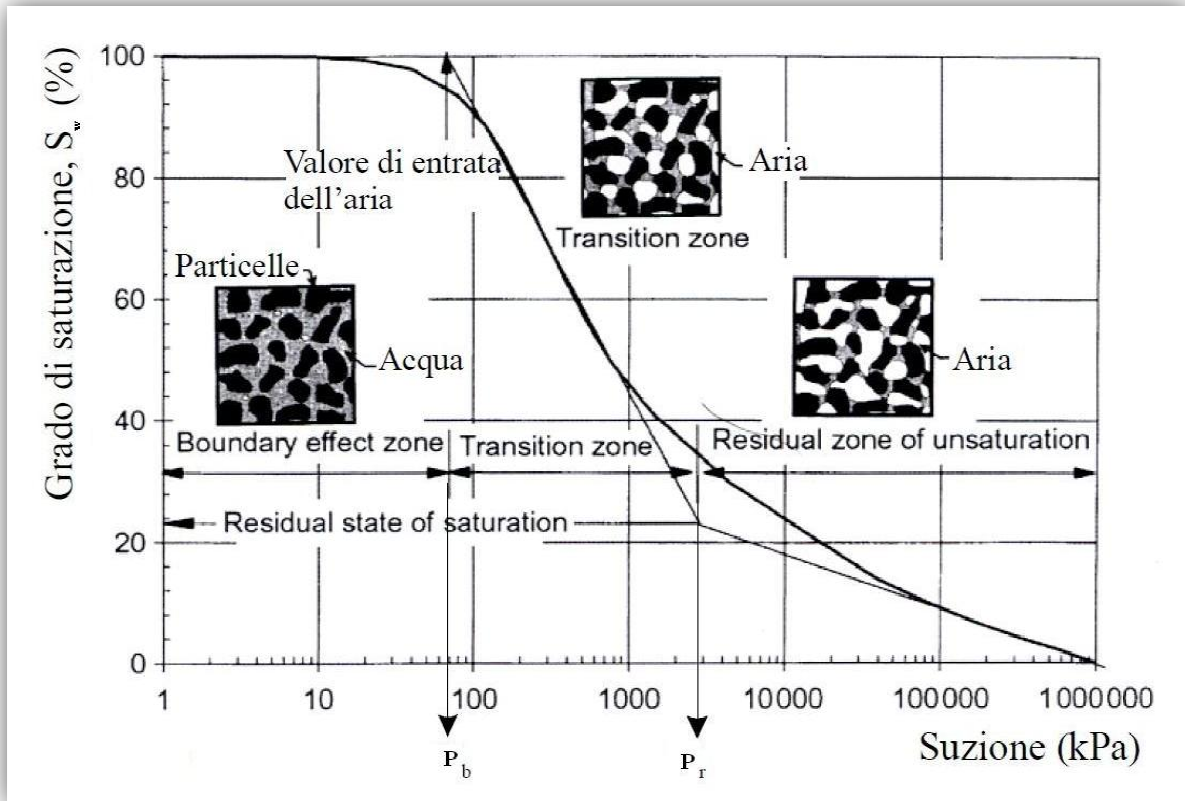


Figura 5. Curva di saturazione di un terreno poroso, senza ciclo isteretico [14].

Per continuare i ragionamenti è necessario introdurre alcuni termini semplificativi e descrivere alcune casistiche in cui si può incorrere nelle simulazioni.

Assumendo un dominio geometrico diviso in due aree, una parzialmente satura ed una completamente satura, indipendentemente dal fatto che tali sottodomini siano prestabiliti dalle condizioni al contorno o che derivino da un'evoluzione dinamica della simulazione (essiccazione per un aumento di temperatura, essiccazione per una variazione delle condizioni della pressione capillare, imbibizione dovuta a flussi d'acqua in una falda, ...), nel caso di una schematizzazione piana è possibile definire una linea di confine che separa il dominio saturo da quello parzialmente saturo (Fig.6). Tale linea di separazione potrebbe essere chiamata *frontiera*. Ovviamente in una schematizzazione piana la frontiera sarà definita da una linea chiusa, invece in una schematizzazione tridimensionale sarà costituita da una superficie. Nella realtà è sempre possibile definire in modo distinto le due aree, diverse per grado di saturazione, semplicemente identificando la *linea di frontiera* fra l'una e l'altra. Ciò implica una semplificazione nella separazione che può

coesistere fra un'area e l'altra, che verrà accennata in seguito. Al contrario nel metodo degli elementi finiti il dominio continuo viene schematizzato a priori con un numero finito di aree infinitesime dal comportamento fisico omogeneo, legato ad un numero finito di nodi, nei quali rappresentare la soluzione per mezzo delle funzioni di forma.

In tale situazione discreta, rappresentativa del dominio continuo, possono verificarsi tre casi, a seconda che la linea di frontiera fra il mezzo saturo e quello parzialmente saturo sia rispetto ad un elemento finito preso in considerazione:

1. posizionata al di fuori dell'elemento finito;
2. posizionata esattamente nel confine fra due elementi finiti distinti (in questo caso un certo numero di nodi di un elemento finito ricade sulla *frontiera* stessa);
3. all'interno dell'elemento finito.

Ovviamente il primo ed il terzo caso, rappresentano la medesima situazione, tanto che in una simulazione possono essere ritrovati entrambi vicendevolmente per elementi finiti prossimi, quando si passano al vaglio tutti i volumi elementari rappresentativi della geometria della simulazione. Il secondo caso rappresenta una situazione limite, stimata approssimativamente in ambito reale, con nodi condivisi fra due elementi finiti (elementi quadrati) in diverse condizioni di saturazione, differenti flussi di gas ed acqua (continui o discontinui).

Dato che la caratteristica del “*grado di saturazione*” è legata alla descrizione dei nodi (definizione puntuale), si possono avere rispettivamente (Fig.6):

- *elementi finiti completamente saturi*: tutti i nodi dell'elemento finito sono saturi e di conseguenza la *linea di frontiera* deve ricadere da qualche altra parte;
- *elementi finiti parzialmente saturi*: tutti i nodi dell'elemento finito sono parzialmente saturi e di conseguenza la *linea di frontiera* deve ricadere da qualche altra parte;
- *elementi finiti di frontiera*: alcuni nodi dell'elemento finito possiedono un grado di saturazione pari a 1 ed altri sono in parziale saturazione, ovvero la linea di frontiera risulta passare dentro l'elemento finito.

Anche presupponendo due domini distinti per la caratteristica di interesse senza evoluzioni dinamiche del grado di saturazione, è facile capire come sia impossibile schematizzare un dominio geometrico ad elementi finiti, senza *elementi finiti di frontiera*, poiché o la linea di frontiera ricade all'interno di una successione di elementi finiti, o determinati nodi si trovano nella *frontiera* stessa, condivisi fra un elemento che sta nell'area della parziale saturazione ed un elemento che sta nell'area della completa saturazione.

In altre parole si avrà sempre un ristretto gruppo di elementi che saranno addossati alla frontiera di separazione delle due aree distinte.

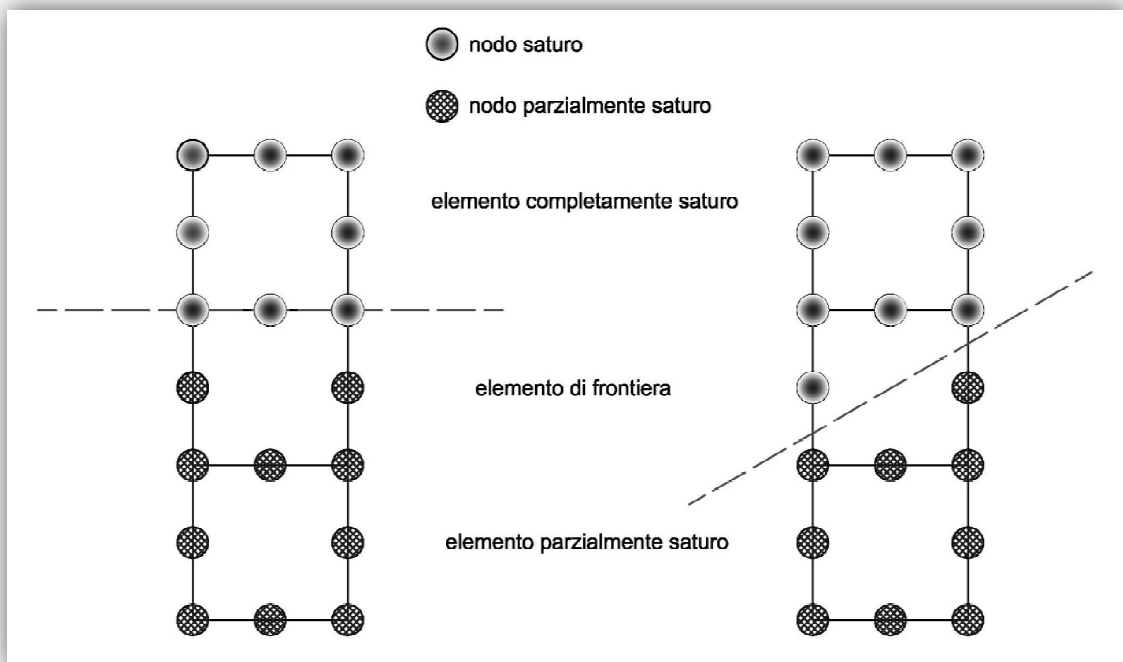


Figura 6. Rappresentazione della schematizzazione fra aree saturate e parzialmente saturate.

L'algoritmo di *switch* derivato dall'evoluzione storica del programma, verificava la presenza di un solo nodo saturo all'interno dell'elemento finito, secondo la condizione che $p_c \leq p_b$. Qualora tale condizione fosse stata verificata, per tutti i nodi dell'elemento finito veniva imposta la condizione di *switch* (compresi quelli parzialmente saturi nell'elemento di frontiera). E' evidente come tale schema cancellasse in modo irrecuperabile il valore della pressione del gas nei nodi parzialmente saturi di un

elemento, sostituendone il valore con quello della pressione atmosferica. L'errore compiuto dipendeva dall'entità della pressione del gas nel nodo: $\Delta p_g = p_g - p_{atm}$. Benchè tale algoritmo ponesse in modo corretto delle condizioni al contorno sugli elementi finiti con tutti i nodi nelle medesime condizioni di saturazione, l'errore, anche se limitato ad un ristretto numero di *elementi finiti di frontiera*, agiva in modo continuo ad ogni passo temporale, con entità legata alla differenza di pressione del gas imposta e, data la natura fortemente accoppiata del modello di Comes Geo, con effetti su tutti i gradi di libertà anche al di fuori degli stessi *elementi di frontiera*.

Sempre prendendo in considerazione l'articolo di Dariusz Gawin, in *Thermo-hydro-mechanical analysis of partially saturated porous materials* [13] si può leggere:

In practice, capillary and gas pressure oscillations can arise when this switch is performed. As already pointed out in [15], these oscillations are possibly due to the sudden switch of element behaviour (there is a change in governing equations) in a part of the domain, which in turn causes different convergence to solution in fully saturated and partially saturated zone of the domain and produces oscillations in the Newton iteration procedure [16]. Another reason is occurrence in the matrices C and K ($C(x)\dot{x} + K(x)x + f(x) = 0$) of very small diagonal terms related to gas pressure (because of very low value of gas relative permeability), which create numerical problems. An efficient way of avoiding the mentioned oscillations is assumption of a lower limit for the value of relative permeability of gas phase (e.g. 10^{-4} , as was assumed in the drainage test example of the present work), which seems to be physically admissible.

In pratica, quando si utilizza questo algoritmo (*switch*), possono sorgere delle oscillazioni di pressione capillare e di pressione del gas. Come già descritto in [15], queste oscillazioni possono essere dovute all'improvviso cambio di comportamento (c'è un cambiamento nelle equazioni che governano il modello) in una parte del dominio, il quale a sua volta causa una differente convergenza fra le zone completamente sature e quelle parzialmente sature del dominio e produce oscillazioni nelle iterazioni dello schema di Newton [16]

Un'altra ragione è la presenza nelle matrici C e K ($C(x)\dot{x} + K(x)x + f(x) = 0$) di termini diagonali molto piccoli, legati alla pressione del gas (perché ci sono permeabilità relative del gas dal valore molto basso), i quali creano problemi numerici. Un sistema efficient per prevenire tali oscillazioni è assumere un valore limite per il valore della permeabilità relativa della fase gassosa (es. 10^{-4} , così come assunto nei test di drenaggio d'esempio nel presente articolo), cosa che sembra fisicamente ammissibile.

Senza un approccio diretto al codice di calcolo HMTRA-DEF, a cui si riferisce l'articolo di Gawin, si può solo ipotizzare che le oscillazioni di pressione capillare e pressione del gas, citate nell'articolo, siano dovute al medesimo malcondizionamento prima descritto,

riscontrato in Comes Geo per gli elementi di frontiera. Queste oscillazioni possono avvenire anche perché in Comes Geo valori troppo piccoli dei termini diagonali delle matrici C e K producono destabilizzazioni nello schema di Newton-Rapson, che si concretizzano nel calcolo di una soluzione oscillatoria (al variare dei time step temporali le incognite, o gradi di libertà dei nodi, oscillano non raggiungendo un valore di equilibrio o lo raggiungono dopo svariate iterazioni con un andamento non realistico) oppure nell'impossibilità di calcolare una soluzione che soddisfi il sistema del modello ad un dato passo temporale nei limiti della tolleranza prevista.

Riferimenti a tale mal-condizionamento, citato anche nell'articolo di Gawin, possono essere trovati nell'articolo *Application of Numerical Methods to Geotechnical Problem* [17].

L'articolo, in riferimento alla discretizzazione numerica di un modello per simulazioni geotecniche [1.22] con integrazione temporale basata sul metodo dei Trapezi Generalizzato [1.23] individua un intervallo di valori da assegnare al passo temporale ($\Delta t = t_{n+1} - t_n$) d'integrazione entro il quale il calcolo della soluzione numerica con lo schema adottato non risulta instabile od oscillante.

$$M \frac{\partial X}{\partial t} + KX + F = 0 \quad [1.22]$$

$$G(X_{n+1}) = [M + \theta \Delta t K]_{n+0} X_{n+1} - [M - [1 - \theta] \Delta t K]_{n+0} X_n + \Delta t F_{n+0} = 0 \quad [1.24]$$

$$-\min_{ij} \left[\frac{M_{ij}}{\theta K_{ij}} \right]_{i \neq j} \leq \Delta t \leq \min_i \left[\frac{M_{ii}}{(1 - \theta) K_{ii}} \right] \quad [3.8]$$

E' molto interessante osservare come esista un valore superiore ed un valore inferiore limite per la definizione di un passo temporale che permetta una corretta integrazione senza incorrere in oscillazioni numeriche.

Per un'integrazione implicita ($\theta = 1$) il limite superiore sparisce, andando ad infinito e permettendo di adottare qualsiasi valore numerico per il passo temporale, con la sola

limitazione di un valore inferiore, determinato dai coefficienti extra-diagonali della matrice M e K.

Al contrario, per un'integrazione esplicita ($\theta = 0$) il limite inferiore sparisce, e viene determinato un limite superiore legato ai termini diagonali delle matrici M e K.

$\theta = 0$			
$-\infty \leq \Delta t \leq \min_i \left[\frac{M_{ii}}{K_{ii}} \right]$			
Area satura		Area quasi satura (elementi di frontiera)	Area parzialmente satura
$S_w = 1$		$S_w \cong 0.9975$	$S_w < 1$
$M_{gg} = 0$	$M_{ii, i \neq g} \neq 0$	$M_{ii} \rightarrow 0$	M_{ii}
//	$K_{ii} \propto K^{rw} \neq 0$	$K_{ii} \rightarrow 0$	K_{ii}
$-\infty \leq \Delta t \leq 0$	$-\infty \leq \Delta t_1 \leq \min_i \left[\frac{M_{ii}}{K_{ii}} \right]$	$-\infty \leq \Delta t_2 \leq \min_i \left[\frac{M_{ii}}{K_{ii}} \right]$	$-\infty \leq \Delta t_3 \leq \min_i \left[\frac{M_{ii}}{K_{ii}} \right]$
Deve essere imposto lo switch con applicazione del valore della pressione del gas	Alcuni termini, proporzionali alla permeabilità dell'acqua rappresentano il valore minimo	Negli elementi di frontiera diffusibilità e permeabilità sono prossime a zero. La permeabilità dell'acqua è quasi pari all'unità	I termini diagonali delle aree parzialmente sature dovrebbero risultare maggiori rispetto ai casi saturi o quasi saturi in cui i valori tendono a zero.
Nelle zone sature, termini diagonali permangono nelle variabili di pressione capillare e temperatura, in dipendenza delle permeabilità dell'acqua e delle condizioni al contorno della simulazione. Nelle aree quasi sature sia a numeratore che a denominatore, gli indici tendono a zero. Tuttavia, applicando la prescrizione di limitare la permeabilità del gas ad un limite inferiore, si rende l'intervallo superiore tendente al valore minimo nullo, più la saturazione si avvicina all'unità. In tale caso potrebbero verificarsi problemi di convergenza od oscillazioni della convergenza con passi temporali troppo elevati			
$0 \leq \Delta t \leq \min_i \left[\frac{M_{ii}}{K_{ii}} \right]$			

$\theta = 1$		
$-\min_{ij} \left[\frac{M_{ij}}{K_{ij}} \right]_{i \neq j} \leq \Delta t \leq \infty$		
Area satura	Area quasi satura (elementi di frontiera)	Area parzialmente satura
$S_w = 1$	$S_w \cong 0.9975$	$S_w < 1$
$M_{ij} \neq 0$	$M_{ij} \neq 0$	M_{ii}
$K_{ij} \propto K^{rw} \neq 0$ $K_{ij} < 0$	$K_{ij} \propto K^{rw} \neq 0$ $K_{ij} < 0$	$K_{ij} \propto K^{rw} \neq 0$ $K_{ij} < 0$
$\min_{ij} \left[\frac{M_{ij}}{K_{ij}} \right]_{i \neq j} \leq \Delta t_1 \leq \infty$	$\min_{ij} \left[\frac{M_{ij}}{K_{ij}} \right]_{i \neq j} \leq \Delta t_2 \leq \infty$	$\min_{ij} \left[\frac{M_{ij}}{K_{ij}} \right]_{i \neq j} \leq \Delta t_3 \leq \infty$
Anche se applicato lo switch per la risoluzione del sistema, la formula indica un intervallo per soddisfare la convergenza senza oscillazioni	Elementi nulli tendono a portare ad infinito il limite inferiore, ma dovendo scegliere il minimo, si adottano quelli non nulli grazie alla permeabilità dell'acqua.	I termini extra-diagonali delle aree parzialmente sature dovrebbero risultare maggiori rispetto ai casi saturi per la presenza del contributo dei termini legati alla permeabilità del gas, mancato nelle aree sature. Ciò favorisce frazioni più piccole e di conseguenza valori minori.
Anche in questo caso risultano più determinanti le aree sature o quasi sature. Valori minori per il limite inferiore indicano intervalli maggiori, e di conseguenza una maggiore stabilità, cosa che non si verifica proprio per le aree sature e quasi sature. In tali condizioni definire un limite inferiore per la permeabilità relativa del gas sembra non influire, dato che le aree che incidono di più (sature e quasi sature) sono comandate dalla permeabilità dell'acqua.		
$\min_{ij} \left[\frac{M_{ij}}{K_{ij}} \right]_{i \neq j} \leq \Delta t \leq \infty$		

Previa una verifica più corretta degli assunti dell'articolo [17] (ad esempio: reale influenza di diverse leggi costitutive nella stabilità del calcolo della soluzione), lavoro non previsto in questa tesi, ciò integra le discussioni [13] riguardo alla necessità di porre un limite inferiore al valore della permeabilità del gas, derivato dalle curve di permeabilità di un materiale al variare di tutti i possibili valori del grado di saturazione.

A seguito di tutto ciò non è possibile stabilire se già nel codice di calcolo HMTRA-DEF, le oscillazioni delle variabili della pressione capillare e della pressione del gas fossero dovute alla formulazione di *switch* implementata.

3.5.3 Errore di troncamento dell' algoritmo di commutazione

Il sistema non simmetrico, non lineare e accoppiato di equazioni differenziali ordinarie è:

$$C(x)\dot{x} + K(x)x + f(x) = 0$$

Prendendo in considerazione il metodo dei trapezi generalizzato per l'integrazione temporale, espresso nel capitolo 1.4 [formule 1.23-1.24], con uno schema di integrazione all'indietro (metodo Eulero implicito)

$$C(x_{n+1})\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} + K(x_{n+1})x_{n+1} + f(x_{n+1}) = 0 \quad [3.9]$$

L'integrazione temporale è fortemente non lineare e per essere risolta necessita di un ciclo iterativo basato sullo schema di Newton-Rapson:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial x} C(x_{n+1}^l)(x_{n+1}^l - x_n) + C(x_{n+1}^l) \right] \Delta x_{n+1}^l + \left[\frac{\partial}{\partial x} K(x_{n+1}^l)x_{n+1}^l + K(x_{n+1}^l) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_{n+1}^l) \right] \Delta x_{n+1}^l \\ &= - \left[C(x_{n+1}^l)\frac{x_{n+1}^l - x_n}{\Delta t} + K(x_{n+1}^l)x_{n+1}^l + f(x_{n+1}^l) \right] \quad \wedge \quad x_{n+1}^{l+1} = x_{n+1}^l + \Delta x_{n+1}^l \end{aligned} \quad [3.10]$$

per $l = 1, 2, 3, \dots$

In cui l'indice l fa riferimento all'iterazione del ciclo di Newton-Rapson e l'indice n fa riferimento all'iterazione temporale d'integrazione.

Il vettore della soluzione a seguito dello *switch* posto nel programma, risulta modificarsi all'inizio di ogni passo temporale nei nodi parzialmente saturi degli elementi di frontiera, in quei casi in cui la pressione del gas non sia coperta da un valore della pressione capillare $p_c > p_b$.

A seguito dello *switch*, sin dalla prima iterazione in alcuni nodi si ha il cambiamento:

$$x_n = [\bar{p}^g, \bar{p}^c, \bar{T}, \bar{u}]^T \rightarrow x_{n+1}^l = [\bar{p}_{atm}, \bar{p}^c, \bar{T}, \bar{u}]^T$$

E' evidente che l'errore nel calcolo della pressione del gas agisce in tre punti distinti:

- sui termini delle matrici del sistema ($C; K; f$): per la non linearità, termini della matrice vengono calcolati con il valore della pressione atmosferica e non della pressione del gas; la differenza introdotta varia da termine a termine e dipende dalle caratteristiche geometriche e fisiche della simulazione;

- sull'integrazione temporale: a seguito dell'imposizione della pressione atmosferica, il modello si comporta come se fosse stato imposto un impulso di flusso estrattivo del gas negli *elementi di frontiera*; l'impulso dura un singolo passo temporale, ma si attiva ogni qualvolta la condizione di *switch* entra in gioco;
- sul ciclo di Newton-Rapson: dato che il ciclo iterativo dello schema è stabile indipendentemente dai valori del vettore soluzione, la convergenza dovrebbe essere sempre garantita, benché potrebbe realizzarsi con un numero di iterazioni diverso

L'integrazione temporale alle differenze finite prima vista può essere posta come [23]:

$$Ax_{n+1} - Bx_n - F = 0$$

dove

$$A_{n+1} = C(x_{n+1}) + K(x_{n+1})\Delta t \cong A$$

$$B_{n+1} = C(x_{n+1}) \cong B$$

$$F_{n+1} = -f(x_{n+1})\Delta t \cong F$$

[3.11]

Data la natura non lineare del sistema, le matrici dipendono strettamente dalla soluzione ad un certo passo temporale (soluzione che può essere quella vera, quella approssimata o quella affetta dall'errore dello *switch*). Si approssima che tali valori restino comparabili e costanti per piccole variazioni della soluzione o nel caso dello *switch* per pressioni del gas prossime al valore della pressione atmosferica (piccolo troncamento della pressione del gas a seguito dello *switch*).

Osservando l'errore globale di troncamento:

$$e_{n+1}^L = \tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}^L$$

[3.12]

\tilde{x}_{n+1} = soluzione esatta

\tilde{x}_{n+1}^L = soluzione approssimata, calcolata con L iterazioni al passo temporale $n+1$

Introducendo il residuo nel calcolo della soluzione si ha con le opportune semplificazioni:

$$A\tilde{x}_{n+1} = B\tilde{x}_n + \tilde{F} + r_{n+1}$$

[3.13]

Dato che la soluzione approssimata, soddisfa le equazioni del modello, sottraendo le due equazioni si ottiene:

$$A(\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}^L) = B(\tilde{x}_n - \tilde{x}_n^L) + r_{n+1}$$

Si ipotizza che le matrici non lineari siano comparabili e si discostino di poco fra soluzione esatta ed approssimata. Si ottiene:

$$Ae_{n+1}^L = Be_n^L + r_{n+1}$$

Con l'applicazione ricorsiva di questa relazione al variare dei passi temporali si ottiene

$$e_{n+1}^L = (AB^{-1})_{n+1} \dots (AB^{-1})_1 e_0^0 + \sum_{k=0}^{n-1} [(AB^{-1})_{n+1} \dots (AB^{-1})_{n+1-k} (A^{-1})_{n-k} r_{n-k}] + (A^{-1})_{n+1} r_{n+1} \quad [3.14]$$

Ciò che si può verificare sono due comportamenti distinti:

- l'applicazione della condizione di switch in un singolo passo temporale;
- l'applicazione di condizioni esterne (sorgenti di calore, essiccazione, ...) che tendono a creare sottodomini parzialmente saturi o spostare la frontiera fra le aree sature e quelle parzialmente sature

Nel primo caso si ha un singolo impulso e_0^0 che protrae la sua azione all'aumentare dei passi temporali secondo la produttoria dei termini AB^{-1} . L'errore introdotto influenza un numero maggiore di elementi per i passi temporali successivi allo step in cui viene introdotta la condizione erronea di switch. Nel secondo caso l'azione è più varia e si evolve con la dinamica della simulazione, oltre che con gli effetti della prima condizione erronea di switch.

In entrambi i casi l'evoluzione dell'errore segue in parte l'andamento del prodotto matriciale:

$$(AB^{-1})_{n+1} = [(C + K\Delta t)C^{-1}]_{n+1} = [CC^{-1} + KC^{-1}\Delta t]_{n+1} = [I + KC^{-1}\Delta t]_{n+1} \quad [3.15]$$

L'entità dell'errore, nel primo step in cui viene introdotto, ha una forte dipendenza dalla differenza fra la pressione del gas, cancellata dallo *switch*, rispetto alla pressione atmosferica.

Sugli elementi di frontiera ef : $\tilde{x}_{n=0} = [\bar{p}_{n=0}^g, \bar{p}_{n=0}^c, \bar{T}_{n=0}, \bar{u}_{n=0}]_{ef}^T \rightarrow x_n^l = [\bar{p}_{n=0}^{atm}, \bar{p}_{n=0}^c, \bar{T}_{n=0}, \bar{u}_{n=0}]_{ef}^T$

Sugli altri elementi p : $\tilde{x}_n = [\bar{p}_n^g, \bar{p}_n^c, \bar{T}_n, \bar{u}_n]_p^T \rightarrow \tilde{x}_n^l = [\bar{p}_n^g, \bar{p}_n^c, \bar{T}_n, \bar{u}_n]_p^T$

Assumendo che i termini derivanti dall'integrazione temporale producano un errore approssimativamente nullo, nel primo passo temporale in cui viene introdotto l'errore dello switch si ottiene:

sugli elementi di frontiera	$e_0^L = [\Delta\bar{p}_0^g, 0, 0, 0]_{ef}^T$
sugli altri elementi	$e_0^L = [0, 0, 0, 0]_p^T$

Negli step successivi ($n > 0$) l'influenza della condizione dello switch si diffonde dagli *elementi della frontiera* agli elementi finiti attigui, mentre la condizione sulla pressione del gas può rimanere bloccata alla pressione atmosferica o seguire un'evoluzione varia, come prima accennato.

sugli elementi di frontiera (<i>ef.</i>)	$e_n^L = [\Delta\bar{p}_n^g, \Delta\bar{p}_n^c, \Delta\bar{T}_n, \Delta\bar{u}_n]_{ef}^T$
sugli elementi attigui saturi (<i>sat.</i>)	$e_n^L = [0, \Delta\bar{p}_n^c, 0, \Delta\bar{u}_n]_{sat.}^T$
sugli elementi attigui parzialmente saturi (<i>p.sat.</i>)	$e_n^L = [\Delta\bar{p}_n^g, \Delta\bar{p}_n^c, \Delta\bar{T}_n, \Delta\bar{u}_n]_{p.sat.}^T$
sugli altri elementi (<i>p</i>)	$e_n^L = [0, 0, 0, 0]_p^T$

Nel caso isoterma i termini $\Delta\bar{T}$ si annullano visto che la temperatura è impostata con condizioni al contorno. Gli elementi saturi prossimi alla frontiera non hanno errori sulla pressione del gas, poiché questa viene impostata ad ogni step pari alla pressione atmosferica. In questo modo i termini A_n e B sembrerebbero calcolati in modo corretto. Tuttavia tutte le deformazioni volumetriche che prevedono interrelazioni fra diversi elementi finiti, rientrando in un equilibrio globale, risentono degli errori compiuti nell'integrazione di elementi finiti attigui. Ciò induce variazioni dalla soluzione esatta molto difficili da stimare.

Osservando i termini $(AB^{-1})_n$, si può notare che la perdita consta di un termine costante (matrice identità) e di termini variabili con le caratteristiche della simulazione.

Il passo temporale adottato influisce sulla diffusione dell'errore, non riuscendo ad annullare i termini (presenza della matrice identità).

L'errore è fortemente dipendente dall'impulso iniziale $(\Delta\bar{p}_{0,ef}^g)$ applicato nell'intorno delle zone parzialmente sature. Tale errore si diffonde nei passi successivi alle aree attigue influenzando tutte le caratteristiche della simulazione in modo non stimabile a priori, ma comunque dipendente dalla variazione di pressione del gas $(\Delta\bar{p}_0^g)$.

Si può notare come la pratica di modificare la permeabilità relativa del mezzo poroso (influenza diretta in molti dei termini diagonali della matrice K), riesce ad influire nella diffusione dell'errore creato dallo switch, ma può solo compensare o ridurre lo stesso nel tempo, non annullarlo o cancellare l'errore iniziale (matrice identità).

L'incipienza del malcondizionamento dovuto allo *switch* negli *elementi di frontiera* è verificabile in una simulazione statica (in altre parole senza evoluzione dei sottodomini saturi e parzialmente saturi, come avviene per esempio in un serbatoio di gas profondo non sottoposto ad alcun flusso estrattivo), se si cerca di compensare il problema con un apposito flusso di gas $(f^*(x_{n+1}))$, stimato empiricamente, indotto nel mezzo poroso parzialmente saturo come una sorgente costante.

$$x_n = [\bar{p}^g, \bar{p}^c, \bar{T}, \bar{u}]^T \rightarrow x_{n+1}^l = [\bar{p}_{atm}, \bar{p}^c, \bar{T}, \bar{u}]^T$$

$$\Delta x = x_{n+1}^l - x_n$$

$$\left[C(x_{n+1}) \frac{\Delta x}{\Delta t} - f^*(x_{n+1}) \right] + K(x_{n+1})x_{n+1} + f(x_{n+1}) = 0$$

La sorgente di gas può essere applicata solo agli elementi finiti vicini a quelli che subiscono la condizione di *switch*. Ciò implica che:

$$e_n^L = [\Delta\bar{p}_n^g, \Delta\bar{p}_n^c, \Delta\bar{T}_n, \Delta\bar{u}_n]_{p.sat.}^T \rightarrow e_n^L = [0, \Delta\bar{p}_n^c, \Delta\bar{T}_n, \Delta\bar{u}_n]_{p.sat.}^T \wedge e_n^L = [0, \Delta\bar{p}_n^c, \Delta\bar{T}_n, \Delta\bar{u}_n]_{sat.}^T$$

Con la cessazione della sorgente di gas negli elementi attigui, l'integrazione numerica prosegue con i medesimi difetti prima descritti: la pressione del gas negli elementi parzialmente saturi attigui subisce un drastico calo come se soggetta ad un flusso di estrazione. Tale soluzione erronea e fortemente sconsigliata, dato che influisce solo sul bilancio della variabile che rappresenta la pressione del gas, oltre a distruggere una qualsiasi evoluzione dinamica della simulazione, non sopperisce agli errori indotti negli elementi finiti attigui alla frontiera nel modello fortemente accoppiato.

3.5.4 *Switch per nodi saturi, switch per elementi completamente saturi*

La correzione dello switch può essere effettuata seguendo due vie distinte:

1. condizionamento dei nodi saturi;
2. condizionamento degli elementi completamente saturi.

Condizionando solo i nodi saturi non c'è la necessità di distinguere se l'elemento finito faccia parte di un sottodominio completamente saturo o si trovi nella frontiera fra il dominio saturo e quello parzialmente saturo.

Negli *elementi di frontiera* si troveranno due specie diverse di condizionamento:

$$\begin{array}{l}
 \text{nodi parzialmente saturi} \\
 \text{nodi saturi}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 p_c > p_b \\
 S_w < 1 \\
 p_g = \text{libera} \\
 \\
 p_c < p_b \\
 S_w = 1 \\
 p_g = p_{atm}
 \end{array} \right.$$

Il pregio di questo tipo di condizionamento si basa sulla semplicità dell'algoritmo e sulla stabilità offerta al calcolo, dato che impone un maggior numero di condizioni al contorno. Il difetto principale riguarda invece la possibilità che il gas contenuto nelle aree parzialmente sature possa diffondersi in quelle sature. Infatti il condizionamento della pressione del gas, dovuto allo *switch*, è antecedente all'esecuzione di un qualsiasi calcolo dei termini del modello ad un dato passo temporale. Con tale modifica allo *switch* una zona parzialmente satura può crearsi od espandersi solo se ad un passo temporale n-esimo si sblocca la condizione sulla pressione capillare $p_c > p_b$ a pressione del gas costante. Ciò permette ad uno step successivo di non vincolare più la pressione del gas ed entrare in bilancio con due variabili indipendenti. La diffusione del gas verso nodi in cui la variabile p_g è bloccata ad un valore fisso non sembra fisicamente corretto. Ciò sembra ammissibile nei casi in cui, nella separazione fra due materiali, uno permeabile ed uno impermeabile, si ha comunque un salto di permeabilità, diffusività del gas e di grado di saturazione. Inoltre il passo temporale necessario per togliere la condizione di *switch* può risultare piccolo o grande a scelta dell'utente.

La legge di Flick, prima vista [1.12], fornisce le seguenti velocità relative:

$$\begin{cases} v_g^{ga} < v^{ga} - v^g \\ v_g^{gw} < v^{gw} - v^g \end{cases}$$

$$v_g^{ga} = -\frac{M_a M_w}{M_g^2} D_g^{ga} \text{grad} \left(\frac{\partial p^{ga}}{\partial p^g} \right) = \frac{M_a M_w}{M_g^2} D_g^{ga} \text{grad} \left(\frac{\partial p^{gw}}{\partial p^g} \right) = -v_g^{gw}$$

Una soluzione alternativa può trattare gli *elementi finiti di frontiera* come delle aree quasi sature ($S_w \cong 0.9975$), offrendo un condizionamento della pressione del gas solo in quegli elementi finiti in cui tutti i nodi risultino saturi (elementi finiti completamente saturi). Ciò sopperisce al problema di una possibile diffusione del gas dovuta a forti gradienti di pressione in mezzi dalla permeabilità comparabile. D'altro canto ciò può essere reso solo trattando le *aree di frontiera* come quasi sature, come in parte fatto in altre simulazioni [10-11-18]. Non sapendo a priori se con il passo temporale previsto si avrà una desaturazione dei nodi saturi appartenenti agli *elementi di frontiera*, si è costretti a ridurre il grado di saturazione massima ($S_w \cong 1 \rightarrow 0.9975$) per non incorrere in mal condizionamenti del modello e dell'equazione di conservazione dell'aria secca [1.8].

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S_w) \rho_{ga}] + (1 - S_w) \rho_{ga} \frac{\partial \phi_{hydr}}{\partial t} + \alpha (1 - S_w) \rho_{ga} \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{ga} v_g) + \nabla \cdot (\rho_g v_{ga}) = 0$$

Nel mezzo poroso saturo l'equazione di conservazione dell'aria secca diviene:

$$\nabla \cdot (\rho_{ga} v_g) + \nabla \cdot (\rho_g v_{ga}) = 0$$

[3.16]

ρ_{ga} = densità dell'aria secca nella fase gassosa

v_g = velocità relativa della fase gassosa

ρ_g = densità della fase gassosa

v_{ga} = velocità di diffusione dell'aria secca nella fase gassosa

Per mezzi saturi la relazione diventa: $\nabla \cdot \begin{pmatrix} v_{ga} \\ \rho_{ga} \end{pmatrix} = 0 \wedge v_g = 0$

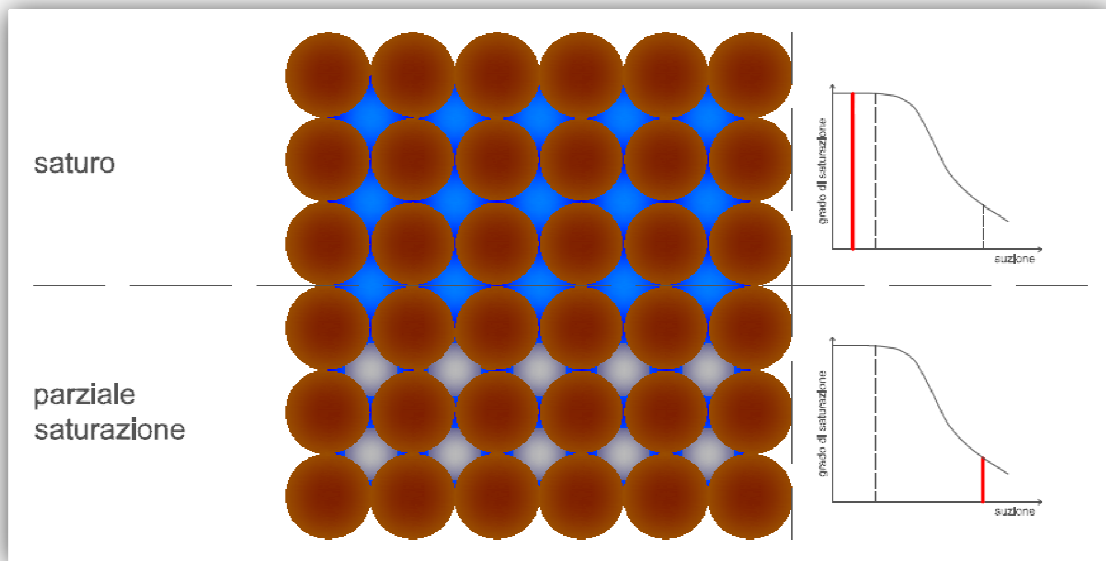


Figura 7. Frontiera netta fra un dominio saturo ed uno parzialmente saturo

Prendendo in considerazione una simulazione isoterma, su un nodo saturo, alcune variabili e derivate assumono i valori:

$$S_w = 1$$

$$S_g = 1 - S_w = 0$$

S_g = grado di saturazione del gas

S_w = grado di saturazione dell'acqua

Isoterma	$\frac{\partial S_w}{\partial p_c} = 0 \wedge \frac{\partial S_w}{\partial T} = 0$
Non isoterma	$\frac{\partial S_w}{\partial p_c} = 0 \wedge \frac{\partial S_w}{\partial T} \neq 0$

Mentre le permeabilità di acqua e gas assumono valori legati alle curve di permeabilità del materiale.

$$K^{rg} = 0 \cong 10^{-4}$$

$$K^{rw} = 1$$

$K^{rw,g}$ = permeabilità relativa del gas o dell'acqua

Senza la presenza di gas, perde di significato il tensore effettivo di diffusività dell'aria secca (o del metano) nella fase gassosa; il tensore di diffusività del vapore d'acqua nella fase gassosa è diverso da zero nel caso di un passaggio di fase (fenomeno che avviene con scambio di calore sufficiente a convertire una quantità di massa in vapore secondo il calore latente)

$$D_g^{ga} = 0 [m^2/s]$$

$$D_g^{gw} = 0 [m^2/s]$$

D_g^{ga} = tensore della diffusività effettiva dell'aria secca nella fase gassosa

D_g^{gw} = tensore della diffusività effettiva del vapore nella fase gassosa

Quindi il sistema alle differenze finite del modello in una simulazione isoterma necessita dell'imposizione di una condizione al contorno sul valore della pressione del gas per evitare di ricadere nel mal condizionamento dell'algoritmo risolutivo.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{ct} & \mathbf{C}_{cu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{tt} & \mathbf{C}_{tu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}^g \\ \bar{\mathbf{p}}^c \\ \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{cg} & \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{tg} & \mathbf{K}_{tc} & \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{ug} & \mathbf{K}_{uc} & \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}^g \\ \bar{\mathbf{p}}^c \\ \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_t \\ \mathbf{f}_u \end{bmatrix}$$

[3.17]

Il caso non isoterma preserva delle derivate e delle quantità che potrebbero risultare di poco discosti dal valore nullo e tali da rendere il sistema del modello comunque determinato.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{gt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{ct} & \mathbf{C}_{cu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{tt} & \mathbf{C}_{tu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}^g \\ \bar{\mathbf{p}}^c \\ \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{cg} & \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{tg} & \mathbf{K}_{tc} & \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{ug} & \mathbf{K}_{uc} & \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}^g \\ \bar{\mathbf{p}}^c \\ \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_t \\ \mathbf{f}_u \end{bmatrix}$$

[3.18]

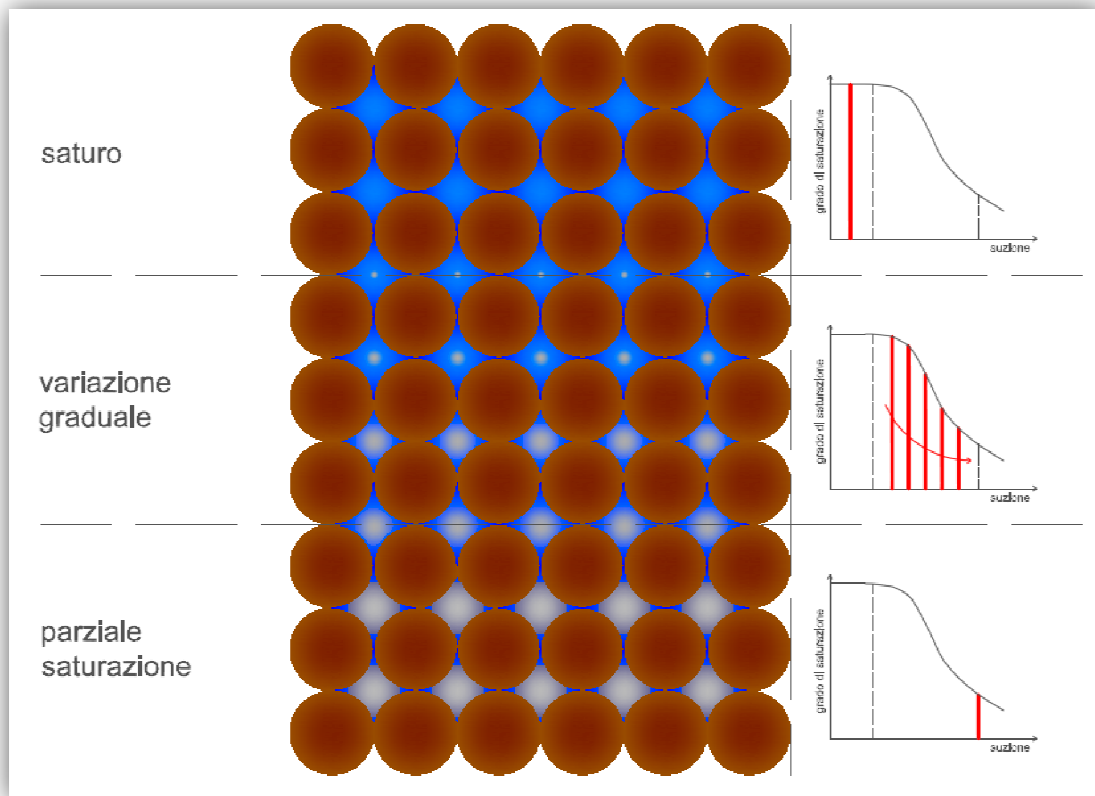


Figura 8. Immagine schematica di una frontiera graduale fra un dominio saturo ed uno parzialmente saturo

Descrivendo in modo semplicistico delle relazioni generali per il mezzo poroso, si può capire come lo switch fra dominio saturo e parzialmente saturo possa essere diverso al variare del tipo di frontiera. Nel volume elementare rappresentativo il gas viene schematizzato con un numero ζ di bollicine di raggio fittizio r . Per tali bollicine vale la legge di stato dei gas perfetti (in prima approssimazione dato che per pressioni o densità elevate e per temperature elevate, molti gas si discostano da tale comportamento):

$$p_g A_g = nRT$$

Nel caso isoterma:

$$p_g A_g = \text{cost}$$

$$A_g = \zeta \alpha \pi r^2$$

ζ = numero di bollicine di gas presenti nel mezzo

α = fattore di forma che rapporta l'area di una bollicina di gas ad una forma circolare media

Dato il numero (ζ) incognito di bollicine presenti, tale legame viene trascurato, considerando la relazione sempre soddisfatta per qualsiasi raggio r ; ciò dipende dalla media eseguita nel volume elementare rappresentativo grazie alla quale si può evitare una qualsiasi descrizione deterministica delle bollicine del gas presenti in un'area infinitesima omogenea.

La pressione capillare può essere ricavata come funzione del raggio fittizio delle ζ bollicine di gas disperse mediamente nel volume elementare rappresentativo.

$$p_c = \pm \frac{\gamma}{r}$$

r = raggio di curvatura fittizio di una delle ζ bollicine presenti nel volume elementare rappresentativo

γ = tensione superficiale

Tramite la curva di saturazione si ricava il grado di saturazione legato quanto meno alla suzione o pressione capillare.

$$S_w = S_w(p_c, T, \varepsilon_v^p)$$

Dalla saturazione può essere identificata l'area del gas presente nel volume elementare rappresentativo, relazione che soddisfa la legge di stato dei gas perfetti.

$$A_g = n(1 - S_w)A_{tot}$$

Date pressione capillare e pressione del gas ($p_c; p_g$) si deriva la pressione dell'acqua come variabile dipendente, dove p_c e p_g sono mediate nel volume elementare rappresentativo (caratteristiche intrinseche del sistema semplificato) e dove p_w connota sia caratteristiche globali (pressione idrostatica), sia caratteristiche locali (sovrapressioni).

$$P_w = P_g - P_c$$

La connotazione globale della pressione dell'acqua, quando assume l'andamento della pressione idrostatica, viene individuata e comandata in modo diretto dalla pressione capillare, definita come variabile indipendente del problema (Fig.9).

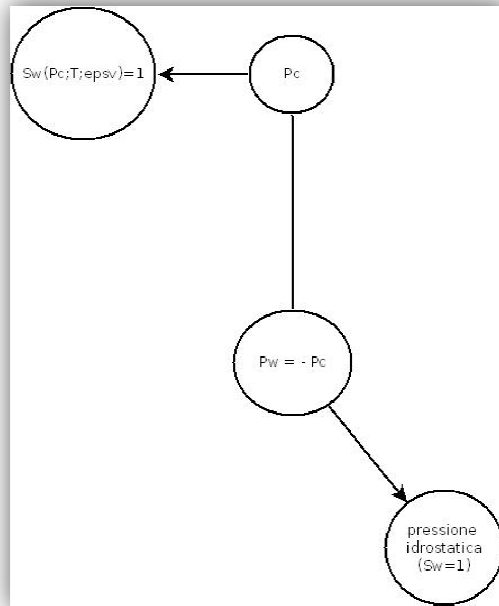


Figura 9. schema dell'equilibrio delle pressioni in condizioni saturate

Invece il bilancio fra le pressioni indipendenti mediate nel volume elementare rappresentativo (pressione del gas e pressione capillare) gestisce il caso più generale in cui alla pressione idrostatica si aggiunge una sovrappressione locale, smorzata nello spazio secondo le caratteristiche del mezzo poroso (Fig.10). Quindi, si può immaginare che vi siano due comportamenti diversi:

- per frontiere fra mezzi impermeabili ed impermeabili (Fig.7): la variazione della sovrappressione dell'acqua può essere netta e discontinua così come la frontiera fra dominio saturo e parzialmente saturo;
- per frontiere fra mezzi permeabili (Fig.8): la variazione della sovrappressione deve soddisfare requisiti di equilibrio e continuità che possono essere ottenuti solo con una corretta interpolazione dell'area di variazione della sovrappressione dell'acqua.

La corretta interpolazione dell'area di smorzamento della sovrappressione della pressione dell'acqua necessita di un numero sufficiente di nodi e di una migliore definizione dell'area relativa alla variazione di pressione dell'acqua, slegata dal raffittimento della mesh applicato dall'utente. Quest'ultimo aspetto potrebbe non essere ben rappresentato da nessuna delle due proposte di modifica dell'algoritmo di *switch*.

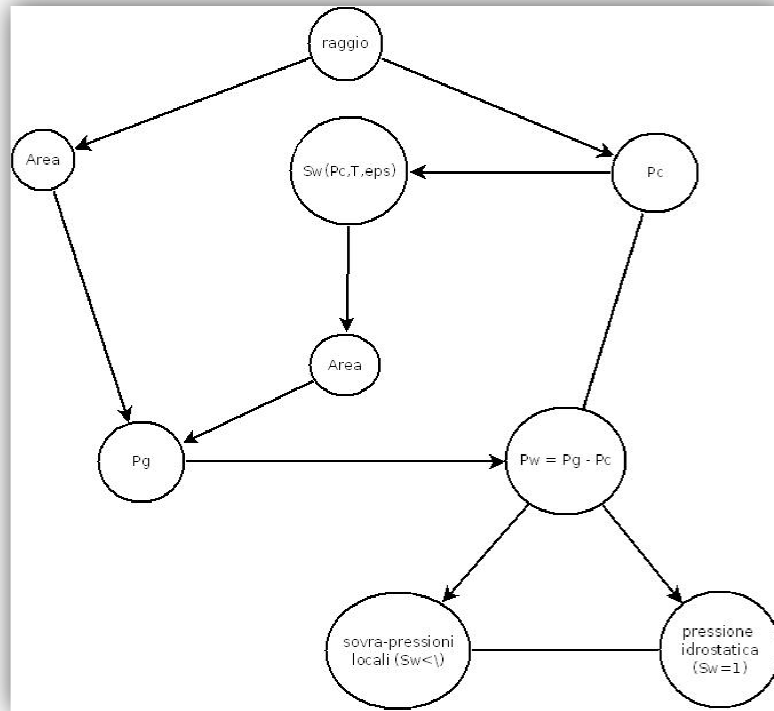


Figura 10. Schema semplificato dell'equilibrio delle pressioni in condizioni parzialmente saturate (semplificazioni: riporta l'area del gas e non la densità della miscela di gas; non si considera il vapore d'acqua in miscela con un gas; si ragiona in termini finiti e non differenziali)

3.5.5 Confronto dei due switch proposti con due esempi: subsidenza; consolidazione del terreno

Le due soluzioni per lo switch prima descritte sono state implementate in due simulazioni distinte per osservare se vi fossero differenze di comportamento.

La prima simulazione tratta il problema della subsidenza indotta dall'estrazione di gas da un serbatoio profondo, già trattata in vari articoli [19-20-21-22]

La seconda simulazione tratta un semplice caso di consolidazione di una colonnina di terreno sottoposta ad un ciclo di riscaldamento con l'applicazione di un carico di $10KPa$ assieme ad una suzione di $5KPa$ e successivamente aumentando la temperatura del provino di $50^{\circ}C$.

Ai fini della discussione è bene notare i dati che differenziano i due casi.

Nel caso della subsidenza si ha un sottodominio parzialmente saturo imposto dalle condizioni al contorno iniziali. Nel caso non isoterma della colonnina di terreno si possono formare dei domini parzialmente saturi per condizioni esterne (suzione in sommità della colonnina di terreno, aumento della temperatura). Nel serbatoio profondo le pressioni del gas iniziali e le pressioni capillari dei nodi parzialmente saturi sono molto elevate, dovendo simulare l'estrazione di quasi 80 milioni di metri cubi di gas (alla pressione prevista nel serbatoio) [19-20]. È interessante notare come tale simulazione venga eseguita in ambito isoterma, generalmente impostando una temperatura costante per tutto il modello, o simulando una temperatura costante nel tempo, ma diversificata in funzione della profondità ($3^{\circ}C/100m$). Nel caso della colonnina di terreno invece non ci si aspetta la formazione di valori di pressione del gas elevati. Altro aspetto interessante riguarda la frontiera del mezzo parzialmente saturo. Il serbatoio profondo è chiuso da due strati di argilla, superiore ed inferiore, cosa che giustifica una discontinuità delle proprietà idriche (grado di saturazione, porosità, pressione del gas, permeabilità, coefficienti di diffusività, viscosità); infine fra i due strati d'argilla il serbatoio profondo presenta una frontiera con l'acquifero saturo, simulato per semplicità con proprietà idriche del materiale simili a quelle del serbatoio. Proprio quest'ultimo è il punto di maggior interesse, visto che lo scambio di fluidi fra serbatoio e acquifero determina il meccanismo di diffusione della subsidenza e i maggiori fenomeni plastici. Dato che tale simulazione ha il solo scopo di valutare il comportamento delle due soluzioni di switch,

non è stato applicato un flusso estrattivo di gas nel serbatoio profondo. Nell'esempio della colonnina di terreno il materiale è uno solo (Boom-clay).

Subsidenza

Preprocessamento

Le condizioni al contorno applicate al modello sono differenti a seconda che si tratti dell'esecuzione iniziale preparatoria (in gergo *run0*) o la successiva fase di evoluzione dinamica della subsidenza con l'estrazione del gas.

Nel *Run0* si ricrea in modo approssimato la consolidazione in cui si trova il terreno nel sito a seguito dell'orogenesi del bacino.

Run0	
condizione al contorno	commento
$p_g = 1.97E + 7Pa$	applicata nel sottodominio del serbatoio (Fig.11)
$p_g = 1.01325E + 5Pa$	applicata nel dominio saturo o sul piano campagna. La condizione della pressione atmosferica per il sottodominio saturo potrebbe essere trascurata dato che lo <i>switch</i> impone in automatico questo valore. Conviene applicare la pressione del gas pari alla pressione atmosferica sul clay-layer sotto il serbatoio, al bordo estremo della mesh (Fig.12).
$p_c = 0Pa$	applicata sul piano campagna (Fig.13).
$p_c = 7.80E + 5Pa$	applicata sui nodi del serbatoio (Fig.13).
$p_c = -p_w = -\gamma z$	applicata sul bordo esterno della geometria dove si ipotizza vi siano condizioni idrostatiche indisturbate (Fig.13).
$p_c = -p_w = -\gamma h_{tot}$	sulla base della geometria, sotto il clay-layer viene imposta la pressione idrostatica con la relativa pressione capillare (Fig.12).
$T = 320.15 \quad T = \kappa z + 320.15 \wedge \kappa = 0.03$	può essere applicata una condizione costante (Fig.14) al variare della profondità (poco realistica) oppure una condizione costante nel tempo e variabile (Fig.15) nello spazio (secondo la quota rispetto al piano campagna)
$u = 0 \wedge v = 0$	agli estremi il modello deve essere vincolato agli spostamenti lungo le ascisse e le ordinate (Fig.11)

Le condizioni al contorno per il *Run0* sono riassunte nelle figure a seguire

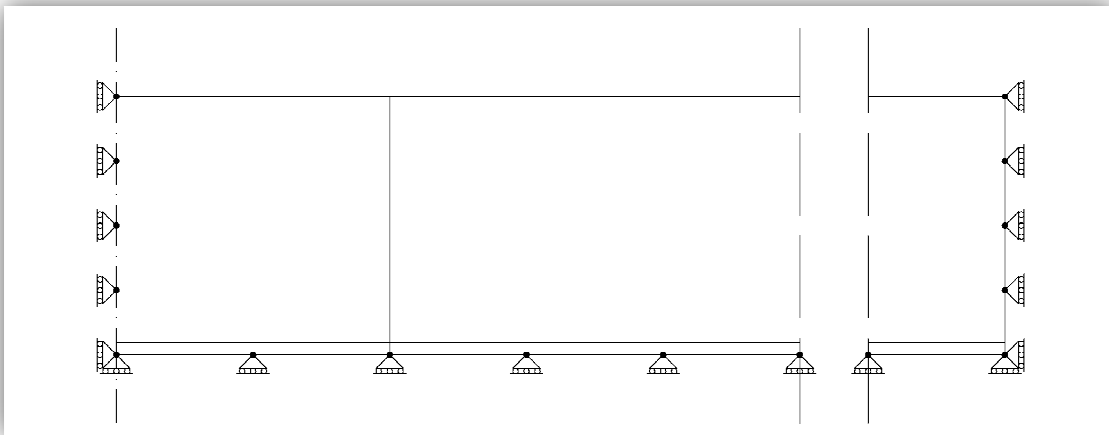


Figura 11. Vincoli agli spostamenti in ascissa ed ordinata

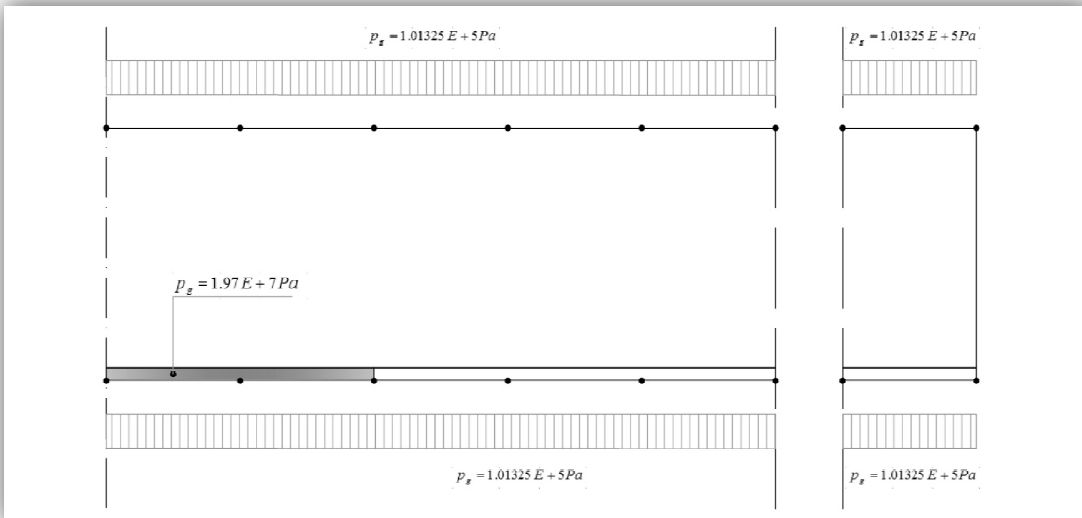


Figura 12. Condizioni al contorno per la pressione del gas

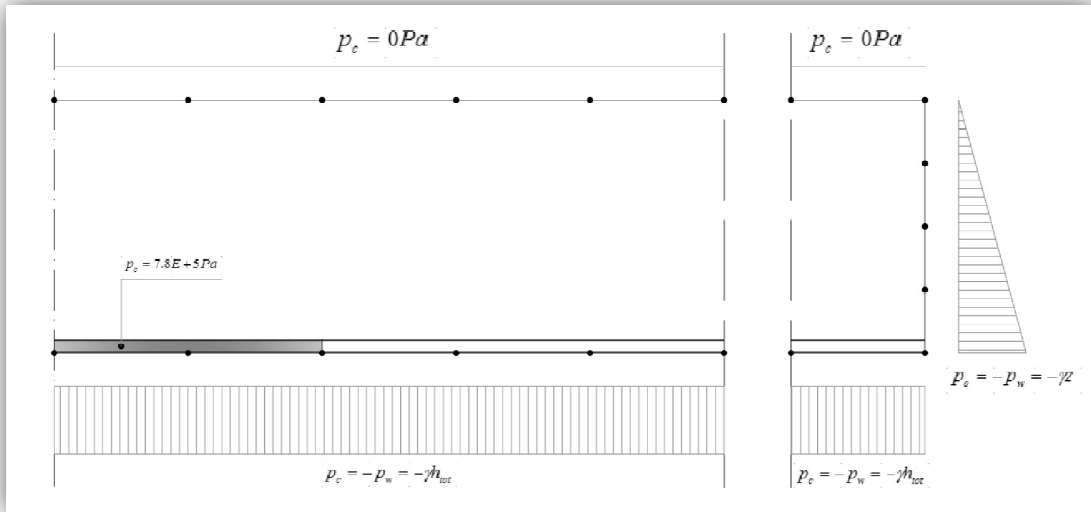


Figura 13. Condizioni al contorno per la pressione capillare

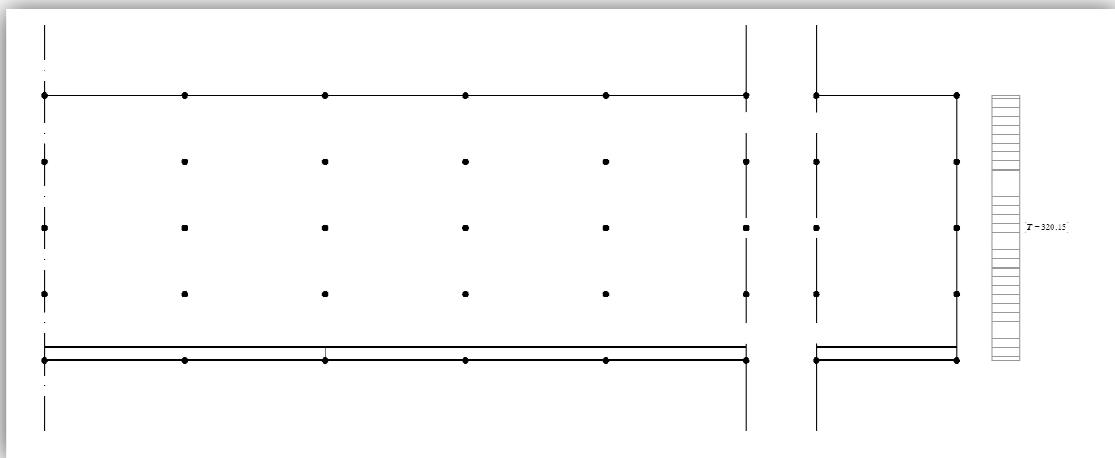


Figura 14. Condizioni al contorno per la temperatura (costante in tutti i nodi e profondità)

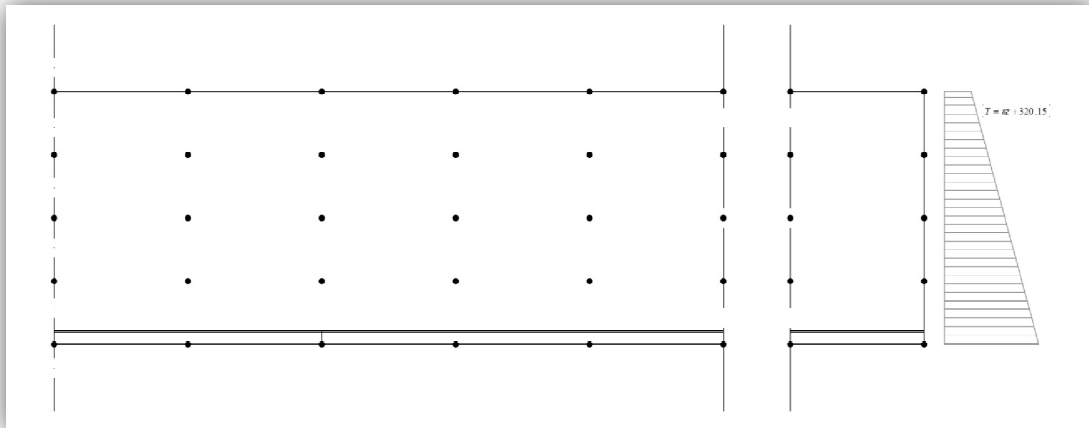


Figura 15. Condizione al contorno per la temperatura (variabile con la profondità)

Le condizioni al contorno applicate al modello per la simulazione dinamica della subsidenza sono riassunte di seguito. Il sottodominio parzialmente saturo viene creato nel *Run0* per mezzo dell'imposizione dei valori di pressione capillare e pressione del gas. Tali valori derivano da studi in sito e nella simulazione, impostati nel *Run0*, non sono necessariamente in equilibrio nei primi passi temporali dell'analisi dinamica (*Run1*). Per tale motivo nelle prime fasi dell'analisi dinamica si osserva un assestamento della pressione del gas e della pressione capillare nel serbatoio. Si assume un tempo di integrazione di 100 anni, per aver modo di valutare il comportamento degli switch in condizioni di equilibrio.

run1	
condizione al contorno	commento
$p_g = 1.01325E + 5Pa$	come per il run0 (Fig.16).
$p_c = 0Pa$	come per il run0 (Fig.17).
$p_c = -p_w = -\gamma z$	come per il run0 (Fig.17).
$p_c = -p_w = -\gamma h_{tot}$	come per il run0 (Fig.17).
$T = 320.15 \quad T = \kappa z + 320.15 \wedge \kappa = 0.03$	come per il run0 (Fig.14-15).
$u = 0 \wedge v = 0$	come per il run0 (Fig.11).
ϕ_g	condizione di estrazione di un flusso di gas dal serbatoio trascurata. La simulazione della subsidenza prevede l'inserimento di un flusso di gas in relazione alla curva di produzione del gas ed in funzione del rapporto fra i lati degli elementi vincolati e l'area totale del serbatoio. In questo caso si lascia la p_g libera, priva di vincoli
P_c	la condizione sulla pressione capillare comunque dovrebbe essere sbloccata nel serbatoio

Alcune condizioni al contorno per il Run1 sono riassunte nelle figure a seguire

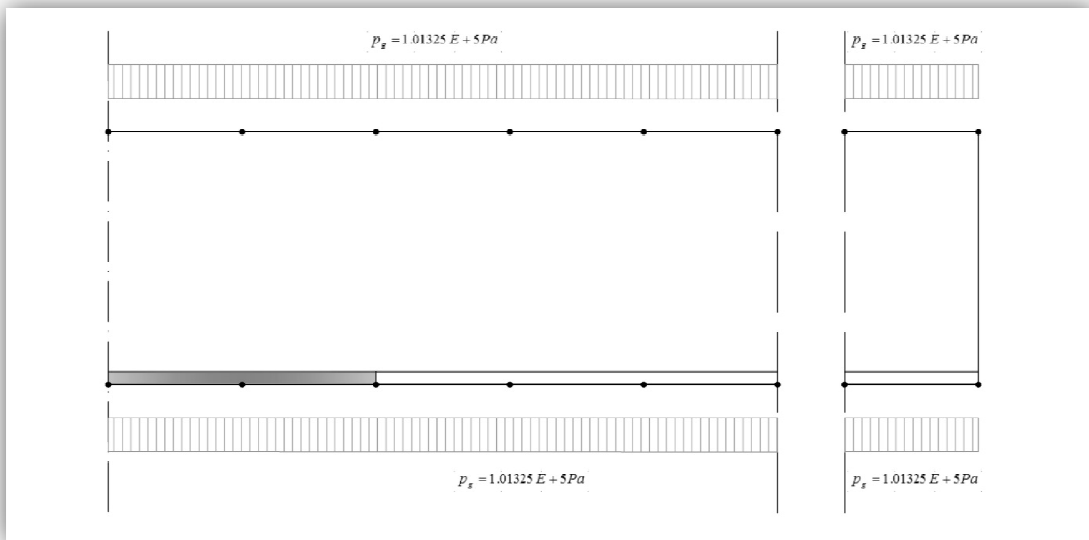


Figura 16. Condizione al contorno per la pressione del gas

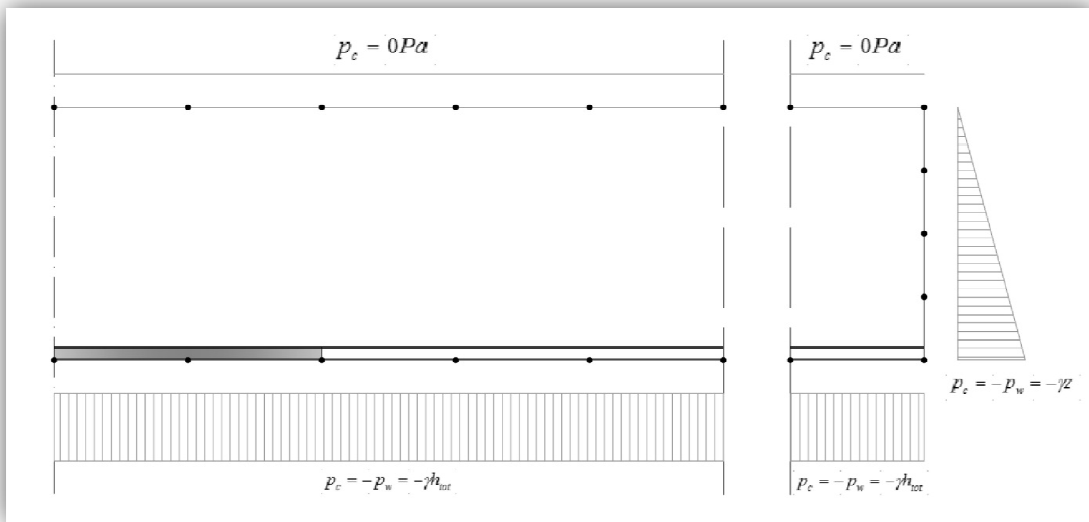


Figura 17. Condizione al contorno per la pressione capillare

I materiali adottati per il modello sono:

- sabbia (*sand*) per la parte del terreno portata, sopra la falda profonda in cui si trovano l'acquifero e il serbatoio di gas;
- argilla (*clay-layer*) per i due strati impermeabili che racchiudono l'acquifero ed il serbatoio impedendo alla falda ed al gas di sfuggire;
- materiale permeabile (*Schei*) per acquifero e serbatoio, presupponendo un eguale sedimentazione dei due strati, benché in condizioni di saturazione differenti.

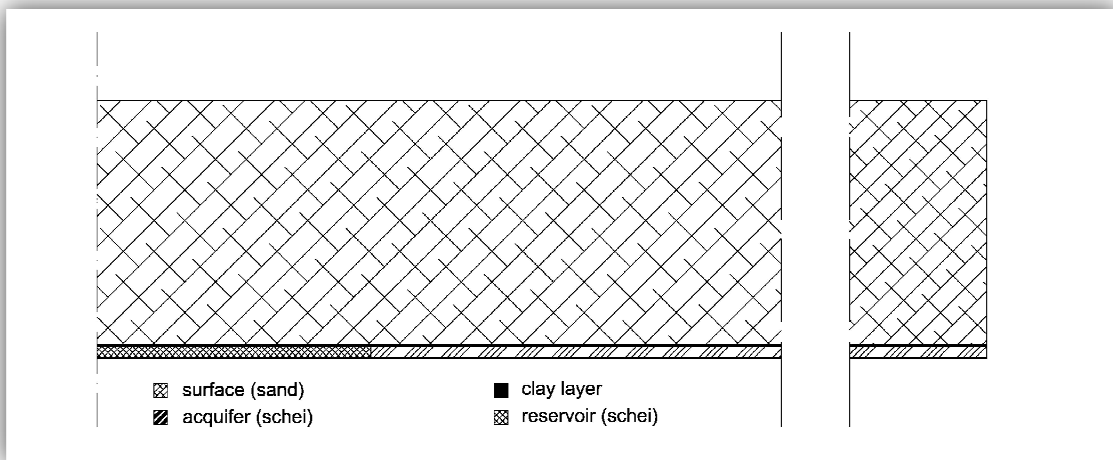


Figura 18. Disposizione dei materiali nella geometria della mesh

sabbia		
Variabile	Descrizione	Valore
PORO	Porosità	$n = 0.21$
CKKO	Permeabilità intrinseca	$K_0 = 1.263 \cdot 10^{-14} m^2$
RHOS	Densità dello scheletro solido	$\rho_0 = 2000 Kg/m^3$
TORT	Fattore di tortuosità	$\tau = 1$
TKS	Conduttività termica del solido	$\lambda_{eff} = 1.442 W/mK$
TKSM	Conduttività di calore della matrice solida	$\lambda_{eff,s} = 2.5 W/mK$
CPS	Calore specifico del solido	$C_p = 810.0 J/KgK$
SSIR	Punto di saturazione irriducibile	$S_{ir} = 0.28$
SSCR	Punto di saturazione critica	$S_{cr} = 0.909$
SE0	Suction entry	$p_b = 30000 Pa$
EMOD	Modulo di Young	$E = 731.48 \cdot 10^6 Pa$
VCOEFF	Coefficiente di Poisson	$\nu = 0.1991$
BETAS	Coefficiente cubico di espansione termica	$\beta_s = 0.9 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K}$
ALFA	Costante di Biot	$a = 1.0$

argilla		
Variabile	Descrizione	Valore
PORO	Porosità	$n = 0.20$
CKKO	Permeabilità intrinseca	$K_0 = 1.0012 \cdot 10^{-19} m^2$
RHOS	Densità dello scheletro solido	$\rho_0 = 2000 Kg/m^3$
TORT	Fattore di tortuosità	$\tau = 1$
TKS	Conduttività termica del solido	$\lambda_{eff} = 1.442 W/mK$
TKSM	Conduttività di calore della matrice solida	$\lambda_{eff,s} = 2.5 W/mK$
CPS	Calore specifico del solido	$C_p = 810.0 J/KgK$
SSIR	Punto di saturazione irriducibile	$S_{ir} = 0.21$
SSCR	Punto di saturazione critica	$S_{cr} = 0.909$
SE0	Suction entry	$p_b = 30000 Pa$
EMOD	Modulo di Young	$E = 92.565 \cdot 10^6 Pa$
VCOEFF	Coefficiente di Poisson	$\nu = 0.45$
BETAS	Coefficiente cubico di espansione termica	$\beta_s = 0.9 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K}$
ALFA	Costante di Biot	$a = 1.0$

Schei (serbatoio - acquifero)		
Variabile	Descrizione	Valore
PORO	Porosità	$n = 0.21$
CKKO	Permeabilità intrinseca	$K_0 = 2.813 \cdot 10^{-14} m^2$
RHOS	Densità dello scheletro solido	$\rho_0 = 2000 Kg/m^3$
TORT	Fattore di tortuosità	$\tau = 1$
TKS	Conduttività termica del solido	$\lambda_{eff} = 1.442 W/mK$
TKSM	Conduttività di calore della matrice solida	$\lambda_{eff,s} = 2.5 W/mK$
CPS	Calore specifico del solido	$C_p = 810.0 J/KgK$
SSIR	Punto di saturazione irriducibile	$S_{ir} = 0.28$
SSCR	Punto di saturazione critica	$S_{cr} = 0.909$
SE0	Suction entry	$p_b = 30000 Pa$
EMOD	Modulo di Young	$E = 731.48 \cdot 10^6 Pa$
VCOEFF	Coefficiente di Poisson	$\nu = 0.1991$
BETAS	Coefficiente cubico di espansione termica	$\beta_s = 0.9 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K}$
ALFA	Costante di Biot	$a = 1.0$

Post-processamento

Nella simulazione vengono considerati due differenti frontiere, fra il sottodominio del serbatoio e gli strati d'argilla o l'acquifero. In tali condizioni, la frontiera fra serbatoio e acquifero si pone fra due materiali di caratteristiche simili, con un riequilibrio della pressione idrostatica fra la falda acquifera e la parte parzialmente satura creatasi nell'arco delle varie ere geologiche del terreno; la frontiera fra il serbatoio e gli strati impermeabili d'argilla si pone fra due materiali dalle caratteristiche molto diverse, uno dei quali è scarsamente diffusivo e permeabile al gas.

Nelle immagini seguenti è possibile vedere quali nodi sono presi in considerazione per la valutazione delle caratteristiche.

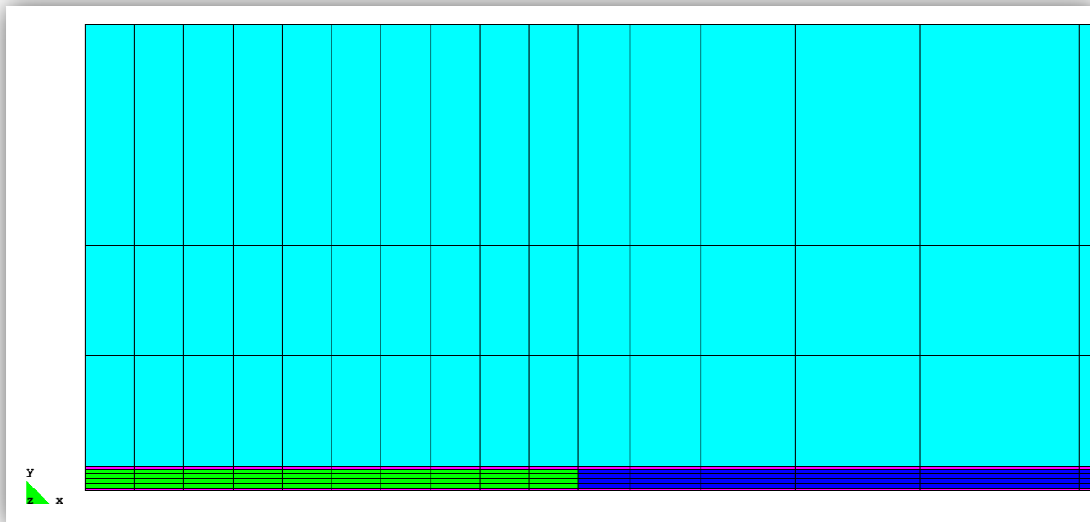


Figura 19. Immagine parziale della mesh inserita in Gid nella fase di pre-processamento (verde – serbatoio profondo; blu – acquifero; magenta – layer d'argilla; ciano - sabbia)

I nodi presi in considerazione sono indicati nelle immagini seguenti.

I nodi dell'acquifero (464; 447; 432; 413) si trovano tutti alla stessa quota; per questo in seguito si rappresenteranno grandezze caratteristiche sulla base dell'ascissa presente nella geometria inserita in GID.

I nodi dello strato d'argilla (489; 490; 491, condiviso fra argilla e serbatoio) si trovano a quote diverse; per questi nodi in seguito si rappresenteranno delle grandezze caratteristiche sulla base della quota (differenza fra l'ascissa del piano campagna, pari a 1890 metri e l'ascissa del nodo).

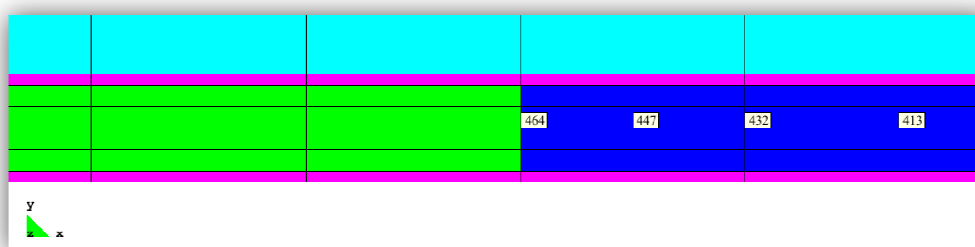


Figura 20. Disposizione dei nodi presi in considerazione fra serbatoio profondo ed acquifero (464; 447; 432; 413)

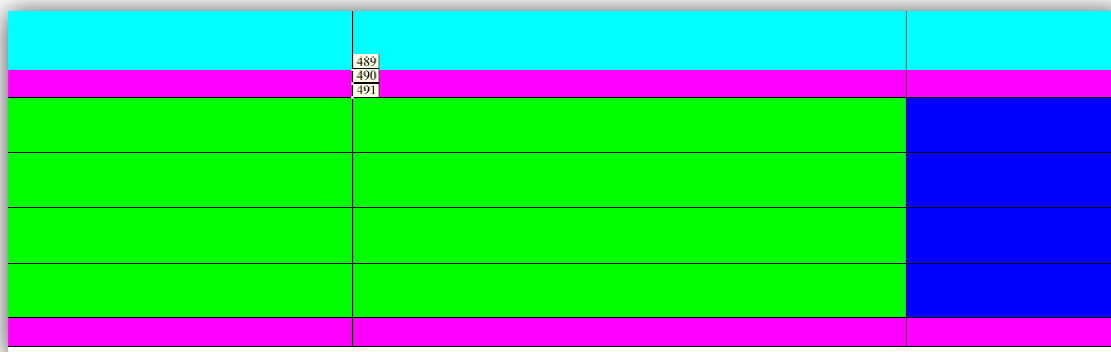


Figura 21. Disposizione dei nodi presi in considerazione fra serbatoio e strato d'argilla (491; 490; 489)

Frontiera acquifero – serbatoio

Nella frontiera fra serbatoio e acquifero è stata eseguita una simulazione di 100 anni ed una più ristretta e precisa di un solo anno.

Chiamo i due switch con due nomi simbolici per distinguerli:

- nodi saturi (*nod.sat.*): indica lo switch che imposta le condizioni sui soli nodi saturi;
- elementi saturi (*el.sat.*): indica lo switch che imposta le condizioni sui nodi degli elementi completamente saturi (8 nodi saturi nell'elemento).

Sono state eseguite due simulazioni: una con un passo temporale di 6.307.200 secondi, pari a circa 1752 ore (73 giorni) per una durata totale di 100 anni; una con un passo temporale di 86.400 secondi (24 ore) per un tempo totale di 1 anno. Solo il nodo 447, a ridosso del serbatoio nell'elemento di frontiera, presenta un andamento differente da quello assunto dagli altri nodi.

Nel nodo 447 si ha anche l'aumento della pressione del gas a livelli comparabili con il valore impostato nel serbatoio. Il comportamento dei nodi retrostanti (432 - 413) è sostanzialmente simile, anche se c'è un lieve calo del valore della pressione capillare (aumento delle pressioni idrostatiche di equilibrio a parità di quota piezometrica).

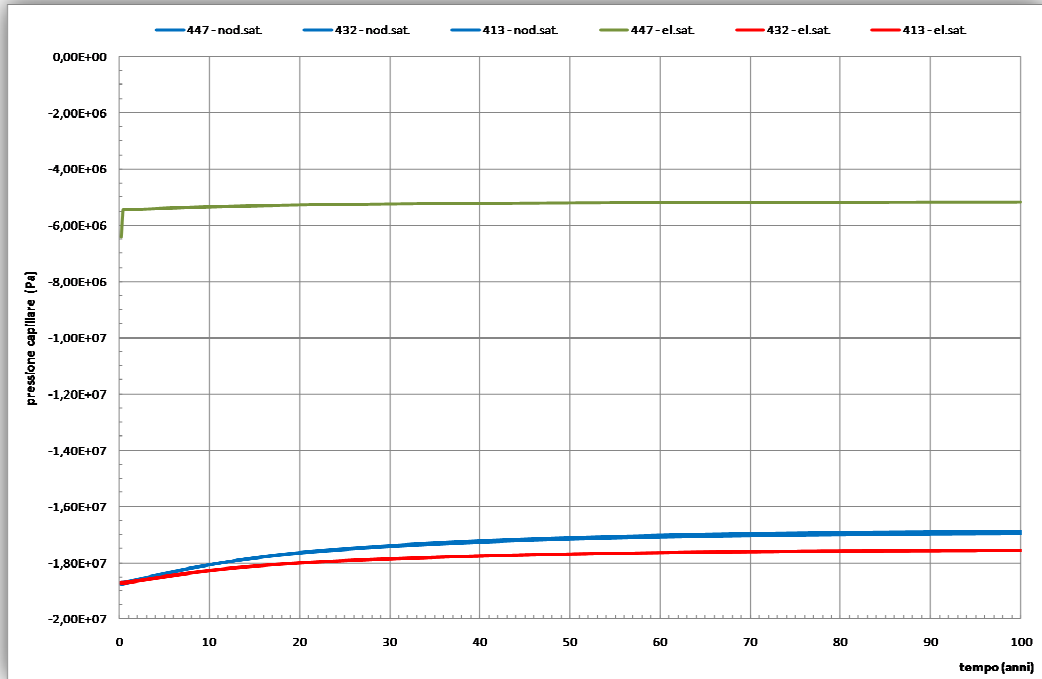


Figura 22. Pressione capillare nei vari nodi fra serbatoio ed acquifero nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi)

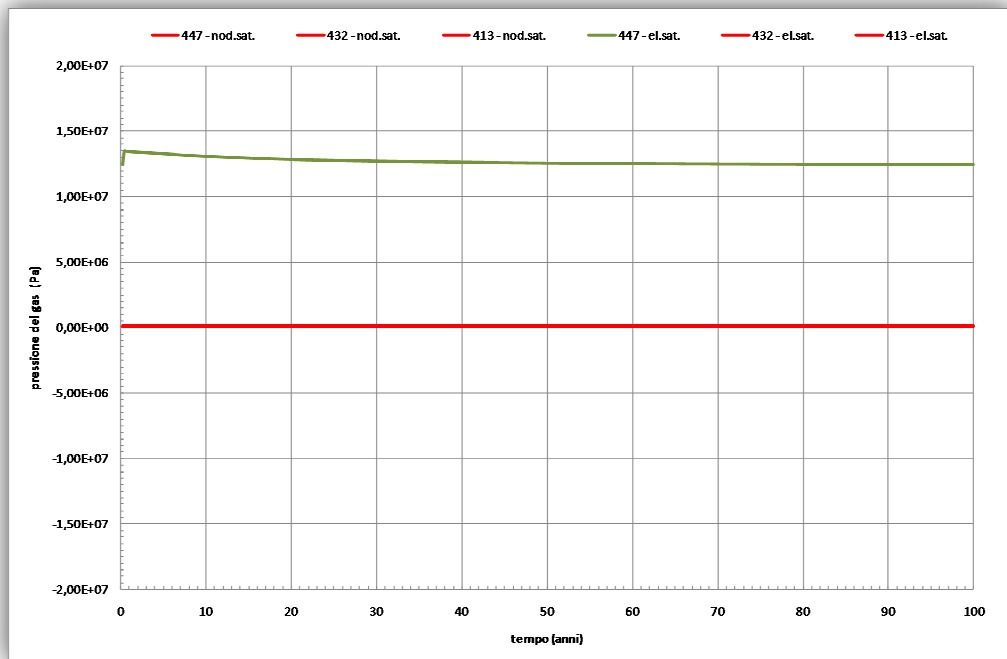


Figura 23. pressione del gas nei vari nodi fra serbatoio ed acquifero nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi)

Sostanzialmente, utilizzando lo switch che condiziona i nodi saturi, la pressione del gas si abbatte fra il nodo del serbatoio (464) ed il primo nodo saturo condizionato al valore della pressione atmosferica (447), creando una forte discontinuità della pressione dell'acqua.

Utilizzando lo switch che condiziona solo gli elementi finiti completamente saturi (nodi 432 - 413), si ha una diffusione del gas nel primo elemento dell'acquifero con decremento non lineare (nel nodo 447 la pressione del gas è comparabile con il valore utilizzato nel serbatoio).

Il comportamento della pressione capillare è sostanzialmente diverso fra i due switch, con un rapporto di 1 a 3.

La variazione della pressione dell'acqua fra i quattro nodi è visibile nel grafico seguente (Fig.24).

L'abbassamento del valore della saturazione massima per gli elementi di frontiera, nel caso in cui lo switch condizioni solo gli elementi completamente saturi, non si integra bene con il grafico del grado di saturazione del materiale (definizione di pressione di ingresso dell'aria, p_b). Il comportamento del nodo 447 nel caso dello *switch* che condiziona solo gli elementi completamente saturi è comparabile con un'esecuzione di Comes Geo in una simulazione in cui si considerano tutte le mesh come parzialmente sature, con un valore massimo inferiore all'unità.

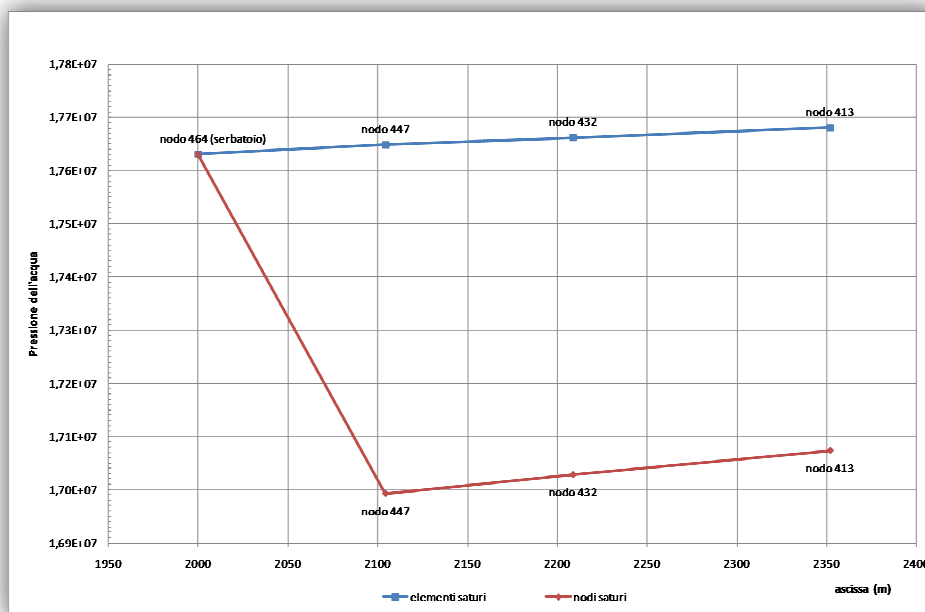


Figura 24. Pressione dell'acqua al variare dei nodi considerati, ad un tempo di 100 anni, in condizioni di equilibrio delle caratteristiche della simulazione

Anche a breve termine il comportamento appare differente fra lo switch che condiziona i nodi saturi e lo switch che condiziona solo gli elementi completamente saturi.

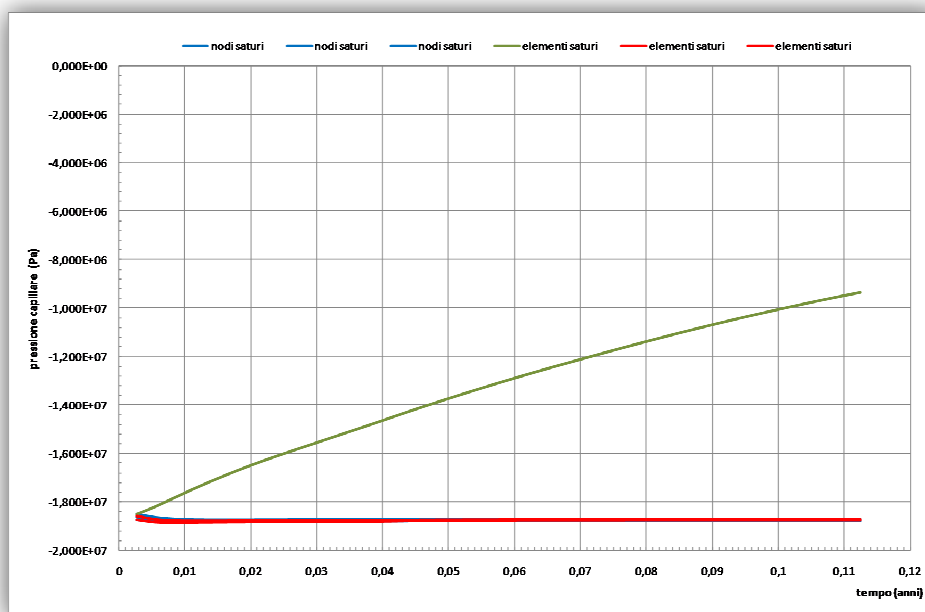


Figura 25. pressione capillare nei vari nodi fra serbatoio ed acquifero nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi) nel primo dei 100 anni di simulazione

Frontiera argilla – serbatoio

Nella frontiera fra il serbatoio e l’argilla il nodo 413 fa parte del serbatoio, per questo motivo preserva i valori di pressione capillare e di pressione del gas impostati nelle condizioni al contorno del *Run0*. Nel caso di condizionamento dei nodi saturi si ha la pressione atmosferica per i nodi dello strato d’argilla non condivisi con il serbatoio. L’abbattimento della pressione del gas avviene fra un nodo ed il successivo nel medesimo lato di un elemento di frontiera. Nel caso di condizionamento degli elementi completamente saturi si ha una compensazione graduale della pressione del gas nello strato d’argilla. Benchè vi sia un comportamento diverso per il nodo in mezzeria per le variabili di pressione del gas e capillarità, in questo caso la quantità di gas che entra nell’elemento finito di frontiera è molto più piccola di quanto visto con l’acquifero. La pressione del gas sviluppata nel nodo 490 risulta quasi di un ordine di grandezza inferiore rispetto alla pressione del gas presente nel serbatoio.

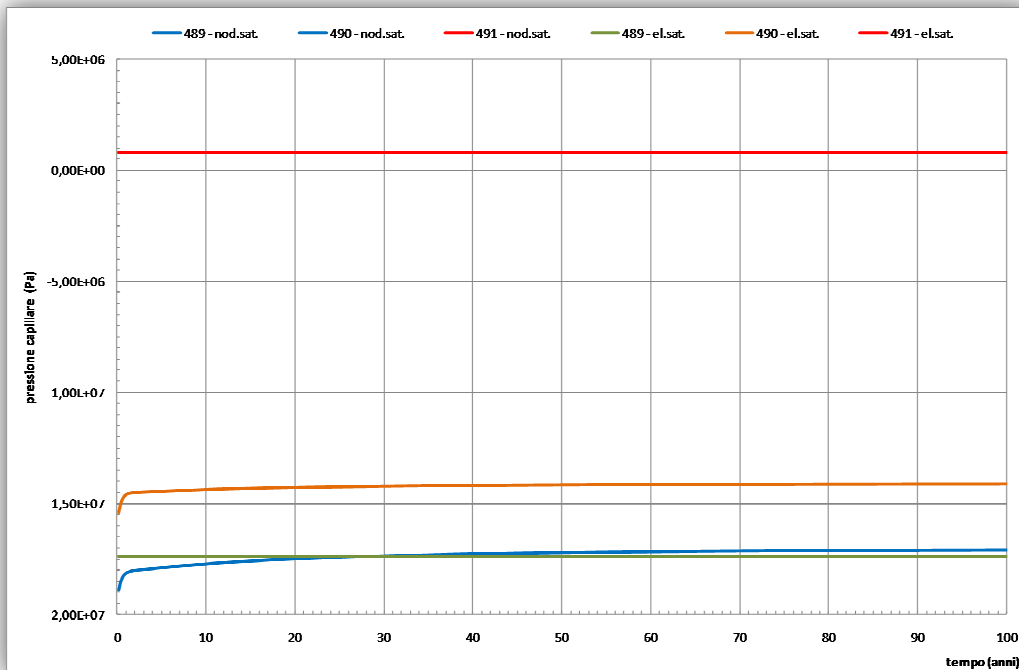


Figura 26.pressione capillare nei vari nodi fra serbatoio e strato d’argilla nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi)

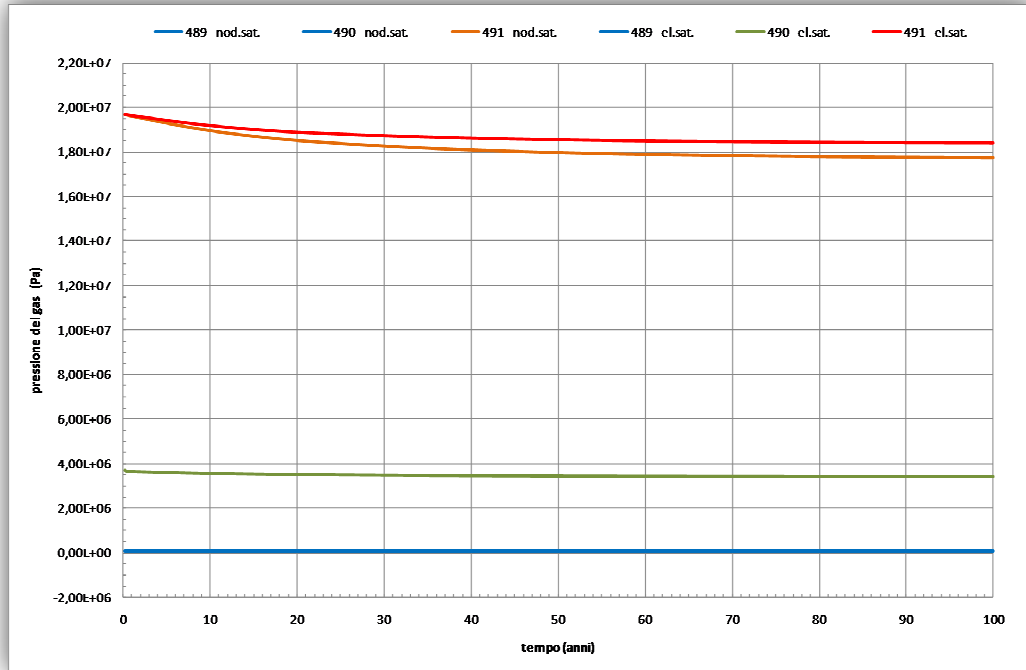


Figura 27. pressione del gas nei vari nodi fra serbatoio e strato d'argilla nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi)

La variazione della pressione dell'acqua fra i tre nodi è visibile nel grafico seguente (Fig.28) L'abbassamento del valore della saturazione massima per gli elementi di frontiera, nel caso in cui lo switch condizioni solo gli elementi completamente saturi, non si integra bene con il grafico del grado di saturazione del materiale (definizione di pressione di ingresso dell'aria, p_b). Il comportamento del nodo 490 nel caso dello switch che condiziona solo gli elementi completamente saturi è comparabile con un'esecuzione di Comes Geo in una simulazione in cui si considerano tutte le mesh come parzialmente sature, con un valore massimo inferiore all'unità.

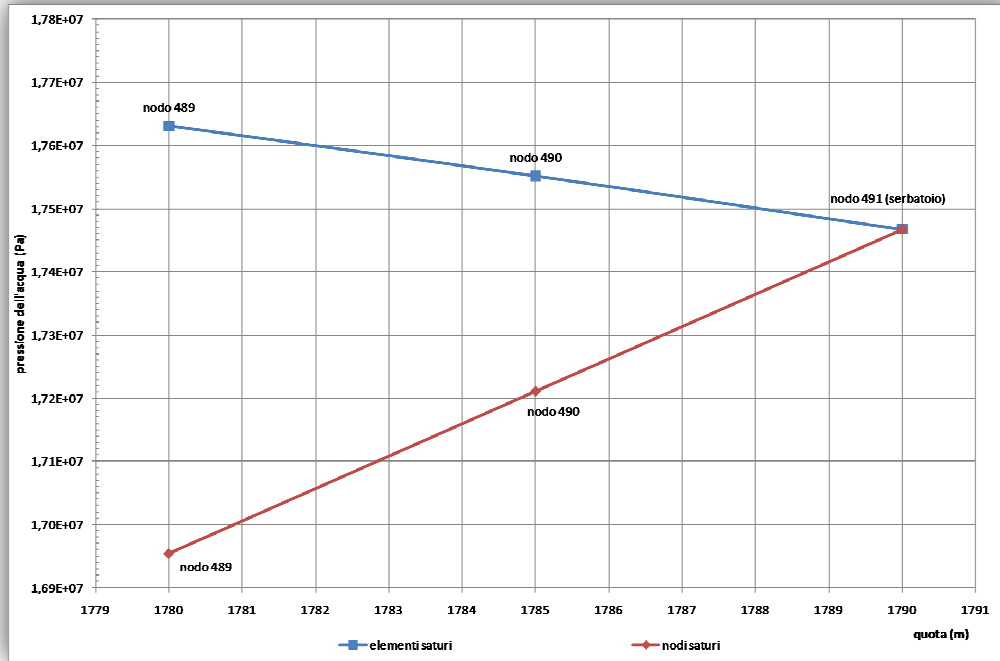


Figura 28. Pressione dell'acqua al variare dei nodi considerati, ad un tempo di 100 anni, in condizioni di equilibrio delle caratteristiche della simulazione

La discontinuità vista nell'acquifero con lo switch per il condizionamento dei soli nodi saturi, non appare in questo caso.

A seguire si riportano le quote piezometriche dei nodi nei casi visti.

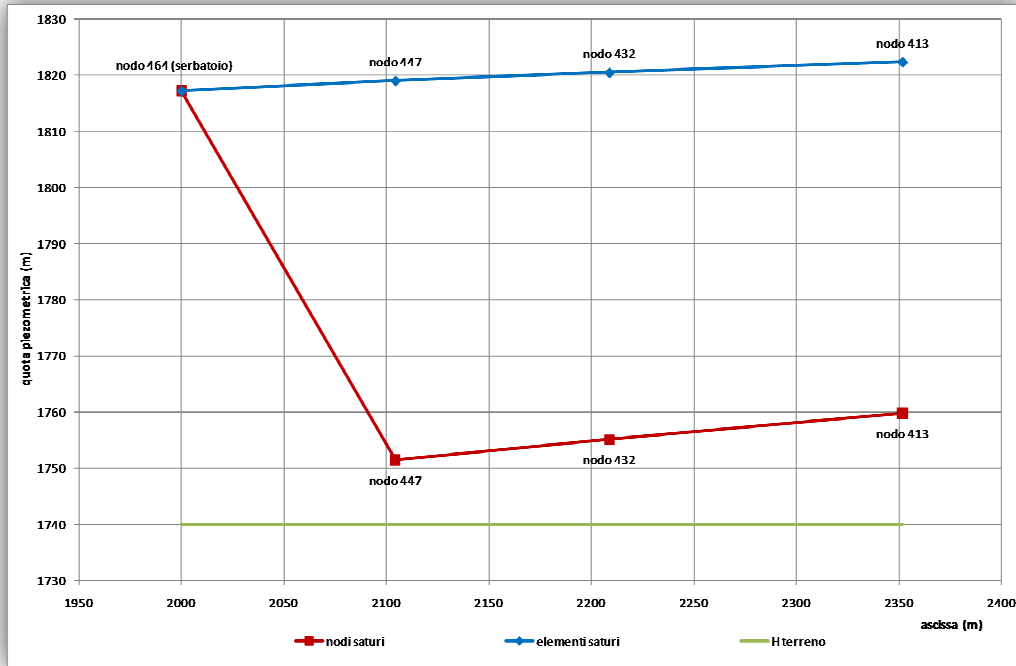


Figura 29. Quota piezometrica dei nodi fra serbatoio profondo ed acquifero ad un tempo di 100 anni, in condizioni di equilibrio delle caratteristiche della simulazione

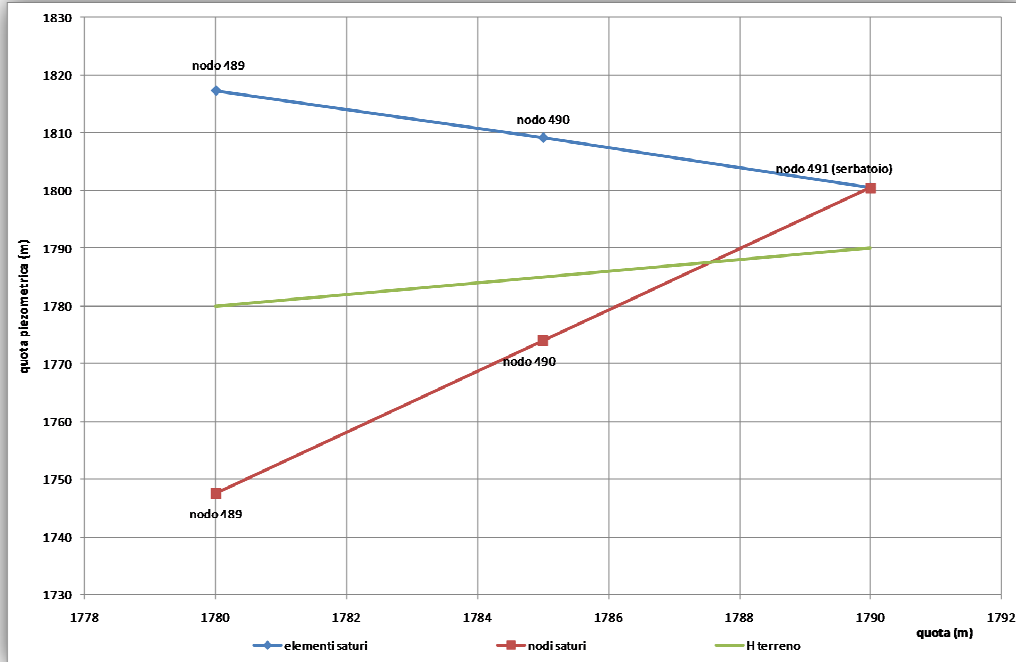


Figura 30. Quota piezometrica dei nodi fra serbatoio profondo e strato d'argilla ad un tempo di 100 anni, in condizioni di equilibrio delle caratteristiche della simulazione

Il comportamento dei due switch fra le due frontiere risulta differente. Lo switch per elementi completamente saturi comporta in entrambi i casi una parziale diffusione del gas con una variazione graduale delle caratteristiche del bilancio delle pressioni ($p_c = p_g - p_w$). I medesimi algoritmi di switch mostrano un comportamento differente a seconda che vi sia una separazione fra materiali con proprietà idriche simili o diverse. Al variare della frontiera (serbatoio-argilla, serbatoio-acquifero) la graduale variazione delle pressioni dell'acqua assume diversi andamenti legati alle caratteristiche del materiale dell'elemento finito. Lo switch che condiziona i nodi saturi sembra particolarmente adatto per condizionare la frontiera fra elementi parzialmente saturi e gli elementi impermeabili, dato che vi sarebbe comunque una ridotta capacità di diffusione del gas. Ciò preserva il bilancio di pressione capillare e pressione idrostatica fino a ridosso del sottodominio parzialmente saturo e permette di definire una sovrappressione dell'acqua dal serbatoio verso lo strato d'argilla. Lo switch che condiziona solo gli elementi completamente saturi, sembra particolarmente adatto per condizionare la frontiera di domini con variazioni graduali delle caratteristiche idrostatiche del sistema, senza discontinuità di sorta. L'argomento potrebbe avere bisogno di studi e test più approfonditi con casi specifici noti.

Consolidazione con elasticità lineare e modello ACMEG-TS

La medesima verifica è stata fatta anche per il caso di consolidazione di una colonnina di terreno in condizioni termo-idro-meccaniche con un materiale utilizzato per isolare le scorie radioattive (*boom-clay*), ampiamente trattato nel capitolo 6. Per riferimenti sul pre-processamento (geometria, parametri e costanti, condizioni al contorno) si può guardare il capitolo 6, paragrafo 6.3 (*validazione elasto-plastica con ACMEG-TS e Boom-clay*). Nella simulazione della colonnina di terreno in condizioni drenate e cicli termici, le differenze fra lo *switch* che condiziona gli elementi completamente saturi e lo *switch* che condiziona i nodi saturi si riducono, fino a far apparire del tutto simili le soluzioni in un nodo. I nodi presi in considerazione sono: 399, 396, 387, 363, 339, 319.

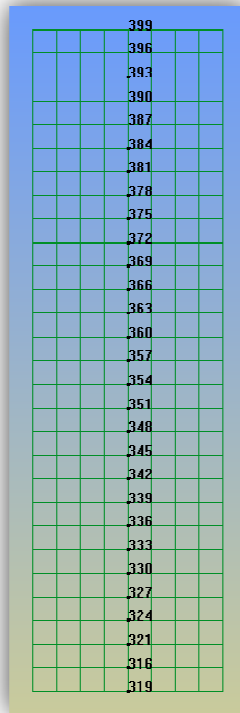


Figura 31. Disposizione dei nodi nella mesh della colonnina di terreno per il caso di consolidazione termo-idro-meccanica

Post-processamento

Sia nella fase di consolidazione ($q = 10 \text{ KPa}$) e drenaggio ($s = 5 \text{ MPa}$) che nella successiva fase di riscaldamento ($T = 65 \text{ }^\circ\text{C}$) si ha la congruenza delle pressioni capillari e delle pressioni del gas.

Fase isoterma di consolidazione e drenaggio

Le curve di saturazione dei vari nodi, benché di comportamento simile raggiungono gradi di saturazione differente nel medesimo tempo, poiché con la quota nella colonnina di terreno, subiscono percentuali diverse di consolidazione (lo scopo di questa discussione non è distinguere dei diversi gradi di saturazione fra i diversi nodi in condizioni di consolidazione della colonnina di terreno).

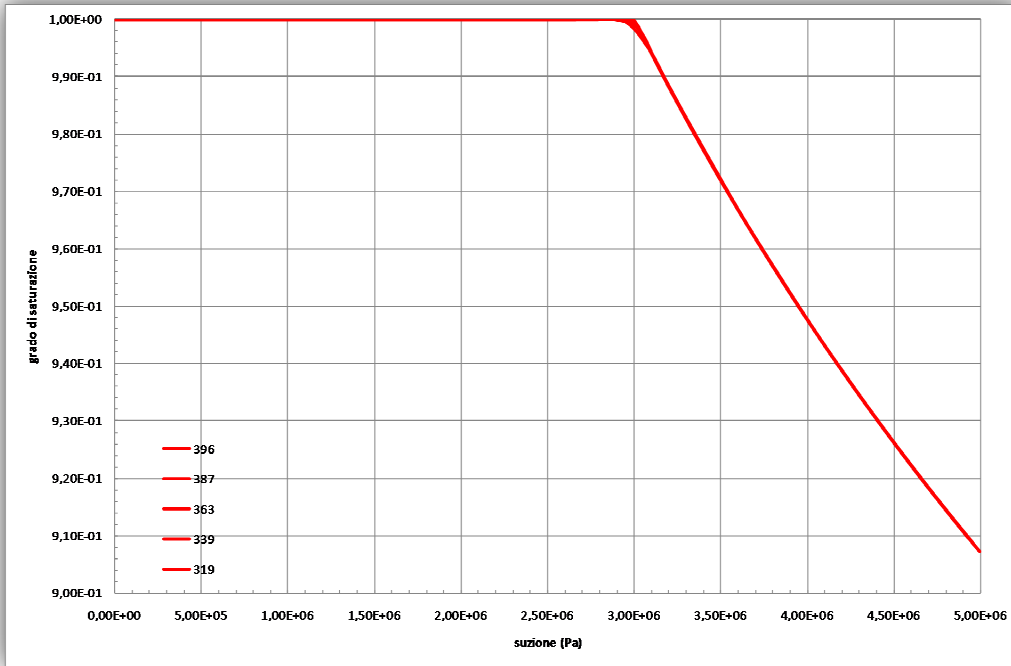


Figura 32. Curve di saturazione sovrapposte, di diverso grado a parità di tempo in funzione della posizione del nodo nel provino nel caso di condizionamento dei soli nodi saturi

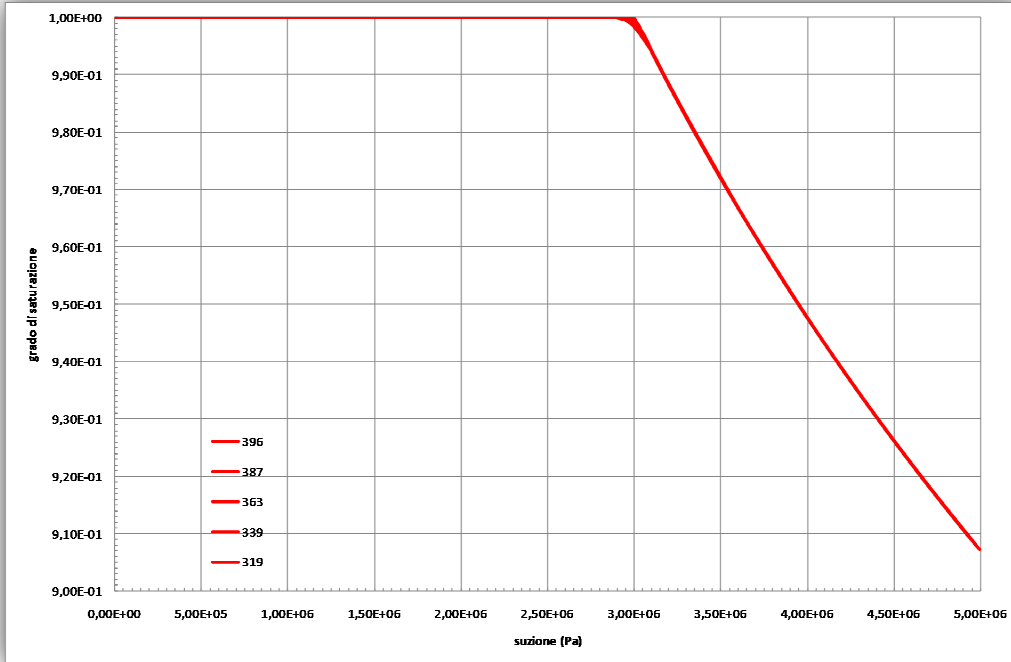


Figura 33. Curve di saturazione sovrapposte, di diverso grado a parità di tempo in funzione della posizione del nodo nel provino nel caso di condizionamento dei soli elementi completamente saturi

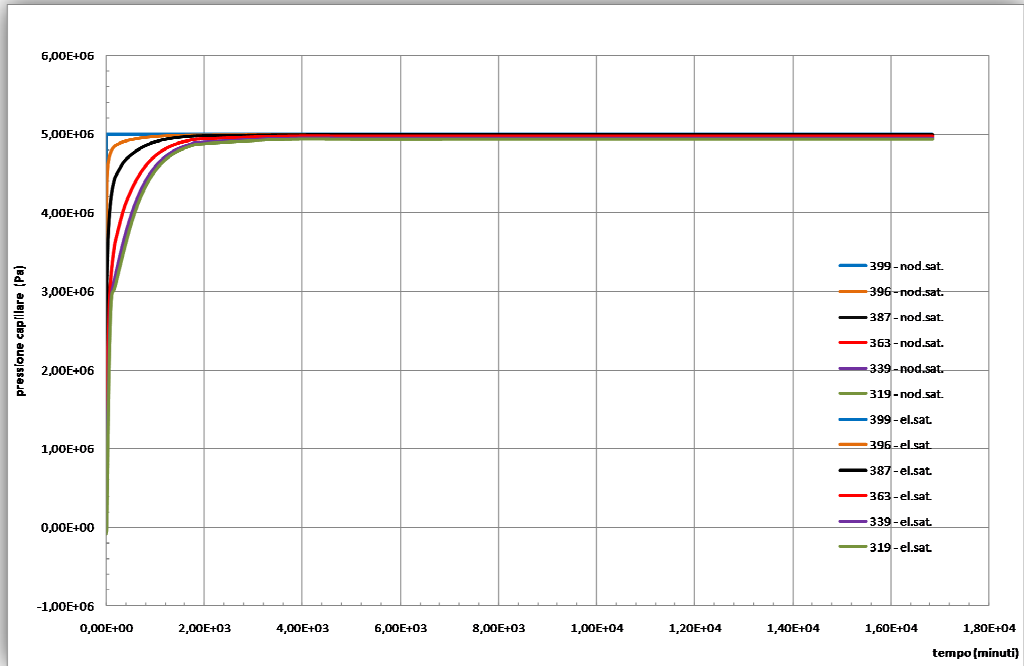


Figura 34. Pressione capillare nei vari nodi della colonnina nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi)

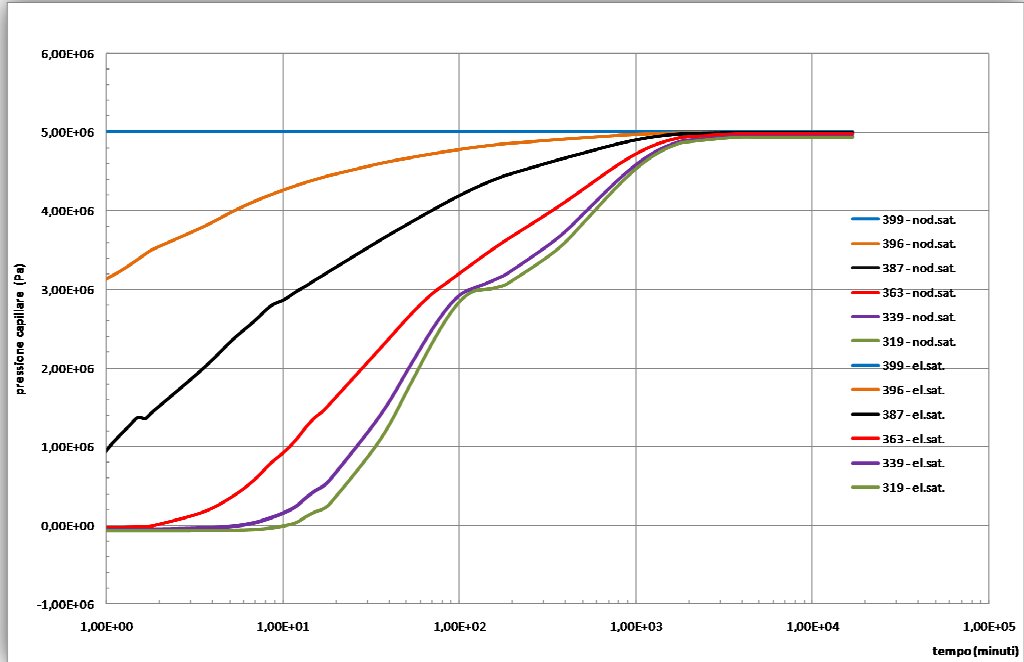


Figura 35. Pressione capillare in scala logaritmica del tempo nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi)

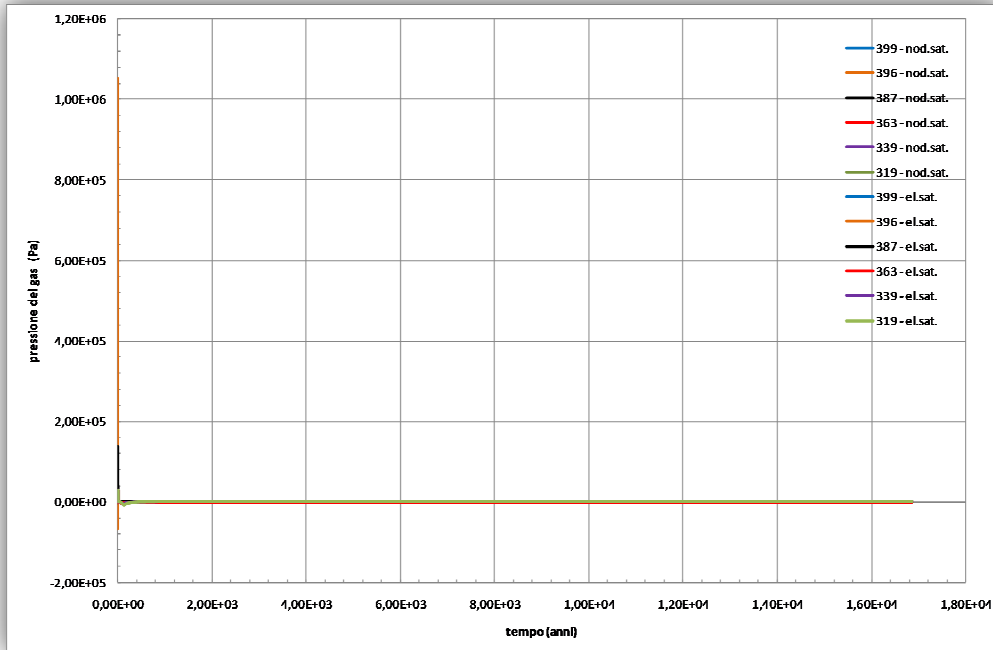


Figura 36. Pressione del gas nei vari nodi della colonnina nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi); la pressione massima raggiunta è di 50 Pa nel nodo 319

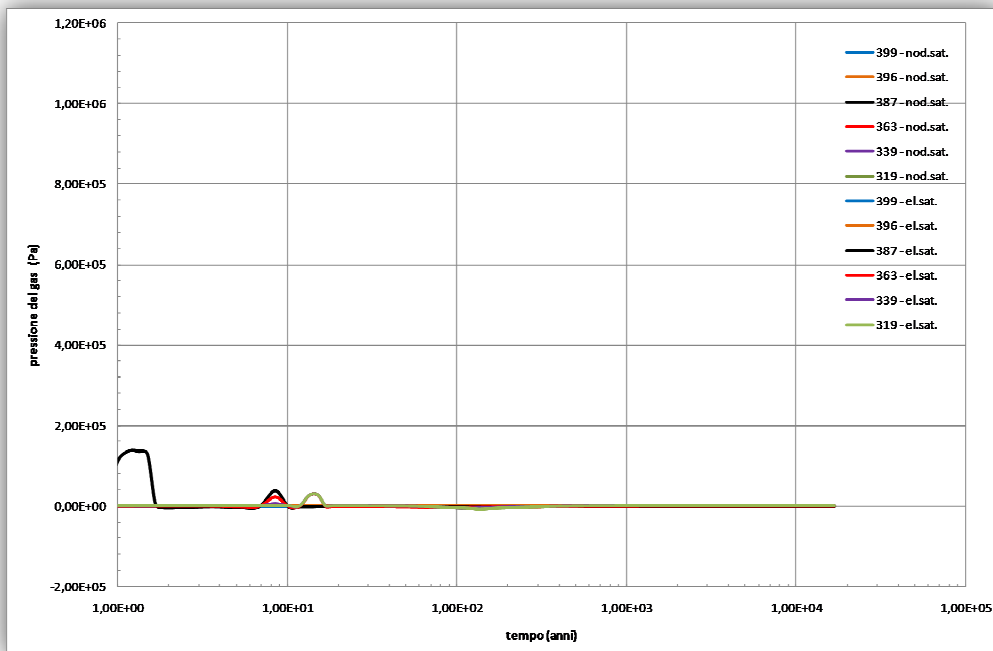


Figura 37. Pressione del gas, particolare del grafico precedente in cui risaltano alcuni casi di instabilità locale della simulazione per i primi passi temporali (l'instabilità si verifica con entrambi gli algoritmi di switch)

Il grafico delle pressioni del gas mostra delle instabilità per i primi passi temporali. Tali instabilità si verificano solo in alcuni nodi e indifferentemente per l’algoritmo di switch adottato.

La pressione dell’acqua mostra una distribuzione lineare con la quota dato che è funzione dei carichi applicati in sommità e dell’andamento idrostatico legato alla quota del vertice della colonnina di terreno.

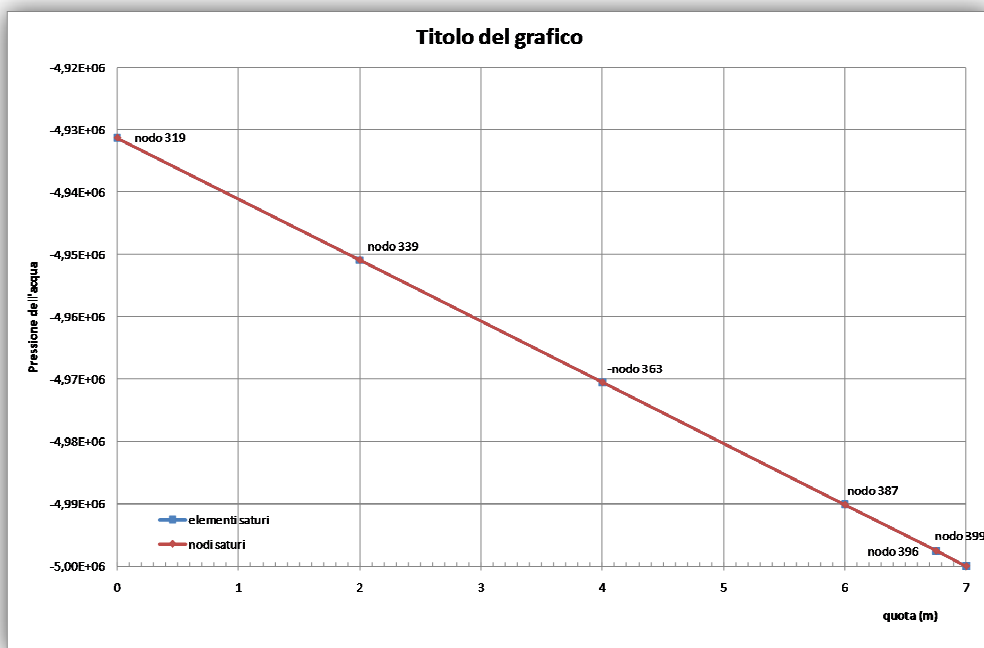


Figura 38. Pressione dell’acqua nei vari nodi della colonnina nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi)

Fase riscaldamento

Le curve di saturazione dei vari nodi, benché di comportamento simile raggiungono gradi di saturazione differenti nel medesimo tempo, poiché con la quota subiscono differenti percentuali di consolidazione dovuta alle condizioni al contorno applicate (lo scopo di questa discussione non è distinguere fra i diversi comportamenti di consolidazione, per cui vengono rappresentate tutte con il medesimo colore).

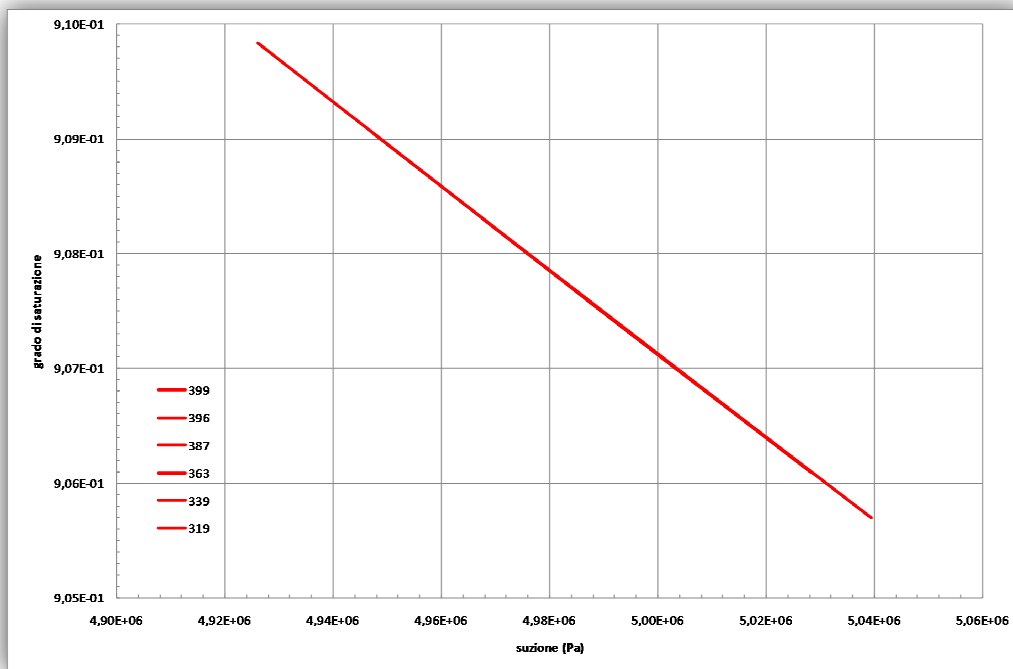


Figura 39. Curve di saturazione sovrapposte, di diverso grado a parità di tempo in funzione della posizione del nodo nel provino nel caso di condizionamento dei soli nodi saturi

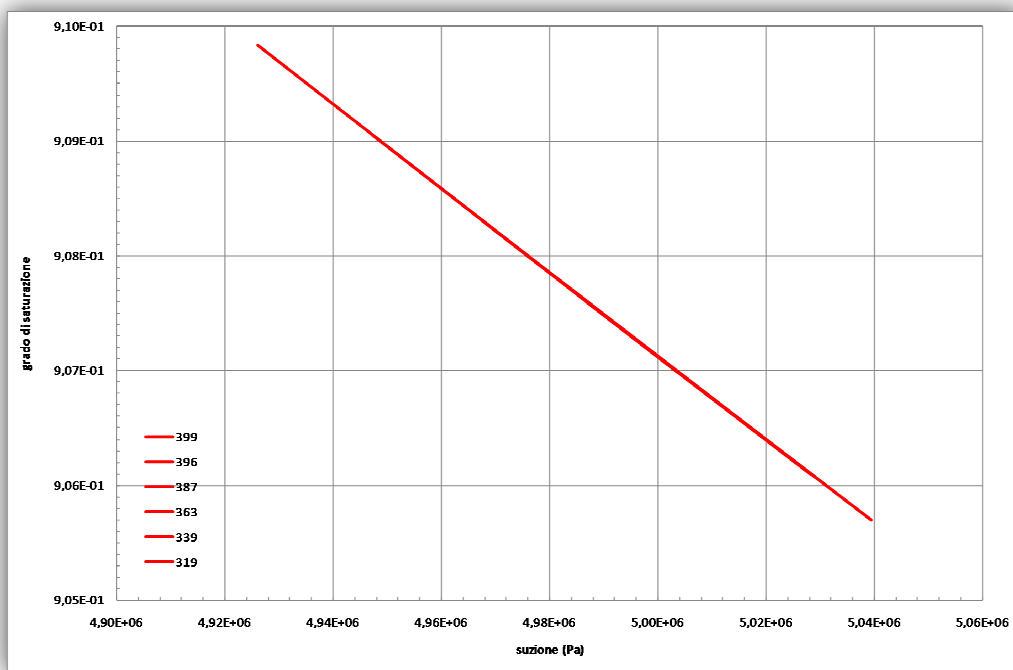


Figura 40. Curve di saturazione sovrapposte, di diverso grado a parità di tempo in funzione della posizione del nodo nel provino nel caso di condizionamento degli elementi completamente saturi

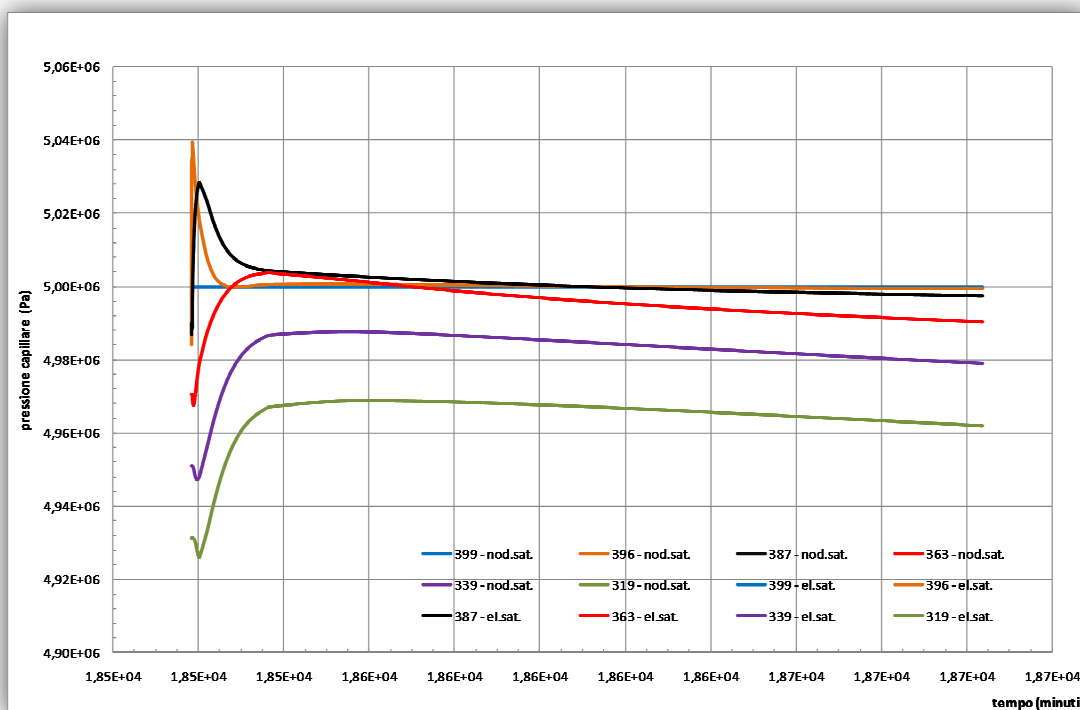


Figura 41. Pressione capillare nei vari nodi della colonnina nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi)

A seguire vengono rappresentati i grafici della pressione del gas e della pressione capillare per i vari nodi nei due casi di algoritmo di switch (el.sat. – condizionamento degli elementi completamente saturi; nod.sat. – condizionamento dei nodi saturi). Anche in questo caso, poiché non si rilevano differenze si adotta il medesimo colore per i nodi con curve sovrapposte.

In questo caso la pressione dell'acqua mostra una distribuzione non lineare con la quota dato che pressione capillare ed il grado di saturazione sono condizionate anche dalla variazione di temperatura.

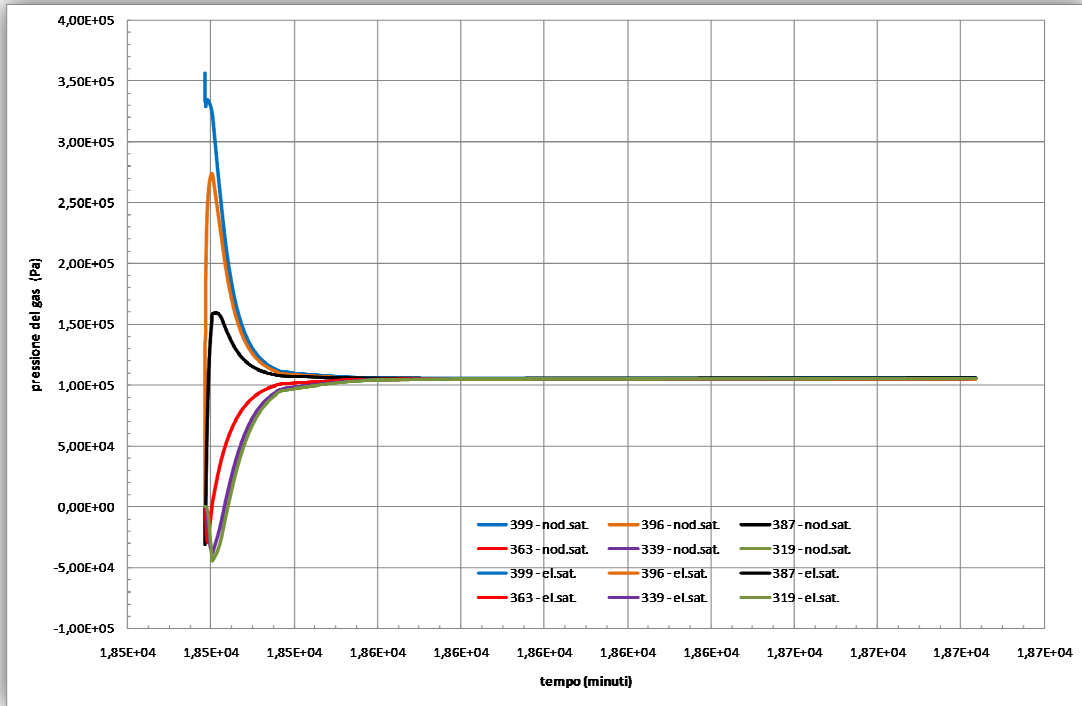


Figura 42. Pressione del gas nei vari nodi della colonnina nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi)

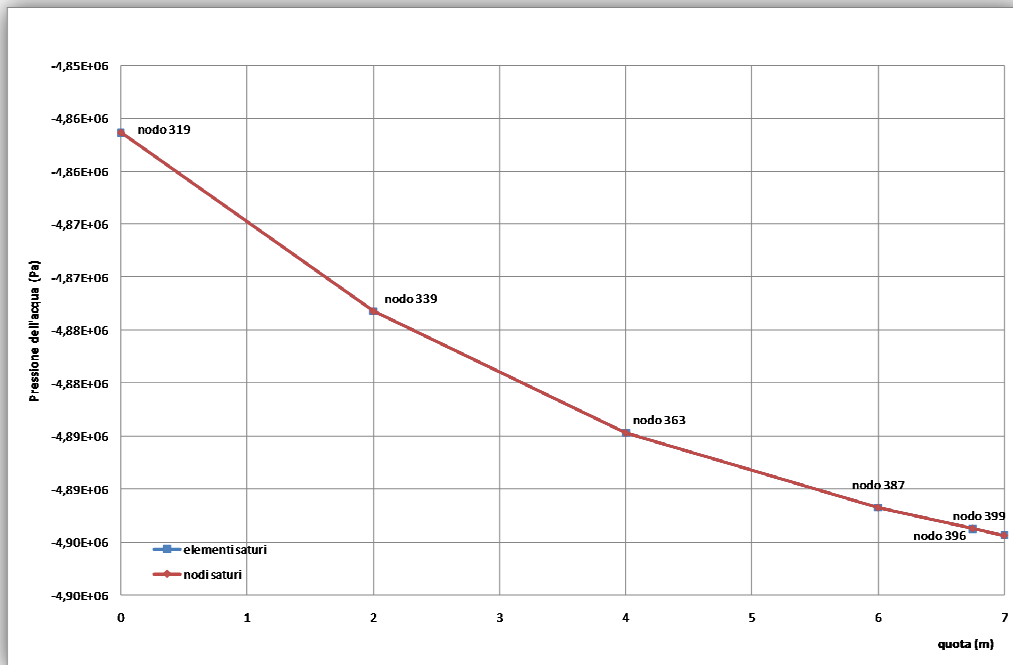


Figura 43. Pressione dell'acqua nei vari nodi della colonnina nei due casi di switch (nodi saturi – elementi completamente saturi)

3.6 TEORIA DELLA CONSOLIDAZIONE MONODIMENSIONALE DI TERZAGHI

In questa sezione viene studiato un caso di consolidazione monodimensionale attraverso la formulazione di Terzaghi con lo scopo di validare i risultati ottenuti tramite il codice di implementazione.

Visto che il terreno è un mezzo poroso multifase costituito da fase solide, liquide e gassose, il suo volume è dato da:

$$V_t = V_s + V_w + V_g \quad [3.19]$$

Come già accennato, nel caso in cui i pori siano occupati da entrambi le fasi il terreno viene definito parzialmente saturo; se sono riempiti solo dalla fase liquida esso è detto terreno saturo ed il suo grado di saturazione, S_w , è pari ad 1.

$$S_w = 100 \frac{V_w}{V_v} \quad [3.20]$$

In questo caso il sistema è bifase ed il suo volume è dato da:

$$V_t = V_s + V_w \quad [3.21]$$

Per lo studio di questo sistema si adottano le ipotesi di incomprimibilità delle particelle solide e dell'acqua nei pori, pertanto ad una variazione di volume del terreno si ha una variazione di volume dell'acqua presente in esso.

Sottoponendo un terreno saturo ad un carico σ , si instaurano per equilibrio la tensione efficace, σ_{eff} , che è quella assorbita dallo scheletro solido, e la tensione interstiziale, u , che è quella assorbita dall'acqua.

$$\sigma = u + \sigma_{eff} \quad [3.22]$$

La consolidazione di un terreno è un processo che si verifica in seguito all'applicazione di un carico su esso: inizialmente tutto lo sforzo lo assorbe interamente l'acqua, creando un

flusso di allontanamento di essa dal terreno, a cui segue una diminuzione del volume di quest'ultimo in seguito al riassetamento dei grani con ripartizione degli sforzi.

Tutti i materiali sono soggetti a consolidazione nel tempo, ciò che determina la durata di tale processo è la permeabilità del materiale, K ; più un terreno è permeabile e prima si consolida.

Dopo questa premessa, viene ora sviluppata la teoria della consolidazione monodimensionale di Terzaghi che ha lo scopo di prevedere il decorso del tempo del cedimento e della sovrappressione interstiziale. Tale formulazione matematica costituisce la base per poter interpretare le prove edometriche e per analizzare approssimativamente l'andamento dei cedimenti nel tempo. Lo studio qui condotto si limita allo sviluppo temporale della sovrappressione interstiziale.

La teoria assume le seguenti ipotesi:

- Le deformazioni ed il flusso dell'acqua avvengono in un'unica direzione, z ;
- Il terreno è omogeneo e completamente saturo, $s = 1$;
- La legge $[\sigma - \varepsilon]$ è di tipo lineare;
- Per l'incompressibilità dell'acqua nei pori e dei grani solidi, l'equazione di continuità dei fluidi è uguale a zero;
- Piccole deformazioni e indipendenti dal tempo, che verificandosi subito non innescano un comportamento viscoso del terreno;
- Vale la legge di Darcy che descrive il moto di filtrazione di un fluido in un mezzo poroso;
- La permeabilità K è costante;
- Non ci sono compressioni secondarie.

Per le ipotesi appena esposte, l'equazione di continuità dei fluidi è:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} = 0 \quad [3.23]$$

Sostituendo in essa la portata, Q , tramite la legge di Darcy che è:

$$Q = v \cdot i = K \cdot i \cdot i = K \left(\frac{\Delta h}{L} \right)^2 \quad [3.24]$$

dove la velocità, v , del fluido è esprimibile anche attraverso il gradiente idraulico, i , e la permeabilità, K , l'equazione di continuità diventa:

$$K \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dx dy dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e}{1+e} dx dy dz \right)$$

[3.25]

L'indice dei vuoti e , è dato dal rapporto tra il volume dei vuoti, V_v , e il volume del solido, V_s , mentre h è il carico idraulico,

$$h = h_p + (u_p + u_e) \frac{1}{\gamma_w}$$

[3.26]

h_p = carico di posizione

u_p = pressione neutrale in regime stazionario

u_e = sovrappressione neutrale

Andando a derivare due volte il carico idraulico si elidono h_p e u_p , per cui dell'eq. di continuità rimane

$$\frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{K}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2}$$

[3.27]

Poichè il coefficiente di compressibilità volumetrica m_v vale

$$m_v = -\frac{a_v}{1+e_0} = -\frac{1}{1+e_0} \frac{\Delta e}{\Delta \sigma} = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta \sigma} \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{E_{ed}}$$

[3.28]

(con a_v , coefficiente di compressibilità, costante) esso viene inserito nell'equazione ottenendo:

$$\frac{K}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} = -m_v \frac{\partial \sigma}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial t} = -m_v \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

[3.29]

Assumendo che durante il processo di consolidazione la tensione totale verticale sia costante $\sigma = \sigma' + u$ costante $\Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow u = u_p + u_e$ ed essendo $u_p = \text{cost} \Rightarrow$

$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial u_e}{\partial t}$, sostituendo nell'eq. si ottiene

$$\frac{K}{m_v \gamma_w} \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} = \frac{\partial u_e}{\partial t}$$

[3.30]

Viene chiamato $c_v = \frac{K}{m_v \gamma_w}$ coefficiente di consolidazione primaria, l'Eq. risultante è

$$c_v \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} = \frac{\partial u_e}{\partial t}$$

[3.31]

L'Eq. governa un fenomeno di filtrazione in regime transitorio quindi la sua soluzione dipende da:

- distribuzione iniziale (all'istante di applicazione del carico u_0) della sovrappressione interstiziale, detta isocrona iniziale;
- condizioni di drenaggio al contorno.

Per esplicitare l'Eq. di Terzaghi viene sviluppato il caso più semplice caratterizzato dalla possibilità di drenaggio sia dalla base che dalla superficie dello strato di terreno soggetto a consolidazione, e da un'isocrona iniziale costante con la profondità, che sono pure le condizioni di una prova edometrica tipica (Fig.44)

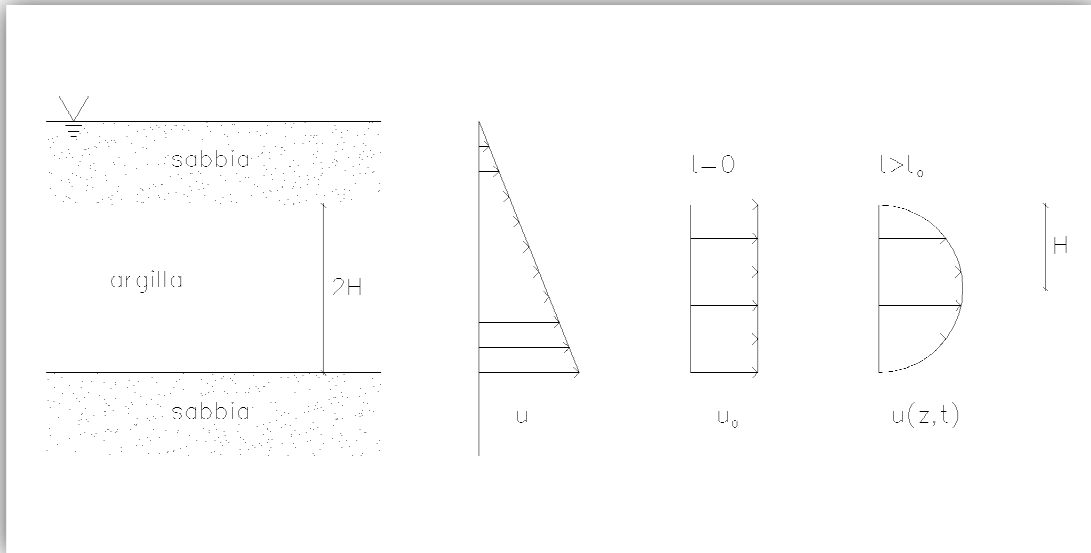


Figura 44. Rappresentazione di un tratto di terreno con relativi grafici delle pressioni

u_0 = isocrona iniziale costante con la profondità

$u(z,t) = u_e$ = sovrappressione interstiziale

t_0 = istante di applicazione del carico

H = altezza di drenaggio, minimo percorso di drenaggio compiuto dalla particella più lontana

Ponendo le due variabili adimensionalizzate:

Z = quota adimensionale

$$Z = \frac{z}{H}$$

[3.32]

T_v = fattore tempo adimensionale (T_v è tabulato da Terzaghi)

$$T_v = \frac{c_v t}{H^2} \quad [3.33]$$

esse vengono sostituite nell'eq [3.31] e si ottiene

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial Z^2} = \frac{\partial u_e}{\partial T_v} \quad [3.34]$$

Tramite Taylor si estrapola la sovrappressione interstiziale:

$$u_e = u(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2u_0}{M} \sin(MZ) e^{-M^2 T_v} \quad [3.35]$$

$$M = \frac{\pi}{2}(2m + 1) \quad m = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Quando $u_e = 0$ allora la consolidazione è finita ed il grado di consolidazione, U_z , è uguale ad 1

$$U_z = \frac{u_0 - u(z, t)}{u_0} \quad [3.36]$$

Si nota che subito dopo l'applicazione del carico, considerato l'elevato gradiente idraulico che si ha in corrispondenza delle superfici di drenaggio, la $u(z, t)$ si porta rapidamente a zero all'estremità, mentre in mezzeria ci vuole molto più tempo perché ciò si verifichi visto che lì $i = 0$, è come se la mezzeria fosse uno strato impermeabile (Fig.45).

Se il drenaggio è possibile solo dalla superficie allora l'altezza totale da considerare dello strato di terreno coincide con l'altezza di drenaggio H e non con $2H$ e vale quanto appena detto per il comportamento della sovrappressione interstiziale.

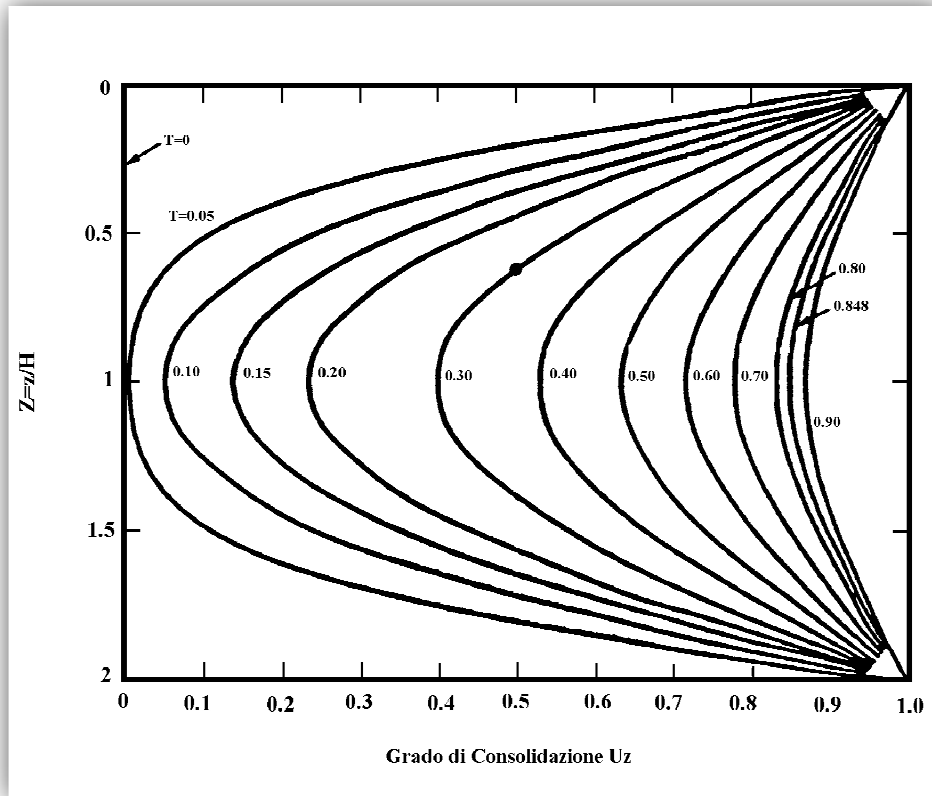


Figura 45. Consolidazione in funzione del fattore tempo e della profondità

3.6.1 Esempio di consolidazione. Parallelismo Comes-Geo/Terzaghi

Il tratto di terreno saturo ed a comportamento lineare che qui viene studiato è una colonna alta 10 m e larga 1 m; ad essa viene applicato un carico uniformemente distribuito e costante di 10000 Pa.(Fig.46)

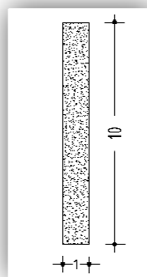


Figura 46. Dimensioni del provino

Comes-Geo

Per l'applicazione al codice, la colonna è stata discretizzata nello spazio con 10 elementi isoparametrici ad 8 nodi di dimensione $1\text{ m} \times 1\text{ m}$, con 3 punti di integrazione di Gauss per lato (Fig.47).

L'analisi viene suddivisa in due fasi, Run0 e Run1.

Run0: Serve per ottenere le condizioni iniziali del materiale saturo vincolando la pressione gassosa e capillare solamente in sommità, ottenendo così la corretta distribuzione di pressioni (capillare e idrostatica) lungo l'altezza della colonna. Il peso proprio agisce istantaneamente causando un aumento della pressione idrostatica, che in condizioni di equilibrio risulta invece pari a: $p_{idr} = g \cdot \gamma \cdot h = 9.81 \cdot 1000 \cdot 10 = 98100\text{ Pa}$.

Si instaura un moto di filtrazione dell'acqua dal basso verso l'alto in modo da annullare lo squilibrio. Il tempo necessario al raggiungimento delle condizioni di equilibrio è fortemente legato alla permeabilità del materiale.

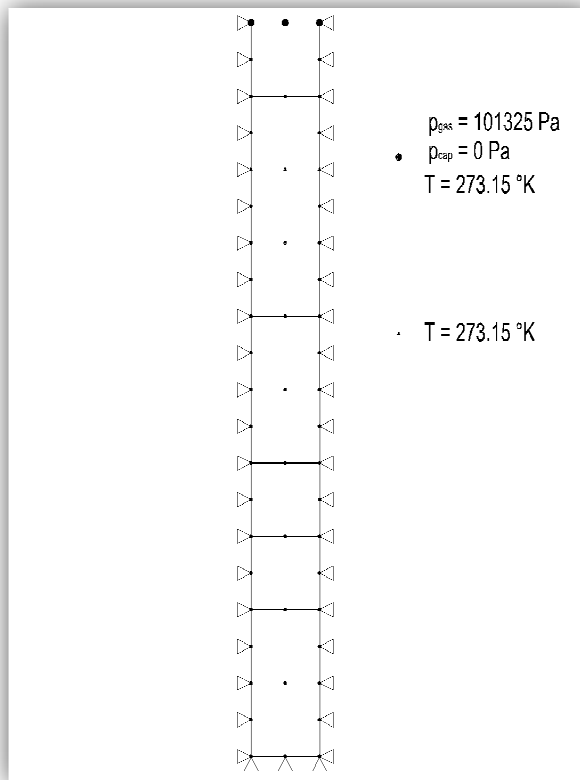


Figura 47. Discretizzazione spaziale e condizioni al contorno pre-carico del provino

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

- La pressione del gas, p_{am} , impostata è quella atmosferica nei nodi di sommità;
- La pressione capillare, $p_{cap} = 0 Pa$ nei nodi di sommità;
- Il provino è isoterma, $T_k = 273.15 K$ in tutti i nodi;
- Sono fissati tutti gli spostamenti orizzontali per tutti i nodi laterali del provino, $u_x = 0$;
- Sono fissati tutti gli spostamenti verticali per tutti i nodi inferiori del provino, $u_y = 0$.

Il materiale adottato è un terreno Liakopoulos, dal nome del suo studioso. E' una sabbia sita a Del Monte; nella Tab.1 vengono riportate le relative caratteristiche fisiche e meccaniche.

Variabile	Descrizione	Valore
PORO	Porosità	$n = 0.2975$
CKKO	Permeabilità intrinseca	$K_0 = 4.5 \cdot 10^{-13} m^2$
RHOS	Densità dello scheletro solido	$\rho_0 = 2000 Kg/m^3$
TORT	Fattore di tortuosità	$\tau = 1$
TKS	Conduttività termica del solido	$\lambda_{eff} = 1.442 W/mK$
TKSM	Conduttività di calore della matrice solida	$\lambda_{eff,s} = 2.5 W/mK$
CPS	Calore specifico del solido	$C_p = 810.0 J/KgK$
SSIR	Punto di saturazione irriducibile	$S_{ir} = 0.20$
SSCR	Punto di saturazione critica	$S_{cr} = 0.909$
EMOD	Modulo di Young	$p_b = 1.3 \cdot 10^6 Pa$
VCOEFF	Coefficiente di Poisson	$E = 731.48 \cdot 10^6 Pa$
BETAS	Coefficiente cubico di espansione termica	$\nu = 0.4$
ALFA	Costante di Biot	$\beta_s = 0.9 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K}$

Tabella 1. Parametri materiali

Affinchè il processo si sviluppi viene applicato un tempo di $2.5 \cdot 10^4$ s per passo, per un totale di 21 passi. In tal modo è possibile controllare l'evoluzione della pressione capillare fino al raggiungimento noto di quest'ultima. Vista la linearità del problema, può essere contemplato anche un unico passo, pari al tempo totale di $52.5 \cdot 10^4$ s, che raggiunge direttamente la condizione di equilibrio.

Il tempo di $52.5 \cdot 10^4$ s è stato ricavato in seguito alla reiterazione dell'analisi utilizzando diversi ordini di grandezza del suddetto.

Come previsto, dopo $52.5 \cdot 10^4$ s la pressione capillare nel provino coincide col valore della pressione idrostatica di una colonna d'acqua di 10 m d'altezza.

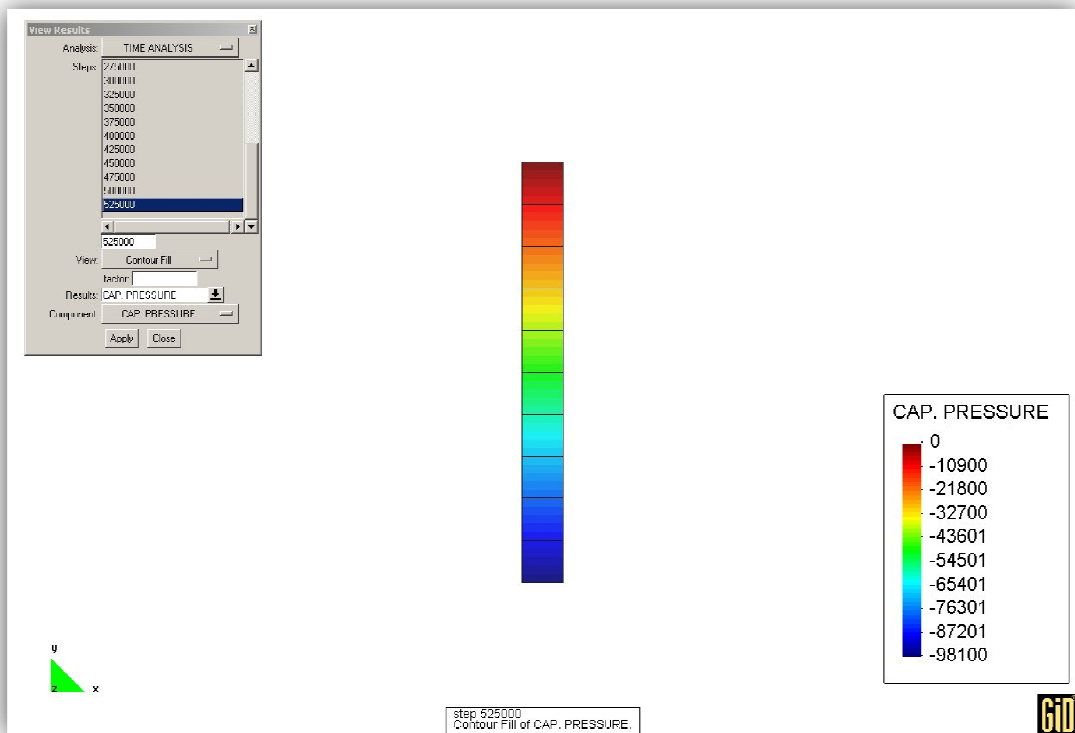


Figura 48. Pressione capillare (P_{cap} [Pa]) a $t = 52.5E+04$ s

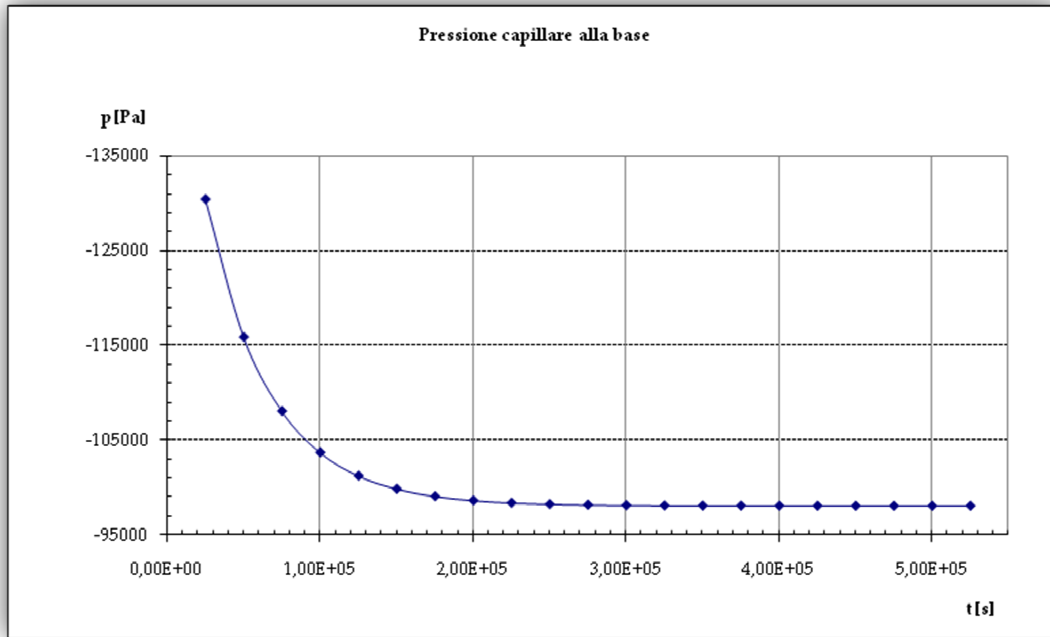


Figura 49 Andamento nel tempo della pressione capillare alla base del provino

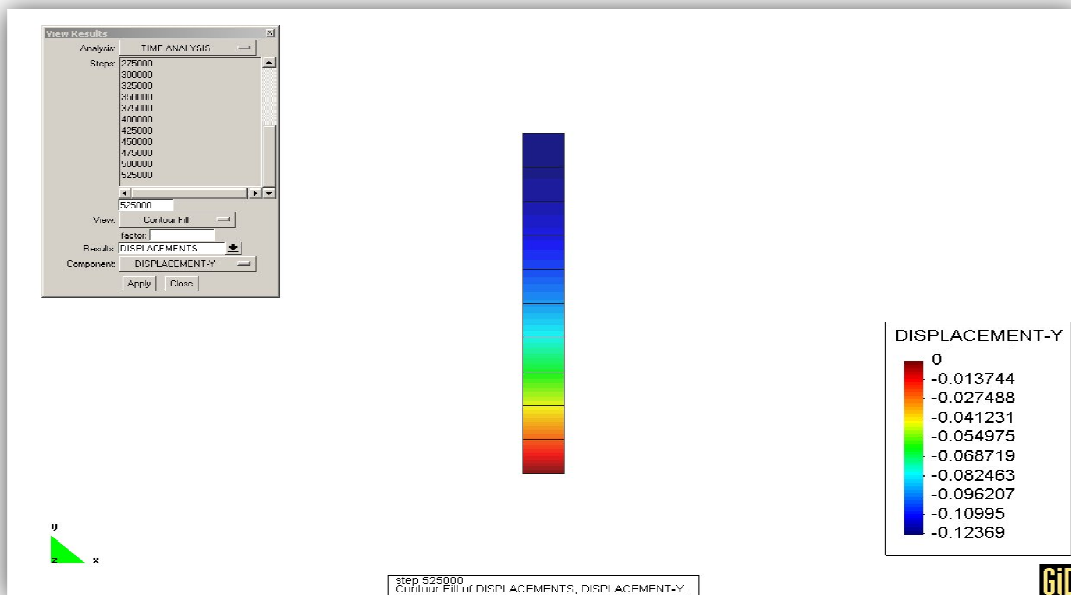


Figura 50 Deformazione lungo y sotto il peso proprio

Run1: nella seconda fase si inizia a caricare la colonnina con un carico distribuito in sommità; quindi si valuta il tempo necessario al ripristino dello stato idrostatico iniziale (di pressione capillare), e i conseguenti cedimenti.

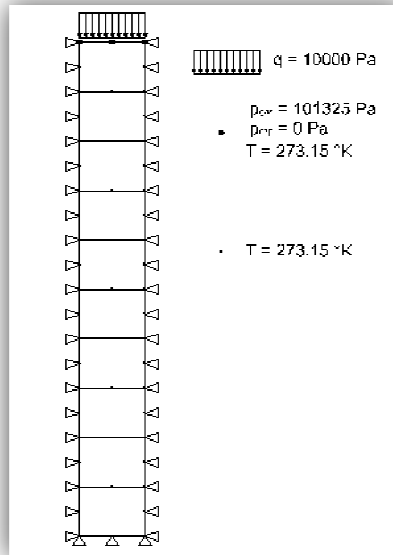


Figura 51 Discretizzazione spaziale e condizioni al contorno post-carico del provino

Viene eseguita una prima analisi con passo temporale piccolo, composta a sua volta da due passi temporali diversi. Questo risalta come la pressione capillare passi quasi istantaneamente dal valore di equilibrio del Run0 ad un valore più alto.

	Passo temporale [s]	n° passi	Intervallo
1° Run	5.0E-3	20	5.0E-3 – 1.0E-1
2° Run	5.0E-2	20	5.0E-2 – 1.0E+0

Una seconda analisi viene condotta con passo temporale più grande per poter controllare l'evolvere della pressione capillare nel provino fino al raggiungimento delle condizioni idrostatiche previste sotto l'azione di un carico. La pressione cala a causa dell'espulsione dell'acqua da parte del provino, dissipando il carico applicato.

	Passo temporale [s]	n° passi	Intervallo
1° Run	1.0E+3	400	1.0E+3 – 4.0E+5

Come per il Run0, i corretti steps temporali sono stati ricavati eseguendo più volte l'analisi utilizzando diversi ordini di grandezza degli stessi.

Dopo $4.0 \cdot 10^4$ s, la pressione capillare nel provino coincide col valore della pressione idrostatica di una colonna d'acqua di 10 m d'altezza.

Si evidenzia che tutti i risultati del Run1 si riconducono alla condizione di equilibrio in cui era arrivato il Run0. Così come lo zero temporale del Run1 coincide con il tempo finale del Run0, le deformazioni, gli stress ed ogni altro tipo di grandezza, compresa la pressione capillare, si rifanno al tempo finale del Run0. Per tale motivo è bene che lo stato finale raggiunto nel Run0 sia quello di equilibrio.

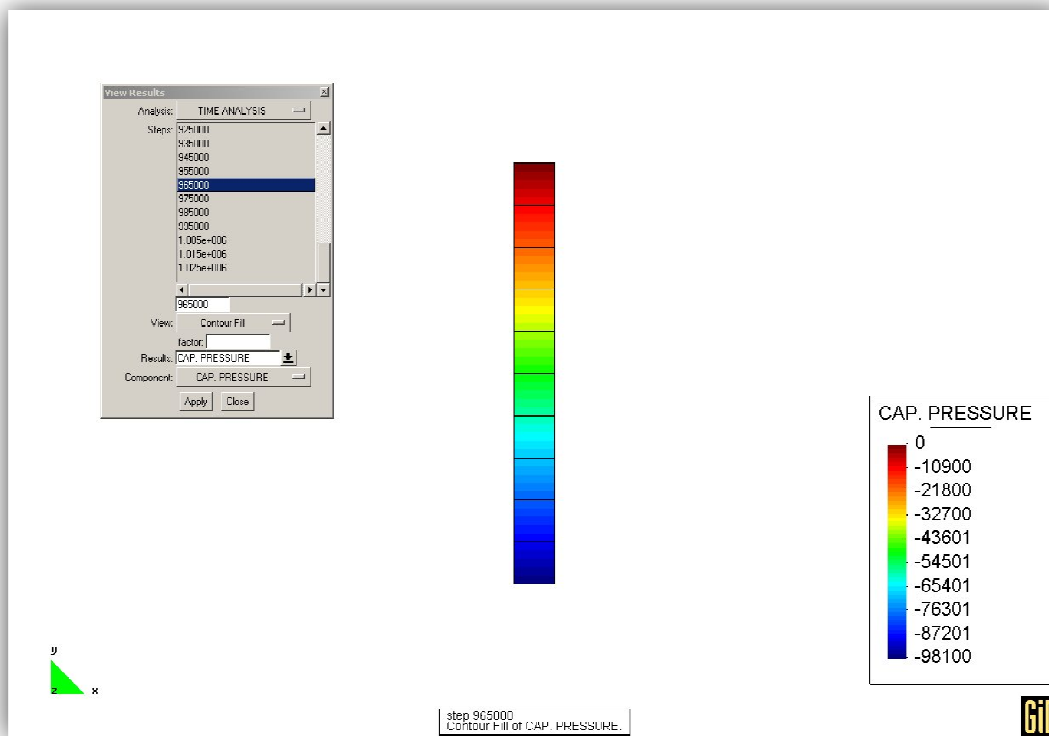


Figura 52 Pressione capillare (P_{cap} [Pa]) a $t=4.0E+04$ s. Il tempo che compare nella tabella è la somma del tempo di Run0 con quello di Run1.

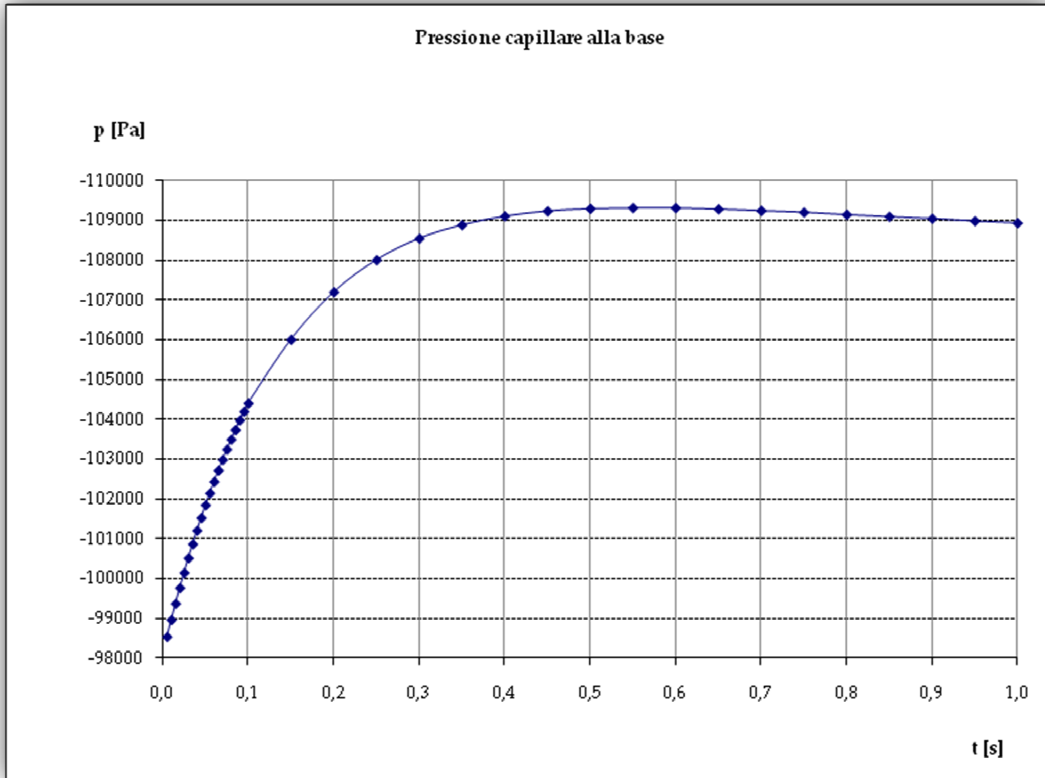


Figura 53 Andamento nel tempo della pressione capillare alla base del provino nella prima analisi

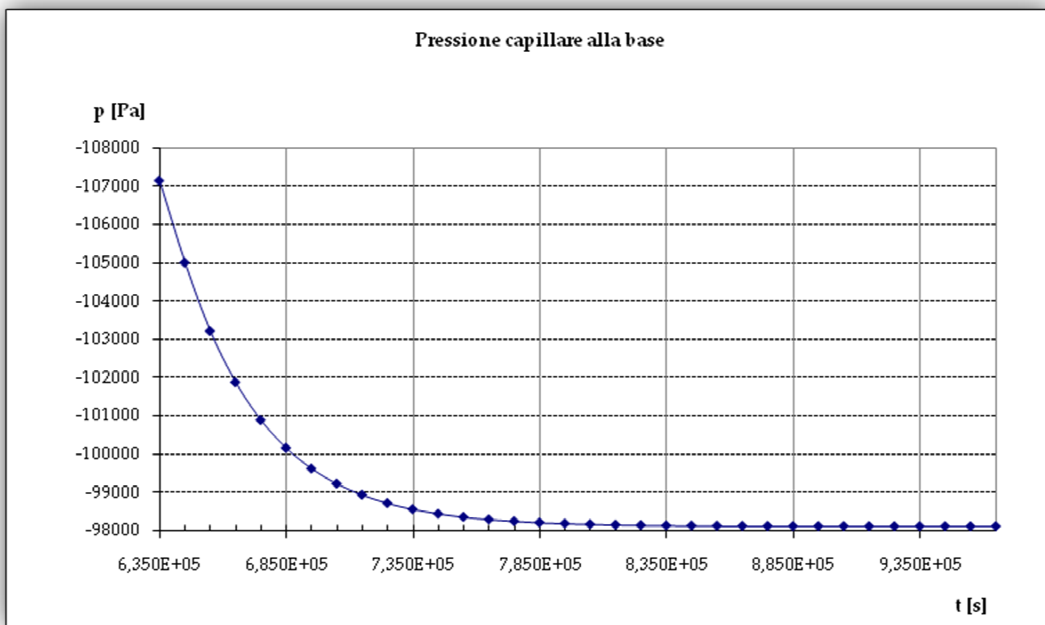


Figura 54 Andamento nel tempo della pressione capillare alla base del provino nella seconda analisi

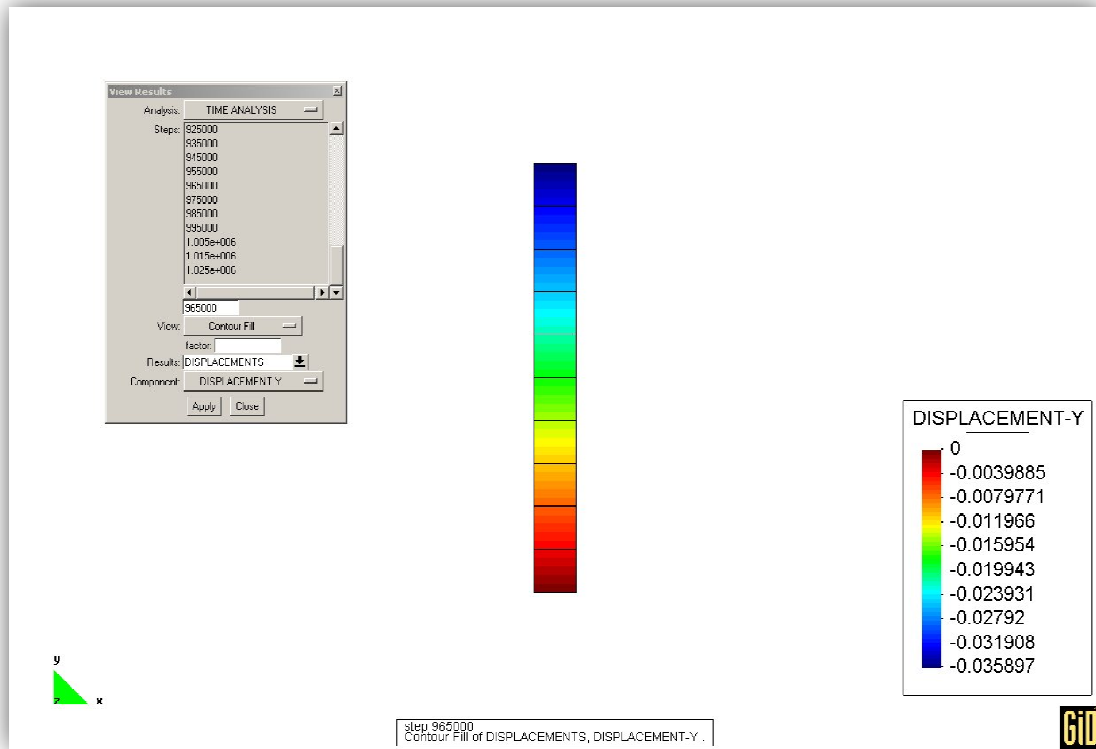


Figura 55. Deformazione lungo y sotto l'azione del carico

Terzaghi

La permeabilità K può essere esplicitata per mezzo della permeabilità intrinseca, K_p

$$K = K_p \frac{\rho g}{\mu} \tag{3.37}$$

e il coefficiente di compressibilità può essere esprimibile in funzione del modulo di Young e della porosità,

$$m_v = \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \frac{1}{E} \tag{3.38}$$

così da poter facilmente applicare i parametri materiali dati in tab.1.

Poiché la permeabilità è bassa, $K = 4.406 \cdot 10^{-6}$ si è in presenza di limo; avendo imposto il caso di impermeabilità alla base del provino, il percorso di drenaggio è $H_{idr} = H$. Calcolato il coefficiente di comprimibilità volumetrica, c_v , si ricava il tempo di consolidazione estrapolando dalla formula del tempo adimensionale tabulato. Per varie quote del provino, viene iterata la formula della consolidazione sino al raggiungimento del valore della sovrappressione interstiziale pari a zero, cioè fino ad avvenuta consolidazione.

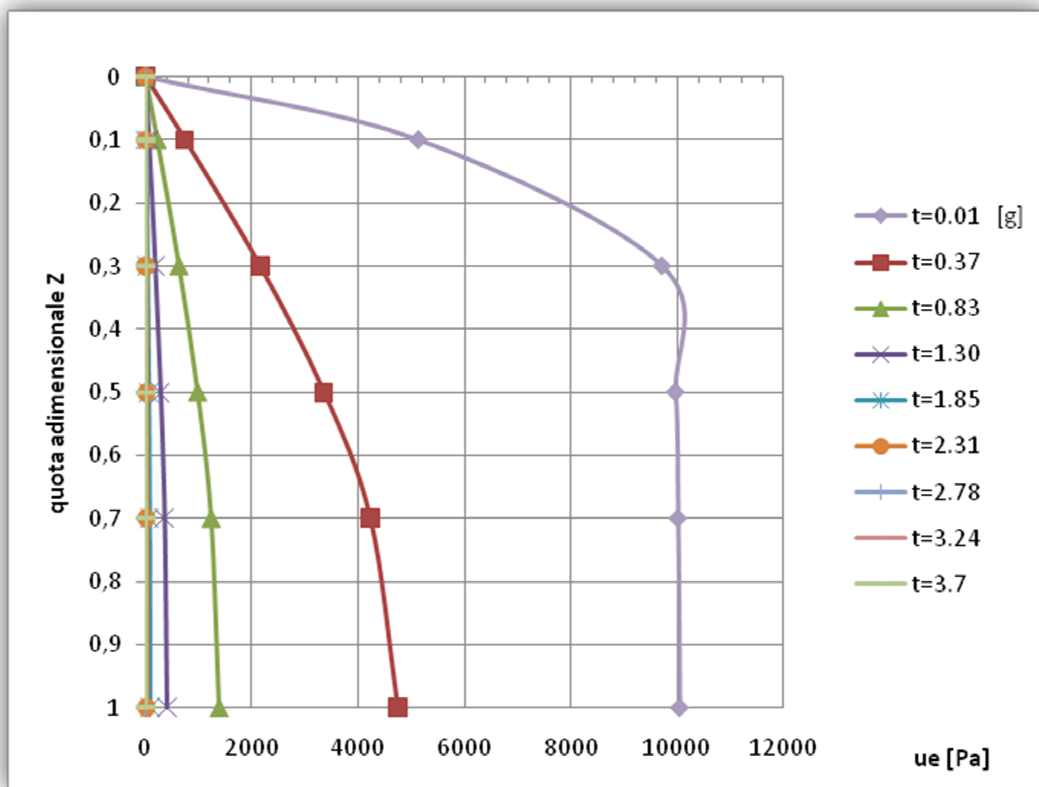


Figura 56. Andamento dei tempi di consolidazione in funzione di Z e ue

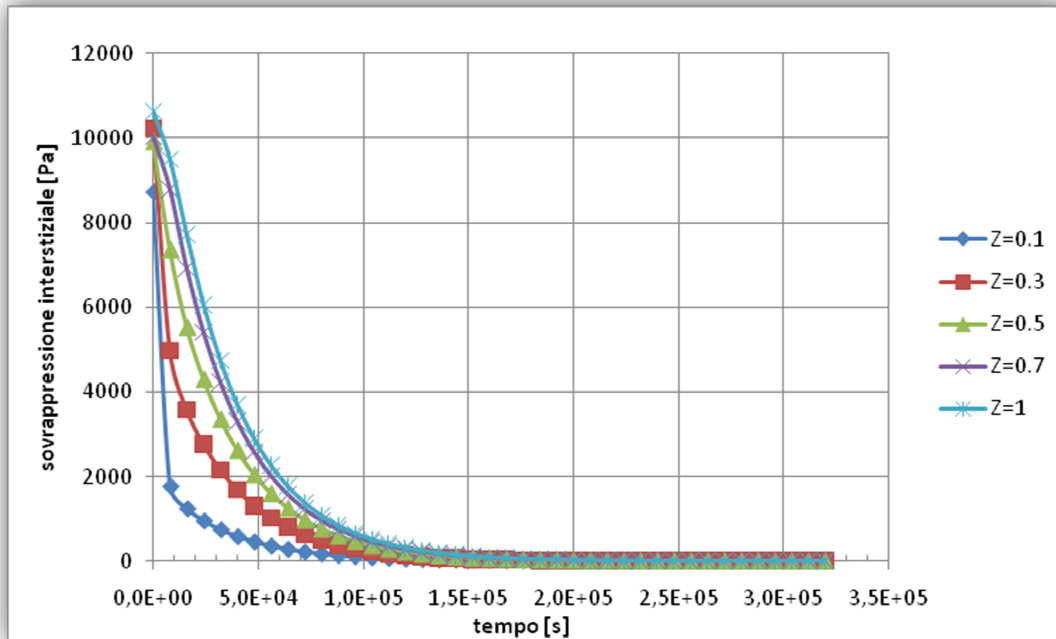


Figura 57. Andamento temporale della consolidazione rispetto alla profondità del campione.

Dal confronto coi risultati ottenuti dalle tue tipologie di analisi si evidenzia l'attendibilità del codice. Con Terzaghi si completa la consolidazione dopo 3.7 giorni, con Comes-Geo dopo 3.9 giorni.

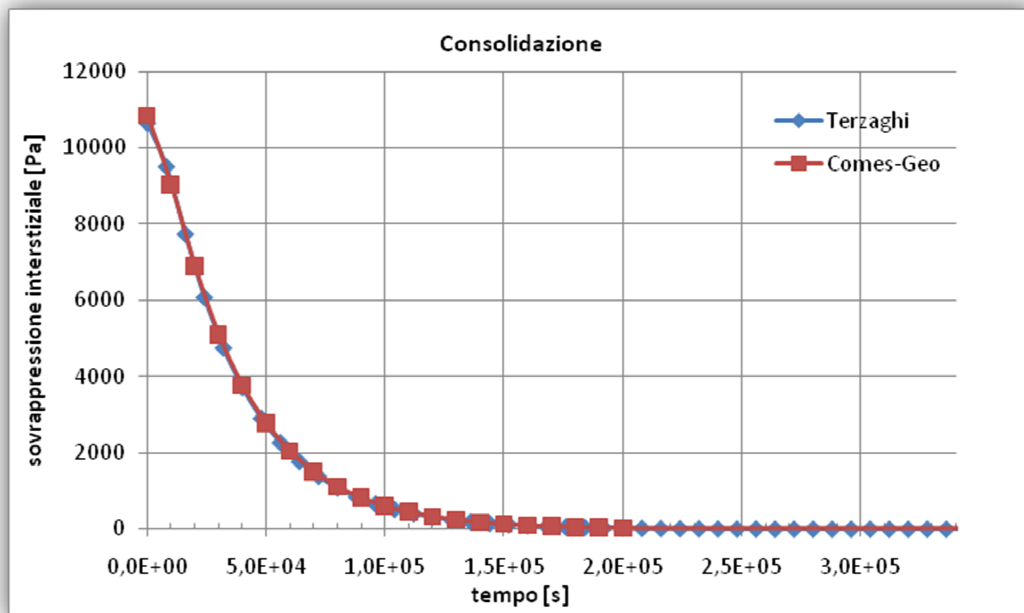


Figura 58. Andamento della consolidazione del provino alla base. Parellelismo Comes-Geo Terzaghi.

3.7 RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Colombo P., *Elementi di geotecnica*. Vol. 2. Zanichelli: 152-168
2. Lancellotta R., *Geotecnica*. Zanichelli. 3 edizione. :54-63
3. Previati L., *Teoria della consolidazione. Lezione 16/05/2001* : 1-11 (2001)
4. Cola S., *Consolidazione monodimensionale e prova edometrica*. Master in Bonifica Idraulica e Irrigazione. Rovigo 2008. : 6-10
5. Philip J.R., de Vries D.A., *Moisture movements in porous material under temperature gradients*, *Trans. Am. Geophys. Union*, 38 (2), 222-232 (1957)
6. Gawin D., Klemm P., *A model of coupled heat and moisture transfer with phase changes in porous building materials*, *Arch. Civ. Endng*, 40 (1) 89-104 (1994)
7. Lewis R.W., Schrefler B.A., *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley, New York (1998)
8. Zienkiewicz O.C., Xie Y.M., Schrefler B.A., Ledesma A., Bicanic N., *Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions, II, Semi-saturated problems*. *Proc. R.S. London*, A 429, 311-321 (1990)
9. Schrefler B.A., Zhan Xiaoyong, Simoni L., *A coupled model for water flow, air flow, and heat flow in deformable porous media*, *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, 5, 531-547 (1995)
10. Oettl G., Stark R.F. and Hofstetter G., *Numerical simulation of geotechnical problems based on a multi-phase finite element approach*. *Computer and Geotechnics*, 31:643-664 (2004)
11. Laloui L., Klubertanz G. and Vulliet L., *Solid-liquid-air coupling in multiphase porous media*. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 27:183-206 (2003)
12. Khoei A.R. and Mohamadnejad T., *Dynamic modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media and its implementation to the lower San-Fernando dam*. 6 – 7 (2009)
13. Gawin D., Schrefler B.A., *Thermo-hydro-mechanical analysis of partially saturated porous materials*. 122 (1995)
14. Facciorusso J., Madiati C., Vannucchi G., *Dispense di Geotecnica* (rev. Settembre 2006)
15. Gawin D., Baggio P., and Schrefler B.A., *Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media*. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, 969-987 (1995)
16. Forsyth P.A., and Simpson R.B., *A two phase, two component model for natural convection in a porous medium*. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol.12, 655-682 (1991)
17. Cividini A., *Application of numerical methods to geotechnical problem*. International Centre for Mechanical Sciences, Course and Lectures N°397 (1998)
18. Schrefler B.A., Zhan Xiaoyong, Simoni L., *A coupled model for water flow, air flow, and heat flow in deformable porous media*. *Water Resources Research*, Vol.29 155-167 (1993)
19. Luison L., *Implementation and validation of advanced constitutive models for the analysis of hydro-thermo-mechanical interactions in geo-environmental engineering problems*, cap.8 ppg..220-229 (2010)

20. Menin A., Salomoni V.A., Santagiuliana R., Simoni L., Gens A., Schrefler A., *A mechanism contributing to subsidence above gas reservoir and its application to a case study*
21. Schrefler B., Gens A., Simoni L., *New data about surface subsidence above gas reservoirs* (2005)
22. Zhang H.W., Heeres O.M., de Borst R., Schrefler B.A., *Implicit integration of a generalized plasticity constitutive model for partially saturated soil*, Eng. Comput. 18:314-336 (2001)
23. Sanavia L., COMES GEO, a F.E. Program for the Hydro-Thermo-Mechanical analysis of multiphase geomaterials, part II – User Guide, ppg.25-27 (2003)

CAPITOLO 4

LEGGE COSTITUTIVA

TERMO-ELASTO-PLASTICA

La legge costitutiva termo-elasto-plastica basa la sua teoria sul modello di stato critico Cam-Clay. Analogamente al modello Cam-clay vi si può trovare:

- una trattazione unificata capace di descrivere con il medesimo modello il comportamento di materiali diversi, indipendentemente dal grado di consolidazione e dalla storia di carico
- la definizione di una superficie di snervamento con la possibilità di definire comportamenti hardening e softening in campo elastoplastico.

4.1 EFFETTI TERMICI INDOTTI

Nello studio del comportamento termo-meccanico dei terreni, si considerano in genere due analisi distinte: un ciclo termico di riscaldamento e successivo raffreddamento (plane 1, Fig.59 durante il quale le tensioni efficaci rimangono costanti); un ciclo di carico e scarico meccanico a temperatura costante (plane 2, Fig.59).

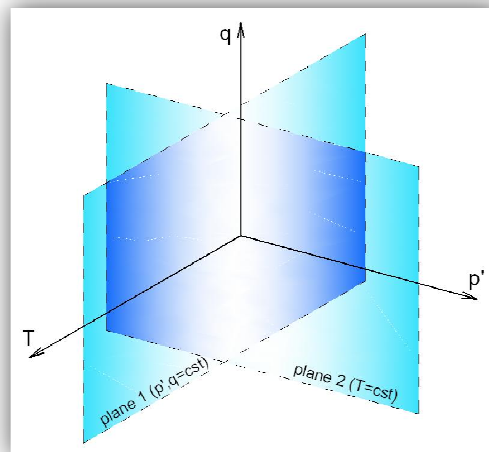


Figura 59. Percorsi di carico per l'analisi del comportamento termo-meccanico dei terreni; p' rappresenta la tensione media efficace, q il deviatore, T la temperatura.

4.1.1 Risposta dei terreni ai cicli di riscaldamento e raffreddamento

I terreni saturi possono essere schematizzati come un materiale bifasico costituito da una parte solida (uno scheletro di grani o particelle circondate da acqua adsorbita) e una parte fluida, l'acqua libera nei vuoti. Durante la fase di riscaldamento di un materiale terroso tutti i suoi costituenti si dilatano; nel caso di terreni argillosi tale dilatazione provoca una diminuzione di resistenza a livello degli strati contenenti acqua adsorbita e modifica la distanza tra le particelle d'argilla (Fleureau, 1979). Questo varia l'equilibrio tra le forze di attrazione di Van der Waals e le forze repulsive elettrostatiche, le principali responsabili del comportamento termico delle argille. In condizioni normalconsolidate (NC), dove l'effetto dello stato tensionale è meno importante che in condizioni sovraconsolidate (OC), l'argilla, in seguito ad un riscaldamento, si contrae ed una parte significativa della deformazione a seguito del successivo raffreddamento risulta essere irreversibile; la contrazione termica è inusuale per ogni materiale.

La Figura 60 illustra la risposta ad un ciclo di carico termico a compressione isotropa costante di un provino d'argilla in condizioni drenate (Cekerevac, 2003): dopo il riscaldamento il provino normal consolidato (NC, OCR = 1) presenta una variazione volumetrica non lineare, con il raffreddamento si ha un aumento di volume. Il comportamento durante l'intero ciclo costituito da deformazioni relative irreversibili create dal carico termico è rappresentativo di hardening termico. Dato che non vi sono state variazioni fisiche nelle tensioni effettive, questo può essere interpretato come una progressiva densificazione del materiale, come ad esempio un comportamento sovraconsolidato. Situazioni fortemente sovra consolidate (OC, OCR > 1) presentano dilatazioni per la maggior parte reversibili. Tra questi due stati, un caso intermedio (cioè con modesti valori del grado di sovraconsolidazione, OCR) prima presenta dilatazioni, poi una tendenza prossima alla contrazione. Deformazioni termiche permanenti possono essere esibite anche da argille sovraconsolidate (Demarks & Charles, 1982).

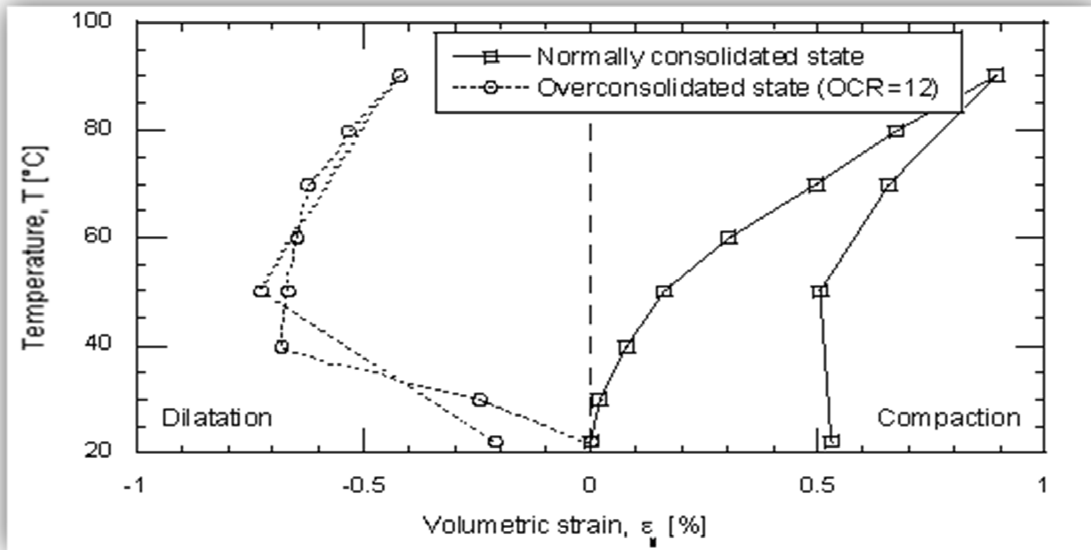


Figura 60. Comportamento termico tipico di terreni a grana fine in relazione a cicli di riscaldamento e raffreddamento. Kaolin clay (Cekerevac, 2003).

Il rapporto tra deformazioni reversibili e deformazioni irreversibili, dovute ad un ciclo termico, dipende dal tipo di suolo e dalla plasticità, oltre allo stato tensionale misurato in termini di grado di consolidazione (OCR). Questo è illustrato nella Figura 61 dove si evidenzia l'influenza del grado di consolidazione (OCR) sul comportamento termico di vari tipi di materiale: per un determinato incremento termico, ad alti OCR il costipamento è minore e la tendenza è a dilatare.

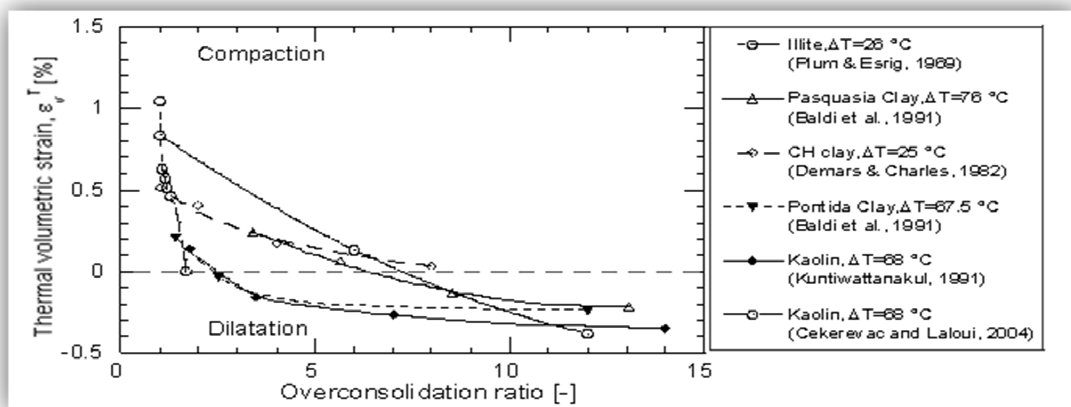


Figura 61. Influenza del grado di sovraconsolidazione, OCR, sulle deformazioni termiche di terreni a grana fine.

4.1.2 Variazione della pressione di preconsolidazione rispetto alla temperatura

La pressione di preconsolidazione, σ'_c (in alcuni testi viene indicata con p'_c , rischiando di essere confusa con la pressione capillare), viene considerata come il limite di snervamento che separa il comportamento elastico dal comportamento plastico in condizioni isotrope od edometriche. Essa corrisponde alla tensione relativa all'intersezione delle due rette che contraddistinguono la curva di compressione. Diversi risultati in letteratura dimostrano la diminuzione della pressione di preconsolidazione all'aumentare della temperatura. La Figura 62 illustra l'esito dei test svolti su tre argille svedesi (Moritz 1995, Eriksson 1989, Tidfors and Sällfors 1989) e su un'argilla naturale canadese (Bordali e al. 1994).

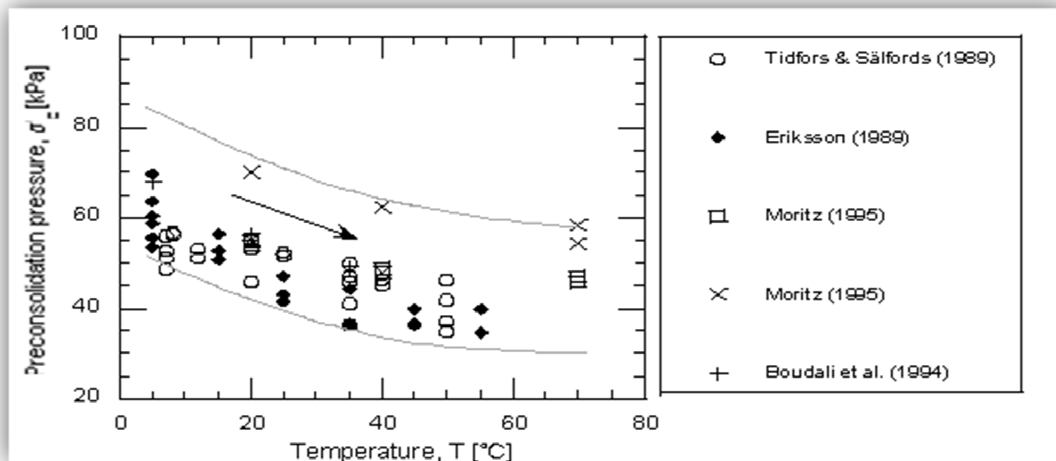


Figura 62. Influenza della temperatura sulla pressione di preconsolidazione.

4.1.3 Variazione dell'angolo di attrito rispetto alla temperatura

Attualmente gli effetti della temperatura sull'angolo di attrito attendono ancora conferma; alcuni ricercatori hanno dedotto che il riscaldamento diminuisce la resistenza meccanica, mentre altri affermano che essa aumenta lievemente. Dei risultati sperimentali sono stati ottenuti da Cekerevac e Laloui (2004), essi sembrano confermare che l'angolo d'attrito allo stato critico può sia aumentare lievemente che diminuire con la temperatura.

4.2 MODELLO COSTITUTIVO PER IL COMPORTAMENTO TERMO-ELASTO-PLASTICO DEI TERRENI

Si considera la decomposizione additiva del rateo di deformazione $\dot{\epsilon}_{ij}$:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{Te} + \dot{\epsilon}_{ij}^{Tp} \quad [4.1]$$

dove con $\dot{\epsilon}_{ij}^{Te}$ si indica la componente elastica di deformazione, con $\dot{\epsilon}_{ij}^{Tp}$ la componente plastica.

4.2.1 Termo-elasticità

Il rateo di deformazione $\dot{\epsilon}_{ij}^{Te}$ non modifica lo stato di incrudimento del materiale. La parte elastica, $\{\sigma'_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^{Te}\}$, dell'energia totale immagazzinata dal materiale durante una fase di carico termo-elastico, $\{\sigma'_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}\}$, è completamente recuperabile dopo lo scarico, essendo σ'_{ij} il tensore delle tensioni effettive. Conseguentemente a tal reversibilità, la legge costitutiva elastica è indipendente dalla storia di carico e può essere espressa con la seguente relazione:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{Te} = L^{-1}(\sigma', T)\sigma'_{ij} \quad [4.2]$$

la dipendenza del tensore elastico, L , dalla tensione effettiva, σ' , e dalla temperatura, T , implica un comportamento non-lineare della componente elastica:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = L(\sigma', T)(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{Tp}) = B(\sigma', T, \alpha, \dot{\epsilon}) \quad [4.3]$$

dove si può vedere che l'incremento delle tensioni effettive dipende dallo stress, σ' , dalla temperatura, T , dal parametro di hardening, α , e dal rateo delle deformazioni totali, $\dot{\epsilon}$.

La deformazione elastica risulta essere data dalla sovrapposizione di due effetti distinti (sovrapposizione degli effetti):

1. una deformazione meccanica ipoelastica in condizioni adiabatiche;
2. una deformazione termica reversibile.

Le due componenti, volumetrica e deviatorica, sono espresse da:

$$\dot{\epsilon}_v^{Te} = \frac{\dot{p}'}{K} + \beta'_s \dot{T} \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{ed} = \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} \quad [4.4]$$

dove \dot{p}' e $\dot{\sigma}'_{ij}$ sono rispettivamente il rateo della tensione effettiva volumetrica e deviatorica espressi da:

$$\dot{p}' = \frac{\text{tr}(\dot{\sigma}'_{ij})}{3} \quad \dot{\sigma}'_{ij}{}^d = \dot{\sigma}'_{ij} - \dot{p}' \delta_{ij} \quad [4.5]$$

invece β'_s , coefficiente di espansione termica isotropa dello scheletro solido, varia principalmente con la temperatura e in misura minore con la pressione secondo la legge:

$$\beta'_s = (\beta'_{s0} + \zeta T) \xi \quad [4.6]$$

dove β'_{s0} è il coefficiente di espansione termica isotropa alla temperatura di riferimento, T_0 (generalmente temperatura ambiente), ξ è il rapporto tra la pressione critica iniziale, p'_{c0} , e la pressione efficace, p' , alla temperatura ambiente:

$$\xi = \frac{p'_{c0}}{p'} \quad [4.7]$$

ζ corrisponde alla variazione di β'_s rispetto alla temperatura (in genere $\zeta = -\beta'_{s0}/100$), T , quando $\xi = 1$.

I moduli ipoelastici si calcolano tramite le relazioni:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{ref}} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\mathbf{p}_{\text{ref}}} \right)^n \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_{\text{ref}} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\mathbf{p}_{\text{ref}}} \right)^n \quad [4.8]$$

dove \mathbf{K}_{ref} e \mathbf{G}_{ref} sono rispettivamente il modulo volumetrico e il modulo tangente misurati in corrispondenza della pressione di riferimento \mathbf{p}_{ref} ; n è una costante del materiale.

4.2.2 Termo-plasticità

Dalla equazione il rateo termo-elasto-plastico può essere espresso come la parte irreversibile della deformazione totale:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{Tp}} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{Te}} \quad [4.9]$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{Tp}} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \mathbf{L}^{-1}(\sigma', \mathbf{T}) \mathbf{B}(\sigma', \mathbf{T}, \alpha, \dot{\varepsilon}) = \tilde{\mathbf{B}}(\sigma', \mathbf{T}, \alpha) \dot{\varepsilon}_{ij} \quad [4.10]$$

$\tilde{\mathbf{B}}$ è un operatore che valuta la porzione di deformazione totale indotta dalla plasticità (hardening del materiale). La particolarità del presente modello è che l'operatore $\tilde{\mathbf{B}}$ è una combinazione lineare di due processi irreversibili: un meccanismo termo-meccanico isotropo e un meccanismo termo-meccanico deviatorico. Perciò la deformazione plastica totale, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{Tp}}$, è la somma di due parziali ratei di deformazione plastica, $\dot{\varepsilon}_{ij,k}^{\text{Tp}}$, indotti da ogni meccanismo k :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{Tp}} = \sum_{k=1}^2 \dot{\varepsilon}_{ij,k}^{\text{Tp}} = \dot{\varepsilon}_{ij,1}^{\text{Tp}} + \dot{\varepsilon}_{ij,2}^{\text{Tp}} \quad [4.11]$$

Queste considerazioni sono il risultato della teoria della plasticità multi-meccanismo (Koiter, 1960; Mandel, 1965; Hujoux, 1979). Ogni meccanismo viene attivato se lo stato tensionale raggiunge il limite di snervamento ad esso corrispondente, ossia quando le

funzioni di snervamento, f_{Ti} e f_{Td} , risultano positive. Tale attivazione induce la formazione di deformazioni irreversibili; il rateo di deformazione plastica totale può essere espresso come segue:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{Tp} = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial \sigma'_{ij}} \quad [4.12]$$

dove g_k sono i potenziali plastici corrispondenti ad ogni meccanismo e λ_k sono i moltiplicatori plastici, positivi se il meccanismo corrispondente è attivato ($f_k = 0$ e $\dot{f}_k = 0$).

Riassumendo il concetto di multi-plasticità, le due funzioni di snervamento definiscono un dominio chiuso nello spazio delle tensioni efficaci dentro il quale il comportamento del materiale è reversibile. Se lo stato tensionale raggiunge uno dei limiti di snervamento, il meccanismo corrispondente viene attivato e contemporaneamente si sviluppano deformazioni irreversibili

4.2.2.1 Meccanismo termo-elasto-plastico isotropo

Il limite, f_{Ti} , del meccanismo termo-elasto-plastico isotropo è rappresentato nel piano della tensione efficace media, p' , e della temperatura, T , Figura 63 e Figura 64, ed è espresso come:

$$f_{Ti} = p' - \sigma'_c \cdot r$$

[4.13]

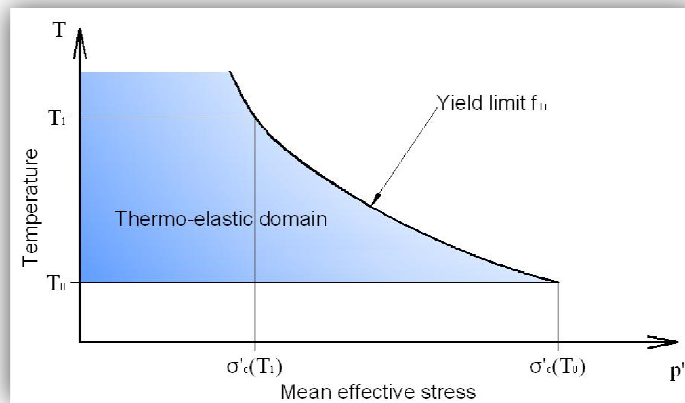


Figura 63. Funzione di snervamento del meccanismo isotropo.

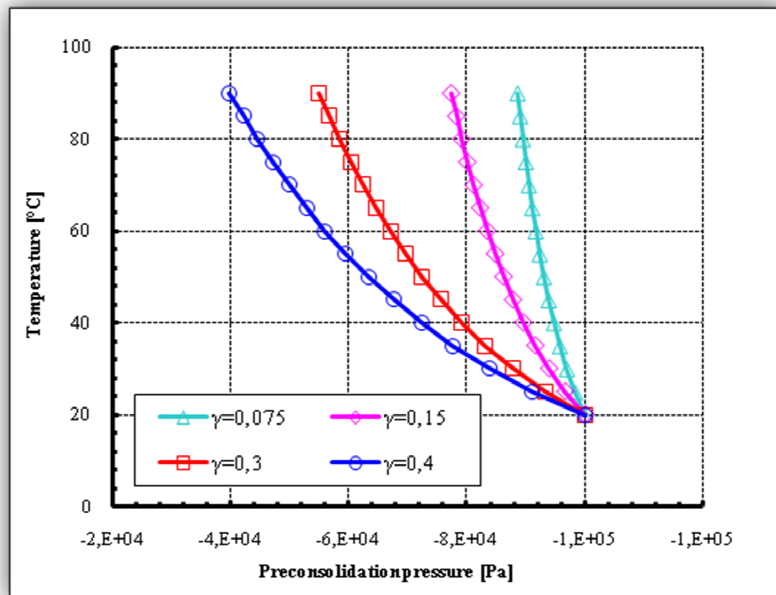


Figura 64. Variazione della funzione di snervamento isotropo in relazione al parametro γ .

In questa relazione il parametro r corrisponde al grado di plasticizzazione (hardening mobilitato) del limite di snervamento isotropo. E' una funzione iperbolica della deformazione plastica volumetrica, ε_v^p . Esso varia da r^e , che definisce il dominio elastico ($0 < r^e < r$), a 1, cioè stato completamente plastico. Ciò comporta una progressiva evoluzione del limite plastico isotropo durante la fase di carico e una parziale regressione nella fase di scarico. σ'_c è la pressione di preconsolidazione espressa come funzione della deformazione plastica volumetrica, ε_v^p , e della temperatura:

$$\sigma'_c = \sigma'_{c_0}(T) e^{\beta \varepsilon_v^p} \quad [4.14]$$

$\sigma'_{c_0}(T)$ è il valore della pressione di preconsolidazione alla temperatura T , β è il modulo plastico di compressibilità (cioè la pendenza della retta $\varepsilon_v^p - \ln(\sigma'_{c_0})$). Per tener conto dell'effetto termico sul limite elastico, si introduce la legge di dipendenza dalla temperatura della pressione di preconsolidazione, $\sigma'_{c_0}(T)$:

$$\sigma'_{c_0}(T) = \sigma'_{c_0}(T_0) \cdot \left[1 - \gamma \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right] \quad [4.15]$$

dove $\sigma'_{c_0}(T_0)$ è il valore della pressione di preconsolidazione alla temperatura di riferimento e γ un parametro del materiale. La funzione di snervamento volumetrico termo-plastico è allora espressa da:

$$f_{Ti} = p' - \sigma'_{c_0}(T_0) \cdot e^{\beta \varepsilon_v^p} \cdot \left[1 - \gamma \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right] \cdot r \quad [4.16]$$

L'equazione contiene tre parametri del materiale: β e r che esprimono l'evoluzione dell'incrudimento meccanico, e γ che controlla l'evoluzione dell'incrudimento termico.

Quest'ultimo definisce la forma del limite elastico come mostrato in Figura 64. La legge di flusso è associata ($f_{Ti}(p', T, e^{e_v^p}) = g_{Ti}(p', T, e^{e_v^p})$):

$$\dot{\epsilon}_{ii}^p = \lambda_i \frac{\partial g_{Ti}}{\partial \sigma'_{ii}} = \frac{\lambda_i}{3} \quad [4.17]$$

Il moltiplicatore plastico, λ_i , è determinato utilizzando l'equazione di consistenza come mostrato successivamente.

4.2.2.2 Meccanismo termo-plastico deviatorico

Per semplicità si basa il limite elastico deviatorico sul noto modello Cam-Clay:

$$f_d = \frac{q}{Mp'} + \ln \frac{d \cdot p'}{\sigma'_c} - 1 = 0 \quad [4.18]$$

con d distanza (nel piano logaritmico) tra la pressione di preconsolidazione, σ'_c , e la pressione critica secondo il Cam-Clay, p'_c . Dato che l'angolo d'attrito può dipendere dalla temperatura, si introduce la seguente relazione:

$$M(T) = M_0 - g(T - T_0) \quad [4.19]$$

dove M_0 è la pendenza della linea di stato critico alla temperatura ambiente (T_0) e g è la pendenza media di variazione dell'angolo di attrito con la temperatura. Considerando la legge di dipendenza dalla temperatura della pressione di preconsolidazione, la superficie di snervamento diventa, in condizioni non isoterme, Figura 65:

$$f_{Td} = \frac{q}{(M_0 - g(T - T_0))p'} + \ln \frac{d \cdot p'}{\sigma'_{c0}(T_0) e^{\epsilon_v^p} \left[1 - \gamma \ln \frac{T}{T_0} \right]} - 1 = 0 \quad [4.20]$$

Il modello utilizza pure nel meccanismo deviatorico un flusso plastico associato. Le leggi di incrudimento sono le seguenti:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda_d \frac{\partial g_{Td}}{\partial \sigma'_{ij}} = \lambda_d \frac{1}{Mp'} \left[\frac{\partial q}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{1}{3} \left(M - \frac{q}{p'} \right) \right]$$

con

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma'_{ij}} = \begin{cases} \frac{3}{2q} (\sigma_{ij} - p') & \text{se } i = j \\ \frac{3\sigma_{ij}}{q} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \lambda_d \frac{\partial g_{Td}}{\partial p'} = \lambda_d \frac{1}{Mp'} \left[M - \frac{q}{p'} \right]$$

$$\dot{\varepsilon}_d^p = \lambda_d \frac{\partial g_{Td}}{\partial q} = \lambda_d \frac{1}{Mp'}$$

[4.21]

λ_d deve essere determinato, come per il meccanismo isotropo, tramite la condizione di consistenza.

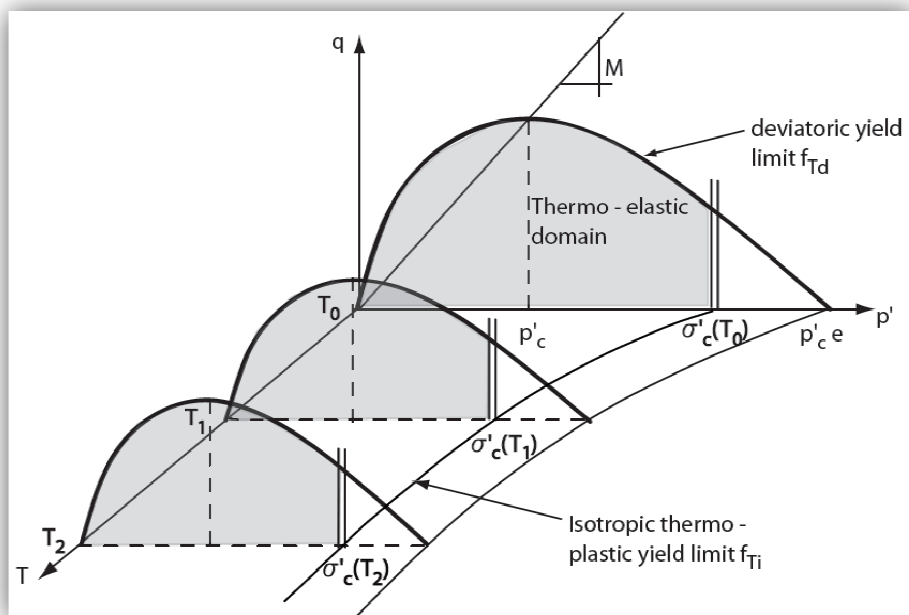


Figura 65. Accoppiamento dei meccanismi termoplastici isotropo e deviatorico.

4.2.2.3 Accoppiamento dei due meccanismi

I limiti elastici isotropo e deviatorico sono accoppiati attraverso la variabile di snervamento ε_v^p . Infatti la pressione di preconsolidazione $\sigma'_c = \sigma'_{c0}(T)e^{\beta\varepsilon_v^p}$, che dipende da ε_v^p , appare in entrambe le espressioni dei due limiti elastici. Perciò, se ε_v^p cresce a causa dell'attivazione di uno dei due meccanismi, il limite elastico dell'altro meccanismo varierà a sua volta. Di conseguenza, i due moltiplicatori plastici, λ_i e λ_d , sono correlati.

Quando i due meccanismi vengono attivati simultaneamente, il rateo di deformazione plastica totale, $\dot{\varepsilon}_v^p$, è la somma del rateo di deformazione plastica volumetrica indotto da entrambi i meccanismi:

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \lambda_d \frac{\partial \mathbf{g}_{Td}}{\partial \mathbf{p}'} + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{g}_{Ti}}{\partial \mathbf{p}'} = \lambda_d \frac{1}{Mp'} \left[M - \frac{q}{p'} \right] + \lambda_i \quad [4.22]$$

così le condizioni di consistenza divengono:

$$\begin{aligned} \dot{f}_{Ti} &= \partial_{p'} f_{Ti} \dot{p}' + \partial_T f_{Ti} \dot{T} + \partial_r f_{Ti} \dot{r} + \partial_{\varepsilon_v^p} f_{Ti} \left(\lambda_d \frac{1}{Mp'} \left[M - \frac{q}{p'} \right] + \lambda_i \right) = 0 \\ \dot{f}_{Td} &= \partial_{\sigma'} f_{Td} \dot{\sigma}' + \partial_T f_{Td} \dot{T} + \partial_{\varepsilon_v^p} f_{Td} \left(\lambda_d \frac{1}{Mp'} \left[M - \frac{q}{p'} \right] + \lambda_i \right) = 0 \end{aligned} \quad [4.23]$$

Risolvere queste due equazioni significa determinare i due moltiplicatori plastici.

4.3 RISULTATI NUMERICI IN LETTERATURA

4.3.1 Consolidazione isotropa dopo riscaldamento

Si riportano i risultati di una simulazione numerica i cui cicli termo-meccanici sono illustrati in Figura 66; tali cicli rappresentano due consolidazioni avvenute una volta riscaldato il provino a due temperature diverse. Si può notare che seguendo il percorso EF il dominio elastico è minore (pressione di preconsolidazione inferiore, punto A2) rispetto al dominio del percorso CD, questi risultati sono stati riscontrati da diversi autori.

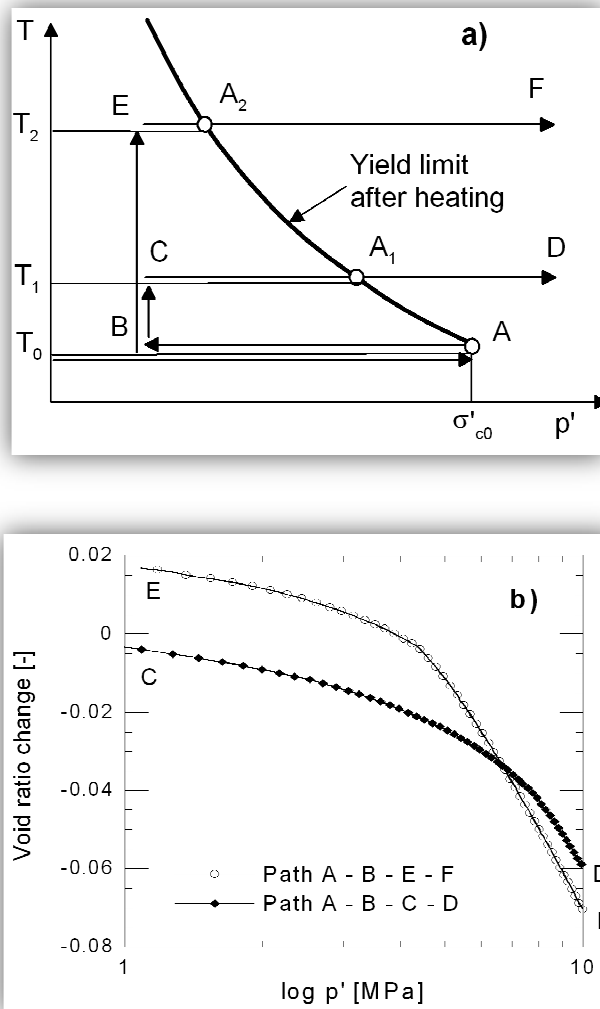


Figura 66. Consolidazione isotropa in seguito a riscaldamento del provino; (a) percorsi seguiti, (b) risultati numerici.

4.3.2 Consolidazione isotropa in seguito a cicli di riscaldamento e raffreddamento

Si analizza l'effetto di un ciclo di riscaldamento e raffreddamento ($A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$, Figura 67) su di un materiale inizialmente normalconsolidato. L'assestamento indotto dal riscaldamento ($A \rightarrow A_1$) causa l'incremento della funzione di snervamento isotropa ($\sigma'_{c0} \rightarrow \sigma'_{c1}$). Dopo il raffreddamento ($A_1 \rightarrow A_2$), il carico meccanico dal punto A_2 mostra che lo stato tensionale rimane in campo elastico ($A_2 \rightarrow A'$) per poi raggiungere il limite di snervamento (σ'_{c1}), punto da cui il materiale presenta nuovamente comportamento plastico. Questo fenomeno corrisponde a quello osservato sperimentalmente (Kuntiwattanakul, 1991; Baldi e al., 1985; Cui e al., 2000).

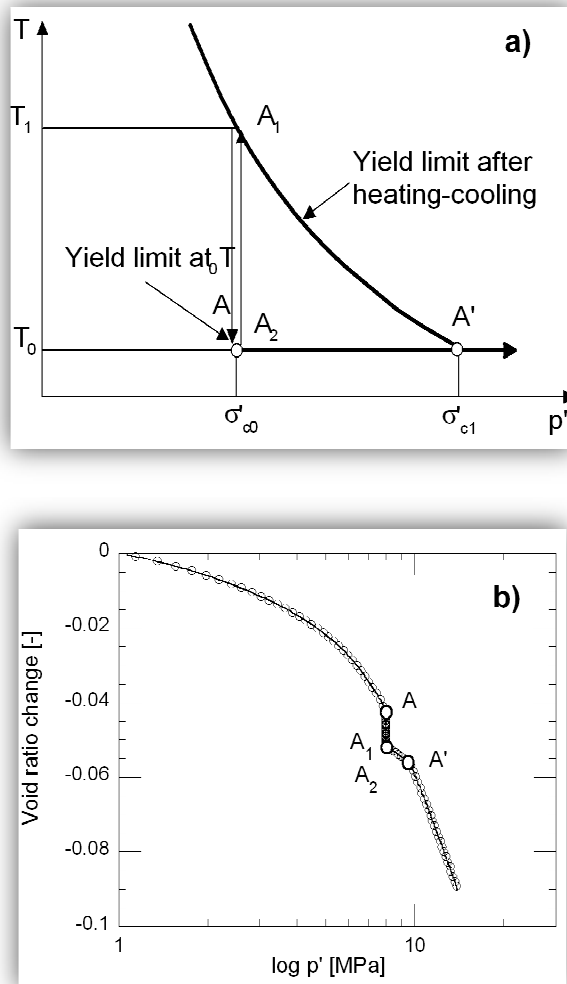


Figura 67. Consolidazione isotropa in seguito a cicli di riscaldamento; (a) percorsi termo-meccanici seguiti, (b) risultati numerici.

4.3.3 Test sull'argilla naturale (Boomclay) condotto da Baldi e al. (1991)

Baldi e al. (1991) riportarono lo studio sul comportamento termo-meccanico di un'argilla naturale (Boom clay). Il programma sperimentale consisteva in numerosi tests relativi a cicli di carico termo-meccanico. In particolare nel test TBoom9, il provino è stato riscaldato a 95 °C e raffreddato a 21.5 °C a tre differenti stati tensionali iniziali (6 MPa, 3 MPa e 1 MPa) che corrispondono a tre diversi gradi di sovraconsolidazione, 1, 2 e 6 rispettivamente. Il confronto fra i risultati sperimentali e i risultati numerici, Figura 68, mostra l'efficacia della simulazione del comportamento del terreno sia in fase di riscaldamento che in fase di raffreddamento per differenti OCR (Laloui e Cekerevac, 2003).

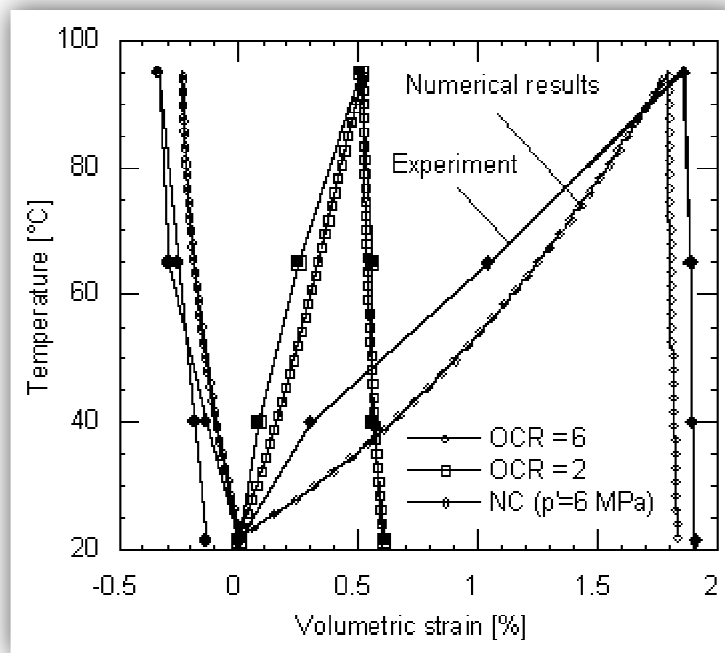


Figura 68. Confronto fra risultati sperimentali (Baldi e al., 1991) e risultati numerici col modello proposto.

4.4 RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Baldi G, Borsetto M, Hueckel T, Tassoni E., *Thermally induced strains and pore pressure in clays*. International Symposium on Environmental Geotechnology, Allentown, Pennsylvania; p. 391-402, (1985).
2. Baldi G, Hueckel T, Peano A, Pellegrini R., *Developments in modelling of thermo-hydro-geomechanical behaviour of Boom clay and clay-based buffer materials*. Report: 13365/2 EN, Commission of the european Communities (1991).
3. Boudali M, Leroueil S, Sinivasa Murthy B R., *Viscous behaviour of natural clays*. 13th International Conference on Soil Mechanics and foundation Engineering, New Delhi; p. 411-416 (1994).
4. Burger A, Recordon E, Bovet D, Cotton L, Saugy B., *Thermique des nappes souterraines*. Presses polytechniques universitaires romandes (1985).
5. Cekerevac C., *Thermal effects on the mechanical behaviour of saturated clays: an experimental and numerical study*. Doctoral thesis No 2828, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne (2003).
6. Cekerevac C., Laloui, L., *Experimental study of the thermal effects on the mechanical behaviour of a clay*. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol 28, pp 209-228, (2004).
7. Cui Y J, Sultan N, Delage P., *Propriétés thermomécaniques des milieux granulaires*. In: J. Lanier, editor. Mécanique des milieux granulaires, Lavoisier, pp. 323-363 (2000)
8. Demarks K R, Charles R D., *Soil volume changes induced by temperature cycling*. Canadian Geotechnical Journal. vol. 19, pp. 188-194 (1982).
9. Delage, P., *Coupled multiphysics problems in geomechanics - Physical mechanisms and experimental determination*. Revue Européenne de Génie Civil (2005).
10. Eriksson L.G., *Temperature effects on consolidation properties of sulphide clays*. 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rio de Janeiro; pp. 2087-2090 (1989).
11. Fleureau, J M., *Influence d'un champ thermique ou électrique sur les phénomènes d'interaction solide-liquide dans les milieux poreux*. Doctoral thesis, Ecole Centrale de Paris (1979).

12. Hujeux J C., *Calcul numérique de problèmes de consolidation elastoplastique*. Doctor of Engineering Thesis, Ecole Centrale de Paris (1979).
13. Koiter W.T., *General theorems for elastic-plastic solids*. In Progress in Solid Mechanics, eds I.N.Sneddon and R.Hill, North-Holland, Amsterdam, 167-221 (1960)
14. Kuntiwattanakul P., *Effect of High Temperature on Mechanical Behaviour of Clays*. Doctoral thesis, University of Tokyo (1991).
15. Laloui L., Cekerevac, C., *Thermo-plasticity of clays: an isotropic yield mechanism*. Computers and Geotechnics, Vol 30/8 pp 649-660 (2003)
16. Laloui L, Modaressi H., *Modelling of the thermo-hydro-plastic behaviour of clays*. In: Hoteit et al, editors. Hydromechanical and thermohydromechanical behaviour of deep argillaceous rock. Balkema, pp. 161-170 (2002).
17. Laloui L, Moreni M, Vulliet L., *Comportement d'un pieu bi-fonction, fondation et échangeur de chaleur*. Canadian Geotechnical Journal, 40(2), pp. 388-402 (2003).
18. Mandel J., *Une généralisation de la théorie de Koiter*, I. J. Solid Struct., 1: 273-295 (1965)
19. Mitchell J.K, McMillan J.C, Green S.L, Sisson R.C., *Field testing of cable backfill systems*. In S.A.B. et al. editors. Underground Cable Thermal Backfill. Pergamon Press, New York, pp. 19-33 (1982).
20. Moritz L., *Geotechnical Properties of Clay at Elevated Temperatures*. Report: 47, Swedish Geotechnical Institute, Linköping (1995).
21. Plum L., Esrig M.I., *Some temperature effects on soil compressibility and pore water pressure*. Report: 103, Highway Research Board, Washington (1969)
22. Tidfors M., Sällfors S., *Temperature effect on preconsolidation pressure*. Geotechnical testing Journal. 12(1), pp. 93-97 (1989).

CAPITOLO 5

IL MODELLO COSTITUTIVO TERMO-IDRO-ELASTO-PLASTICO ACMEG-TS

5.1 LA PARZIALE SATURAZIONE NEL SUOLO

Molti suoli in natura sono in condizioni di parziale saturazione per cui è di fondamentale importanza lo sviluppo del modello costitutivo atto a considerare gli effetti di questo stato.

Come spiegato nella sezione 3, i suoli sono composti da uno scheletro solido poroso con vuoti, che se riempiti d'acqua fan definire i suoli completamente saturi, se oltre l'acqua vi è l'aria li fan classificare insaturi o parzialmente saturi. Nel suolo saturo la pressione del fluido nei pori è generalmente assunta come una tensione neutrale, mentre sotto condizioni insature, una nuova tensione interna, chiamata suzione, s , o pressione capillare, p^c , (vedi cap.1), gioca un ruolo significativo nel comportamento dei suoli insaturi e dev'essere, direttamente o indirettamente, considerata nella formulazione della relazione tensione-deformazione. Le relative quantità di aria nei pori e di acqua interstiziale sono determinanti nelle proprietà meccaniche dei suoli insaturi. Questa proporzione, definita dal grado di saturazione, S_w , può essere considerata nella descrizione completa dello stato idro-meccanico del suolo.

Il grado di saturazione è:

$$S_w = \frac{dv^w}{dv^w + dv^g} \quad [5.1]$$

dv^w = volume dei vuoti riempiti d'acqua

dv^g = volume dei vuoti riempiti d'aria, che può essere assunto come una miscela di aria secca e vapore

S_w è correlato alla p^c tramite leggi sperimentali proposte durante gli anni da alcuni autori come mostrato in Figura 69.

Per i suoli insaturi è necessaria un'appropriata definizione della tensione efficace. Partendo dalla relazione di Terzaghi si ha:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p^w \delta_{ij} \quad [5.2]$$

La tensione efficace σ'_{ij} , usata per suoli insaturi come è stato proposto da Bishop [12]

($\sigma' = \sigma + [p^g - \chi(p^g - p^w)]$), assume la forma:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p^g \delta_{ij} + \chi(p^g - p^w) \delta_{ij} = \sigma_{net,ij} + \chi \cdot p^c \delta_{ij} \quad [5.3]$$

Dove: $\sigma_{net,ij} = \sigma_{ij} - p^g \delta_{ij} \wedge p^c = p^g - p^w$

Viene assunto:

$$\chi = S_w \quad [5.4]$$

come proposto da Schrefler [17].

Altri autori han proposto espressioni per χ che lo fan dipendere dal rapporto di suzione invece che dal grado di saturazione [1-8]. Da un punto di vista micro-meccanico, gli approcci teorici sono stati anche sviluppati per valutare il parametro χ esaminando le forze e le pressioni dei fluidi che si presentano in suoli insaturi con particelle del suolo ideali. Questo tipo di analisi mostra che la forma e l'assestamento dei grani, come pure l'angolo di contatto dell'interfaccia tra liquido e solido, possono avere un impatto importante sul comportamento del parametro χ [10].

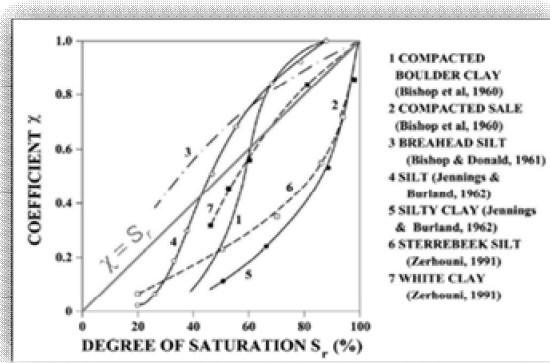


Figura 69. Parametro della tensione effettiva con rispetto del grado di saturazione per vari suoli, come riportato in [20].(Ridisegnato da [5]).

5.1.1 Comportamento meccanico

Questa sezione presenta il comportamento tensione-deformazione di suoli insaturi sotto condizioni isoterme [5]. Verrà evidenziato che la risposta meccanica dei suoli parzialmente saturi è significativamente influenzata dalla suzione. La peculiarità della risposta meccanica dei suoli insaturi dipende fortemente dalla tensione di riferimento usata nella rappresentazione dei risultati sperimentali. Di solito, le curve ottenute dai tests di laboratorio sono mostrate in base alle tensioni nette perché esse sono i dati diretti monitorati durante gli esperimenti. Ciò fornisce una struttura consistente per analizzare i risultati ricavati. L'approccio della tensione pseudo-efficace può portare chiarimenti sostanziali ad alcune caratteristiche osservate del comportamento del suolo. In questa sezione, dove possibile, i risultati sperimentali saranno presentati usando la tensione efficace di Bishop con $\chi = S_w$, chiamata tensione efficace generalizzata (Nuth and Laloui [14]), in parallelo con la tensione netta. Questa interpretazione è possibile solo se sono disponibili le informazioni sulla ritenzione idrica.

5.1.1.1 Effetti della suzione sul comportamento della compressione in condizioni isoterme

La pressione di preconsolidazione apparente cresce significativamente con la desaturazione. Tale incremento del dominio elastico con la suzione è strettamente collegato agli effetti capillari. Durante un processo di consolidazione, il limite di snervamento corrisponde al livello di tensione che inizia a produrre un riassetto dei grani. Crescendo la pressione capillare, l'aria entra nei pori e i menischi che si formano all'interfaccia aria-acqua stabilizzano il contatto particella-particella. L'effetto stabilizzante arretra il limite elastico del suolo.

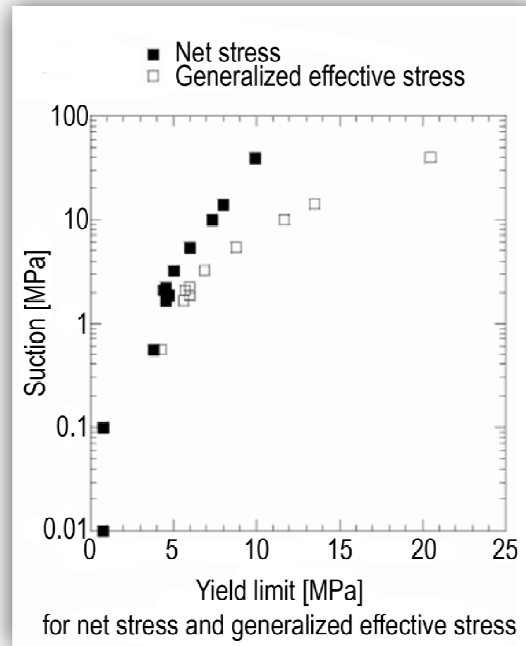


Figura 70. Evoluzione del limite di snervamento con rispetto alla pressione capillare determinata da prove di compressione edometrica su argilla naturale BoomClay a temperatura ambiente [15] (ridisegnato da [5])

La Fig.70 mostra l'evoluzione della pressione di preconsolidazione con la pressione capillare, come determinato dalle prove di compressione su argilla naturale BoomClay nella tensione netta e nella tensione efficace generalizzata [15]. L'evoluzione della pressione di preconsolidazione appare rapida per bassi valori della suzione e diventa asintotica per i più alti. La Fig.70 mostra pure che l'incremento del limite elastico è notevole solo per le suzioni più alte di un dato valore di suzione, chiamato *suzione d'ingresso aria* (suction air-entry value), s_e , cioè il valore della pressione capillare a cui l'aria inizia ad entrare nei pori. Sopra questo limite, una funzione logaritmica potrebbe essere adatta per modellare questo fenomeno. Basata sulla sua similarità con l'effetto della temperatura e con la legge di evoluzione proposta da Laloui e Cekerevac [9], i ricercatori Nuth e Laloui [13] proposero la stessa formulazione logaritmica per quantificare una ad una le relazioni tra la suzione e la pressione di preconsolidazione nella tensione efficace generalizzata di riferimento:

$$s \leq s_e \Rightarrow p'_c(s) = p'_{c0}$$

$$s > s_e \Rightarrow p'_c(s) = p'_{c0} \left(1 + \gamma_s \log\left(\frac{s}{s_e}\right) \right)$$

[5.5]

p'_{c0} = pressione di preconsolidazione alla saturazione

$p'_c(s)$ = pressione di preconsolidazione ad una data suzione s

s_e = suzione d'ingresso aria

γ_s = parametro materiale

Nel dominio saturo (cioè la più bassa pressione capillare rispetto al valore della suzione d'ingresso aria), l'equazione [5.5] assume che una suzione positiva possa verificarsi senza incidere direttamente sulla pressione di preconsolidazione, la quale rimane uguale al suo valore in condizione di totale saturazione, purchè non si producano deformazioni plastiche durante l'evoluzione della pressione capillare.

La Fig.71 mostra la legge logaritmica [5.5] confrontata con i dati sperimentali riferiti a due diversi tipi di suolo.

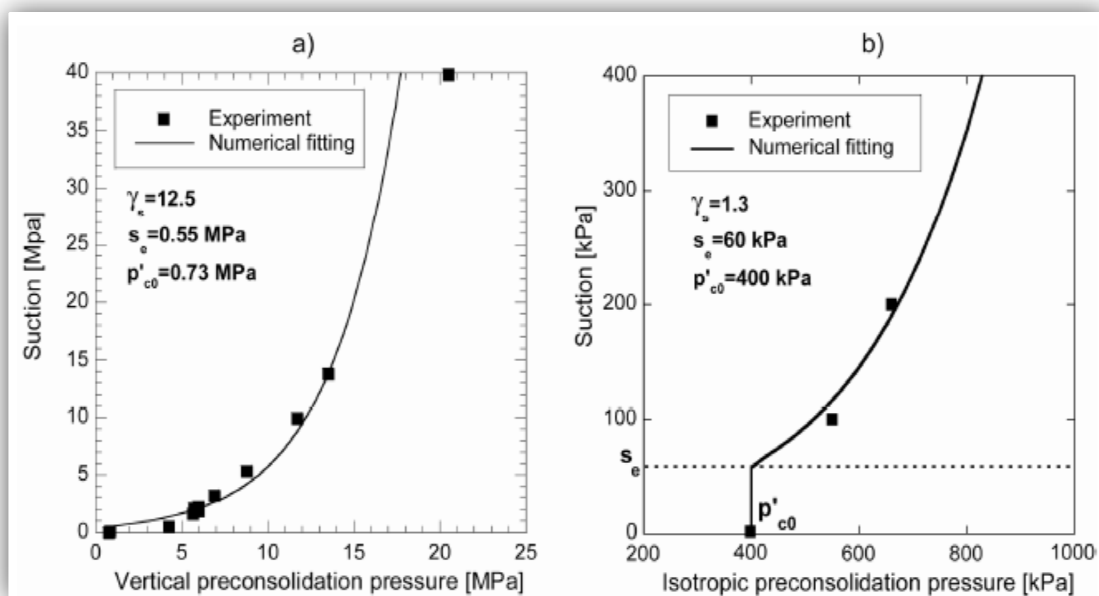


Figura 71. Confronto tra dati sperimentali e valori predetti dalla legge [5.5]. a) Test edometrico su argilla naturale BoomClay [15]; b) Test di compressione isotropa su limo Sion [6]. (Ridisegnato da [5]).

5.1.1.2 *Effetti della suzione sul comportamento della compressione in condizioni non isotermitiche*

In aggiunta al comportamento osservato dei suoli insaturi a temperatura ambiente e dei suoli saturi sotto condizioni non isotermitiche, alcuni effetti accoppiati tra la suzione e la temperatura sorgono nei suoli quando si incontrano simultaneamente condizioni insature e non isotermitiche. Queste interazioni possono essere considerate nello sviluppo di modelli costitutivi al fine di coprire il rango degli accoppiamenti termo-idro-meccanici che si verificano nei suoli a grana fine. Gli effetti accoppiati, sperimentalmente osservati su vie di compressione e bagnatura-asciugatura, verranno descritti nelle sezioni successive.

Da programmi sperimentali, studiando separatamente gli effetti della temperatura e della suzione sul comportamento alla compressione dei suoli, i risultati rilevano un decremento della pressione di preconsolidazione con la temperatura e un incremento con la suzione.

Tuttavia gli effetti combinati di temperatura e suzione sulla pressione di preconsolidazione sono privi di conferma. Sull'argilla naturale BoomClay caricata sotto condizioni edometriche, Romero [15] notò un piccolo effetto reale dovuto alla temperatura, riguardante l'effetto della suzione, sull'evoluzione della pressione di preconsolidazione (Fig.72a). I risultati confermarono il solito decremento di p'_c con la temperatura e il suo incremento con la suzione. Tang e altri [18] osservarono comportamenti simili sulla bentonite MX80 (Fig.72 b).

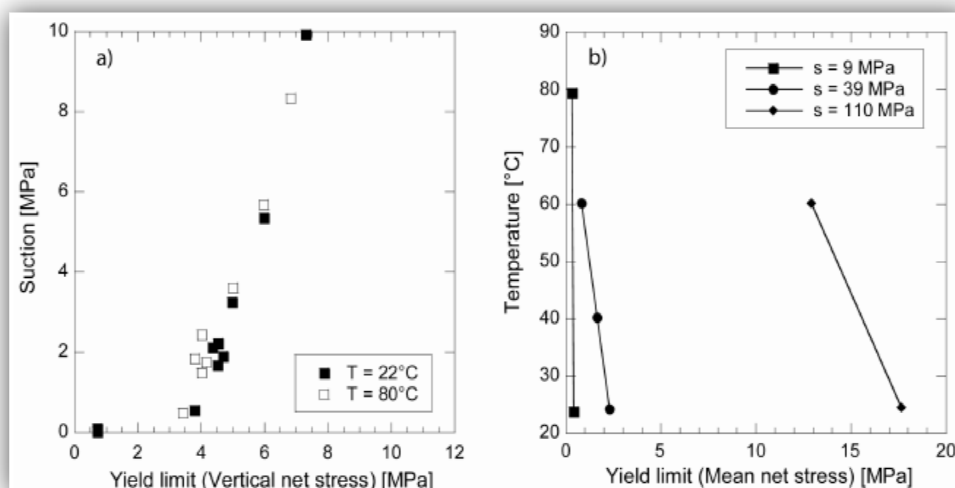


Figura 72. Effetti della temperatura e della suzione sul limite elastico. a) Test edometrico su argilla Boom [15] ; b) Test di compressione isotropica su bentonite MX80 [18] (ridisegnati da [5]).

5.1.2 Conclusioni

Per una più completa descrizione del comportamento sperimentale dei suoli parzialmente saturi, in condizioni isoterme e non isoterme, il lettore interessato può far riferimento alla tesi Phd di Francois [5] e a quella di Luison [12] alle quali parte di questo capitolo è riferita.

In particolare, nella seguito di questa tesi è presentata l'influenza della temperatura sulle risposte idro-meccaniche dei suoli insaturi. L'analisi eseguita nella tesi mostra il rilevante collegamento tra il comportamento meccanico e la ritenzione idrica. Poiché la temperatura influenza sia la relazione grado di saturazione-suzione, che la relazione tensione-deformazione; la temperatura è fondamentale nella risposta globale dei suoli insaturi.

Le deformazioni plastiche generalizzate su varie vie termo-idro-meccaniche hanno dimostrato di esser strettamente connesse alla temperatura e alla pressione capillare del suolo. Rispetto ad altri esempi, la propensione al collasso di un suolo, che si verifica in seguito alla sua umidificazione, non è solo influenzata dal livello della tensione esterna ma anche dalla temperatura. Similarmente, il dominio elastico aumenta con l'incremento della suzione e decresce con l'incremento della temperatura. Ciò ha conseguenze in termini di deformazioni volumetriche, che implicano modifiche sulla capacità di ritenzione dell'acqua del suolo insaturo. La curva di ritenzione idrica è affetta dallo stato meccanico del suolo e dalla temperatura [5-12]: per un equivalente suzione più denso è il suolo, più alto è il suo grado di saturazione. D'altronde, la temperatura tende a ridurre il grado di saturazione ad una data suzione. Tale comportamento è stimato in un modello costitutivo, come è stato proposto nella sezione 5.3.

5.2 IL MODELLO ACMEG-TS [12]

5.2.1 Meccanismo isotropo plastico

Il limite elastico, f_{iso} , del meccanismo plastico isotropo è espresso da:

$$f_{iso} = p' - p'_c \cdot r_{iso} = 0 \tag{5.6}$$

r_{iso} = grado di mobilitazione del meccanismo isotropo

p'_c = pressione di preconsolidazione (σ'_c in questo capitolo viene indicata con il medesimo termine utilizzato in [4])

L'aumento del dominio elastico isotropo con l'incremento della pressione capillare è introdotto tramite l'evoluzione della pressione di preconsolidazione, p'_c (Fig.73). Come sperimentalmente osservato, l'evoluzione della p'_c combinata con la temperatura T e la suzione s può essere espressa da una funzione logaritmica [12]

$$s \leq s_e \Rightarrow p'_c(s, T, \varepsilon_v^p) = p'_{c0} \left(1 - \gamma_T \log \left(\frac{T}{T_0} \right) \right)$$

$$s > s_e \Rightarrow p'_c(s, T, \varepsilon_v^p) = p'_{c0} \left(1 - \gamma_T \log \left(\frac{T}{T_0} \right) \right) \left(1 + \gamma_s \log \left(\frac{s}{s_e} \right) \right) \tag{5.7}$$

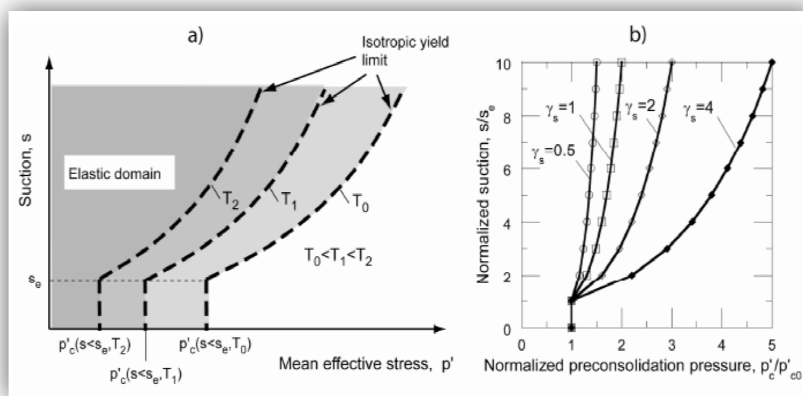


Figura 73.a) Evoluzione del limite elastico isotropo con la suzione a diverse temperature; b) Dipendenza del limite elastico isotropo dal parametro γ_s . (Ridisegnato da [5])

Inoltre, l'hardening meccanico produce un'evoluzione della pressione di preconsolidazione con la deformazione plastica volumetrica generata, perciò l'evoluzione termo-idro-meccanica della pressione di preconsolidazione è espressa come:

$$s \leq s_e \Rightarrow p'_c(s, T, \varepsilon_v^p) = p'_{c0} \cdot e^{\beta \cdot \varepsilon_v^p} \left(1 - \gamma_T \log \left(\frac{T}{T_0} \right) \right)$$

$$s > s_e \Rightarrow p'_c(s, T, \varepsilon_v^p) = p'_{c0} \cdot e^{\beta \cdot \varepsilon_v^p} \left(1 - \gamma_T \log \left(\frac{T}{T_0} \right) \right) \left(1 + \gamma_s \log \left(\frac{s}{s_e} \right) \right)$$

[5.8]

p'_{c0} = pressione di preconsolidazione in condizioni totalmente sature e a temperatura T_0

p'_c = pressione di preconsolidazione ad una data suzione s e ad una temperatura di riferimento T

s_e = valore della suzione aria di ingresso

γ_s = parametro materiale per la dipendenza della pressione di preconsolidazione su s

γ_T = parametro materiale per la dipendenza della pressione di preconsolidazione su T

β = modulo di compressibilità plastica (la pendenza della funzione lineare nel piano

$\varepsilon_v^p - \ln p'_c$)

La regola di flusso per un meccanismo isotropo, con $f_{iso} = g_{iso}$, è data dalla equazione

$$d\varepsilon_{ii}^{p,iso} = \lambda_{iso}^p \frac{\partial g_{iso}}{\partial \sigma_{ii}} = \frac{\lambda_{iso}^p}{3}$$

[5.9]

λ_{iso}^p = moltiplicatore plastico ricavato dall'equazione di consistenza di Prager [12-21]

5.2.2 Meccanismo deviatorico plastico

Il limite elastico, f_{dev} , del meccanismo deviatorico plastico è espresso da Hujeux [7]:

$$f_{dev} = q - Mp' \left(1 - b \cdot \ln \frac{d \cdot p'}{p'_c} \right) \cdot r_{dev} = 0$$

[5.10]

$$M = \frac{6 \sin \Phi'}{3 - \sin \Phi'} = \text{pendenza della linea dello stato critico (CSL) nel piano } p'-q$$

$$r_{dev} = r_{dev}^e + \frac{\varepsilon_d^p}{a + \varepsilon_d^p} = \text{grado di plastificazione del meccanismo deviatorico}$$

Φ' = angolo d'attrito allo stato critico

b = parametro materiale definente la forma del limite deviatorico

d = rapporto tra la pressione di preconsolidazione, p'_c , e la pressione critica, p'_{cr} .

Il modello ACMEG-TS assume che l'angolo di attrito possa dipendere dall'equazione

$$M = M_0 - g(T - T_0)$$

M_0 = pendenza della linea dello stato critico alla temperatura ambiente T_0

g = pendenza media della variazione dell'angolo d'attrito allo stato critico con la temperatura, ma resta inalterato dal cambio di suzione nella tensione efficace generalizzata di riferimento, come evidenziato da Nuth e Laloui [14].

Le regole dell'hardening e della dilatanza del meccanismo deviatorico sono espresse dalle seguenti equazioni [12]:

$$\frac{\partial \varepsilon_v^p}{\partial \varepsilon_d^p} = \alpha \left(M - \frac{q}{p} \right)$$

$$g_{dev} = q - \frac{\alpha}{\alpha - 1} Mp \left[1 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dp}{p_c} \right)^{\alpha-1} \right]$$

$$d\varepsilon_{ij}^{p,dev} = \lambda_{dev}^p \frac{\partial g_{dev}}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda_{dev}^p \frac{1}{Mp} \left[\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha \left(M - \frac{q}{p} \right) \frac{\delta_{ij}}{3} \right]$$

dove

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2q} (\sigma_{ij} - p) \text{ se } i = j$$

[5.11]

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{3}{q} (\sigma'_{ij}) \text{ se } i \neq j$$

$$d\varepsilon_v^{p,dev} = \lambda_{dev}^p \frac{\partial g_{dev}}{\partial p} = \lambda_{dev}^p \frac{\alpha}{Mp} \left[M - \frac{q}{p} \right]$$

$$d\varepsilon_v^p = \lambda_{dev}^p \frac{\partial g_{dev}}{\partial q} = \lambda_{dev}^p \frac{1}{Mp}$$

λ_{dev}^p = moltiplicatore plastico ricavato dall'equazione di consistenza di Prager [12-21]

5.2.3 Accoppiamento tra i due meccanismi plastici

La forma del dominio elastico segue dalle combinazioni del limite elastico deviatorico [5.9] con l'evoluzione termo-idro-meccanica della pressione di preconsolidazione [5.8]. La Fig.74 [5-12] illustra gli effetti di suzione, temperatura e deformazione volumetrica plastica generata sull'evoluzione del dominio elastico.

Si deve notare che la dipendenza della temperatura e della suzione dal limite elastico isotropo è una relazione uno-a-uno. Purchè il punto della tensione resti nel dominio elastico, un ciclo di suzione e/o di temperatura non modificano la pressione di preconsolidazione finale rispettando quella iniziale, se lo stato finale è identico a quello iniziale. Inversamente, la deformazione plastica volumetrica produce modifiche irreversibili sul limite elastico isotropo. In altri termini, la deformazione plastica volumetrica è un hardening variabile, mentre la temperatura e la pressione capillare no.

L'accoppiamento tra i due meccanismi plastici è simile a quello nel modello ACMEG-T sotto condizioni sature. Pertanto, l'inclusione della derivata del limite elastico con rispetto alla suzione è richiesta nelle condizioni di consistenza per multi-meccanismi dovuta all'evoluzione di entrambi i limiti elastici con il livello di suzione [12-22]:

$$\left\{ \begin{array}{l} dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial F}{\partial T} \cdot dT + \frac{\partial F}{\partial \pi} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial \lambda^p} \cdot \lambda^p = j : d\sigma + t \cdot dT - H \cdot \lambda^p \leq 0 \\ \lambda^p \geq 0 \\ dF \cdot \lambda^p \leq 0 \end{array} \right.$$

[5.12]

con t gradiente della temperatura della funzione F .

Campo elastico	$\lambda^p = 0$ e $dF < 0$
Campo plastico	$\lambda^p > 0$ e $dF = 0$

La condizione di consistenza dei due meccanismi di snervamento può essere incontrata simultaneamente, richiedendo la soluzione di due equazioni con due incognite.

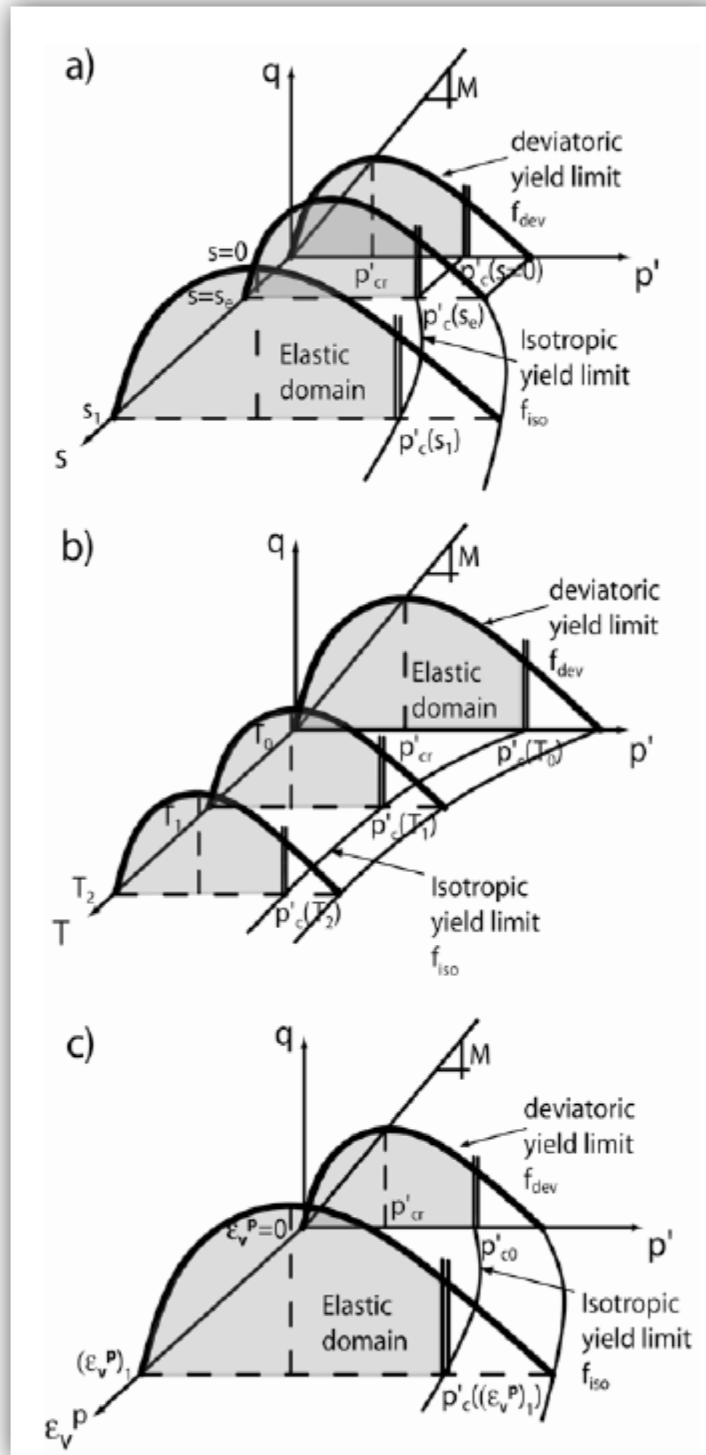


Figura 74. Effetto di a) suzione, b) temperatura e c) deformazione volumetrica plastica sulla forma dei limiti elastici meccanici accoppiati [12]. (Ridisegnato da [5]).

5.3 PARTE COSTITUTIVA DELLA RITENZIONE IDRICA

La distribuzione della dimensione dei pori dipende dalla pressione capillare, dalla temperatura e dalla deformazione volumetrica.

In questa sezione verrà riassunta la relazione tra il grado di saturazione S_w e la suzione $s(p^c)$ considerando anche l'influenza della temperatura e della deformazione volumetrica, quest'ultima solitamente trascurata, seguendo [5-12].

$$S_w = S_w(p^c, T, \varepsilon_v) \quad [5.13]$$

Generalmente tutte le relazioni che possono essere trovate in letteratura derivano da dati sperimentali (Fig.75 e Tab.2).

Per questo lavoro le relazioni seguenti sono usate e sono chiamate Brooks e Corey, Safai e Pinder (dai nomi degli autori che le hanno proposte) e ACMEG-IDRO (dal nome del modello dov'è nota la legge [5]).

Queste relazioni sono riassunte di seguito insieme alle derivate necessarie per la matrice Jacobiana dopo la linearizzazione delle equazioni che governano la discretizzazione (1.4).

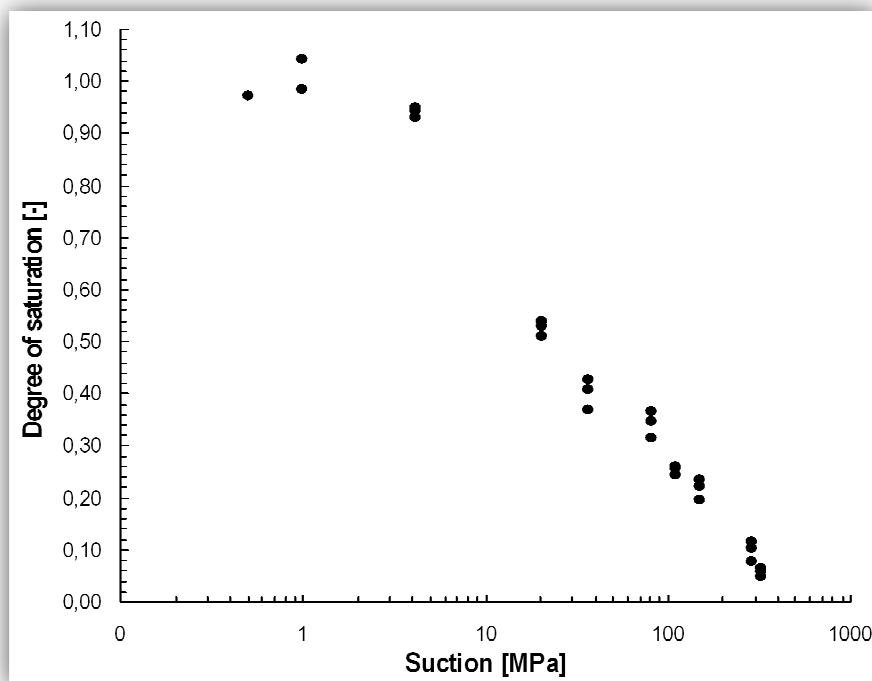


Figura 75. Dati sperimentali [12]

s [MPa]	S _w
0,50	0,972
1,00	0,983
1,00	1,041
4,12	0,951
4,12	0,931
4,12	0,944
20,41	0,510
20,41	0,539
20,41	0,531
37,13	0,369
37,13	0,407
37,13	0,428
80,89	0,365
80,89	0,315
80,89	0,348
111,08	0,256
111,08	0,242
111,08	0,260
150,00	0,235
150,00	0,221
150,00	0,196
286,86	0,078
286,86	0,115
286,86	0,103
325,79	0,056
325,79	0,064
325,79	0,049

Tabella 2. Dati sperimentali

5.3.1 ACMEG-IDRO

Se le leggi proposte da Brooks & Corey e Safai & Pinder sono simili, la relazione di ritenzione proposta per il modello ACMEG-TS [5] presenta tre caratteristiche aggiuntive:

1. S_w dipende non solo da s (suzione) ma anche da T (temperatura) e ε_v (deformazione volumetrica)
2. considera il s_e
3. vaglia il comportamento isterico durante l'asciugatura e la bagnatura

La relazione ACMEG-IDRO è la seguente:

$$S_w = 1 \quad \text{se} \quad s \leq s_e$$

$$S_w = S_w(s, T, \varepsilon_v) = 1 - \frac{1}{\beta_h} \ln\left(\frac{s}{s_e}\right) \quad \text{se} \quad s > s_e$$

[5.14]

con

$$s_e = s_e(T, \varepsilon_v) = s_{e,0} \left[1 - Q_r \log \frac{T}{T_0} - Q_e \log(1 - \varepsilon_v) \right]$$

[5.15]

s_e = valore della suzione aria d'ingresso

β_h = pendenza della curva di saturazione nel piano $\ln(s) - S_r$

$s_{e,0}$ = valore della suzione entrata per $T=T_0$ e $\varepsilon_v=0$

T_0 = temperatura di riferimento

Q_r = parametro del materiale descrivente l'evoluzione del valore della suzione entrata con rispetto della temperatura

Q_e = parametro del materiale descrivente l'evoluzione del valore della suzione entrata con rispetto della deformazione volumetrica

E' importante notare che nell'equazione **[5.15]** se la temperatura T è $T < T_0$ il valore di

s_e decresce (perché $\log \frac{T}{T_0} > 0$), mentre se ε_v cresce (qui ε_v sono positive in compressione) il valore di s_e aumenta (perché $\log(1 - \varepsilon_v) < 0$), ossia, è più facile per il

suolo entrare in parziale saturazione se la temperatura aumenta ed è più difficile se ad aumentare è la deformazione volumetrica, ε_v .

Finchè S_w dipende anche dalla temperatura, bisogna aggiungere le derivate con rispetto a questa variabile [12].

Derivate prime

$$\frac{\partial S_w}{\partial s} = -\frac{1}{s\beta_h} \quad [5.16]$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial T} = -\frac{Q_T s_{e0}}{s_e \beta_h T \ln 10} \quad [5.17]$$

Derivate seconde

$$\frac{\partial^2 S_w}{\partial s^2} = \frac{1}{s^2 \beta_h} \quad [5.18]$$

$$\frac{\partial^2 S_w}{\partial T^2} = \frac{Q_T s_{e0}}{\beta_h s_e T^2 \ln 10} - \frac{Q_T^2 s_{e0}^2}{\beta_h s_e^2 T^2 (\ln 10)^2} \quad [5.19]$$

$$\frac{\partial^2 S_w}{\partial s \partial T} = \frac{\partial^2 S_w}{\partial T \partial s} = 0 \quad [0.20]$$

I parametri materiali adattando i dati sperimentali di (Fig.76) e il grafico sono:

s_{e0} [MPa]	b_h
3.25	4.8

Tabella 3. Parametri per ACMEG-IDRO (equazione [5.14])

Per il caso esaminato, i parametri Q_T , Q_e e S_{hys} non sono stati riportati perché i dati inerenti le diverse temperature e le diverse deformazioni volumetriche non sono disponibili.

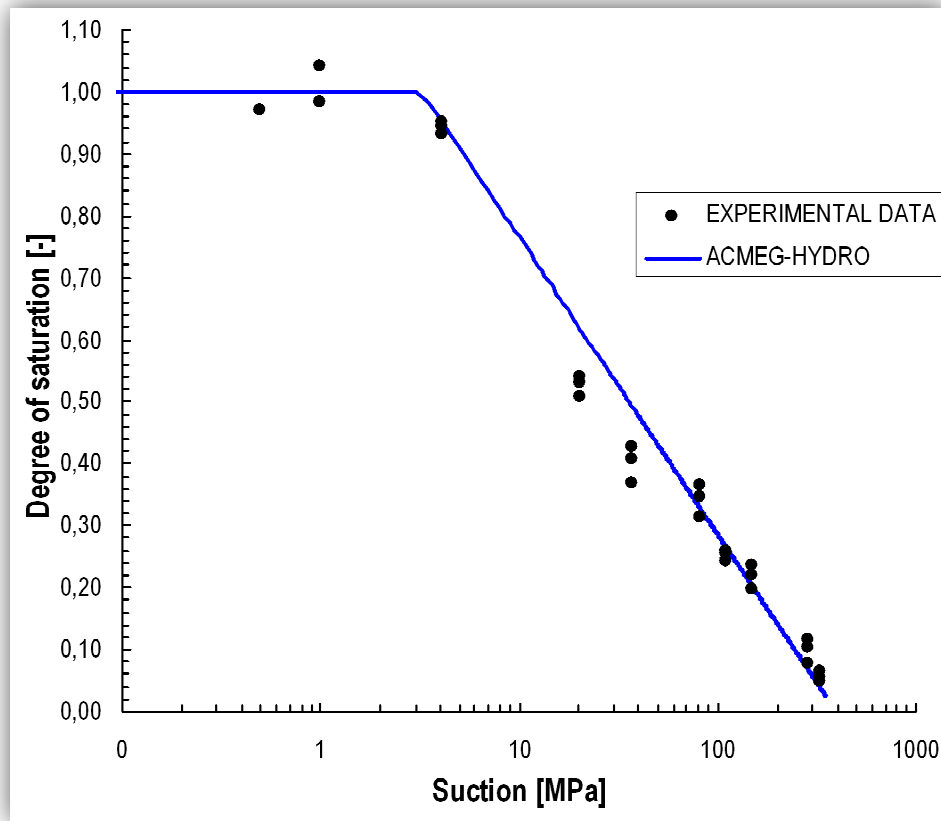


Figura 76. Grafico della legge ACMEG-IDRO

5.3.2 Confronto

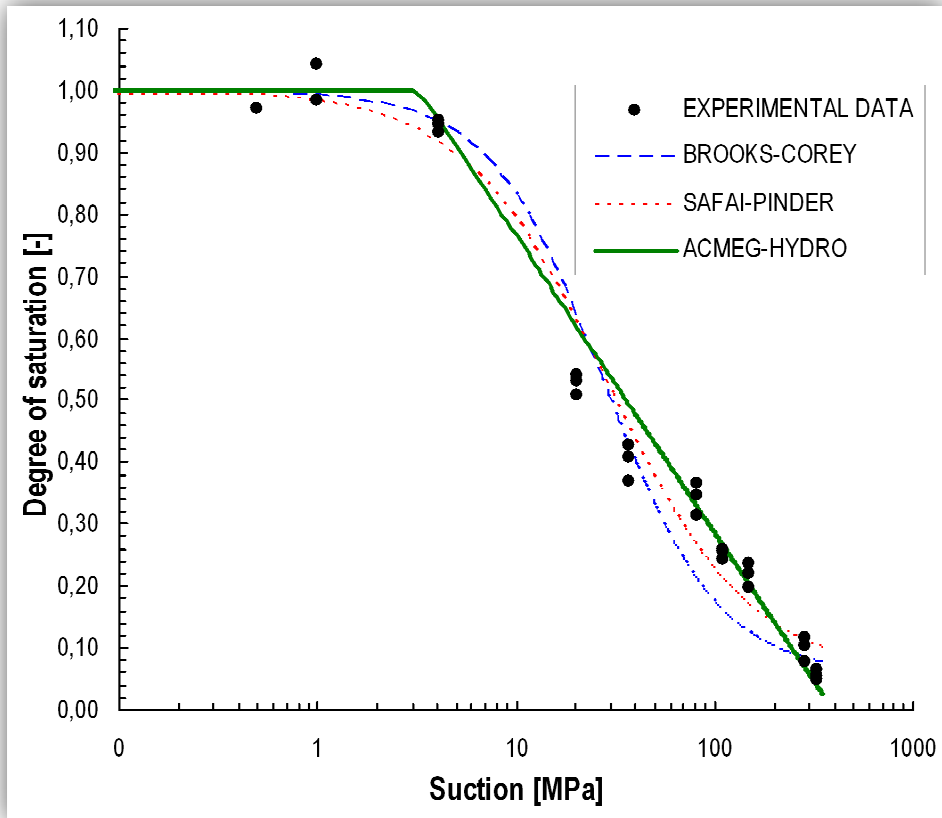


Figura 77 .Confronto tra i dati sperimentali e i valori dati dalle tre relazioni di ritenzione idrica implementate in COMES-GEO

5.4 RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Aitchison G.D., *Relationships of moisture stress and effective stress functions in unsaturated soils. Pore Pressure and Suction in Soils* London, Butterworths: 47-52. (1960)
2. Brooks R.J., and Corey A.T., *Hydraulic properties of porous media*. Hydrology Papers 3, Colorado State University, Fort Collins (1964)
3. Borja R.I., *Cam-Clay plasticity. Part V: A mathematical framework for three-phase deformation and strain localization analyses of partially saturated porous media*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193: 5301-5338. (2004)
4. François B. and Laloui L., *ACMEG-TS: A constitutive model for unsaturated soils under non-isothermal conditions*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 32: 1955-1988. (2008)
5. François B., *Thermo-Plasticity of Fine-Grained Soils at Various Saturation States: Application to Nuclear Waste Disposal*. PhD Thesis. École Polytechnique Fédérale De Lausanne. Suisse. (2008)
6. Geiser F., *Comportement mécanique d'un limon non saturé: Etude expérimentale et modélisation constitutive*. PhD Thesis, EPFL, Lausanne, Switzerland. (1999)
7. Hujeux J.C., *Calcul numérique de problèmes de consolidation élastoplastique*. PhD Thesis, Ecole Centrale, Paris. (1979)
8. Khalili N. and Khabbaz M.H., *A unique relationship for the determination of the shear strength of unsaturated soils*. Géotechnique, 48(5): 681-687. (1998)
9. Laloui L. and Cekerevac C., *Thermo-plasticity of clays: An isotropic yield mechanism*. Computers and Geotechnics, 30(8): 649-660. (2003)
10. Likos W.J. and Lu N., *Hysteresis of capillary stress in unsaturated granular soil*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 130(6): 646-655. (2004)
11. Lewis R.W. and Schrefler B.A., *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. J. Wiley, Chichester (1998).
12. Luison L. *Implementation and validation of advanced constitutive models for the analysis of hydro-thermo-mechanical interactions in geo-environmental engineering problems*. PhD Thesis. Università degli Studi di Padova. Italia. (2010)
13. Nuth M. and Laloui L., *New insight into the unified hydro-mechanical constitutive modeling of unsaturated soils*. 3rd Asian Conference on Unsaturated Soils, Nanjing, China: 109-125. (2007)
14. Nuth M. and Laloui L., *Effective stress concept in unsaturated soils: clarification and validation of a unified framework*. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics; 32(7): 771-801. (2008)

15. Romero E., *Characterisation and thermo-mechanical behaviour of unsaturated Boom clay: An experimental study*. PhD Thesis, UPC, Barcelona. (1999)
16. Nader M. Safai and George F. Pinder, *Simulation of saturated-unsaturated deformable porous media, Water Resources Program*. Department of Civil Engineering, Princeton University. Princeton, N. J. 08540
17. Schrefler B.A., *The finite element method in soil consolidation (with applications to surface subsidence)*. PhD Thesis. University College of Swansea, C/Ph/76/84 (1984)
18. Tang A.M., Cui Y.J and Barnel N., *Thermo-mechanical behaviour of a compacted swelling clay*. Géotechnique, 58(1). 45-54 (2008)
19. Terzaghi K., *The shearing resistance of saturated soils and the angle between the planes of shear*. 1st International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, Cambridge 1: 54-56 (1936)
20. Zerhouni M.I., *Rôle de la pression interstitielle négative dans le comportement des sols - application au calcul des routes*. PhD Thesis. Ecole Centrale Paris (1991)
21. Prager W., *Recent developments in mathematical theory of plasticità*. Journal of Applied Physics 20(3): 239-241 (1949)
22. Prager W., *Non-isothermal plastic deformation*. Koninklijk-Nederland Akademie Van Wetenschappen Te Amsterdam – Proceedings of the section of sciences – B, 61, 176-182 (1958)

CAPITOLO 6

VALIDAZIONE DELL'IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO ACMEG-TS NEL CODICE F.E. COMES- GEO

6.1 INTRODUZIONE

Lo studio delle strutture per il contenimento delle scorie radioattive consta di numerose verifiche per prevenire ogni eventualità che può verificarsi nel lungo periodo di tempo di decadimento degli elementi radioattivi. Gli eventi che possono accadere in un tempo di migliaia di anni sono molteplici:

- azioni strutturali;
- eventi eccezionali (ad esempio azioni sismiche);
- durabilità dei materiali;
- modificazioni socio-linguistiche;
- modificazioni storiche e geopolitiche;
- mutazioni urbanistiche;
- mutazioni geologiche;
- variazioni tecnologiche;

La previsione di tutte le possibili modificazioni in questi campi risulta estremamente difficile.

Limitandosi al solo aspetto geotecnico e scientifico della questione si può notare come le scorie radioattive rientrino in tre livelli distinti (per le attuali conoscenze classico-scientifiche) della fisica: livello termo-meccanico; livello chimico; livello nucleare. Il recente terremoto-maremoto avvenuto in Giappone mostra come questi tre livelli della fisica non siano da considerarsi come indipendenti, ma capaci di interagire peggiorando i

possibili eventi eccezionali catastrofici. Infatti la reazione di fissione fra materiale radioattivo, con forte produzione di calore, se non viene bilanciata con un adeguato sistema di raffreddamento (in genere un semplice bilancio termico ad acqua) porta all'aumento della temperatura fin'anche al punto di fusione dello stesso elemento radioattivo. La produzione di alte quantità di calore può modificare l'equilibrio chimico a svantaggio della sicurezza, provocando una sequenza di eventi di difficile gestione (si pensi per esempio alla dissociazione dell'idrogeno e dell'ossigeno nella molecola dell'acqua a contatto con barre fuse di uranio ad alte temperature ed il susseguente rischio di esplosione per esposizione dell'idrogeno ad una fiamma).

La trattazione della totalità di queste problematiche, non compete a questa tesi di laurea. Questo documento infatti si limita a studiare un modello agli elementi finiti capace di simulare il comportamento di un terreno adatto per il contenimento delle scorie nucleari esauste o delle scorie nucleari a debole radioattività. Nulla vieta che sviluppi futuri sia delle potenzialità hardware dei calcolatori, sia del modello stesso implementato in Comes Geo, permettano di studiare casi più complessi in cui siano coinvolte più interazioni fisiche. Il materiale preso in considerazione per l'isolamento delle scorie radioattive è la Boom Clay (argilla Boom). Tale argilla come isolante per le scorie radioattive può venire sottoposta a tre diverse classi di fenomeni fisici (THM):

- fenomeni meccanici: si prevede il costipamento o la consolidazione a seguito di carichi leggeri, cosa che permette anche di evitare problemi numerici per le tensioni positive a seguito dell'espansione termica del terreno;
- fenomeni idrici: dato un materiale ricco d'acqua si prevede l'eventualità che questo possa essere soggetto a drenaggi o variazioni del grado di saturazione ($S_w = S_w(p_c; T; \varepsilon_v^p)$);
- fenomeni termici: nel mezzo poroso multifase, a seguito di una blanda produzione di calore da parte delle scorie radioattive, si devono cercare di ricreare sia fenomeni legati al passaggio di fase dell'acqua, sia fenomeni idro-meccanici dell'argilla (espansione termica dei componenti e/o contrazioni volumetriche dovute ad essiccazione del materiale)

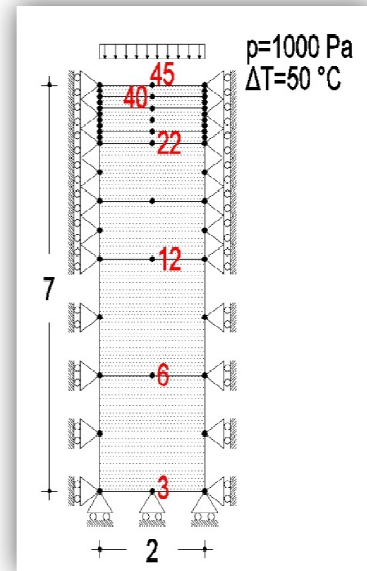
Per eseguire una tale simulazione deve essere messo a punto un programma di calcolo basato su un modello capace di stimare il comportamento del terreno in un ambito termo-idro-meccanico. Ciò viene fatto confrontando i risultati ottenuti in laboratorio su una semplice colonnina di terreno, con i risultati ottenuti da un software agli elementi finiti.

Un programma di calcolo adatto per considerare mezzi porosi parzialmente saturi, ovvero adatto per simulazioni di terreno è Comes Geo. Tale software permette trattazioni meccaniche con mezzi porosi multifase in qualsiasi grado di saturazione. Altra caratteristica del software è la possibilità di prevedere cambiamenti di fase per il liquido (generalmente acqua) imbibito nei pori del mezzo, con formazione di miscele omogenee e chimicamente inattive di gas e vapore. Al programma è stata associata la legge costitutiva ACMEG-TS, sviluppata da François Bertrand e Laloui Lyesse [1]. Tale legge permette una trattazione fortemente non lineare dei problemi termo-idro-meccanici come spiegato nel capitolo 4 e 5. La validazione del modello ACMEG-TS è stata eseguita sviluppando un caso elastico di consolidazione non isoterma (THM) e confrontata con il primo studio di consolidazione termo-idro-meccanica eseguito da un laboratorio di ricerca e calcolo (Aboustit et al.[2]). A seguito di una corrispondenza positiva fra i due modelli è stata sviluppata una simulazione con il modello ACMEG-TS in un ambito termo-idro-meccanico su un dominio parzialmente saturo con varie condizioni al contorno sia con una legge elastica che elastoplastica. Il materiale preso in considerazione è quello generalmente indicato per isolare le scorie radioattive. Fra le varie simulazioni eseguite verrà presentato e commentato una famiglia di simulazioni al variare di alcuni possibili parametri di calcolo.

6.2 VALIDAZIONE DI ACMEG-TS CON ABOUSTIT

6.2.1 Dati in ingresso (pre-processamento)

La simulazione Aboustit et al. [2] fu eseguita per un caso termo-elastico in condizioni sature con i parametri del materiale eguali a quelli della sabbia. Per la validazione del modello ACMEG-TS è stata implementata il medesimo materiale, la sabbia di Aboustit [2], al fine di verificare eventuali differenze di simulazione fra il caso derivante dalla letteratura ed il modello corrente. La geometria della simulazione si basa su una colonna di terreno di altezza 7 metri per 2 metri di larghezza, soggetta sulla superficie esterna superiore ad un carico di $1.0KPa$ (figura a lato o Fig.78). La colonna si trova ad una temperatura di $293.15K$ e viene



sottoposta ad un aumento della temperatura in sommità di $50K$ (Fig.78). Il modello geometrico visibile nella figura a lato è stato ricreato ed è visibile nella figura 78. I nodi (3; 6; 12; 22; 40; 45) nel modello utilizzato sono (319; 339; 363; 387; 396; 399). Nell'immagine viene indicato un generico carico distribuito (value boundary condition) nella sommità della colonnina, riferito egualmente alle varie condizioni al contorno prima descritte (termica o meccanica). Il materiale è inizialmente saturo d'acqua. La parte superiore della colonnina di terreno viene in genere drenata ma nella simulazione qui eseguita è stata applicata una suzione nulla ($p_c = 0Pa$, nessun dreno).

Viene imposta la pressione atmosferica sulla superficie della colonnina di terreno ($p_g = 101325Pa$). Gli spostamenti delle pareti laterali e del fondo della colonnina sono impediti ($u = 0m \wedge v = 0m$), vedi figura 78. La colonnina di terreno è discretizzata con elementi isoparametrici ad 8 nodi (serendipity), sui quali viene applicata un'integrazione di Gauss (3 nodi x 3 nodi). La prima esecuzione dinamica transitoria della simulazione (Run 1) viene eseguita per 10 step ed un passo temporale di 0.01giorni (864 secondi). A

seguire vengono eseguiti vari altri cicli temporali del programma (*Run2, 3,...*), ad ognuno dei quali il tempo viene moltiplicato per un fattore 10 rispetto il precedente.

Ognuno di questi cicli d'integrazione temporale fornisce i valori della soluzione in 10 diversi *time-steps*. Le esecuzioni del programma vengono interrotte quando viene raggiunto il tempo totale previsto per le analisi [3-4-5]. Si assume un comportamento lineare elastico per lo scheletro solido ed un coefficiente costante di espansione termica cubica (caso termo-elastico lineare). Le forze di gravità vengono trascurate (la pressione capillare eguaglia l'eccesso di pressione relativa dell'acqua). Vengono assunte condizioni di deformazione piana.

Boom-clay	
Descrizione	Valore
Porosità	$n = 0.20$
Permeabilità intrinseca	$K_0 = 5.0 \cdot 10^{-14} m^2 (5.0 \cdot 10^{-7} m/s)$
Densità dello scheletro solido	$\rho_s = 2000 Kg/m^3$
Modulo di compressibilità	$K_{ref} = 10.0 MPa$
Modulo di taglio	$G_{ref} = 2.14 MPa$
Pressione media di riferimento	$p'_{ref} = -1.0 MPa$
Pressione critica iniziale	$p'_c = -1.0 \cdot 10^{10} Pa$
Angolo d'attrito	$\phi = -26.54^\circ$
Esponente di elasticità non lineare	$n^e = 0.0$
Conduttività termica del solido	$\lambda_{eff} = 0.84 W/mK$
Conduttività di calore della matrice solida	$\lambda_{eff,s} = 1.0 \cdot 10^{-16} W/mK$
Calore specifico del solido	$C_p = 16760.0 J/KgK$
Coefficiente cubico di espansione termica	$\beta_s = 0.9 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K}$
Coefficiente di dilatazione termica	$TDILAS = 9.0 \cdot 10^{-7}$
Temperatura di riferimento	$T = 293.15 K$
Punto di saturazione irriducibile	$S_{ir} = 0.05$
Punto di saturazione critica	$S_{cr} = 0.909$
Suction entry value	$p_b = 30000 Pa$
Densità dell'acqua	$\rho_w = 1000 Kg/m^3$
Thetat	0.0
Thetae	0.0
Sys	0.0

Omega	0.0
Parametro di hardening volumetrico	$\beta = 0$
Parametro dell'espressione del potenziale plastico	$\alpha = 1.0$
<i>a</i>	$a = 0.0004$
<i>b</i>	$b = 1$
<i>c</i>	$c = 0$
<i>d</i>	$d = 2$
Parametro di hardening per il meccanismo deviatorico	$r_d^{ela} = 1.0$
Parametro di hardening per il meccanismo isotropo	$r_{iso}^e = 1.0$
Esponente termico non-lineare	$XNTEM = 0.0$
Definisce l'evoluzione lineare dell'angolo di attrito con la temperatura	$G = 0.0$
Definisce l'evoluzione logaritmica della pressione di preconsolidazione con la temperatura	$\gamma_T = 0.0$

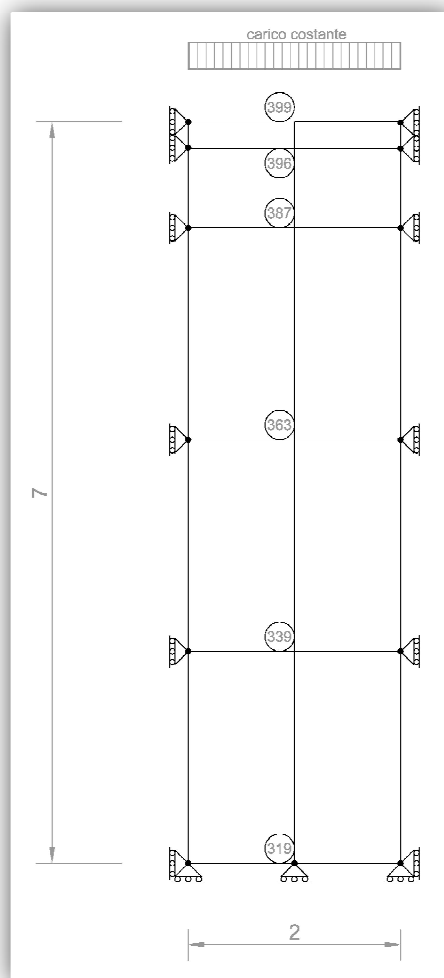


Figura 78. Geometria di riferimento per l'individuazione dei nodi trattati ed indicazione delle condizioni al contorno

6.2.2 Risultati (post-processamento)

I risultati dell'esecuzione del modello Aboustit et Al. [1] con l'utilizzo del materiale *Sand* (adottato in letteratura) sono visibili nelle figure seguenti (Fig.79-80-81). Tali risultati vengono confrontati con quanto ottenuto con il modello chiamato "ACMEG-TS" sempre per la Boom-Clay (Fig.79-80-81). L'evoluzione nel tempo dell'eccesso di pressione dell'acqua (Fig.79), della temperatura (Fig.80) e degli spostamenti verticali (Fig.81) per vari nodi della mesh (Fig.80) a diverse quote della colonnina di terreno, dimostra la concidenza delle due soluzioni. Inoltre si può osservare che la fine della consolidazione

idraulica (eccesso di pressione dell'acqua nullo) avviene dopo 2000 giorni dall'inizio della simulazione dinamica (Fig.79). Nel medesimo periodo si ha il massimo abbassamento dovuto alla consolidazione per ogni nodo (Fig.81), con un valore di $-4.6 \cdot 10^{-4} m$ per il nodo 399, localizzato sulla sommità della colonnina di terreno. Il ciclo di riscaldamento della temperatura agisce nella colonnina fino a 50.000 giorni (Fig.80), riscaldando sempre più in profondità il terreno. Questo produce un rigonfiamento dello scheletro solido dovuto all'aumento di temperatura ben visibile negli spostamenti verticali, i quali dopo un massimo di consolidazione, diminuiscono per effetto della dilatazione termica del terreno (la variazione di spostamento verticale rispetto al massimo è minore quanto più il nodo è in profondità, distante dalla sorgente di calore). Ciò provoca anche un piccolo aumento della pressione dell'acqua in segno negativo (Fig.79) al di sopra dei 50.000 giorni, riassorbito quando la consolidazione termica finisce.

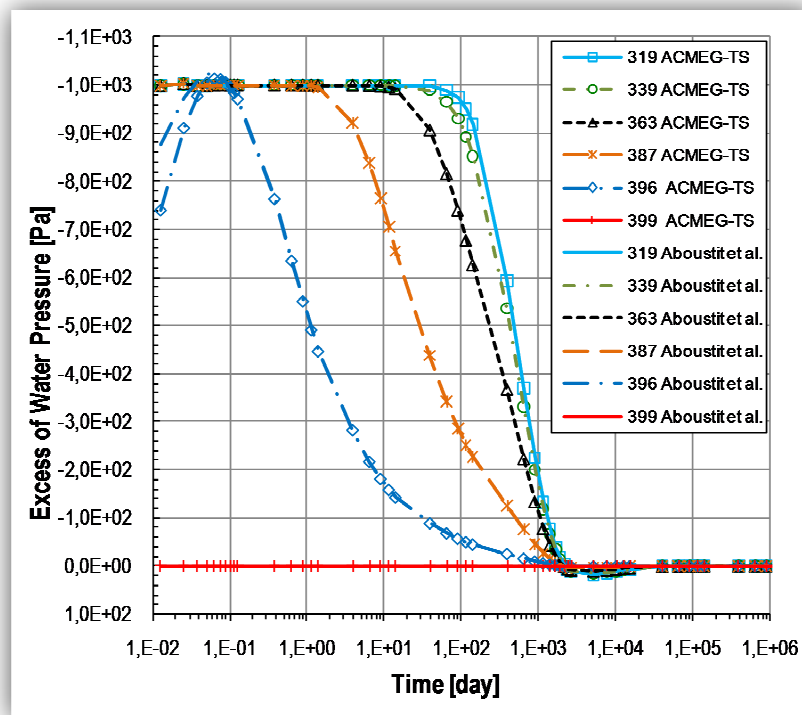


Figura 79. Eccesso di pressione dell'acqua [Pa] rispetto al tempo [giorni] su nodi differenti per analisi lineari

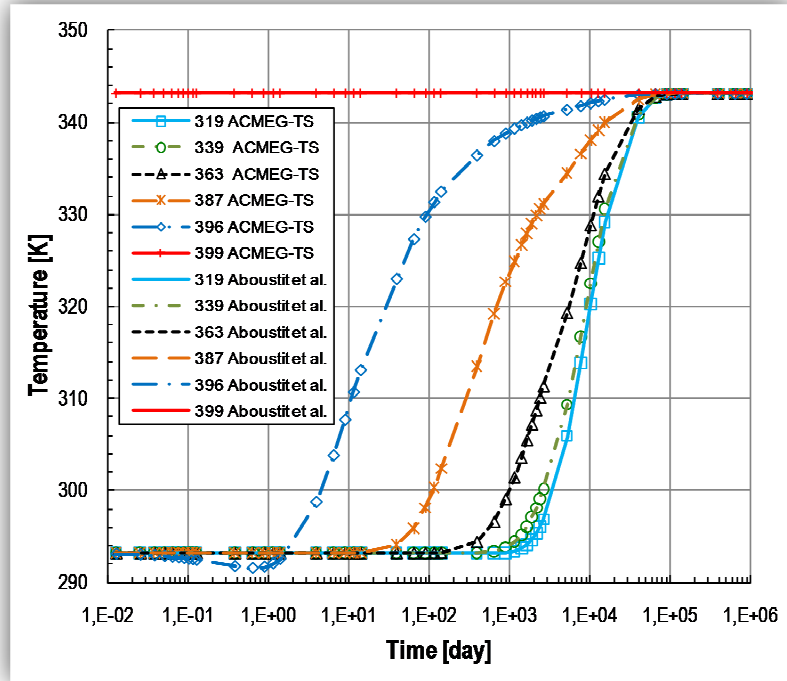


Figura 80. Temperatura [K] rispetto il tempo [giorni] su differenti nodi per un'analisi lineare.

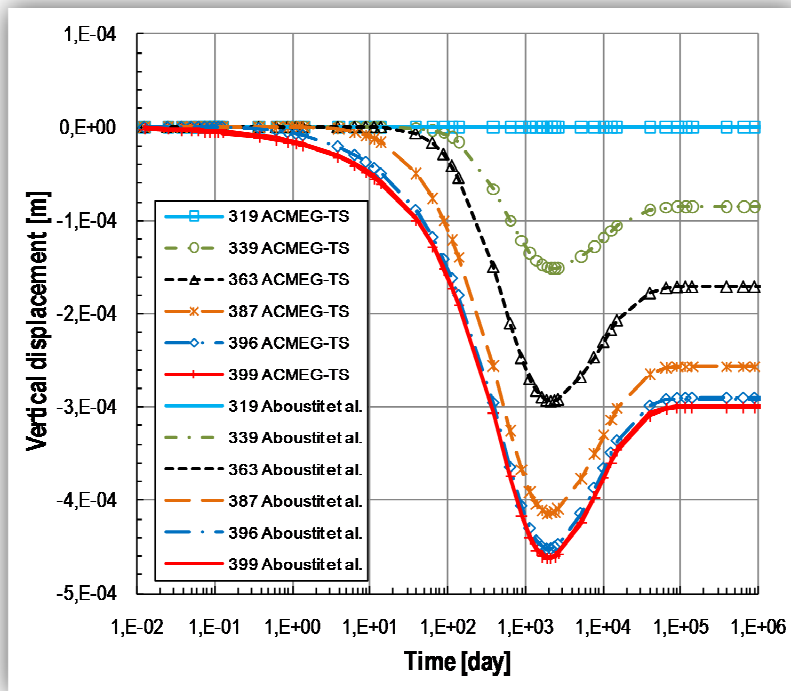


Figura 81. Spostamento verticale [m] rispetto al tempo [giorni] su nodi differenti per un'analisi elastica lineare.

6.3 VALIDAZIONE ELASTO-PLASTICA CON ACMEG-TS E BOOM-CLAY

6.3.1 Dati in ingresso (pre-processamento)

La stessa geometria descritta in cap.6.2 “*validazione di ACMEG-TS con Aboustit*” viene ora utilizzata per studiare nel dettaglio il comportamento accoppiato termo-idromeccanico del terreno sottoposto a carichi termici, a carichi meccanici od a carichi termo-meccanici in condizioni elastiche ed elastoplastiche. Il materiale preso in considerazione questa volta è sempre la Boom-clay, applicata alla geometria ed alle condizioni al contorno prima viste per la sabbia di Aboustit et Al [1]. La colonnina di terreno viene sottoposta ad un carico esterno di 10.0KPa ed a un salto di temperatura di 65K . La temperatura iniziale del modello è pari a 303.15K (Fig.78). Il carico meccanico è stato portato ad un valore maggiore per contrastare la dilatazione dello scheletro solido, dovuta alla temperatura (da 1.0KPa a 10.0KPa). La temperatura di base e l’incremento della stessa viene scelto in modo conforme alle condizioni termiche normalmente presenti in un deposito di scorie radioattive. Sono stati eseguiti quattro casi distinti al variare della suzione (pressione capillare) sulla superficie della colonnina di terreno: $s = 0\text{Pa}$; $s = 1\text{Pa}$; $s = 5\text{Pa}$; $s = 20\text{Pa}$. Di questi quattro casi di suzione sulla sommità della colonnina, verranno discusse in seguito le simulazioni che fanno riferimento a $s = 0\text{Pa}$, ovvero nessun drenaggio sulla superficie superiore della colonnina (sei possibili sottocasi), benchè siano stati ricavati altrettanti risultati e grafici anche per le altre condizioni al contorno di imposizione della suzioni. Il caso elastico con ciclo di riscaldamento termico (da $T = 30^\circ\text{C}$ a $T = 95^\circ\text{C}$) e $s = 5\text{Pa}$ è stato utilizzato in precedenza nel capitolo 3.5.5. Il caso non drenato ($s = 0\text{Pa}$), corrispondente alle simulazioni delle sole condizioni termo-meccaniche, è stato eseguito in tre casi distinti: solo condizioni al contorno termiche; solo condizioni meccaniche; simulazioni con condizione al contorno termo-meccaniche. Tale terna di sotto-casi è stata eseguita sia in ambito elastico (sigle: $s0_e_T$; $s0_e_M$; $s0_e_MT$), sia con legge elastoplastica (sigle: $s0_ep_T$; $s0_ep_M$; $s0_ep_MT$). Viene considerato il carico della gravità ($g = 9.81\text{ m/s}$), differentemente da quanto prima visto. Il caso $s = 0\text{Pa}$ considera inizialmente la colonnina di terreno come completamente satura. La parte superiore della colonnina di terreno non viene drenata, dato che è applicata una suzione nulla. Sulla superficie della colonnina viene applicata la

pressione atmosferica ($p_g = 101325 Pa$). Per semplicità lo scheletro solido è considerato lineare elastico o elasto-plastico, con costanti per i coefficienti di espansione termica cubica e per il modulo elastico.

I casi di consolidazione meccanica (s0_e_M e s0_ep_M) considerano il carico meccanico distribuito sulla sommità della colonnina per tutto il tempo della simulazione. I casi di consolidazione termica (s0_e_T e s0_ep_T) considerano il carico termico distribuito solo dopo che è avvenuta la consolidazione meccanica della colonnina di terreno. I casi di consolidazione meccanica e termica (s0_e_MT e s0_ep_MT) considerano il carico meccanico e termico distribuiti, applicati nel medesimo tempo sulla sommità della colonnina di terreno. I casi con suzione non nulla vedono l'applicazione della variabile sin dal primo ciclo temporale. Per la simulazione numerica la colonnina è stata discretizzata con 244 elementi finiti isoparametrici ad 8 nodi (serendpity). L'integrazione numerica viene fatta con il metodo di Gauss sfruttando 3 nodi x 3 nodi per ascisse ed ordinate. Un passo temporale di $8.64 \cdot 10^5 s$ è stato applicato alla colonnina, fino al raggiungimento della consolidazione meccanica. In seguito questo valore è stato moltiplicato per 10 ad ogni esecuzione successiva ed è stato ripetuto finché si è arrivati al tempo complessivo dell'analisi.

L'argilla Boom-clay dovrebbe differenziarsi come comportamento dalla sabbia del caso Aboustit et al. [1] poiché la grande rigidità dello scheletro solido riduce il trasferimento del carico meccanico alla pressione dell'acqua (riduzione dell'eccesso di pressione dell'acqua). Ciò anticipa la consolidazione idraulica. Al contrario, la bassa permeabilità intrinseca del materiale, tipica delle argille, rallenta il decorso della consolidazione idraulica. Senza una simulazione od una sperimentazione non è possibile stimare quale dei due prevalga. Inoltre l'argilla ha una conduttività termica del solido superiore rispetto alla sabbia utilizzata in Aboustit et Al. [1], cosa che anticipa la consolidazione termica e diffonde in tempi minori un aumento di temperatura nei nodi più profondi della colonnina di terreno. Una maggiore diffusione del calore ed il raggiungimento di valori di temperatura superiori a parità di quota dovrebbe comportare maggiori rigonfiamenti per dilatazione termica.

Le caratteristiche del materiale Boom-Clay sono state riassunte nella tabella seguente.

Boom-clay		
Descrizione	Coefficienti M-T-MT lineare	Coefficienti M-T-MT non lineare
Porosità	$n = 0.39$	$n = 0.39$
Permeabilità intrinseca	$K_0 = 2.0 \cdot 10^{-19} m^2 (5.0 \cdot 10^{-12} m/s)$	$K_0 = 2.0 \cdot 10^{-19} m^2 (5.0 \cdot 10^{-12} m/s)$
Densità dello scheletro solido	$\rho_s = 2000 Kg/m^3$	$\rho_s = 2670 Kg/m^3$
Modulo di compressibilità	$K_{ref} = 130.0 MPa$	$K_{ref} = 130.0 MPa$
Modulo di taglio	$G_{ref} = 130.0 MPa$	$G_{ref} = 130.0 MPa$
Pressione media di riferimento	$p'_{ref} = -1.0 MPa$	$p'_{ref} = -1.0 MPa$
Pressione critica iniziale	$p'_c = -6.0 \cdot 10^6 Pa$	$p'_c = -6.0 \cdot 10^6 Pa$
Angolo d'attrito	$\phi = 0.0^\circ$	$\phi = -16.0^\circ$
Esponente di elasticità non lineare	$n^e = 1.0$	$n^e = 1.0$
Conduttività termica del solido	$\lambda_{eff} = 0.84 W/mK$	$\lambda_{eff} = 2.42 W/mK$
Conduttività di calore della matrice solida	$\lambda_{eff,s} = 1.0 \cdot 10^{-16} W/mK$	$\lambda_{eff,s} = 1.0 \cdot 10^{-16} W/mK$
Calore specifico del solido	$C_p = 732.0 J/KgK$	$C_p = 16760.0 J/KgK$
Coefficiente cubico di espansione termica	$\beta_s = 1.3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$	$\beta_s = 1.3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$
Temperatura di riferimento	$T = 303.15 K$	$T = 303.15 K$
Punto di saturazione irriducibile	$S_{ir} = 0.05$	$S_{ir} = 0.05$
Punto di saturazione critica	$S_{cr} = 0.909$	$S_{cr} = 0.909$
Suction entry value	$p_b = 30000 Pa$	$p_b = 30000 Pa$
Densità dell'acqua	$\rho_w = 1000 Kg/m^3$	$\rho_w = 1000 Kg/m^3$
Thetat	0.0	0.0
Thetae	0.0	0.0
Sys	0.0	0.0
Omega	0.0	0.0
Parametro di	$\beta = 0.0$	$\beta = -18$

hardening volumetrico		
Parametro dell'espressione del potenziale plastico	$\alpha = 0.0$	$\alpha = 1.0$
a	$a = 0.0$	$a = 0.007$
b	$b = 0.0$	$b = 0.6$
c	$c = 0$	$c = 0.012$
d	$d = 0.0$	$d = 1.3$
Parametro di hardening per il meccanismo deviatorico	$r_d^{ela} = 0.0$	$r_d^{ela} = 0.3$
Parametro di hardening per il meccanismo isotropo	$r_{iso}^e = 0.0$	$r_{iso}^e = 0.001$
Esponente termico non-lineare	$XNTEM = 0.0$	$XNTEM = 1.0$

6.3.2 *Risultati (post-processamento)*

Caso elastico lineare con Boom-clay

I risultati dell'esecuzione del modello ACMEG-TS nelle condizioni di simulazione del caso Aboustit et al. [1] ma con il materiale Boom-clay sono visibili nelle figure seguenti (Fig.82-83-84-85). Confrontando i risultati ottenuti nel paragrafo precedente si possono osservare le considerazioni prima sviluppate riguardo al comportamento atteso del modello con l'utilizzo della Boom-clay. L'evoluzione nel tempo dell'eccesso di pressione dell'acqua (Fig.84), della temperatura (Fig.82) e degli spostamenti verticali (Fig.83) per vari nodi della mesh (Fig.78) a diverse quote della colonnina di terreno, dimostra la somiglianza fra gli andamenti delle due soluzioni con diversi materiali. Si può osservare che la fine della consolidazione termica arriva prima di quella idraulica (eccesso di pressione dell'acqua nullo). La prima avviene in 4000 giorni (Fig.82), mentre la consolidazione idraulica si verifica in 60.000 giorni dall'inizio della simulazione dinamica (Fig.84). Precedentemente, utilizzando il materiale sabbia si era ottenuta una consolidazione idraulica in circa 2000 giorni ed una termica in 50.000 giorni. Gli spostamenti verticali sviluppati sono piccoli rispetto al caso precedentemente presentato. In particolare, quelli per il carico meccanico $(-2.3 \cdot 10^{-4} m)$ risultano inferiori $(-4.6 \cdot 10^{-4} m)$ rispetto a quelli calcolati per con la sabbia di Aboustit et al.[1]. Ne consegue che in questa simulazione il carico termico prevale su quello meccanico, ed il conseguente rigonfiamento dello scheletro solido indotto influisce in percentuale assai maggiore sullo spostamento finale dei nodi della colonnina di terreno in funzione della quota degli stessi (Fig.83). Al rigonfiamento corrisponde un eccesso negativo di pressione dell'acqua (Fig.84). Osservando la pendenza delle curve della figura 84, quando il contributo degli spostamenti verticali dovuti alla consolidazione idraulica prevale sugli effetti di rigonfiamento dovuti alla dilatazione termica, la percentuale di spostamento verticale decresce e l'eccesso di pressione dell'acqua si dissipa.

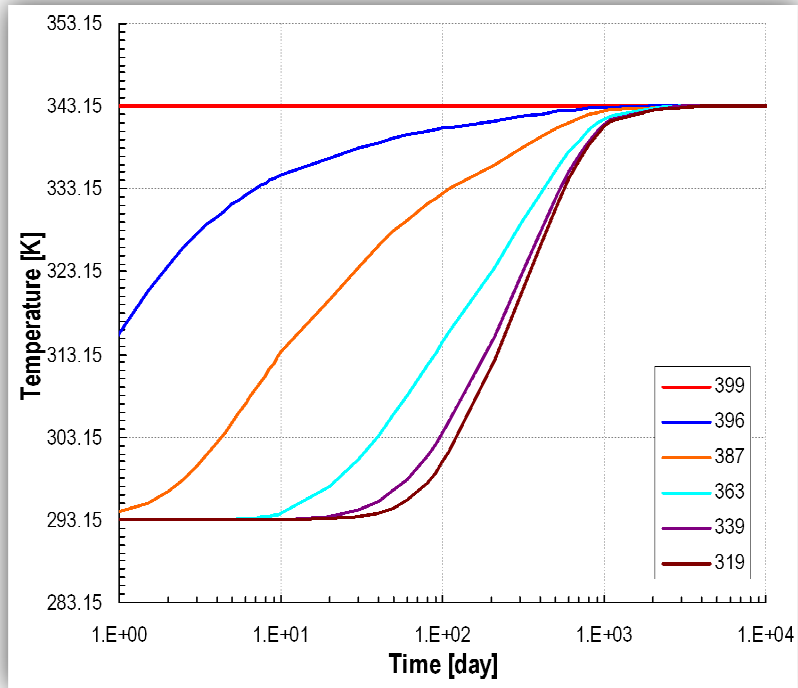


Figura 82. Temperatura [K] rispetto al tempo [giorni] su nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay e accelerazione di gravità nulla)

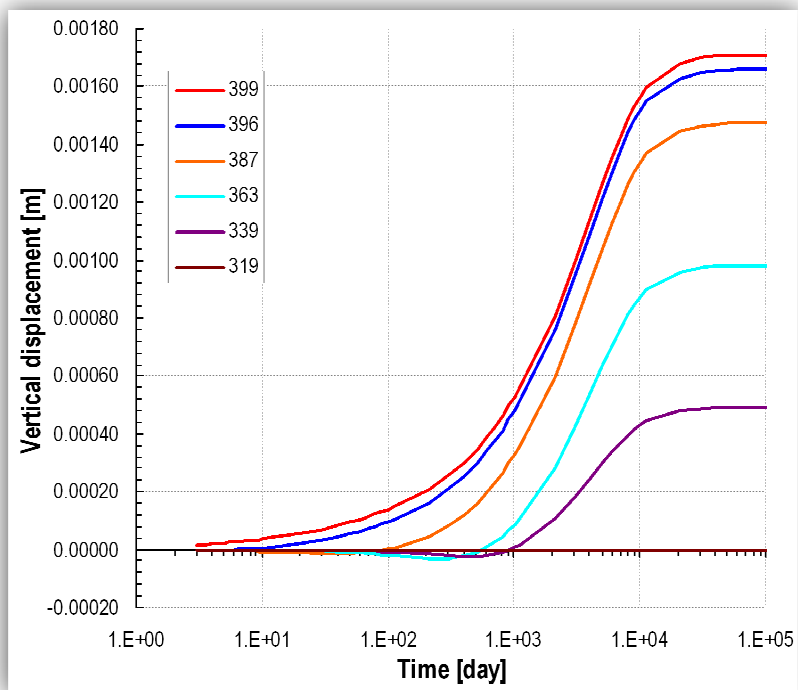


Figura 83. Spostamento verticale [m] rispetto al tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay e accelerazione di gravità nulla)

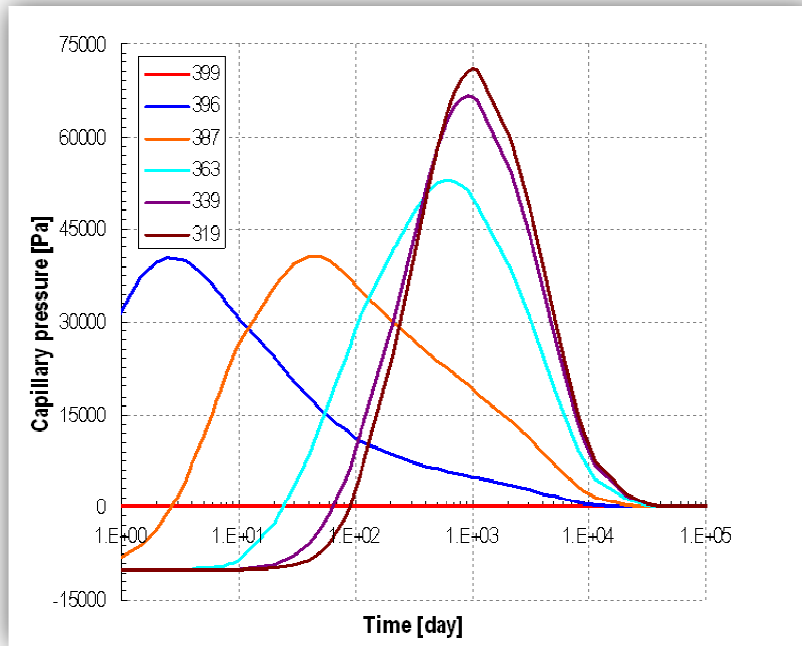


Figura 84. Eccesso di pressione dell'acqua [Pa] rispetto al tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay e accelerazione di gravità nulla)

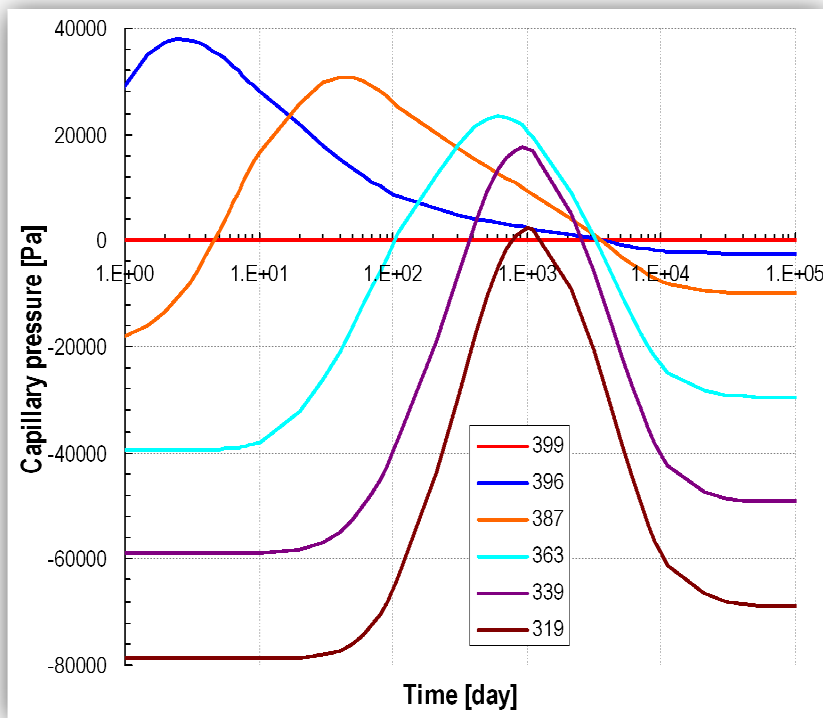


Figura 85. Pressione dell'acqua [Pa] rispetto al tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay, con l'accelerazione di gravità)

6.4 CASI ELASTICI (E), SENZA DRENAGGIO, MECCANICI (M), TERMICI (T), O MISTI (MT)

6.4.1 Risultati (post-processamento)

Il contributo del carico meccanico, caso $S0_e_M$ è mostrato nella figura 86 e nella figura 87, dove si può vedere il risultato per l'eccesso di pressione dell'acqua e lo spostamento verticale per il caso senza espansione dovuta al carico termico. In questo caso possono essere osservati il comportamento ben noto per la dissipazione dell'eccesso di pressione dell'acqua e gli spostamenti di consolidazione verticale. Questo caso conferma i precedenti risultati nei quali la consolidazione idraulica avveniva 60.000 giorni dopo l'inizio della simulazione dinamica.

Il massimo spostamento verticale di $-2.3 \cdot 10^{-4} m$.

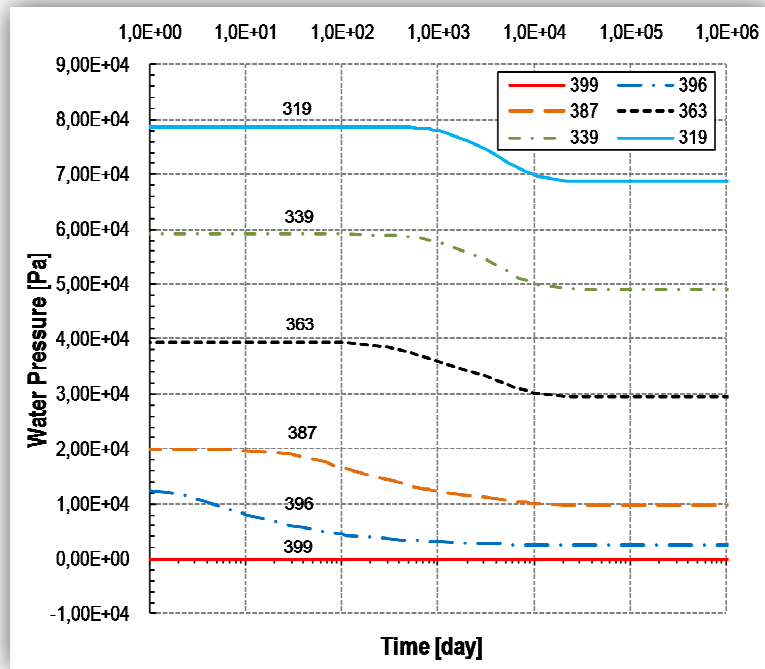


Figura 86. Pressione dell'acqua relativa [Pa] rispetto al tempo [giorni] su nodi diversi per l'analisi lineare elastica (Boom-clay, carico meccanico)

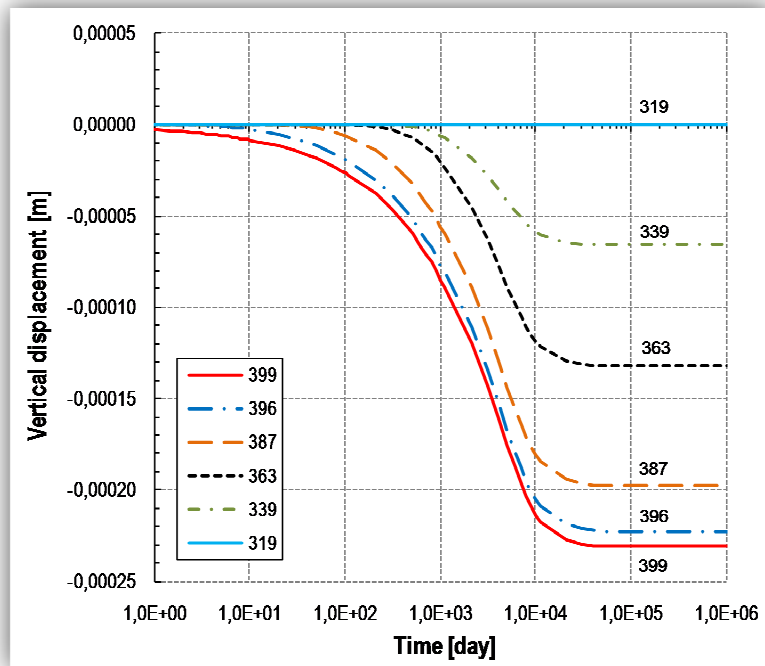


Figura 87. Spostamento verticale [m] rispetto al tempo [giorni] su nodi diversi per l'analisi lineare elastica (Boom-clay, carico meccanico)

Il comportamento termo-idro-meccanico della colonna con il carico termico, caso $S0_e_T$ è mostrato nella figure seguenti (Fig.88-89-90-91-92), nelle quali si può osservare che la temperatura nella colonna raggiunge lo stato costante a 3000 giorni (Fig.90) mentre l'eccesso di pressione dell'acqua finisce di dissipare in seguito a 40.000 giorni, quando la pressione relativa dell'acqua (in altre parole la pressione capillare negativa, Fig.88) e lo spostamento verticale (Fig.89) sono costanti nel tempo. Inoltre nella figura 89 si può osservare il comportamento di rigonfiamento della colonnina di terreno dovuto al carico termico, il quale aumenta molto rapidamente fino al raggiungimento di una temperatura uniforme nella colonnina. Lo spostamento verticale massimo è di $2.5 \cdot 10^{-3} m$ (Fig.89), il quale è maggiore per un ordine di grandezza rispetto allo spostamento ottenuto per il carico meccanico (oltre che opposto in segno). Uno sguardo più attento a questi grafici rivela che, con l'aumento della temperatura nella colonna (Fig.90) la pressione capillare prima aumenta (Fig.88) a causa di una evaporazione dell'acqua veramente piccola, come visibile nel grafico dell'umidità relativa (Fig.91), e dopo, quando l'aumento di temperatura diventa piccolo, la pressione capillare scende a causa della condensazione. Il materiale rimane completamente saturo, perché la pressione capillare non supera il valore di suzione per cui si ha ingresso d'aria nel mezzo poroso (*suction entry value*, $s_{e,0} = 3 \cdot 10^6 Pa$). Questo comportamento può essere spiegato pensando che la propagazione del calore è maggiore rispetto alla velocità del fluido dovuta ai flussi d'acqua; quindi, la dilatazione termica prima produce una perdita nella pressione dell'acqua fino ai valori negativi a causa di una piccola evaporazione, poi entra in gioco la condensazione a riequilibrare il mezzo poroso con i contorni eventualmente drenati sulla superficie superiore. La figura 92 mostra una compattazione dovuta al restringimento, quando la pressione capillare a seguito dell'aumento dovuto al rigonfiamento della dilatazione termica torna a decrescere.

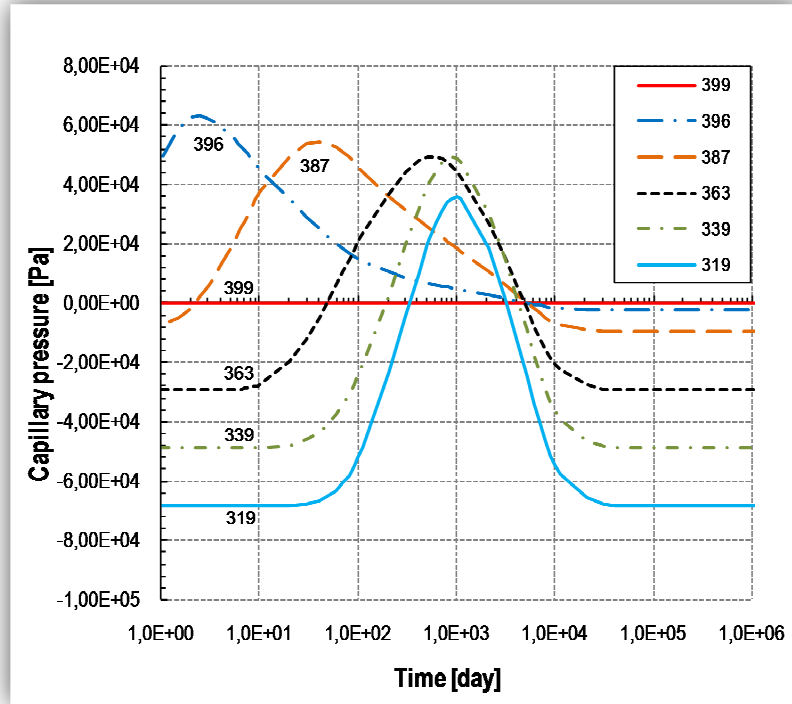


Figura 88. Pressione capillare [Pa] rispetto al tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay, carico termico)

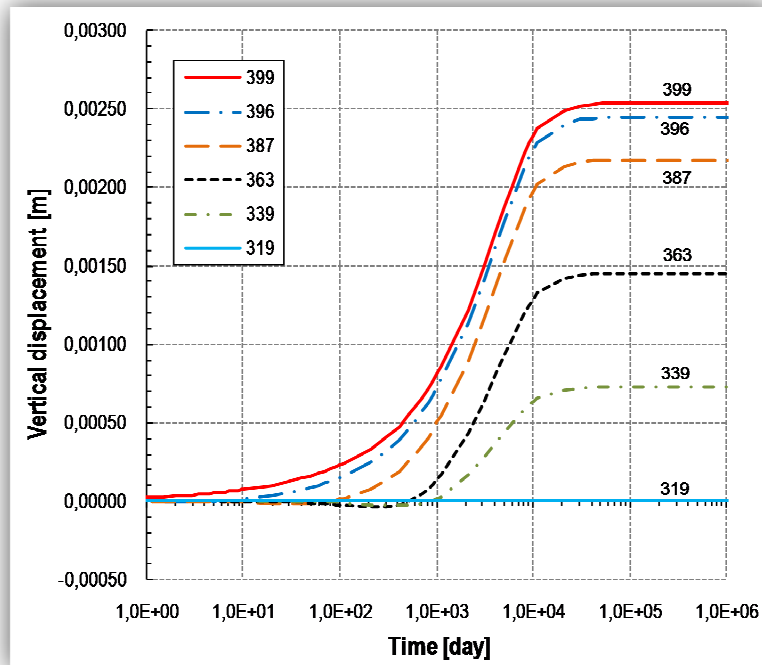


Figura 89. Spostamento verticale [m] rispetto al tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay, carico termico)

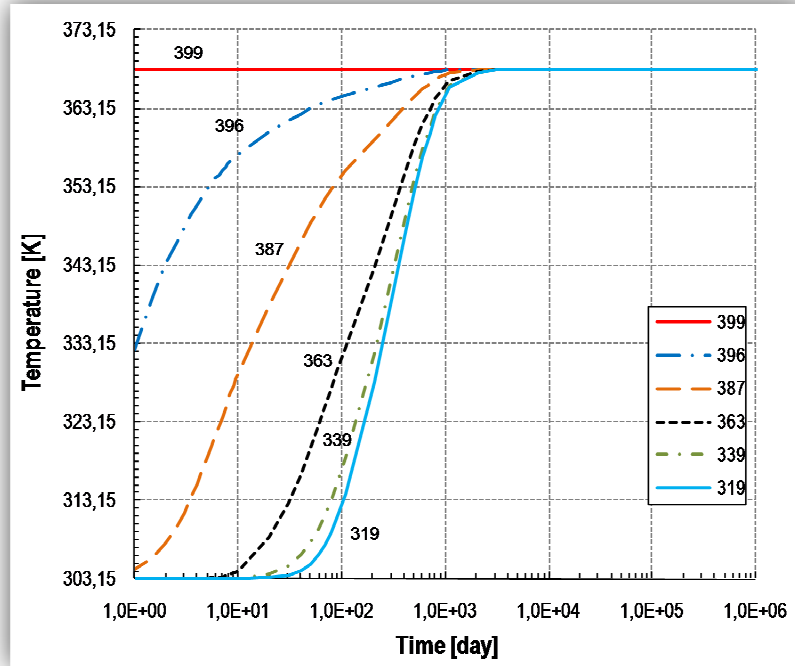


Figura 90. Temperatura [K] rispetto al tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay, carico termico)

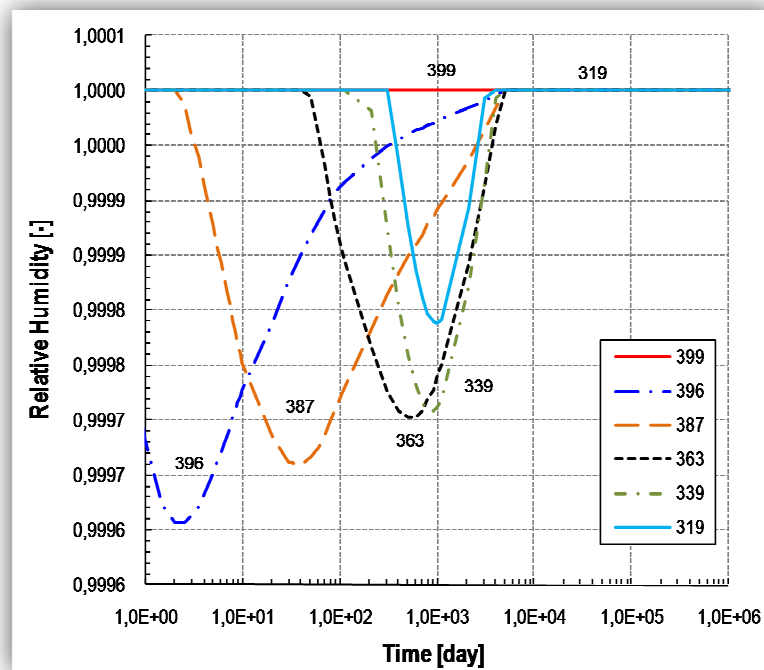


Figura 91. Umidità relativa [-] rispetto al tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay, carico termico)

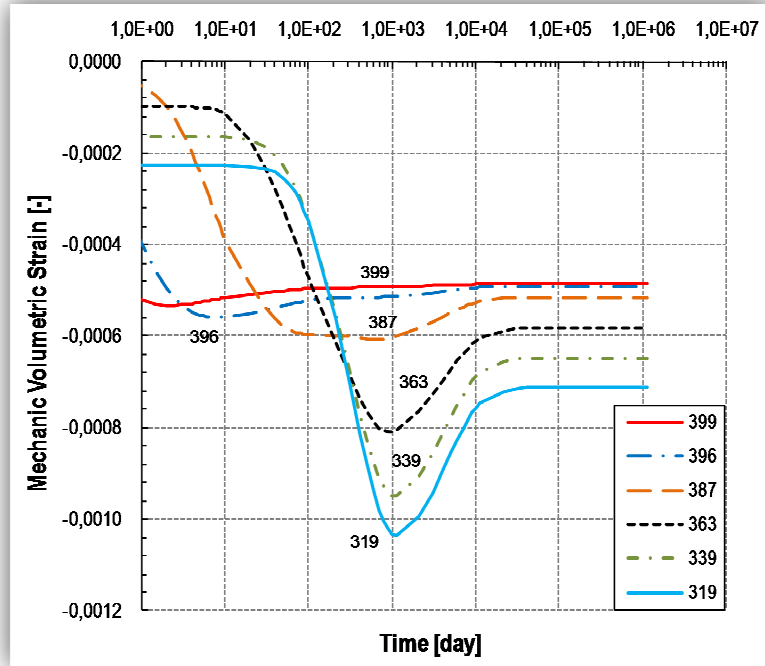


Figura 92. Deformazione volumetrica meccanica [-] rispetto il tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay, carico termico)

Il caso elastico termo-idro-meccanico (sigla $s0_e_MT$), risulta dalla somma dei due precedenti ($s0_e_T$ e $s0_e_M$) per la sovrapposizione degli effetti; come si può notare dai grafici seguenti (Fig.93-94-95-96) produce i medesimi comportamenti già descritti. Si può osservare per esempio lo stesso tempo di sviluppo delle temperature del caso termico, $s0_e_T$ (Fig.95) e che il profilo della pressione capillare presenta valori bassi nella fase transitoria (Fig.93) a causa del valore di carico meccanico adottato, fino al raggiungimento dei medesimi valori costanti, come visto nel caso termico ($s0_e_T$). La diffusione termica è veloce quanto la diffusione idraulica e la consolidazione termica finisce prima di quella meccanica; gli spostamenti verticali sono costanti alla fine della consolidazione meccanica che avviene a 60.000 giorni (Fig.94). Nel grafico degli spostamenti verticali si può osservare anche un rigonfiamento globale della colonna, perché l'effetto dilatante del carico termico (spostamento verticale di $2.3 \cdot 10^{-3} m$ è maggiore della compattazione dovuta al carico meccanico (spostamento verticale di $0.23 \cdot 10^{-3} m$). Il grafico dell'umidità relativa di questo caso (Fig.96) è simile a quello osservato in precedenza con il solo carico termico (Fig.91), e suggerisce la necessità di utilizzare un modello costitutivo termo-elasto-plastico anche per quelle simulazioni di consolidazione termo-meccanica in cui materiali inizialmente saturi d'acqua nell'evoluzione transitoria del calcolo raggiungono stati non saturi in cui la pressione capillare supera la suzione di ingresso dell'aria (*suction air entry value*) nel mezzo poroso.

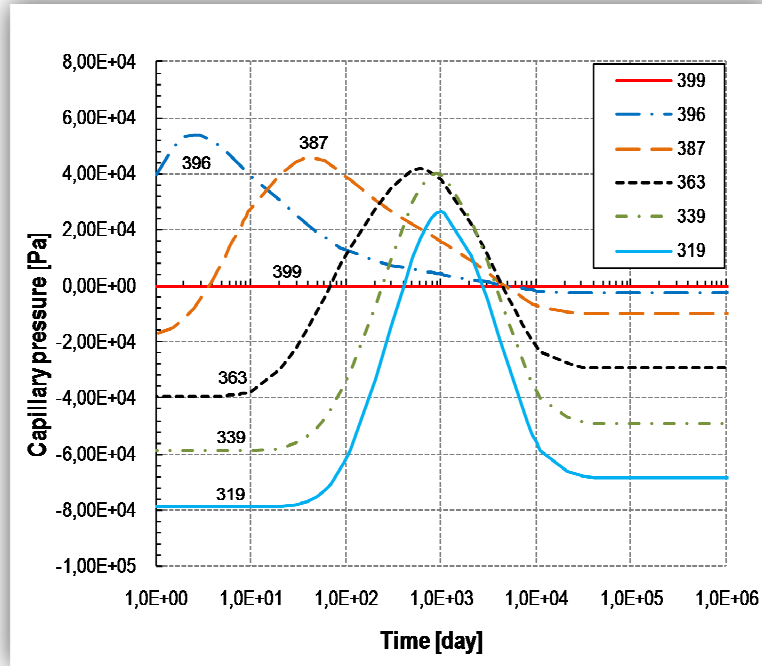


Figura 93. Pressione capillare [Pa] rispetto al tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay, carico termo-meccanico)

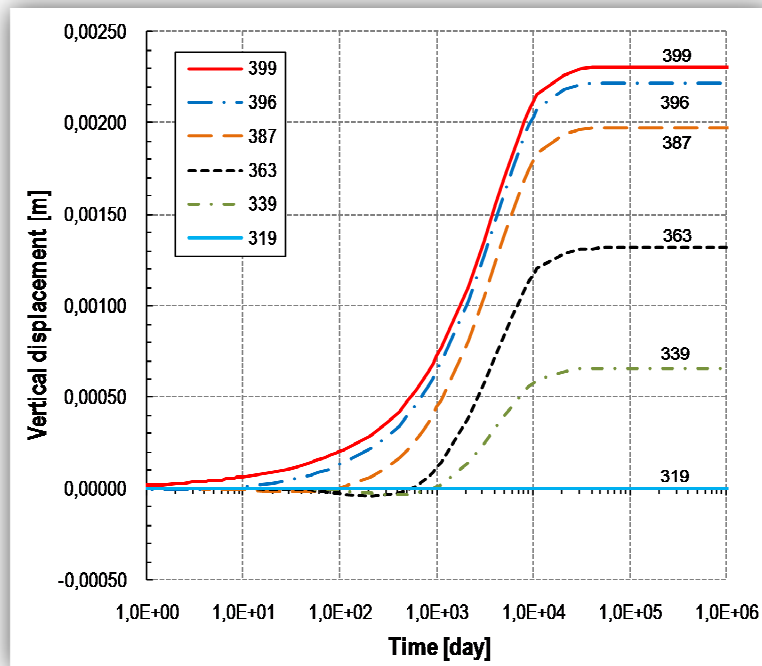


Figura 94. Spostamenti verticali [m] rispetto al tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay, carico termo-meccanico)

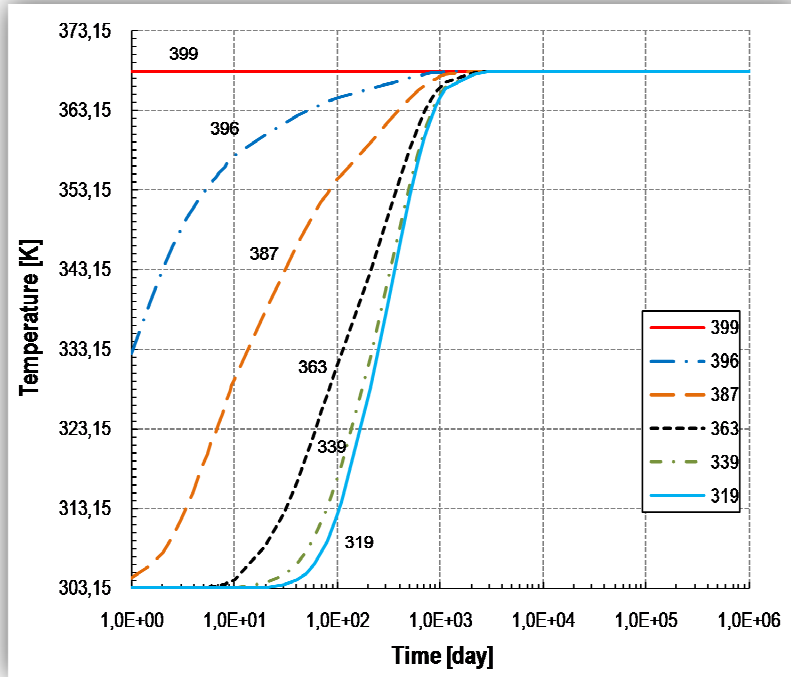


Figura 95. Temperatura [K] rispetto al tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay, carico termo-meccanico)

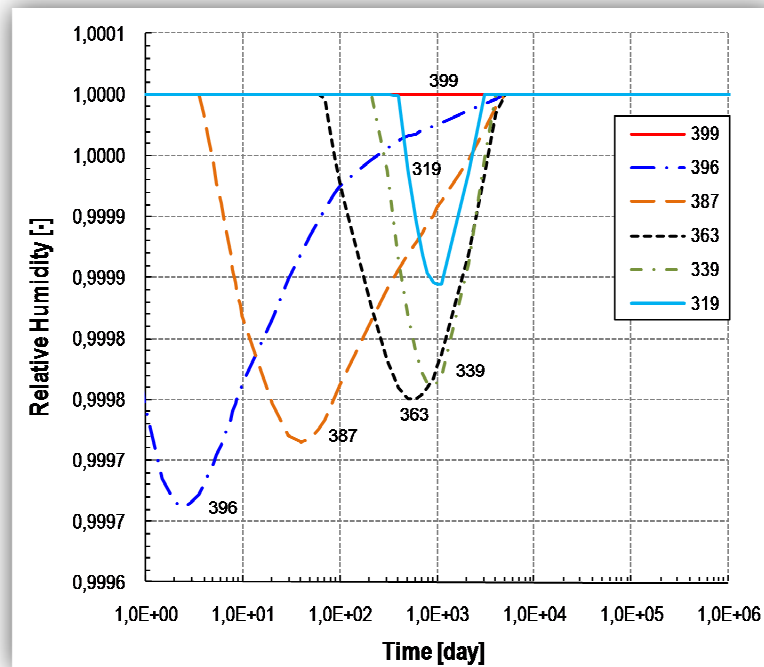


Figura 96. Umidità relativa [-] rispetto al tempo [giorni] in nodi differenti per l'analisi lineare termo-elastica (Boom-clay, carico termo-meccanico)

6.5 CASI ELASTOPLASTICI (EP), SENZA DRENAGGIO, MECCANICI (M), TERMO-MECCANICI (MT)

6.5.1 Risultati (post-processamento)

Il modello ACMEG-TS è stato utilizzato anche per simulare il comportamento elastoplastico della colonnina di terreno sotto diverse condizioni al contorno termiche ($s0_ep_M$), e termo-meccaniche ($s0_ep_MT$) applicate sulla superficie superiore come prima spiegato. Si assume costante il modulo elastico e il coefficiente di espansione termica per fare un paragone con il caso lineare elastico. Questo caso elastoplastico mostra lo stesso comportamento delle variabili termo-idro-meccaniche del corrispondente caso elastico, a causa della deformazione plastica volumetrica veramente piccola sviluppata nella colonnina. Dal grafico delle deformazioni volumetriche plastiche si può notare come venga raggiunto al massimo un valore estremamente basso, pari a $-3.5 \cdot 10^{-6}$ (Fig.98) nel caso con condizioni al contorno meccaniche ($s0_ep_M$) e pari $3.5 \cdot 10^{-4}$ (Fig.97) a nel caso con condizioni al contorno termo-meccaniche ($s0_ep_MT$). L'analisi dei risultati numerici del caso termo meccanico ($s0_ep_MT$) va oltre il contrasto fra il comportamento softening dovuto alle condizioni termiche ed il comportamento hardening dovuto alla capillarità, come ben visibile per esempio per il nodo 387. In particolare dalle figure 99 e 100 si può osservare che il materiale rimane elastico (deformazioni volumetriche plastiche nulle) fino all'incremento massimo di pressione capillare, questo perché l'hardening dovuto alla pressione capillare prevale sul softening termico; quindi la deformazione plastica volumetrica per il nodo 387 inizia a circa 40 giorni, quando la pressione capillare comincia a scendere, mentre la temperatura continua a salire, perché entrambe le variabili iniziano a contribuire a restringere la funzione di snervamento. Il nodo 399 sulla parte superiore della colonnina mostra deformazioni volumetriche plastiche sin dall'inizio perché il contributo della temperatura è massimo, visto che è applicato proprio sulla superficie della colonnina, mentre la pressione capillare non è stata lasciata libera, ma impostata al valore nullo con le condizioni al contorno (non si ha il contrasto fra il comportamento softening ed il comportamento hardening che mantiene circa inalterato il campo plastico). La consolidazione finisce a 60.000 giorni, quando lo spostamento verticale e la pressione capillare non variano più nel tempo, e quindi anche le deformazioni plastiche volumetriche sono costanti.

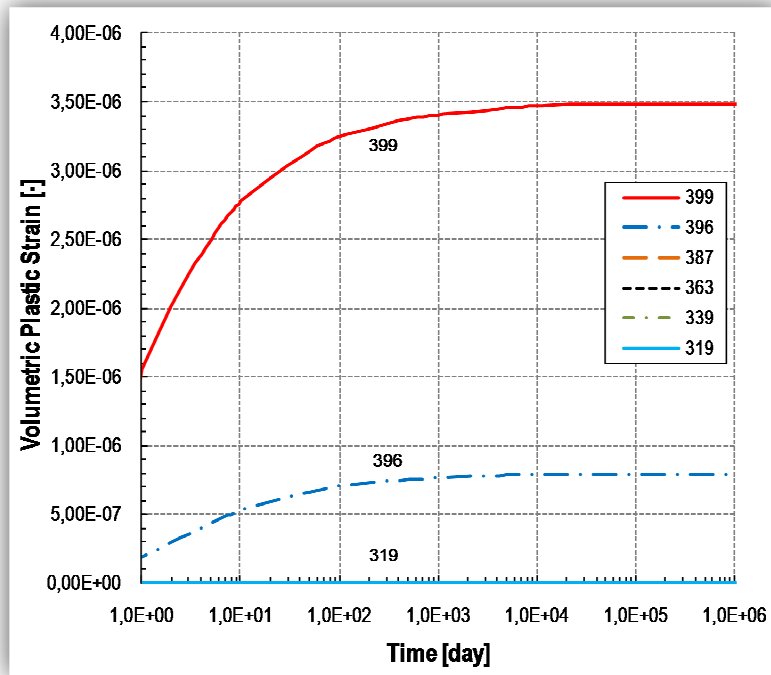


Figura 97. Deformazione plastica volumetrica [-] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termoplastica (Boom-clay, carico meccanico)

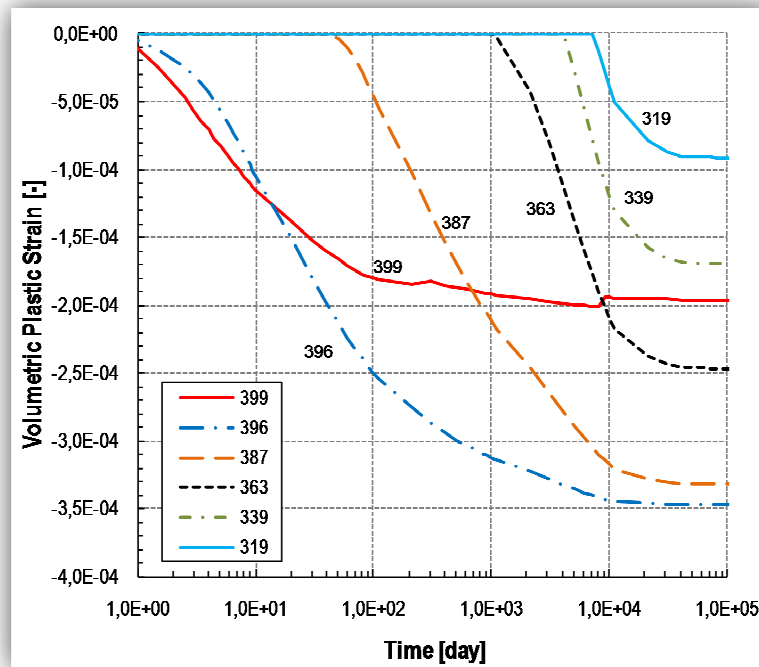


Figura 98. Deformazione plastica volumetrica [-] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico)

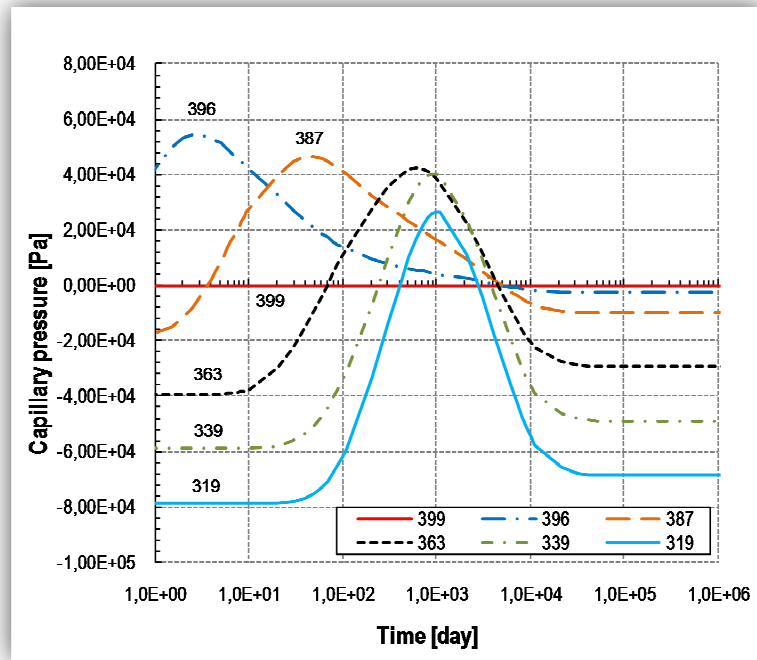


Figura 99. Pressione capillare [Pa] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico)

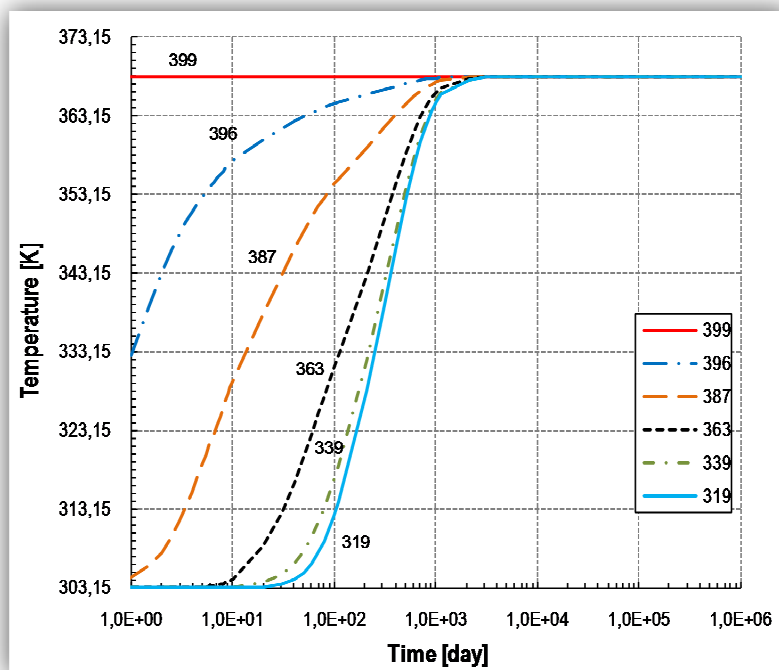


Figura 100. Temperatura [K] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico)

6.6 CASI ELASTOPLASTICI (EP), CON DRENAGGIO, TERMO-MECCANICI (MT)

6.6.1 Risultati (post-processamento)

Ora si prendono in considerazione alcuni casi sviluppati con legge elastoplastica e condizioni al contorno termo-meccaniche. I casi considerati sono quelli con suzione in sommità di $1MPa$, $5MPa$ e $20MPa$, data una suction entry value di $3MPa$ e le medesime condizioni al contorno per temperatura e carico meccanico descritte in precedenza. Grazie alla normalizzazione degli assi dei medesimi grafici fra i vari casi è possibile fare il confronto fra i risultati ottenuti in diverse condizioni al contorno. Per tali casi si farà riferimento alle figure dal numero 101 al 112. Per diversi valori di suzione in sommità della colonnina di terreno si hanno diversi gradi di essiccazione del terreno, con evoluzioni differenti in funzione della profondità.

I valori assunti dal nodo 399, in sommità, sono per le condizioni al contorno pari al valore di suzione imposto. Il valore positivo di suzione imposto come condizione al contorno implica un drenaggio dell'acqua capillare presente nel mezzo poroso. Progressivamente per i nodi a diversa profondità e distanza dal nodo 399, si ha un progressivo aumento della pressione capillare (Fig.101, 102, 103), dovuto ai flussi d'acqua verso la superficie della colonnina (essiccazione), e la diminuzione del grado di saturazione (Fig. 104, 105, 106). Nel caso con suzione di $1MPa$ non si ha il superamento della suction entry value di $3MPa$, per cui il grado di saturazione rimane pari a 1 (terreno saturo), benché vi sia comunque una modifica della pressione dell'acqua. I valori di pressione capillare raggiunti e di grado di saturazione sono diversi in funzione del maggiore valore di suzione imposto in superficie. Non essendoci nessun flusso di acqua nel modello, le condizioni di suzione in sommità drenano tutta la colonnina di terreno fino alla base nel tempo sufficiente per il riequilibrio del fenomeno. Nei casi in cui si sviluppa una pressione capillare superiore al valore di suction air entry value entra in gioco il meccanismo dello switch, così come descritto nel capitolo 3.5.

Dai grafici dello spostamento verticale è possibile osservare il diverso grado di consolidazione raggiunto per la suzione imposta più elevata e la diversa pendenza della curva dovuta al maggior drenaggio. Il caso con suzione pari $1MPa$ sviluppa una consolidazione trascurabile e delle deformazioni volumetriche plastiche insignificanti. I

nodi 399 e 396 risentono delle condizioni di drenaggio imposte e sviluppano una deformazione plastica istantanea; gli altri nodi sviluppano una deformazione plastica progressiva, man mano che l'acqua contenuta nei pori viene attratta in superficie. Le deformazioni plastiche volumetriche variano in funzione del tempo, della profondità e dei gradi di suzione imposto nella condizione al contorno. I casi qui eseguiti non prevedevano la modifica della legge di suzione in funzione della deformazione volumetrica plastica, la quale avrebbe incrementato l'effetto. Si può notare come il drenaggio dovuto alle condizioni di suzione abbia effetti simili agli effetti dovuti al carico meccanico (consolidazione ed aumento della pressione capillare rispetto alle condizioni idrostatiche). L'effetto di rigonfiamento dovuto al carico termico è di un ordine di grandezza inferiore (vedasi: caso $s0_ep_M$ $\varepsilon_v^p = -3.5 \cdot 10^{-6}$, Fig.98; caso $s0_ep_MT$ $\varepsilon_v^p = 3.5 \cdot 10^{-4}$, Fig.97) rispetto al valore provocato dal drenaggio e non influenza i casi presi in esame.

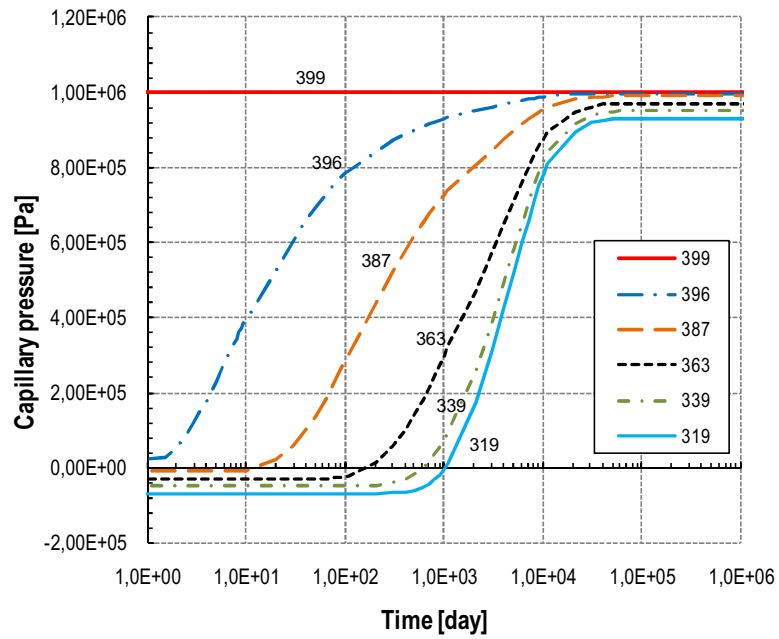


Figura 101. Pressione Capillare [Pa] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 1MPa)

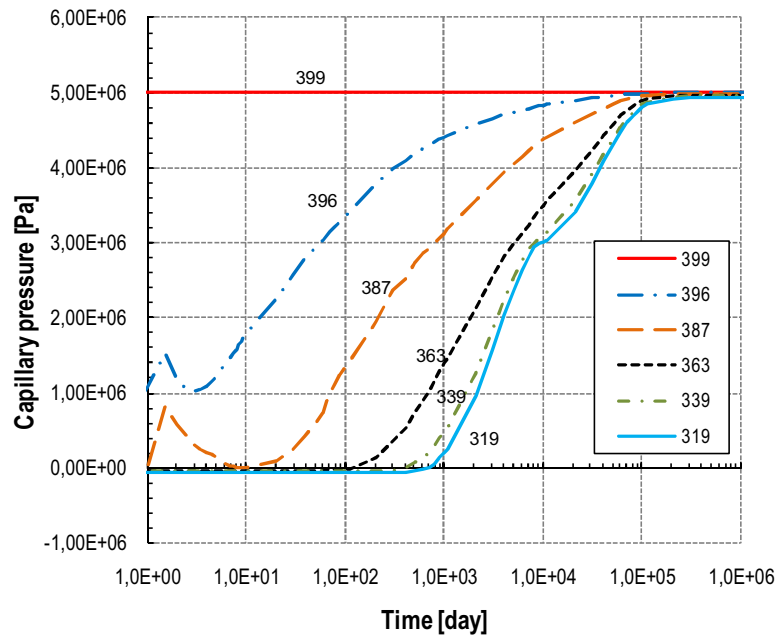


Figura 102. Pressione Capillare [Pa] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 5MPa)

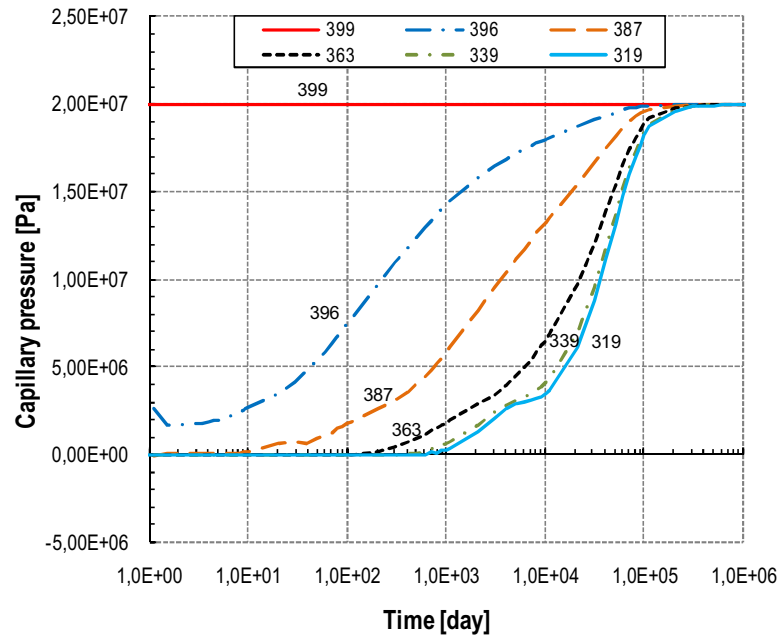


Figura 103. Pressione Capillare [Pa] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 20MPa)

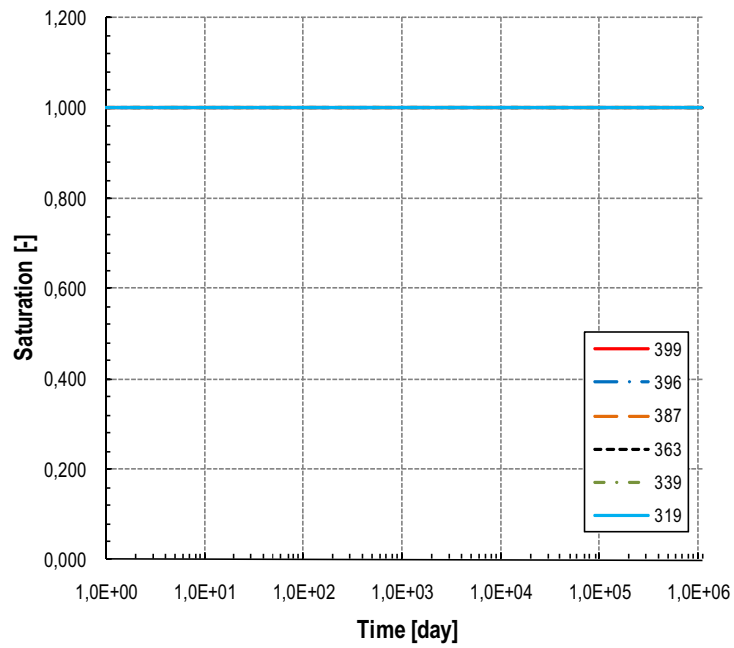


Figura 104. Grado di Saturazione [-] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 1MPa)

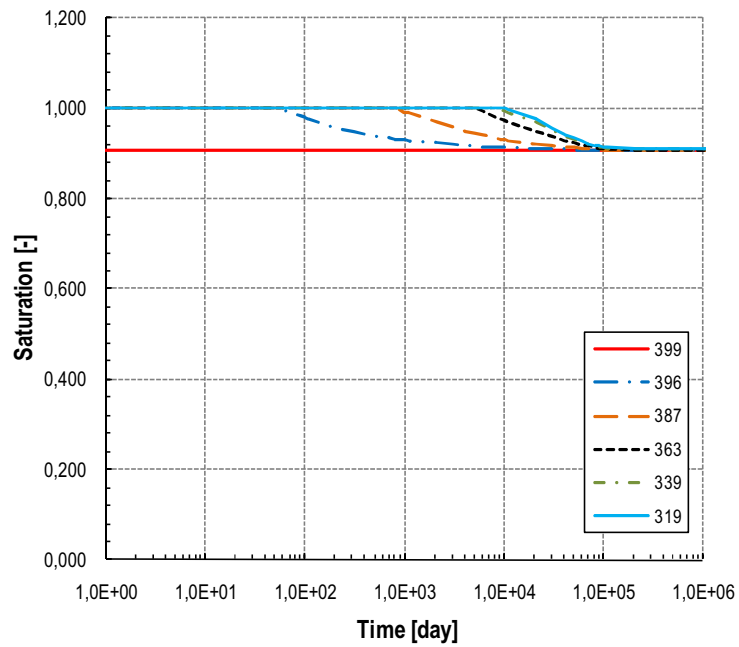


Figura 105. Grado di Saturazione [-] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 5MPa)

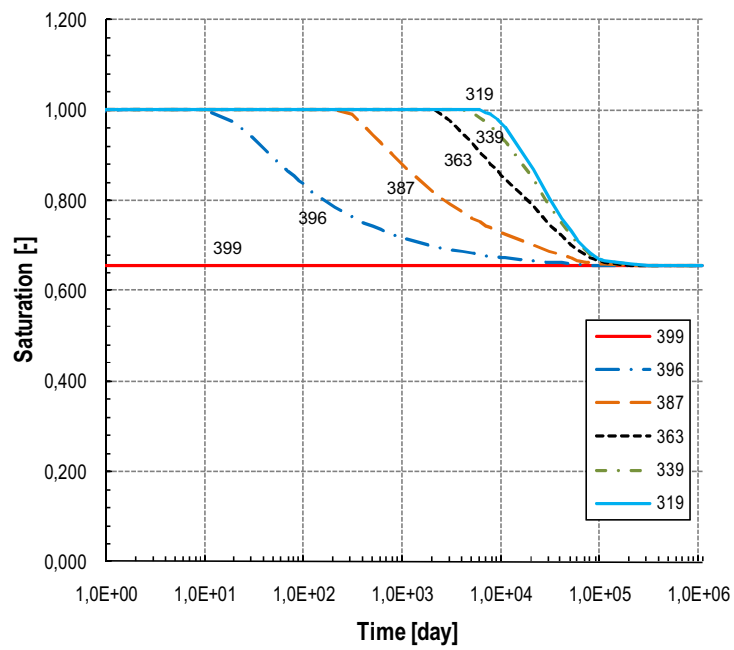


Figura 106. Grado di Saturazione [-] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 20MPa)

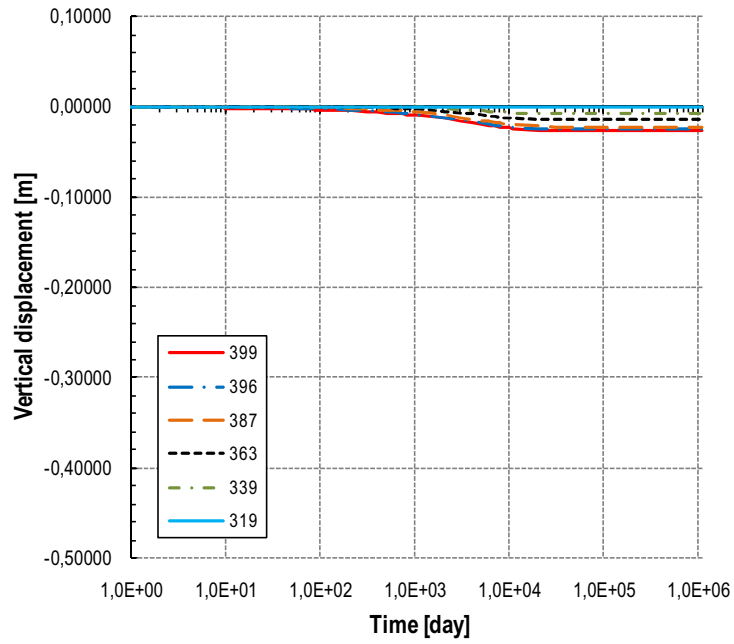


Figura 107. Spostamento verticale [m] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 1MPa)

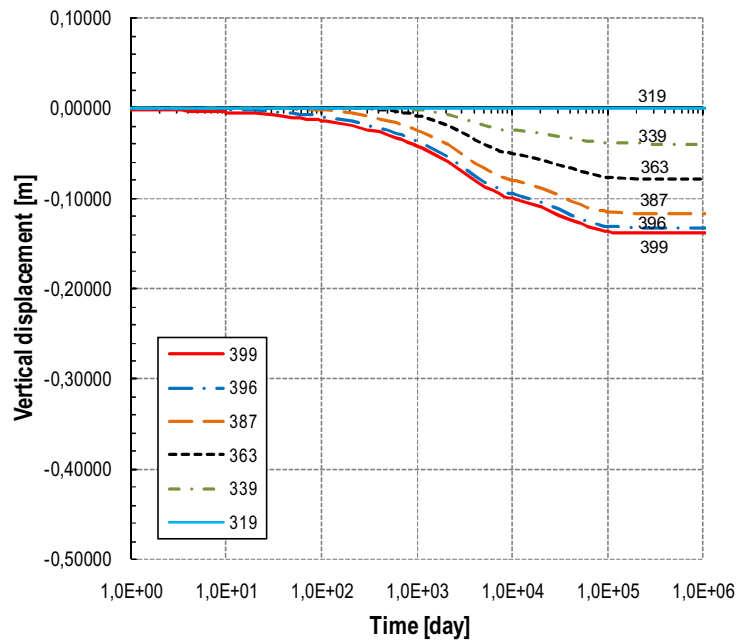


Figura 108. Spostamento verticale [m] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 5MPa)

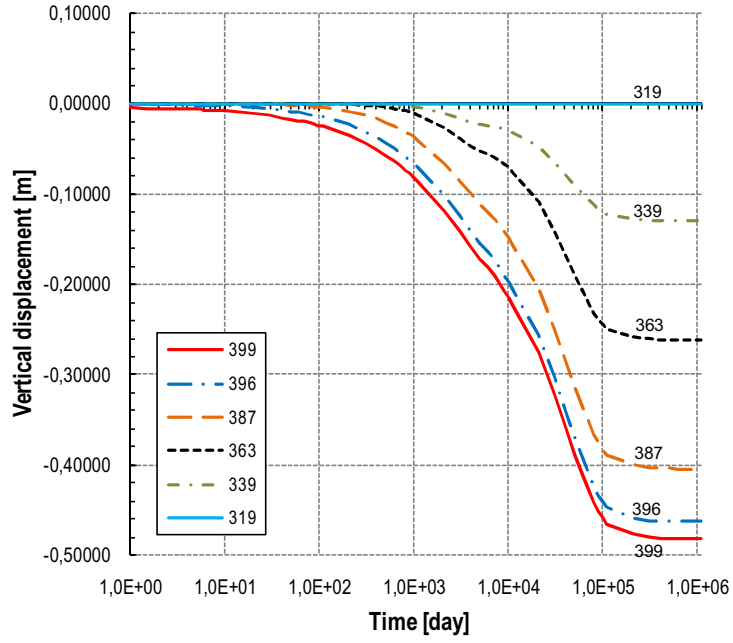


Figura 109. Spostamento verticale [m] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 20MPa)

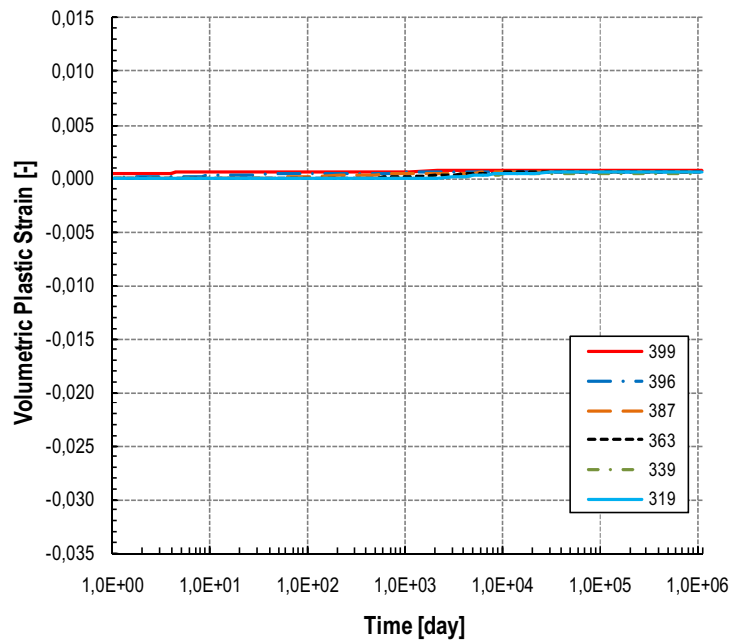


Figura 110. Deformazione plastica volumetrica [/] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 1MPa)

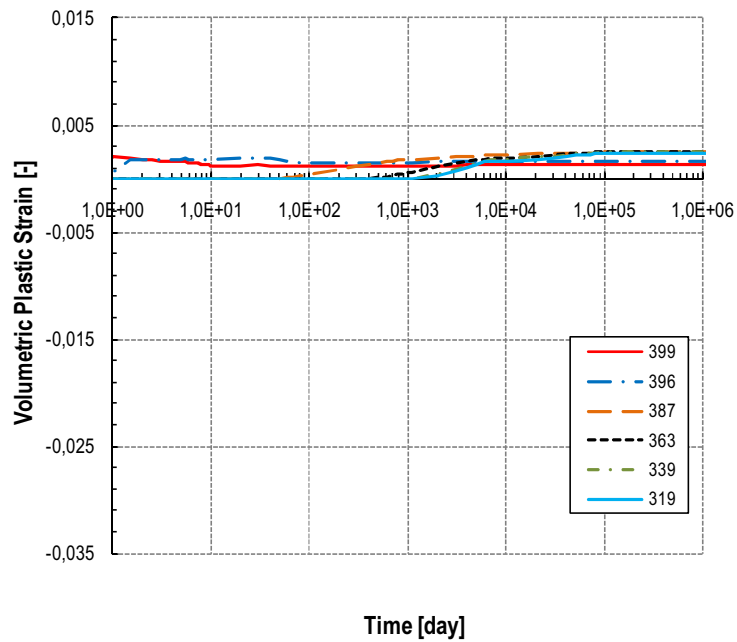


Figura 111. Deformazione plastica volumetrica [/] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 5MPa)

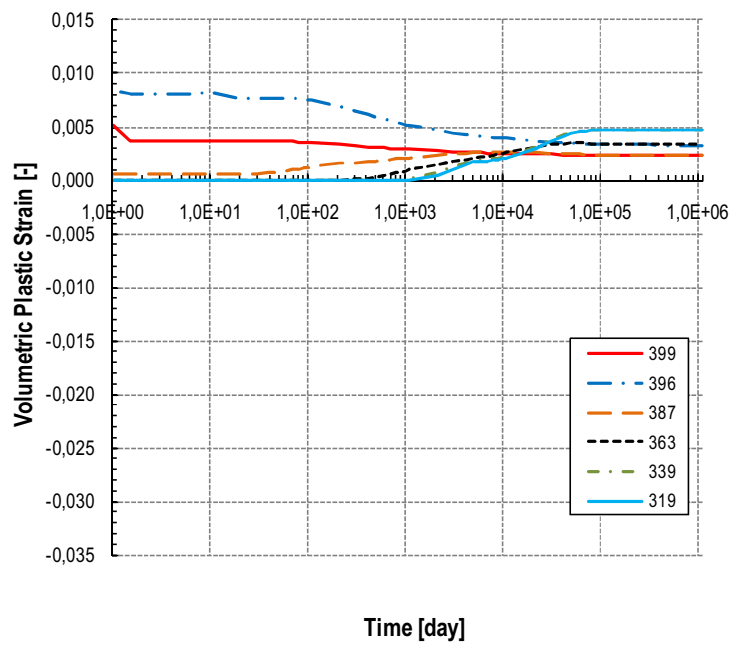


Figura 112. Deformazione plastica volumetrica [/] rispetto al tempo [giorni] in differenti nodi per l'analisi lineare termo-elastoplastica (Boom-clay, carico termo-meccanico, suzione di 20MPa)

6.7 RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. François B. and Laloui L., *ACMEG-TS: constitutive model for unsaturated soils under non-isothermal conditions* (2008)
2. B.L. Aboustit, S.H. Advani, J.K.Lee, *Variational principles and finite element simulations for thermo-elastic consolidation*. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 9,49-69 (1985).
3. R.W. Lewis, B.A. Schrefler, *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. J. Wiley, Chichester (1998).
4. Gawin D, Baggio P., Schrefler B.A., *Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media*. Int J.Num. Meth. Fluids, 20, 969-987 (1995)
5. Sanavia L., Francois B., Bortolotto R., Luison L., Laloui L., *Finite element modeling of thermo-elasto-plastic water saturated porous materials*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 38(1-2),7-24 (2008)

