

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA**



**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

**LAUREA SPECIALISTICA IN  
INGEGNERIA MECCANICA**



**TESI DI LAUREA**

**ANALISI DEGLI STATI LOCALI DI TENSIONE  
INDOTTI DA SOLLECITAZIONI DI MODO I, II  
E III IN COMPONENTI STRUTTURALI PIANI  
ED ASSIALSIMMETRICI**

Laureando: DAL MONTE NICOLA

Relatore: prof. LAZZARIN PAOLO

A.A: 2012-2013



# Indice

Capitolo 1	INTRODUZIONE .....	3
1.1	Introduzione.....	3
1.2	Obbiettivo finale .....	4
Capitolo 2	MECCANICA DELLA FRATTURA .....	5
2.1	Introduzione.....	5
2.2	Meccanica della frattura lineare elastica .....	6
2.3	Cricca centrale: Westergaard-Irwin .....	7
2.4	Intaglio a V non raccordato (sharp V-notch): Williams .....	8
2.5	Lazzarin-Tovo .....	10
2.6	Il Modo III: torsione.....	14
Capitolo 3	PEAK STRESS METHOD .....	19
3.1	Introduzione.....	19
3.2	Il Peak stress method (PSM) .....	20
3.3	Commenti.....	23
Capitolo 4	PEAK STRESS METHOD: MODO I.....	25
4.1	Introduzione.....	25
4.2	Analisi preliminari .....	26
4.3	Applicazione del PSM .....	28
4.3.1	Analisi con elementi a 4 nodi.....	30
4.3.2	PSM con elementi ad 8 nodi.....	33
4.4	Conclusioni.....	37
Capitolo 5	PEAK STRESS METHOD: MODO II.....	39
5.1	Introduzione.....	39
5.2	Modello FEM .....	39
5.3	Determinazione del fattore di intensificazione delle tensioni $K_2$ .....	40
5.4	Applicazione del PSM .....	42
5.4.1	Analisi con elementi a 4 nodi.....	43
5.4.2	PSM con elementi ad 8 nodi.....	48
5.5	Conclusioni.....	52
Capitolo 6	PEAK STRESS METHOD: “MODO IV” .....	55
6.1	Introduzione.....	55
6.2	Modello FEM .....	56
6.3	Determinazione del fattore di intensificazione delle tensioni $K_4$ .....	57
6.4	Applicazione del PSM .....	58
6.4.1	Prima proposta alternativa.....	60
6.4.2	Seconda proposta alternativa.....	61
6.5	Conclusioni.....	65
Capitolo 7	PEAK STRESS METHOD: MODO MISTO I+II .....	67
7.1	Introduzione.....	67
7.2	Modello FEM .....	67
7.3	Determinazione dei fattori di intensificazione delle tensioni $K_1$ e $K_2$ .....	69

7.4	Applicazione del PSM .....	69
7.4.1	Modo I.....	70
7.4.2	Modo II.....	71
7.5	Conclusioni.....	75
Capitolo 8 PEAK STRESS METHOD: MODO III.....		77
8.1	Introduzione.....	77
8.2	Modello FEM .....	78
8.3	Determinazione del fattore di intensificazione delle tensioni $K_3$ .....	79
8.4	Applicazione del PSM .....	80
8.4.1	Analisi con elementi a 4 nodi .....	82
8.4.2	PSM con elementi ad 8 nodi.....	85
8.5	Conclusioni.....	88
Capitolo 9 PEAK STRESS METHOD: MODO MISTO I+III .....		91
9.1	Introduzione.....	91
9.2	Il modo I assialsimmetrico .....	91
9.3	Il modo misto I+III .....	94
9.4	Conclusioni.....	97
Capitolo 10 PEAK STRESS METHOD: CONCLUSIONI .....		99
10.1	Il lavoro fatto .....	99
10.2	Relazioni finali .....	99
10.3	Applicazione pratica .....	103
Capitolo 11 PEAK STRESS METHOD: UN'APPLICAZIONE.....		105
11.1	Introduzione.....	105
11.2	Un caso di studio .....	105
11.3	Un esempio di applicazione del PSM .....	108
A.	LISTATI ANSYS .....	113
a.	Modo I.....	113
b.	Modo II.....	116
c.	Modo I+III.....	121
B.	BIBLIOGRAFIA.....	126

# Capitolo 1 INTRODUZIONE

## *1.1 INTRODUZIONE*

La costruzione delle macchine, di qualsiasi tipo, è sicuramente un settore di grande importanza nell'ambito dell'attività industriale dell'uomo. In questo settore trovano applicazione concetti afferenti a varie branche scientifiche e tecnologiche ma, a fare da guida è sicuramente la meccanica.

Il progresso richiede macchine, e costruzioni in genere, sempre più performanti, sicure ed affidabili mentre la concorrenza nel mercato globale impone costi e time to market sempre più ridotti.

Un tema che da sempre ha avuto grande rilevanza nel progetto delle macchine è la verifica di resistenza degli organi che le compongono. La richiesta di performance sempre migliori e di ridotti costi di costruzione e di esercizio, impone di ridurre le masse degli organi in movimento e di ottimizzare l'impiego di materiale anche negli organi statici: usare solo quello che serve, nulla in più.

È immediato capire che, per raggiungere questi obiettivi, è fondamentale progettare bene. A questo scopo, il progettista oggi ha a disposizione strumenti molto avanzati e sempre più diffusi come CAD tridimensionali, software per analisi FEM, ed altro ancora.

Bisogna ricordarsi però che lo scopo di un'azienda metalmeccanica non è il progetto ma il prodotto finale al cui rapporto qualità/prezzo la progettazione partecipa sia al numeratore che al denominatore. È, quindi, premura del buon progettista adottare modi e strumenti di progetto che siano il più possibile in sintonia con il prodotto finito, cioè sufficienti ad ottenere un prodotto della qualità desiderata senza caricare inutilmente sui costi dello stesso.

All'interno del grande capitolo della verifica di resistenza degli organi meccanici è nostro desiderio focalizzare l'attenzione sulla verifica di sicurezza, statica ed a fatica, di organi di macchina caratterizzati da variazioni, o discontinuità, geometriche.

Gli organi di macchina esenti da discontinuità geometriche sono pochissimi. Ragioni funzionali o costruttive impongono la presenza di gole di scarico, variazioni di sezione, fori, tasche in genere, cordoni di saldatura. L'importanza di tali discontinuità è dovuta al fatto che nel loro intorno il campo di sollecitazione risulta perturbato ed hanno luogo concentrazioni di tensioni che possono raggiungere livelli pericolosi per l'integrità dell'organo in questione. Il grado di perturbazione del campo di tensione dipende, essenzialmente, dalla geometria della discontinuità e dalle sue dimensioni, in rapporto con quelle dell'organo meccanico.

Valutare le condizioni di sollecitazione degli organi meccanici, stabilirne la loro sicurezza e durata in esercizio, è compito del progettista meccanico e, nelle realtà più strutturate, dell'analista meccanico.

La prima tappa del percorso di verifica è l'individuazione del tipo di problema che si deve affrontare. La mia esperienza di analista prima e di progettista poi mi ha insegnato a pormi subito queste domande:

- di che problema si tratta;

- serve affrontarlo;
- quanto tempo merita.

Successivamente si scelgono i metodi e gli strumenti da utilizzare in funzione del grado di dettaglio dello studio da affrontare.

## ***1.2 OBIETTIVO FINALE***

Come già detto, il lavoro che sia andrà a presentare vuole occuparsi della verifica di resistenza, statica ed a fatica, degli organi meccanici caratterizzati da variazioni geometriche, in particolare di quelle variazioni severe che sono oggetto della meccanica della frattura, con lo scopo di dare un ulteriore contributo al PEAK STRESS METHOD (PSM).

Il PSM è un metodo di valutazione del campo di stress nell'intorno di intagli e cricche. Il suo punto di forza è essenzialmente nel ridotto numero di dati da elaborare e nel minor costo delle analisi FEM necessarie alla sua implementazione.

Allo stato attuale il lavoro è stato sviluppato su intagli e cricche non raccordate sollecitate a modo I (apertura). Inoltre, le analisi FEM fatte a supporto del metodo contemplano l'utilizzo di elementi piani a 4 nodi (funzione di forma lineare).

Con il presente lavoro si vuole contribuire ad estendere la teoria nelle seguenti direzioni:

- utilizzo di analisi FEM con elementi piani ad 8 nodi;
- sollecitazione di modo II (slittamento);
- sollecitazioni di modo III (torsione);
- sollecitazioni miste, modo I+II e modo I+III.

## Capitolo 2 MECCANICA DELLA FRATTURA

### 2.1 INTRODUZIONE

Negli organi di macchina è frequente la presenza di variazioni geometriche, che brevemente chiameremo intagli, dovuta a ragioni costruttive.

È utile richiamare alcune definizioni:

- $\sigma_{\text{peak}}$ : **tensione di picco**. È il valore di tensione all'apice dell'intaglio.
- $K_t$ : è il **fattore teorico di concentrazione delle tensioni** (theoretical stress concentration factor). È il rapporto tra la tensione di picco che si ha all'apice dell'intaglio e la tensione nominale, calcolata sulla sezione netta o lorda (bisogna specificarlo). È teorico perché determinato analiticamente in campo lineare elastico e senza tener conto della legge costitutiva del materiale.
- $K_f$ : è il **fattore di riduzione della vita a fatica** (fatigue strength reduction factor). Ci dice di quanto la vita a fatica viene ridotta a causa della discontinuità geometrica. Può essere ricavato solo sperimentalmente, mediante prove di fatica su provini lisci ed intagliati.
- **Campo di tensione**: distribuzione della tensione nell'intorno dell'intaglio. Solitamente si riesce a dare una descrizione analitica di questa distribuzione entro distanze limitate dall'apice dell'intaglio.
- **Fattore di intensificazione delle tensioni (N-SIF)**. Riassume quanto è gravoso il campo di sollecitazione.

Possiamo classificare gli intagli da un punto di vista “strutturale” in tre grandi gruppi, a seconda della loro influenza sulla resistenza del pezzo.

#### **Gruppo I: intagli blandi, piena sensibilità all'intaglio**

Quando vale  $K_f = K_t$  si dice che si ha piena sensibilità all'intaglio; in questo caso la vita a fatica è completamente influenzata dal picco di tensione provocato dalla variazione di geometria. Sono questi i casi degli intagli blandi, cioè caratterizzati da deboli variazioni dimensionali e/o da raggi di raccordo ampi.

#### **Gruppo II: intagli acuti, parziale sensibilità all'intaglio**

Quando  $K_f < K_t$  si dice che si ha parziale sensibilità all'intaglio; in questo caso la vita a fatica è meno influenzata dal picco di tensione in quanto questo agisce su una porzione di materiale troppo esigua. Sono questi i casi degli intagli acuti, cioè caratterizzati da forti variazioni dimensionali e/o da raggi di raccordo molto piccoli.

#### **Gruppo III: intagli molto acuti, scarsa sensibilità all'intaglio**

Per intagli ancora più bruschi ( $K_f \ll K_t$ ) la vita a fatica del pezzo non è influenzata dal picco di tensione. Questo è troppo elevato e sicuramente interviene un fenomeno di redistribuzione delle tensioni. Il criterio di punto, che si basa sulla tensione di picco, non è più adeguato a rappresentare il reale stato di sollecitazione. Bisogna passare al criterio di campo, cioè

all'osservazione di tutta la distribuzione di sollecitazione nell'intorno dell'intaglio. Parametro rappresentativo diventa il **fattore di intensificazione delle tensioni (N-SIF)**.

Detto che il confronto tra  $K_t$  e  $K_f$  è da intendersi come puro confronto tra numeri, essendo i fenomeni rappresentati dai due coefficienti sostanzialmente diversi, quando il gradiente di tensione è basso ( $K_f = K_t$ ) si ha che una porzione ampia di materiale è soggetta al picco di tensione, quindi la penalizzazione in termini di resistenza a fatica è interamente governata dal picco. Quando, invece, il gradiente è elevato ( $K_f < K_t$ ), si ha che la porzione di materiale soggetta al picco di tensione è molto ristretta ed è insufficiente a determinarne la rottura che è controllata dal livello di tensione di un volume di materiale più grande.

La transizione dal primo al secondo gruppo, non è solamente una questione geometrica, ma anche il materiale gioca un ruolo importante. Il parametro che identifica questo aspetto è la **sensibilità all'intaglio** ( $q$ ). Più un materiale è resistente maggiore è la sua sensibilità all'intaglio.

L'analisi degli intagli del gruppo I e II è materia della fatica classica, per i casi tipici del gruppo III si passa alla meccanica della frattura.

Restringendo l'attenzione agli intagli molto acuti, un calcolo analitico in campo elastico per  $\rho \rightarrow 0$  (raggio all'apice dell'intaglio) porta a tensioni molto superiori al limite di elasticità in corrispondenza dell'apice dell'intaglio. Questo suggerirebbe l'inadeguatezza di analisi in campo lineare elastico e la necessità di ricorrere ad analisi elasto-plastiche. Tuttavia, se il volume che plasticizza è piccolo, condizione che si verifica se  $\sigma_g \leq 0.6 \sigma_s$ , il campo calcolato nell'ipotesi di elasticità lineare va bene ed è valida una meccanica della frattura lineare elastica (le tensioni nominali  $\sigma_g$  a cui si fa in genere riferimento in meccanica della frattura sono le tensioni nominali calcolate come se le cricche non ci fossero). Qualora non si rientri in questo limite, si ha una plasticizzazione estesa e si deve obbligatoriamente ricorrere ad un approccio in campo elastoplastico.

## 2.2 MECCANICA DELLA FRATTURA LINEARE ELASTICA

Oggetto della meccanica della frattura è lo studio di strutture interessate da intagli acuti e/o difetti.

Nella realtà applicativa l'intaglio può essere sollecitato sostanzialmente in tre modi (fig. 2.1)

- Modo I: apertura. L'applicazione del carico tende ad aumentare l'angolo tra i fianchi dell'intaglio.
- Modo II: slittamento. Il carico è parallelo all'asse dell'intaglio.
- Modo III: strappo. Il carico è perpendicolare al piano su cui giace il difetto.

Il parametro che rappresenta la pericolosità del campo di tensione nell'intorno dell'intaglio è il fattore di intensificazione delle tensioni (N-SIF).

La verifica, sia statica che a fatica viene ora fatta in termini di N-SIF ( $K$ ) ed i valori limite sono rappresentati dalla resistenza a frattura  $K_C$  (fracture toughness), nel caso statico, e dal limite di fatica  $\Delta K_{th}$ .

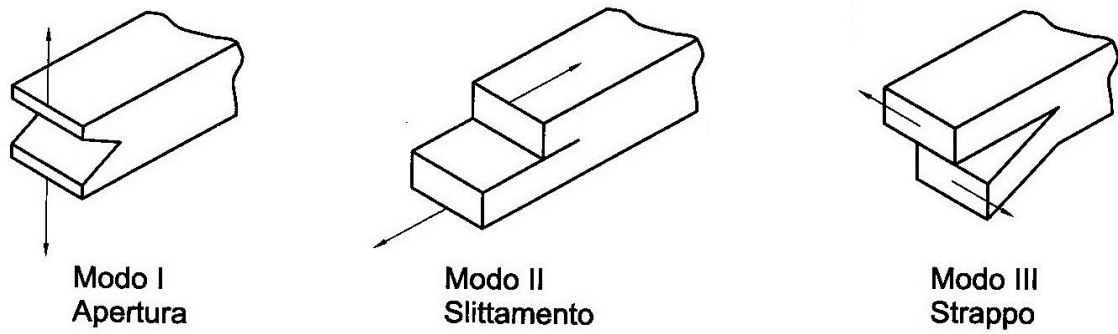


Fig. 2.1: modi di sollecitazione del difetto

### 2.3 CRICCA CENTRALE: WESTERGAARD-IRWIN

Westergaard<sup>[2]</sup> nel 1939 ottenne la soluzione esatta del problema relativo una piastra soggetta a trazione, in presenza di una cricca centrale di lunghezza  $2a$ .

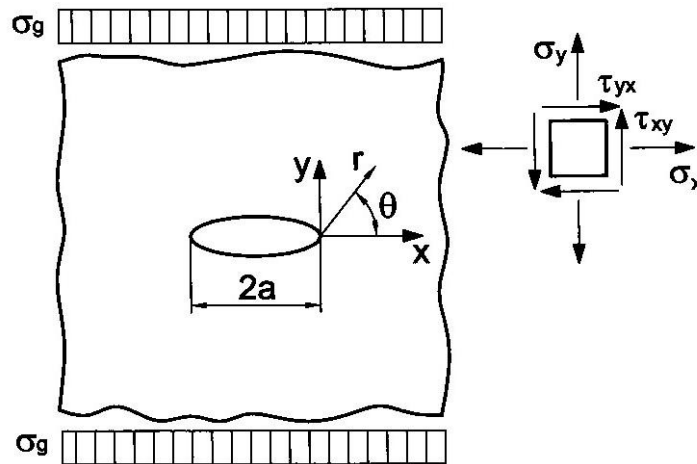


Fig. 2.2: cricca centrale e sistema di riferimento

Con riferimento al sistema di fig. 2.2, Westergaard partì da una funzione di Airy del tipo

$$(2.1.1) \quad \Phi = \operatorname{Re} \tilde{Z}(z) + y \operatorname{Im} \tilde{Z}(z)$$

cui applicò la funzione complessa

$$(2.1.2) \quad Z = \sigma \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

dove  $\sigma_g$  è la tensione nominale applicata a monte e a valle, normale all'asse della cricca (e come tale indipendente da  $z$ ). La soluzione a cui giunse Westergaard è

$$(2.2.1) \quad \sigma_x = \frac{\sigma_g \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\vartheta_1}{2}\right)\right]$$

$$(2.2.2) \quad \sigma_y = \frac{\sigma_g \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\vartheta_1}{2}\right)\right]$$

$$(2.2.3) \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_g \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta_1}{2}\right)$$

Ponendo

$$(2.3) \quad K_I = \sigma_g \sqrt{\pi a} \quad [\text{N/mm}^{3/2}]$$

e sostituendo nelle precedenti si ottengono le espressioni di Irwin<sup>[4]</sup> (1957):

$$(2.4.1) \quad \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\vartheta_1}{2}\right)\right]$$

$$(2.4.2) \quad \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\vartheta_1}{2}\right)\right]$$

$$(2.4.3) \quad \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta_1}{2}\right)$$

Le condizioni di validità per tali espressioni sono le seguenti:

- modo I: apertura;
- caso piano (plane stress o plane strain);
- $r < a/10$  : distanza del punto analizzato dall'apice della cricca non eccessiva, diversamente le semplificazioni introdotte da Westergaard perdono di validità.
- $\sigma_g \leq 0.6 \sigma_s$ .

## 2.4 INTAGLIO A V NON RACCORDATO (SHARP V-NOTCH): WILLIAMS

Nel 1952 Williams<sup>[3]</sup> considerò l'intaglio a V determinandone la distribuzione di tensione nell'intorno del vertice (fig. 2.3).

Williams suggerì per la funzione di Airy una forma a variabili separate:

$$(2.5) \quad \Phi = r^{\lambda+1} f(\vartheta)$$

In coordinate polari si ottiene:

$$(2.6.1) \quad \sigma_r = r^{\lambda-1} [\Gamma'(\vartheta) + (\lambda+1) f(\vartheta)]$$

$$(2.6.2) \quad \sigma_\vartheta = r^{\lambda-1} [\lambda (\lambda+1) f(\vartheta)]$$

$$(2.6.3) \quad \tau_{r\vartheta} = -r^{\lambda-1} [\lambda f'(\vartheta)]$$

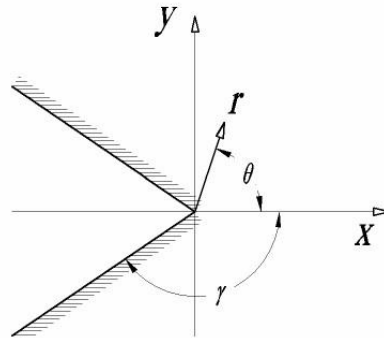


Fig. 2.3: schema dell'intaglio laterale

Dall'imposizione dell'equazione di compatibilità in coordinate polari si ottiene la soluzione

$$(2.7) \quad f(\vartheta) = A \cos[(\lambda+1)\vartheta] + B \cos[(\lambda-1)\vartheta] + C \sin[(\lambda+1)\vartheta] + D \sin[(\lambda-1)\vartheta]$$

in cui si possono isolare:

- **soluzione simmetrica** (di **modo I**): i termini in coseno;
- **soluzione asimmetrica** (di **modo II**): i termini in seno.

Imponendo le condizioni al contorno si giunge a risolvere un problema agli autovalori sia per la parte simmetrica (+) che per quella antisimmetrica (-)

$$(2.8) \quad \text{sen}(2\lambda\gamma) \pm \lambda \text{sen}(2\gamma) = 0$$

dei quali interessa solamente la prima soluzione. In entrambi i casi  $\lambda > 0$  ed in particolare sono di interesse solo gli autovalori compresi nell'intervallo  $0 < \lambda < 1$ . Infatti, quando  $\lambda > 1$ , il campo di tensione risultante è compatibile con le equazioni del problema ma non è più singolare.

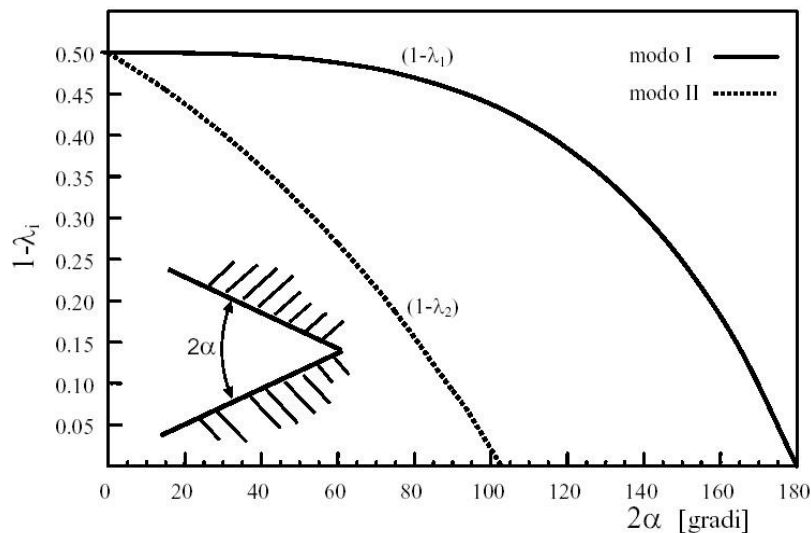


fig. 2.4: grado di singolarità di modo I e II

Gli autovalori per il problema simmetrico ( $\lambda_1$ ) ed asimmetrico ( $\lambda_2$ ) sono rappresentabili in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha = 2\pi - 2\gamma$  (fig. 2.4).

Il parametro  $(1 - \lambda_i)$  è detto **grado di singolarità**.

## 2.5 LAZZARIN-TOVO

Lazzarin e Tovo<sup>[9]</sup> (1996) hanno proposto una soluzione unificata che permette l'analisi dei campi di tensione provocati da intagli e cricche. Questo approccio, basato sul metodo dei potenziali complessi proposto da Muskhelishvili<sup>[12]</sup> (1953), fornisce un'espressione generalizzata del campo di tensione nell'intorno dell'apice dell'intaglio in funzione dell'angolo di apertura, del raggio all'apice e della distanza dello stesso.

A partire dalla formula generalizzata di Lazzarin-Tovo, le soluzioni classiche (Westergaard-Irwin<sup>[2][4]</sup>, Neuber<sup>[5]</sup>, Williams<sup>[3]</sup>, Craiger-Paris<sup>[6]</sup>, etc.) possono essere ottenute come casi particolari.

Il sistema di riferimento, rispetto al quale è espressa la soluzione, è il sistema di coordinate polari rappresentato nella fig. 2.5.

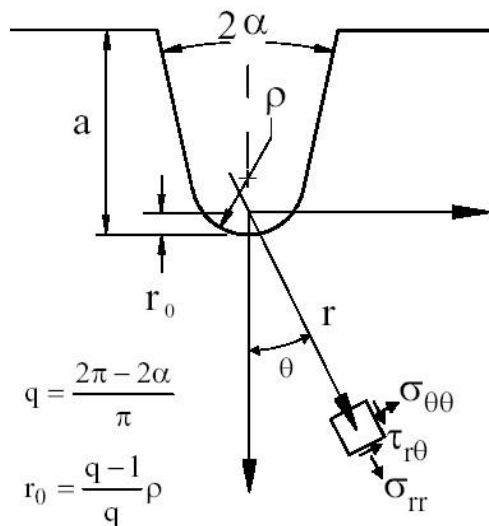


fig. 2.5: sistema di riferimento generalizzato

All'apice dell'intaglio, in corrispondenza della bisettrice, il raggio di curvatura vale:

$$(2.9.1) \quad \rho = r_0 \frac{q}{q-1}$$

dove  $r_0$  è la distanza fra il fuoco dell'iperbole e l'apice dell'intaglio, mentre  $q$  è un numero reale che è legato all'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$

$$(2.9.2) \quad 2\alpha = \pi (2 - q)$$

La soluzione generalizzata per le tensioni di modo I e modo II in funzione dei parametri  $a_1$  ed  $a_2$  è la seguente

➤ per il modo I:

(2.10.1)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\vartheta} \end{Bmatrix} &= \lambda_1 r^{\lambda_1-1} a_1 \left\{ \begin{Bmatrix} (1+\lambda_1) \cos[(1-\lambda_1)\vartheta] \\ (3-\lambda_1) \cos[(1-\lambda_1)\vartheta] \\ (1-\lambda_1) \text{sen}[(1-\lambda_1)\vartheta] \end{Bmatrix} + (1-\lambda_1) \chi_1 \begin{Bmatrix} \cos[(1+\lambda_1)\vartheta] \\ -\cos[(1+\lambda_1)\vartheta] \\ \text{sen}[(1+\lambda_1)\vartheta] \end{Bmatrix} \right\} + \\ &+ \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1-\lambda_1} \left\{ [(3-\lambda_1) - (1-\lambda_1) \chi_1] \begin{Bmatrix} \cos[(1+\mu_1)\vartheta] \\ -\cos[(1+\mu_1)\vartheta] \\ \text{sen}[(1+\mu_1)\vartheta] \end{Bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

➤ per il modo II:

(2.10.2)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\vartheta} \end{Bmatrix} &= \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left\{ \begin{Bmatrix} (1+\lambda_2) \text{sen}[(1-\lambda_2)\vartheta] \\ (3-\lambda_2) \text{sen}[(1-\lambda_2)\vartheta] \\ -(1-\lambda_2) \cos[(1-\lambda_2)\vartheta] \end{Bmatrix} + (1+\lambda_2) \chi_2 \begin{Bmatrix} \text{sen}[(1+\lambda_2)\vartheta] \\ -\text{sen}[(1+\lambda_2)\vartheta] \\ -\cos[(1+\lambda_2)\vartheta] \end{Bmatrix} \right\} - \\ &- \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2-\lambda_2} \left\{ [(1-\lambda_2) + (1+\lambda_2) \chi_2] \begin{Bmatrix} \text{sen}[(1+\mu_2)\vartheta] \\ -\text{sen}[(1+\mu_2)\vartheta] \\ -\cos[(1+\mu_2)\vartheta] \end{Bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

dove  $a_1$  ed  $a_2$  sono dei coefficienti da determinarsi.

L'esponente reale  $\lambda$  coincide con il parametro di Williams e si ottiene risolvendo le equazioni:

(2.11.1)                      modo I                       $\text{sen}[q \pi \lambda_1] + \lambda_1 \text{sen}[q \pi] = 0$

(2.11.2)                      modo II                       $\text{sen}[q \pi \lambda_2] - \lambda_2 \text{sen}[q \pi] = 0$

$\mu$  è un esponente reale, con  $\mu < \lambda$ , la cui espressione è

(2.11.3)                      modo I                       $\mu_1 = \frac{1}{q} - \left\{ \frac{(1-\lambda_1)^2 - \frac{1}{q}(1+\lambda_1) + \chi_1(1-\lambda_1) \left[ (1+\lambda_1) - \frac{1}{q} \right]}{[(3-\lambda_1) - \chi_1(1-\lambda_1)]} \right\} -$

1

(2.11.4)                      modo II                       $\mu_2 = - \left\{ \frac{(3-\lambda_2)(1-\lambda_2) - \chi_2(1+\lambda_2)^2}{[(1-\lambda_2) + \chi_2(1+\lambda_2)]} \right\} - 1$

$\chi_i$  è un termine dato da

(2.11.5)                       $\chi_i = \frac{\text{sen}(1-\lambda_i) q \frac{\pi}{2}}{\text{sen}(1+\lambda_i) q \frac{\pi}{2}}$

$(1 - \lambda_i)$  è detto **grado di singolarità**.

L'andamento del grado di singolarità per i modi I e II in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$  è mostrato in fig. 2.4. Da tale grafico si nota che il modo I è sempre singolare mentre il modo II è singolare solo per  $0 < 2\alpha < 102^\circ$ .

La Tabella 2.I dà il valore di tutti i parametri in gioco per sei angoli di apertura.

Tab. 2.I

$2\alpha$ [rad/ $\pi$ ]	q	$r_0/\rho$	Modo I			Modo II		
			$\lambda_1$	$\chi_1$	$\mu_1$	$\lambda_2$	$\chi_2$	$\mu_2$
0	2.000	0.500	0.500	1.000	-0.500	0.500	1.000	-0.500
1/6	1.833	0.455	0.501	1.071	-0.424	0.598	0.921	-0.259
1/4	1.750	0.429	0.505	1.166	-0.389	0.660	0.814	-0.145
1/3	1.667	0.400	0.512	1.312	-0.354	0.731	0.658	-0.033
1/2	1.500	0.333	0.544	1.841	-0.280	0.909	0.219	0.190
3/4	1.250	0.200	0.674	4.153	-0.150	1.302	-0.569	0.553

La tensione massima all'apice dell'intaglio è pari a:

$$(2.12) \quad \sigma_g \Big|_{\substack{r=r_0 \\ g=0}} = 4 \lambda_1 r_0^{\lambda_1-1} a_1 = \sigma_{\text{Imax}}$$

da cui è possibile ricavare il parametro  $a_1$ .

I Notch Stress Intensity Factors (N-SIF),  $K_1$  e  $K_2$ , possono essere ottenuti in accordo con Gross e Mendelson<sup>[8]</sup> (1972):

$$(2.13.1) \quad K_1 = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} [r^{1-\lambda_1} (\sigma_g|_{g=0})]$$

$$(2.13.2) \quad K_2 = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} [r^{1-\lambda_2} (\tau_{rg}|_{g=0})]$$

$K_1$  e  $K_2$  vanno calcolati lungo la bisettrice perché lì i modi I e II sono disaccoppiati e  $\sigma_g$  dipende solo dal modo I mentre  $\tau_{rg}$  dipende solo dal modo II.

Applicando le (2.10) alle (2.13) si ottengono

$$(2.14.1) \quad \text{modo I} \quad K_1 = \sqrt{2\pi} \lambda_1 a_1 [(1 + \lambda_1) + \chi_1 (1 - \lambda_1)]$$

$$(2.15.2) \quad \text{modo II} \quad K_2 = -\sqrt{2\pi} \lambda_2 a_2 [(1 - \lambda_2) + \chi_2 (1 + \lambda_2)]$$

Sia il campo di tensioni che gli N-SIF sono noti a meno di una costante. Pertanto, è possibile:

- noti  $K_1$  e  $K_2$  determinare  $a_1$  ed  $a_2$  e quindi calcolare le tensioni;
- note le tensioni, calcolare  $a_1$  ed  $a_2$  e quindi determinare  $K_1$  e  $K_2$ .

È possibile, ricavare come casi particolari altre soluzioni molto note della letteratura. In particolare:

**Intaglio non raccordato:**  $\rho = 0$ . La distanza  $r_0$  si annulla ed i termini proporzionali a  $r^u$  scompaiono. Si ottengono le *equazioni di Williams*, definite a meno di una costante moltiplicativa. Per il Modo I si ha:

$$(2.16.1) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\vartheta} \end{Bmatrix} = \lambda_1 a_1 r^{\lambda_1-1} \left\{ \begin{Bmatrix} (1+\lambda_1) \cos[(1-\lambda_1)\vartheta] \\ (3-\lambda_1) \cos[(1-\lambda_1)\vartheta] \\ (1-\lambda_1) \text{sen}[(1-\lambda_1)\vartheta] \end{Bmatrix} + (1-\lambda_1) \chi_1 \begin{Bmatrix} \cos[(1+\lambda_1)\vartheta] \\ -\cos[(1+\lambda_1)\vartheta] \\ \text{sen}[(1+\lambda_1)\vartheta] \end{Bmatrix} \right\}$$

Per il Modo II

$$(2.16.2) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\vartheta} \end{Bmatrix} = \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left\{ \begin{Bmatrix} (1+\lambda_2) \text{sen}[(1-\lambda_2)\vartheta] \\ (3-\lambda_2) \text{sen}[(1-\lambda_2)\vartheta] \\ -(1-\lambda_2) \cos[(1-\lambda_2)\vartheta] \end{Bmatrix} + (1+\lambda_2) \chi_2 \begin{Bmatrix} \text{sen}[(1+\lambda_2)\vartheta] \\ -\text{sen}[(1+\lambda_2)\vartheta] \\ -\cos[(1+\lambda_2)\vartheta] \end{Bmatrix} \right\}$$

**Cricca:**  $\rho=0$  e  $2\alpha=0$ . Si ottengono le *equazioni di Westergaard-Irwin*:

$$(2.17.1) \quad \text{Modo I} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\vartheta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \frac{a_1}{\sqrt{r}} \begin{Bmatrix} 3 \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \\ 5 \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \end{Bmatrix}$$

$$(2.17.1) \quad \text{Modo II} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\vartheta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \frac{a_2}{\sqrt{r}} \begin{Bmatrix} 3 \text{sen}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + 3 \text{sen}\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \\ 5 \text{sen}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - 3 \text{sen}\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - 3 \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \end{Bmatrix}$$

**Intaglio ad U:**  $2\alpha=0$ ,  $\rho \neq 0$ . Si ottengono le equazioni di *Creager-Paris* (1967) e *Glinka* (1985) (basta porre  $r_0 = \rho$ ):

$$(2.18.1) \quad \text{Modo I} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\vartheta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \frac{a_1}{\sqrt{r}} \left\{ \begin{Bmatrix} 3 \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \\ 5 \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \end{Bmatrix} + \frac{2\rho}{r} \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \end{Bmatrix} \right\}$$

$$(2.18.2) \quad \text{Modo II} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r,\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \frac{a_2}{\sqrt{r}} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 3\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3\text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 5\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{array} \right] - \frac{2\rho}{r} \begin{Bmatrix} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} \end{array} \right\}$$

Le equazioni approssimate (2.10) sono valide anche in piastre di larghezza finita soggette a modo I, limitatamente alle zone in cui si ha  $\sigma_\theta > \sigma_{nom}$ . Quanto maggiore è il valore della tensione massima, e quindi il fattore teorico di concentrazione delle tensioni, tanto maggiore è il campo di utilizzo delle equazioni.

## 2.6 IL MODO III: TORSIONE

Nel settore ingegneristico l'utilizzo di alberi prismatici per la trasmissione del momento torcente è molto diffuso, ragion per cui la determinazione del campo di tensione provocato dai difetti è argomento molto importante a cui si sono interessati il Neuber<sup>[5]</sup> che studiò il caso di alberi caratterizzati da intagli ad U (blunt notch) circolarziali e successivamente Craiger e Paris<sup>[6]</sup> fornirono una soluzione per la determinazione del campo di stress elastico nelle vicinanze dell'apice di cricche ad U (blunt cracks o slim parabolic notches) sottoposti a carichi di modo I, II, III.

Recentemente il problema è stato affrontato da Zappalorto e Lazzarin<sup>[13][14]</sup> che hanno proposto una soluzione in forma chiusa per la determinazione dei campi di tensione, deformazione e spostamento indotti da intagli semiellittici, iperbolici e parabolici circolarziali in alberi sottoposti a torsione. Tale soluzione è ottenuta utilizzando la teoria dei potenziali complessi applicati ad un sistema di coordinate curvilinee.

Si consideri un corpo assialsimmetrico caratterizzato da un intaglio circolarziale di forma generica e caricato con una tensione di taglio all'infinito pari a  $\tau_\infty$ , risultato di uno spostamento  $w$  lungo  $z$ , normale al piano della sezione (che giace sul piano  $xy$ ) dell'intaglio (fig. 2.6).

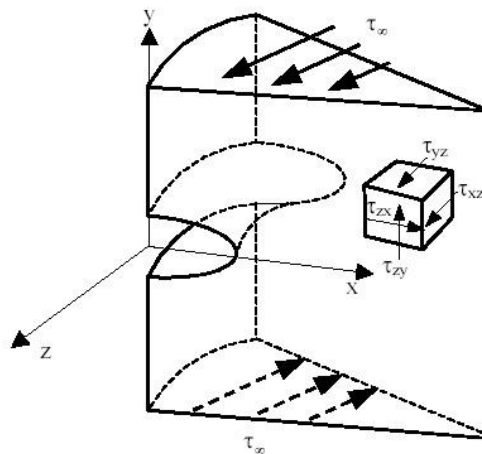


Fig. 2.6: modello per lo studio della torsione

Come conseguenza diretta del campo di spostamento, tutte le componenti del tensore di deformazione sono nulle tranne le componenti di scorrimento sui piani  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , ed in assenza di forze di massa l'equazione di equilibrio lungo la direzione  $z$  porta alla conclusione che  $\nabla^2 w = 0$ . La funzione spostamento  $w$  è una funzione armonica.

È noto che, una funzione reale che è soluzione dell'equazione di Laplace può essere scritta come parte reale di una funzione analitica  $H(z)$

$$(2.19) \quad H(z) + \overline{H(\bar{z})} = 2 \operatorname{Re}[H(z)] = 2 G w$$

e partendo da questa si ottiene

$$(2.20) \quad \tau_{rz} - i \tau_{\varphi z} = e^{i\varphi} H'(z)$$

La generalità del metodo è testimoniata dal fatto che l'unica ipotesi restrittiva su  $H(z)$  riguarda il suo olomorfismo e dal fatto che, in assenza di forze di massa, stress e spostamenti non variano con un cambiamento di origine.

Particolarmente interessante risulta l'applicazione di un sistema di coordinate iperbolico parabolico come già introdotto da Lazzarin-Tovo<sup>[9]</sup> (fig. 2.5).

Introducendo quindi la funzione

$$(2.21) \quad H(z) = A z^{\lambda_3} \quad \Rightarrow \quad H'(z) = (A_1 + i A_2) \lambda z^{\lambda_3-1}$$

dove  $\lambda_3$  è un numero reale, si giunge a determinare sia il campo di tensione che quello di deformazione relativo ad intagli iperbolici e parabolici su alberi circolari soggetti a torsione (Modo III).

In particolare il campo di tensione risulta

$$(2.22) \quad \begin{Bmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\varphi} \end{Bmatrix} = -\lambda_3 r^{\lambda_3-1} A_2 \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}(\lambda_3 \varphi) \\ \operatorname{cos}(\lambda_3 \varphi) \end{Bmatrix}$$

mentre la funzione spostamento è

$$(2.23) \quad w = -\lambda_3 r^{\lambda_3-1} A_2 \operatorname{sen}(\lambda_3 \varphi)$$

dove

$$(2.24) \quad \lambda_3 = \frac{\pi}{2\gamma} = \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad 1 - \lambda_3 = 1 - \frac{\pi}{2\gamma} = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi - 2\alpha}$$

è l'esponente di Williams per il modo III. La fig. 2.7 mostra l'andamento di  $(1 - \lambda_3)$  in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio; il modo III è sempre singolare.

I campi di tensione, deformazione e spostamento sono definiti a meno di una costante moltiplicativa  $A_2$  che può essere determinata in funzione del carico esterno applicato.

Nessuna ipotesi restrittiva è stata posta sui valori del raggio all'apice e sull'angolo di apertura dell'intaglio.

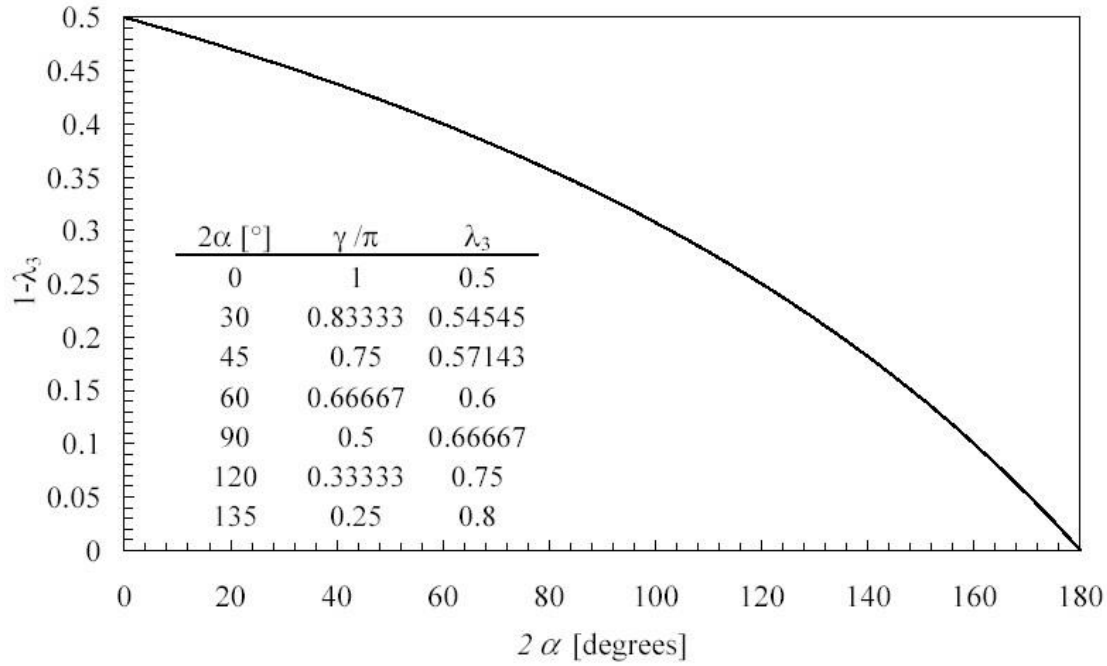


Fig. 2.7: grado di singolarità di Modo III

Per quanto riguarda la determinazione dell'N-SIF di modo III, può essere estesa la definizione data da Mendelson e Gross<sup>[8]</sup> per i problemi piani, al caso non piano

$$(2.25) \quad K_{3\rho} = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow r_0^+} (r^{1-\lambda_3} \tau_{z\varphi}(r, \varphi = 0))$$

da cui

$$(2.26) \quad A_2 = -K_{3\rho} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \lambda_3}$$

Quando il raggio dell'intaglio non è nullo, o non troppo piccolo, il coefficiente  $A_2$  può essere determinato come funzione della massima tensione di taglio all'apice dell'intaglio

$$(2.27) \quad A_2 = -\frac{1}{\lambda_3 r_0^{\lambda_3-1}} \tau_{\max} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\varphi} \end{Bmatrix} = \tau_{\max} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_3-1} \begin{Bmatrix} \text{sen}(\lambda_3\varphi) \\ \text{cos}(\lambda_3\varphi) \end{Bmatrix}$$

da cui l'N-SIF generalizzato, funzione della tensione di taglio massima

$$(2.28) \quad K_{3\rho} = \tau_{\max} \sqrt{2\pi} r_0^{1-\lambda_3}$$

**Cricca.** Si hanno  $2\alpha = 0^\circ$  e  $\rho = 0$  da cui  $\lambda_3 = 0.5$ , ed identificando  $K_3$  con  $K_{III}$ , come nella MFLE, si ha

$$(2.29) \quad \begin{Bmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\varphi} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r_3}} \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \operatorname{cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{Bmatrix}$$

**Intaglio parabolico.** È rappresentato da  $2\alpha = 0^\circ$  e  $\rho \neq 0$  da cui  $\lambda_3 = 0.5$ ,

$$(2.30) \quad \begin{Bmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\varphi} \end{Bmatrix} = \frac{K_{3\rho}}{\sqrt{2\pi r_3}} \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \operatorname{cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{Bmatrix} = \tau_{\max} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{0.5} \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \operatorname{cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{Bmatrix}$$

che è lo stesso risultato ottenuto da Craiger-Paris<sup>[6]</sup>.

**Intaglio a V non raccordato.** Quando  $\rho = 0$  il campo di tensione può essere scritto in termini del parametro di campo  $K_3^N$ :

$$(2.31) \quad \begin{Bmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\varphi} \end{Bmatrix} = K_3^N \frac{r^{\lambda_3-1}}{\sqrt{2\pi}} \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}(\lambda_3\varphi) \\ \operatorname{cos}(\lambda_3\varphi) \end{Bmatrix}$$



## Capitolo 3 PEAK STRESS METHOD

### 3.1 INTRODUZIONE

La verifica dei componenti meccanici soggetti a cricche ed intagli acuti è del tutto simile a quella dei pezzi non intagliati. Si calcola il parametro di sollecitazione, che nel caso di organi criccati è l'N-SIF, e lo si confronta con il limite ammissibile, statico od a fatica.

Per determinare il notch stress intensity factor, dalla letteratura si hanno a disposizione manuali e varie formulazioni che calcolano il  $K_I$  per un certo numero di casi. Quando non si rientra nella casistica di letteratura, un approccio efficace per la determinazione dell'N-SIF è quello numerico. L'esecuzione di analisi FEM e la successiva applicazione delle formula proposte da Gross-Mendelson, (2.13.1), (2.13.2) e (2.25) rispettivamente per i modi I, II e III permettono di ricavare l'N-SIF ed i parametri incogniti.

Noto il  $K_I$ , è possibile poi inserirlo nella formulazione scelta, ad esempio quella proposta da Lazzarin-Tovo<sup>[9]</sup>, e dare la descrizione analitica dell'intero campo di tensione, ovviamente entro i limiti della formulazione stessa.

Il procedimento è tuttavia alquanto costoso.

L'applicazione della formula di Gross-Mendelson<sup>[8]</sup> implica la realizzazione di una mesh estremamente fitta nell'intorno dell'apice dell'intaglio (lati dell'elemento dell'ordine di  $10^{-3}$  mm). Mesh di questo tipo sono estremamente onerose in termini di tempo di esecuzione, di calcolo e di lettura dei risultati e sono applicabili solo su modelli di dimensioni ridotte.

Allo scopo di ridurre il "costo" di calcolo dell'N-SIF sarebbe auspicabile poter eseguire una mesh relativamente rada ed estrarre un numero molto limitato di valori di tensione, al limite uno soltanto.

È in questa direzione che si sono mossi Lazzarin e Meneghetti<sup>[15]</sup> riprendendo l'idea precedentemente proposta da Nisitani e Teranishi, i quali hanno presentato una procedura numerica che permette di stimare  $K_I$  sulla base della  $\sigma_{\text{peak}}$  calcolata all'apice della cricca, mediante analisi FE caratterizzate da mesh con elementi di dimensioni costanti.

Gli studi di Nisitani e Teranishi<sup>[16][17]</sup> analizzano una cricca che nasce da una cava elissoidale e dimostrano che il rapporto  $K_I/\sigma_{\text{peak}}$ , lineare elastico, dipende solo dalla taglia dell'elemento, così che il valore di  $\sigma_{\text{peak}}$  può essere utilizzato rapidamente per la stima di  $K_I$ . Il metodo necessita solo di una validazione della mesh adottata su geometrie simili, per le quali si conosce  $K_I$ .

Nasce il *peak stress method* (PSM).

Lazzarin e Meneghetti (2006) riescono a dare una giustificazione teorica al PSM partendo dai risultati analitici documentati in letteratura per intagli a V acuti e raccordati, dimostrando, in particolare, che il rapporto  $(K_I^V/\sigma_{\text{peak}})$  può essere calcolato analiticamente per differenti angoli di apertura dell'intaglio. Parallelamente, essi conducono analisi FE facendo uso di modelli piani, elementi piani a 4 nodi e prendono in considerazione intagli acuti sollecitati a trazione (Modo I), con lo scopo di validare la trattazione teorica ma anche di estenderla, fino a determinare una formula di semplice utilizzo per ricavare il rapporto  $(K_I^V/\sigma_{\text{peak}})$  al variare della taglia della mesh.

### 3.2 IL PEAK STRESS METHOD (PSM)

Un'espressione che correla la massima tensione elastica all'apice delle cricche e lo SIF di modo I è dovuta a Irwin<sup>[4]</sup>:

$$(3.1) \quad K_I = \frac{1}{2} \sigma_{\max} \sqrt{\pi \rho}$$

dove  $\rho$  è il raggio di curvatura, e Glinka ne estese l'uso anche agli intagli comuni, soggetti ad un carico di Modo I.

Lazzarin e Filippi<sup>[18]</sup> hanno analizzato il collegamento tra i parametri che regolano il campo di stress negli intagli acuti a V,  $K_{\rho,I}^V$ , e negli intagli a V raccordati,  $K_{\rho,I}^V$ , per i quali è stata fornita una definizione corretta.

Per intagli a V con angolo di apertura  $30^\circ \leq 2\alpha \leq 135^\circ$ , è stata proposta la seguente relazione:

$$(3.2) \quad \frac{K_{\rho,I}^V}{K_I^V} = \varphi + \psi \frac{\rho}{a}$$

dove  $a$  e  $\rho$  sono la profondità dell'intaglio ed il raggio di curvatura all'apice, rispettivamente, mentre  $\varphi$  e  $\psi$  sono due parametri che dipendono solo dall'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$ . La relazione fornita per lo stress di picco elastico risulta

$$(3.3) \quad \sigma_{\max} = (1 + \omega_1) \frac{K_{\rho,I}^V}{\sqrt{2\pi} r_0^{1-\lambda_1}}$$

dove  $r_0$  è la distanza dell'origine del sistema di riferimento dall'apice dell'intaglio, come mostrato in Fig. 3.1, e  $\omega_1$  è un parametro ausiliario che dipende dall'angolo  $2\alpha$ . La distanza  $r_0$  varia in funzione di  $2\alpha$  secondo la

$$(3.4) \quad r_0 = \frac{q-1}{q} \rho = \frac{\pi-2\alpha}{2\pi-2\alpha} \rho$$

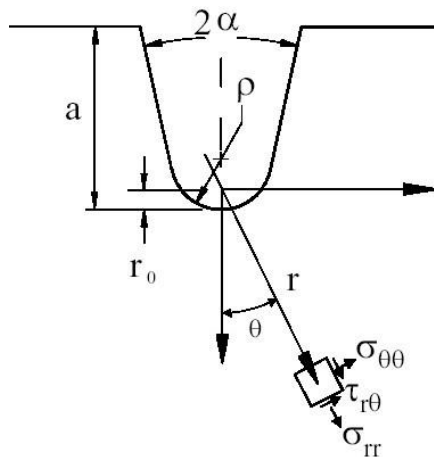


Fig. 3.1: intaglio generalizzato

Si analizzi ora un intaglio a V non raccordato, di apertura  $2\alpha$  e profondità  $a$ , utilizzando una mesh con una ben precisa dimensione del lato degli elementi. Da tale analisi si ottiene una determinata  $\sigma_{\text{peak}}$ . Si individui ora un intaglio a V avente la stessa apertura e profondità del precedente ma raccordato, ed in particolare si scelga quel valore di  $\rho$  tale che, applicando la (3.3), sia  $\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{peak}}$ . Tale raggio sarà indicato con  $\rho^*$ .

L'operazione fatta permette di individuare i parametri  $K_I^V$  e  $K_{\rho,I}^V$  da inserire nella (3.2). A questo punto, Lazzarin e Filippi introducono la supposizione che  $\varphi$  sia molto maggiore di  $\psi(\rho^*/a)$ , ipotesi verificata positivamente a posteriori, per cui (3.2) diventa

$$(3.5) \quad \frac{K_{\rho,I}^V}{K_I^V} \cong \varphi$$

Sostituendo la (3.5) nella (3.3) segue

$$(3.6) \quad \frac{\sigma_{\text{peak}}}{K_I^V} \cong (1 + \omega_1) \frac{\varphi}{\sqrt{2\pi} \left( \frac{q-1}{q} \rho^* \right)^{1-\lambda_1}}$$

La (3.6) fornisce il rapporto  $(K_I^V/\sigma_{\text{peak}})$ ; fissato l'angolo di apertura dell'intaglio, il rapporto non dipende dalla profondità dell'intaglio  $a$ , ma solo dal raggio di raccordo  $\rho^*$ . Implicitamente, il rapporto  $(K_I^V/\sigma_{\text{peak}})$  dipende strettamente dalla mesh adottata, sia come dimensione che come tipo, in quanto mezzo per arrivare a  $\rho^*$ .

Fissati, quindi, l'angolo di apertura dell'intaglio e la dimensione della mesh, da cui  $\rho^*$ , il rapporto  $(K_I^V/\sigma_{\text{peak}})$  diventa una costante: è questa la conclusione di Lazzarin-Meneghetti<sup>[11]</sup> a giustificazione teorica del metodo del picco di tensione (PSM).

Un lavoro di verifica eseguito su alcune tipologie di intagli, utilizzando mesh grossolane con elementi di lato 1 mm, ha mostrato come il valore di  $\rho^*$  possa essere assunto costante e pari a 2.85. Questo ha permesso a Lazzarin e Meneghetti<sup>[11]</sup> di controllare l'attendibilità della (3.6), e mantenendo costante la dimensione della mesh ad 1 mm, il riscontro ottenuto è ottimo.

Il passaggio successivo è stato quello di variare la dimensione della mesh allo scopo di estendere il metodo a mesh il più possibile grossolane.

L'indagine è stata condotta attraverso calcoli FE con cui si sono analizzate le tipologie di intagli riportate in fig. 3.2 variando il rapporto  $a/d$  tra la profondità dell'intaglio  $a$  e la dimensione del lato dell'elemento  $d$ .

Sono stati utilizzati elementi a 4 lati e 4 nodi, lineari (ANSYS Plane 42), la mesh è stata fatta in automatico impostando la dimensione di elemento globale  $d$ . Un controllo è stato fatto a posteriori per accertare che la mesh avesse una forma regolare, del tipo indicato in fig. 3.3. A parità di geometria dell'intaglio, è stato variato il rapporto  $a/d$ .

Con lo scopo di far apparire esplicitamente il contributo di  $d$  nel rapporto  $(K_I^V/\sigma_{\text{peak}})$ , Lazzarin e Meneghetti<sup>[11]</sup> hanno introdotto il rapporto adimensionale  $K_{FE}^*$  così definito

$$(3.7) \quad K_{FE}^* = \frac{K_I^V}{\sigma_{peak} d^{1-\lambda_1}} \cong \frac{\sqrt{2\pi} \left( \frac{q-1}{q} \rho^* \right)^{1-\lambda_1} \left( \frac{\rho^*}{d} \right)^{1-\lambda_1}}{\varphi (1 + \omega_1)}$$

in cui si pone  $\rho^*/d = 2.85$  come precedentemente determinato. Le simulazioni FEM hanno mostrato che ai fini pratici si può definire un unico valore per  $K_{FE}^*$ , indipendentemente dall'angolo di apertura dell'intaglio:

$$(3.8) \quad K_{FE}^* = \frac{K_I^V}{\sigma_{peak} d^{1-\lambda_1}} = 1.38$$

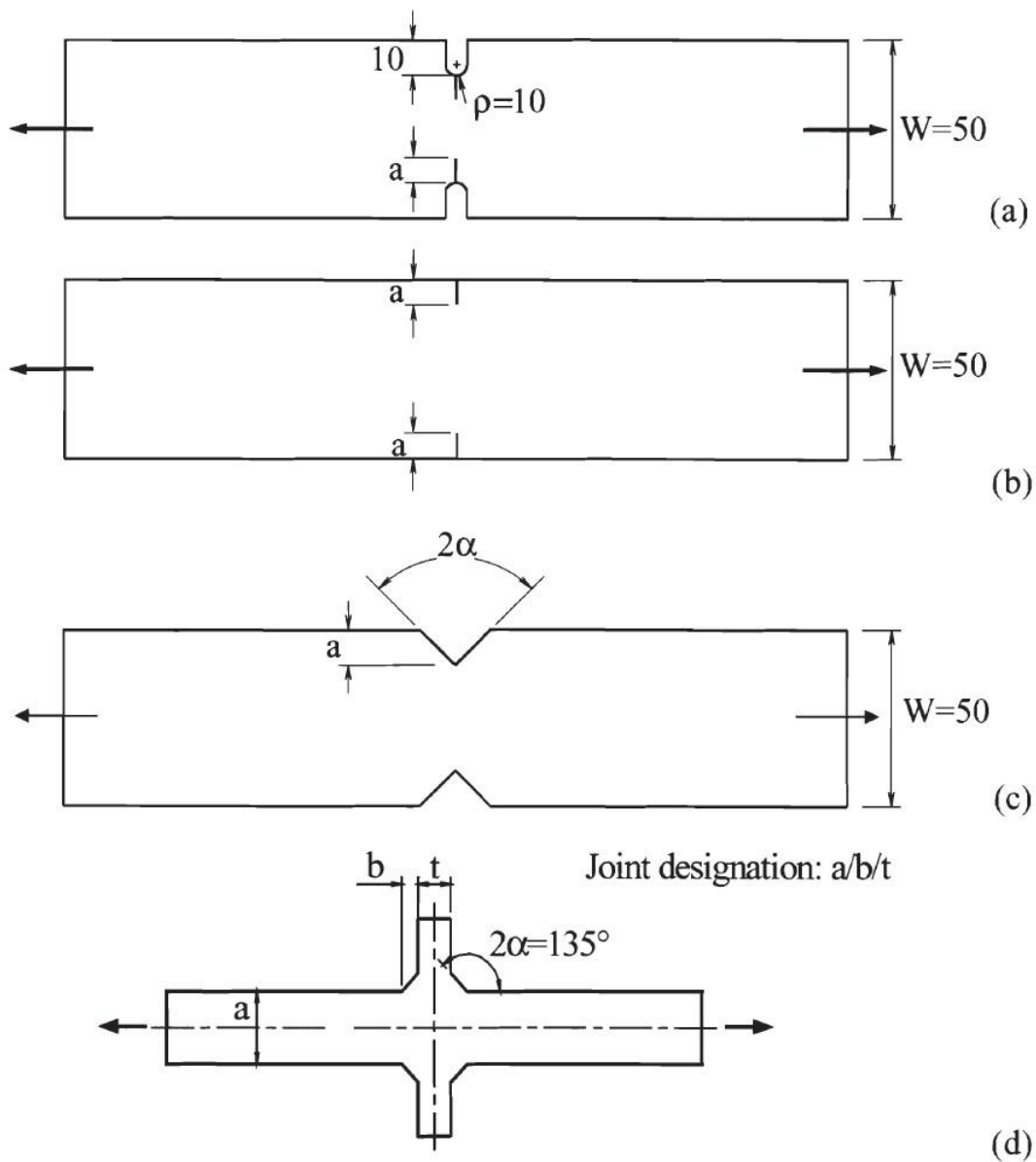


Fig. 3.2: geometrie studiate da Lazzarin-Meneghetti

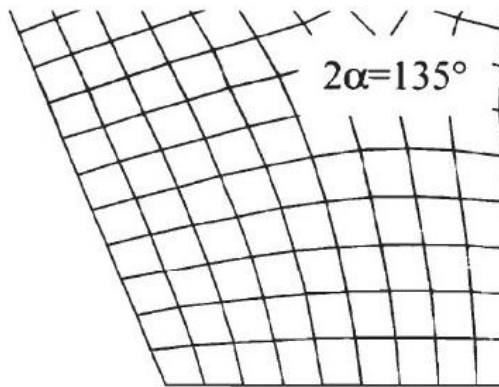


Fig. 3.3: forma della mesh all'apice dell'intaglio

Infatti, per  $a/d \geq 3$  tutti i valori di  $K_{FE}^*$  ottenuti si collocano entro una fascia di scarto del  $\pm 3\%$  dal suddetto valore.

A rigore, la validità di (3.8) è per:

- Elementi piani a 4 nodi (PLANE 42 di ANSYS 8.0);
- Mesh del tipo mostrato in fig. 3.3 e simili;
- Intagli a V caratterizzati da angoli di apertura  $2\alpha$  da 0 a 135.

### 3.3 COMMENTI

Il PSM si presenta come un metodo vantaggiosamente applicabile, anche in casi complessi, per la determinazione del  $K_I$  di organi meccanici caratterizzati da intagli acuti.

Schematicamente possiamo caratterizzarlo come segue:

- Teoria: è un metodo che ha una giustificazione teorica (Meneghetti-Lazzarin);
- Applicabilità, forma della mesh. Nell'intorno dell'intaglio la mesh deve avere una forma particolare, simile a quelle utilizzate da Meneghetti e Lazzarin, pertanto si deve guidare opportunamente il meshatore automatico suddividendo allo scopo l'area o il volume nell'intorno dell'apice dell'intaglio.
- Applicabilità, fittezza della mesh. La fittezza della mesh non deve essere elevata. Spesso non è individuabile univocamente la profondità dell'intaglio  $a$  ma questo non ostacola l'applicabilità del metodo, basta infatti individuarne una profondità convenzionale per stabilire il valore di  $d$  da adottare.
- Applicabilità, elementi. A quattro lati, quattro nodi, lineari.
- Applicabilità, serve unicamente la lettura del picco di tensione, quindi la lettura di un solo risultato.
- Calcolo del  $K_I$ . Si applica la (3.8), nella quale l'unica incognita è, appunto, il  $K_I^V$ .

L'utilizzo di elementi con funzione di forma lineare è poco adatto ad analizzare geometrie raccordate ed inoltre sarebbe auspicabile allargare l'applicabilità in termini di forma della mesh.



## Capitolo 4 PEAK STRESS METHOD: MODO I

### 4.1 INTRODUZIONE

Il lavoro proposto da Lazzarin e Meneghetti<sup>[11]</sup>, di cui brevemente riportato al cap. 3, ha tra le sue peculiarità l'adozione di elementi caratterizzati da funzioni di forma lineari (4 lati, 4 nodi).

Questi elementi sono perfettamente adeguati a discretizzare geometrie caratterizzate da lati rettilinei o archi con raggi di curvatura molto ampi, ma possono essere inadeguati a discretizzare geometrie composte da archi con raggi di curvatura piccoli.

In fig. 4.1 si ha un esempio. Il modello presenta una geometria caratterizzata da uno scarico a forma di arco di circonferenza. Questo potrebbe essere la porzione di un foro in una piastra, piuttosto che l'estremità di un U-blunt notch, centrale o di estremità.

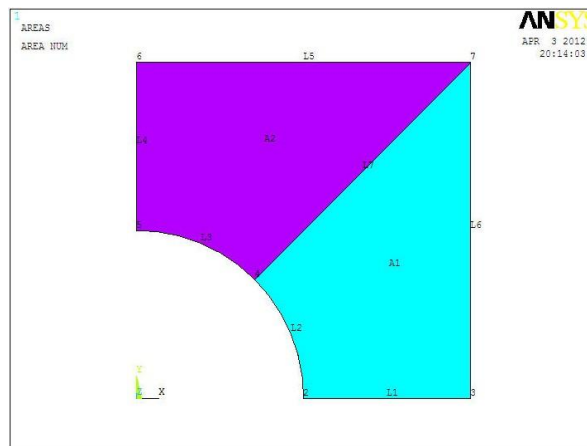


Fig. 4.1: geometria

La fig. 4.2a mostra una mesh fatta con elementi a 2 nodi per lato, che va a dividere l'arco di 90° in 4 elementi. La fig. 4.2b mostra la stessa geometria discretizzata da una mesh con uguale suddivisione ma fatta con elementi a 3 nodi per lato.

È evidente come la seconda mesh si conformi molto meglio alla geometria iniziale. Questa miglior riproduzione della geometria non si riduce ad un fattore puramente estetico ma si ripercuote anche nel calcolo delle tensioni e delle deformazioni nodali, quindi ha importanti implicazioni numeriche.

Non deve quindi meravigliare se, a parità di dimensione della mesh, si ottengono risultati diversi da analisi che adottano i due tipi di elementi sulla stessa geometria, soprattutto se la mesh è rada.

Il primo passo che si vuole fare nella direzione dell'estensione del PSM è quello di utilizzare elementi non lineari. Questa apertura va nella direzione di analizzare anche gli intagli raccordati.

In particolare, l'obiettivo che ci si pone è quello di stabilire se ed in quale misura la relazione proposta da Lazzarin-Meneghetti<sup>[11]</sup> (3.8) possa ancora ritenersi valida e come, eventualmente, vada modificata.

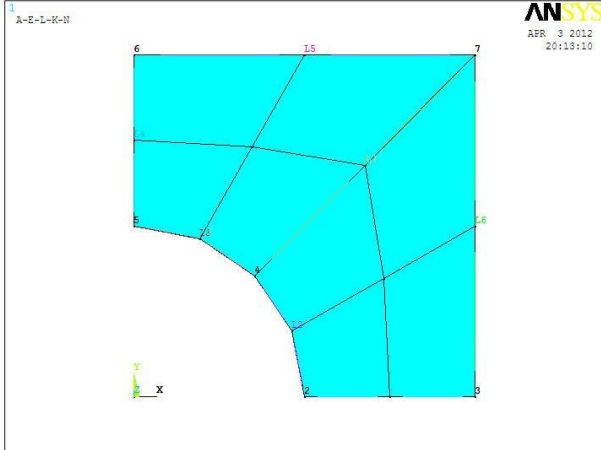


Fig. 4.2a: mesh con elementi a 2 nodi/lato

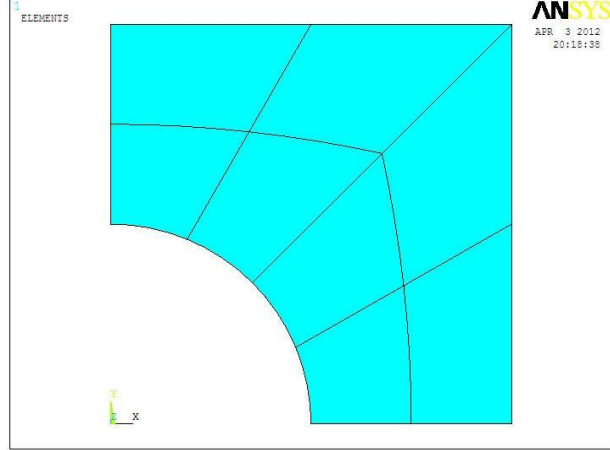


Fig. 4.2b: mesh con elementi a 3 nodi/lato

Si analizzeranno intagli a V non raccordati, su modelli piani. I parametri che saranno variati sono:

- profondità dell'intaglio;
- angolo di apertura dell'intaglio;
- dimensione globale della mesh.

Le geometrie di cui sopra saranno analizzate sia con mesh di elementi piani a 4 nodi che di elementi piani ad 8 nodi.

Per ogni geometria verrà calcolato il  $K_I$  con un'analisi a mesh fitta, utilizzando elementi a 4 nodi ed applicando la formula di Gross-Mendelson<sup>[8]</sup> (2.13.1).

Successivamente, fissati la profondità e l'angolo di apertura dell'intaglio, si procederà ad una serie di analisi nelle quali si varieranno la dimensione globale della mesh. Per ognuna di esse sarà registrata la tensione di picco che si ha all'apice dell'intaglio. Tali analisi verranno eseguite dapprima utilizzando elementi a 4 nodi e poi utilizzando elementi ad 8 nodi. In entrambi i casi forma e dimensioni della mesh saranno le stesse.

La prima serie di analisi, quelle con elementi a 4 nodi, ha lo scopo di creare un collegamento con il lavoro fatto da Lazzarin e Meneghetti<sup>[11]</sup> e di validare la mesh utilizzata.

La seconda serie di analisi, quelle con elementi ad 8 nodi, permetterà di tracciare l'andamento di  $K_{FE}^*$  al variare del rapporto  $a/d$  tra la profondità dell'intaglio e la dimensione globale della mesh.

## 4.2 ANALISI PRELIMINARI

Si analizzano una serie di piastre di lunghezza pari a  $2H$  e di larghezza pari a  $2W$  caratterizzate da una coppia di intagli a V non raccordati laterali di profondità  $a$ . In entrambi i casi la bisettrice dei difetti coincide con l'asse di simmetria orizzontale della piastra. Alle estremità della piastra, in direzione verticale viene applicato un carico uniforme  $q=1$  di trazione.

La fig. 4.3 mostra il caso che si va a studiare.

Data la doppia simmetria di geometria e di carico può essere studiato solamente  $\frac{1}{4}$  della piastra.

Il primo step consiste nella determinazione per via numerica del fattore di intensificazione delle tensioni di modo I.

Si procede quindi alla creazione di una mesh molto fitta in prossimità dell'apice degli intagli ed all'applicazione della formula di Gross e Mendelson (2.13.1).

Anche se il grado di singolarità  $(1 - \lambda_1)$  è reperibile da manuali specialistici, si provvede al suo calcolo con una semplice procedura in Excel.

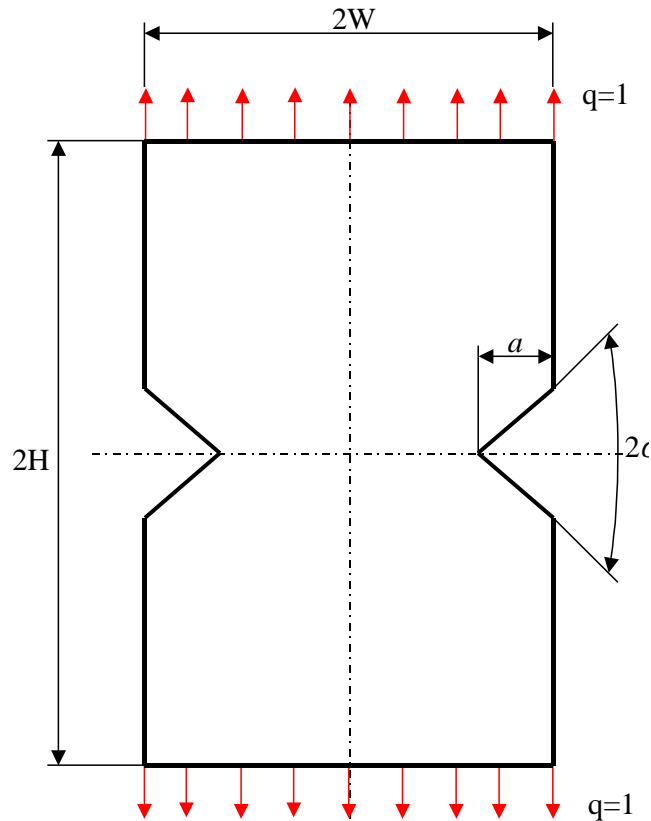


Fig. 4.3: piastra con intagli laterali

Si ottengono i seguenti valori

Tab. 4.I

W [mm]	H [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	$1 - \lambda_1$	$K_I^V$
50	100	5	30	0.498	4.68
50	100	5	45	0.495	5.045
50	100	5	60	0.488	4.895
50	100	5	75	0.475	5.028
50	100	5	90	0.455	5.080
50	100	5	105	0.426	4.908
50	100	5	120	0.384	4.96
50	100	5	135	0.326	4.888

W [mm]	H [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	$1 - \lambda_1$	$K_I^V$
50	100	10	30	0.498	6.4
50	100	10	45	0.495	6.804
50	100	10	60	0.488	6.866
50	100	10	75	0.475	6.739
50	100	10	90	0.455	6.992
50	100	10	105	0.426	6.729
50	100	10	120	0.384	6.620
50	100	10	135	0.326	6.325

Che possono essere riassunti nel grafico di fig. 4.4.

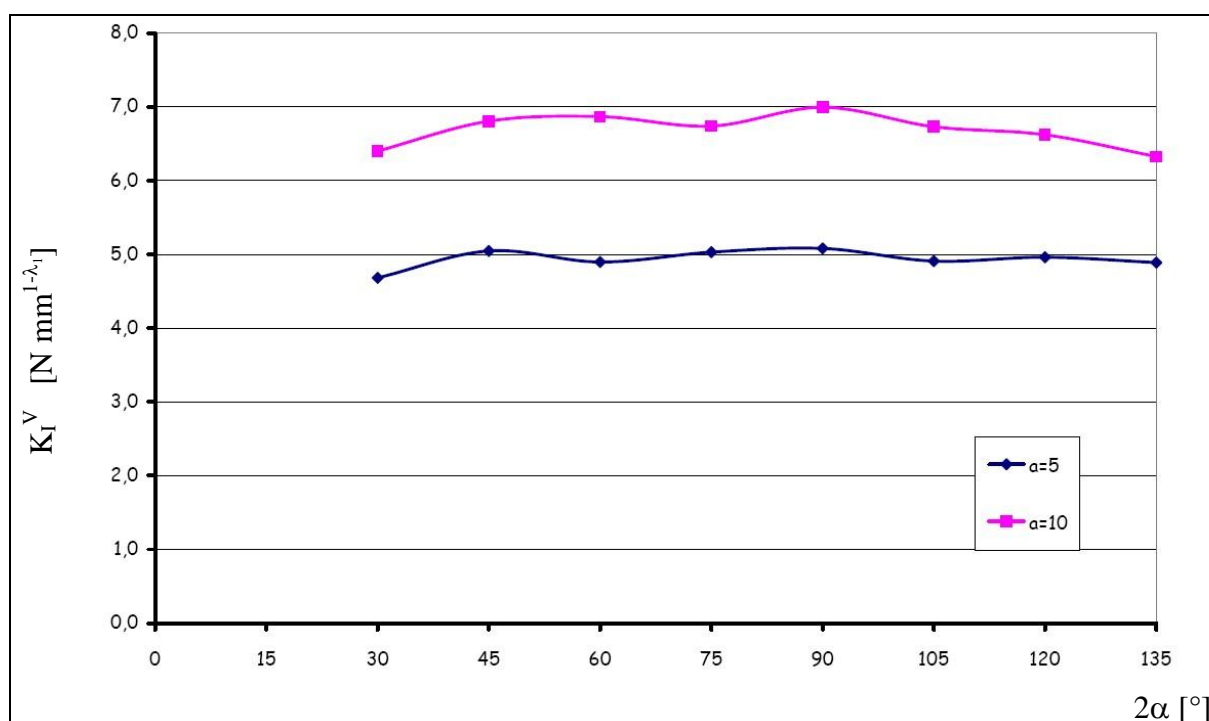


Fig. 4.4: valori del  $K_I^V$  per intagli laterali non raccordati al variare di  $2\alpha$  per  $a=5$  ed  $a=10$

I risultati ottenuti possono essere approssimati come segue:

$$\begin{aligned}
 K_I^V &= 4.892 && \text{per } a = 5 \text{ mm} \\
 K_I^V &= 6.66 && \text{per } a = 10 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

### 4.3 APPLICAZIONE DEL PSM

Come anticipato, si procede all'analisi delle piastre di tab. I con l'intento di applicare il PSM. A tale scopo vengono creati due files di istruzioni in linguaggio APDL, uno per l'uso di elementi a 4 nodi, ed uno per l'uso di elementi ad 8 nodi. I due files contengono ognuno 2 programmi, uno dedicato agli intagli a V con apertura dell'intaglio inferiore a  $120^\circ$  ed uno agli intagli a V con apertura dell'intaglio superiore a  $120^\circ$ . Ogni programma riporta le

istruzioni per la generazione della geometria, l'applicazione delle condizioni al contorno, la meshatura, lo svolgimento dell'analisi e la scrittura dei risultati del modello a cui è dedicato. A parità di modello, i programmi contenuti nei due files si differenziano solamente nella sezione dedicata all'estrazione dei risultati.

La dimensione degli elementi, o in altre parole la fittezza della mesh, viene stabilita impostando la dimensione globale della mesh (ESIZE di Ansys®), fissando prima il valore del rapporto  $a/d$  teorico desiderato e calcolando di conseguenza, nota la dimensione dell'intaglio, la dimensione  $d$  dell'elemento.

Le strategie di meshatura adottate in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio sono mostrate nelle seguenti figure.

Per  $0^\circ < 2\alpha \leq 120^\circ$

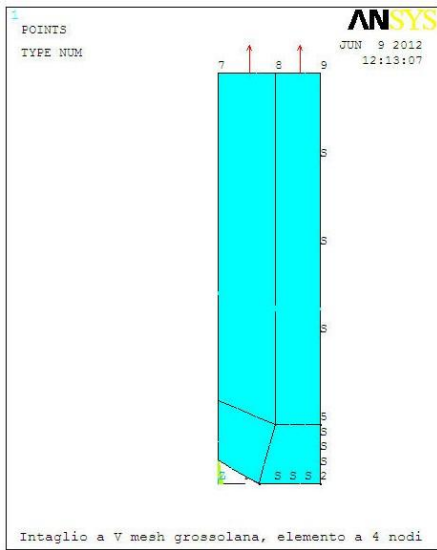


Fig. 4.5a: geometria

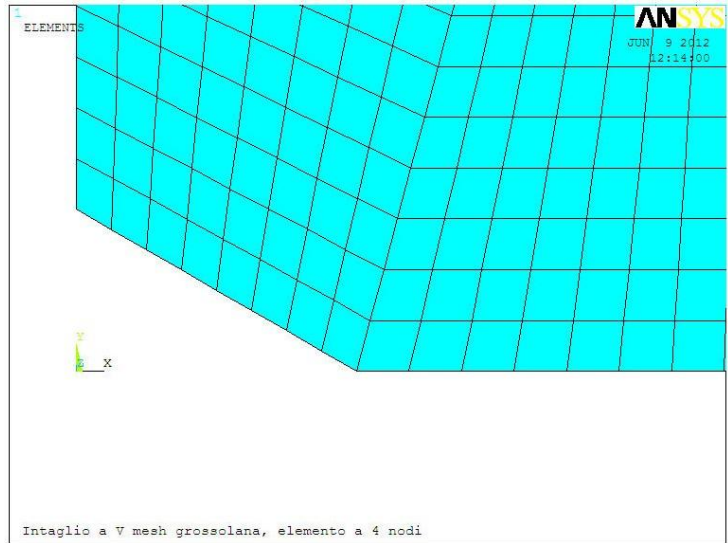


Fig. 4.5b: dettaglio mesh

Per  $120^\circ < 2\alpha \leq 135^\circ$

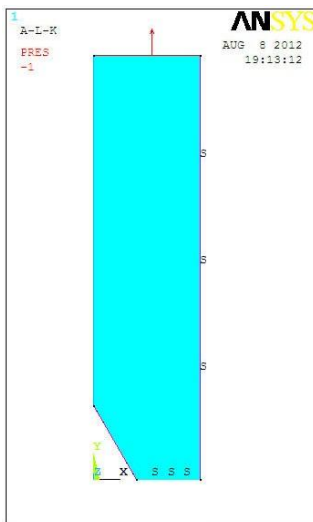


Fig. 4.6a: geometria

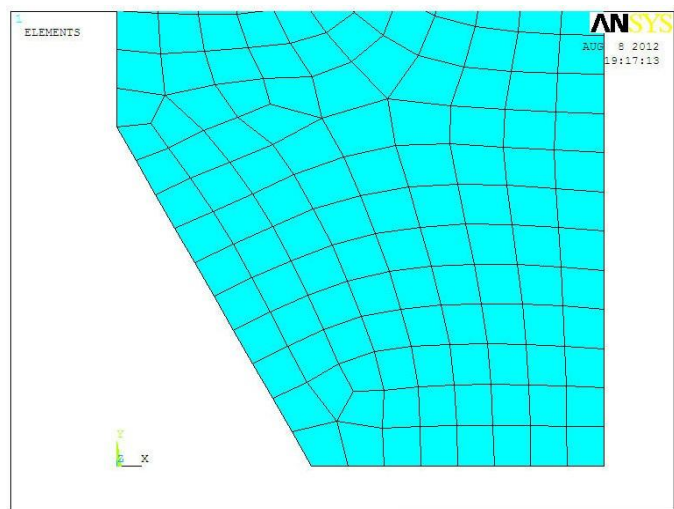


Fig. 4.6b: dettaglio mesh

Vale la pena precisare che la dimensione  $d$  impostata è una dimensione teorica. Infatti, a partire da questa, il software suddividerà le linee del modello con un numero di elementi approssimato per eccesso. La dimensione reale dell'elemento sarà quindi minore o al più uguale a quella impostata.

I rapporti  $a/d$  indagati vanno da 3 a 10 con passo 0.5. Per le dimensioni e gli angoli di apertura degli intagli vale la Tab. I.

### 4.3.1 Analisi con elementi a 4 nodi

La fig. 4.7 riporta i risultati ottenuti nell'analisi degli intagli di cui alla tab. 4.I per  $a/d \geq 3$ .

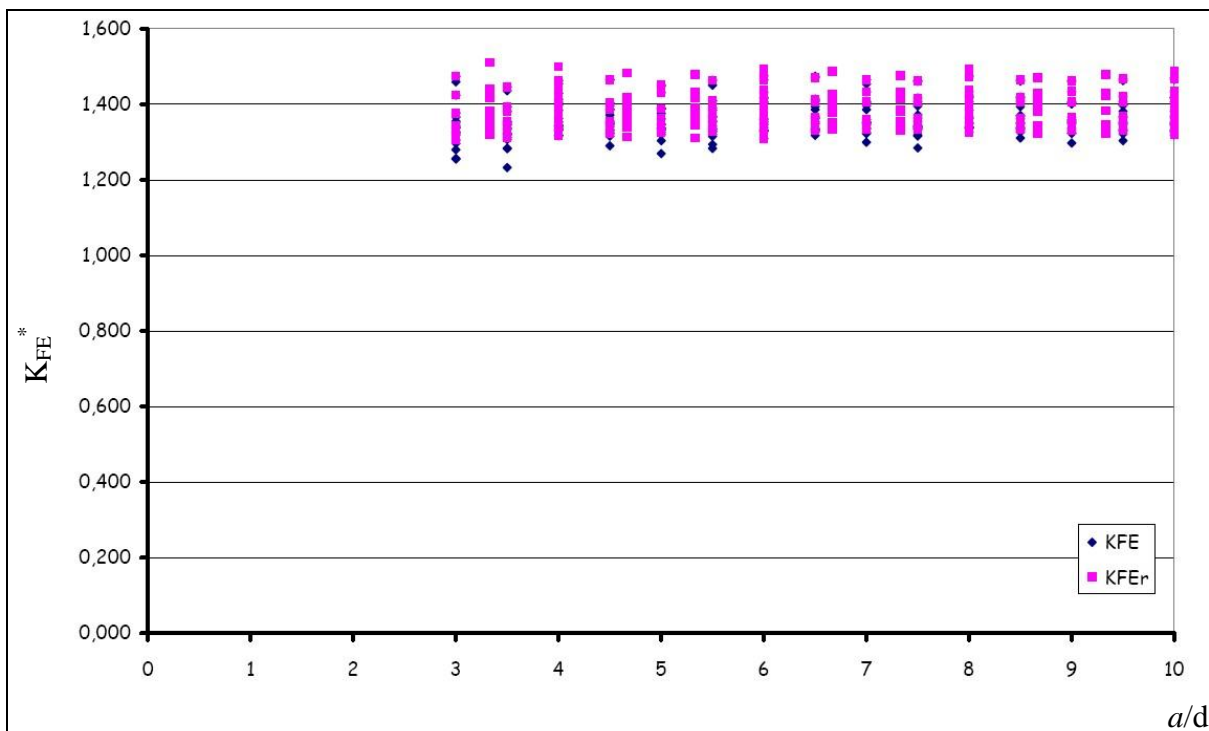


Fig. 4.7: valori del  $K_{FE}^V$  per intagli a V laterali al variare di  $a/d$

Sia i risultati individuati dai rombi blu ( $K_{FE}$ ) che quelli contrassegnati dai quadrati viola ( $K_{FE_r}$ ) sono ottenuti applicando la (3.8) con la differenza che nel primo caso il valore di  $d$  introdotto è quello teorico, impostato, mentre nel secondo è quello reale, distanza fra il nodo posto all'apice dell'intaglio, dove si legge la  $\sigma_{peak}$ , ed il primo nodo successivo lungo la bisettrice dell'intaglio.

Le due serie di risultati si sovrappongono molto bene. Il merito di questo è da attribuire alla felice combinazione di dimensioni tra la cricca e la piastra. In generale, l'estensione della banda  $a/d$  non è la medesima per le due serie di risultati. Infatti, in entrambi i casi si parte dal medesimo rapporto  $a/d$  teorico, da cui  $d$  teorico, ma l'algoritmo di meshatura, che arrotonda per eccesso la divisione dei lati, riduce la dimensione  $d$  reale rispetto a quella teorica, con il conseguente aumento del rapporto  $a/d$ . Lo spostamento del rapporto reale  $(a/d)_r$ , a parità di quello teorico  $(a/d)_t$ , dipende dalle dimensioni del modello e da come è suddiviso; pur

essendo calcolabile in anticipo anche  $(a/d)_r$ , risulta più pratico ed affidabile stabilire la dimensione generale della mesh in base al rapporto  $(a/d)_t$  in quanto sarà sempre

$$(4.1) \quad (a/d)_r \leq (a/d)_t$$

Non solo, i valori del  $K_{FE}^*$  basati sulla dimensione teorica della mesh, KFE, potrebbero essere diversi da quelli calcolati sulla dimensione reale della stessa, KFEr, ed in particolare più piccoli. Infatti, la dimensione dell'elemento reale è inferiore o al più uguale a quella dell'elemento teorico ed essendo d al denominatore elevato ad un esponente positivo si ha

$$(4.2) \quad KFEr = \frac{K_I^V}{\sigma_{peak}} \frac{1}{d_r^{1-\lambda_1}} \geq \frac{K_I^V}{\sigma_{peak}} \frac{1}{d_t^{1-\lambda_1}} = KFE$$

Per quanto riguarda i valori ottenuti si ha:

Tab. 4.II

	$KFE = \frac{K_I^V}{\sigma_{peak}} \frac{1}{d_t^{1-\lambda_1}}$	$KFEr = \frac{K_I^V}{\sigma_{peak}} \frac{1}{d_r^{1-\lambda_1}}$
Valore medio	1.37	1.38
Valore massimo	1.48 (+8 %)	1.51 (+9 %)
Valore minimo	1.23 (-10 %)	1.31 (-5 %)

La media dei valori ottenuti applicando il valore di d teorico è pari a 1.37, mentre quella ottenuta con l'introduzione del d reale si attesta invece su 1.38. Il valore fornito da Lazzarin e Meneghetti<sup>[11]</sup> è pari a 1.38. La corrispondenza sul valore medio è ottima, anche se bisogna evidenziare che in entrambi i casi la banda dei risultati ottenuti è piuttosto ampia, molto più ampia del  $\pm 3\%$  indicato da Lazzarin e Meneghetti<sup>[11]</sup>.

Non vi è sostanziale differenza tra i valori ottenuti applicando il valore di d teorico e quello reale, probabilmente per dei rapporti dimensionali tra larghezza del modello e profondità degli intagli favorevoli, ma nel proseguo si considererà solamente il valore KFEr, ottenuto applicando la dimensione reale della mesh.

La tab. 4.III e la fig. 4.8 mostrano i risultati ottenuti per KFEr suddivisi in base all'angolo di apertura dei lembi del difetto, indipendentemente dalla sua estensione. Per ogni angolo è stato determinato il valor medio, il valore massimo e quello minimo.

La banda di variazione dei risultati si restringe molto se espressi in funzione dell'angolo tra i lembi del difetto.

Si ribadisce qui il concetto già espresso da Lazzarin-Meneghetti<sup>[11]</sup> sull'importanza della forma della mesh. Per quanto grossolana, una forma della mesh buona, con elementi poco distorti, consente di ottenere risultati migliori sia per quanto riguarda il valor medio che per la dispersione degli stessi.

Con la pianificazione delle mesh adottata, si è puntato a contenere al massimo l'angolo di distorsione degli elementi, migliorando la qualità del calcolo.

Per un'ampia fascia di angoli, da 30° a 120°, la media valori è vicina a 1.38 e la fascia di variazione è limitata al  $\pm 6\%$ . Uno scostamento leggermente maggiore si ha nel caso dei 135°.

Tab. 4.III

K <sub>FE</sub>					
2 $\alpha$ [°]	Valore medio	Valore minimo	Valore massimo	scost. % min	scost. % max
30	1.330	1.309	1.349	-1.5	1.5
45	1.388	1.348	1.408	-2.9	1.4
60	1.350	1.305	1.384	-3.3	2.5
75	1.345	1.321	1.367	-1.8	1.6
90	1.390	1.345	1.437	-3.3	3.4
105	1.388	1.337	1.439	-3.6	3.7
120	1.342	1.328	1.393	-1.1	3.8
135	1.473	1.446	1.511	-1.8	2.5

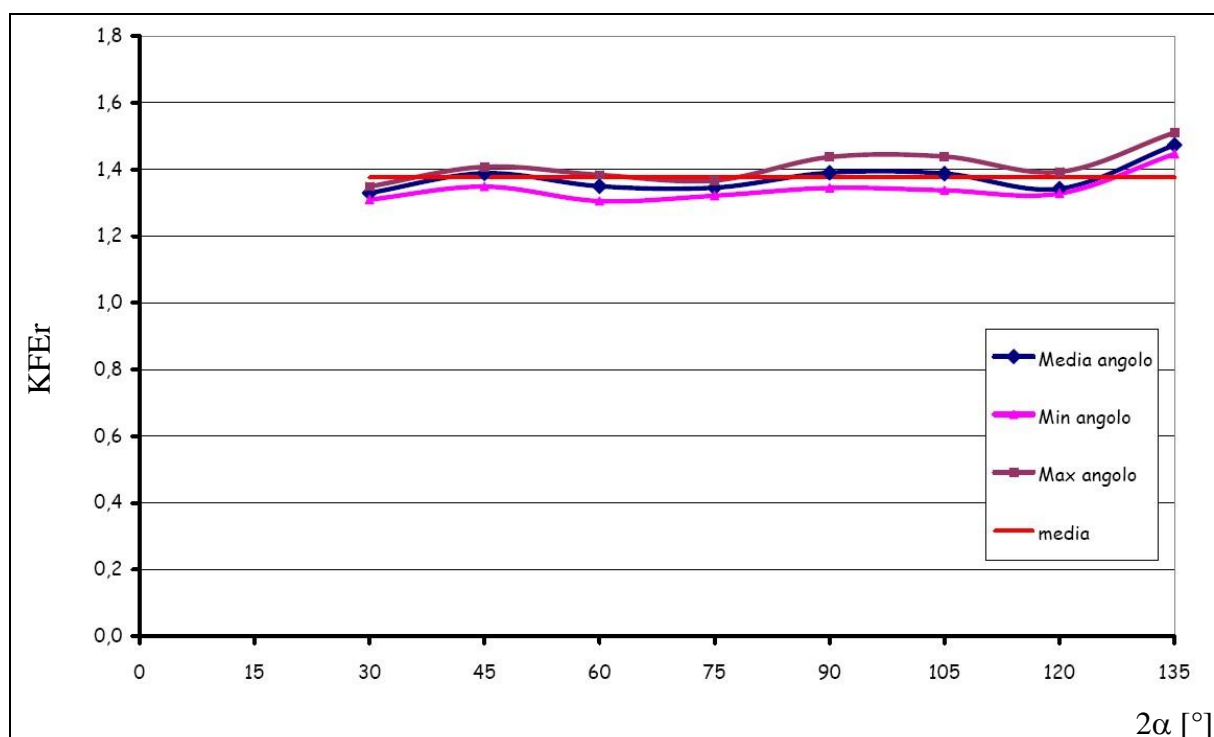


Fig. 4.8: elaborazione dei valori del KFEr per intagli a V laterali non raccordati al variare di 2 $\alpha$

È giusto precisare che non tutti i casi analizzati hanno un loro corrispettivo nei casi studiati da Lazzarin-Meneghetti<sup>[11]</sup>.

Un caso direttamente confrontabile è quello dell'intaglio a V con angolo di apertura pari a 90°. In questo caso, la Tab. 4.III ci fornisce un valor medio di 1.390 ed una banda di

dispersione +3.4/-3.3 %, cioè valori praticamente coincidenti con quelli ottenuti da Lazzarin-Meneghetti<sup>[11]</sup>.

Per l'intaglio a V con  $2\alpha = 135^\circ$  ed  $a = 10$ , invece, i risultati ottenuti si differenziano maggiormente da quelli ottenuti da Lazzarin-Meneghetti<sup>[11]</sup>, raggiungendo uno scostamento massimo pari al 9.5%.

A conclusione di questa prima tornata di calcoli, si pone l'attenzione su due aspetti.

Il primo è che il PSM è in ogni caso un metodo approssimato, pertanto, le differenze tra i risultati di cui sopra sono da ritenersi in linea con il carattere del metodo.

Il secondo aspetto riguarda la scelta di fissare la mappatura della mesh in modo preciso, dettata dalla volontà di dare un riferimento, un termine di paragone per la mesh ben definito, vista la sua importanza nell'ottenimento di risultati corretti.

### 4.3.2 PSM con elementi ad 8 nodi

Si passa ora ad utilizzare gli elementi ad 8 nodi.

Vale ancora la differenza tra dimensione teorica dell'elemento,  $d_t$ , e quindi del rapporto  $(a/d)_t$ , e dimensione e rapporto reali  $d_r$  e  $(a/d)_r$ , ma a queste definizioni si affiancano anche le seguenti grandezze:

- dimensione centrale dell'elemento,  $d_m$ : è la distanza reale tra il nodo al vertice dell'elemento ed il nodo centrale;
- rapporto centrale  $(a/d)_m = a/d_m$ .

Vale la pena ribadire che la dimensione  $d$  impostata è una dimensione teorica. Infatti, a partire da questa, il software suddividerà le linee del modello con un numero di elementi approssimato per eccesso. La dimensione reale dell'elemento sarà quindi minore o al più uguale a quella impostata.

I rapporti  $a/d$  indagati vanno da 3 a 10 con passo 0.5. Per le dimensioni e gli angoli di apertura degli intagli vale la Tab. 4.I.

La fig. 4.9 riporta i risultati ottenuti per  $a/d \geq 3$ . In essa si hanno:

- KFE: rombi blu. Rapporti ottenuti applicando la (1) con  $d = d_t$ .
- KFEm: quadrati viola. Rapporti ottenuti applicando la (1) con  $d = d_m$ .
- KFEr: triangoli gialli. Rapporti ottenuti applicando la (1) con  $d = d_r$ .

Possiamo notare:

- La diversa estensione della banda di  $a/d$  su cui si distribuiscono KFE e KFEr da un lato e KFEm dall'altro. La ragione risiede nel diverso valore di  $d$  usato nei tre casi. Nel caso di KFE si utilizza il valore teorico di  $d$ , che è la lunghezza dell'intero lato dell'elemento impostato. Nel calcolo di KFEr, invece, si utilizza il valore reale della lunghezza dell'intero lato dell'elemento creato che è al più uguale a  $d_r$ ; nel caso in studio, i rapporti dimensionali indagati fanno sì che  $d_t$  e  $d_r$  coincidano. Infine, nel calcolo di KFEm si utilizza la distanza tra il nodo di vertice ed il nodo di mezziera del lato dell'elemento che sarà al più uguale alla metà della dimensione impostata  $d_t$ .
- La differenza tra i valori di KFE-KFEr e KFEm. Anche questo aspetto si spiega con la diversità della dimensione  $d$  introdotta nella (3.8) che fa sì che mentre tra KFE e KFEr non vi è differenza o questa è abbastanza piccola, quella tra questi valori e KFEm è piuttosto elevata.

- La dispersione dei risultati. La banda di valori di K interessata da tutte le tre misure è abbastanza contenuta e costante anche se superiore al  $\pm 3\%$  rispetto ad un valor medio.

Si deve per prima cosa decidere quale valore, tra KFE, KFEm e KFEr, prendere a riferimento. La pratica suggerisce di scegliere KFEm. Questo parametro è calcolato considerando la distanza tra due nodi adiacenti, nodi che per essere individuati necessitano solamente della visualizzazione dei nodi stessi e non degli elementi. Inoltre, il valore medio attorno a cui si distribuiscono i risultati KFEm è molto prossimo a quello ottenuto utilizzando elementi a 4 nodi. In particolare:

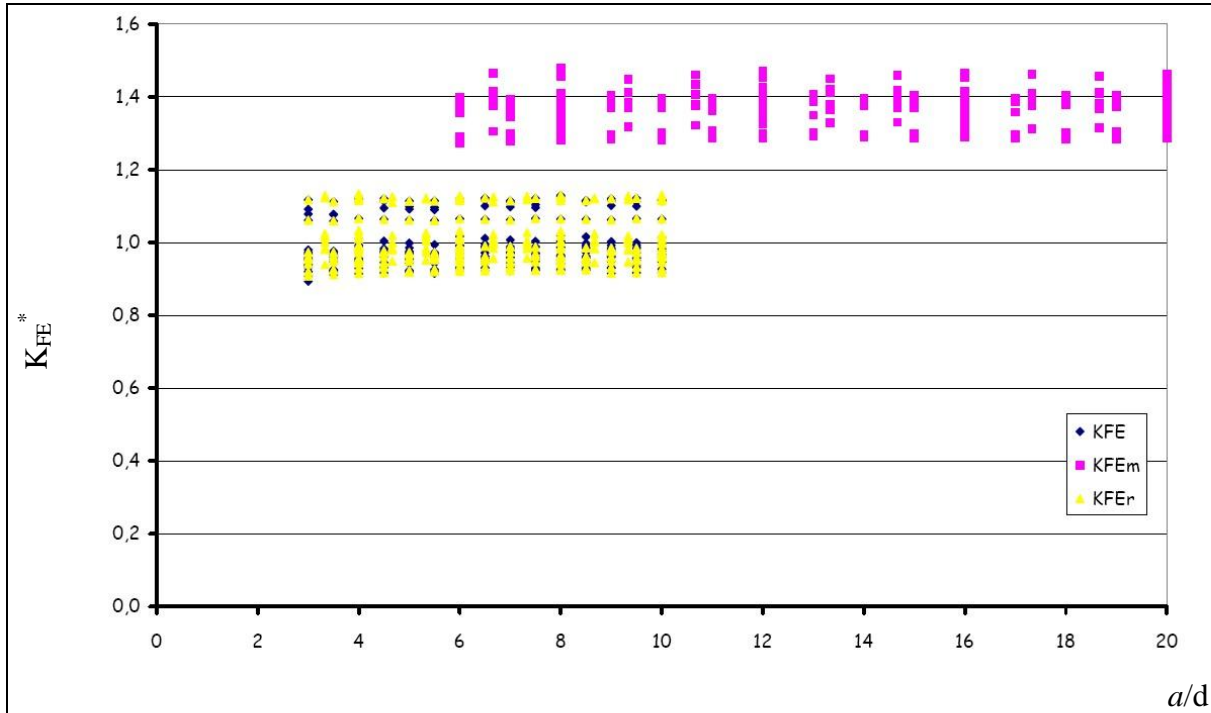


Fig. 4.9: valori del  $K_{FE}^V$  per intagli a V laterali non raccordati al variare di  $a/d$

Tab. 4.IV

	$KFE = \frac{K_I^V}{\sigma_{peak}} \frac{1}{d_t^{1-\lambda_1}}$	$KFEm = \frac{K_I^V}{\sigma_{peak}} \frac{1}{d_m^{1-\lambda_1}}$	$KFEr = \frac{K_I^V}{\sigma_{peak}} \frac{1}{d_r^{1-\lambda_1}}$
Valore medio	0.955	1.364	1.004
Valore massimo	1.13 (+14 %)	1.48 (+9 %)	1.34 (+13 %)
Valore minimo	0.893 (-10 %)	1.274 (-7 %)	0.908 (-10 %)

La tab. 4.IV mostra chiaramente che l'elaborazione KFEm ha in media un valore che si può considerare uguale a quello ottenuto utilizzando gli elementi a 4 nodi ed una fascia di dispersione dei risultati, ancorché abbastanza ampia, inferiore alle altre due elaborazioni, che sono praticamente identiche.

In fig. 4.10 si mostrano i risultati ottenuti, limitati al solo KFEm, elaborati in funzione dell'angolo tra i lembi del difetto. Il grafico è reso numericamente nella successiva tab. 4.V

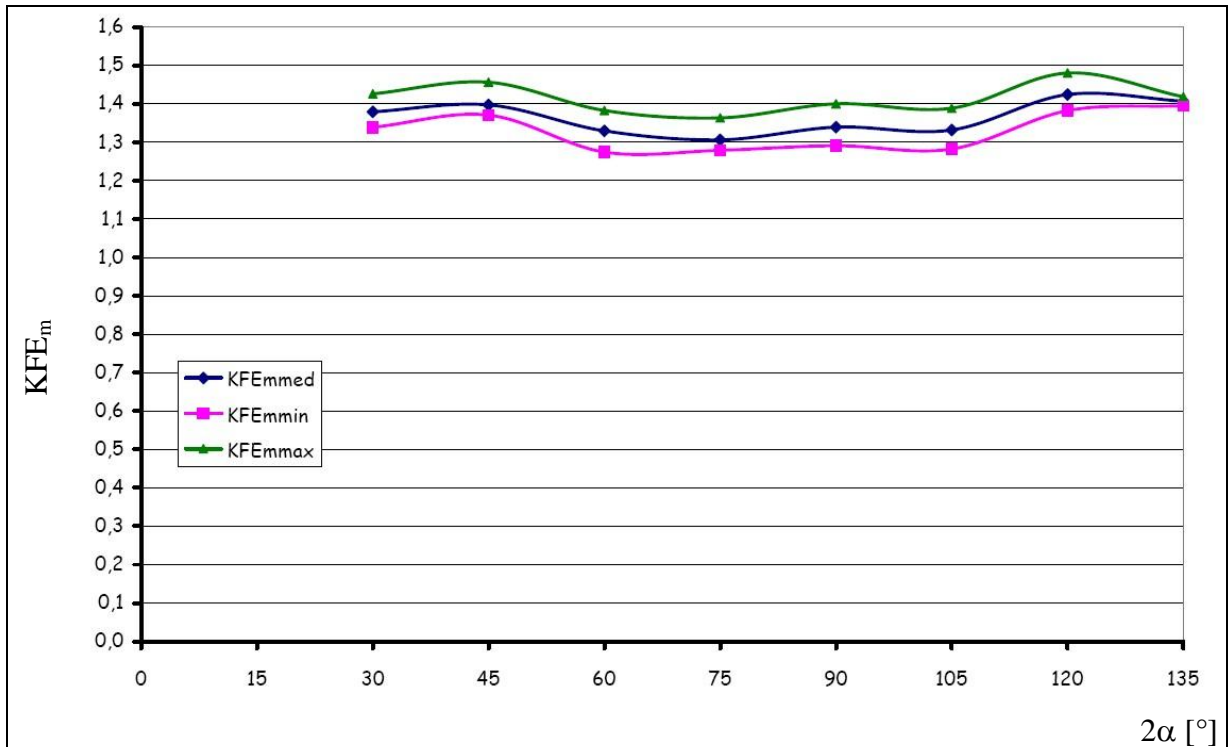


Fig. 4.10: elaborazione dei valori del  $KFEm$  per intagli a V laterali non raccordati al variare di  $2\alpha$

Tab. 4.V

$KFEm$					
$2\alpha$ [°]	Valore medio	Valore minimo	Valore massimo	scost. % min	scost. % max
30	1.379	1.338	1.426	-3	3
45	1.397	1.371	1.456	-2	4
60	1.329	1.274	1.382	-4	4
75	1.306	1.279	1.363	-2	4
90	1.339	1.291	1.400	-4	5
105	1.331	1.282	1.388	-4	4
120	1.424	1.382	1.480	-3	4
135	1.406	1.395	1.418	-1	1

Allo scopo di confrontare meglio i valori ottenuti utilizzando elementi a 4 nodi ed elementi ad 8 nodi, risultano utili le fig. 4.11 e 4.12 che mostrano la differenza, angolo per angolo, tra i risultati ottenuti nei due casi.

La corrispondenza appare molto buona. Per tutti gli angoli, la differenza in valore assoluto rimane confinata alla seconda cifra decimale, corrispondente al  $\pm 6\%$  massimo.

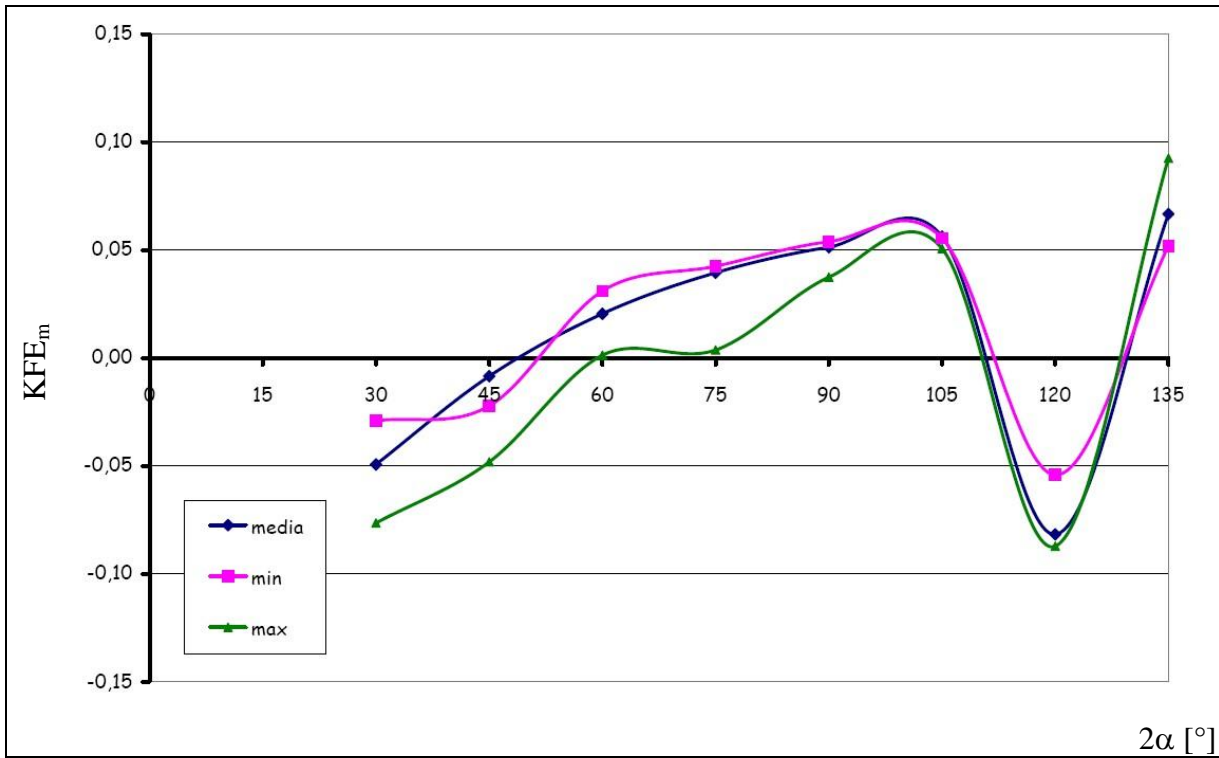


Fig. 4.11: Differenza tra  $(K_{FE})_{r4nodi}$  e  $(K_{FE})_{m8nodi}$  per intagli a V non raccordati al variare dell'angolo di apertura dei lembi

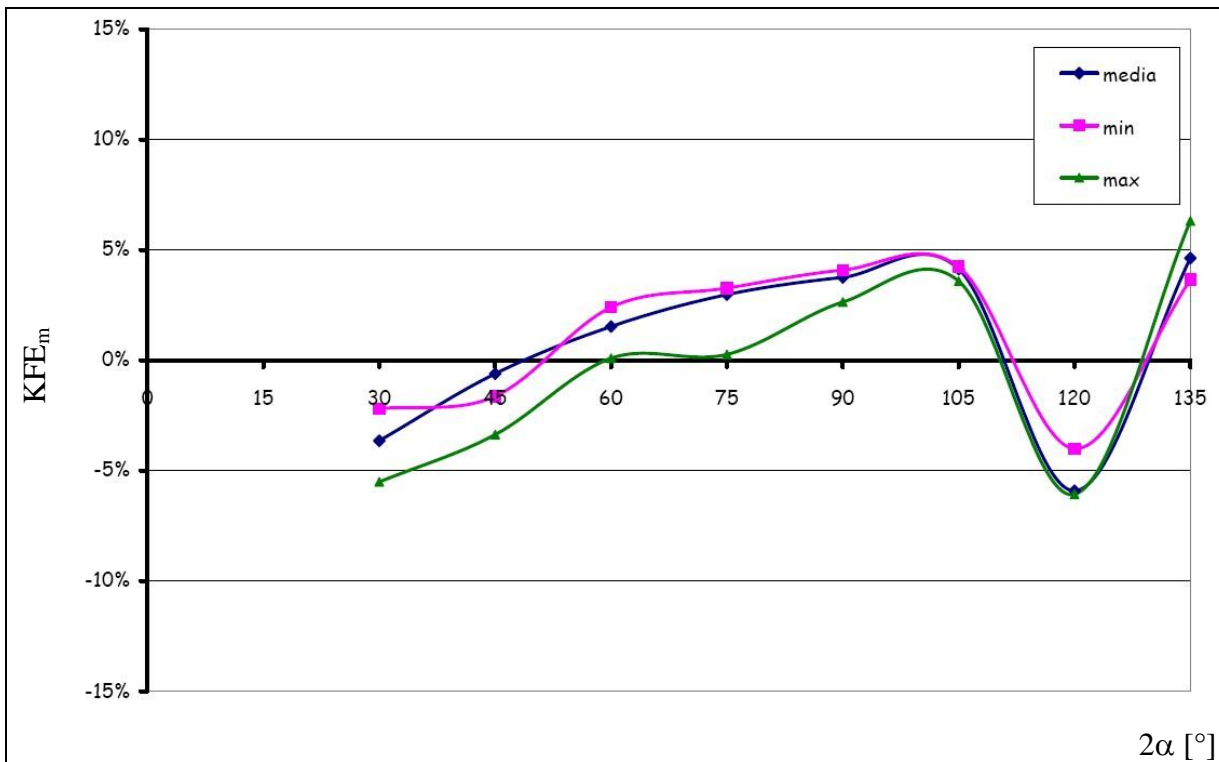


Fig. 4.12: Differenza % tra  $(K_{FE})_{r4nodi}$  e  $(K_{FE})_{m8nodi}$  per intagli a V non raccordati al variare dell'angolo di apertura dei lembi

## 4.4 CONCLUSIONI

Questa prima campagna di calcoli è stata fatta con il duplice scopo di creare una testa di ponte con gli studi fatti da Lazzarin-Meneghetti<sup>[11]</sup> e le basi per il proseguo degli studi.

La geometria presa in esame è l'intaglio laterale su piastra con angolo variabile tra 30° e 135°, limite della singolarità per il modo I. Le profondità dell'intaglio considerate sono 5 e 10 mm, contro una semilarghezza della piastra di 25 mm.

I risultati ottenuti creando dei modelli FEM con elementi a 4 nodi e con elementi ad 8 nodi mostrano una buona concordanza in media tra i valori calcolati e quelli di riferimento, dello studio di Lazzarin-Meneghetti<sup>[11]</sup>, anche se la banda di dispersione risulta maggiore del  $\pm 3\%$  da questi indicato.

Per quanto riguarda la metodologia, si è visto come ad un rapporto  $a/d$  teorico, derivante dall'impostazione della dimensione globale della mesh, derivi poi un rapporto  $a/d$  reale, determinato dalla creazione della mesh a cui corrisponde poi un rapporto  $a/d$  che potremmo definire "nodale", dettato dalla distanza reale dei nodi posti sulla bisettrice dell'intaglio.

Considerazione pratiche, di lettura dei risultati, impongono che sia quest'ultimo ad entrare nei calcoli con la formula (3.8).

In entrambi i casi, le misure utilizzate per  $K_{FE}^*$  sono calcolate introducendo la distanza reale tra i primi due nodi a partire dall'apice dell'intaglio. In particolare, utilizzando elementi ad 8 nodi, si utilizza la distanza tra il nodo di vertice ed il nodo di mezzzeria dell'elemento posto all'apice dell'intaglio sul lato lungo la bisettrice dell'intaglio.

Possiamo affermare che non c'è una sostanziale variazione di risultati tra l'impiego di elementi ad 8 nodi rispetto all'impiego di elementi a 4 nodi, configurandosi i primi come un'affinamento della mesh rispetto ai secondi. Ovviamente, questa considerazione vale in quanto la geometria studiata è "lineare" cioè priva di lati curvilinei.

Concludendo, l'utilizzo della formula (3.8) proposta da Lazzarin-Meneghetti<sup>[11]</sup> è utilizzabile senza variazione alcuna ai casi di intagli a V laterali analizzati con l'impiego di elementi ad 8 nodi.



## Capitolo 5 PEAK STRESS METHOD: MODO II

### 5.1 INTRODUZIONE

Nel precedente capitolo si è trattato del PSM applicandolo al modo I di sollecitazione dell'intaglio, cioè a trazione. Si va ora ad applicare questa metodologia anche nel caso di sollecitazione di modo II (fig. 5.1), cioè a taglio.

Anche in questo caso si seguirà lo stesso iter operativo seguito in precedenza: individuazione del modello da studiare, calcolo dei fattori  $K_2$  mediante analisi FEM con mesh fitta, applicazione del PSM, dapprima utilizzando elementi a 4 nodi, poi utilizzando elementi ad 8 nodi.

Gli obiettivi sono quelli di individuare

- se il metodo converge;
- da quale valore del rapporto  $a/d$  si ha convergenza;
- a quale espressione semplificata il metodo converge.

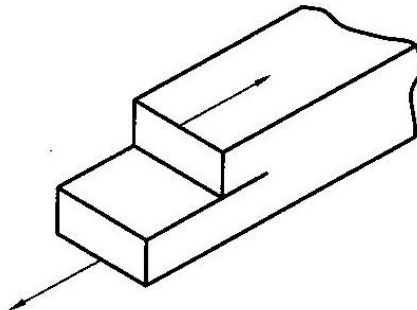


Fig. 5.1: sollecitazione di Modo II

### 5.2 MODELLO FEM

Il modello di piastra che si andrà a studiare è mostrato in fig. 5.2

Geometricamente, la piastra presenta una doppia simmetria rispetto agli assi verticale ed orizzontale.

Viceversa, le condizioni di carico sono antisimmetriche rispetto ad entrambi gli assi.

Le condizioni di vincolo, devono impedire le traslazioni della piastra, e la sua rotazione.

In virtù delle considerazioni fatte, si può studiare solamente  $\frac{1}{4}$  della piastra, ponendo lungo le divisioni, corrispondenti agli assi di simmetria, dei vincoli di antisimmetria. Questi vincoli, in ANSYS® riflettono una porzione di modello simmetrica a quella rimasta per geometria, materiale e vincoli, ma in cui i carichi mantengono direzione e modulo ma hanno verso opposto.

Verrà, pertanto, studiato il modello mostrato in fig. 5.3.

Per quanto riguarda il cario  $q$ , si stabilisce di applicare una tensione di taglio media, sulla sezione lorda, unitaria. Per fare questo, la dimensione  $H$  verrà calcolata come

$$(5.1) \quad H = 2W + a \operatorname{tg}(\alpha)$$

così da poter applicare una pressione uniforme  $q = 0.5$ .

Gli angoli  $2\alpha$  indagati vanno da  $30^\circ$  a  $90^\circ$ , con passo  $15^\circ$ , e l'angolo  $102^\circ$ , limite della singolarità per il modo II.

Anche in questo caso si prenderanno in considerazione profondità dell'intaglio  $a$  pari a 5 e 10.

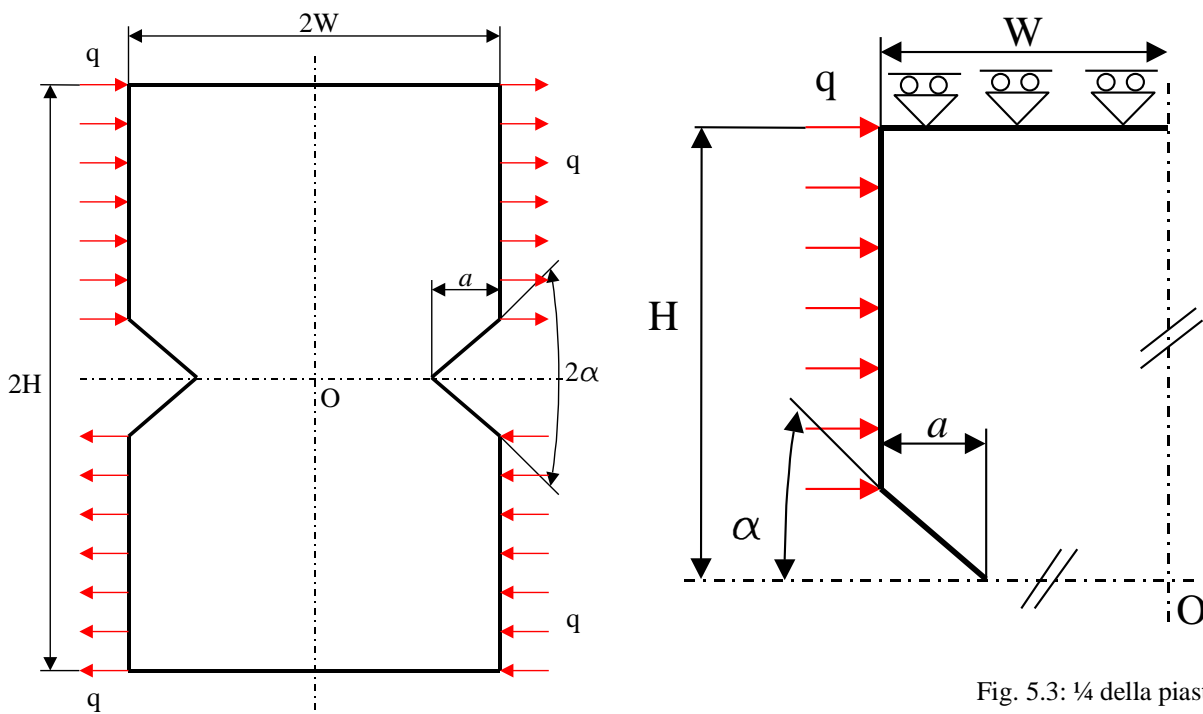


Fig. 5.3: ¼ della piastra

Fig. 5.2: la piastra da studiare

### 5.3 DETERMINAZIONE DEL FATTORE DI INTENSIFICAZIONE DELLE TENSIONI $K_2$

Il primo step consiste nella determinazione per via numerica del fattore di intensificazione delle tensioni di modo II.

Si va a creare una mesh molto fitta, utilizzando elementi a 4 nodi, in prossimità dell'apice degli intagli e quindi si applica la formula di Gross e Mendelson<sup>[8]</sup> (2.13.2) in cui  $(1 - \lambda_2)$  è il grado di singolarità di modo II che viene calcolato risolvendo la

$$(5.2) \quad \operatorname{sen}(2\gamma \lambda_2) - \lambda_2 \operatorname{sen}(2\gamma) = 0$$

con una semplice procedura in Excel.  
Si ottengono i valori di Tab. 5.I.

Tab. 5.I

W [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	$1 - \lambda_2$	$K_2$
50	5	30	0.402	2.586
50	5	45	0.340	2.571
50	5	60	0.269	2.541
50	5	75	0.187	2.481
50	5	90	0.091	2.375
50	5	102	0	2.274
50	10	30	0.402	5.044
50	10	45	0.340	4.993
50	10	60	0.269	4.882
50	10	75	0.187	4.685
50	10	90	0.091	4.375
50	10	102	0	4.068

Che possono essere riassunti nel grafico di fig. 5.4.

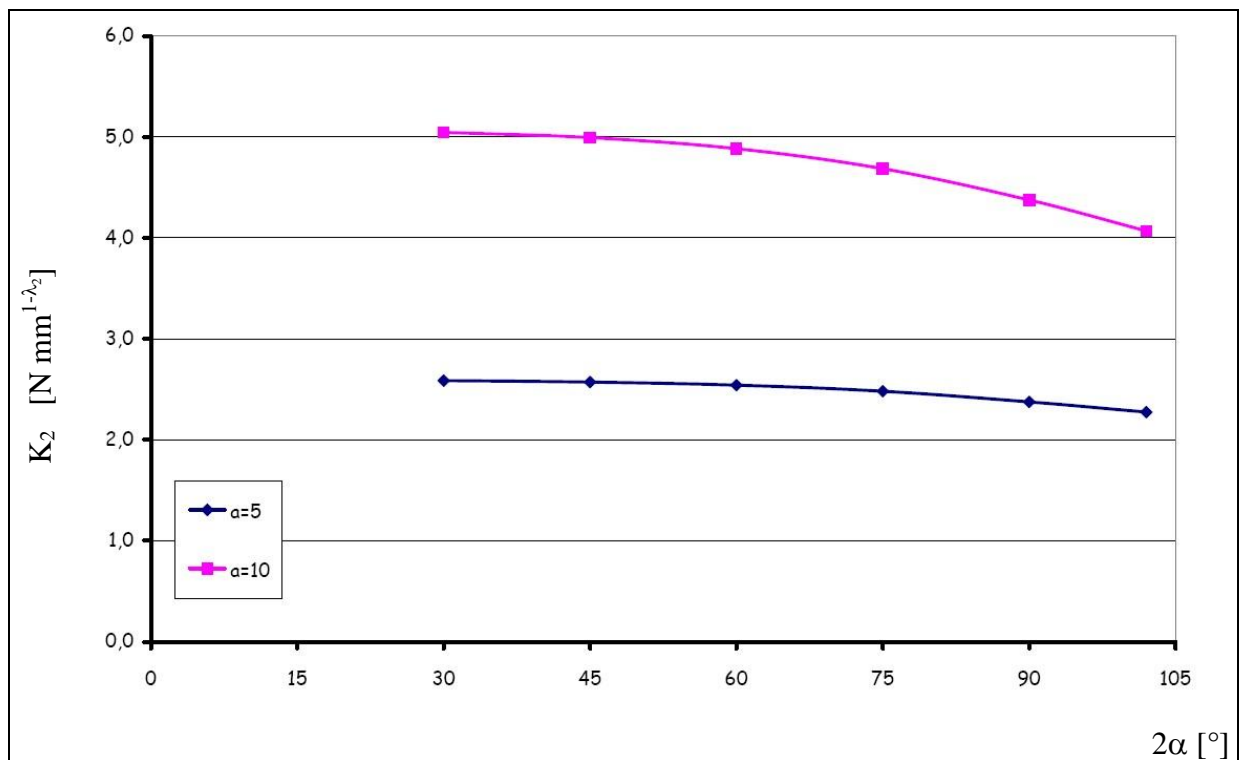


Fig. 5.4: valori del  $K_2$  per intagli laterali non raccordati al variare di  $2\alpha$  per  $a=5$  ed  $a=10$

## 5.4 APPLICAZIONE DEL PSM

Come anticipato, si procede all'analisi delle piastre di tab. 5.I con l'intento di applicare il PSM.

A tale scopo vengono creati due files di istruzioni in linguaggio APDL, uno per l'uso di elementi a 4 nodi, ed uno per l'uso di elementi ad 8 nodi. Ogni programma riporta le istruzioni per la generazione della geometria, l'applicazione delle condizioni al contorno, la meshatura, lo svolgimento dell'analisi e la scrittura dei risultati del modello a cui è dedicato.

A parità di modello, i programmi contenuti nei due files si differenziano solamente nella sezione dedicata all'estrazione dei risultati.

La dimensione degli elementi, o in altre parole la fittezza della mesh, viene stabilita impostando la dimensione globale della mesh (ESIZE di Ansys), fissando prima il valore del rapporto  $a/d$  teorico desiderato e calcolando di conseguenza, nota la dimensione dell'intaglio, la dimensione  $d$  dell'elemento.

Le strategie di meshatura adottata è mostrate nelle figure 5.5. Si è adottato uno schema di mesh uguale a quello già usato per le analisi del modo I.

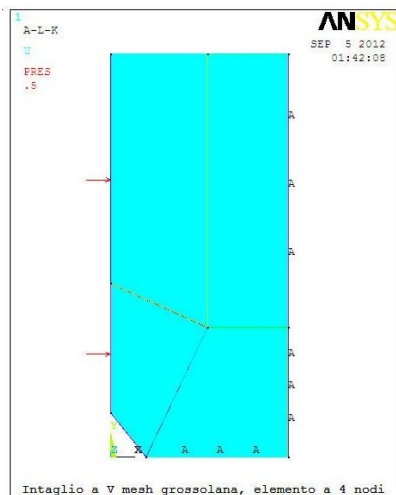


Fig. 5.5a: geometria

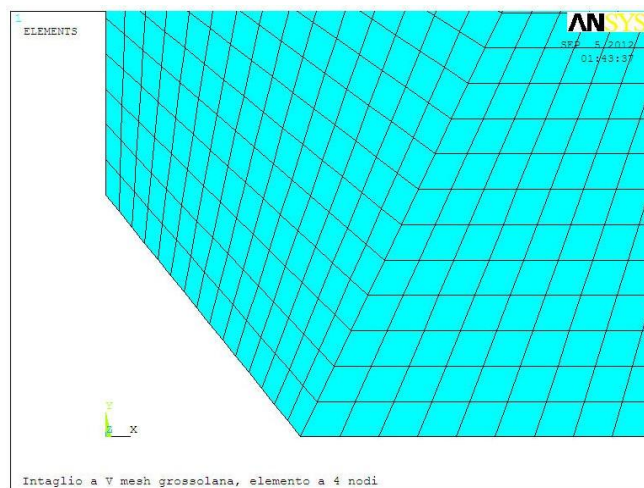


Fig. 5.5b: dettaglio mesh

Si ricorda che la dimensione  $d$  impostata è una dimensione teorica. Infatti, a partire da questa, il software suddividerà le linee del modello con un numero di elementi approssimato per eccesso. La dimensione reale dell'elemento sarà quindi minore o al più uguale a quella impostata.

I rapporti  $a/d$  indagati vanno da 3 a 15 con passo 0.5.

I risultati che si andranno a leggere nelle analisi sono le tensioni  $\tau_{r\theta}$  nel nodo posto all'apice dell'intaglio e la coordinata  $x$  del nodo posto sull'apice dell'intaglio e del primo nodo successivo lungo l'asse  $x$ . Le due coordinate ci permettono di ricavare la dimensione  $d$  reale della mesh.

Per l'elaborazione dei risultati, si utilizzeranno come primo tentativo due espressioni molto simili a quella già utilizzata per il modo I. La prima è

$$(5.3) \quad K_{2FE1} = \frac{K_2}{\tau_{\text{peak}} d^{1-\lambda_2}}$$

mentre la seconda è

$$(5.4) \quad K_{2FE2} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{\tau_{\text{peak}} d^{1-\lambda_2}} \right]^\psi$$

La (5.3) deriva direttamente dall'espressione proposta da Lazzarin-Meneghetti<sup>[11]</sup> per il modo I, previa sostituzione dei parametri relativi al modo I stesso con quelli relativi al modo II. La seconda espressione trae origine dalla formulazione di Lazzarin-Tovo<sup>[9]</sup> di cui al capitolo 2.

Infatti, l'espressione generale della tensione  $\tau_{r\vartheta}$  per il solo modo II ed intagli non raccordati è

$$(5.5) \quad \tau_{r\vartheta} = \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \{(1 - \lambda_2) \cos[(1 - \lambda_2)\vartheta] + \chi_2 (1 - \lambda_2) \cos[(1 - \lambda_2)\vartheta]\}$$

Al fine di calcolare la tensione di picco,  $\tau_{\text{peak}}$ , si deve imporre nella (5.5) la direzione  $\vartheta = 0$  ed una distanza dall'apice dell'intaglio che chiameremo  $r_{\text{peak}}$ . Supponendo  $r_{\text{peak}}$  sia legata alla dimensione della mesh secondo la

$$(5.6) \quad r_{\text{peak}} = \xi^v d$$

dalla (5.5) si ottiene

$$(5.7) \quad \tau_{\text{peak}} = \lambda_2 \xi^{v(\lambda_2-1)} d^{\lambda_2-1} a_2 \{(1 - \lambda_2) + \chi_2 (1 - \lambda_2)\}$$

Applicando la (5.5) alla formula di Goss-Mendelson<sup>[8]</sup> (2.13.2) si ha poi

$$(5.8) \quad K_2 = \sqrt{2\pi} \lambda_2 a_2 \{(1 - \lambda_2) + \chi_2 (1 - \lambda_2)\}$$

Il rapporto tra (5.8) ed (5.7) dà

$$(5.9) \quad \Rightarrow \quad \frac{K_2}{\tau_{\text{peak}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\xi^{v(\lambda_2-1)} d^{\lambda_2-1}} \quad \frac{d^{\lambda_2-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{\tau_{\text{peak}}} = \xi^{v(1-\lambda_2)}$$

da cui la (5.4) individuando  $K_{2FE2}$  con  $\xi$  e ponendo

$$(5.10) \quad \psi = \frac{1}{v(1-\lambda_2)}$$

Ovviamente, l'elaborazione dei risultati tramite la (5.4) presuppone la determinazione di  $K_{2FE2}$  e  $\psi$  dai risultati stessi.

#### 5.4.1 Analisi con elementi a 4 nodi

La fig. 5.6 riporta i risultati ottenuti nell'analisi degli intagli di cui alla tab. 5.I per  $a/d \geq 3$ .

I risultati individuati dai rombi blu ( $K_{2FE1}$ ) sono risultato dell'elaborazione con (5.3), quelli contrassegnati dai quadrati viola ( $K_{2FE2}$ ) sono ottenuti applicando la (5.4).

La serie di elaborazioni denominata  $K_{2FE1}$  mostra una banda che ha una larghezza massima paria al 30% circa del valor medio, banda che va restringendosi all'aumentare del rapporto  $a/d$ . La banda di variazione dei risultati si stabilizza a partire dal rapporto  $a/d = 7$  attestandosi su un'ampiezza del 20%.

I risultati dell'elaborazione  $K_{2FE2}$  sono ottenuti imponendo un

$$(5.11) \quad \psi = \frac{1}{v(1-\lambda_2)} = (1 - \lambda_2) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{(1-\lambda_2)^2}$$

cioè

$$(5.12) \quad K_{2FE2} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{\tau_{peak} d^{1-\lambda_2}} \right]^{1-\lambda_2}$$

Con tale impostazione si ottiene un'elevatissima regolarità di  $K_{2FE2}$  che si attesta costantemente attorno all'unità per qualsiasi valore del rapporto  $a/d$ . Anche questo caso si ha una maggior convergenza per  $a/d \geq 7$ , anche se questo è meno apprezzabile guardando il grafico che non per  $K_{2FE1}$ .

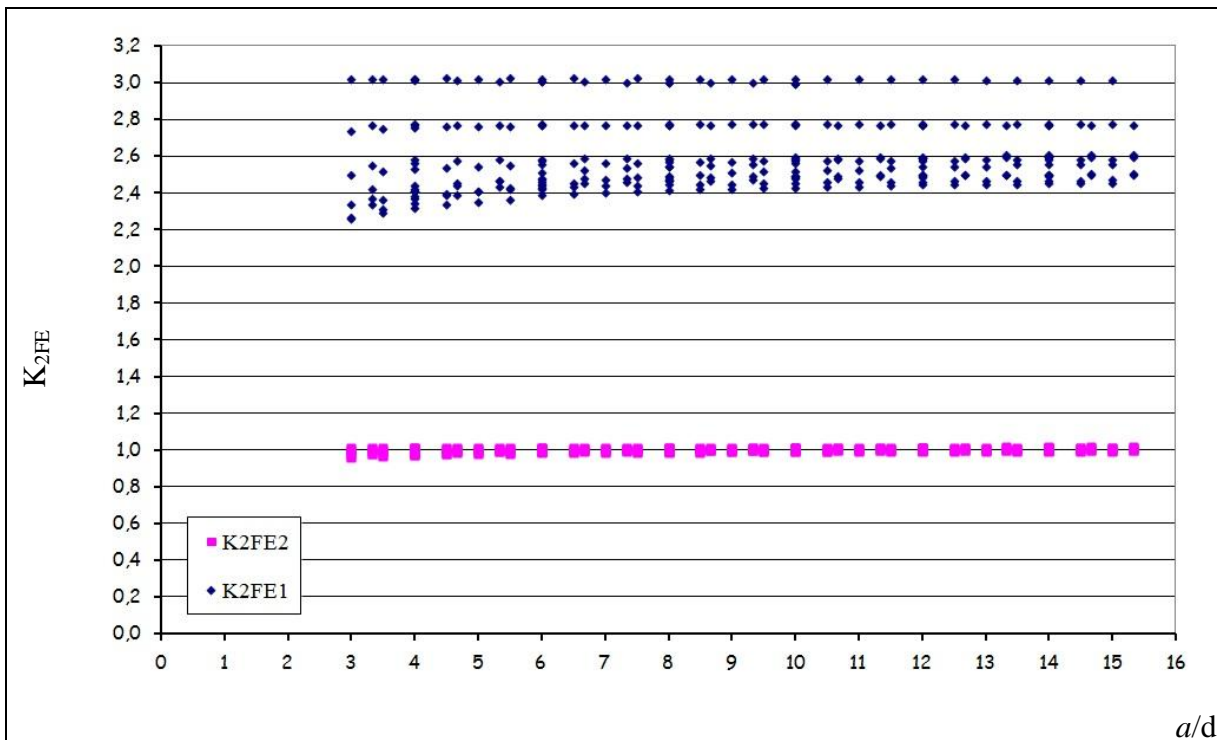


Fig. 5.6: valori del  $K_{2FE1}$  e  $K_{2FE2}$  per intagli a V laterali al variare di  $a/d$

Per quanto riguarda i valori ottenuti si ha:

Tab. 5.II

	$K_{2FE1}$	$K_{2FE2}$
Valore medio	2.613	0.9998
Valore massimo	3.025 (+16 %)	1.016 (+2 %)
Valore minimo	2.258 (-14 %)	0.961 (-4 %)

A prima vista l'elaborazione fatta con la (5.12) è decisamente migliore di quella fatta usando la (5.3). Tuttavia bisogna fare attenzione nell'impiegare questo risultato.

Riscriviamo la (5.12) nella seguente forma

$$(5.13) \quad K_{2FE2}^{\frac{1}{(1-\lambda_2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \tau_{\text{peak}}} \frac{K_2}{d^{1-\lambda_2}}$$

Ci concentriamo sul termine a sinistra dell'uguale. L'esponente è un valore maggiore o uguale a 2.

La base, ovvero  $K_{2FE2}$ , può essere maggiore o minore di 1. Il valore che risulta a sinistra nella (5.13) si può collocare in uno dei rami del grafico di fig. 5.7.

Per un dato angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$  è fissato il valore dell'esponente di sinistra. Se ad esempio il valore di  $K_{2FE2}$  reale è maggiore di 1, il valore della parte destra di (5.13) si colloca sulla curva superiore del grafico di fig. 5.7. Arrotondandolo con  $K_{2FE2} \leq 1$  si passa ad una delle altre due curve.

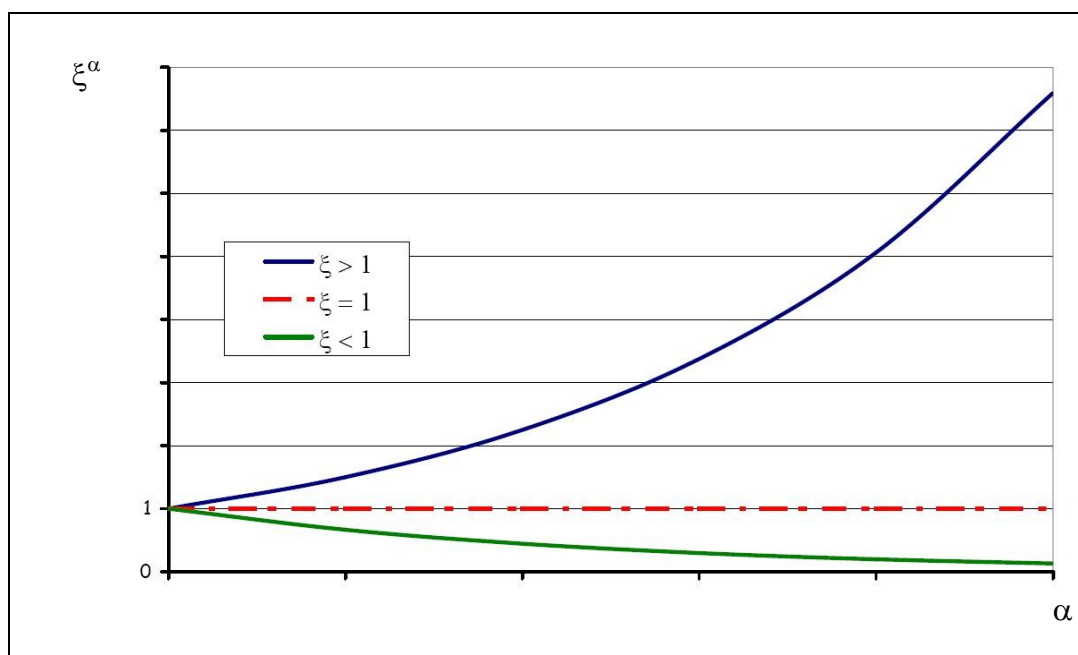


Fig. 5.7: andamento della funzione esponenziale al variare del valore della base per esponenti positivi

Il rischio, pertanto, nell'utilizzo della formula (5.12) è quello che l'errore si amplifichi quando si vada a calcolare il  $K_2$  partendo dal valore di  $\tau_{peak}$ .

La tab. 5.III e la fig. 5.8 mostrano i risultati ottenuti per  $K_{2FE1}$  suddivisi in base all'angolo di apertura dei lembi del difetto, indipendentemente dalla sua estensione e per  $a/d \geq 7$ . Per ogni angolo sono stati determinati i valori medio, massimo e minimo.

Come si può notare, la banda di variazione dei risultati si restringe molto per ogni singolo angolo.

Tab. 5.III

$K_{2FE1}$					
$2\alpha$ [°]	Valore medio	Valore minimo	Valore massimo	scost. % min	scost. % max
30	2.552	2.476	2.610	-3	2.3
45	2.459	2.402	2.500	-2.3	1.7
60	2.475	2.438	2.502	-1.5	1.1
75	2.583	2.563	2.596	-0.8	0.5
90	2.773	2.770	2.776	-0.1	0.1
102	3.007	2.989	3.023	-0.6	0.5

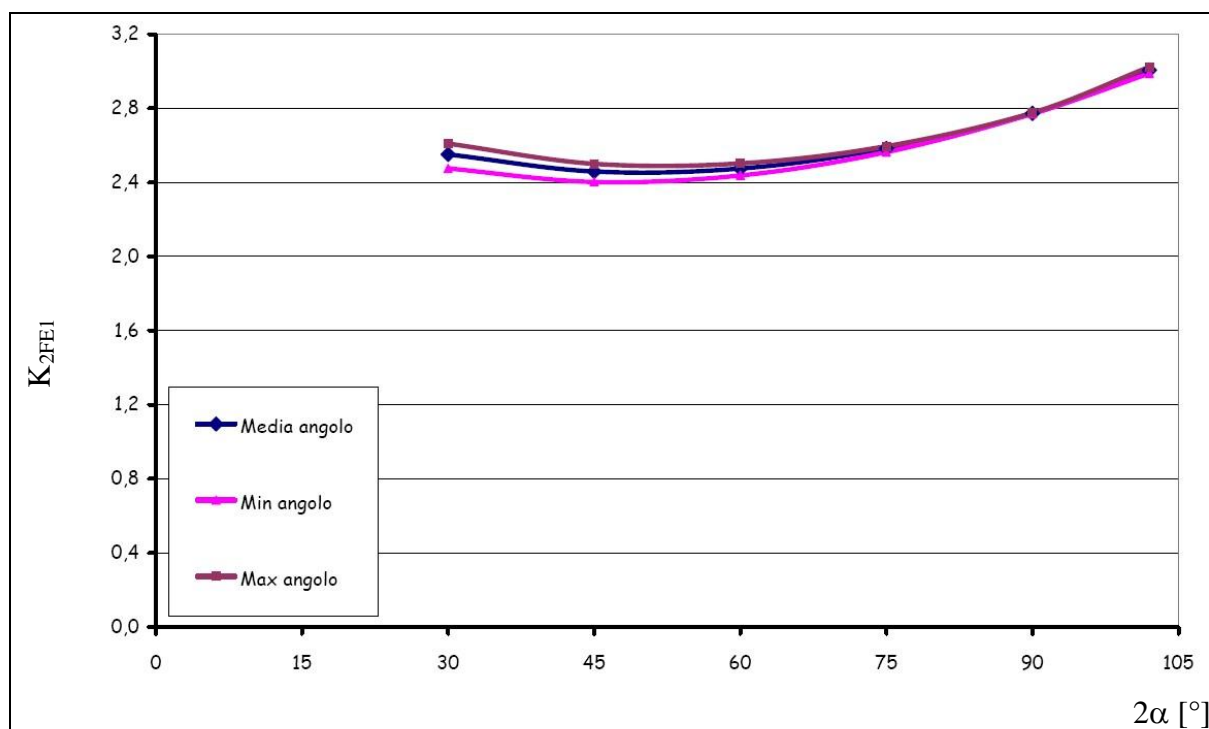


Fig. 5.8: elaborazione valori  $K_{2FE1}$  per intagli a V laterali non raccordati al variare di  $2\alpha$  per  $a/d \geq 7$ .

Analogamente, la tab 5.IV e la fig. 5.9 mostrano i risultati ottenuti per  $K_{2FE2}$ , suddivisi sempre in base all'angolo di apertura dei lembi del difetto e per  $a/d \geq 7$ .

Tab. 5.IV

$K_{2FE2}$					
$2\alpha$ [°]	Valore medio	Valore minimo	Valore massimo	scost. % min	scost. % max
30	1.007	0.995	1.016	-1.2	0.9
45	0.993	0.986	0.999	-0.8	0.6
60	0.997	0.993	1.000	-0.4	0.3
75	1.006	1.004	1.007	-0.1	0.1
90	1.009	1.009	1.009	0	0
102	1.000	1.000	1.000	0	0

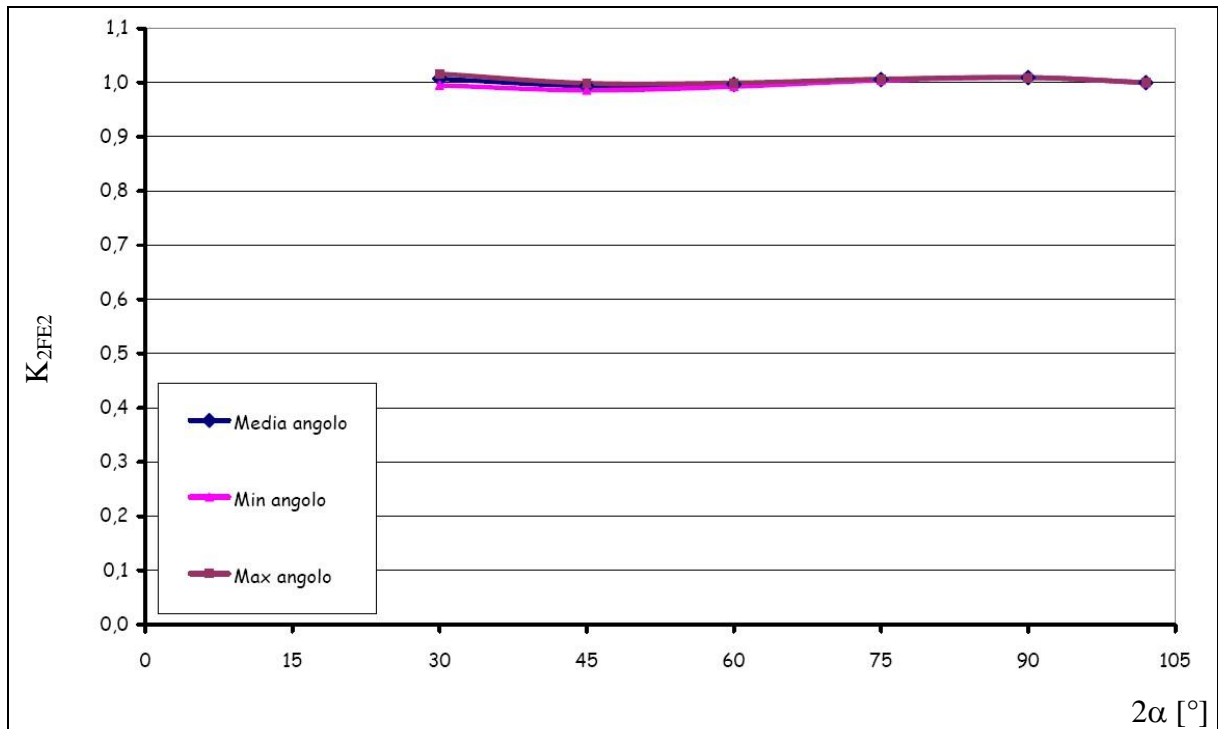


Fig. 5.9: elaborazione valori  $K_{2FE2}$  per intagli a V laterali non raccordati al variare di  $2\alpha$  per  $a/d \geq 7$ .

I valori medi per angolo si collocano attorno all'unità. Potrebbe essere adottato un valore unico per tutti gli angoli. Accettando di lavorare con mesh aventi  $a/d \geq 7$ , questo risulta 1.002 con una ampiezza della banda di scostamento inferiore a  $\pm 1.65$  %.

Tuttavia, per le ragioni precedentemente illustrate, la banda di errore si amplia al  $\pm 7$  % quando si va a calcolare  $K_2$  utilizzando tale valore di  $K_{2FE2}$ .

Si rileva, inoltre, come la formula (5.12) non sia applicabile all'angolo di apertura dell'intaglio di  $102^\circ$ , in quanto  $(1 - \lambda_2) = 0$ , problema che invece non affligge l'elaborazione secondo la (5.3).

Viceversa, utilizzando la formulazione (5.3) l'errore nel calcolo di  $K_2$  rimane contenuto al  $\pm 3$  %, accettando però l'impiego di una tabella valori, anziché di un valore soltanto, e sempre per  $a/d \geq 7$ .

Se con la formulazione (5.3) si volesse avere a disposizione un solo valore, valido per tutti gli angoli, questo sarebbe pari a  $K_{2FE1} = 2.641(+14.46/-9.05 \%)$ , ed otterremmo un'incertezza sul calcolo di  $K_2$  pari al  $\pm 8$  %.

Infine, si fa notare come la (5.12) diventi la (5.3), a meno del fattore  $\sqrt{2\pi}$ , quando si scegliesse di utilizzare  $K_{2FE2} = 1$ .

### 5.4.2 PSM con elementi ad 8 nodi

Si passa ora ad utilizzare gli elementi ad 8 nodi.

La fig. 5.10 e la tab. 5.V mostrano i risultati elaborati con le formule (5.3), rombi blu, e (5.12) quadrati viola.

Come si vede dal grafico, a fronte di rapporti  $3 \leq a/d \leq 15$  teorici applicati, si ottengono dei rapporti reali  $6 \leq a/d \leq 30$ . La diversità è dovuta al valore della dimensione  $d$ .

Nell'impostare la mesh,  $d$  fa riferimento alla lunghezza dell'intero lato dell'elemento, mentre nell'elaborazione dei risultati,  $d$  è la distanza dei primi due nodi a partire dall'apice dell'intaglio lungo l'asse  $x$ , pertanto  $d$  è al più metà della dimensione teorica del lato dell'elemento.

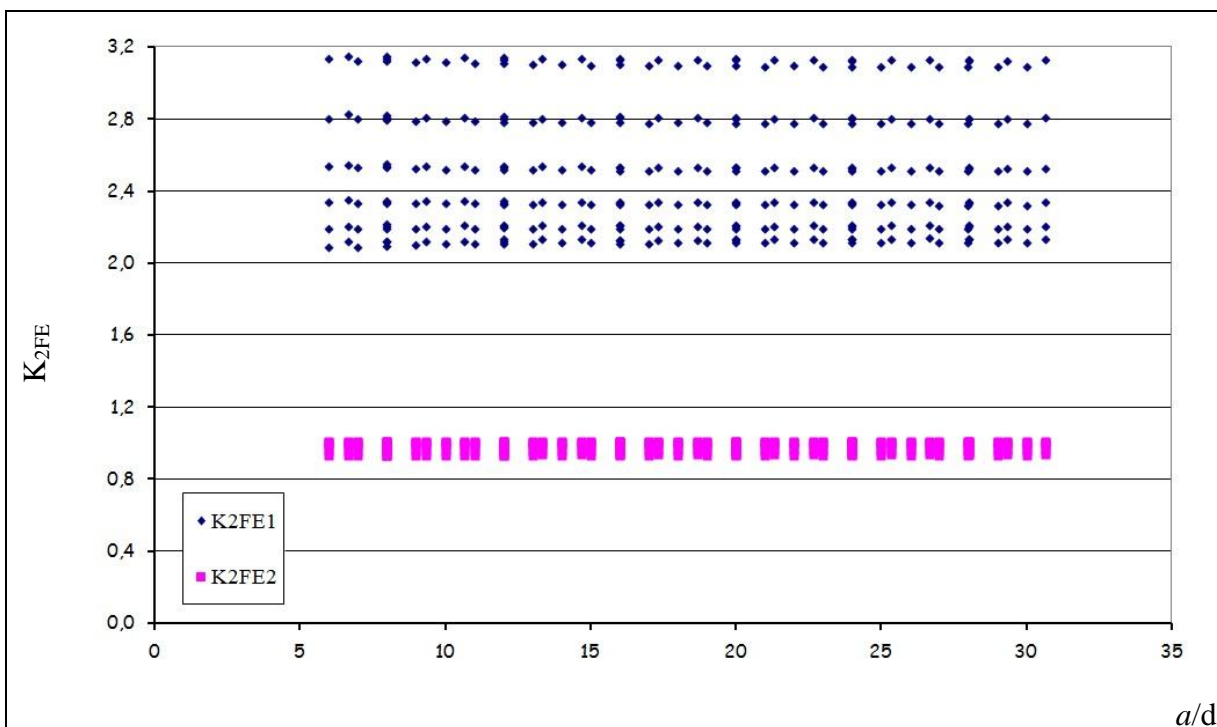


Fig. 5.10: valori del  $K_{2FE1}$  e  $K_{2FE2}$  per intagli a V laterali al variare di  $a/d$

Tab. 5.V

	$K_{2FE1}$	$K_{2FE2}$
Valore medio	2.515	0.981
Valore massimo	3.151 (+25 %)	1.011 (+3 %)
Valore minimo	2.086 (-17 %)	0.929 (-5 %)

Le tab. 5.VI e 5.VII riportano i risultati ottenuti per  $K_{2FE1}$  e per  $K_{2FE2}$  rispettivamente, in funzione dell'angolo di apertura del difetto, elaborazione che è poi raffigurata anche in fig. 11 limitatamente ai valori medi delle due grandezze. In tutti i casi si considerano rapporti  $a/d \geq 3$ .

Tab. 5.VI

$K_{2FE1}$					
$2\alpha$ [°]	Valore medio	Valore minimo	Valore massimo	scost. % min	scost. % max
30	2.119	2.086	2.137	-1.6	0.8
45	2.200	2.188	2.218	-0.5	0.8
60	2.333	2.323	2.351	-0.4	0.8
75	2.525	2.511	2.552	-0.6	1.1
90	2.795	2.775	2.826	-0.7	1.1
102	3.110	3.088	3.151	-0.7	1.3

Tab. 5.VII

$K_{2FE2}$					
$2\alpha$ [°]	Valore medio	Valore minimo	Valore massimo	scost. % min	scost. % max
30	0.935	0.929	0.938	-0.6	0.3
45	0.957	0.955	0.959	-0.2	0.3
60	0.981	0.980	0.983	-0.1	0.2
75	1.001	1.000	1.003	-0.1	0.2
90	1.010	1.009	1.011	-0.1	0.1
102	1.000	1.000	1.000	0	0

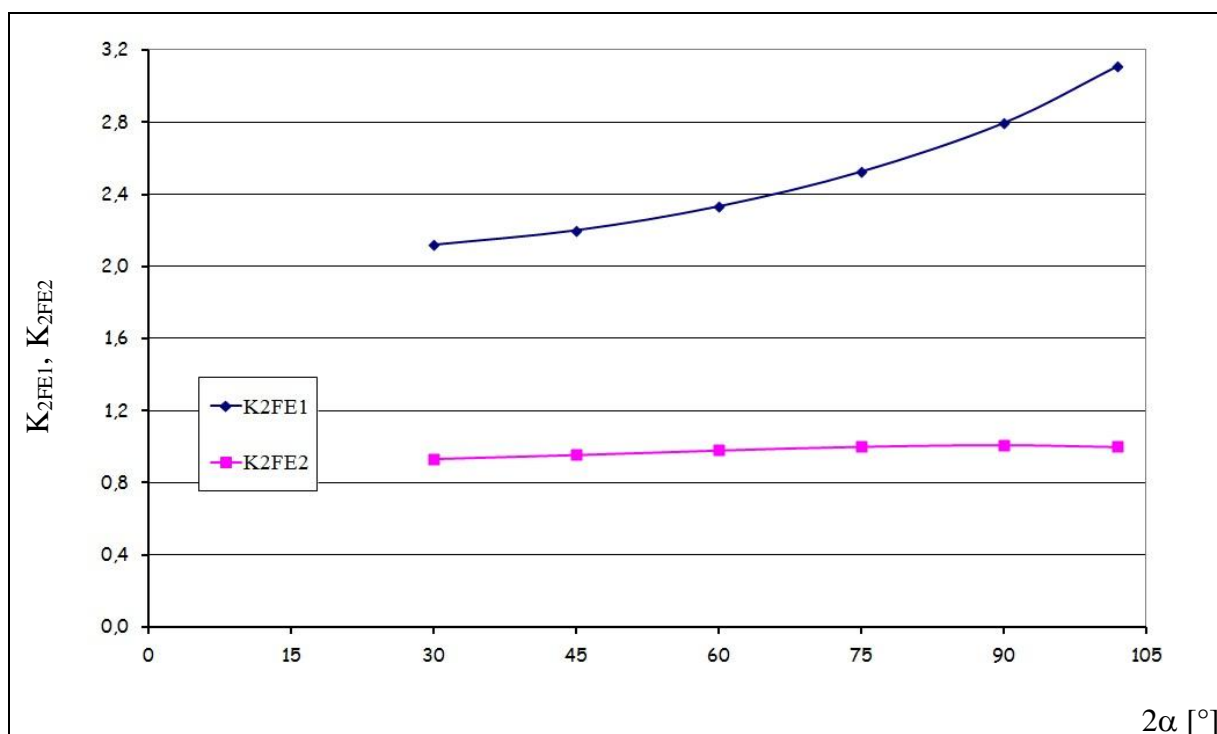


Fig. 5.11: valori del  $K_{2FE1}$  e  $K_{2FE2}$  per intagli a V laterali al variare di  $a/d$

Alcune osservazioni.

L'utilizzo degli elementi ad 8 nodi, unitamente alle formulazioni proposte, consente di andare a convergenza sin dai rapporti  $a/d$  più bassi. La cosa non sorprende in quanto sia come fittezza dei nodi nel modello FEM che come dimensione  $d$  immessa nelle formule (5.3) e (5.12), utilizzando elementi ad 8 nodi si ha un raddoppio del rapporto  $a/d$  reale rispetto all'utilizzo di elementi a 4 nodi, a parità di rapporto  $a/d$  impostato.

Aumenta, in entrambe le formulazioni, l'influenza dell'angolo di apertura dell'intaglio. Guardando le tabelle 5.VI e 5.VII si vede che in entrambi i casi per tutti gli angoli gli scostamenti dei valori medi sono molto piccoli, inferiori nella maggior parte dei casi addirittura al  $\pm 1$  %. Questo significa che non manca la convergenza del metodo ma bisogna vederla angolo per angolo. Anche l'elaborazione secondo la (5.12), che ha una minor variabilità di risultati, mostra una dipendenza dall'angolo più marcata che rispetto al caso in cui sono stati utilizzati elementi a 4 nodi.

Allo scopo di confrontare meglio i valori ottenuti utilizzando elementi a 4 ed 8 nodi, risultano utili le fig. 5.12 e 5.13 che mostrano la differenza, angolo per angolo, tra i risultati ottenuti nei due casi. In entrambi i casi si fa riferimento ai valori medi.

L'elaborazione secondo (5.12) si dimostra molto poco sensibile al tipo di elemento impiegato con differenze molto contenute tra i due casi. Abbastanza diversa è la situazione per  $K_{2FE1}$ . Qui le differenze non sono trascurabili arrivando fino al 18%.

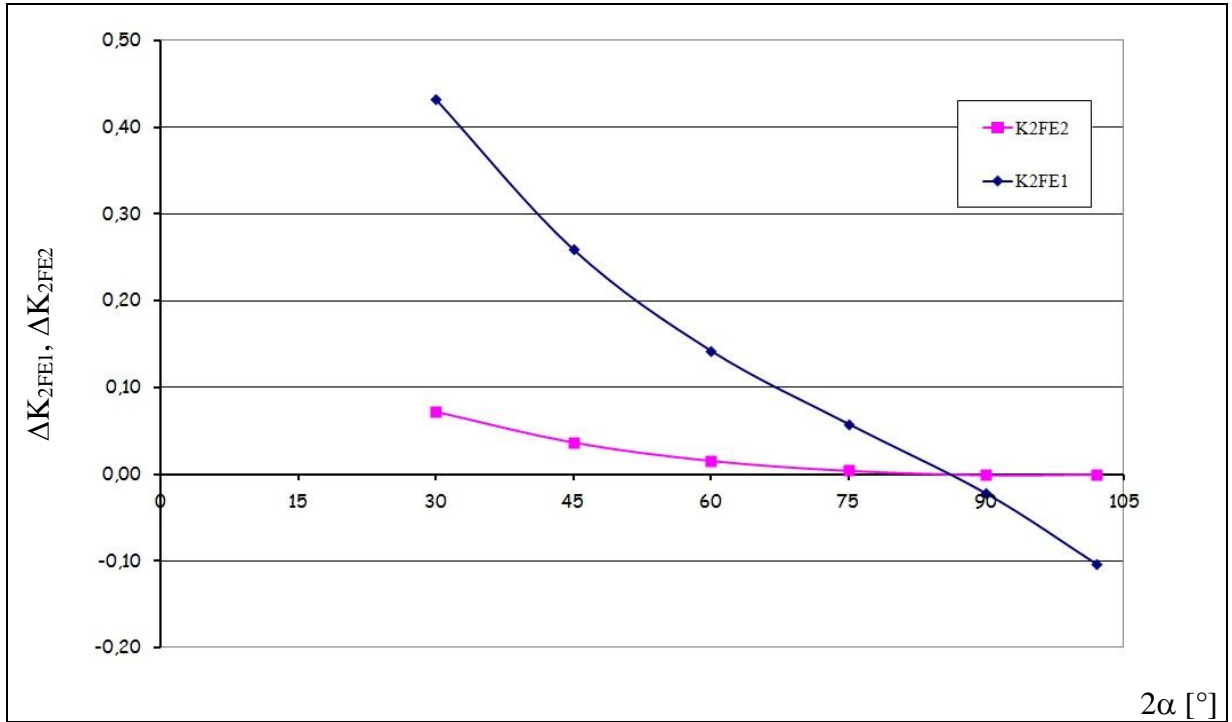


Fig. 5.12: Differenza  $(K_{2FE2})_{4nodi} - (K_{2FE2})_{8nodi}$  e  $(K_{2FE1})_{4nodi} - (K_{2FE1})_{8nodi}$  per intagli a V non raccordati al variare dell'angolo di apertura dei lembi

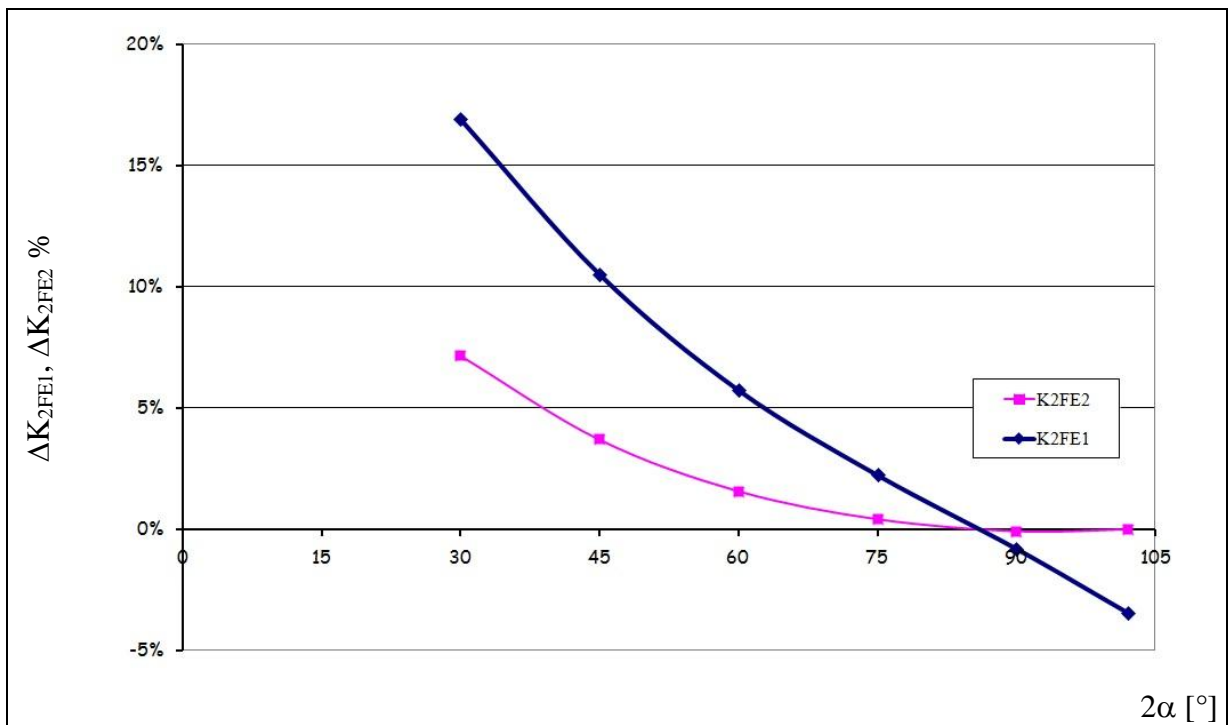


Fig. 5.13: Differenza %  $[(K_{2FE2})_{4nodi} - (K_{2FE2})_{8nodi}] / (K_{2FE2})_{4nodi}$  e  $[(K_{2FE1})_{4nodi} - (K_{2FE1})_{8nodi}] / (K_{2FE1})_{4nodi}$  per intagli a V non raccordati al variare dell'angolo di apertura dei lembi

## 5.5 CONCLUSIONI

È stato affrontato il caso di intagli laterali a V non raccordati su piastra, soggetti a sollecitazione di modo II, allo scopo di verificare l'applicabilità del peak stress method (PSM).

Gli intagli presi in considerazione sono di due profondità diverse, 5 e 10 contro una larghezza totale della piastra di 50, e di ampiezze  $2\alpha$  variabili da  $30^\circ$  a  $90^\circ$ , con passo  $15^\circ$ , e  $102^\circ$ . Per ogni combinazione geometrica si sono prodotte mesh caratterizzate da rapporti  $a/d$  variabili da 3 a 15. Per ogni analisi è stata rilevata la tensione  $\tau_{xy} \equiv \tau_{r\theta}$  di picco che si colloca all'apice degli intagli.

Le analisi sono state effettuate sia utilizzando elementi a 4 nodi che elementi ad 8 nodi.

Sono state proposte due relazioni per elaborare i risultati ottenuti. La prima, derivata da quella utilizzata per i casi sollecitati da modo I con ovvia sostituzione delle grandezze,

$$(5.3) \quad K_{2FE1} = \frac{K_2}{\tau_{\text{peak}} d^{1-\lambda_2}}$$

ed una seconda, ricavata dalla formulazione generale proposta da Lazzarin-Tovo<sup>[9]</sup> per lo studio del campo di tensione nell'intorno dell'apice degli intagli,

$$(5.12) \quad K_{2FE2} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{\tau_{\text{peak}} d^{1-\lambda_2}} \right]^{1-\lambda_2}$$

Possiamo innanzitutto affermare che

- il metodo converge;
- entrambe le relazioni sono adatte ad applicare la metodologia;
- in generale, la convergenza avviene per valori del rapporto  $a/d$  superiori a quanto accade per il modo I.

La relazione (5.12) mostra una buona costanza attorno al valore

$$(5.14) \quad K_{2FE2} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{\tau_{\text{peak}} d^{1-\lambda_2}} \right]^{1-\lambda_2} = 1.002$$

sicché la (5.14) potrebbe essere considerata la relazione finale per l'applicazione del PSM alla sollecitazione di modo II.

Tuttavia, considerati anche i risultati ottenuti utilizzando elementi ad 8 nodi, si ritiene che l'utilizzo della tab. 5.VIII o della fig. 5.14, di seguito proposti, possano rappresentare strumenti di validità più generale.

Tab. 5.VIII

$2\alpha$ [°]	$K_{2FE2}$
30	0.935
45	0.957
60	0.981
75	1.001
90	1.010
102	1.000

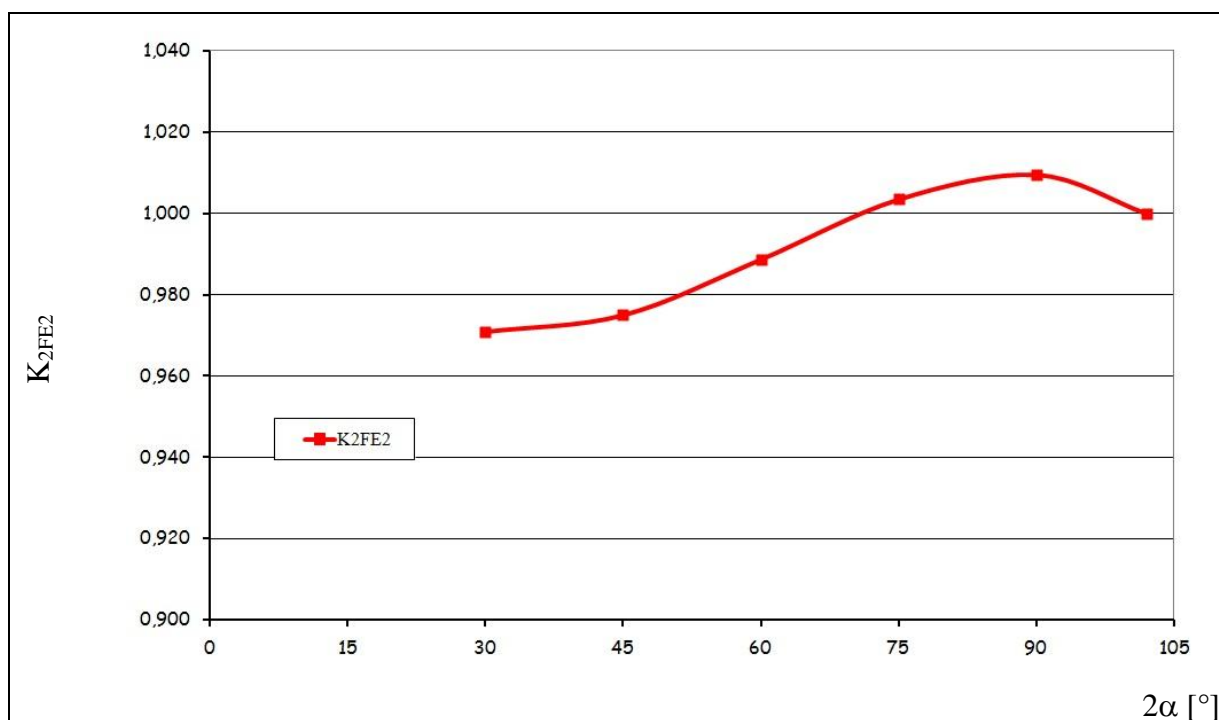


Fig. 5.14: valori di  $K_{2FE2}$  per intagli a V laterali non raccordati sollecitati a modo II



## Capitolo 6 PEAK STRESS METHOD: “MODO IV”

### 6.1 INTRODUZIONE

Nella meccanica della frattura si è soliti individuare i modelli di sollecitazione con riferimento alle modalità di deformazione del difetto. Con questo punto di vista sono individuati i modi I, II, III (fig. 6.1).

Un modo diverso di approcciare il problema è quello che potremmo definire alla “De Saint Venant”, cioè facendo riferimento alle azioni esterne applicate al pezzo caratterizzato dal difetto.

Purtroppo i due punti di vista non sono sempre perfettamente sovrapponibili.

Infatti, possiamo individuare una corrispondenza biunivoca tra sollecitazione di torsione e Modo III ma già il Modo I può essere conseguenza di sollecitazioni di trazione o di momento flettente.

Ancor più significativa è la situazione del Modo II; lo slittamento è provocato da un’azione tagliante che, tranne casi molto particolari, proprio il De Saint Venant ci insegna sempre accompagnata da momento flettente.

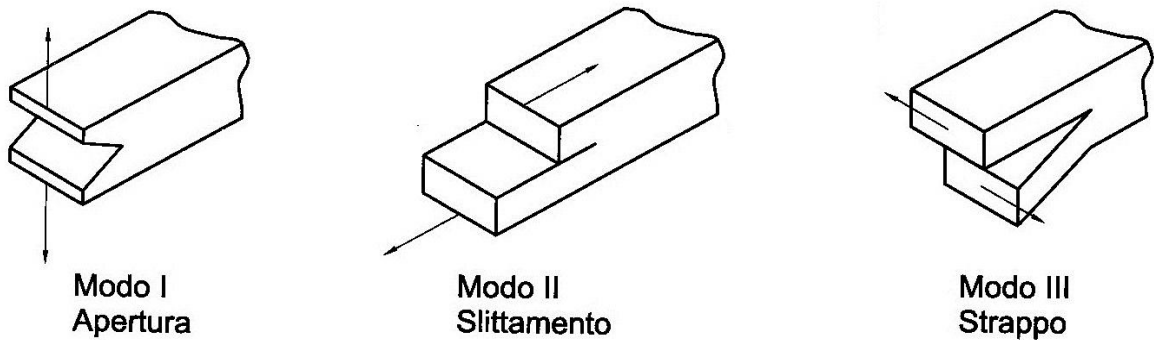


Fig. 6.1: modi di sollecitazione dei difetti

Queste argomentazioni sono del tutto inutili quando si affronta l’analisi di cricche ed intagli con i metodi classici della meccanica della frattura, in quanto, lungo la bisettrice del difetto, gli effetti di modo I e di modo II sono disaccoppiati, ma riacquistano significato se applicate al *peak stress method*.

Con il PSM ci si sta proponendo di costruire una “trasformatore”, al cui ingresso poniamo le tensioni di picco, ottenute con analisi a mesh grossolane, ed all’uscita otteniamo valori approssimati dell’N-SIF, che normalmente si otterrebbero con analisi a mesh molto fitta.

Diventa quindi lecito porsi le domande:

- la formula per trattare casi di modo I derivanti da sollecitazioni di trazione piuttosto che di flessione è la stessa?
- quando sono presenti sollecitazioni sia di trazione che di flessione come si calcola l’N-SIF?

Queste sono le domande a cui si cercherà di dare risposta in questo e nel prossimo capitolo.

La locuzione *modo IV* viene qui introdotta ed usata al solo scopo di brevità, ed individuerà una sollecitazione del difetto di modo I provocata da puro momento flettente. Al momento, si confinerà la dicitura modo I all’apertura del difetto causata da sforzo di trazione.

Operativamente sarà studiata la stessa piastra di cui al cap. 4, determinando al solito l’N-SIF, ora detto  $K_4$ , con analisi a mesh fitta. Quindi si procederà al calcolo delle tensioni di picco corrispondenti a diversi gradi di infittimento della mesh.

Applicando la formula (3.8) si determineranno i valori da applicare al modo IV, valori che verranno confrontati con quelli già calcolati per il modo I.

Gli obiettivi sono quelli di individuare

- se il metodo converge per il modo IV;
- da quale valore del rapporto  $a/d$  si ha convergenza per il modo IV;
- a quale espressione semplificata il metodo converge per il modo IV;
- l’espressione valida per il modo IV è la stessa del modo I?

## 6.2 MODELLO FEM

Il modello di piastra che si andrà a studiare è mostrato in fig. 6.2.

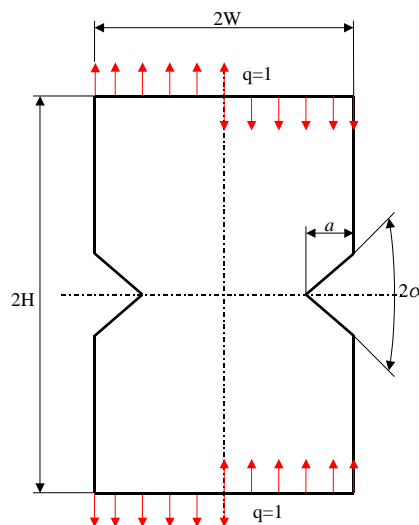


Fig. 6.2: modello da analizzare

Geometricamente, è la stessa piastra utilizzata per il modo I ma staticamente è soggetta a condizioni di carico differenti.

Il modello FEM può ancora sfruttare la doppia simmetria ma lungo l'asse orizzontale verrà posto un vincolo di simmetria mentre lungo l'asse verticale verrà collocato un vincolo di asimmetria; con quest'ultimo vincolo sarà considerata ancora una geometria simmetrica ma le condizioni di carico saranno simmetriche in modulo e direzione ma di verso opposto. Infine, per evitare labilità del modello, saranno posti a zero gli spostamenti in direzione x ed y nel punto di incrocio degli assi.

Al solito verranno indagati gli angoli  $2\alpha$  tra  $30^\circ$  e  $135^\circ$  con passo  $15^\circ$  a cui si aggiunge l'angolo  $102^\circ$ , notevole per il modo II.

Anche in questo caso si prenderanno in considerazione profondità dell'intaglio  $a$  pari a 5 e 10.

### 6.3 DETERMINAZIONE DEL FATTORE DI INTENSIFICAZIONE DELLE TENSIONI $K_4$

Conformemente al modo di operare adottato in precedenza, si parte con il calcolo per via numerica del fattore di intensificazione delle tensioni di modo IV.

Utilizzando elementi a 4 nodi, si va a creare una mesh molto fitta in prossimità dell'apice dell'intaglio e quindi si applica la formula di Gross e Mendelson<sup>[8]</sup> (2.13.1) in cui  $(1 - \lambda_1)$ , tuttora valido. Si ottengono i valori di Tab. 6.I e di fig. 6.3.

Tab. 6.I

2W [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	$1 - \lambda_1$	$K_4$
50	5	30	0.499	6.878
50	5	45	0.495	6.932
50	5	60	0.488	7.023
50	5	75	0.475	7.143
50	5	90	0.456	7.294
50	5	102	0.433	7.404
50	5	105	0.426	7.435
50	5	120	0.348	7.521
50	5	135	0.326	7.477
50	10	30	0.499	11.901
50	10	45	0.495	11.956
50	10	60	0.488	12.044
50	10	75	0.475	12.156
50	10	90	0.456	12.270
50	10	102	0.433	12.341
50	10	105	0.426	12.353
50	10	120	0.348	12.359
50	10	135	0.326	12.222

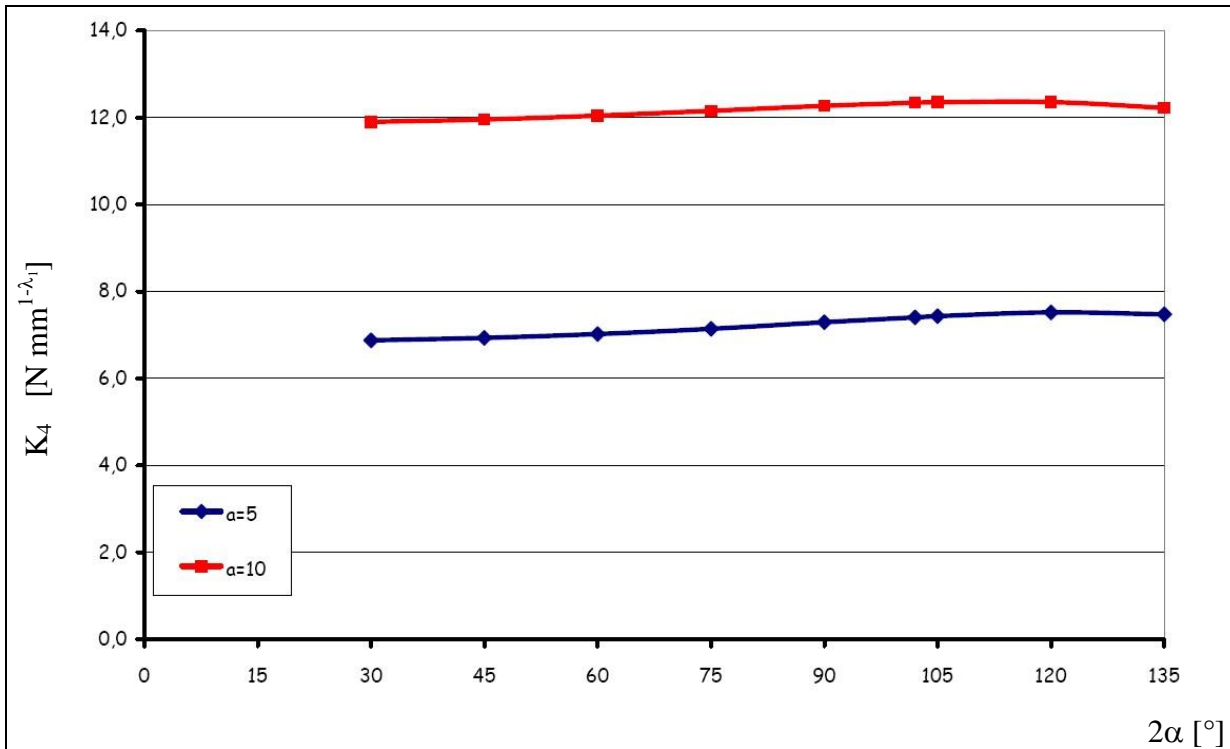


Fig. 6.3: valori di  $K_4$  per intagli laterali non raccordati al variare di  $2\alpha$  per  $a=5$  ed  $a=10$

## 6.4 APPLICAZIONE DEL PSM

Si procede in maniera del tutto uguale a quanto descritto nel cap. 4 con riferimento al modo I. In particolare si sottolinea l'adozione dello stesso schema di meshatura così che i risultati siano direttamente confrontabili, essendo l'unica differenza il carico applicato.

Non ci si dilunga, quindi, nella discussione del modello ma si passa subito a vedere i risultati ottenuti.

La fig. 6.4 riporta i risultati ottenuti nell'analisi degli intagli di cui alla tab. I per  $a/d \geq 3$ , calcolati con la (3.8) che possiamo così riscrivere

$$(6.1) \quad K_{4FEI} = \frac{K_4}{\sigma_{peak} d^{1-\lambda_1}}$$

Nella tab. 6.II, si opera un confronto tra i risultati ottenuti per il modo IV e quelli relativi al modo I.

Quello che emerge dalla tabella è una variazione maggiore dei risultati per il modo IV rispetto al modo I. Purtroppo questa larghezza della banda dei risultati si ripercuote anche sulle valutazioni in funzione degli angoli.

La tab. 6.III analizza i risultati raggruppandoli per angolo e profondità dell'intaglio.

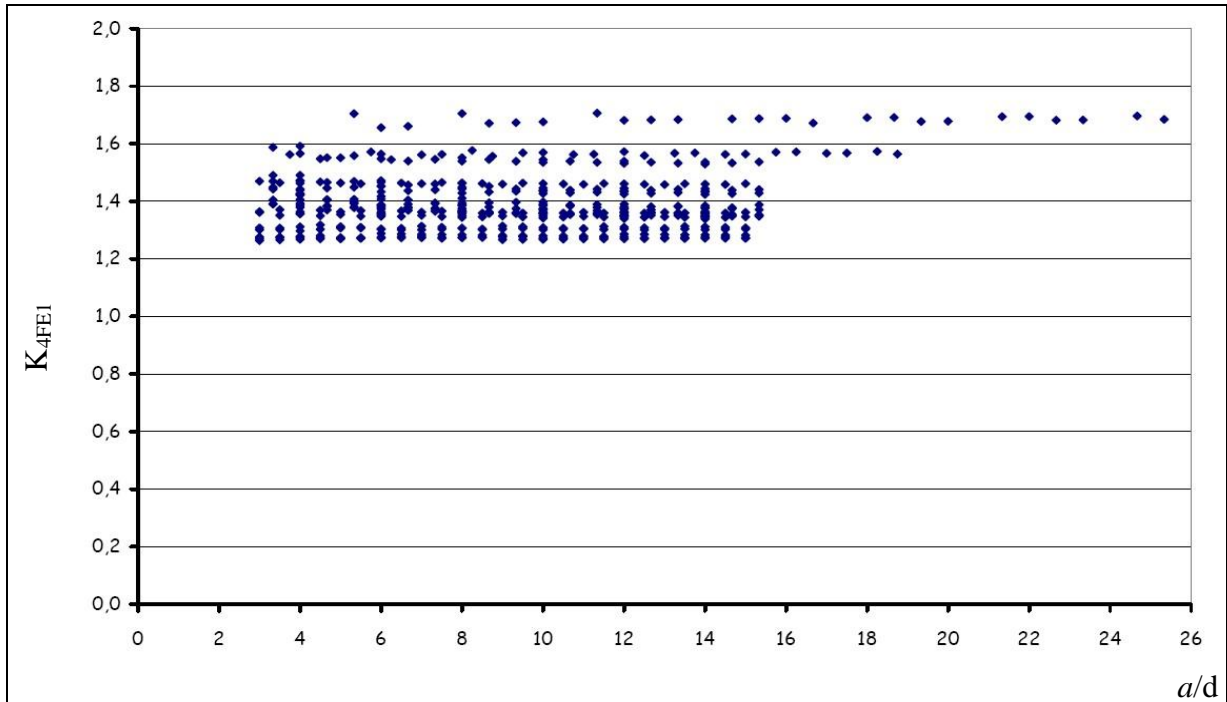


Fig. 4: valori del  $K_{4FEI}$  per intagli a V laterali al variare di  $a/d$

Tab. 6.II

	$K_{4FEI}$	$K_{FEr}$
Valore medio	1.399	1.38
Valore massimo	1.707 (+22 %)	1.51 (+9 %)
Valore minimo	1.263 (-10 %)	1.31 (-5 %)

Come si può notare, il primo problema è la distanza tra i valori medi per le diverse profondità dell'intaglio, a parità d'angolo di apertura dello stesso, problema che non è risolvibile aumentando il rapporto  $a/d$  necessario alla convergenza dei risultati.

Altra osservazione è che la dispersione dei risultati aumenta all'aumentare della profondità dell'intaglio. Infine, anche se questo non emerge dalla tab. III, vi è da dire che la dispersione migliora molto lentamente all'aumentare del rapporto  $a/d$ .

Per migliorare i risultati ottenuti sul modo IV e la loro aderenza con quelli del modo I bisogna provare a trattarli con una formula diversa.

Tab. 6.III

	Valore medio	Valore massimo	Valore minimo
$2\alpha = 30, a = 5$	1.308	+1 %	-1 %
$2\alpha = 30, a = 10$	1.389	+4 %	-2 %
$2\alpha = 45, a = 5$	1.281	+1 %	-1 %
$2\alpha = 45, a = 10$	1.369	+4 %	-2 %
$2\alpha = 60, a = 5$	1.270	0 %	-1 %
$2\alpha = 60, a = 10$	1.359	+3 %	-2 %
$2\alpha = 75, a = 5$	1.275	0 %	0 %
$2\alpha = 75, a = 10$	1.367	+4 %	-1 %
$2\alpha = 90, a = 5$	1.304	+1 %	0 %
$2\alpha = 90, a = 10$	1.396	+3 %	-1 %
$2\alpha = 102, a = 5$	1.349	+1 %	0 %
$2\alpha = 102, a = 10$	1.437	+2 %	-1 %
$2\alpha = 105, a = 5$	1.363	+1 %	0 %
$2\alpha = 105, a = 10$	1.453	+3 %	-1 %
$2\alpha = 120, a = 5$	1.463	+1 %	0 %
$2\alpha = 120, a = 10$	1.546	+3 %	-1 %
$2\alpha = 135, a = 5$	1.564	+1 %	-1 %
$2\alpha = 135, a = 10$	1.684	+1 %	-2 %

#### 6.4.1 Prima proposta alternativa

La prima proposta alternativa che si testa deriva dalla formula già usata per trattare i dati del modo II, cioè la (5.12) qui riscritta per le grandezze del modo IV

$$(6.2) \quad K_{4FE2} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_4}{\sigma_{\text{peak}} d^{1-\lambda_1}} \right]^{1-\lambda_1}$$

I risultati migliorano sensibilmente come mostra la tab. 6.IV.

Tab. 6.IV

	$K_{4FE1}$	$K_{4FE2}$
Valore medio	1.399	0.770
Valore massimo	1.707 (+22 %)	0.882 (+15 %)
Valore minimo	1.263 (-10 %)	0.715 (-7 %)

La fascia di oscillazione dei risultati si restringe circa di 1/3.

Raggruppando i risultati per angolo, il miglioramento si mantiene significativo ma non sufficiente a ritenere il metodo convergente per  $a/d \geq 3$  con una variazione massima di  $\pm 3$  %.

Tab. 6.V

$K_{4FE2}$			
$2\alpha$ [°]	Valore medio	scost. % min	scost. % max
30	0.734	-1.9	3.6
45	0.729	-1.9	3.8
60	0.730	-1.9	3.3
75	0.738	-1.8	3.7
90	0.754	-1.7	3.1
102	0.775	-1.5	2.4
105	0.782	-1.5	2.5
120	0.822	-1.2	2.2
135	0.868	-1.6	1.6

Non si ritiene soddisfacente questa elaborazione e si procederà ad una nuova proposta.

#### 6.4.2 Seconda proposta alternativa

La nuova proposta di elaborazione dei dati deriva dalla (6.2) nella quale si introduce un fattore “di forma”  $S^\beta$ . La nuova espressione diventa

$$(6.3) \quad K_{4FE3} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_4}{\sigma_{\text{peak}} d^{1-\lambda_1}} S^\beta \right]^{1-\lambda_1}$$

Scopo del fattore di forma è quello di tener conto della variazione della profondità dell'intaglio, o meglio della variazione del rapporto tra la larghezza della piastra e la profondità dell'intaglio. L'idea di introdurre questo fattore di forma nasce dall'osservazione che l'ampiezza di oscillazione dei risultati è dettata in maniera importante dalla variazione di  $a$ , come si può evincere sia dal calcolo del  $K_4$ , tab. I, che dai risultati del PSM nella prima elaborazione fatta, tab. 6.III.

Ovviamente, sia  $S$  che  $\beta$  sono incogniti a priori ma dall'elaborazione dei risultati scaturisce che la miglior soluzione è adottare

$$(6.4) \quad S^\beta = \left( \frac{2W-a}{2W} \right)^{\lambda_1} = \left( 1 - \frac{a}{2W} \right)^{\lambda_1}$$

da cui

$$(6.5) \quad K_{4FE3} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_4}{\sigma_{\text{peak}} d^{1-\lambda_1}} \left( 1 - \frac{a}{2W} \right)^{\lambda_1} \right]^{1-\lambda_1}$$

Con questa scelta non si ottiene un grosso miglioramento rispetto ai risultati globali elaborati con la (6.2), infatti

Tab. 6.VI

	$K_{4FE1}$	$K_{4FE2}$	$K_{4FE3}$
Valore medio	1.399	0.770	0.740
Valore massimo	1.707 (+22 %)	0.882 (+15 %)	0.840 (+14 %)
Valore minimo	1.263 (-10 %)	0.715 (-7 %)	0.695 (-6 %)

Dove la (6.5) mostra i vantaggi, rispetto alla proposta (6.2), è nell'andamento dei risultati in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio. Nella tab. 6.VII, e nella fig. 6.5, si vede come, sempre per  $a/d \geq 3$ , la variazione dei risultati ottenuti con le analisi rientra nel  $\pm 3$  %, obiettivo che si voleva conseguire.

Tab. 6.VII

$K_{4FE3}$					
$2\alpha$ [°]	Valore medio	Valore minimo	Valore massimo	scost. % min	scost. % max
30	0.704	0.698	0.719	-0.9	2.1
45	0.700	0.695	0.716	-0.7	2.3
60	0.700	0.696	0.713	-0.6	1.8
75	0.708	0.704	0.723	-0.5	2.2
90	0.724	0.720	0.735	-0.6	1.6
102	0.745	0.741	0.751	-0.5	0.9
105	0.751	0.747	0.759	-0.6	1
120	0.791	0.785	0.797	-0.7	0.8
135	0.837	0.832	0.840	-0.6	0.3

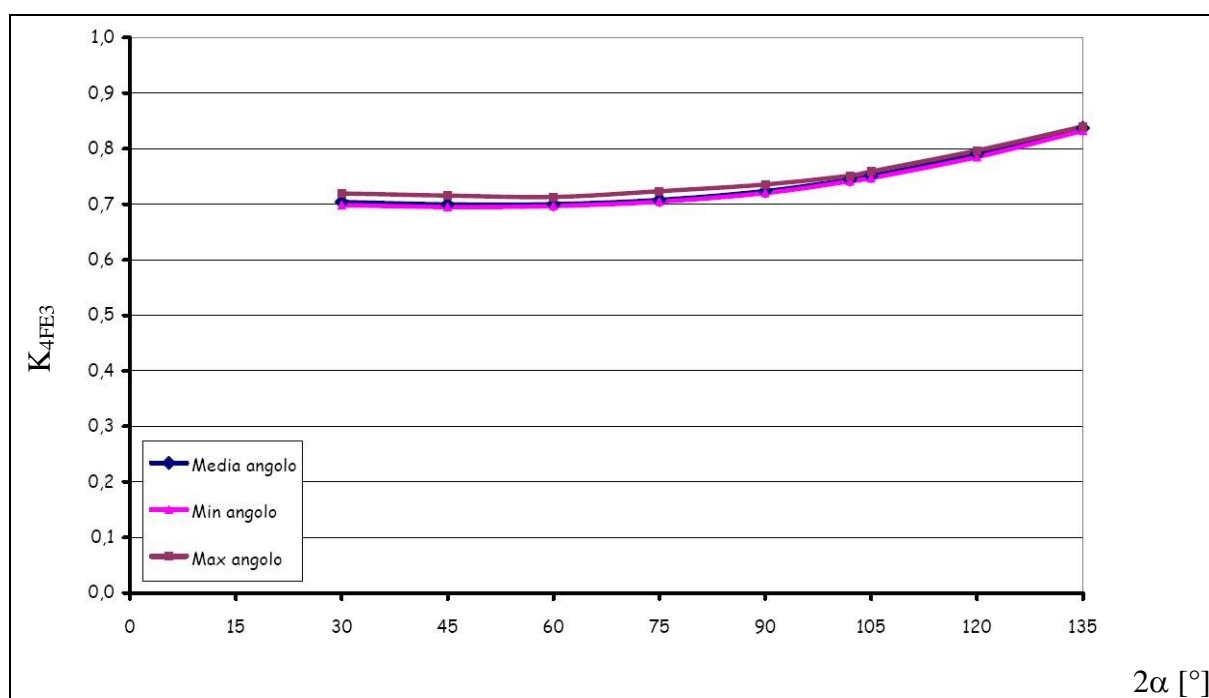


Fig. 6.5: elaborazione valori  $K_{4FE3}$  per intagli a V laterali non raccordati al variare di  $2\alpha$  per  $a/d \geq 3$ .

Si può ora rispondere ad alcune domande che si erano poste all'inizio del capitolo:

- se il metodo converge per il modo IV: sì, il metodo converge;
- da quale valore del rapporto  $a/d$  si ha convergenza per il modo IV: la convergenza si ha per  $a/d \geq 3$ ;
- a quale espressione semplificata il metodo converge per il modo IV: all'espressione (6.5).

Rimane ora da rispondere all'ultima domanda, la più importante: l'espressione (6.5) è valida anche per il modo I?

Per rispondere a questa domanda si riprendono i risultati delle analisi riguardanti il modo I, già oggetto delle elaborazioni di cui al cap. 4, e si rivedono alla luce della formula (6.5) così riscritta

$$(6.6) \quad K_{1FE1} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{\sigma_{\text{peak}} d^{1-\lambda_1}} \left( 1 - \frac{a}{2W} \right)^{\lambda_1} \right]^{1-\lambda_1}$$

I risultati che ci interessano sono quelli suddivisi per angolo, in quanto questo è l'approccio a cui ci obbliga il modo IV. La tabella 6.VIII e la fig. 6.6 mostrano i risultati dell'elaborazione per il modo I, sempre per  $a/d \geq 3$ .

Il risultato ottenuto è buono, anche se meno regolare di quello ottenuto con il modo IV. La formula (6.6) è idonea a rappresentare anche il modo I.

Con riferimento ai valori medi, le differenze tra  $K_{1FE1}$  e  $K_{4FE3}$  sono piuttosto piccole e le fig. 6.7 e 6.8 le visualizzano molto bene. Tra i due modi le differenze massime sono inferiori al 5%.

Tab. 6.VIII

$K_{1FE1}$					
$2\alpha$ [°]	Valore medio	Valore minimo	Valore massimo	scost. % min	scost. % max
30	0.700	0.684	0.715	-2.2	2.2
45	0.717	0.696	0.732	-2.9	2.2
60	0.710	0.696	0.717	-1.9	1.1
75	0.714	0.698	0.727	-2.3	1.8
90	0.734	0.725	0.740	-1.2	0.7
105	0.747	0.740	0.750	-0.9	0.4
120	0.757	0.744	0.767	-1.8	1.3
135	0.811	0.799	0.822	-1.5	1.3

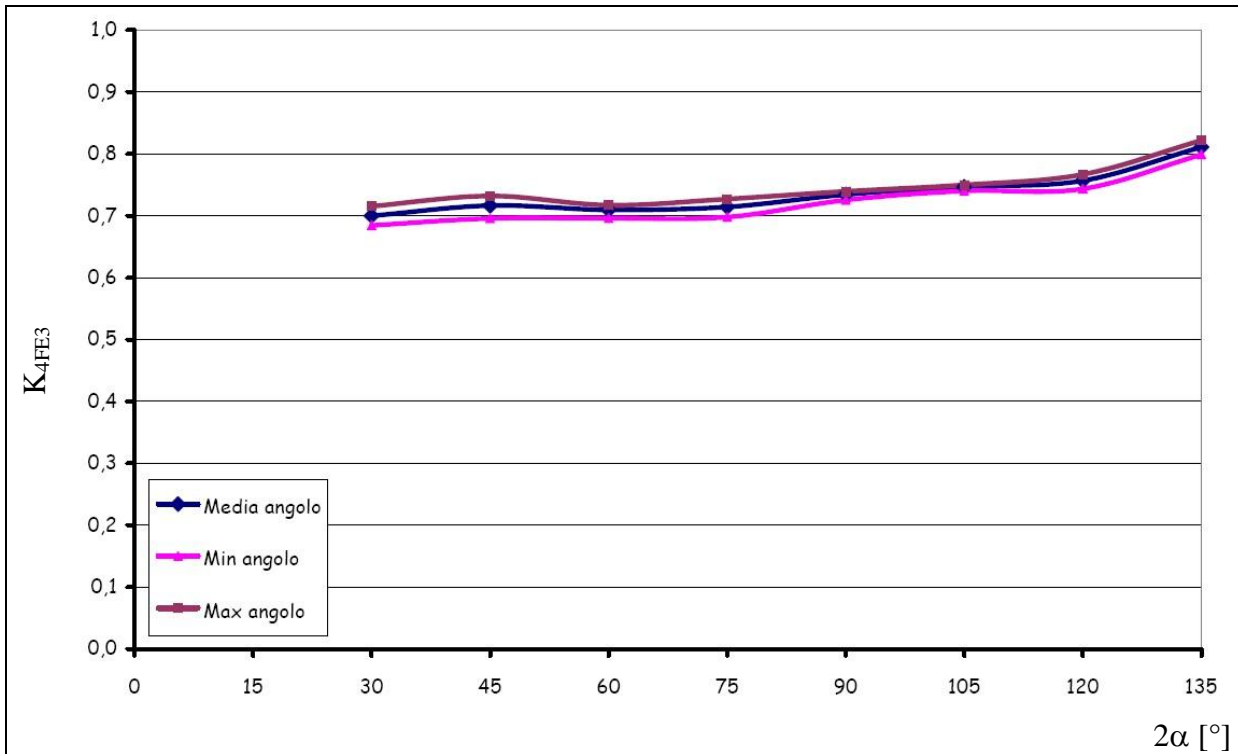


Fig. 6.6: elaborazione valori  $K_{1FE1}$  per intagli a V laterali non raccordati al variare di  $2\alpha$  per  $a/d \geq 3$ .

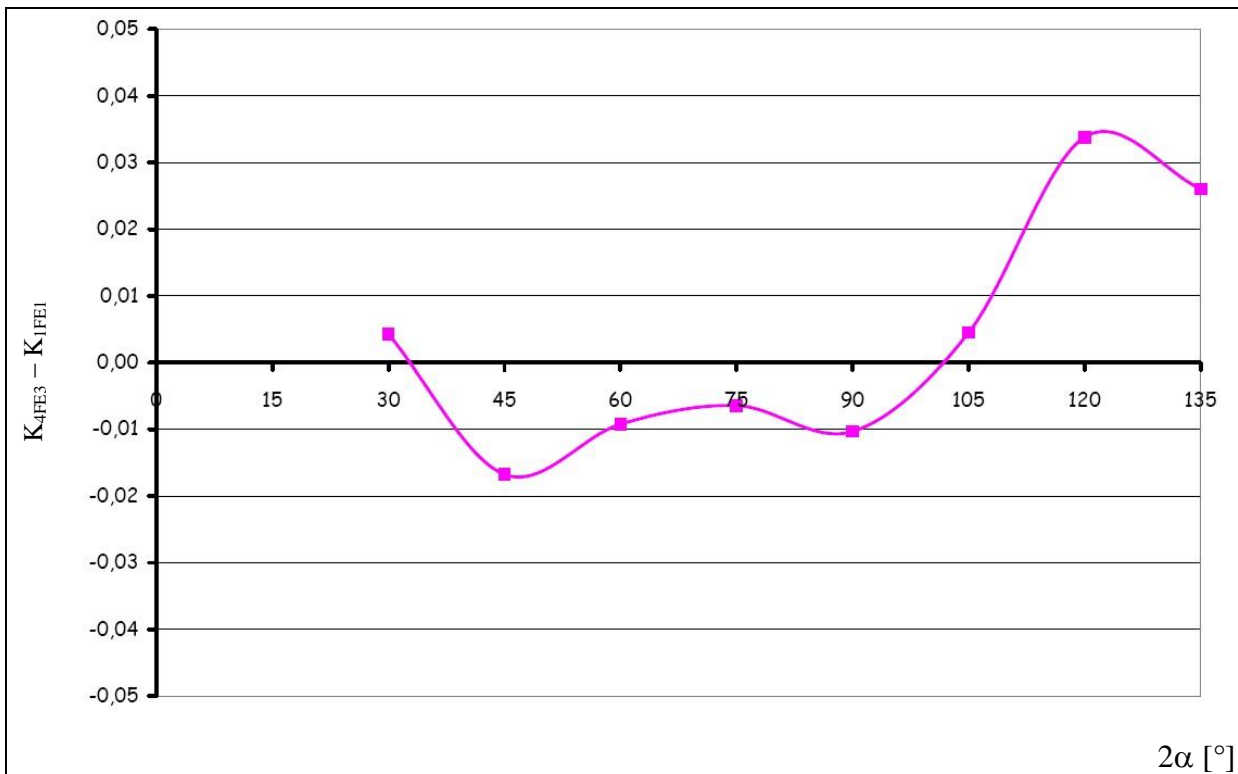


Fig. 6.7: Differenza  $K_{4FE3} - K_{1FE1}$  per intagli a V non raccordati al variare dell'angolo di apertura dei lembi

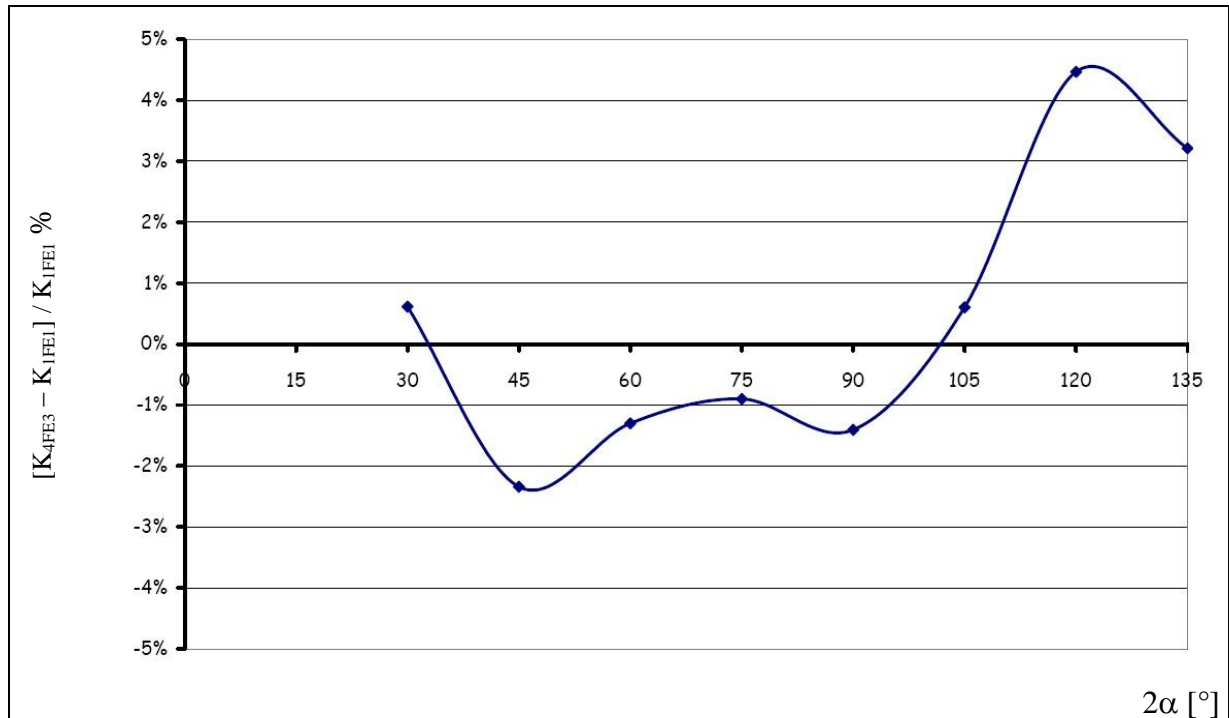


Fig. 6.8: Differenza %  $[(K_{4FE3} - K_{1FE1}) / K_{1FE1}]$  per intagli a V non raccordati al variare dell'angolo di apertura dei lembi

## 6.5 CONCLUSIONI

È stato affrontato il caso di intagli laterali a V non raccordati su piastra soggetta a solo momento flettente. Lo schema di carico della piastra induce una deformazione di apertura dell'intaglio e quindi si è in presenza di una sollecitazione di modo I.

Lo scopo dello studio è di verificare l'applicabilità del peak stress method (PSM) al caso di studio proposto ed in particolare di confrontare i risultati con quelli ottenuti con sollecitazioni di modo I provocati da trazione della piastra. A questo scopo si è definito il "Modo IV" come quel modo di sollecitazione del difetto che provoca apertura dei lembi causato da momento flettente, contrapposto al modo I, dove l'apertura dei lembi è dovuta a trazione.

Al solito, gli intagli presi in considerazione sono di due profondità diverse, 5 e 10 contro una larghezza totale della piastra di 50, e di ampiezze  $2\alpha$  variabili da  $30^\circ$  a  $135^\circ$ , con passo  $15^\circ$ , e  $102^\circ$ . Per ogni combinazione geometrica si sono prodotte mesh caratterizzate da rapporti  $a/d$  variabili da 3 a 15. Per ogni analisi è stata rilevata la tensione  $\sigma_y$  di picco che si colloca all'apice degli intagli.

Le analisi sono state effettuate utilizzando solamente elementi a 4 nodi.

È stata individuata una relazione, (6.6), che permette l'applicazione del PSM al modo IV. Non solo, applicata la stessa al modo I si è visto come entrambi i modi convergano agli stessi valori nello stesso modo.

Possiamo quindi affermare che

- è possibile applicare il PSM al modo IV;
- il PSM applicato al modo IV converge per  $a/d \geq 3$ ;
- il PSM applicato con la (6.6) converge al medesimo set di valori sia per il modo I che per il modo IV.

A questo punto non ha più senso parlare di modo I e di modo IV, ma si può ritornare a parlare solamente di modo I, indipendentemente dalla sollecitazione esterna applicata. La relazione che permette l'applicazione del PSM è quindi

$$(6.7) \quad K_{IFE} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_I}{\sigma_{\text{peak}} d^{1-\lambda_1}} \left( 1 - \frac{a}{2W} \right)^{\lambda_1} \right]^{1-\lambda_1}$$

i cui valori possono essere tabellati, tab. 6.IX, e rappresentati graficamente, fig. 6.9

Tab. 6.IX

$2\alpha$ [°]	$K_{IFE}$
30	0.702
45	0.703
60	0.705
75	0.711
90	0.729
102	0.745
105	0.749
120	0.774
135	0.824

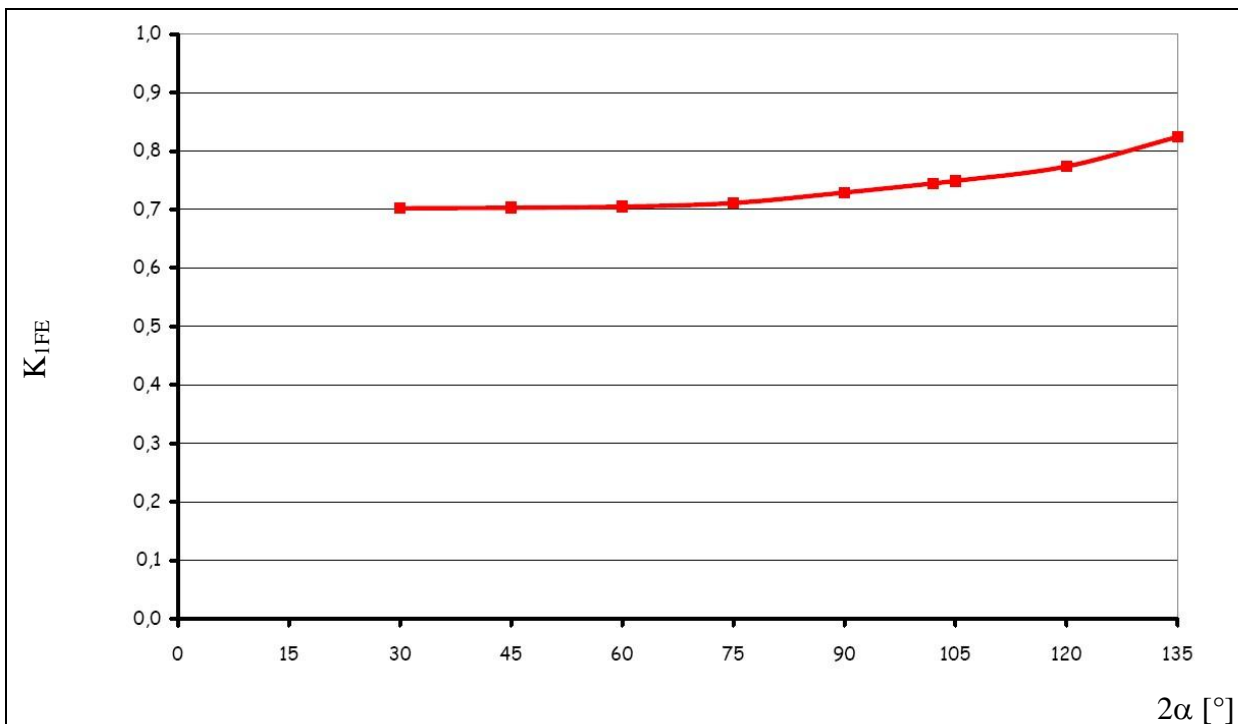


Fig. 6.9: valori di  $K_{IFE}$  per intagli a V laterali non raccordati sollecitati a modo I

L'ultima nota riguarda l'utilizzo di elementi ad 8 nodi. Si è già visto che il loro utilizzo non altera i risultati conseguiti utilizzando elementi a 4 nodi quindi non si procede alla ripetizione delle analisi ma si deduce l'equivalenza dall'esperienza fatta sul modo I e II.

## Capitolo 7 PEAK STRESS METHOD: MODO MISTO I+II

### 7.1 INTRODUZIONE

Nei precedenti capitoli si sono trattati i modi I e II presi singolarmente, sfruttando il fatto che, indipendentemente da come è sollecitato il pezzo, lungo la bisettrice dell'intaglio i due modi sono disaccoppiati.

In particolare, nel capitolo 5, pur avendo sollecitato la piastra di studio con una forza tagliante che, oltre a dar luogo alla corrispondente sollecitazione, dà luogo anche a momento flettente, ci si è focalizzati solo sulla componente di sforzo di modo II.

Nei capitoli 4 e 6, invece, si è studiato il modo I, sottoponendo la piastra di studio a due modalità di sollecitazione. Nel capitolo 4 si è osservato il comportamento della piastra soggetta a pura trazione mentre nel capitolo 6 ci si è focalizzati sulla piastra sollecitata a puro momento flettente.

Sia per il modo II che per il modo I, si è arrivati a definire una relazione che permetta di applicare il PSM ed un valore minimo del rapporto  $a/d$  ai fini dell'applicabilità del metodo. A tale proposito, per il modo I la relazione proposta è in grado di interpretare il comportamento della piastra indipendentemente dal modo di applicazione del carico.

Si vuole ora fare un ulteriore passo in avanti e studiare cosa accade se l'intaglio è sollecitato a Modo I ed a Modo II contemporaneamente, o, in altre parole, quando l'intaglio è soggetto a deformazioni di apertura e di slittamento contemporaneamente.

Come al solito, gli obiettivi sono individuare se il metodo converge e da quale valore del rapporto  $a/d$  si ha convergenza. Per quanto riguarda l'espressione che permette di applicare il PSM, l'auspicio è che valgano le espressioni individuate nei capitoli 5 e 6, ovvero le (5.14) e (6.7).

### 7.2 MODELLO FEM

Il modello di piastra che si andrà a studiare è mostrato in fig. 7.1

Geometricamente, la piastra presenta una doppia simmetria rispetto agli assi verticale ed orizzontale. Le dimensioni della piastra sono  $H = 100$  e  $W = 50$ , con  $a$  profondità dell'intaglio, e  $2\alpha$  angolo di apertura dei lembi. La bisettrice degli intagli coincide con l'asse di simmetria orizzontale.

Le condizioni di carico sono la somma di una condizione di carico simmetrica, il carico di trazione  $q$ , e di una antisimmetrica, la forza di taglio  $2T$ , rispetto ed entrambi gli assi.

Si riesce a studiare  $\frac{1}{2}$  della piastra ponendo un vincolo sugli spostamenti lungo  $y$  ed uno sugli spostamenti lungo  $x$  applicati entrambi all'asse di simmetria orizzontale della piastra. La somma di questi vincoli impedisce anche le rotazioni attorno all'asse  $z$  dei nodi giacenti su suddetto asse. Verrà, pertanto, studiato il modello mostrato in fig. 7.2.

Si studiano tre diverse combinazioni tra la sollecitazione di taglio e quella di trazione in modo da ottenere tre diverse combinazioni tra lo sforzo normale da momento flettente e quello da trazione.

Le tre combinazioni si ottengono mantenendo fisso il carico di trazione  $q = 1$  e variando la forza di taglio  $T$ . Si utilizzano i seguenti valori

$$\tau_{\text{med}} = \frac{2T}{2W \cdot 1} = \frac{2 \cdot 12.5}{50 \cdot 1} = 0.5$$

(c1)  $T = 12.5 \quad \Rightarrow$

$$\sigma_{\text{fmax}} = \frac{2T \cdot H}{\frac{1}{12}(2W)^3 \cdot 1} W = \frac{3 \cdot 12.5 \cdot 100}{15625} 25 = 6$$

$$\tau_{\text{med}} = \frac{2T}{2W \cdot 1} = \frac{2 \cdot 25}{50 \cdot 1} = 1$$

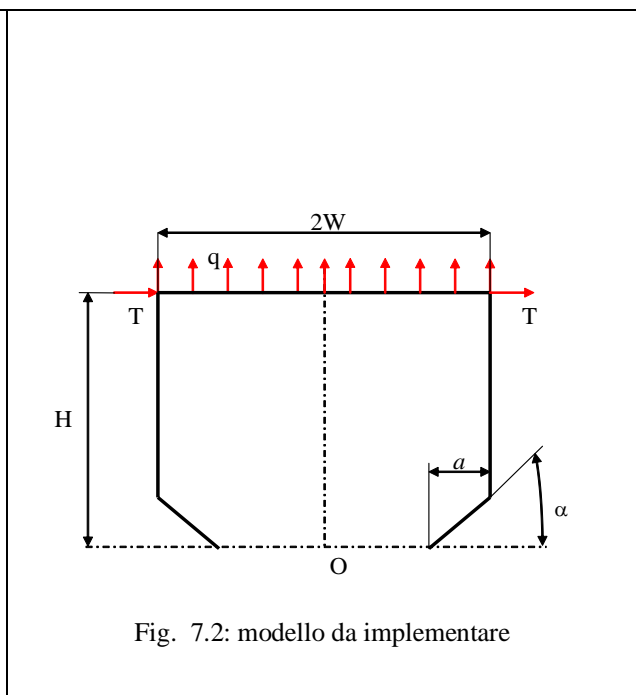
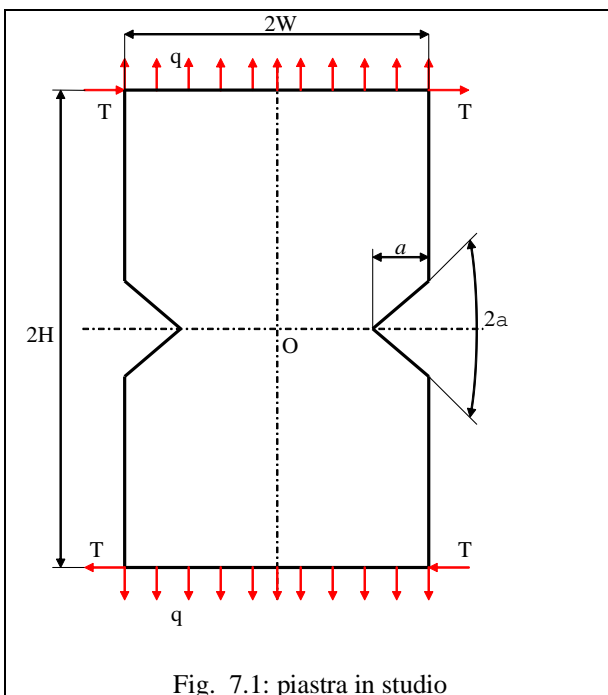
(c2)  $T = 25 \quad \Rightarrow$

$$\sigma_{\text{fmax}} = \frac{2T \cdot H}{\frac{1}{12}(2W)^3 \cdot 1} W = \frac{3 \cdot 25 \cdot 100}{15625} 25 = 12$$

$$\tau_{\text{med}} = \frac{2T}{2W \cdot 1} = \frac{2 \cdot 50}{50 \cdot 1} = 2$$

(c3)  $T = 50 \quad \Rightarrow$

$$\sigma_{\text{fmax}} = \frac{2T \cdot H}{\frac{1}{12}(2W)^3 \cdot 1} W = \frac{3 \cdot 50 \cdot 100}{15625} 25 = 24$$



Gli angoli  $2\alpha$  indagati vanno da  $30^\circ$  a  $135^\circ$ , con passo  $15^\circ$ , e l'angolo  $102^\circ$ , limite della singolarità per il modo II. Anche in questo caso si prenderanno in considerazione profondità dell'intaglio  $a$  pari a 5 e 10.

### 7.3 DETERMINAZIONE DEI FATTORI DI INTENSIFICAZIONE DELLE TENSIONI $K_1$ E $K_2$

Si determinano innanzitutto i fattori N-SIF di modo I e II dei casi studiati. Allo scopo si eseguono delle analisi FEM utilizzando delle mesh molto fitte con elementi piani a 4 nodi (PLANE42 in Ansys®) ed applicando le formula di Gross e Mendelson<sup>[8]</sup> (2.13) dove il grado di singolarità  $(1 - \lambda_i)$  è calcolato risolvendo la (2.8).

Si ottengono i valori di Tab. 7.I.

Tab. 7.I

$a$ [m m]	$2\alpha$ [°]	$1 - \lambda_1$	$1 - \lambda_2$	T =12.5		T =25		T =50	
				$K_1$	$K_2$	$K_1$	$K_2$	$K_1$	$K_2$
5	30	0.498	0.402	30.853	-16.838	57.251	-31.380	110.048	-60.464
5	45	0.495	0.340	30.885	-19.793	57.310	-36.865	110.158	-71.010
5	60	0.488	0.269	31.061	-23.080	57.632	-42.966	110.704	-83.141
5	75	0.475	0.187	31.423	-26.431	58.271	-49.374	112.025	-94.868
5	90	0.455	0.091	32.033	-29.198	59.429	-54.311	114.222	-104.538
5	102	0.433	0	32.766	-30.639	60.800	-56.874	116.864	-109.477
5	105	0.426	0	32.995	-27.562	61.227	-51.147	117.680	-98.447
5	120	0.348	0	34.525	-13.017	64.069	-24.239	123.140	-46.783
5	135	0.326	0	36.998	-0.902	68.695	-1.727	132.090	-3.376
10	30	0.498	0.402	50.341	-25.682	94.643	-48.429	183.369	-93.206
10	45	0.495	0.340	50.276	-29.010	94.577	-54.398	183.179	-105.185
10	60	0.488	0.269	50.375	-32.154	94.777	-60.298	183.582	-116.587
10	75	0.475	0.187	50.663	-34.738	95.320	-65.283	184.659	-126.236
10	90	0.455	0.091	51.172	-36.139	96.360	-67.737	186.660	-131.398
10	102	0.433	0	51.849	-35.766	97.673	-67.152	189.322	-129.923
10	105	0.426	0	52.072	-32.246	98.110	-60.551	190.159	-117.375
10	120	0.348	0	53.628	-15.597	101.145	-29.309	196.180	-56.734
10	135	0.326	0	56.340	-1.383	106.391	-2.596	206.496	-5.023

### 7.4 APPLICAZIONE DEL PSM

Determinati i  $K_i$ , si procede con le analisi volte all'applicazione del PSM

A tale scopo viene creato un file di istruzioni in linguaggio APDL con le istruzioni per la generazione della geometria, l'applicazione delle condizioni al contorno, la meshatura, lo svolgimento dell'analisi e la scrittura dei risultati.

Si eseguono analisi utilizzando solamente elementi a 4 nodi (PLANE42 in Ansys®) in quanto si è già visto che l'utilizzo degli elementi ad 8 nodi si traduce solamente in un affinamento della mesh senza variazione dei risultati.

La dimensione degli elementi, o in altre parole la fittezza della mesh, viene stabilita impostando la dimensione globale della mesh (ESIZE di Ansys), fissando prima il valore del

rapporto  $a/d$  teorico desiderato e calcolando di conseguenza, nota la dimensione dell'intaglio, la dimensione  $d$  dell'elemento. Le strategie di meshatura adottate sono le stesse in utilizzate in precedenza.

Si ribadisce che la dimensione dell'elemento  $d$  impostata è una dimensione teorica. Infatti, a partire da questa, il software suddividerà le linee del modello con un numero di elementi approssimato per eccesso. La dimensione reale dell'elemento sarà quindi minore o al più uguale a quella impostata.

I rapporti  $a/d$  indagati vanno da 3 a 20 con passo 0.5.

I risultati che si andranno a leggere nelle analisi sono le tensioni  $\sigma_9$  e  $\tau_{r9}$  nel nodo posto all'apice dell'intaglio e la coordinata  $x$  del nodo posto sull'apice dell'intaglio e del primo nodo successivo lungo l'asse  $x$ . Le due coordinate ci permettono di ricavare la dimensione  $d$  reale della mesh.

Per l'elaborazione dei risultati, si utilizzeranno come primo tentativo le espressioni (6.7), per il modo I, e (5.14), per il modo II, che qui si riscrivono per comodità di utilizzo

$$(7.1) \quad K_{1FE} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{\sigma_{\text{peak}} d^{1-\lambda_1}} \left( 1 - \frac{a}{2W} \right)^{\lambda_1} \right]^{1-\lambda_1}$$

$$(7.2) \quad K_{2FE1} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{\tau_{\text{peak}} d^{1-\lambda_2}} \right]^{1-\lambda_2}$$

Una variante interessante potrebbe essere l'utilizzo della seguente espressione per il modo II

$$(7.3) \quad K_{2FE2} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{\tau_{\text{peak}} d^{1-\lambda_2}} \left( 1 - \frac{a}{2W} \right)^{\lambda_2} \right]^{1-\lambda_2}$$

Al momento, l'interesse per la (7.3) deriva solamente dalla sua identità formale con la (7.1).

L'analisi dei risultati viene fatta separando il modo I dal modo II.

### 7.4.1 Modo I

Per il modo I, come auspicato, la formula (7.1) si mostra adatta all'applicazione del PSM, mantenendo il valore minimo per la convergenza del rapporto  $a/d$  pari a 3. Non solo, i valori di convergenza al variare dell'angolo di apertura dell'intaglio si confermano quelli già determinati e riportati nella tab. 6.IX.

La tab. 7.II mostra i valori di  $K_{1FE}$  determinati nell'analisi di modo I+II, quelli di riferimento  $K_{1FErif}$  (tratti dalla tab. 6.IX) e la differenza % tra i suddetti valori, differenza diagrammata in fig. 7.3.

Come si può notare le differenze rispetto ai valori di riferimento già calcolati in precedenza sono molto piccole, comunque inferiori al  $\pm 2\%$ .

La conclusione a cui si giunge è, pertanto, che per il modo I il PSM è applicabile indifferentemente dalla presenza contemporanea o meno del modo II, senza alterazioni di espressione o di soglia di convergenza.

Tab. 7.II

$2\alpha$	$K_{IFE}$	$K_{IFerif}$	$\Delta K_{IFE\%}$
30	0.712	0.702	1.4%
45	0.706	0.703	0.4%
60	0.704	0.705	-0.2%
75	0.707	0.711	-0.6%
90	0.730	0.729	0.2%
102	0.737	0.745	-1.1%
105	0.742	0.749	-0.9%
120	0.781	0.774	0.9%
135	0.809	0.824	-1.9%

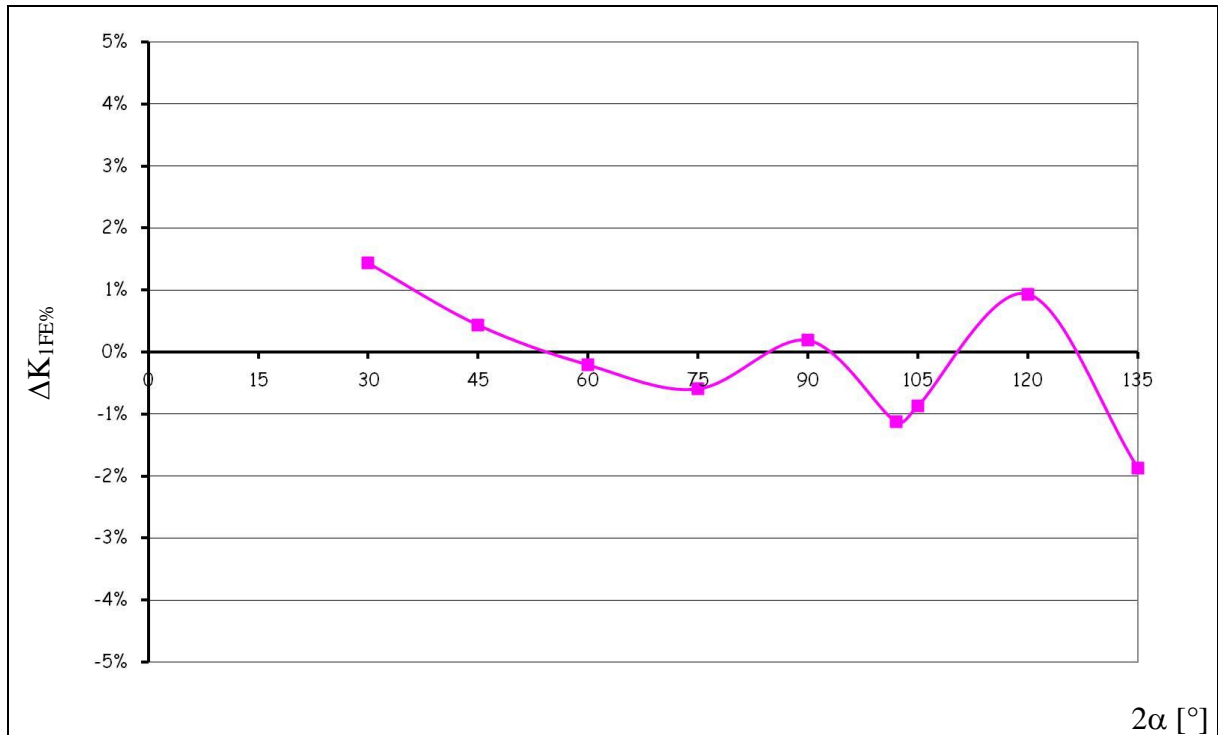


Fig. 7.3: Differenza  $\Delta K_{IFE\%}$  per intagli a V non raccordati al variare dell'angolo di apertura dei lembi per il modo I in presenza anche di modo II

## 7.4.2 Modo II

Purtroppo per il modo II non possono essere tratte le stesse conclusioni del modo I. Delle due formule utilizzate, quella che dà i migliori risultati è la (7.3) e questo può essere visto come un fatto positivo, in quanto modo I e modo II porterebbero ad utilizzare due formule formalmente uguali. Inoltre, rielaborando i risultati ottenuti analizzando il solo Modo II alla luce della (7.3) si ottiene una discreta concordanza sui valori di convergenza, come mostrano la tab. 7.III e la fig. 7.4.

L'aspetto negativo riguarda il valore minimo del rapporto  $a/d$  necessario per avere la convergenza del PSM per il modo II. In precedenza (cap. 5) si era individuato il valore  $a/d \geq 7$  mentre ora il valore minimo ammissibile è 14. Questo significa che la dimensione media dell'elemento con cui si deve operare è almeno la metà di quella individuata in precedenza.

Tab. 7.III

$2\alpha$	$K_{2FE2}$	$K_{2FErif}$	$\Delta K_{2FE\%}$
30	0.987	0.966	2.2 %
45	0.991	0.956	3.7 %
60	1.004	0.964	4.2 %
75	1.018	0.981	3.8 %
90	1.025	0.996	2.9 %
102	1	1	0 %

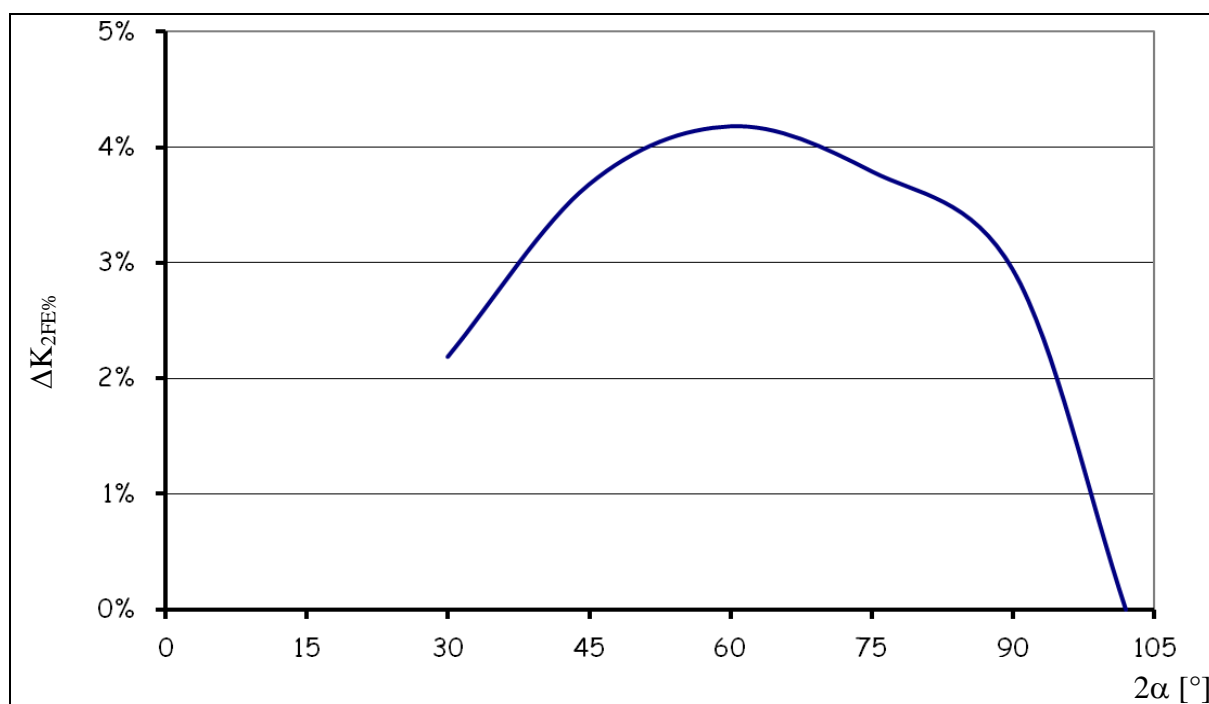


Fig. 7.4: Differenza  $\Delta K_{2FE\%}$  per intagli a V non raccordati al variare dell'angolo di apertura dei lembi per il modo II in presenza anche di modo I

Ci si chiede però perché vi sia questa differenza sul valore del rapporto  $a/d$  tra le analisi con solo modo II e modo I+II. Questa differenza è da imputare solamente alla presenza del modo I in aggiunta al modo II oppure ci sono altri motivi?

Le diversità tra i modelli utilizzati nello studio dei due casi sono riassunte in tab. 7.IV.

La simmetria è stata ben considerata nella costruzione di entrambi i modelli e si ritiene non intervenga minimamente nei risultati ottenuti perciò viene eliminata dalle variabili influenti.

Il carico al momento viene congelato, cioè si ipotizza che la presenza contemporanea di uno o più modi non sia influente.

Tab. 7.IV

	Solo Modo II	Modo I+II
Carico	Solo carico di taglio	Carico di taglio e di trazione
Applicazione del carico	Distribuito sul fianco della piastra	Concentrato sui vertici della piastra quello di taglio
Vincoli	Asimmetrico su entrambi gli assi più bloccaggio degli spostamenti lungo y del'estremità della piastra	Bloccaggio spostamenti lungo x ed y sull'asse orizzontale
Simmetria geometrica	Sfruttata la doppia simmetria	Sfruttata una sola simmetria

Modo di applicazione del carico. Il modello utilizzato nell'analisi del solo modo II prevede l'applicazione di un carico distribuito sul fianco della piastra mentre quello utilizzato nell'analisi del modo I+II prevede un carico concentrato sulla sommità della piastra, piastra che è sufficientemente lunga da confinare gli effetti locali dell'applicazione del carico lontano dall'intaglio. A parità di forza risultante, la sollecitazione media di taglio sulla sezione lorda non cambia ma cambia il momento flettente generato. Per comodità espressiva, sarà detto app1 il primo modo di applicazione del carico, app2 il secondo.

Vincoli. Per lo studio del modo II puro si è sfruttata la doppia simmetria del modello ponendo un vincolo di asimmetria, secondo Ansys, sull'asse orizzontale (asse x). Questo vincolo, però, non consentiva di eliminare tutti i gradi di libertà della piastra pertanto si è dovuti ricorrere all'applicazione di un ulteriore vincolo per eliminare le rotazioni rispetto all'asse z. A questo fine, è stato posto un vincolo agli spostamenti y sulla superficie di estremità superiore della piastra. Diremo vinc1 questa modalità di vincolo della piastra. Nell'analisi del Modo I+II, invece, l'applicazione del carico di asimmetria sull'asse orizzontale non è più possibile ed è stato imposto in suo luogo un vincolo che impedisce gli spostamenti lungo x ed y e di conseguenza anche le rotazioni rispetto a z. Alla luce di ciò, il vincolo sulla superficie superiore della piastra non è più necessario. Diremo vinc2 questa modalità di vincolo della piastra. Pur essendo entrambi i modelli isostatici, il vincolo vinc1 rende più rigida la piastra rispetto al vinc2.

Per capire l'influenza dei parametri carico e vincolo si procede ora ad eseguire delle analisi comparative per il solo modo II incrociando le condizioni di carico e di vincolo rispetto a quanto già fatto ed elaborando i risultati con la (7.3). In particolare si compareranno le situazioni:

Tab. 7.V

Combinazione	Carico	Vincolo	Note
1	App1	Vinc1	Vedi Cap. 5
2	App2	Vinc2	
3	App2	Vinc1	
4	App1	Vinc2	

La combinazione 1 è la piastra studiata nel cap. 5 i cui risultati sono elaborati secondo la (7.3).

I risultati che si ottengono, in termini di valor medio sono i seguenti.

Tab. 7.VI

$2\alpha$	$K_{2FE2}$				$K_{2FEmed}$
	Cond. 1	Cond. 2	Cond. 3	Cond. 4	
30	0.966	0.974	0.959	0.975	0.969
45	0.956	0.979	0.953	0.982	0.968
60	0.964	0.994	0.963	0.997	0.980
75	0.981	1.011	0.980	1.013	0.996
90	0.996	1.016	0.996	1.018	1.007
102	1	1.000	1.000	1.000	1.000
$(a/d)_{conv}$	7	14	5	14	

Dal confronto risulta evidente che la tipologia di vincolo denominata vinc1 contribuisce in maniera fondamentale ad abbassare il rapporto minimo  $a/d$  necessario alla convergenza. Più in generale si può affermare che le situazioni a più basso valore di  $K_2$ , quelle appunto con il vincolo vinc1, permettono di ottenere una convergenza del PSM fin da mesh abbastanza rade mentre quando il  $K_2$  sale aumenta anche la fittezza della mesh necessaria ad ottenere la convergenza.

In via prudenziale, si può definire il rapporto minimo di convergenza  $a/d = 14$ , valore che permette di comprendere una vasta casistica, ed adottare come valori di riferimento il set di valori indicato come  $K_{2FEmed}$  in tab. 7.VI. Confrontando ora i valori medi ottenuti nell'analisi con modo I+II, dalla tab. III, con i nuovi valori di riferimento, dalla tab. 7.VI, si ha la situazione mostrata in tab. 7.VII e fig. 7.5.

Si possono trarre le seguenti conclusioni.

È possibile applicare il PSM al modo II indipendentemente dalla presenza contemporanea o meno del modo I.

La formula più vantaggiosa per l'applicazione del PSM al modo II è la (7.3).

Il valore minimo del rapporto  $a/d$  per la convergenza del metodo è fortemente influenzato dai vincoli a cui è sottoposta la piastra. Si indica come valore minimo  $a/d = 14$ , già determinato da Meneghetti e Costa<sup>[19]</sup> sui giunti saldati, come valore valido per una ampia gamma di situazioni.

La convergenza del PSM secondo la (7.3) su piastre caratterizzate da intagli laterali con angoli di apertura da 30° a 102° si ha ai valori indicati in tab. 7.VII nella colonna  $K_{2FErif}$ .

Tab. 7.VII

$2\alpha$	$K_{2FE2}$	$K_{2FErif}$	$\Delta K_{2FE\%}$
30	0.987	0.969	1.93 %
45	0.991	0.968	2.45 %
60	1.004	0.980	2.54 %
75	1.018	0.996	2.21 %
90	1.025	1.007	1.87 %
102	1	1.000	0 %

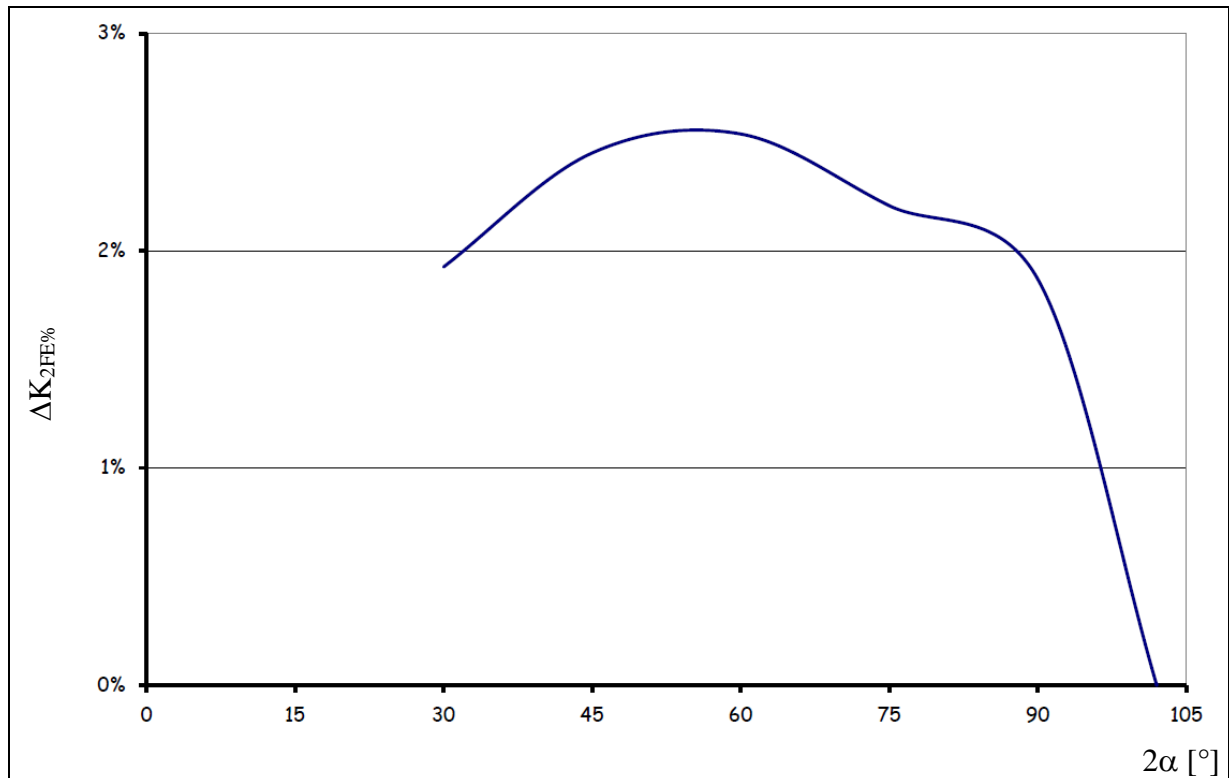


Fig. 7.5: Differenza  $\Delta K_{2FE\%}$  per intagli a V non raccordati al variare dell'angolo di apertura dei lembi per il modo II in presenza anche di modo I

## 7.5 CONCLUSIONI

È stato affrontato il caso di intagli laterali a V non raccordati su piastra, soggetti a sollecitazione di modo I+II, allo scopo di verificare l'applicabilità del peak stress method (PSM).

Gli intagli presi in considerazione sono di due profondità diverse, 5 e 10 contro una larghezza totale della piastra di 50, e di ampiezze  $2\alpha$  variabili da  $30^\circ$  a  $135^\circ$ , con passo  $15^\circ$ , e  $102^\circ$ . Per ogni combinazione geometrica si sono prodotte mesh caratterizzate da rapporti  $a/d$  variabili da 3 a 20. Per ogni analisi sono state registrate le tensioni  $\sigma_y \equiv \sigma_9$  e  $\tau_{xy} \equiv \tau_{r9}$  di picco, rilevate sul nodo che si colloca all'apice degli intagli.

Le analisi sono state effettuate utilizzando elementi a 4 nodi.

Lo studio ha permesso di mostrare come il PSM sia applicabile indifferentemente ai casi in cui siano presenti il solo Modo I, il solo del Modo II oppure una loro combinazione, Modo I+II.

Le condizioni di applicabilità, in termini di rapporto minimo di convergenza e di formula per l'elaborazione dei risultati sono le seguenti:

$$(7.4) \quad a/d \geq 3, \quad K_{1FE} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{\sigma_{\text{peak}} d^{1-\lambda_1}} \left(1 - \frac{a}{2W}\right)^{\lambda_1} \right]^{1-\lambda_1}$$

$$(7.5) \quad a/d \geq 14, \quad K_{2FE} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{\tau_{\text{peak}} d^{1-\lambda_2}} \left(1 - \frac{a}{2W}\right)^{\lambda_2} \right]^{1-\lambda_2}$$

I valori di convergenza dei parametri  $K_{1FE}$  e  $K_{2FE}$  in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio sono riassumibili nella tab. 7.VIII e diagrammati nella fig. 7.6.

Tab. 7.VIII

$2\alpha$	$K_{1FE}$	$K_{2FE}$
30	0,702	0.969
45	0,703	0.968
60	0,705	0.980
75	0,711	0.996
90	0,729	1.007
102	0,745	1.000
105	0,749	1.000
120	0,774	1.000
135	0,824	1.000

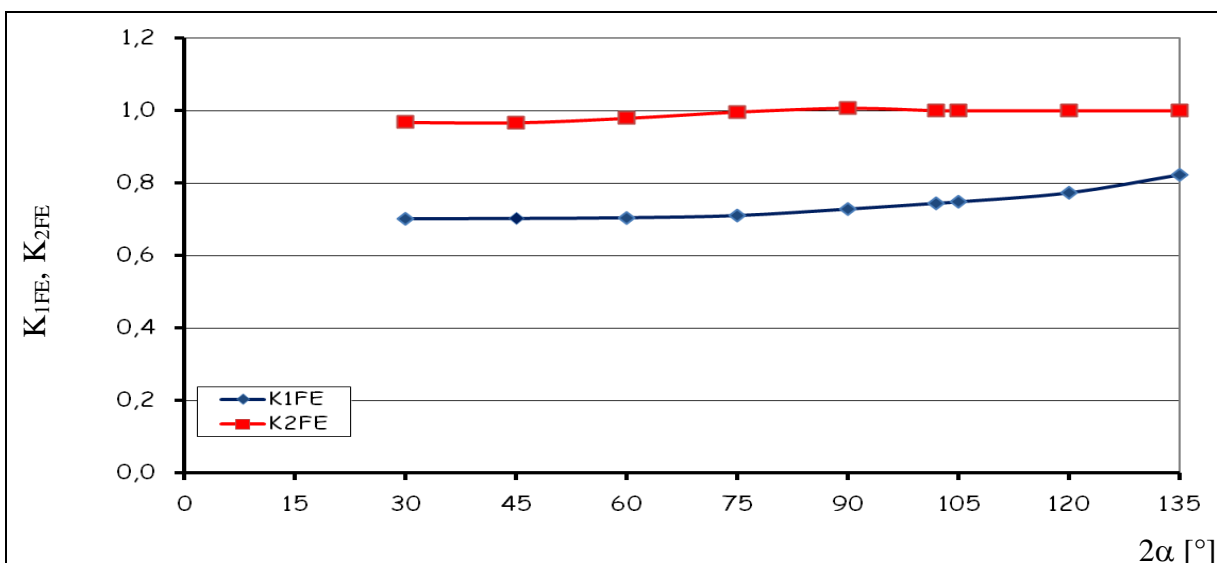


Fig. 7.6: valori di  $K_{1FE}$  e  $K_{2FE}$  per intagli a V laterali non raccordati sollecitati a modo I, II, I+II

## Capitolo 8 PEAK STRESS METHOD: MODO III

### 8.1 INTRODUZIONE

Nei precedenti capitoli sono stati trattati i casi di intagli a V non raccordati su piastre piane, sollecitati a Modo I e II.

Si inizia ora a trattare di intagli con la stessa forma ma che si sviluppano circonferenzialmente e vengono sollecitati a torsione (Modo III) (fig. 8.1).

È questo il caso degli alberi per la trasmissione di coppie.

Considerando che il Modo III è sempre singolare, la possibilità di avere a disposizione un metodo “economico” da applicare può risultare molto utile.

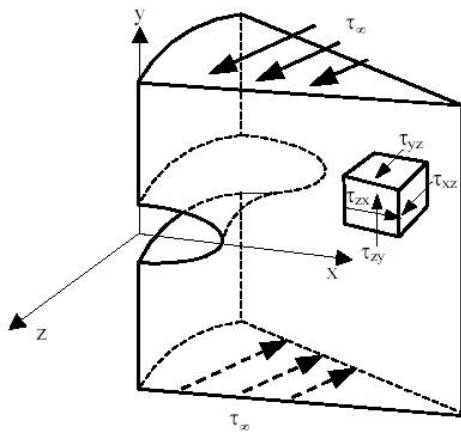


Fig. 8.1: concio di legno

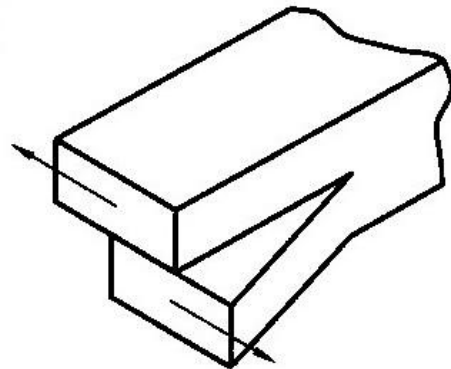


Fig. 8.2: schema di deformazione

Anche in questo caso si seguirà lo stesso iter operativo seguito in precedenza: individuazione del modello da studiare, calcolo dei fattori  $K_3$  mediante analisi FEM con mesh fitta, applicazione del PSM, dapprima utilizzando elementi a 4 nodi, poi utilizzando elementi ad 8 nodi.

Gli obiettivi sono quelli di individuare

- se il metodo converge;
- da quale valore del rapporto  $a/d$  si ha convergenza;
- a quale espressione semplificata il metodo converge.

## 8.2 MODELLO FEM

Il modello dell'albero che si andrà a studiare è mostrato in fig. 8.3

Geometricamente, è un cilindro con asse di rotazione verticale e diametro pari a  $\varnothing = 2R = 2W$ , interessato da un intaglio a V non raccordato circonferenziale di ampiezza  $2\alpha$  e profondità  $a$ .

L'albero è soggetto ad un momento torcente  $M_t$ .

Date le condizioni di assialsimmetria di geometria, carichi e vincoli, è possibile ridurre lo studio ad un modello piano come mostrato in fig. 8.4. Sull'asse della cricca, verranno collocati dei vincoli che impediranno le traslazioni sia lungo  $y$  che lungo  $z$  ottenendo così il bloccaggio della porzione di albero da studiare.

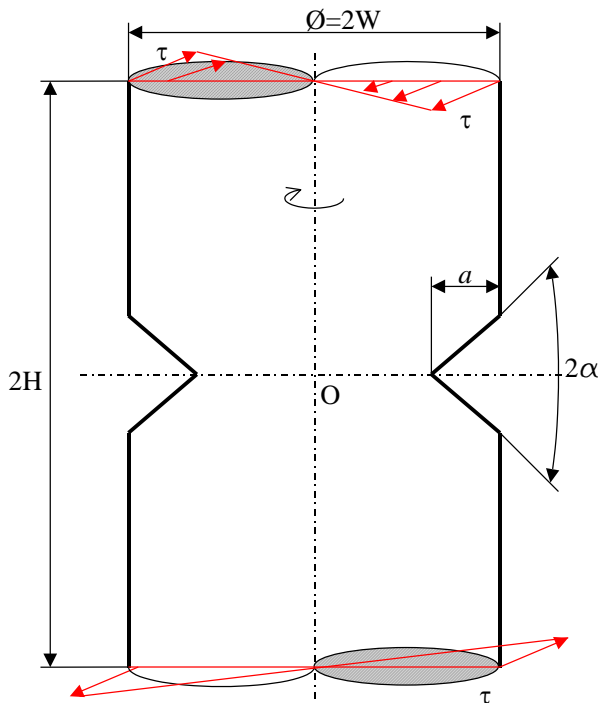


Fig. 8.3: spezzone di solido assialsimmetrico con intaglio

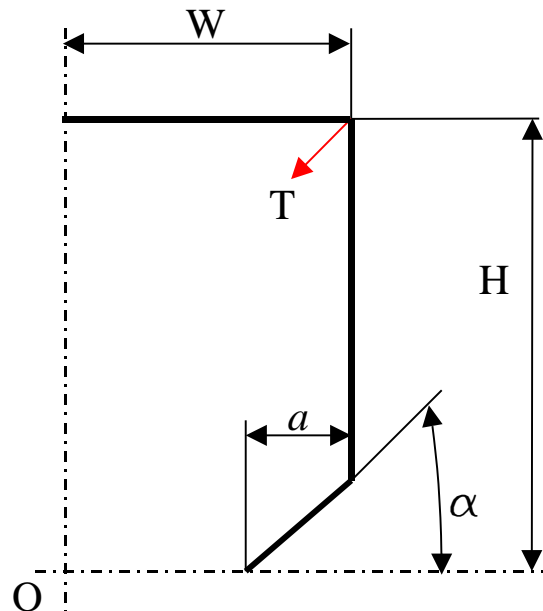


Fig. 8.4: modello da implementare

Per quanto riguarda il carico, sarà applicata una forza concentrata in direzione  $z$ . La lunghezza  $H$  del modello deve essere tale da permettere la corretta introduzione del carico, testimoniata dall'andamento crescente sul raggio della tensione di taglio in corrispondenza della sezione lorda. Prove preliminari hanno mostrato che una dimensione  $H=100$  è ampiamente sufficiente allo scopo.

Si sceglie di applicare un carico tale da produrre una tensione massima di taglio  $\tau_{\max} = 1$  sulla sezione lorda. Essendo

$$M_t = \int_0^{2\pi R} \int_0^R \tau r^2 dr d\alpha = \frac{\tau_{\max}}{R} \int_0^{2\pi R} \int_0^R r^3 dr d\alpha = \frac{\pi}{2} \tau_{\max} R^3 = T R$$

$$(8.1) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\pi}{2} \tau_{\max} R^2 = \frac{\pi}{2} 25^2 = 981.748$$

Pur essendo il modo III sempre singolare, si decide di indagare il comportamento nell'intorno dell'intaglio per angoli  $2\alpha$  da  $30^\circ$  a  $135^\circ$ , con passo  $15^\circ$ , e l'angolo  $102^\circ$ , angolo notevole per il modo II. La scelta è fatta per uniformità con gli altri modi di sollecitazione degli intagli. Anche in questo caso si prenderanno in considerazione profondità dell'intaglio  $a$  pari a 5 e 10.

### 8.3 DETERMINAZIONE DEL FATTORE DI INTENSIFICAZIONE DELLE TENSIONI $K_3$

Il primo step consiste nella determinazione per via numerica del fattore di intensificazione delle tensioni di modo III.

Si va a creare una mesh molto fitta, utilizzando elementi a 4 nodi, in prossimità dell'apice dell'intaglio e quindi si applica la formula di Gross e Mendelson<sup>[8]</sup> (2.25) in cui  $(1 - \lambda_3)$  è il grado di singolarità di modo III che viene calcolato risolvendo la seconda delle (2.24).

Si ottengono i valori di Tab. 8.I, che sono presentati anche nel grafico di fig. 8.5.

Sia dalla tabella che, in maniera più evidente, dal grafico si nota una elevata differenza dei valori del  $K_3$  in funzione della profondità dell'intaglio. Questo aspetto è presente anche nel modo II ma in questo caso sembra ancor più esaltato.

Tab. 8.I

H [mm]	W [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	$1 - \lambda_3$	$K_3$
100	25	5	30	0.455	5.467
100	25	5	45	0.429	5.605
100	25	5	60	0.400	5.729
100	25	5	75	0.368	5.830
100	25	5	90	0.333	5.901
100	25	5	102	0.302	5.925
100	25	5	105	0.294	5.926
100	25	5	120	0.250	5.892
100	25	5	135	0.200	5.783
100	25	10	30	0.455	12.350
100	25	10	45	0.429	12.588
100	25	10	60	0.400	12.797
100	25	10	75	0.368	12.965
100	25	10	90	0.333	13.079
100	25	10	102	0.302	13.120
100	25	10	105	0.294	13.122
100	25	10	120	0.250	13.076
100	25	10	135	0.200	12.935

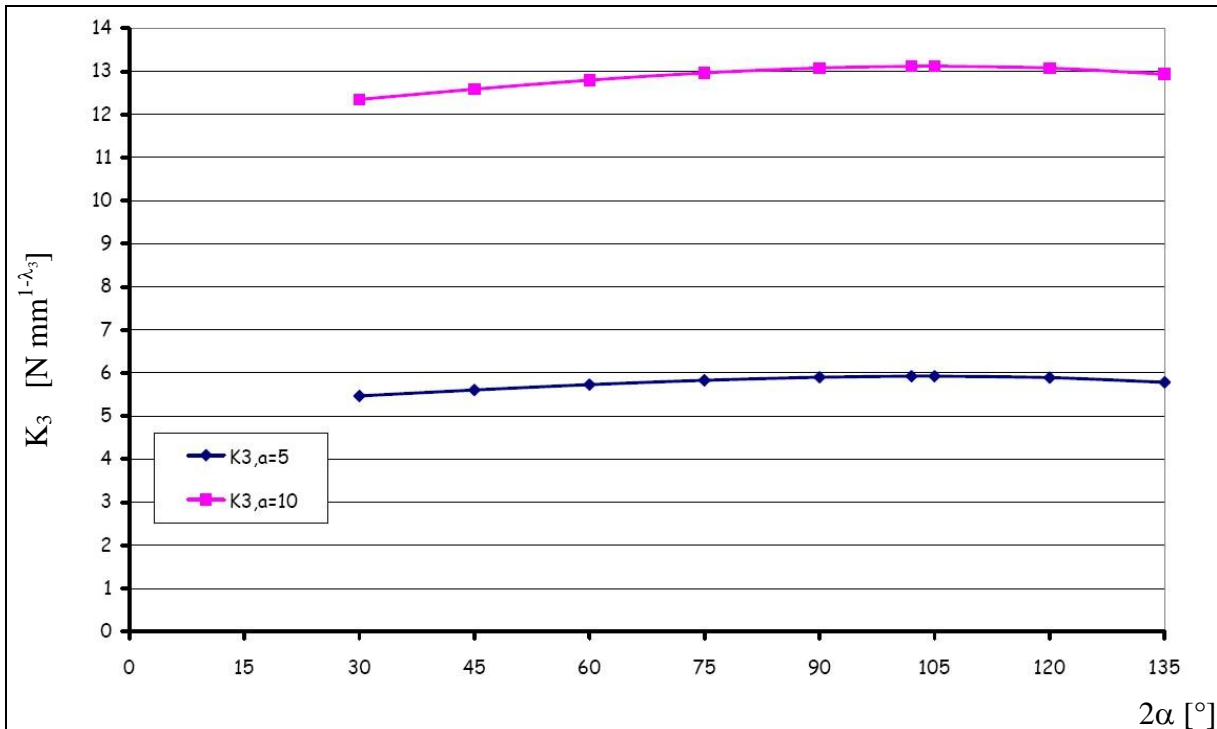


Fig. 8.5: valori del  $K_3$  per intagli laterali non raccordati al variare di  $2\alpha$  per  $a=5$  ed  $a=10$

## 8.4 APPLICAZIONE DEL PSM

Similmente a quanto fatto in precedenza, si procede all'applicazione del PSM.

La dimensione degli elementi, o in altre parole la fittezza della mesh, viene stabilita impostando la dimensione globale della mesh (ESIZE di Ansys®), fissando prima il valore del rapporto  $a/d$  teorico desiderato e calcolando di conseguenza, nota la dimensione dell'intaglio, la dimensione  $d$  dell'elemento. Si ricorda che la dimensione  $d$  impostata è una dimensione teorica.

Le strategie di meshatura adottata è la stessa già usata per il modo I; uno schema viene applicato per angoli minori o uguali a  $120^\circ$  ed uno diverso per l'angolo  $135^\circ$ .

I rapporti  $a/d$  indagati vanno da 3 a 15 con passo 0.5.

Data l'assialsimmetria del modello, si passa ad utilizzare degli elementi dedicati previsti in ANSYS® che sono:

- elemento a 4 nodi: PLANE25;
- elemento a 8 nodi: PLANE83;

In appendice si riportano i file in linguaggio APDL per l'esecuzione delle analisi.

I risultati che si andranno a leggere nelle analisi sono le tensioni  $\tau_{yz}$  nel nodo posto all'apice dell'intaglio e la coordinata  $x$  del nodo posto sull'apice dell'intaglio e del primo nodo successivo lungo l'asse  $x$ . Le due coordinate ci permettono di ricavare la dimensione  $d$  reale della mesh.

Per l'elaborazione dei risultati, si utilizzeranno come primo tentativo le espressioni

$$(8.2) \quad K_{3FE1} = \frac{K_3}{\tau_{yz,peak} d^{1-\lambda_3}}$$

ottenuta dall'espressione (3.7), proposta da Lazzarin-Meneghetti<sup>[11]</sup> per il modo I, con ovvia sostituzione delle grandezze. La seconda espressione è

$$(8.3) \quad K_{3FE2} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_3}{\tau_{yz,peak} d^{1-\lambda_3}} \right]^{1-\lambda_3}$$

derivata dalla (5.12), introdotta nell'analisi del modo II. La (8.3) trova giustificazione teorica nella trattazione di Lazzarin-Zappalorto<sup>[13][14]</sup>.

Per un intaglio a V non raccordato, l'espressione generale della tensione  $\tau_{z\theta}$  per il solo modo III è data dalla (2.31) che lungo la bisettrice dell'intaglio diventa

$$(8.4) \quad \tau_{z\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_3 r^{\lambda_3-1}$$

Allo scopo di calcolare la tensione di picco,  $\tau_{peak}$ , si impone nella (8.4) una distanza dall'apice dell'intaglio  $r_{peak}$ , che si ipotizza legata alla dimensione della mesh secondo la

$$(8.5) \quad r_{peak} = \xi^v d$$

per cui si ottiene

$$(8.6) \quad \tau_{z\theta,peak} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_3 \xi^{v(\lambda_3-1)} d^{\lambda_3-1}$$

che porta alla

$$(8.7) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{\tau_{peak} d^{1-\lambda_3}} = \xi^{v(1-\lambda_3)}$$

da cui, individuando con  $K_{3FE2}$  con  $\xi$ , si ottiene la (8.3) ponendo

$$(8.8) \quad \psi = \frac{1}{v(1-\lambda_3)} = (1 - \lambda_2) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{(1-\lambda_2)^2}$$

Ovviamente, l'elaborazione dei risultati tramite la (8.3) presuppone la determinazione di  $K_{3FE2}$  e  $\psi$  dai risultati stessi.

Un altro modo di vedere l'espressione (8.3) trova origine dall'espressione (2.28) che lega la  $\tau_{max}$  al coefficiente di intensificazione delle tensioni  $K_{3p}$  nel caso di intagli raccordati, determinata da Zappalorto-Lazzarin<sup>[13][14]</sup>. Nel caso di intagli non raccordati, questa espressione possiamo immaginarla applicata alla configurazione deformata dell'intaglio, quando la deformazione locale ha provocato un arrotondamento dell'apice dell'intaglio, assegnando a  $r_0$  il significato di raggio di raccordo all'apice dell'intaglio deformato. Ecco allora che sia  $\tau_{max}$  che  $r_0$  possono essere visti come legati alla dimensione della mesh utilizzata per l'analisi dell'intaglio, ed introducendo per  $r_0$  la (8.5) si giunge ancora alla (8.3).

Oltre alla (8.2) ed alla (8.3), come ulteriore proposta, si utilizzerà una nuova espressione, derivata dalla (8.3), in cui si introduce un fattore “di forma”  $S^\beta$ . La nuova espressione è

$$(8.9) \quad K_{3FE3} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_3}{\tau_{yz,peak} d^{1-\lambda_3}} S^\beta \right]^{1-\lambda_3}$$

L'opportunità di introdurre un fattore di forma, che tenga conto del rapporto tra le dimensioni dell'albero (diametro) e la profondità dell'intaglio, nasce dalla constatazione che vi è una forte dipendenza del  $K_3$  dalle dimensioni di quest'ultimo, dipendenza che probabilmente non può essere trascurata e che, per maggior generalità, viene considerata dipendente dall'angolo attraverso l'esponente  $\beta$ .

Come nel caso del modo II, saranno i risultati che ci guideranno alla scoperta della funzione  $S$  e del suo esponente  $\beta$ .

### 8.4.1 Analisi con elementi a 4 nodi

La fig. 8.6 riporta i risultati ottenuti nell'analisi degli intagli di cui alla tab. 8.I per  $a/d \geq 3$ .

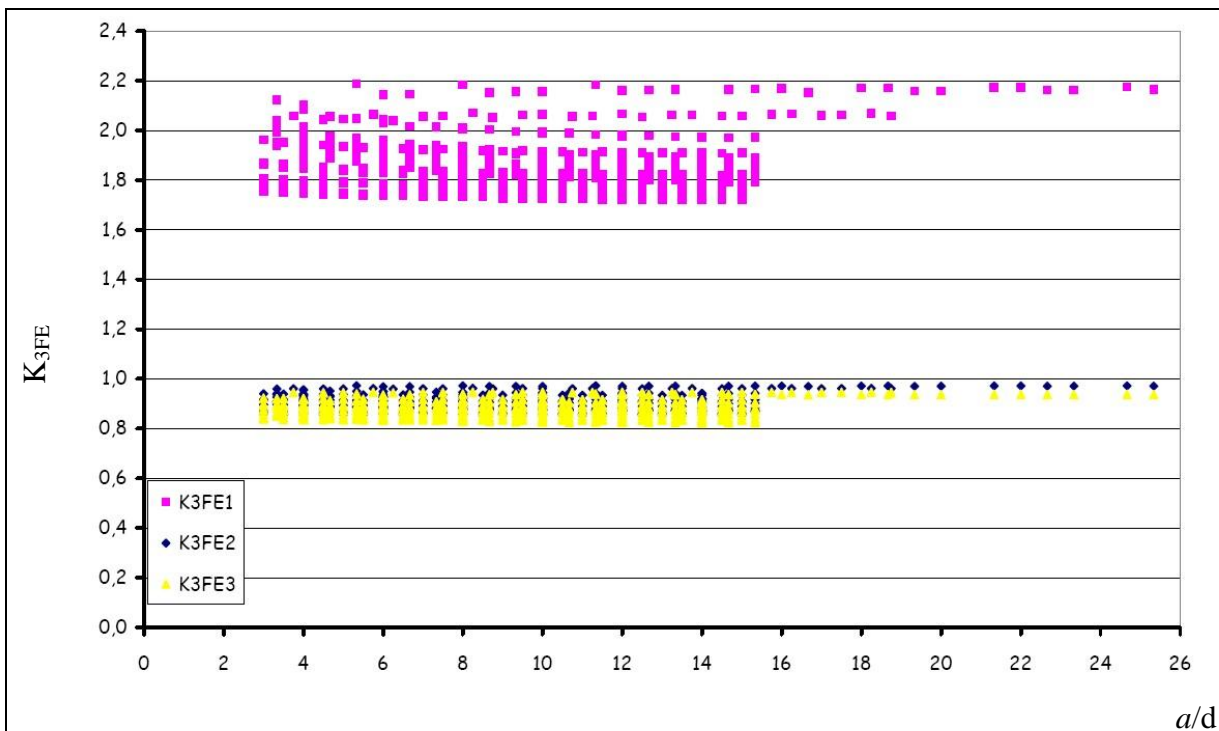


Fig. 8.6: valori del  $K_{3FE}$  per intagli a V laterali al variare di  $a/d$

La serie di elaborazioni denominata  $K_{3FE2}$  è calcolata secondo la (8.3). La scelta di adottare lo stesso valore di  $\psi$  determinato per il modo II, con ovvia sostituzione delle grandezze per il modo III, si dimostra ancora valida se non addirittura migliore. In questo caso, infatti,  $K_{3FE2}$  rimane sempre sotto l'unità, evitando di incappare nei problemi di biforcazione della soluzione che si erano trovati con il modo II.

La serie  $K_{3FE3}$  è stata calcolata imponendo

$$(8.10) \quad S = \frac{2W - a}{2W}, \quad \beta = \lambda_3$$

risultando così

$$(8.11) \quad K_{3FE3} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_3}{\tau_{yz,peak} d^{1-\lambda_3}} \left( \frac{2W - a}{2W} \right)^{\lambda_3} \right]^{1-\lambda_3}$$

I valori che si ottengono sono molto vicini a  $K_{3FE2}$  ed anche la banda di dispersione non si avvantaggia molto del contributo dall'introduzione della funzione di forma.

La tab. 8.II dà una visione globale dei risultati trovati mostrati dalla fig. 8.6.

Tab. 8.II

	$K_{3FE1}$	$K_{3FE2}$	$K_{3FE3}$
Valore medio	1.874	0.904	0.872
Valore massimo	2.187 (+16.75 %)	0.973 (+7.7 %)	0.946 (+8.54 %)
Valore minimo	1.722 (-8.1 %)	0.855 (-5.41 %)	0.822 (-5.76 %)

Si passa ora a considerare i risultati in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio.

$K_{3FE1}$  si dimostra la scelta meno conveniente. La convergenza si ottiene a partire da  $a/d \geq 9$  ed anche così bisogna accettare una banda di scostamento pari a  $\pm 3.5\%$  attorno al valore medio del singolo angolo.

Decisamente migliore è il risultato di  $K_{3FE2}$  di cui si riporta in tab. 8.III e nella fig. 8.7. La convergenza si ottiene a partire da  $a/d \geq 4.5$  (mesh di grandezza doppia rispetto a  $K_{3FE1}$ ) con scostamento massimo del  $\pm 3\%$  attorno al valore medio del singolo angolo.

Ancor più interessanti sono i risultati  $K_{3FE3}$  a cui sono relativi la tab. 8.IV e la fig. 8.8. La convergenza si ottiene a partire da  $a/d \geq 3$  rispettando lo scostamento massimo del  $\pm 3\%$  attorno al valore medio del singolo angolo. L'ulteriore miglioramento, rispetto a  $K_{3FE2}$ , è interamente merito del fattore di forma che avvicina i risultati ottenuti con le diverse profondità dell'intaglio.

Nonostante la bontà dei risultati espressi in funzione dell'angolo, ridurre la relazione tra  $K_3$ ,  $\tau_{peak}$  e  $d$  ad una costante non è possibile in nessuna delle formulazioni proposte, anche a fronte di un sensibile innalzamento del rapporto  $a/d$  minimo per la convergenza.

Tab. 8.III

K <sub>3FE2</sub>					
2α [°]	Valore medio	Valore minimo	Valore massimo	scost. % min	scost. % max
30	0.867	0.856	0.890	-1.3	2.7
45	0.866	0.855	0.888	-1.3	2.6
60	0.871	0.861	0.894	-1.2	2.6
75	0.882	0.872	0.902	-1.2	2.2
90	0.898	0.889	0.915	-1.0	1.9
102	0.914	0.906	0.929	-0.9	1.6
105	0.918	0.910	0.933	-0.8	1.6
120	0.940	0.934	0.952	-0.7	1.2
135	0.966	0.960	0.973	-0.7	0.7

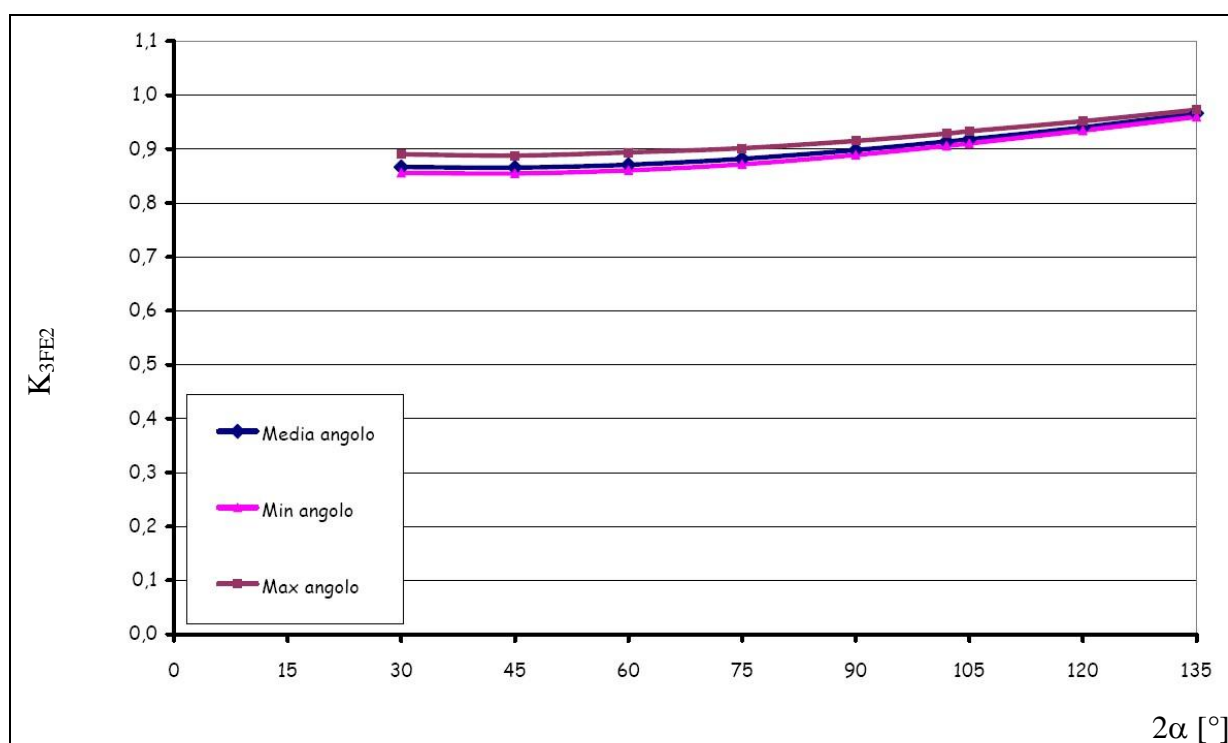


Fig. 8.7: elaborazione valori K<sub>3FE2</sub> per intagli a V laterali non raccordati al variare di 2α per a/d ≥ 4.5

Tab. 8.IV

K <sub>3FE3</sub>					
2α [°]	Valore medio	Valore minimo	Valore massimo	scost. % min	scost. % max
30	0.833	0.822	0.859	-1.4	3
45	0.833	0.822	0.852	-1.3	2.3
60	0.839	0.828	0.858	-1.3	2.3
75	0.850	0.840	0.865	-1.2	1.8
90	0.867	0.857	0.882	-1.2	1.7
102	0.884	0.874	0.894	-1.1	1.2
105	0.888	0.879	0.899	-1.1	1.2
120	0.913	0.903	0.922	-1.1	1.1
135	0.941	0.935	0.946	-0.6	0.6

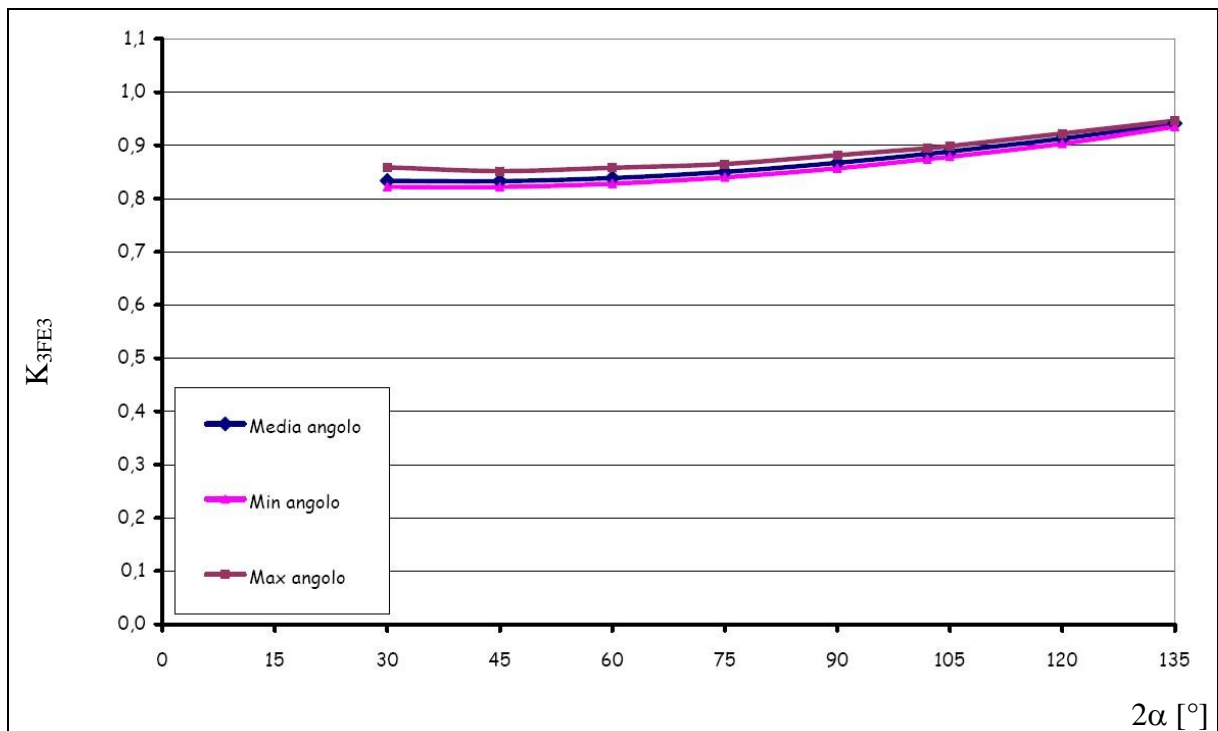


Fig. 8.8: elaborazione valori K<sub>3FE3</sub> per intagli a V laterali non raccordati al variare di 2α per a/d ≥ 3.

Delle tre proposte fatte, la (8.2), la (8.3) e la (8.11), si ritiene che la migliore sia quest'ultima in quanto consente di ottenere il minor valore del rapporto a/d per la convergenza dei risultati.

#### 8.4.2 PSM con elementi ad 8 nodi

Si considerano ora gli elementi con 8 nodi.

Similmente a quanto visto in precedenza, ci si aspetta una sostanziale conferma di quanto calcolato con gli elementi a 4 nodi.

Adottando come dimensione della mesh la distanza tra il nodo all'apice dell'intaglio ed il primo nodo successivo lungo la bisettrice, che è il nodo in mezzeria del lato dell'elemento che giace sulla bisettrice dell'intaglio, l'uso degli elementi ad 8 nodi si configura, di fatto, come un infittimento della mesh, e quindi si ottiene una riduzione della banda di scarto dei risultati su tutte le tre elaborazioni, con un guadagno tanto meno sensibile quanto maggiore è la bontà dell'elaborazione.

La tab. 8.V sintetizza i risultati globali delle analisi fatte.

Tab. 8.V

	$K_{3FE1(8)}$	$K_{3FE2(8)}$	$K_{3FE3(8)}$
Valore medio	1.743	0.882	0.852
Valore massimo	1.931 (+10.78 %)	0.948 (+7.47 %)	0.925 (+8.65 %)
Valore minimo	1.600 (-8.24 %)	0.820 (-7.01 %)	0.794 (-6.78 %)

Non è possibile pensare di ridurre le relazioni ad una costante, ma rimane valido l'approccio con una curva in funzione dell'angolo.

Valgono ancora le considerazioni fatte in precedenza. L'applicazione della (8.3) dà buoni risultati ma la (8.11) si conferma la formulazione migliore, ribadendo il rapporto minimo di convergenza  $a/d$ , pari a 3, ed un'ottima fascia di scostamento dalla media, inferiore al  $\pm 2$  %.

La tab. 8.VI e la fig. 8.9 esprimono meglio di ogni commento i risultati ottenuti applicando la (8.11) per  $a/d \geq 3$ .

Tab. 8.VI

$K_{3FE3(8)}$					
$2\alpha$ [°]	Valore medio	Valore minimo	Valore massimo	scost. % min	scost. % max
30	0.801	0.794	0.817	-0.9	1.9
45	0.804	0.797	0.818	-0.9	1.7
60	0.814	0.807	0.822	-0.9	0.9
75	0.830	0.823	0.837	-0.9	0.9
90	0.850	0.842	0.857	-0.9	0.8
102	0.869	0.862	0.877	-0.9	0.9
105	0.875	0.867	0.882	-0.9	0.8
120	0.901	0.893	0.909	-0.9	0.8
135	0.919	0.912	0.925	-0.7	0.7

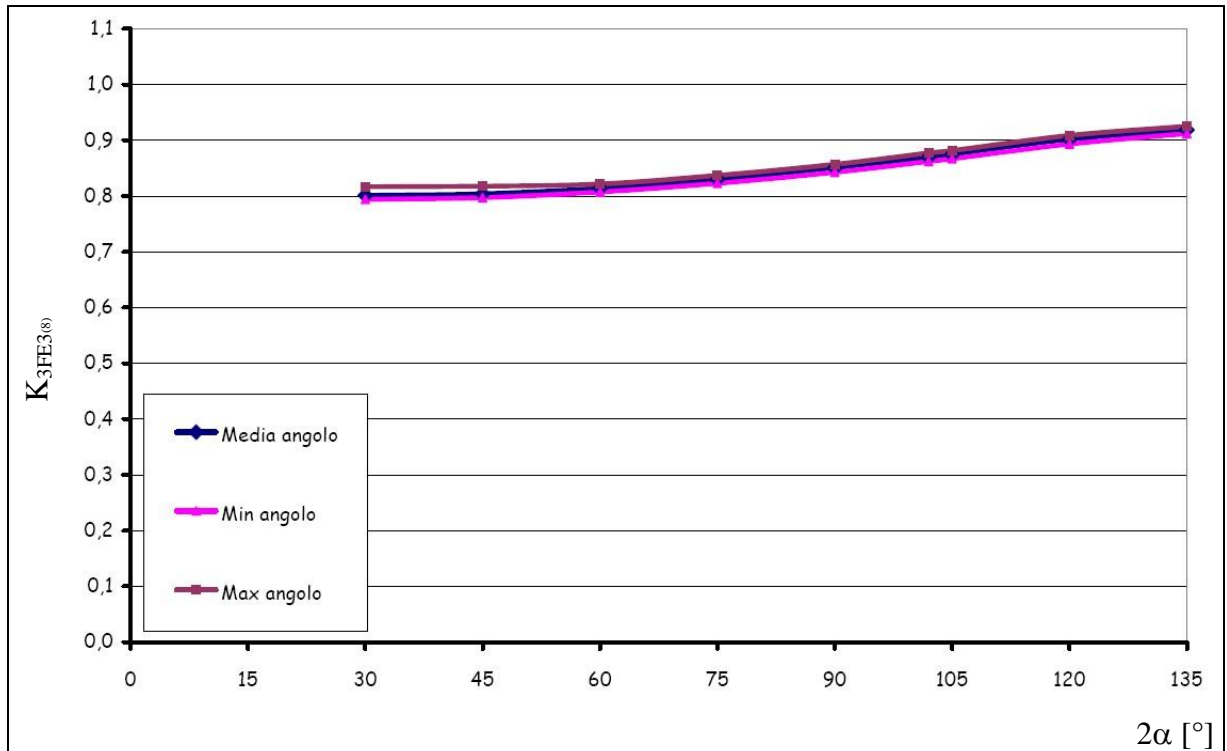


Fig. 8.9: elaborazione valori  $K_{3FE3}$  per intagli a V laterali non raccordati al variare di  $2\alpha$  per  $a/d \geq 3$  ed elementi ad 8 nodi

Il confronto diretto tra i risultati ottenuti utilizzando elementi a 4 ed 8 nodi è ottimo, sia in valore assoluto che in percentuale, sia utilizzando la (8.3) che utilizzando la (8.11) e le fig. 8.10 ed 8.11 ne danno testimonianza..

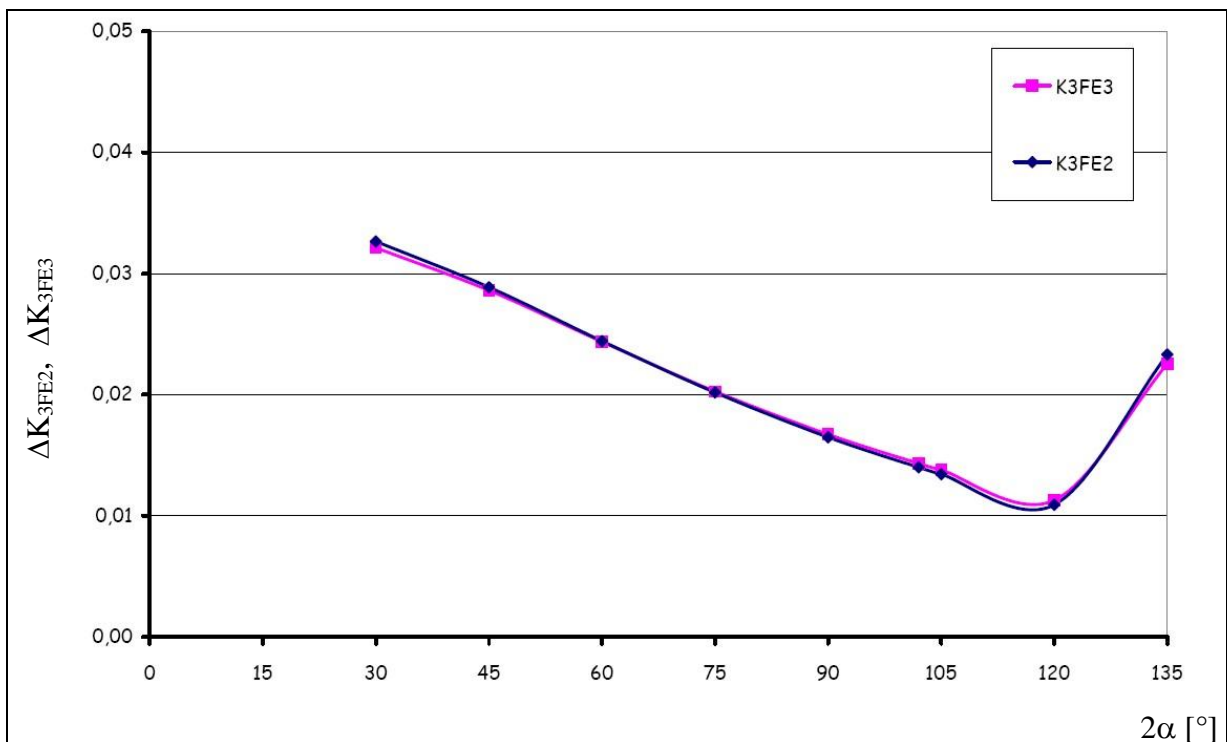


Fig. 8.10: Differenza  $(K_{3FE2})_{4nodi} - (K_{3FE2})_{8nodi}$  e  $(K_{3FE3})_{4nodi} - (K_{3FE3})_{8nodi}$  per intagli a V non raccordati al variare dell'angolo di apertura dei lembi

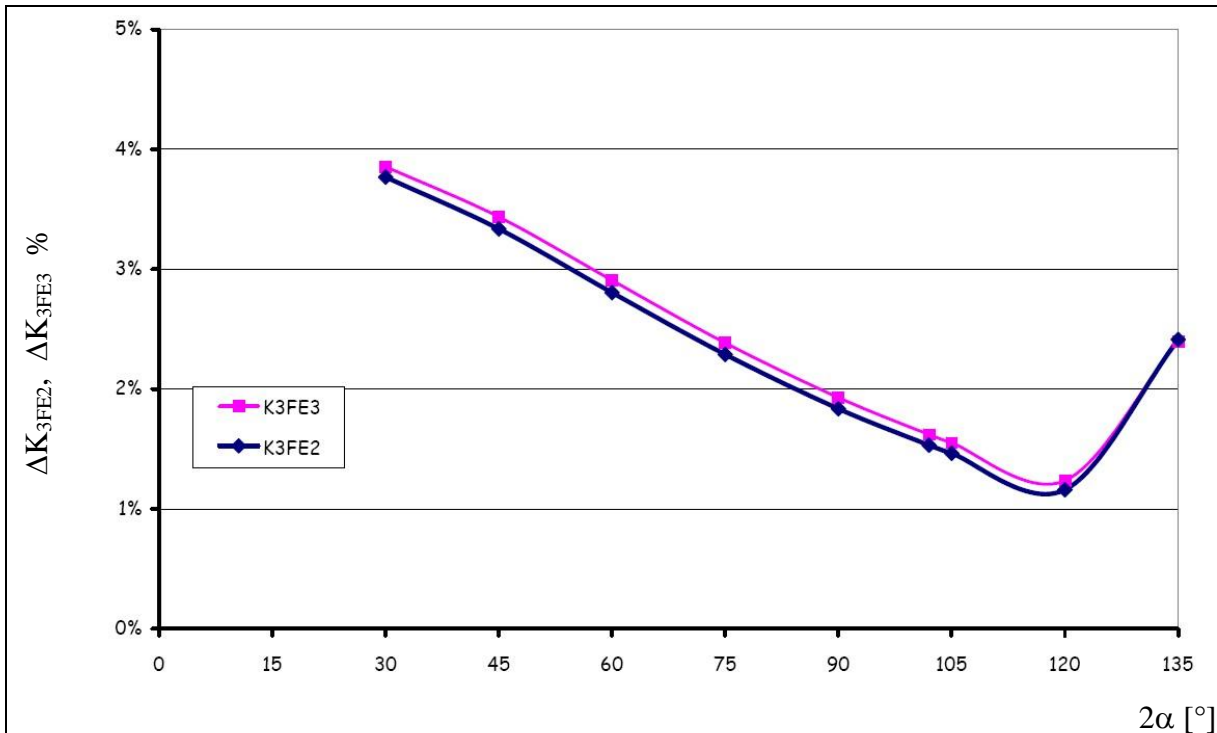


Fig. 8.11: Differenza %  $[(K_{3FE2})_{4nodi} - (K_{3FE2})_{8nodi}] / (K_{3FE2})_{4nodi}$  e  $[(K_{3FE3})_{4nodi} - (K_{3FE3})_{8nodi}] / (K_{3FE3})_{4nodi}$  per intagli a V non raccordati al variare dell'angolo di apertura dei lembi

Lo scostamento massimo è dell'ordine della seconda cifra decimale, ovvero inferiore a 4%.

## 8.5 CONCLUSIONI

È stato affrontato il caso dell'intaglio circolare a V non raccordato su solido cilindrico soggetto a sollecitazione di sola torsione, modo III, allo scopo di verificare l'applicabilità del peak stress method (PSM).

Gli intagli presi in considerazione sono di due profondità diverse, 5 e 10 contro un diametro del cilindro pari a 50, e di ampiezze  $2\alpha$  variabili da  $30^\circ$  a  $135^\circ$ , con passo  $15^\circ$ , e  $102^\circ$ . Per ogni combinazione geometrica si sono prodotte mesh caratterizzate da rapporti  $a/d$  variabili da 3 a 15. Per ogni analisi è stata rilevata la tensione  $\tau_{yz} \equiv \tau_{z\theta}$  di picco che si colloca all'apice dell'intaglio.

Le analisi sono state effettuate sia utilizzando elementi a 4 nodi che elementi ad 8 nodi, rispettivamente PLANE25 e PLANE83 di ANSYS®.

Sono state proposte tre relazioni per elaborare i risultati ottenuti.

La relazione che meglio interpreta i valori ottenuti è la (8.11) che qui è riproposta

$$(8.11) \quad K_{3FE3} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_3}{\tau_{yz,peak} d^{1-\lambda_3}} \left( \frac{2W-a}{2W} \right)^{\lambda_3} \right]^{1-\lambda_3}$$

Possiamo affermare che

- il PSM è applicabile ai casi di sollecitazione di Modo III;
- l'applicazione, a rigore, è limitata all'utilizzo di elementi PLANE25 (4 nodi) e PLANE83 (8 nodi) di ANSYS®;
- il PSM è applicabile per  $30^\circ \leq 2\alpha \leq 135^\circ$ ,  $5 \leq 2W/a \leq 10$ ;

- la forma della mesh deve essere simile a quelle riportate nelle fig. 4.5 e 4.6;
- nelle ipotesi di cui sopra il metodo converge per  $a/d \geq 3$  con una tolleranza entro il  $\pm 2$  %.

La (8.11) può essere utilizzata sia nella forma di grafico, come nella fig. 8.12, che in forma tabellare, tab. 8.VII.

Tab. 8.VII

$2\alpha$ [°]	$K_{3FE3} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_3}{\tau_{yz,peak} d^{1-\lambda_3}} \left( \frac{2W-a}{2W} \right)^{\lambda_3} \right]^{1-\lambda_3}$
30	0.833
45	0.833
60	0.839
75	0.850
90	0.867
102	0.884
105	0.888
120	0.913
135	0.941

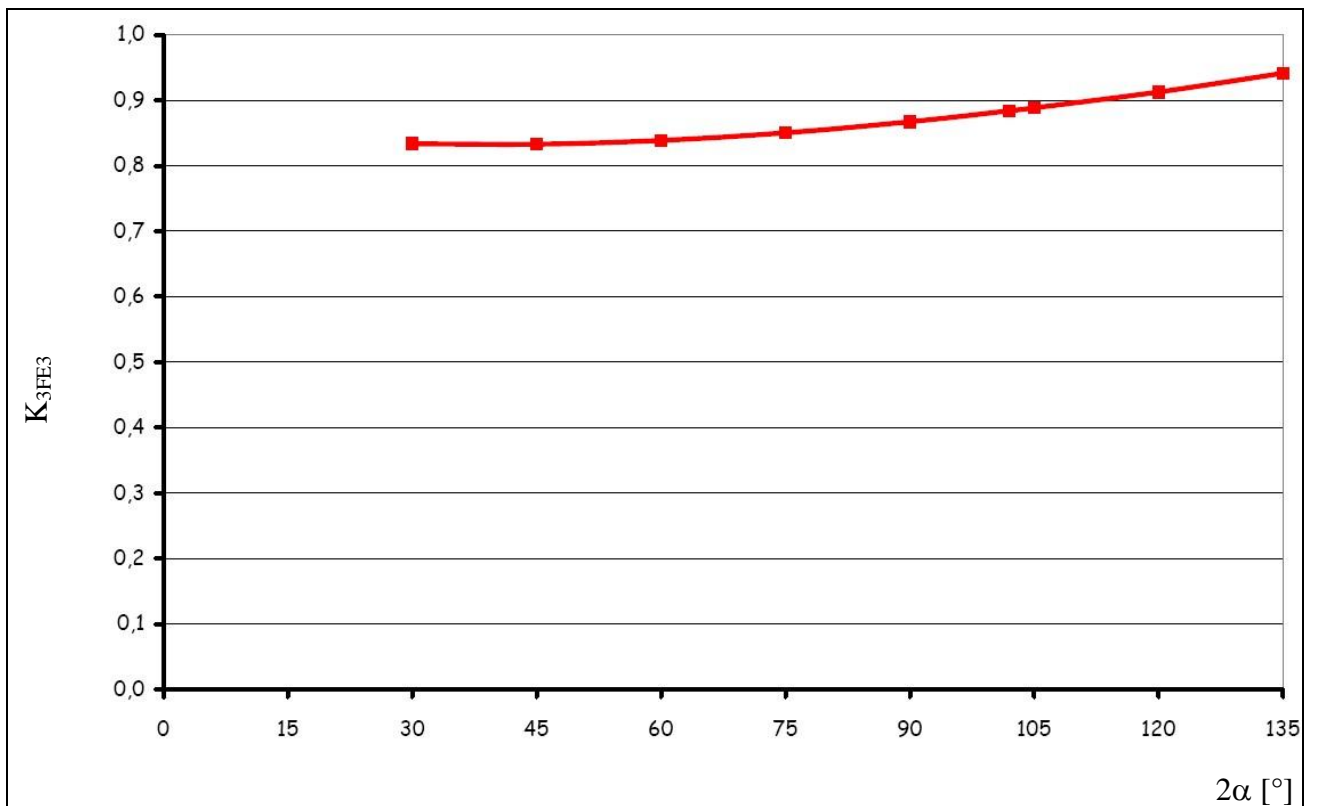


Fig. 8.14: valori di  $K_{3FE3}$  per intagli a V laterali non raccordati sollecitati a modo III



## Capitolo 9 PEAK STRESS METHOD: MODO MISTO I+III

### 9.1 INTRODUZIONE

Come ultimo caso di studio, si analizza la situazione in cui l'incisione a V circonferenziale è sollecitata contemporaneamente a Modo I ed a Modo III. I due casi di sollecitazione normalmente sono disaccoppiati ed in ipotesi di regime lineare elastico, ambito in cui si è sempre operato, la loro presenza contemporanea può essere studiata come somma delle singole sollecitazioni. Tuttavia, si vuole

- verificare l'effettivo disaccoppiamento dei modi relativamente al picco di tensione;
- verificare se l'applicazione del PSM al modo misto I+III può ridursi all'applicazione delle curve viste nei precedenti capitoli per i modi I e III puri.

Prima di svolgere lo studio del modo misto è però necessario affrontare lo studio del modo I su intagli a V circolari; in precedenza infatti tutti i casi di modo I studiati erano relativi a piastra piana.

### 9.2 IL MODO I ASSIALSIMMETRICO

Il modello che si va ad utilizzare per lo studio del modo I su intagli a V non raccordati circolari è quasi del tutto identico al modello presentato nel cap. 8 al paragrafo 2. In breve si tratta di un solido cilindrico, di diametro  $\varnothing = 2W$ , caratterizzato da un'incisione a V non raccordata, di ampiezza  $2\alpha$  e profondità  $a$ , sottoposto a condizioni di vincolo e di carico assialsimmetriche; l'unica differenza rispetto al caso già studiato sta nel carico applicato che ora è un carico di trazione (fig. 9.1).

Date le condizioni di assialsimmetria per geometria, carichi e vincoli, è possibile ridurre lo studio ad un modello piano come mostrato in fig. 9.2.

Per quanto riguarda il carico, sarà applicata una forza distribuita  $q$  unitaria.

Coerentemente con quanto fatto nelle precedenti analisi del modo I, verranno indagati intagli aventi angoli  $2\alpha$  da  $30^\circ$  a  $135^\circ$ , con passo  $15^\circ$  e profondità  $a$  pari a 5 e 10.

Al solito, il primo passo consiste nella determinazione del fattore di intensificazione delle tensioni di modo I con analisi a mesh fitta. I risultati sono riportati nella tab. 9.I

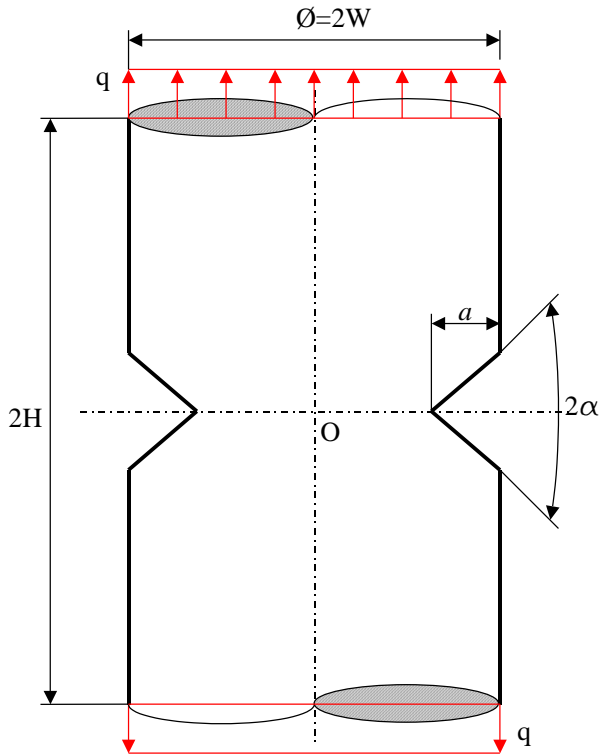


Fig. 9.1: caso di studio per modo I

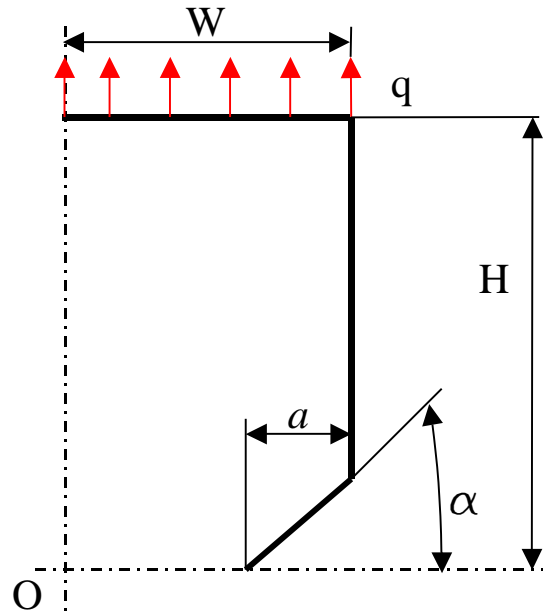


Fig. 9.2: modello da implementare per modo I

Tab. 9.I

H [mm]	W [mm]	a [mm]	2α [°]	1 - λ <sub>1</sub>	K <sub>1</sub>
100	25	5	30	0.499	5.295
100	25	5	45	0.495	5.318
100	25	5	60	0.488	5.375
100	25	5	75	0.475	5.476
100	25	5	90	0.456	5.634
100	25	5	105	0.426	5.872
100	25	5	120	0.384	6.228
100	25	5	135	0.326	6.783
100	25	10	30	0.499	8.913
100	25	10	45	0.495	8.920
100	25	10	60	0.488	8.956
100	25	10	75	0.475	9.028
100	25	10	90	0.456	9.149
100	25	10	105	0.426	9.348
100	25	10	120	0.384	9.692
100	25	10	135	0.326	10.363

Si passa ora all'applicazione del PSM. Per quanto riguarda i modelli, ci si limita a dire che verranno riutilizzati gli stessi modelli impiegati nell'analisi di modo III, ovviamente cambiando i carichi agenti come sopra descritto, e che l'analisi verrà condotta utilizzando

solamente elementi a 4 nodi, giacché è stato ampiamente dimostrato che l'utilizzo di elementi ad 8 nodi non cambia né il carattere né il valore di convergenza

I risultati saranno elaborati solamente con la relazione (6.7).

Si vuole ancora determinare se il PSM applicato al presente caso converge e da quale rapporto  $a/d$  si ha la convergenza, ma si vuole anche capire se la convergenza si ha ai valori della tab. 6.IX.

Se ciò accadesse si avrebbe una sola curva di riferimento per il modo I.

I risultati ottenuti mostrano che il metodo converge fin dal rapporto  $a/d = 3$ .

La fig. 9.3 mostra i risultati ottenuti dall'applicazione del PSM per  $a/d \geq 3$  in funzione dell'angolo  $2\alpha$ , la tab. 9.II riporta i valori di riferimento ( $K_{IFE}$ ) e quelli medi calcolati per il caso assialsimmetrico ( $K_{IFEass}$ ) e le differenze percentuali ottenute e la fig. 9.4 mostra la differenza tra  $K_{IFE}$  e  $K_{IFEass}$ .

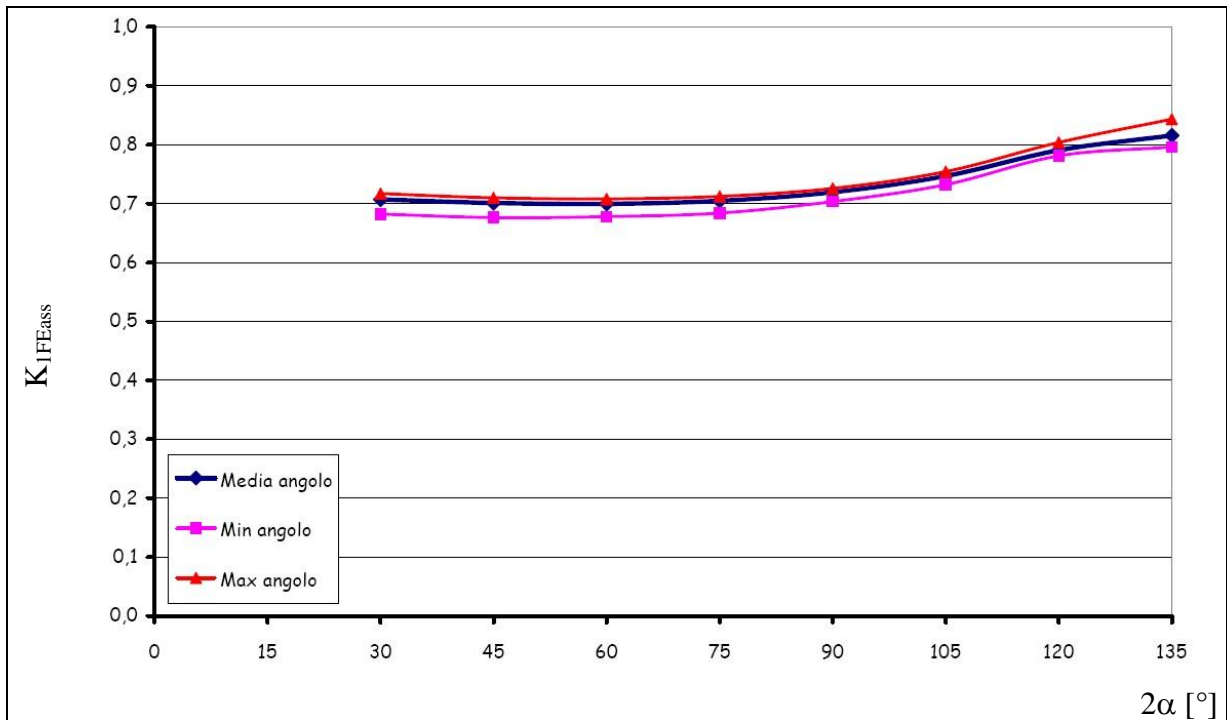


Fig. 9.3: valori di  $K_{IFEass}$  per intagli a V non raccordati circolarmente sollecitati a modo I

Tab. 9.II

$2\alpha$ [°]	$K_{IFE}$	$K_{IFEass}$	$\Delta K_{IFE}\%$
30	0.702	0.707	0.7 %
45	0.703	0.701	-0.28 %
60	0.705	0.700	-0.76 %
75	0.711	0.705	-0.89 %
90	0.729	0.719	-1.32 %
105	0.749	0.747	-0.27 %
120	0.774	0.791	2.19 %
135	0.824	0.816	1.04 %

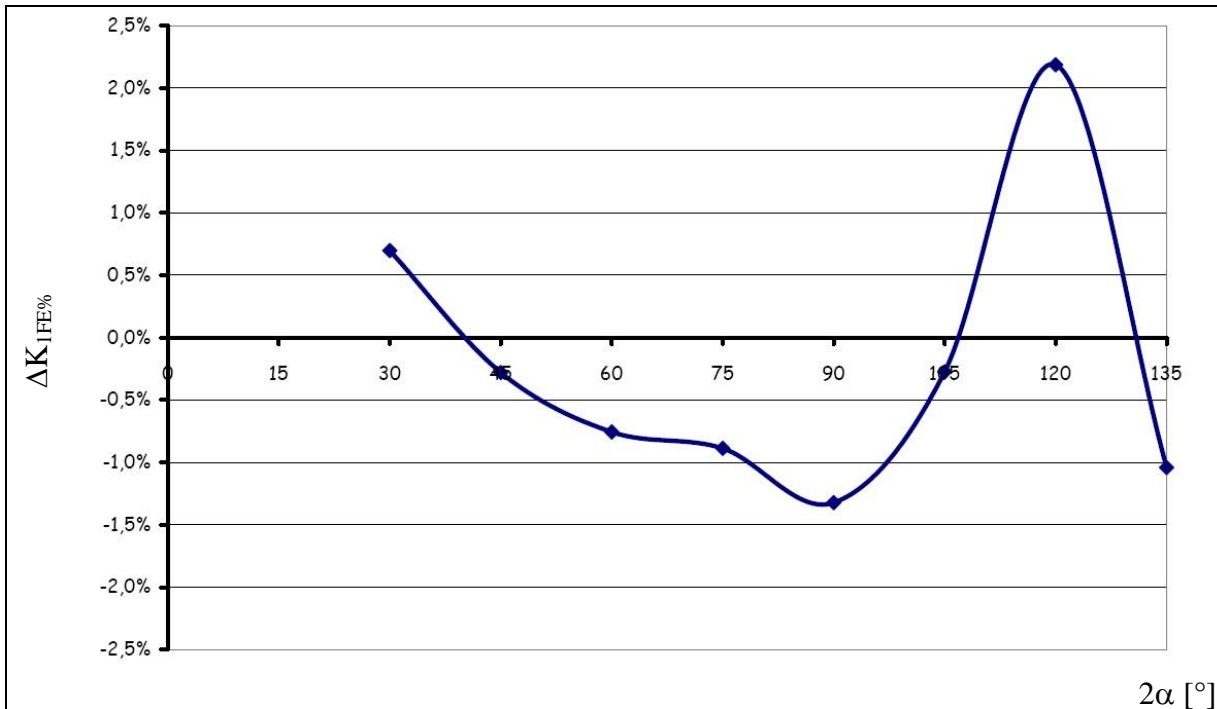


Fig. 9.4: valori di  $\Delta K_{IFE}$  per intagli a V non raccordati circolarmente sollecitati a modo I

L'accordo è molto buono; per la maggior parte degli angoli lo scarto dalla curva di riferimento del caso assialsimmetrico è inferiore all'1%. Lo scartamento massimo si ha per l'angolo 120° ed arriva al 2.2%.

Si può assolutamente affermare che l'applicazione del PSM per il modo I sia nel caso piano che nel caso assialsimmetrico converge per  $a/d \geq 3$  alla medesima curva, o al medesimo set di valori, rappresentati rispettivamente dalla fig. 6.9 e dalla tab. 6.IX.

### 9.3 IL MODO MISTO I+III

Si va a studiare ora il modo misto I+III avendo noti i seguenti punti:

- in ipotesi di regime lineare elastico (MFLE), ambito in cui operiamo, la sollecitazione risultante è somma delle singole sollecitazioni;
- modo I e modo III sono disaccoppiati lungo la bisettrice dell'intaglio;
- sia per il modo I che per il modo III il PSM è applicabile e convergente fin da rapporti  $a/d \geq 3$ ;
- il modo I converge ai valori di tab. 6.IX, calcolati con l'espressione (6.7), ed il modo III converge ai valori di tab. 8.VII, calcolati con l'espressione (8.11).

Diretta conseguenza di quanto affermato è che al caso misto I+III sia ancora applicabile il PSM, con il medesimo carattere di convergenza, le stesse espressioni e gli stessi valori. In altre parole dovrebbe essere confermata la sovrapposizione degli effetti anche nel caso in cui si applichi il PSM.

Per verificare che il comportamento atteso sia realmente tale, si studia il caso del solido cilindrico caratterizzato da un intaglio circolare a V non raccordato già visto nel cap. 8 e ripreso nel paragrafo secondo del presente capitolo.

Geometria e vincoli sono gli stessi, il carico applicato è la somma dei carichi già applicati: sforzo di trazione e momento torcente. Si può ancora sfruttare l'assialsimmetria di geometria, carichi e vincoli per cui il modello FE può ridursi a quello mostrato in fig. 9.5.

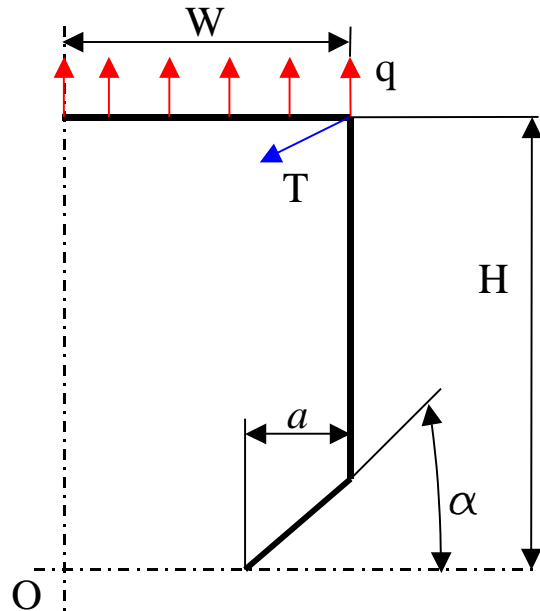


Fig. 9.5: modello implementato per modo I+III

Si studieranno tre combinazioni di carico:

- Carico  $c_1$ :  $q = 1$ ,  $T_1 = 981.5$
- Carico  $c_2$ :  $q = 1$ ,  $T_2 = 490.875$
- Carico  $c_3$ :  $q = 1$ ,  $T_3 = 1472.625$

Tenendo fisso il valore del carico di trazione, tale deve rimanere il  $K_1$  ed il picco di tensione di modo I ( $\sigma_3(\vartheta=0, r=0)$ ).

Come sempre, si calcolano i  $K_1$  ed i  $K_3$  con mesh fitte ed applicazione delle formule di Gross e Mendelson<sup>[8]</sup>, valori che sono riportati nella tabella 9.III.

Successivamente si passa all'analisi dei modelli relativi all'applicazione del PSM, indagando i rapporti  $a/d$  da 3 a 15 con passo 0.5 ed utilizzando elementi a 4 nodi.

I risultati dell'applicazione del PSM, per  $a/d \geq 3$ , sono riportati nella tab. 9.IV per il modo I e nella tab. 9.V per il modo III assieme ai valori di riferimento.

Tab. 9.III

$a$ [mm]	$2\alpha$ [°]	$K_1$	$K_{3,c1}$	$K_{3,c2}$	$K_{3,c3}$
5	30	5.295	5.467	2.733	8.200
5	45	5.318	5.605	2.802	8.407
5	60	5.375	5.729	2.864	8.593
5	75	5.476	5.830	2.915	8.745
5	90	5.634	5.900	2.950	8.851
5	105	5.872	5.926	2.963	8.889
5	120	6.228	5.892	2.946	8.839
5	135	6.783	5.783	2.891	8.674
10	30	8.913	12.350	6.175	18.525
10	45	8.920	12.588	6.294	18.882
10	60	8.956	12.797	6.398	19.195
10	75	9.028	12.965	6.483	19.448
10	90	9.149	13.079	6.539	19.618
10	105	9.348	13.122	6.561	19.683
10	120	9.691	13.095	6.547	19.642
10	135	10.363	12.935	6.467	19.403

Tab. 9.IV

$2\alpha$ [°]	$K_{1FE, rif.}$	$K_{1FE, misto I+III}$	$\Delta K_{1FE}\%$
30	0.702	0.709	0.97 %
45	0.703	0.703	0.06 %
60	0.705	0.702	-0.38 %
75	0.711	0.708	-0.44 %
90	0.729	0.722	-0.95 %
105	0.749	0.750	0.11 %
120	0.774	0.793	2.51 %
135	0.824	0.849	3.07 %

Tab. 9.V

$2\alpha$ [°]	$K_{3FE, rif.}$	$K_{3FE,c1}$	$K_{3FE,c2}$	$K_{3FE,c3}$
30	0.833	0.833 (-0.06 %)	0.832 (-0.10 %)	0.833 (-0.06 %)
45	0.833	0.832 (-0.10 %)	0.832 (-0.10 %)	0.832 (-0.10 %)
60	0.839	0.838 (-0.09 %)	0.838 (-0.09 %)	0.838 (-0.09 %)
75	0.850	0.850 (0 %)	0.850 (0 %)	0.850 (0 %)
90	0.867	0.867 (0 %)	0.867 (0 %)	0.867 (0 %)
105	0.888	0.888 (0 %)	0.888 (0 %)	0.888 (0 %)
120	0.913	0.913 (0 %)	0.913 (0 %)	0.913 (0 %)
135	0.941	0.833 (0 %)	0.833 (0 %)	0.833 (0 %)

Le analisi mostrano un disaccoppiamento tra il modo I ed il modo III, testimoniato in particolare dal fatto che la tensione di picco di Modo I non varia al variare del carico di torsione.

Il PSM converge anche nel caso del modo misto I+III e converge alle curve di riferimento individuate analizzando i modi puri, a partire dal rapporto  $a/d \geq 3$ .

Le tabelle 9.IV e 9.V mostrano chiaramente che lo scostamento rispetto alle curve di riferimento è sufficientemente contenuto per il modo I ed addirittura ottimo per il modo III.

Si può quindi asserire che il comportamento atteso è totalmente verificato.

## **9.4 CONCLUSIONI**

Sono stati affrontati due studi su modelli assialsimmetrici.

Il primo studio riguarda l'estensione del PSM a solidi assialsimmetrici, caratterizzati da intaglio a V non raccordato circonferenziale, sollecitati a modo I. Lo scopo a cui si mirava era verificare l'applicabilità del PSM con convergenza a partire dal rapporto  $a/d \geq 3$  ai valori della tab. 6.IX mediante l'applicazione della relazione (6.7).

La verifica ha dato esito positivo su tutti i punti.

Il secondo studio riguarda l'applicazione del PSM a solidi assialsimmetrici, caratterizzati da intaglio a V non raccordato circonferenziale, sollecitati a modo I e modo III contemporaneamente. In particolare, si era interessati a verificare se

- il PSM converge;
- se la convergenza è effettivamente indipendente per i due modi;
- se la convergenza è ottenibile fin da rapporti  $a/d \geq 3$  applicando le relazioni (6.7) per il modo I e (8.11) per il modo III;
- se i valori di convergenza sono quelli della tab. 6.IX per il modo I e della tab. 8.VII per il modo III.

Anche in questo caso tutte le risposte sono affermative.

Si può pertanto affermare che nei casi di intagli a V non raccordati presenti su solidi assialsimmetrici sollecitati contemporaneamente a modo I e III, è applicabile il PSM. Inoltre, è ancora valido il principio di sovrapposizione degli effetti e gli effetti delle due modalità di sollecitazione sono computabili separatamente.



# Capitolo 10 PEAK STRESS METHOD: CONCLUSIONI

## ***10.1 IL LAVORO FATTO***

L'obiettivo principale della presente tesi, come già dichiarato nel capitolo 1, è studiare l'estendibilità del PEAK STRESS METHOD (brevemente PSM) al di fuori del caso tipico della cricca.

In particolare, nello studio fatto, sono stati presi in considerazione in modo sistematico i seguenti casi

- piastra in stato piano di deformazione/tensione, di lunghezza  $2H$  e larghezza  $2W$ , caratterizzata da intagli laterali non raccordati simmetrici di profondità  $a$  ed apertura  $2\alpha$ , sollecitata a Modo I, Modo II e Modo misto I+II.
- solido assialsimmetrico, di diametro  $2W$  e lunghezza  $2H$ , caratterizzato da un intaglio non raccordato circonferenziale di profondità  $a$  ed apertura  $2\alpha$ , sottoposto a vincoli assialsimmetrici ed a sollecitazioni assialsimmetriche di Modo I, Modo III e Modo misto I+III.

In ognuno dei casi affrontati le domande a cui si è cercato di dare risposta sono state:

- il PSM è convergente, e quindi applicabile?
- quale espressione è in grado di applicare al meglio il PSM?
- da quale rapporto minimo  $a/d$  ( $d$  dimensione della mesh) il PSM converge?
- qual è o quali sono i valori a cui il PSM converge?
- vi è differenza tra l'utilizzo di elementi a 4 nodi e quello di elementi ad 8 nodi?

Al fine di affrontare lo studio di cui sopra ci si è avvalsi dell'utilizzo del software FE ANSYS® nella versione 11. Le conclusioni, che si andranno ad esporre nel prossimo paragrafo, sono il frutto dei risultati ottenuti da circa 3000 analisi, elaborati con l'ausilio del software Microsoft Excel®.

## ***10.2 RELAZIONI FINALI***

Si vanno ora a riassumere i risultati ottenuti negli studi fatti. Nei capitoli precedenti dei risultati parziali, con le relative considerazioni, sono già stati esposti. Si vuole ora condensare il tutto in relazioni, tabelle dati e curve generali e di immediato utilizzo pratico.

Si può affermare con sicurezza che nei casi studiati il PSM è applicabile, in quanto convergente all'aumentare del grado di raffinatezza della mesh.

Le espressioni che permettono di applicare il PSM nei vari casi sono le seguenti

$$(10.1) \quad K_{1FE} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{\sigma_{\text{peak}}} d^{1-\lambda_1} \left(1 - \frac{a}{2W}\right)^{\lambda_1} \right]^{1-\lambda_1}$$

$$(10.2) \quad K_{2FE} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{\tau_{\text{peak}}} d^{1-\lambda_2} \left(1 - \frac{a}{2W}\right)^{\lambda_2} \right]^{1-\lambda_2}$$

$$(10.3) \quad K_{3FE} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_3}{\tau_{yz,\text{peak}}} d^{1-\lambda_3} \left(1 - \frac{a}{2W}\right)^{\lambda_3} \right]^{1-\lambda_3}$$

Tali espressioni possono essere condensate nell'espressione generale

$$(10.4) \quad K_{iFE} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_i}{\sigma_{i,\text{peak}}} d^{1-\lambda_i} \left(1 - \frac{a}{2W}\right)^{\lambda_i} \right]^{1-\lambda_i}$$

Dove

$$\text{Modo I:} \quad i = 1, \quad \sigma_{i,\text{peak}} \equiv \sigma_{\theta}|_{r=0, \theta=0}$$

$$\text{Modo II:} \quad i = 2, \quad \sigma_{i,\text{peak}} \equiv \tau_{r\theta}|_{r=0, \theta=0}$$

$$\text{Modo III:} \quad i = 3, \quad \sigma_{i,\text{peak}} \equiv \tau_{z\theta}|_{r=0, \theta=0}$$

I parametri  $K_{iFE}$  sono adimensionali.

Il valore dei parametri  $K_{iFE}$  dipende dall'angolo di apertura dell'intaglio ma non dalla profondità dello stesso, almeno nel range  $a/2W = 0.1 \div 0.2$ .

Il set di valori di riferimento per  $K_{iFE}$  è riportato nella tab. 10.I dove è indicato anche il valore minimo del rapporto  $a/d$  per rientrare nel campo di convergenza del metodo.

Tab. 10.I

$2\alpha$ [°]	$K_{1FE}$	$K_{2FE}$	$K_{3FE}$
30	0.706	0.980	0.833
45	0.700	0.982	0.832
60	0.699	0.995	0.838
75	0.703	1.010	0.850
90	0.716	1.015	0.867
102	0.735	1	0.884
105	0.742	/	0.888
120	0.784	/	0.913
135	0.820	/	0.941
$a/d$	3	14	3

I valori di tab. 10.I rappresentano la media di tutti i valori ottenuti dalle analisi fatte nel campo di convergenza del metodo. Il grafico di fig. 10.1 riporta la curva rappresentativa dei valori medi di tabella assieme alle curve di scostamento massimo e minimo, per ogni modo puro. Per il modo I e III lo scostamento dei valori è entro il  $\pm 3\%$  mentre per il modo II si è accettato uno scostamento più ampio e pari al  $\pm 4.2\%$ .

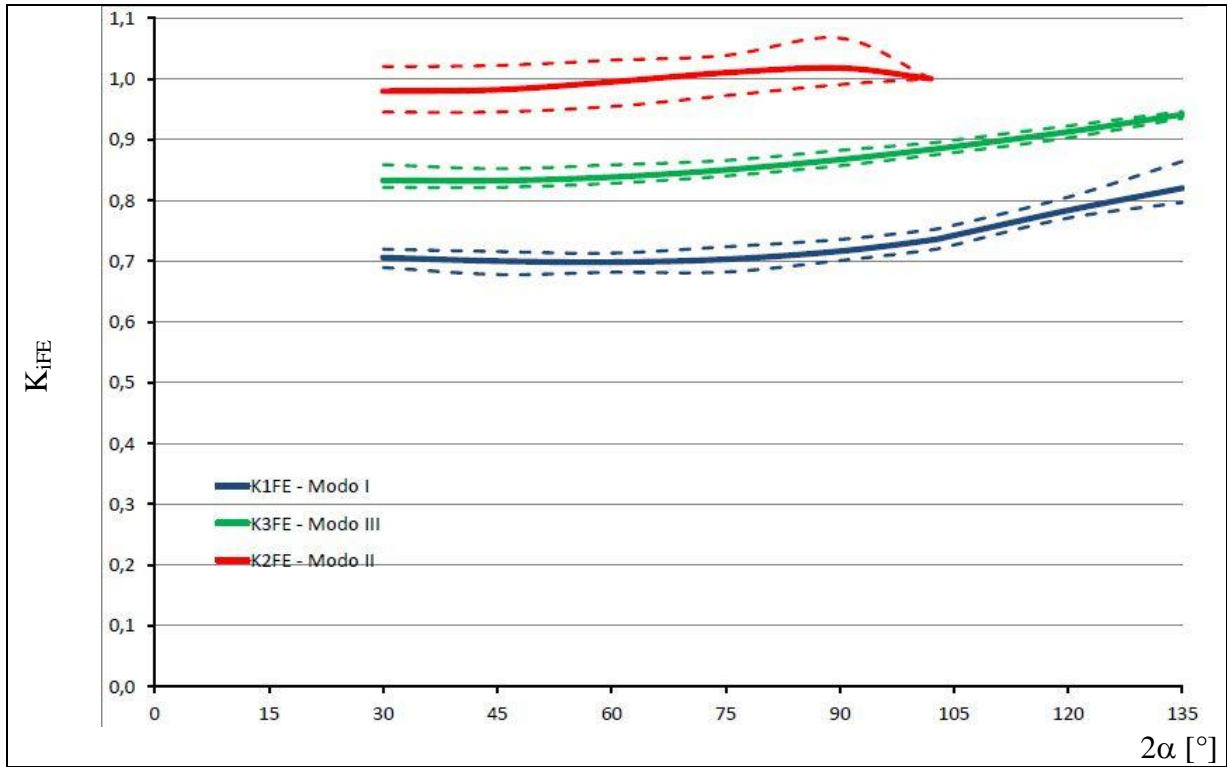


Fig. 10.1: valori di  $K_{1FE}$  per intagli a V non raccordati

Limitando l'attenzione alle curve medie di fig. 10.1 è possibile proporre per ognuna un'equazione in grado di approssimarle. Le curve interpolanti individuate sono le seguenti:

$$(10.5) \quad K_{1FE} = 2 \cdot 10^{-5} (2\alpha)^2 - 2.2 \cdot 10^{-3} (2\alpha) + 0.757, \quad 2\alpha = 30 \div 135$$

$$(10.6) \quad K_{2FE} = -5.3 \cdot 10^{-7} (2\alpha)^3 + 1.05 \cdot 10^{-4} (2\alpha)^2 - 6 \cdot 10^{-3} (2\alpha) + 1.84, \quad 2\alpha = 30 \div 102$$

$$(10.7) \quad K_{3FE} = 10^{-5} (2\alpha)^2 - 6 \cdot 10^{-4} (2\alpha) + 0.84, \quad 2\alpha = 30 \div 135$$

o, in forma compatta

$$(10.8) \quad \begin{Bmatrix} K_{1FE} \\ K_{2FE} \\ K_{3FE} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \cdot 10^{-5} & -2.2 \cdot 10^{-3} & 0.757 \\ -5.3 \cdot 10^{-7} & 1.05 \cdot 10^{-4} & -6 \cdot 10^{-3} & 1.084 \\ 0 & 10^{-5} & -6 \cdot 10^{-4} & 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (2\alpha)^3 \\ (2\alpha)^2 \\ (2\alpha) \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Rimanendo validi i limiti già indicati.

Nelle (10.5) e seguenti ( $2\alpha$ ) va inserito in gradi.

Come già detto nei capitoli relativi capitoli, i modi misti vanno visti come somma dei modi puri.

Per quanto visto, i risultati sono influenzati dall'utilizzo di elementi a 4 o ad 8 nodi in maniera trascurabilissima se non addirittura nulla. Si ricorda che la forma della mesh è molto importante ai fini dell'applicazione del metodo. A tale proposito, si ripropongono nelle fig. 10.2 e 10.3 le mesh di riferimento.

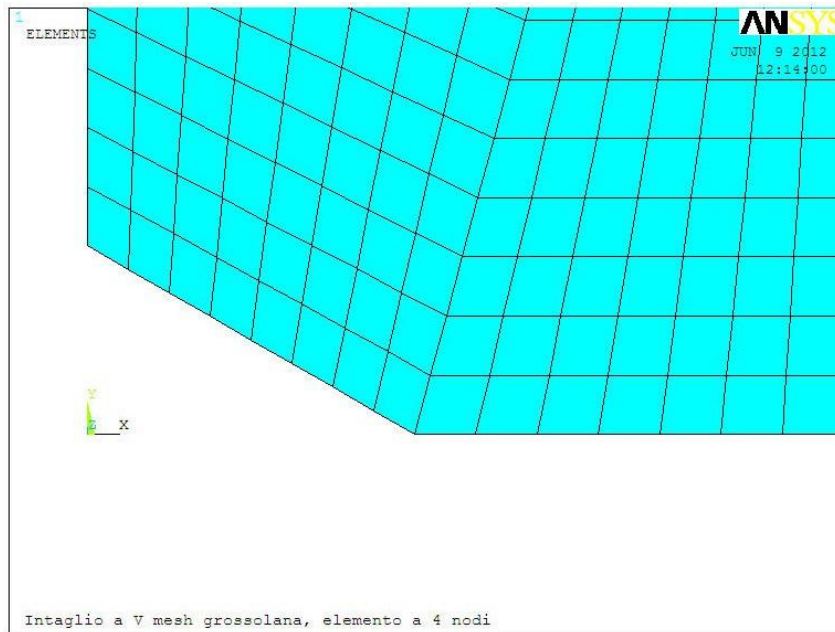


Fig. 10.2: mesh di riferimento per angoli di apertura dell'intaglio  $0^\circ < 2\alpha \leq 120^\circ$

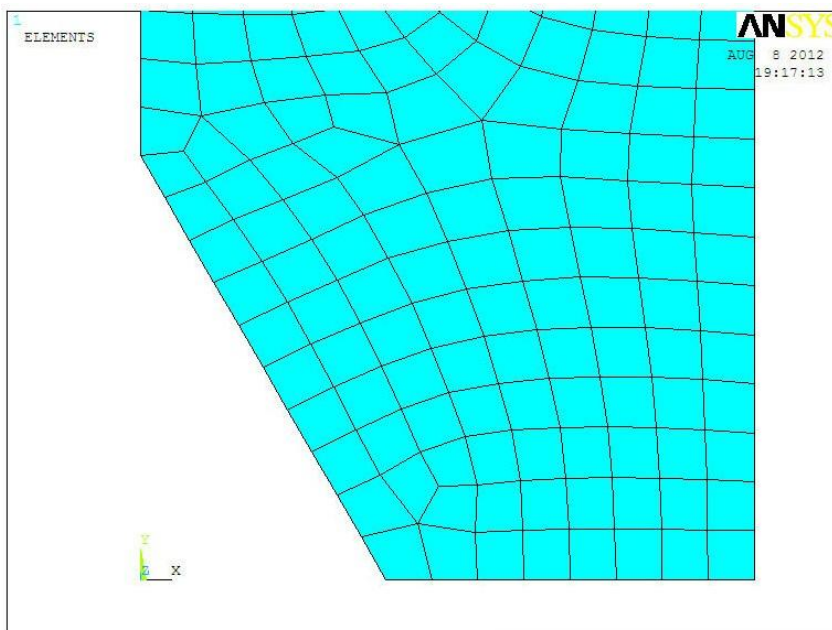


Fig. 10.3: mesh di riferimento per angoli di apertura dell'intaglio  $120^\circ < 2\alpha \leq 135^\circ$

### 10.3 APPLICAZIONE PRATICA

Il PSM è un metodo approssimato che permette di individuare quali variazioni geometriche del pezzo o della struttura siano maggiormente pericolose, eseguendo analisi FEM sufficientemente “economiche”.

Dall’esecuzione dell’analisi FE del pezzo, fatta utilizzando una dimensione media dell’elemento sufficiente a rientrare nell’intervallo di convergenza del metodo, si ottiene il picco di tensione in corrispondenza dell’apice dell’intaglio in regime di comportamento lineare elastico del materiale. Noti il valore della tensione di picco e della dimensione reale dell’elemento all’apice dell’intaglio, si applica la forma inversa della (10.4),

$$(10.9) \quad K_i = \sqrt{2\pi} K_{iFE}^{\frac{1}{1-\lambda_i}} \frac{\sigma_{i,peak} d^{1-\lambda_i}}{\left(1 - \frac{a}{2W}\right)^{\lambda_i}} = \Omega_i \frac{\sigma_{i,peak} d^{1-\lambda_i}}{\left(1 - \frac{a}{2W}\right)^{\lambda_i}}$$

dove il valore del  $K_{iFE}$  è ottenibile dalla tabella, dal grafico o dalle formule sopra esposte, ed il valore del  $\lambda_i$  è calcolato risolvendo le equazioni già esposte nei capitoli precedenti, allo scopo di calcolare gli N-SIF dell’intaglio. Essendo  $K_{iFE}$  e  $\lambda_i$  dipendenti solo dall’angolo  $2\alpha$ , possono essere sostituiti dalla funzione  $\Omega_i$ , anch’essa dipendente solo dall’angolo  $2\alpha$ , i cui valori sono ricavabili dalla tab. 10.II, oppure dalla fig. 10.4 o calcolabili con la (10.10)

$$(10.10) \quad \begin{Bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \cdot 10^{-5} & -5.5 \cdot 10^{-3} & 1.38 \\ -1.35 \cdot 10^{-5} & 2.6 \cdot 10^{-3} & 1.475 \cdot 10^{-1} & 4.9 \\ 0 & 5 \cdot 10^{-5} & -6.8 \cdot 10^{-3} & 1.85 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (2\alpha)^3 \\ (2\alpha)^2 \\ (2\alpha) \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Nel caso in cui l’N-SIF di uno degli intagli risultasse prossimo ai valori di soglia è tassativo procedere con un’analisi a mesh raffinata ed utilizzare i metodi di verifica classici.

Particolare cautela nell’uso di questa metodologia deve essere posta in presenza di modo II ed angoli prossimi a  $102^\circ$ , limite della singolarità, mentre per i modi I e III il metodo si presenta abbastanza robusto ed affidabile.

Tab. 10.II

$2\alpha$ [°]	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
30	1.247	2.381	1.677
45	1.220	2.375	1.634
60	1.201	2.458	1.613
75	1.195	2.642	1.613
90	1.206	2.946	1.634
102	1.230	2.507	1.666
105	1.246	/	1.676
120	1.328	/	1.740
135	1.325	/	1.852

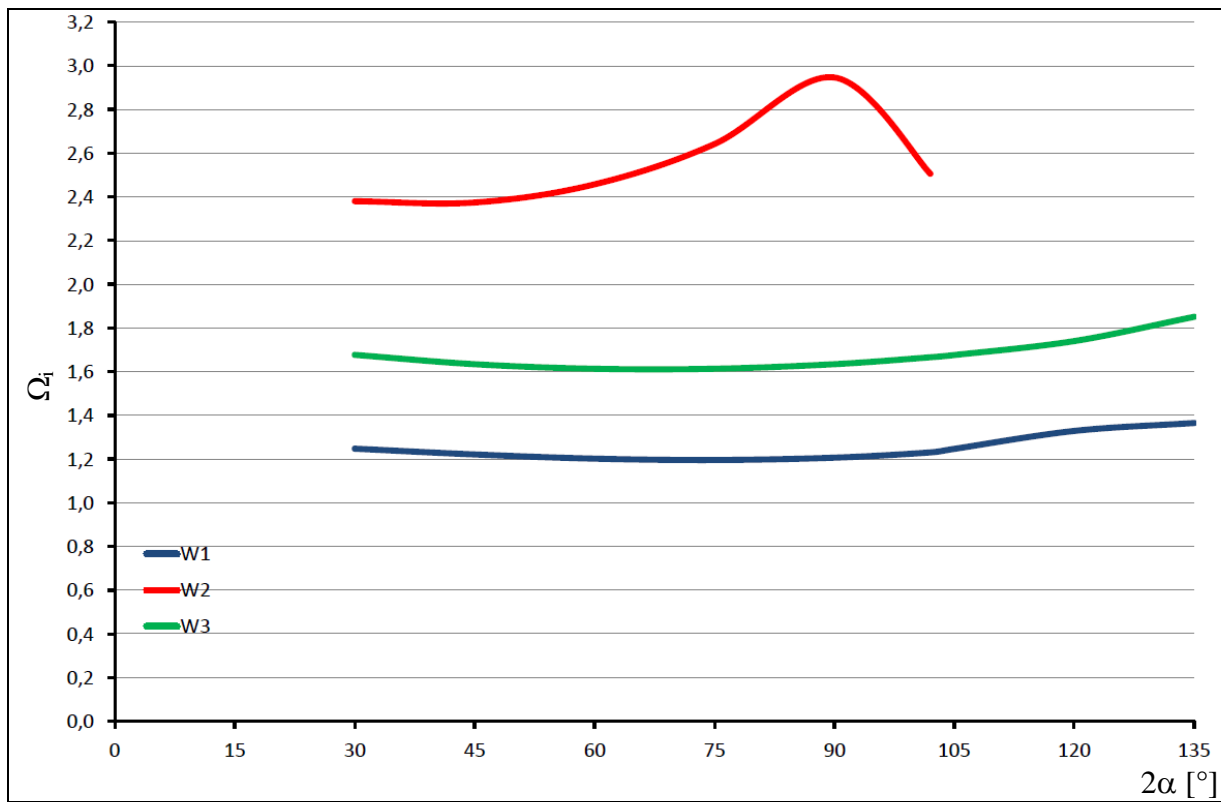


Fig. 10.4: valori di  $\Omega_1$  per intagli a V non raccordati

# Capitolo 11 PEAK STRESS METHOD: UN'APPLICAZIONE

## ***11.1 INTRODUZIONE***

Come già detto in apertura di questa tesi (capitolo 1), la stragrande maggioranza dei componenti utilizzati nelle costruzioni meccaniche e nelle strutture portanti sono caratterizzati da variazioni geometriche, anche brusche, da unioni saldate e da forature per l'inserimento di viti ed altri sistemi di assemblaggio. Contemporaneamente, queste costruzioni sono soggette a carichi variabili nel tempo e diventa importante essere in grado di prevederne il grado di sicurezza a fatica.

Alle architetture costruttive affermate e sperimentate nel tempo, la ricerca e la fantasia nel campo strutturale affiancano nuove tipologie costruttive e nuove soluzioni, rese possibili anche da nuove tecnologie realizzative che nel tempo diventano maggiormente affidabili, diffuse ed economicamente fruibili.

Con la nascita di nuove architetture costruttive nasce anche l'esigenza di prevederne il comportamento sotto sforzo e per le soluzioni più importanti la ricerca è attiva in questo senso.

Tuttavia, non tutto il lavoro può essere svolto dai centri di ricerca. L'applicazione delle nuove tipologie costruttive è compito dell'industria che, basandosi sui dati e sugli insegnamenti derivati dall'attività di ricerca, deve essere in grado di scegliere la tipologia costruttiva più adatta alla costruzione in opera e valutarne l'impiego.

È, quindi, utile che a fianco di procedimenti di calcolo anche complessi ma in grado di analizzare a fondo il comportamento strutturale, siano disponibili procedimenti semplificati, sufficientemente accurati, che permettano una rapida valutazione di massima del comportamento strutturale, valutazione che può essere sufficiente per l'applicazione o mettere in evidenza la necessità di ulteriori approfondimenti

Nel seguito si presenta un esempio.

## ***11.2 UN CASO DI STUDIO***

Nelle costruzioni meccaniche, specialmente quelle legate al settore dei trasporti, è da sempre viva la richiesta di architetture o elementi strutturali che uniscano elevata resistenza, soprattutto a fatica, rigidità e basso peso.

Una risposta a queste esigenze è fornita, ad esempio, dai pannelli sandwich in acciaio rinforzati internamente che, grazie alle nuove tecniche di saldatura laser, sono oggi le strutture più leggere tra quelle in acciaio chiuse.

Questa tipologia di pannelli è denominata *laser stake welding web-core steel sandwich panels* che abbrevieremo con l'acronimo (LSWCS).

L'applicazione tipica di questi pannelli è nel campo navale ma, potenzialmente, il loro impiego è estendibile anche ad altri campi (es. trasporto pesante, container, ...) ed il concetto costruttivo può essere trasferito alla costruzione delle macchine (es. telai ed organi di movimentazione).

Purtroppo il comportamento a fatica dei pannelli LSWCS non è ancora del tutto chiaro ed il loro impiego è limitato a causa di danneggiamenti sotto carico variabile non ancora spiegati.

Una parte dei ricercatori, che si occupano di resistenza a fatica, è oggi impegnata a sviscerare il problema della risposta a fatica dei pannelli LSWCS, sia da un punto di vista sperimentale come nei Rif. [24] [25] [26], sia da un punto di vista teorico, come nei Rif. [26] [27] e nel Rif. [23] ad oggi ancora IN PRESS.

Come esempio dei temi trattati in questa tesi, si focalizza l'attenzione sul lavoro svolto da Darko, Romanoff e Remes e riportato in [23].

Sommariamente, i pannelli LSWCS sono formati da due lamiere superficiali unite internamente da elementi di rinforzo, che possono essere piastre piane oppure preformate ad es. ad  $\Omega$ , disposte periodicamente lungo una direzione. L'unione tra le lamiere superficiali ed i rinforzi interni avviene con saldatura (fig. 11.1).

Le lamiere esterne, dette anche *pelli*, hanno il compito di sopportare i carichi di trazione-compressione e quindi anche gli sforzi flessionali, lavorando come membrane, mentre i rinforzi interni hanno lo scopo di mantenere a distanza le pelli e di trasmettere lo sforzo di taglio. Nel caso dei pannelli in oggetto, la periodicità dei rinforzi provoca una distribuzione della forza di taglio che induce l'ingobbamento delle piastre superficiali con conseguente momento flettente secondario sulle stesse.

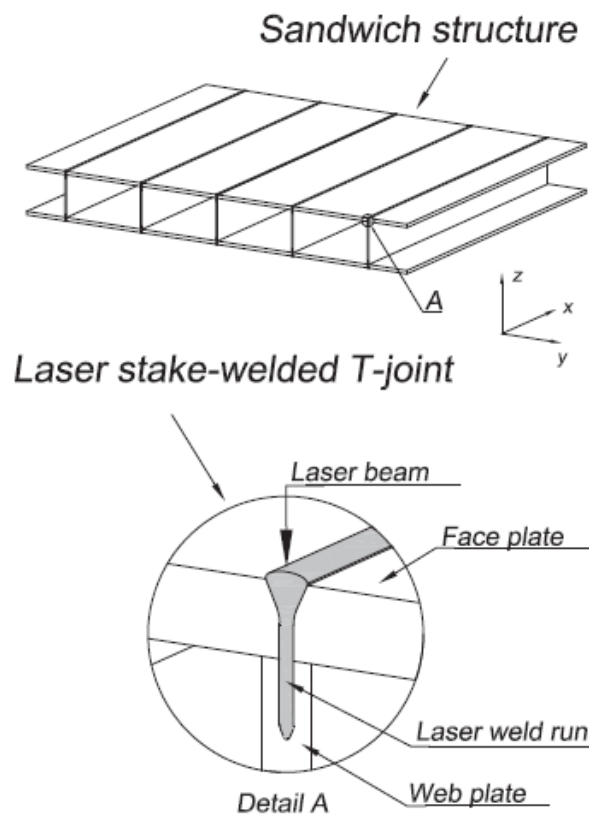


Fig. 11.1: esempio di *stake welding web-core steel sandwich panels*

Un contributo fondamentale alla rigidità ed alla resistenza dei pannelli è dato dalle giunzioni saldate tra pelli, o *face plate*, e rinforzi, o *web plate*. Dall'altra parte, le moderne tecniche di saldatura laser, quali quelle usate (*laser stake welding*), permettono di saldare i rinforzi su lamiere continue dall'esterno, a tutto vantaggio dei costi di produzione, ma producono unioni più sottili di quanto avviene con i metodi tradizionali.

È ovvio pensare che più sottile è la saldatura meno è resistente ma non è così banale concludere che anche la rigidità del pannello ne venga diminuita.

Darko, Romanoff e Remes nel loro lavoro di ricerca vanno a mettere sotto la lente di ingrandimento proprio questi due aspetti, resistenza e rigidità del pannello, in funzione di alcuni parametri geometrici fondamentali della giunzione a T tra pelli e rinforzi piani, sia per pannelli vuoti che per pannelli riempiti di schiuma poliuretanicca di caratteristiche note (fig. 11.2).

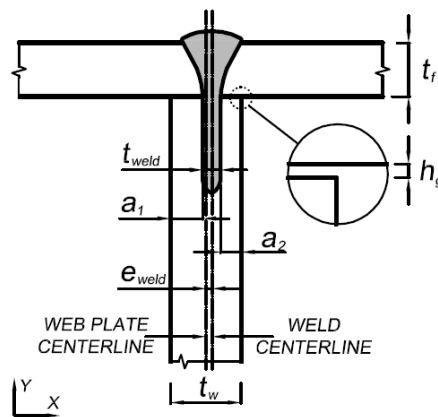


Fig. 11.2: particolare in sezione della giunzione a T del pannello con quote geometriche principali

Limitando l'attenzione al problema della valutazione della resistenza delle giunzioni saldate, aspetto fondamentale per la determinazione della resistenza globale del pannello, diverse strade possono essere percorse.

Si possono utilizzare approcci globali quali l'approccio in stress nominale, come fatto da Kozak<sup>[25]</sup>, oppure quello del raggio fittizio, tuttavia questi approcci non sono del tutto convenienti come spiegato in [27].

L'alternativa è lavorare con un approccio locale, sfruttando le teorie della meccanica della frattura. In questo caso abbiamo a disposizione l'approccio in J-integral, in N-SIF o in densità di energia di deformazione, come spiegato sempre in [27]. Tutti questi approcci hanno bisogno di una modellazione accurata del giunto e grazie a ciò si può tenere in conto anche della flessibilità dello stress nella valutazione dello stato tensionale locale.

Nel caso delle cricche, l'approccio in J-integral e quello in N-SIF sono collegati dall'espressione

$$(11.1) \quad J = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2$$

dove E e  $\nu$  sono il modulo di elasticità longitudinale ed il rapporto di Poisson del materiale rispettivamente ed i  $K_i$  sono gli N-SIF di modo I, II, III.

Se serve un confronto più generale, invece, la strada obbligata è quella dell'approccio in energia di deformazione (SED), che è legata agli N-SIF attraverso l'espressione

$$(11.2) \quad W = \frac{e_1}{E} \left( \frac{K_1}{R_0^{1-\lambda_1}} \right)^2 + \frac{e_2}{E} \left( \frac{K_2}{R_0^{1-\lambda_2}} \right)^2$$

in presenza dei modi I e II e dove  $R_0$  è il raggio del volume di controllo attorno all'apice dell'intaglio.

Questi approcci locali, per essere applicati, necessitano dell'utilizzo di tecniche FE che a loro volta, per dare risultati accurati, impongono di discretizzare il modello in maniera molto raffinata, specialmente laddove i risultati devono essere rilevati.

Schematicamente possiamo dire che un'accurata valutazione della resistenza di questi tipi di pannelli, o più in generale di questa tipologia costruttiva, necessita di due livelli di affinamento, uno dovuto alle peculiarità del problema ed uno alla tecnica usata.

Come si è visto in questa tesi, il calcolo degli N-SIF può essere fatto in via approssimata utilizzando il PSM. Con questa metodologia si accetta di essere meno precisi nel calcolo degli N-SIF assicurandosi però un vantaggio in termini di minor lavoro di modellazione FE e di lettura dei risultati.

L'approccio con il PSM è di fatto un approccio in N-SIF, quindi locale, che può essere di aiuto all'utilizzatore del pannello LSWCS per un rapido calcolo della pericolosità del campo di sollecitazione del giunto. Noti gli N-SIF, inoltre, vi è la possibilità di tradurre i risultati in termini di J-integral o di densità di energia di deformazione, mantenendo così inalterata la possibilità di comparazione con i risultati disponibili in letteratura.

In questa tesi si è mostrato come il PSM sia un metodo applicabile ai casi di Modo I, II, III puri come pure ai modi misti e si sono determinate le curve per l'applicazione del metodo ai casi di intaglio a V. Se consideriamo la fig. 11.2, la giunzione a T potrebbe essere vista come 4 intagli a V di circa 90°. Determinando il valore della tensione di picco agli apici delle V ed applicando le formule di cui sopra si potrebbe giungere al calcolo di un N-SIF di massima del giunto, valore da confrontare poi con quelli di riferimento del materiale utilizzato.

### ***11.3 UN ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL PSM***

Come esempio applicativo si supponrà di dover impiegare un pannello LSWCS per fare un pianale capace di sostenere un carico distribuito massimo pari a 0.015 MPa. Il pannello è soggetto cicli di carico e scarico secondo un rapporto di ciclo  $R=0$ .

Un caso abbastanza documentato da un punto di vista geometrico in [23] è il caso del pannello vuoto n°14, di cui sono riportate le dimensioni del giunto, il carico ed i risultati in termini di J-integral ed N-SIF. Pensiamo di utilizzare un pannello con queste caratteristiche geometriche e di resistenza a fatica.

Innanzitutto è utile descrivere, almeno per sommi capi, il lavoro fatto da Darko, Romanoff e Remes per i dettagli del quale si invita a consultare il rif. [23].

In questo lavoro, il pannello analizzato è appoggiato a due supporti posti a 480 mm l'uno dall'altro e disposti parallelamente alla direzione dei rinforzi. Al centro del pannello, largo 1000 mm, viene esercitato il carico.

Dapprima Darko, Romanoff e Remes eseguono una serie di analisi sull'intero pannello, grazie alle quali determinano la deformazione del pannello. In queste analisi, il pannello è modellato in modo particolare per tener conto della flessibilità della giunzione in quanto anch'essa

contribuisce alla deformabilità del pannello. Successivamente, vengono modellati nel dettaglio i giunti a T e vengono applicati come condizioni al contorno gli spostamenti, determinati con la prima serie di analisi. Scopo di questa seconda serie di analisi è calcolare il J-integral e quindi lo stato di sollecitazione del giunto. Agli autori interessa l'ampiezza totale di sollecitazione del giunto e quindi i carichi sono riportati in termini di  $\Delta F$  applicata e di  $\Delta J^{1/2}$ . Darko, Romanoff e Remes propongono quindi l'utilizzo dell'approccio locale con il J-integral.

Supponiamo, oltre a quanto detto prima, che il pannello oggetto del presente studio sia anch'esso appoggiato con una luce tra gli appoggi di 480 mm.

Lo scopo che ci si prefigge è stabilire se sia adatto all'impiego ipotizzato.

Si propone di effettuare un calcolo di primo tentativo semplificato utilizzando il PSM.

Coerentemente con lo spirito semplificativo dello studio, si tratterà il pannello come una trave a sezione costante determinando con semplici relazioni di equilibrio statico le forze ed i momenti che sollecitano il giunto stesso. Queste sollecitazioni verranno applicate al modello di analisi del giunto dal quale si otterrà il valore da confrontare con i dati di resistenza forniti da [23].

Con riferimento alla fig. 11.3 i dati del modello da analizzare sono:

Luce tra gli appoggi:	$L = 480 \text{ mm}$
Altezza del pannello:	$H = 40 \text{ mm}$
Carico massimo applicato:	$q = 0.015 \text{ MPa}$
Coordinata del giunto da analizzare:	$L_1 = 120 \text{ mm}$
Spessore della lamiera superficiale:	$s = 2.86 \text{ mm}$
Spessore del rinforzo:	$b = 3.97 \text{ mm}$
Dimensione della saldatura alla giunzione:	$t_w = 1.41 \text{ mm}$
Eccentricità della saldatura:	$e_{\text{weld}} = 0 \text{ mm}$
Gap tra lamiera superficiale e rinforzo:	$g = 0.1$

Si prende in considerazione la lamiera di rinforzo C ed in particolare il giunto sul lato del pannello in compressione. Questa scelta permette di non dover ricorrere a modelli che prevedono superfici di contatto e quindi di eseguire un'analisi in campo lineare.

Il modello FE andrà a modellare il giunto mostrato nel dettaglio C della fig. 11.3 sfruttando la sua simmetria rispetto all'asse verticale. Sul giunto C agiscono:

➤ il momento flettente: 
$$M_C = \frac{q L_1^2}{2} - \frac{q L L_1}{2} = -324 \text{ N mm/mm}$$

➤ il taglio: 
$$T_C = \frac{q L}{2} - q L_1 = 108 \text{ N/mm}$$

Il giunto a T verrà modellato come indicato nella fig. 11.4.

Il carico F deve essere tale da indurre sul giunto il momento flettente  $M_c$

$$F = \frac{M_C}{2 M} = \frac{324}{2 \cdot 14.3} = 11.33 \text{ N/mm}$$

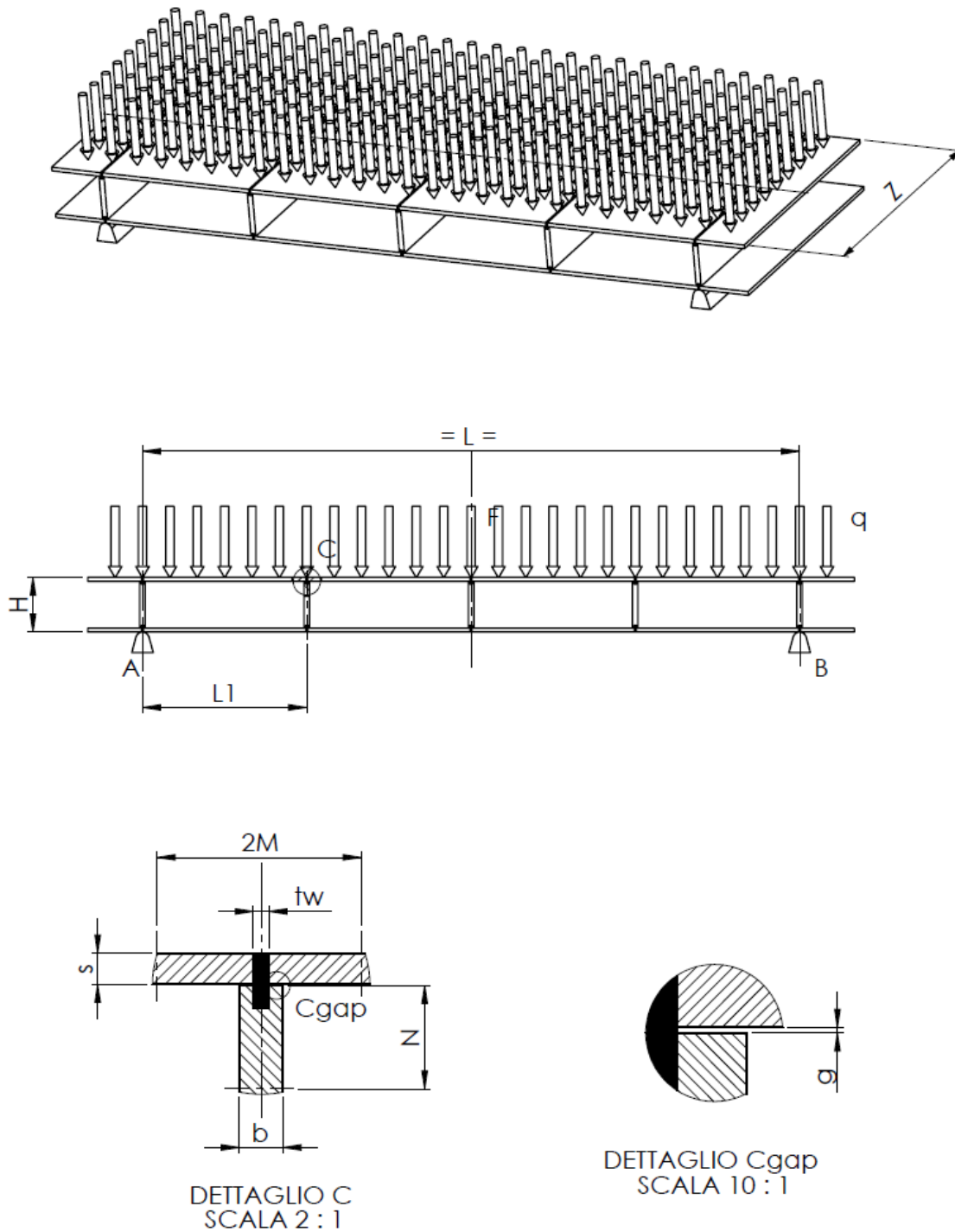


Fig. 11.3: pannello e giunto analizzati

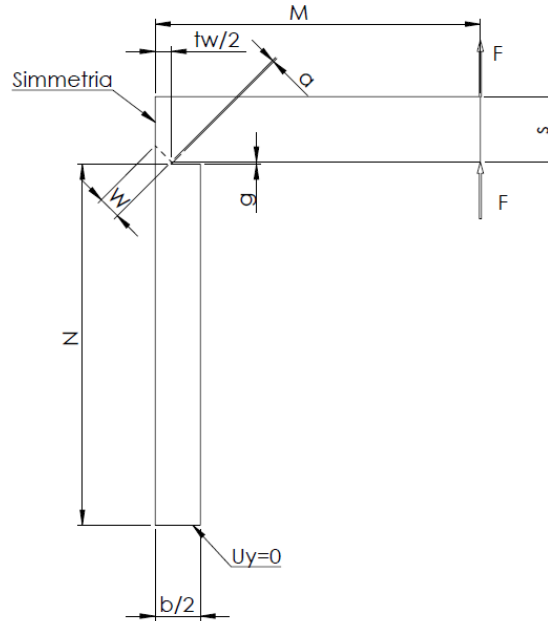


Fig. 11.4: modello FE del giunto a T

Con tale carico la condizione sulla forza di taglio non viene rispettata ma, essendo la componente che dà minore contributo allo stato di sollecitazione finale del giunto, si accetta questa semplificazione.

I vincoli applicati al modello sono la simmetria rispetto all'asse verticale, che limita gli spostamenti lungo x, mentre per impedire le traslazioni lungo y si pone un vincolo sulla superficie di estremità del rinforzo.

Inoltre, la superficie di troncamento della pelle viene posta a debita distanza affinché l'applicazione del carico non disturbi il campo di tensione all'incastro.

In [23] il giunto è trattato come una cricca mentre in questa sede si sceglie di trattarlo come una serie di due intagli a V di 90°.

In questa ipotesi, la profondità dell'intaglio  $a$  è pari a:

$$a = g \cos(45) = 0.0707 \text{ mm}$$

L'intaglio è sollecitato sia a modo I che a modo II e quindi si dovrà usare una mesh con elementi di lato

$$(11.3) \quad d \leq a/14 = 0.00505 \text{ mm}$$

Utilizzare una mesh con una simile dimensione dell'elemento porterebbe ad un numero di elementi del modello molto elevato. Si decide quindi di strutturare la mesh facendo in modo che nell'intorno dell'intaglio sia rispettata la condizione (11.3).

La realizzazione del modello porta ad ottenere una dimensione degli elementi nell'intorno dell'intaglio il cui lato, misurato lungo la bisettrice dell'intaglio stesso è pari a

$$d = 0.002879 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad a/d = 24.5$$

Si fa notare che se si fosse voluto calcolare il  $K_1$  con le formule di Gross e Mendelson si sarebbe dovuto disporre di almeno un centinaio di elementi entro l'intervallo  $a/10$  dall'apice dell'intaglio e quindi si sarebbe dovuta predisporre una mesh con  $d = 7 \cdot 10^{-4}$  mm.

All'apice dell'intaglio si ottengono le seguenti tensioni

$$\Delta\sigma_{\text{peak}} = 1568.5 \text{ MPa} , \quad \Delta\tau_{\text{peak}} = 66.5 \text{ MPa}$$

con  $\sigma_{\text{peak}}$  orientata perpendicolarmente e  $\tau_{\text{peak}}$  orientata parallelamente alla bisettrice dell'intaglio.

Applicando la (10.9) con  $\Omega_1$  ricavato dalla tabella 10.II per  $2\alpha = 90^\circ$  si ottiene:

$$(11.4) \quad \Delta K_1 = \Omega_1 \frac{\Delta\sigma_{\text{peak}} d^{1-\lambda_1}}{\left(1 - \frac{a}{2W}\right)^{\lambda_1}} = 1.206 \frac{1568.5 \cdot 0.002879^{0.456}}{\left(1 - \frac{0.0707}{2.14}\right)^{0.544}} = 133.7 \text{ MPa mm}^{0.544}$$

$$(11.5) \quad \Delta K_2 = \Omega_2 \frac{\Delta\tau_{\text{peak}} d^{1-\lambda_2}}{\left(1 - \frac{a}{2W}\right)^{\lambda_2}} = 2.946 \frac{66.5 \cdot 0.002879^{0.091}}{\left(1 - \frac{0.0707}{2.14}\right)^{0.909}} = 118.6 \text{ MPa mm}^{0.909}$$

Per un confronto con i dati di [23] si deve passare attraverso la densità di energia di deformazione.

Considerando il materiale acciaio,  $E = 206000$  MPa e  $\nu = 0.3$ , assumendo come indicato dal Lazzarin<sup>[28]</sup>  $R_0 = 0.28$  mm ed i seguenti valori

$$\begin{aligned} \checkmark \quad 2\alpha = 0^\circ: & \quad e_1 = 0.134 , & \quad e_2 = 0.341 \\ \checkmark \quad 2\alpha = 90^\circ: & \quad e_1 = 0.146 , & \quad e_2 = 0.168 \end{aligned}$$

dai calcoli fatti si ottiene

$$\Delta W = \frac{e_1}{E} \left( \frac{\Delta K_1}{R_0^{1-\lambda_1}} \right)^2 + \frac{e_2}{E} \left( \frac{\Delta K_2}{R_0^{1-\lambda_2}} \right)^2 = \frac{0.146}{206000} \left( \frac{133.7}{0.28^{0.456}} \right)^2 + \frac{0.168}{206000} \left( \frac{118.6}{0.28^{0.909}} \right)^2$$

$$(11.6) \quad \Delta W = 0.055$$

Da [23] si hanno invece

$$\begin{aligned} \Delta K_1 &= 282.1 \text{ MPa mm}^{0.5} \\ \Delta K_2 &= 9.1 \text{ MPa mm}^{0.5} \end{aligned}$$

da cui

$$(11.7) \quad \Delta W_{\text{rif}} = 0.185$$

A questo punto si ha a disposizione sia il dato relativo all'applicazione che quello relativo al limite di impiego del pannello in forma omogenea e si può procedere con le conclusioni.

## A. LISTATI ANSYS

### a. MODO I

```

! *****
! Modello per studio modo I, elementi a 4 nodi
! *****

/PREP7

/TITLE, Modo I

ET, 1, PLANE42           ! scelta del tipo di elemento

MP, EX, 1, 206000       ! assegnazione proprietà del materiale: acciaio
MP, PRXY, 1, 0.3        ! assegnazione proprietà del materiale: acciaio

W=25                    ! Semilarghezza della piastra
H=100                   ! Semilunghezza della piastra

*DO,DUEALFA,30,120,15  ! DUEALFA è l'angolo dell'intaglio

      *DO,A,5,10,5      ! A è la profondità dell'intaglio

      ANGOLO=DUEALFA/2
      ANG=ANGOLO*3.141/180
      C=TAN(ANG)

      R=W-A
      GAMMA_MEZZI=(3.141592654-ANG)/2
      D1=R*COS(GAMMA_MEZZI)
      D2=R*SIN(GAMMA_MEZZI)

! definizione della geometria punti e linee

      X0=0
      X1=A
      X2=A+D1
      X3=W

      Y0=0
      Y1=A*C
      Y2=D2
      Y3=Y1+Y2
      Y4=H

      K,1,X1,Y0          ! keypoint apice intaglio
      K,2,X3,Y0          ! keypoint
      K,3,X0,Y1          ! keypoint

```

K,4,X2,Y2 ! keypoint  
K,5,X3,Y2 ! keypoint  
K,6,X0,Y3 ! keypoint  
K,7,X0,Y4 ! keypoint  
K,8,X2,Y4 ! keypoint  
K,9,X3,Y4 ! keypoint

L,1,2 ! linea 1  
L,1,3 ! linea 2  
L,2,5 ! linea 3  
L,1,4 ! linea 4  
L,3,6 ! linea 5  
L,4,5 ! linea 6  
L,6,4 ! linea 7  
L,5,9 ! linea 8  
L,4,8 ! linea 9  
L,6,7 ! linea 10  
L,9,8 ! linea 11  
L,8,7 ! linea 12

AL,1,3,6,4 ! Area 1  
AL,2,4,7,5 ! Area 2  
AL,7,9,12,10 ! Area 3  
AL,6,8,11,9 ! Area 4

DL,1,,SYMM ! vincolo simmetria asse x  
DL,3,,SYMM ! vincolo simmetria asse y  
DL,8,,SYMM ! vincolo simmetria asse y

SFL,11,PRES,-1 ! carico distribuito di trazione  
SFL,12,PRES,-1 ! carico distribuito di trazione

\*DO, RATIO, 2.5, 10, 0.5 ! impostazione del rapporto a/d

! definizione della mesh

/PREP7  
D=A/RATIO ! calcolo dimensione globale dell'elemento  
ESIZE, D ! impostazione dimensione della mesh  
MSHKEY, 2 ! impostazione mesh mappata  
AMESH, ALL ! esecuzione della mesh  
FINISH ! fine della fase di preprocessing

/SOL  
SOLVE ! calcolo della soluzione  
FINISH

/POST1 ! lettura dei risultati

\*GET, L1, NODE, 1, LOC, X ! coordinata x nodo 1 (apice intaglio)  
\*GET, L2, NODE, 3, LOC, X ! coordinata x nodo per calcolo dim. reale

elemento

DREALE = L2 - L1 ! calcolo dim. reale elemento  
RATIOREALE = A / DREALE ! calcolo a/d reale

\*GET, SY, NODE, 1, S, Y ! lettura tensione di peak

! scrittura dei risultati nel file  
\*CFOPEN, 4nI, txt, , APPEND

```
*VWRITE, DUEALFA, X1, D, RATIO, L1, L2, DREALE, RATIOREALE, SY
(F8.0, ' ' F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ' F8.4, ' ', F8.4, ' ' F8.4)
*CFCLOS
```

```
FINISH
```

```
/PREP7
ACLEAR, ALL
NDELE, ALL
*ENDDO
```

```
! fine loop sulla dimensione mesh
```

```
/PREP7
ADELE,ALL
LDELE,ALL
KDELE,ALL
*ENDDO
```

```
! fine loop sulla profondità intaglio
```

```
/PREP7
ADELE,ALL
LDELE,ALL
KDELE,ALL
*ENDDO
```

```
! fine loop sull'angolo
```

```
! Angolo 135° cambia la forma della mesh *****
```

```
DUEALFA=135 ! DUEALFA è l'angolo dell'intaglio
```

```
*DO,A,5,10,5 ! A è la profondità dell'intaglio
```

```
ANGOLO=DUEALFA/2
ANG=ANGOLO*3.141/180
C=TAN(ANG)
```

```
! definizione della geometria punti e linee
```

```
X0=0
X1=A
X2=W
```

```
Y0=0
Y1=A*C
Y2=H
```

```
K,1,X1,Y0 ! keypoint apice intaglio
K,2,X2,Y0 ! keypoint
K,3,X0,Y1 ! keypoint
K,4,X2,Y1 ! keypoint
K,5,X0,Y2 ! keypoint
K,6,X2,Y2 ! keypoint
```

```
L,1,2 ! linea 1
L,2,4 ! linea 2
L,4,3 ! linea 3
L,3,1 ! linea 4
L,3,5 ! linea 5
L,5,6 ! linea 6
L,6,4 ! linea 7
```

```
AL,1,2,3,4 ! Area 1
```

```

AL,3,5,6,7                ! Area 2

DL,1,,SYMM                ! vincolo simmetria asse x
DL,2,,SYMM                ! vincolo simmetria asse y
DL,7,,SYMM                ! vincolo simmetria asse y

SFL,6,PRES,-1            ! carico distribuito di trazione

*DO, RATIO, 2.5, 15, 0.5    ! impostazione del rapporto a/d

! definizione della mesh

/PREP7
D=A/RATIO                ! calcolo dimensione globale dell'elemento
ESIZE, D                  ! impostazione dimensione della mesh
MSHKEY, 2                ! impostazione mesh mappata
AMESH, ALL                ! esecuzione della mesh
FINISH                    ! fine della fase di preprocessing

/SOL
SOLVE                     ! calcolo della soluzione
FINISH

/POST1                    ! lettura dei risultati

*GET, L1, NODE, 1, LOC, X    ! coordinata x nodo 1 (apice intaglio)
*GET, L2, NODE, 3, LOC, X    ! coordinata x nodo per calcolo dim. reale

elemento

DREALE = L2 - L1          ! calcolo dim. reale elemento
RATIOREALE = A / DREALE    ! calcolo a/d reale

*GET, SY, NODE, 1, S, Y     ! lettura tensione di peak

! scrittura dei risultati nel file
*CFOPEN, 4nI, txt, , APPEND
*VWRITE, DUEALFA, X1, D, RATIO, L1, L2, DREALE, RATIOREALE, SY
( F8.0, ' F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ' F8.4 )
*CFCLOS

FINISH

/PREP7
ACLEAR, ALL
NDELE, ALL
*ENDDO                    ! fine loop sulla dimensione mesh

/PREP7
ADELE,ALL
LDELE,ALL
KDELE,ALL
*ENDDO                    ! fine loop sulla profondità intaglio

```

## ***b. Modo II***

! \*\*\*\*\*

! Modello per studio modo II, elementi a 4 nodi

! \*\*\*\*\*

/PREP7

/TITLE, Modo II

ET, 1, PLANE42 ! scelta del tipo di elemento

MP, EX, 1, 206000 ! assegnazione proprietà del materiale: acciaio  
MP, PRXY, 1, 0,3 ! assegnazione proprietà del materiale: acciaio

W=25 ! Semilarghezza della piastra

\*DO,DUEALFA,30,90,15 ! DUEALFA è l'angolo dell'intaglio

\*DO,A,5,10,5 ! A è la profondità dell'intaglio

ANGOLO=DUEALFA/2  
ANG=ANGOLO\*3.141/180  
C=TAN(ANG)

R=W-A  
GAMMA\_MEZZI=(3.141-ANG)/2  
D1=R\*COS(GAMMA\_MEZZI)  
D2=R\*SIN(GAMMA\_MEZZI)

H=A\*C+2\*W ! Semilunghezza della piastra

! definizione della geometria punti e linee

X0=0  
X1=A  
X2=A+D1  
X3=W

Y0=0  
Y1=A\*C  
Y2=D2  
Y3=Y1+Y2  
Y4=H

K,1,X1,Y0 ! keypoint apice intaglio  
K,2,X3,Y0 ! keypoint per bisettrice intaglio  
K,3,X0,Y1  
K,4,X2,Y2  
K,5,X3,Y2  
K,6,X0,Y3  
K,7,X0,Y4  
K,8,X2,Y4  
K,9,X3,Y4

L,1,2 ! linea 1  
L,1,3 ! linea 2  
L,2,5 ! linea 3  
L,1,4 ! linea 4  
L,3,6 ! linea 5  
L,4,5 ! linea 6  
L,6,4 ! linea 7  
L,5,9 ! linea 8  
L,4,8 ! linea 9

```

L,6,7                ! linea 10
L,9,8                ! linea 11
L,8,7                ! linea 12

AL,1,3,6,4          ! Area 1
AL,2,4,7,5          ! Area 2
AL,7,9,12,10       ! Area 3
AL,6,8,11,9        ! Area 4

DL,1,,ASYM          ! vincolo asimmetria asse x
DL,3,,ASYM          ! vincolo asimmetria asse y
DL,8,,ASYM          ! vincolo asimmetria asse y
DL,11,,UY           ! vincolo blocco rotazione
DL,12,,UY           ! vincolo blocco rotazione

SFL,5,PRES,0.5      ! carico distribuito 0.5
SFL,10,PRES,0.5     ! carico distribuito 0.5

*DO, RATIO, 2.5, 25, 0.5      ! impostazione del rapporto a/d, minimo 2.5, max 25, passo
0.5

    ! definizione della mesh

/PREP7
D=A/RATIO            ! calcolo dimensione elemento

ESIZE, D             ! impostazione dimensione globale della mesh
MSHKEY, 2           ! impostazione mesh mappata
AMESH, ALL          ! esecuzione della mesh
FINISH              ! fine della fase di preprocessing

/SOL
SOLVE               ! calcolo della soluzione
FINISH

/POST1              ! lettura dei risultati

*GET, L1, NODE, 1, LOC, X      ! coordinata x nodo 1 (apice intaglio)
*GET, L2, NODE, 3, LOC, X      ! coordinata x nodo per calcolo lato reale elemento

DREALE = L2 - L1              ! calcolo dimensione lato reale elemento
RATIOREALE = A / DREALE      ! calcolo a/d reale

*GET, TTT, NODE, 1, S, XY     ! lettura tensione di picco

! scrittura risultato nel file
*CFOPEN, 4nodiII, txt, , APPEND
*VWRITE, DUEALFA, X1, D, RATIO, L1, L2, DREALE, RATIOREALE, TTT
( F8.0, ' ' F8.4, ' ' , F8.4, ' ' , F8.4, ' ' , F8.4, ' ' , F8.4, ' ' F8.4, ' ' F8.4 )
*CFCLOSE

FINISH

/PREP7
ACLEAR, ALL

NDELE, ALL
*ENDDO                ! fine loop sulla dimensione della mesh

/PREP7
ADELE,ALL
LDELE,ALL

```

```

KDELE,ALL
*ENDDO                                ! fine loop sulla profondità intaglio

/PREP7
ADELE,ALL
LDELE,ALL
KDELE,ALL
*ENDDO                                ! fine loop sull'angolo

! angolo limite modo II

DUEALFA=102                            ! DUEALFA è l'angolo dell'intaglio

*DO,A,5,10,5                          ! A è la profondità dell'intaglio

ANGOLO=DUEALFA/2
ANG=ANGOLO*3.141/180
C=TAN(ANG)

R=W-A
GAMMA_MEZZI=(3.141-ANG)/2
D1=R*COS(GAMMA_MEZZI)
D2=R*SIN(GAMMA_MEZZI)

H=A*C+2*W                              ! Semilunghezza della piastra

! definizione della geometria punti e linee

X0=0
X1=A
X2=A+D1
X3=W

Y0=0
Y1=A*C
Y2=D2
Y3=Y1+Y2
Y4=H

K,1,X1,Y0                              ! keypoint apice intaglio
K,2,X3,Y0                              ! keypoint per bisettrice intaglio
K,3,X0,Y1
K,4,X2,Y2
K,5,X3,Y2
K,6,X0,Y3
K,7,X0,Y4
K,8,X2,Y4
K,9,X3,Y4

L,1,2                                  ! linea 1
L,1,3                                  ! linea 2
L,2,5                                  ! linea 3
L,1,4                                  ! linea 4
L,3,6                                  ! linea 5
L,4,5                                  ! linea 6
L,6,4                                  ! linea 7
L,5,9                                  ! linea 8
L,4,8                                  ! linea 9
L,6,7                                  ! linea 10
L,9,8                                  ! linea 11

```

```

L,8,7                                ! linea 12

AL,1,3,6,4                            ! Area 1
AL,2,4,7,5                            ! Area 2
AL,7,9,12,10                          ! Area 3
AL,6,8,11,9                            ! Area 4

DL,1,,ASYM                            ! vincolo asimmetria asse x
DL,3,,ASYM                            ! vincolo asimmetria asse y
DL,8,,ASYM                            ! vincolo asimmetria asse y
DL,11,,UY                              ! vincolo blocco rotazione
DL,12,,UY                              ! vincolo blocco rotazione

SFL,5,PRES,0.5                         ! carico distribuito 0.5
SFL,10,PRES,0.5                        ! carico distribuito 0.5

*DO, RATIO, 2.5, 15, 0.5              ! impostazione del rapporto a/d

! definizione della mesh

/PREP7
D=A/RATIO                              ! calcolo dimensione elemento

ESIZE, D                               ! impostazione della dimensione globale della mesh
MSHKEY, 2                              ! impostazione mesh mappata
AMESH, ALL                              ! esecuzione della mesh
FINISH                                  ! fine della fase di preprocessing

/SOL
SOLVE                                  ! calcolo della soluzione
FINISH

/POST1                                  ! lettura dei risultati

*GET, L1, NODE, 1, LOC, X               ! coordinata x nodo 1 (apice intaglio)
*GET, L2, NODE, 3, LOC, X               ! coordinata x nodo per calcolo lato reale elemento

DREALE = L2 - L1                        ! calcolo dimensione lato reale elemento
RATIOREALE = A / DREALE                 ! calcolo a/d reale

*GET, TTT, NODE, 1, S, XY              ! lettura tensione di picco

! scrittura risultato nel file
*CFOOPEN, 4nodiII, txt, , APPEND
*VWRITE, DUEALFA, X1, D, RATIO, L1, L2, DREALE, RATIOREALE, TTT
( F8.0 , ' F8.4 , ' , F8.4 , ' , F8.4 , ' , F8.4 , ' , F8.4 , ' , F8.4 , ' , F8.4 , ' F8.4 )
*CFCLOS

FINISH

/PREP7
ACLEAR, ALL
NDELE, ALL
*ENDDO                                  ! fine loop sulla dimensione mesh

/PREP7
ADELE,ALL
LDELE,ALL
KDELE,ALL
*ENDDO                                  ! fine loop sulla profondità intaglio

```

### *c. MODO I+III*

```

! *****
! Modello per studio modo I+III, elementi a 4 nodi
! *****

/PREP7

/TITLE, Modo I+III

ET, 1, PLANE25,,,,,2,      ! scelta del tipo di elemento PLANE25
                           ! ISYM : Loading Condition 1 = Symmetric loading
                           ! KEYOPT(6) = 2 : Include extra surface output (only for isotropic
materials),                !
                           !           Surface solution for both faces I-J and K-L also

MP, EX, 1, 206000         ! assegnazione proprietà del materiale: acciaio
MP, PRXY, 1, 0.3          ! assegnazione proprietà del materiale: acciaio

W=25                       ! Semilarghezza della piastra
H=100                      ! Semilunghezza della piastra

*DO,DUEALFA,30,120,15     ! DUEALFA è l'angolo dell'intaglio

      *DO,A,5,10,5         ! A è la profondità dell'intaglio

      ANGOLO=DUEALFA/2
      ANG=ANGOLO*3.141/180
      C=TAN(ANG)

      R=W-A
      GAMMA_MEZZI=(3.141-ANG)/2
      D1=R*COS(GAMMA_MEZZI)
      D2=R*SIN(GAMMA_MEZZI)

! definizione della geometria punti e linee

      X0=W
      X1=W-A
      X2=W-(A+D1)
      X3=0

      Y0=0
      Y1=A*C
      Y2=D2
      Y3=Y1+Y2
      Y4=H

      K,1,X1,Y0             ! keypoint apice intaglio
      K,2,X3,Y0            ! keypoint per bisettrice intaglio
      K,3,X0,Y1
      K,4,X2,Y2
      K,5,X3,Y2

```

K,6,X0,Y3  
K,7,X0,Y4  
K,8,X2,Y4  
K,9,X3,Y4

L,1,2                   ! linea 1  
L,1,3                   ! linea 2  
L,2,5                   ! linea 3  
L,1,4                   ! linea 4  
L,3,6                   ! linea 5  
L,4,5                   ! linea 6  
L,6,4                   ! linea 7  
L,5,9                   ! linea 8  
L,4,8                   ! linea 9  
L,6,7                   ! linea 10  
L,9,8                   ! linea 11  
L,8,7                   ! linea 12

AL,1,3,6,4             ! Area 1  
AL,2,4,7,5             ! Area 2  
AL,7,9,12,10          ! Area 3  
AL,6,8,11,9            ! Area 4

DL,1,,UX               ! vincolo simmetria asse x  
DL,1,,UY               ! vincolo simmetria asse y  
DL,1,,UZ               ! vincolo simmetria asse z

! FK,7, FZ, 981.748,       ! forza di torsione applicata c1  
! FK,7, FZ, 490.875,       ! forza di torsione applicata c2  
! FK,7, FZ, 1472.625,      ! forza di torsione applicata c3

SFL,11,PRES,-1         ! carico distribuito di trazione  
SFL,12,PRES,-1         ! carico distribuito di trazione

\*DO, RATIO, 2.5, 15, 0.5   ! impostazione del rapporto a/d

! definizione della mesh

/PREP7  
D=A/RATIO               ! calcolo dimensione globale dell'elemento  
ESIZE, D                 ! impostazione dimensione della mesh  
MSHKEY, 2                ! impostazione mesh mappata  
AMESH, ALL               ! esecuzione della mesh  
FINISH                    ! fine della fase di preprocessing

/SOL  
SOLVE                     ! calcolo della soluzione  
FINISH

/POST1                    ! lettura dei risultati

\*GET, L1, NODE, 1, LOC, X       ! coordinata x nodo 1 (apice intaglio)  
\*GET, L2, NODE, 3, LOC, X       ! coordinata x nodo per calcolo dim. reale elem

DREALE = L2 - L1                ! calcolo dim. reale elemento  
RATIOREALE = A / DREALE        ! calcolo a/d reale

\*GET, SY, NODE, 1, S, Y         ! lettura  $\sigma_{peak}$   
\*GET, TYZ, NODE, 1, S, YZ       ! lettura  $\tau_{peak}$

! scrittura dei risultati nel file

```
*CFOPEN, 4nI+III1, txt, , APPEND
*VWRITE, DUEALFA, X1, D, RATIO, L1, L2, DREALE, RATIOREALE, SY, TYZ
(F8.0,' 'F8.4,' ',F8.4,' ',F8.4,' ',F8.4,' ',F8.4,' ',F8.4,' 'F8.4,' ',F8.4,' 'F8.4,' 'F8.4)
*CFCLOS
```

FINISH

```
/PREP7
ACLEAR, ALL
NDELE, ALL
*ENDDO ! fine loop sulla dimensione mesh
```

```
/PREP7
ADELE,ALL
LDELE,ALL
KDELE,ALL
*ENDDO ! fine loop sulla profondità intaglio
```

```
/PREP7
ADELE,ALL
LDELE,ALL
KDELE,ALL
*ENDDO ! fine loop sull'angolo
```

! Angolo 135° cambia la forma della mesh \*\*\*\*\*

DUEALFA=135 ! DUEALFA è l'angolo dell'intaglio

\*DO,A,5,10,5 ! A è la profondità dell'intaglio

```
ANGOLO=DUEALFA/2
ANG=ANGOLO*3.141/180
C=TAN(ANG)
```

```
R=W-A
GAMMA_MEZZI=(3.141-ANG)/2
D1=R*COS(GAMMA_MEZZI)
D2=R*SIN(GAMMA_MEZZI)
```

! definizione della geometria punti e linee

```
X0=W
X1=W-A
X2=0
```

```
Y0=0
Y1=A*C
Y2=H
```

```
K,1,X1,Y0 ! keypoint apice intaglio
K,2,X2,Y0 ! keypoint per bisettrice intaglio
K,3,X0,Y1
K,4,X2,Y1
K,5,X0,Y2
K,6,X2,Y2
```

```
L,1,2 ! linea 1
L,1,3 ! linea 2
L,3,4 ! linea 3
```

```

L,4,2                ! linea 4
L,3,5                ! linea 5
L,5,6                ! linea 6
L,6,4                ! linea 7

AL,1,2,3,4          ! Area 1
AL,3,5,6,7          ! Area 2

DL,1,,UX            ! vincolo simmetria asse x
DL,1,,UY            ! vincolo simmetria asse y
DL,1,,UZ            ! vincolo simmetria asse z

FK,5, FZ, 981.748,  ! forza di torsione applicata c1
! FK,5, FZ, 490.875, ! forza di torsione applicata c2
! FK,5, FZ, 1472.625, ! forza di torsione applicata c3

SFL,12,PRES,-1     ! carico distribuito di trazione

*DO, RATIO, 2.5, 15, 0.5 ! impostazione del rapporto a/d

! definizione della mesh

/PREP7
D=A/RATIO          ! calcolo dimensione globale dell'elemento
ESIZE, D           ! impostazione dimensione della mesh
MSHKEY, 2          ! impostazione mesh mappata
AMESH, ALL         ! esecuzione della mesh
FINISH             ! fine della fase di preprocessing

/SOL
SOLVE              ! calcolo della soluzione
FINISH

/POST1             ! lettura dei risultati

*GET, L1, NODE, 1, LOC, X      ! coordinata x nodo 1 (apice intaglio)
*GET, L2, NODE, 3, LOC, X      ! coordinata x nodo per calcolo dim. reale

elemento

DREALE = L2 - L1              ! calcolo dim. reale elemento
RATIOREALE = A / DREALE      ! calcolo a/d reale

*GET, SY, NODE, 1, S, Y       ! lettura  $\sigma_{peak}$ 
*GET, TYZ, NODE, 1, S, YZ     ! lettura  $\tau_{peak}$ 

! scrittura dei risultati nel file
*CFOPEN, 4nI+III1, txt, , APPEND
*VWRITE, DUEALFA, X1, D, RATIO, L1, L2, DREALE, RATIOREALE, SY, TYZ
( F8.0, ' F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4, ' ', F8.4 )
*CFCLOSE

FINISH

/PREP7
ACLEAR, ALL
NDELE, ALL
*ENDDO                    ! fine loop sulla dimensione mesh

/PREP7
ADELE,ALL
LDELE,ALL

```

KDELE,ALL  
\*ENDDO

! fine loop sulla profondità intaglio

## B. BIBLIOGRAFIA

- [1] Inglis CE (1913). Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Trans. Inst. Naval Architects* **55**, 219-230.
- [2] Westergaard HM (1939). Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics* **6**, A49-53.
- [3] M. L. Williams, "Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners on plates in tension", *Journal of Applied Mechanics*, 19, 526-528 (1952).
- [4] Irwin GR (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics* **24**, 361-364.
- [5] Neuber H (1958). *Theory of notch stresses*. Springer-Verlag, Berlin.
- [6] Creager, M. and Paris P. C., 1967, "Elastic Field Equations for Blunt Cracks with Reference to Stress Corrosion Cracking", *Int. J. Fract.*, **3**, 247-252
- [7] J.R. Rice, "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks". *ASME-Journal of Applied Mechanics*, Vol 35, 1968, pp. 379-386.
- [8] R. Gross, A. Mendelson, "Plane Elastostatic Analysis of V-Notched Plates", *International Journal of Fracture Mechanics*, 8, 267-272 (1972).
- [9] P. Lazzarin, R. Tovo, "A unified approach to the evaluation of linear elastic fields in the neighbourhood of cracks and notches", *International Journal of Fracture Mechanics*, 78, 3-19 (1996).
- [10] Atzori B, Lazzarin P (2001). Notch sensitivity and defect sensitivity under fatigue loading: two sides of the same medal, *International Journal of Fracture Mechanics* **107**, L3-L8.
- [11] G. Meneghetti, P. Lazzarin, "Significance of the Elastic Peak Stress evaluated by FE analyses at the point of singularity of sharp V-notched components", *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 30, 95-106 (2007).
- [12] N.I. Muskhelishvili, (1953). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Noordhoof Leyden.

- [13] Lazzarin, P., Zappalorto M., Yates J., (2007) Analytical study of stress distributions due to semi-elliptic notches in shafts under torsion loading, *Int. J. Engineering Science*.
- [14] Zappalorto M., Lazzarin, P., Yates J., (2008) Elastic stress distributions for hyperbolic and parabolic notches in round shafts under torsion and uniform antiplane shear loadings.
- [15] G. Meneghetti, P. Lazzarin, “Significance of the Elastic Peak Stress evaluated by FE analyses at the point of singularity of sharp V-notched components”, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 30, 95-106 (2007).
- [16] Nisitani H., Teranishi T.,  $K_I$  value of a circumferential crack emanating from an ellipsoidal cavity obtained by the crack tip stress method in FEM, *Proceedings of the 2nd International Conference on Fracture and Damage Mechanics FDM*, Milan (Italy), September 2001, pp. 141-146.
- [17] Nisitani H., Teranishi T.,  $K_I$  value of a circumferential crack emanating from an ellipsoidal cavity obtained by the crack tip stress method in FEM. *Engineering Fracture Mechanics* **71**, 2004, 579-585.
- [18] Lazzarin P., Filippi S. (2006). A generalized stress intensity factor to be applied to rounded V-shaped notches, *International Journal of Solids and Structures* 43, 2461-2478.
- [19] G. Meneghetti, F. Costa, Utilizzo delle tensioni di picco per la stima di resistenza a fatica di giunti saldati a sovrapposizione con rotture al piede e alla radice del cordone, *AIAS* 2011-127.
- [20] B. Atzori, *Appunti di costruzione di macchine*, Edizioni Librerie Cortina Padova
- [21] *Appunti del corso “Danneggiamento e meccanica della frattura”*, A.A. 2007-2008, Lazzarin P.
- [22] Ansys Inc., *Theory release 5.7*
- [23] Darko Frank, Jani Romanoff, Heikki Remes, Fatigue strength assessment of laser stake-welded web-core steel sandwich panels, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, *IN PRESS*
- [24] Kozak J (2004). Strength tests of steel sandwich panel. In: *Proceedings of the ninth symposium of ships and other floating structures - PRADS*. Lübeck-Travenmünde, Germany, 902-906.
- [25] Kozak J (2005). Strength tests of steel sandwich panel. In: *Maritime Transportation and Exploitation of Ocean and Coastal Resources*. Taylor & Francis Group, London, UK, 471-476.
- [26] Frank D, Remes H, Romanoff J (2011). Fatigue assessment of laser stake-welded Tjoints. *Int. J. Fatigue*, 33, 102-114.

- [27] Frank D, Remes H, Romanoff J. (2012). J-Integral-based approach to fatigue assessment of laser stake-welded T-joints. *Int. J. Fatigue*
- [28] P.Lazzarin, Comportamento a fatica dei giunti saldati in funzione della densità di energia di deformazione locale: influenza dei campi di tensione singolari e non singolari. *Frattura ed integrità strutturale* (2009), 13-26

## Ringraziamenti

Questa tesi rappresenta l'atto conclusivo di un percorso di studi che ho iniziato alcuni anni fa e sono molte le persone che devo ringraziare per avermi incoraggiato o in qualche modo aiutato a compiere questa mia avventura. A tutte queste persone va un sentito grazie da parte mia.

Tuttavia devo rivolgere un pensiero particolare ad alcune di esse.

La prima è senza dubbio mia moglie Katia. L'intenzione di riprendere gli studi c'era ma lei mi ha dato la spinta decisiva. Abbiamo fatto questo percorso insieme ed a lei è dedicato il risultato che consegirò.

Ci sono poi i miei figli, Emanuele, Alessio, Elena. Adesso ragazzi tocca a voi. Certi momenti passati a "studiare" assieme sono foto che porterò nella memoria e vi auguro, e mi auguro, di gioire un domani per la vostra laurea.

Un grazie ai miei genitori ed a mio fratello per favoreggiamento e concorso esterno in titolo di studio. L'incoraggiamento e l'aiuto pratico non mi è mai mancato ed anche a voi è dedicata questa laurea. So che ne sarete felici.

Infine ultimo in elenco, ma non ultimo per importanza, un grazie al prof. Paolo Lazzarin. In queste righe vorrei esprimere la stima che nutro nei suoi confronti sia dal punto di vista professionale che dal punto di vista umano. I suoi insegnamenti sono stati e continueranno ad essere preziosi per la mia vita professionale quanto la sua fiducia nei miei mezzi lo è stata in quella di studente.

Padova, Marzo 2013