

Università degli Studi di Padova



Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea Magistrale in

Ingegneria Aerospaziale

Il metodo dell'analisi statistica dell'energia per il dimensionamento preliminare delle strutture.

Relatore: Ing. Zaccariotto Mirco

Co-relatore: Prof.re Galvanetto Ugo

Controrelatore: Prof.re Francesconi Alessandro

Laureando: Avi Andrea

Matricola: 1036382

Anno Accademico: 2013/2014

INDICE

INTRODUZIONE	1
CAPITOLO 1 : TEORIA DI BASE	7
1.1 INTRODUZIONE	7
1.2 CONCETTI DI BASE DELLA SEA.....	7
1.3 CONCETTI DI BASE E SISTEMI CONTINUI.	14
1.4 CONSIDERAZIONI SULL'UGUAGLIANZA TRA L'ENERGIA CINETICA E POTENZIALE.	15
1.5 SCAMBI DI ENERGIA TRA SISTEMI A UN GRADO DI LIBERTÀ.....	17
1.6 SCAMBI DI ENERGIA TRA SISTEMI CONTINUI.	19
CAPITOLO 2 : ANALISI STATISTICA DELL'ENERGIA.....	23
2.1 INTRODUZIONE.....	23
2.2 EQUAZIONI GENERALI DELLA SEA.	23
2.2.1 <i>Ulteriori considerazioni sulla matrice dei coefficienti di perdita.....</i>	<i>26</i>
2.3 ANALOGIA TERMICA.	28
2.4 INDIVIDUAZIONE DEI SOTTOSISTEMI.	29
2.4.1 <i>Individuazione dei sottosistemi in casi complessi.</i>	<i>31</i>
2.4.2 <i>Interazioni tra i sottosistemi.</i>	<i>32</i>
2.4.3 <i>Ulteriore suddivisione di un sottosistema.....</i>	<i>34</i>
2.4.4 <i>Modellazioni diverse di un elemento.</i>	<i>36</i>
2.4.5 <i>Variabilità dei parametri modali nella divisione in sottosistemi.....</i>	<i>37</i>
2.4.6 <i>Sottosistemi per elementi in composito, piastre con irrigidimenti e sandwich.....</i>	<i>38</i>
2.5 CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI E DELLE TENSIONI.	40
2.6 SUDDIVISIONE IN BANDE DELLO SPETTRO IN FREQUENZA.	42
2.7 VELOCITÀ DI FASE E VELOCITÀ DI GRUPPO.....	45
CAPITOLO 3 : DENSITA' MODALE	47
3.1 INTRODUZIONE.....	47
3.2 SOVRAPPOSIZIONE MODALE.	48
3.3 VALIDITÀ DELL'ANALISI SEA E DENSITÀ MODALE.	48
3.4 CALCOLO DELLA DENSITÀ MODALE.....	50
3.5 CALCOLO DELLA DENSITÀ MODALE PER ELEMENTI IN MATERIALE COMPOSITO.	52
3.6 CALCOLO DELLA DENSITÀ MODALE PER PIASTRE IRRIGIDITE.....	56
3.7 CONSIDERAZIONI SUL MODELLO TRAMITE LA DENSITÀ MODALE.....	57
3.8 CALCOLO DEL NUMERO DI MODI ALLE BASSE FREQUENZE.....	59
3.9 APPROCCIO DELLA SOMMA MODALE.	60
3.10 METODI NUMERICI E SPERIMENTALI.....	61
3.11 CALCOLO DELLA VARIANZA.	62
CAPITOLO 4 : DAMPING LOSS FACTOR	65
4.1 INTRODUZIONE.....	65
4.2 DUALITÀ DLF E CLF.	66
4.3 METODI SPERIMENTALI PER IL CALCOLO DEI DLF.	67
4.3.1 <i>Metodo della velocità di decadimento.</i>	<i>68</i>
4.3.2 <i>Metodo della larghezza di banda di metà potenza.</i>	<i>70</i>

4.3.3	<i>Metodo del bilancio della potenza.</i>	72
4.4	SMORZAMENTO GENERATO DEL MATERIALE.	72
4.5	COEFFICIENTE DI PERDITA PER ACCOPPIAMENTO PER I POLIMERI.	76
4.6	METODI PER AUMENTARE LO SMORZAMENTO.	80
4.6.1	<i>Free damping layer.</i>	82
4.6.2	<i>Constrained damping layer.</i>	86
4.7	SMORZAMENTO GENERATO DALLE GIUNZIONI.	88
4.8	ALCUNI DATI EMPIRICI.	90
4.9	DLF PER MATERIALI COMPOSITI E PANNELLI IRRIGIDITI.	91
CAPITOLO 5 : COUPLING LOSS FACTOR		93
5.1	INTRODUZIONE.	93
5.2	SOTTOSISTEMI COLLEGATI IN UN PUNTO.	94
5.3	SOTTOSISTEMI COLLEGATI LUNGO UNA LINEA.	98
5.4	IMPEDENZE UTILI PER IL CALCOLO DEI CLF.	100
5.5	PROCEDIMENTO PER IL CALCOLO DEI CLF.	102
5.6	LIMITI DI VALIDITÀ DELLA TEORIA: ACCOPPIAMENTI DEBOLI E FORTI.	103
5.7	LIMITI DI VALIDITÀ DELLA TEORIA: GEOMETRIA DEGLI ELEMENTI.	110
5.8	CONSIDERAZIONI SUI CLF PER PIASTRE COLLEGATE DA UNA GIUNZIONE.	115
5.9	CALCOLO DEI CLF PER PIASTRE COLLEGATE MEDIANTE UNA GIUNZIONE.	119
5.10	CALCOLO SEMPLIFICATO DEI CLF PER LE PIASTRE.	129
5.11	CLF PER MATERIALI COMPOSITI, SANDWICH E PIASTRE RINFORZATE.	132
5.12	LIMITI DELL'ANALISI SEA.	135
CAPITOLO 6 : VALIDAZIONE DEL SOFTWARE		137
6.1	INTRODUZIONE.	137
6.2	DESCRIZIONE DELLA STRUTTURA UTILIZZATA PER LA VALIDAZIONE.	138
6.3	GIUNZIONI A L TRA DUE PIASTRE.	140
6.4	GIUNZIONE A X TRA QUATTRO PIASTRE.	143
6.5	GIUNZIONE A T TRA TRE PIASTRE.	147
6.6	ULTERIORI CONSIDERAZIONI SUI COEFFICIENTI DI TRASMISSIONE.	151
CAPITOLO 7 : ANALISI SEA DI UNA STRUTTURA		153
7.1	INTRODUZIONE.	153
7.2	DESCRIZIONE DELLA STRUTTURA STUDIATA MEDIANTE SEA.	154
7.3	IDEALIZZAZIONE DEL SISTEMA E METODI DI ANALISI UTILIZZATI.	155
7.4	SMORZAMENTO DEI VARI ELEMENTI STRUTTURALI.	157
7.5	DENSITÀ MODALE E CONSIDERAZIONI SUI SOTTOSISTEMI.	158
7.6	ANALISI DEI RISULTATI OTTENUTI DAL PROGRAMMA.	166
7.6.1	<i>Caso 1: sollecitazione sulla piastra 1 con potenza costante e DLF=0.1.</i>	167
7.6.2	<i>Caso 2: sollecitazione sulla piastra 1 con potenza costante e DLF=0.001.</i>	169
7.6.3	<i>Caso 3: sollecitazione sulla piastra 7 con potenza costante e DLF=0.1.</i>	170
7.6.4	<i>Caso 4: sollecitazione sulla piastra 7 con potenza costante e DLF=0.001.</i>	172
7.6.5	<i>Caso 5: sollecitazione sulla piastra 1 con energia costante e DLF=0.1.</i>	172
7.6.6	<i>Caso 6: sollecitazione sulla piastra 7 con energia costante e DLF=0.1.</i>	173
7.7	ENERGIE MEDIE DEI SOTTOSISTEMI NEL CAMPO 100-5000 Hz E ALCUNE CONSIDERAZIONI.	174
7.8	CALCOLO DELLA RISPOSTA UTILIZZANDO I CLF MEDI.	179
CAPITOLO 8 : TRANSIENT SEA		183
8.1	INTRODUZIONE.	183

8.2	EQUAZIONI GENERALI DELL'ANALISI TSEA.	183
8.3	CONSIDERAZIONI TEORICHE SULL'ANALISI TSEA.	185
8.4	DISCRETIZZAZIONE DELL'INTERVALLO TEMPORALE.	188
8.5	ANALISI DEI RISULTATI OTTENUTI.	190
8.5.1	<i>Confronto tra i risultati transitori e quelli a regime.</i>	191
8.5.2	<i>Effetto dello smorzamento nell'analisi TSEA.</i>	194
8.5.3	<i>Risultati globali dell'analisi TSEA.</i>	195
8.6	STUDIO DEI FENOMENI DI SHOCK MEDIANTE SEA E TSEA.	198
8.6.1	<i>Analisi SEA tramite SRS per una singola piastra: validazione numerica.</i>	199
8.6.2	<i>Analisi SEA tramite SRS per tre piastre: validazione sperimentale.</i>	200
	CONCLUSIONE.	203
	BIBLIOGRAFIA:.....	209
	APPENDICE: ANALISI DEL PROGRAMMA MATLAB.....	215

Introduzione.

Le analisi dinamiche tradizionali sono volte a definire la risposta di una struttura interessata da sollecitazioni al fine di determinare gli spostamenti, le tensioni e eventualmente la rottura delle stessa. Per ottenere tali risultati si ricorre all'utilizzo di analisi numeriche agli elementi finiti (Finite Element Analysis, FEA), nelle quali però, al fine di fornire risultati accurati, si possono considerare forzanti caratterizzate da componenti che presentano una frequenza inferiore a 500 Hz. La presenza nella pratica aerospaziale di strutture soggette a carichi in intervalli di frequenza più elevati impone la necessità di ampliare lo studio del comportamento di tali sistemi anche oltre i limiti delle suddette analisi dinamiche, in modo tale da determinare il comportamento vibrazionale della struttura e quindi predire il fenomeno della fatica e la rottura degli elementi. In particolare si è interessati a calcolare gli effetti prodotti dalle sollecitazioni nella banda di frequenza compresa tra i 500 e i 10000 Hz.

Condurre degli studi vibrazionali mediante l'utilizzo di metodi deterministici, come le sopracitate FEA, in tale campo di frequenze può essere estremamente oneroso per le seguenti ragioni:

- all'aumentare della frequenza il numero di modi di vibrare da considerare per condurre un'analisi FEA diventa sempre più elevato;
- i modi di vibrare alle frequenze medie e elevate, al di sopra dei 300 Hz, diventano sensibili anche a piccole variazioni geometriche, di distribuzione della massa, di rigidità e dei vincoli;
- differenze lievi tra la struttura e il suo modello matematico o tra realizzazioni diverse della stessa a causa di normali imprecisioni produttive possono produrre differenze in termini quantitativi nella risposta significative;
- le simulazioni numeriche di tipo *transient* richiedono elevate risorse computazionali sia in termini di tempo di calcolo che di dimensioni medie dei file generati, fatto che implica una certa difficoltà a compiere studi di sensibilità sui parametri.

L'Analisi Statistica dell'Energia, che di seguito verrà indicata dall'acronimo SEA, è un metodo alternativo a quelli deterministici che permette di studiare il comportamento della struttura dal punto di vista vibrazionale in tale campo di frequenze e in cui è sufficiente descrivere in modo generale i singoli elementi e giunzioni. Tale analisi quindi non è da intendere come un metodo differente di dimensionamento del sistema, piuttosto ne completa lo studio laddove le consuete teorie hanno dei limiti.

L'obiettivo dell'analisi SEA è quello di stimare in modo quantitativo la risposta dinamica di un sistema, nel nostro caso una struttura composta da travi e piastre, soggetta a sollecitazioni esterne, sia di tipo random che non, che interessano le frequenze comprese tra i 300 e 10000 Hz, o anche solo parte di questo intervallo. Inoltre essa permette di stabilire quali siano i principali percorsi di carico in modo tale da fornire al progettista preziose indicazioni su dove intervenire.

Come è evidente dal nome essa è un'analisi che ha come primo obiettivo la determinazione dell'energia che caratterizza ogni elemento del sistema (Capitolo 1) ed è di tipo statistico per due motivi:

- descrive ogni elemento tramite delle proprietà generali, come evidenziato in precedenza, il quale è rappresentativo di una popolazione di elementi simili ad esso ma che differiscono di dettagli dovuti alla produzione e non gestibili direttamente dal progettista;
- l'energia che caratterizza un elemento è un valore medio tra tutte le energie dei singoli punti che formano l'elemento stesso. Di conseguenza alcuni saranno caratterizzati da un contenuto energetico più elevato e alcuni meno.

Al valore medio di energia calcolato è poi possibile associare una incertezza a seconda del livello di confidenza scelto dal progettista.

I vantaggi collegati a questa analisi sono i seguenti:

- più è elevato il numero di modi di vibrare che caratterizzano un elemento è più i risultati sono affidabili e caratterizzati da una incertezza minore;
- il fatto che i modi siano sensibili a piccole variazioni geometriche o di distribuzione di massa non è un problema in quanto anche essi sono descritti in modo statistico

e contano solamente le proprietà generiche dell'elemento (dimensioni, densità, tipologia di giunzione). Ad esempio non è necessaria una descrizione accurata della forma, basta distinguere se esso sia una trave piuttosto che una piastra o un componente caratterizzato da una geometria fortemente tridimensionale (volume);

- le analisi sono statistiche e quindi caratterizzate da un valore medio più un'incertezza la cui confidenza è definita dall'utilizzatore;
- l'analisi SEA si traduce nella costruzione e risoluzione di un semplice sistema lineare, soluzione che risulta poco impegnativa dal punto di vista computazionale.

L'analisi SEA è un tecnica utile in particolare al dimensionamento preliminare delle strutture perché:

- non è necessario conoscere nei minimi dettagli la configurazione e alcuni particolari, come ad esempio inserti, bulloni, rivetti, possono essere trascurati al limite si può modificare la densità dell'elemento per tenere conto di essi (si veda il riferimento [47]);
- permette di individuare i percorsi di carico e quindi il progettista è in grado di intervenire in modo tale da modificare gli elementi più critici;
- è un'analisi semplice che si può da raffinare man mano che il progetto avanza nel grado di dettaglio;
- è veloce compiere analisi di sensibilità sui vari parametri degli elementi al fine di giungere a una configurazione di ottimo.

In breve l'Analisi Statistica dell'Energia permette di calcolare l'energia che caratterizza ogni elemento strutturale noti i parametri di base della teoria: densità modale, coefficiente di perdita per smorzamento (Damping Loss Factor, DLF) e coefficiente di perdita per accoppiamento (Coupling Loss Factor, CLF). Da essa poi possiamo calcolare anche le deformazioni e le tensioni che agiscono al fine di predire la fatica o un cedimento strutturale.

Di seguito diamo una breve descrizione degli argomenti divisi per Capitoli.

Capitolo 1:

vengono introdotti alcuni concetti di base della teoria dell'analisi SEA che sono utili al fine di comprendere alcuni aspetti che non sono né intuitivi né di uso comune nella pratica ingegneristica.

Capitolo 2:

Si vede come applicare la teoria a sistemi complessi e come procedere all'individuazione dei sottosistemi che compongono la struttura.

Capitolo 3:

Si passa ad analizzare il primo parametro che caratterizza l'analisi SEA: la densità modale. Vengono fornite le indicazioni di come valutare questa grandezza per diverse tipologie di elementi: travi, piastre, piastre in materiale composito e pannelli irrigiditi. Vengono inoltre svolte delle considerazioni dal punto di vista teorico che permettono di definire, a partire dalla densità modale, l'incertezza sui risultati forniti dalla soluzione del sistema lineare.

Capitolo 4:

Si descrive il coefficiente di perdita per smorzamento (DLF), si riportano i metodi per calcolare tale parametro arricchendo tale discussione con i risultati ricavati dalla letteratura in quanto il suo valore è difficilmente valutabile analiticamente. In particolare viene data importanza ai trattamenti mediante materiali polimerici al fine di aumentare lo smorzamento degli elementi strutturali.

Capitolo 5:

Si analizza il coefficiente di perdita per accoppiamento (CLF) che è il parametro principe dell'analisi SEA. Si forniscono i metodi per calcolarlo includendo anche alcuni importanti sviluppi teorici.

Capitolo 6:

Dopo una prima parte teorica di descrizione della teoria si passa alla parte applicativa. Si è realizzato un codice MATLAB che implementa l'analisi SEA e in questo capitolo si va a confrontare i risultati ottenuti da esso e alcuni risultati ricavati dalla letteratura e validati sperimentalmente al fine di garantire quanto calcolato dal codice.

Capitolo 7:

Si studia un caso pratico mediante l'analisi SEA: esso è una struttura che rappresenta un satellite. Lo scopo è quello di vedere come essa risponde a sollecitazioni differenti e come la risposta varia cambiando alcuni parametri come il DLF.

Capitolo 8:

Si passa all'analisi TSEA, ovvero la forma *transient* dell'Analisi Statistica dell'Energia, al fine di studiare anche i fenomeni transitori che interessano le strutture.

Capitolo 1 : TEORIA DI BASE

1.1 Introduzione.

In questo primo capitolo andremo a esaminare e spiegare la teoria di base dell'analisi statistica dell'energia, introdurremo i primi concetti legati ad essa e ricaveremo le formule necessarie per lo studio successivo di sistemi generali e più complessi.

Come appare evidente dal nome di questa tipologia di analisi, l'energia svolge una funzione primaria: considerando un sistema più o meno complesso possiamo dividerlo in vari sottosistemi, i quali, una volta sollecitati, immagazzinano dell'energia vibrazionale che può essere in parte dissipata e in parte scambiata tra i vari sottosistemi attraverso le giunzioni che li collegano. Ma prima di arrivare a tale punto è necessario sviluppare alcune considerazioni energetiche che saranno di fondamentale importanza in quanto rappresentano la base matematica e fisica su cui si poggia la teoria.

1.2 Concetti di base della SEA.

Si consideri un sistema massa-molla-smorzatore a un grado di libertà. Con M si indichi la massa, con K la rigidezza della molla e con R il coefficiente di smorzamento. Tale sistema è sollecitato dalla forzante $l(t)$ in cui t è il tempo. L'equazione differenziale che governa il moto è:

$$M\ddot{y} + R\dot{y} + Ky = l(t)$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$\ddot{y} + \omega_0\eta\dot{y} + \omega_0^2y = l(t)/M$$

in cui $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ è la pulsazione naturale e $\eta = R/\omega_0M$ è il coefficiente di perdita per smorzamento, pari al doppio del rapporto di smorzamento ξ .

A partire da tale equazione possiamo individuare quattro casi in ordine crescente di generalità che ci permetteranno di capire come si comporta un sistema di questo tipo soggetto a una forzante caratterizzata da uno spettro in frequenza piatto e costante lungo tutto il dominio f .

Come primo caso consideriamo il sistema privo di elemento smorzante, $\eta = 0$, e soggetto a vibrazioni libere, $l(t) = 0$.

Otteniamo che l'equazione che descrive il moto è:

$$y = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t = C \sin(\omega_0 t + \Phi).$$

L'energia cinetica e potenziale della molla sono rispettivamente:

$$KE = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 = \frac{1}{2} (M \omega_0^2) C^2 \cos^2(\omega_0 t + \Phi) = \frac{1}{2} K C^2 \cos^2(\omega_0 t + \Phi)$$

$$PE = \frac{1}{2} K y^2 = \frac{1}{2} K C^2 \sin^2(\omega_0 t + \Phi).$$

La somma di tali energie è pari a:

$$E = KE + PE = \frac{1}{2} K C^2.$$

Come è visibile l'energia totale è indipendente dal tempo e dipende solamente dall'ampiezza della vibrazione espressa da C (K è considerato fisso e noto).

A questo punto introduciamo un concetto fondamentale: non siamo interessati al valore che assumono le grandezze in ogni istante di moto, piuttosto *siamo interessati al valore che esse assumono mediamente nel tempo*. Questa considerazione è di fondamentale importanza e rappresenta l'idea su cui poi si baserà il resto dell'analisi statistica dell'energia.

Facendo la media in un periodo di KE e PE otteniamo:

$$KE_{avg} = PE_{avg} = \frac{1}{4} K C^2 = \frac{1}{2} E.$$

Questo significa che in media in un periodo metà dell'energia di vibrazione va in energia potenziale e metà in energia cinetica.

Il passo successivo è considerare sempre un sistema libero di vibrare ma in cui è presente un coefficiente di smorzamento diverso da zero.

Nel caso in cui $\eta \neq 0$ le espressioni sono un po' più complesse ma, trascurando che in un singolo ciclo non ci sia riduzione di ampiezza dell'oscillazione, i risultati che otteniamo mediando KE e PE in un ciclo sono uguali ai precedenti nel caso in cui $\eta < 0.5$ ($\xi < 0.25$):

$$KE_{avg} = PE_{avg} = \frac{1}{2} E_{avg}$$

In questo caso l'energia totale non è costante ma varia nel tempo e quindi anche essa viene mediata in un periodo (per ulteriori dettagli su come ricavare quanto visto si veda Lyon [41]). L'energia totale diminuisce perché non sono applicate forzanti esterne che immettono energia e lo smorzatore sottrae energia al sistema. Nonostante ciò troviamo nuovamente che in un singolo periodo di oscillazione l'energia cinetica e potenziale *mediamente* si equivalgono e sono pari a metà dell'energia totale.

Dalla relazione precedente possiamo anche ricavare:

$$y_{avg}^2 = \frac{\dot{y}_{avg}^2}{\omega_0^2}.$$

Supponendo che sul sistema agisca una forzante sinusoidale otteniamo il terzo caso: la potenza che la forza sinusoidale immette nel sistema viene dissipata totalmente dallo smorzatore. Di conseguenza la massa seguirà la forzante con un moto sinusoidale alla stessa frequenza, dato l'equilibrio tra la potenza in ingresso e in uscita.

Utilizziamo la notazione di Eulero:

$$\text{forza: } l(t) = L e^{-i\omega t}$$

$$\text{velocità: } \dot{y}(t) = V e^{-i\omega t}$$

dove L e V sono numeri complessi che esprimono modulo e fase:

$$L = |L|e^{-i\psi}$$

$$V = |V|e^{-i\alpha}.$$

Considerando l'equazione differenziale che esprime il moto:

$$\ddot{y} + \omega_0 \eta \dot{y} + \omega_0^2 y = l(t)/M$$

e sostituendo le grandezze espresse secondo la notazione di Eulero otteniamo:

$$L = V(-i\omega_0 M) \left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + i\eta \right\}.$$

Ricordando che vale:

$$L = V Z$$

dove L è la variabile di portata, V la variabile di sforzo e Z è l'impedenza meccanica che in realtà è una ammettenza generalizzata:

$$Z = (-i\omega_0 M) \left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + i\eta \right\} = \omega_0 M \eta + i M \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right).$$

Di conseguenza l'ammettenza meccanica è pari a:

$$Y = \frac{V}{L} = \frac{1}{\omega_0 M \eta + i M \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right)}.$$

Per quanto riguarda la potenza *media* inserita nel sistema abbiamo che essa vale:

$$\pi = \langle l\dot{y} \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}(LV^*) = \frac{1}{2} |L|^2 \text{Re}(Y^*) = \frac{1}{2} |V|^2 \text{Re}(Z)$$

in cui con il simbolo $\langle x \rangle_t$ indichiamo appunto il valore medio nel tempo della grandezza x .

Possiamo notare che:

$$\text{Re}(Y) = \text{Re} \left(\frac{1}{Z} \right) = \frac{\text{Re}(Z)}{|Z|^2} = \omega_0 \eta M |Y|^2$$

poiché la parte reale di Z è pari a $\omega_0 \eta M$, come possiamo dedurre dall'espressione completa di Z . Di conseguenza:

$$\pi = \frac{1}{2} |L|^2 \text{Re}(Y^*) = \frac{1}{2} |L|^2 \omega_0 \eta M |Y|^2$$

e quindi la potenza media immessa nel periodo di tempo considerato ha una dipendenza in frequenza pari alla dipendenza in frequenza dell'ammettenza. Questo significa che

quando la forzante sinusoidale ha pulsazione pari a ω_0 allora il trasferimento di potenza tra forzante e sistema è massimo. Di seguito in Figura 1.1 riportiamo l'andamento del quadrato del modulo dell'ammettenza e che quindi rappresenta anche l'andamento della potenza media in ingresso al variare della pulsazione della forzante.

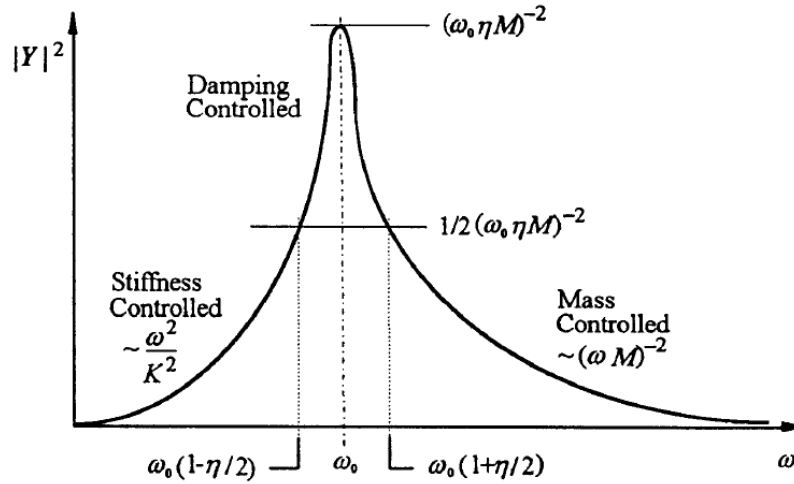


Figura 1.1: Modulo al quadrato dell'ammettenza in funzione della pulsazione (immagine tratta da [41]).

Per quanto riguarda il quadrato del modulo dell'ammettenza:

$$|Y|^2 = \frac{1}{(\omega_0 \eta M)^2 + \frac{K^2}{\omega^2} - 2MK + \frac{K^2}{\omega^2}}$$

abbiamo 3 diversi casi:

$$\omega \ll \omega_0 : |Y|^2 \rightarrow \frac{\omega^2}{K^2} \quad \text{regione controllata dalla rigidità}$$

$$\omega = \omega_0 : |Y|^2 = \frac{1}{(\omega_0 \eta M)^2} \quad \text{regione controllata dallo smorzamento}$$

$$\omega \gg \omega_0 : |Y|^2 \rightarrow \frac{1}{(\omega M)^2} \quad \text{regione controllata dalla massa}$$

Ne consegue che, per l'ammettenza, possono essere utilizzate anche le seguenti formule semplificate:

$$Y = \frac{-i\omega}{K} \quad \left[\omega < \omega_0 \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \right]$$

$$Y = \frac{i}{\omega K} \quad \left[\omega > \omega_0 \left(1 + \frac{\eta}{2} \right) \right]$$

in cui sono state messe in evidenza tra parentesi anche le regioni del dominio in cui sono valide. Nella regione centrale, invece, dobbiamo continuare ad operare con l'ammettenza completa. Queste formule rappresentano comunque adeguatamente il comportamento del sistema.

L'ultimo passo da compiere prevede di considerare che una forzante di tipo random agisca sul sistema a un grado di libertà. Prima di tutto dobbiamo però definire una forzante random.

Si consideri un filtro ideale con banda passante Δf e centrato intorno alla frequenza f_c . Si assuma che la banda diventi molto stretta e che in ingresso si abbia una forzante $l_0(t)$: se il valore quadrato medio dell'uscita è proporzionale a Δf , allora $l_0(t)$ è random.

Quindi per una forzante random vale:

$$\langle l^2 \rangle_{\Delta f} = S_l \Delta f$$

dove S_l è il fattore di proporzionalità.

Tale fattore di proporzionalità è la Power Spectral Density (PSD), la quale generalmente dipende dalla frequenza.

In generale il valore quadrato medio di una forzante applicata a un sistema che presenta un certo guadagno $G(f)$ è pari a:

$$\langle l^2 \rangle = \int_{f_1}^{f_2} S_l(f) G(f) df.$$

Se poi estendiamo l'integrale tra $[0; +\infty)$ allora otteniamo il valore medio quadrato dell'ampiezza della forzante in tutto il campo delle frequenze. Chiaramente la forzante può essere un rumore (noise) e nel caso in cui $S_l = \text{cost}$ allora siamo in presenza di un rumore bianco.

Considerando un semplice sistema massa-molla-smorzatore caratterizzato da una certa ammettenza $Y = V/L$ abbiamo che dal valore medio al quadrato della forzante possiamo ricavare il valore medio al quadrato della velocità:

$$\langle \dot{y}^2 \rangle = \langle l^2 \rangle |Y|^2 = \int_0^{\infty} S_l |Y|^2 df.$$

Possiamo fare alcune considerazioni interessanti:

- 1) Nel caso in cui sia un rumore bianco la PSD “può uscire” dall’integrale;
- 2) E’ evidente che il contributo maggiore all’integrale viene dalla regione *damping controlled* poiché in quella zona raggiungiamo i valori massimi di Y. Questo fatto è ancora più evidente se la PSD esce dall’integrale poiché in effetti in caso contrario dipende anche dal valore della PSD. Cioè se la PSD vale poco in prossimità del picco di risonanza e tanto altrove allora il contributo all’integrale dipende da tutto l’intervallo e non solo dalla regione *damping controlled*;
- 3) Introduciamo il concetto di ‘ampiezza di banda equivalente’ o ‘ampiezza di banda di rumore’: Δ_e . E’ la banda passante rettangolare di un sistema ideale (cioè un filtro ideale) che ha ammettenza costante e pari a solo quella della regione *damping controlled*:

$$Y_{max} = cost = \frac{1}{\omega_0 \eta M}$$

e di ampiezza tale da generare la stessa risposta del sistema vero sollecitato da un rumore bianco.

$$\langle \dot{y}^2 \rangle = S_l \int_0^{\infty} |Y|^2 df \rightarrow \langle \dot{y}^2 \rangle = S_l \Delta_e Y_{max}^2.$$

A sinistra abbiamo un sistema massa-molla-smorzatore ea destra abbiamo un sistema equivalente, con una Y più semplice e caratterizzato da una banda di ampiezza limitata.

Si tratta di definire l’ampiezza della banda e imponendo l’uguaglianza tra le due formule abbiamo:

$$\Delta_e = \frac{1}{Y_{max}^2} \int_0^{\infty} |Y|^2 df$$

Dopo alcuni calcoli e considerazioni si trova che una formula che approssima l’integrale è:

$$\Delta_e = \frac{\pi}{2} \omega_0 \eta$$

Dove ricordiamo che ω_0 è la pulsazione naturale del sistema e η il loss factor pari a 2ξ .

Questa banda è maggiore di quella di metà potenza che è pari a $\omega_0\eta$.

Riassumendo quanto abbiamo visto possiamo dire che:

- Considerando un sistema discreto a un grado di libertà abbiamo che mediamente l'energia cinetica e potenziale si equivalgono e sono pari a metà dell'energia totale del sistema;
- Inoltre nel momento in cui il sistema è interessato da un rumore bianco possiamo sostituire il sistema iniziale con uno equivalente caratterizzato da una ammettenza costante pari al valore massimo dell'ammettenza generale e che occupa solo una banda in frequenza ristretta detta banda equivalente.

1.3 Concetti di base e sistemi continui.

Chiaramente i sistemi reali con cui abbiamo a che fare nella pratica ingegneristica non sono discreti ma bensì continui. L'equazione differenziale che li descrive è:

$$\rho\ddot{y} + r\dot{y} + \Lambda y = p$$

in cui ρ è la densità di massa, r è il coefficiente di resistenza viscosa, Λ è un operatore lineare composto da differenziali rispetto allo spazio e p è la sollecitazione distribuita. Dalla teoria della meccanica delle vibrazioni sappiamo che esistono delle autofunzioni, le quali ci permettono di rappresentare la risposta ad una sollecitazione come sovrapposizione di tali autofunzioni pesate da opportuni coefficienti:

$$y = \sum_n Y_n(t) \Psi_n(x).$$

Inoltre visto che lo spostamento generalizzato è espresso attraverso le autofunzioni e visto che vale la legge descrittiva iniziale, allora anche la forzante è espressa da una combinazione delle autofunzioni:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{M} \sum_n L_n(t) \Psi_n(x) .$$

A questo punto sfruttando il concetto di ortonormalità delle autofunzioni possiamo ottenere:

$$M\{\ddot{Y}_n + \Delta \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n\} = L_n(t)$$

Ciò significa che un qualsiasi sistema dinamico complesso può essere interpretato con un gruppo di sistemi massa-molla-smorzatore indipendenti caratterizzati da massa M , rigidezza $\omega_n^2 M$ e smorzamento $M \omega_n \eta_n$. Questo fatto, tenendo presente quanto dedotto nel paragrafo precedente, implica che quando un sistema continuo è sollecitato da un rumore bianco limitato a una certa banda allora esso risponderà con i modi di vibrare che rientrano in tale banda mentre gli altri rimarranno non eccitati. Tale deduzione avrà importanza ancora maggiore quando nel Paragrafo 1.5 diremo che due sistemi collegati da una giunzione si scambieranno della potenza che dipende dalla loro interazione risonante: in altre parole questo significa che, considerata una certa banda in frequenza, ciascun modo di vibrare di un sistema scambia della potenza con ogni modo di vibrare del secondo sistema che cade all'interno della medesima banda. Al contrario i modi fuori dalla banda possono essere considerati non eccitati.

1.4 Considerazioni sull'uguaglianza tra l'energia cinetica e potenziale.

Se il secondo punto riportato in conclusione del Paragrafo 1.2 non desta grandi sorprese, affermare che sia equivalente parlare di energia cinetica e potenziale crea qualche perplessità. La dimostrazione fatta precedentemente è corretta ma considera un semplice sistema a un grado di libertà e benché abbiamo appena visto che un sistema continuo sia rappresentabile mediante una serie i sistemi semplici non implica necessariamente che tale corrispondenza tra le due energie sia automatica.

Per eliminare ogni dubbio riportiamo di seguito alcune simulazioni numeriche svolte appunto per verificare se tale corrispondenza sia reale o valga solamente in casi determinati [2].

Consideriamo un sistema complesso formato da una shell che presenta una apertura, una zona curva e un ripiegamento saldato per punti. Nella Figura 1.2 riportiamo i risultati di simulazioni numeriche che rappresentano la differenza in dB tra l'energia cinetica e potenziale per tre differenti frequenze di sollecitazione dell'elemento.

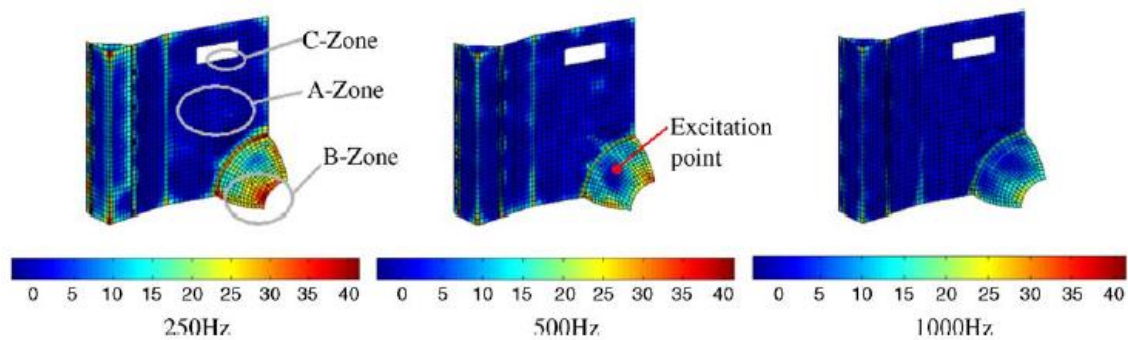


Figura 1.2: Confronto tra l'energia cinetica e potenziale in tre differenti bande di frequenza (immagine tratta da [2]).

Appare evidente che anche considerando un elemento complesso come quello rappresentato in figura la corrispondenza tra energia cinetica e potenziale è corretta. Tenendo poi conto che il nostro obiettivo è sfruttare l'analisi statistica dell'energia a frequenze elevate e su elementi semplici allora possiamo tranquillamente affermare che la corrispondenza tra i due tipi di energia è quanto più che verificata. Sempre da questi risultati si evince che, nel momento in cui si vorrà spostare anche l'analisi alle basse frequenze, allora tale uguaglianza non è più verificata. Definire un limite di frequenza minimo oltre il quale la teoria non offre risultati consistenti è difficile da definire nonostante in molti autori ci abbiano provato [66]. In linea del tutto generale possiamo affermare che per elementi semplici si ottengono risultati buoni fino a 300 Hz, mentre per geometrie complesse, come ad esempio la parte sferica della shell, al di sotto dei 500 Hz i risultati dovranno essere corretti mediante una incertezza maggiore rispetto al caso delle geometrie semplici. Poiché nella presente trattazione consideriamo geometrie piuttosto semplici assumiamo come valida l'uguaglianza tra l'energia cinetica e potenziale.

1.5 Scambi di energia tra sistemi a un grado di libertà.

A questo punto dopo aver visto come caratterizzare i sistemi a un grado di libertà e continui andiamo a vedere come si comportano due sistemi collegati reciprocamente. Iniziamo considerando due semplici sistemi massa-molla-smorzatore collegati tra di loro mediante tre elementi di accoppiamento conservativi (K_c , G e M_c) rispettivamente sensibili agli sbilanciamenti in spostamento, velocità e accelerazione tra le due masse e che riportiamo nella seguente Figura 1.3.

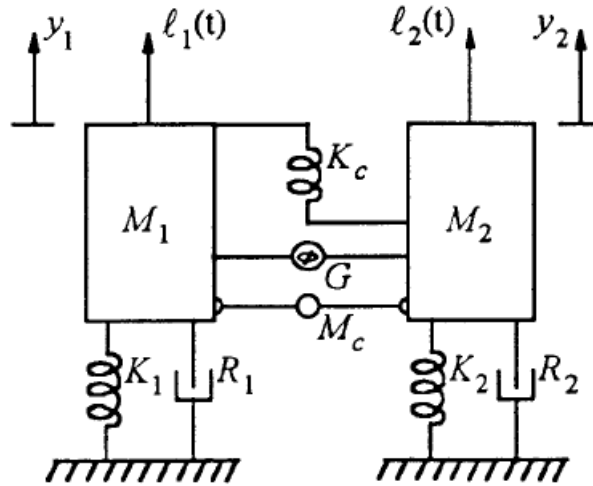


Figura 1.3: Due sistemi a un gdl accoppiati tramite K_c , G e M_c (immagine tratta da [41]).

Seguendo il procedimento proposto da Lyon [41], attraverso il Lagrangiano ricaviamo le equazioni che descrivono il moto delle due masse:

$$(M_1 + 1/4M_c)\ddot{y}_1 + R_1\dot{y}_1 + (K_1 + K_c)y_1 = l_1 + K_c y_2 + G\dot{y}_2 - 1/4M_c\ddot{y}_2$$

$$(M_2 + 1/4M_c)\ddot{y}_2 + R_2\dot{y}_2 + (K_2 + K_c)y_2 = l_2 + K_c y_1 - G\dot{y}_1 - 1/4M_c\ddot{y}_1$$

dalle quali appare evidente che il moto di una influenzi il moto dell'altra sottolineando come di fatto ci sia uno scambio di energia tra le due.

Considerando che entrambe le masse vengano sollecitate da due rumori bianchi indipendenti, ovvero da due forzanti i cui spettri in frequenza sono piatti, in condizioni di stazionarietà possiamo dire che la potenza *media* immessa nel sistema dalle due forzanti (sia uguale alla potenza *media* dissipata dal sistema globale e quindi vale la legge:

$$\langle l_1 \dot{y}_1 \rangle + \langle l_2 \dot{y}_2 \rangle = R_1 \langle \dot{y}_1^2 \rangle + R_2 \langle \dot{y}_2^2 \rangle$$

Analogamente possiamo rappresentare la potenza *media* scambiata tra la massa 1 e la 2 come:

$$\Pi_{12} = -K_c \langle y_2 \dot{y}_1 \rangle - G \langle \dot{y}_1 \dot{y}_2 \rangle + \frac{1}{4} M_c \langle \ddot{y}_2 \dot{y}_1 \rangle$$

Attraverso la definizione delle funzioni di trasferimento tra i due sistemi è possibile calcolare il valore delle medie riportate nella formula precedente come riportato nell'Appendice A del Lyon [41]. Quello che si ottiene mediante calcoli molto complessi qui non riportati è che la potenza scambiata tra le due masse è proporzionale alla differenza tra l'energia *media* dei due sistemi:

$$\Pi_{12} = B(E_1 - E_2)$$

in cui il parametro B è pari a:

$$B = \frac{\mu^2 [\Delta_1 \omega_2^4 + \Delta_2 \omega_1^4 + \Delta_1 \Delta_2 (\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2)] + (\gamma^2 + 2\mu\kappa)(\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2) + \kappa^2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{(1 - \mu^2)[(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2)]}.$$

I parametri riportati nella precedente equazione si calcolano grazie alle seguenti formule fornite da Lyon [41]:

$$\Delta_i = R_i / (M_i + M_c/4)$$

$$\omega_i^2 = (K_i + K_c) / (M_i + M_c/4)$$

$$\mu = M_c/4 (M_1 + M_c/4)^{1/2} (M_2 + M_c/4)^{-1/2}$$

$$\gamma = G / (M_1 + M_c/4)^{1/2} (M_2 + M_c/4)^{1/2}$$

$$\kappa = K_c / (M_1 + M_c/4)^{1/2} (M_2 + M_c/4)^{1/2}$$

Possiamo riassumere quanto trovato in alcuni punti che sono fondamentali per quanto riguarda la potenza scambiata tra due sistemi:

- 1) È dominata dall'interazione risonante tra i due sistemi;
- 2) È direttamente proporzionale alla differenza di energia vibrazionale reale dei sistemi considerati;

- 3) Il sistema è reciproco poiché il parametro B è simmetrico, cioè assume lo stesso valore sia considerando il flusso di potenza dal sistema 1 al 2 che viceversa;
- 4) Il flusso di potenza va dal sistema più energetico a quello meno energetico.

1.6 Scambi di energia tra sistemi continui.

Giunti a questo punto si tratta di mettere insieme tutti i risultati sviluppati nei precedenti paragrafi per determinare come due sistemi qualsiasi scambiano energia attraverso gli accoppiamenti.

Come abbiamo detto precedentemente nel Paragrafo 1.3 un generico sistema (o sottosistema) è rappresentabile mediante una serie di sistemi elementari a un grado di libertà. Definita una forzante caratterizzata da una precisa finestra in frequenza e che agisce sul generico sottosistema 1, abbiamo che solo i modi la cui frequenza di risonanza cade nella banda reagiranno alla sollecitazione. Per di più ciascun modo di questo sottosistema 1 trasferirà parte della potenza assorbita dalla forzante a ciascun modo di vibrare, che ricade sempre nella suddetta banda, del sottosistema 2. Per meglio comprendere questo discorso si faccia riferimento alla Figura 1.4.

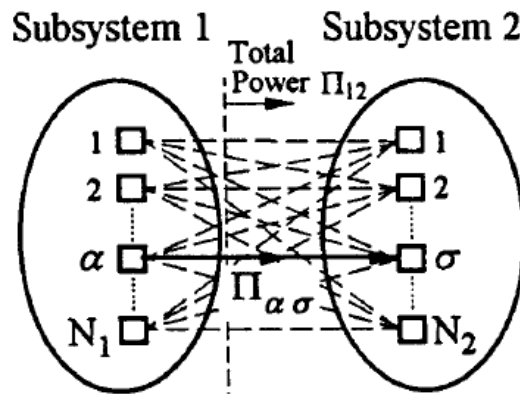


Figura 1.4: Rappresentazione dell'interazione tra i modi di vibrare di due sottosistemi (immagine tratta da [41]).

Chiaramente il numero di modi di vibrare interessati può variare a seconda del sottosistema considerato.

Vediamo ora alcune ipotesi necessarie per il resto della trattazione:

- 1) La frequenza naturale di ciascun modo di ogni sottosistema è uniformemente probabile all'interno della banda di sollecitazione. Questa è una ipotesi molto forte ma nasce da considerazioni importanti di tipo statistico: infatti alle frequenze elevate le pulsazioni naturali risentono in modo importante di anche minime variazioni locali del sistema. Allora, dal momento in cui noi conosciamo sono delle caratteristiche generale del sistema considerato, dobbiamo tenere conto che le frequenze non siano identificabili con accuratezza, ma è più corretto supporre che ciascuna sia uniformemente distribuita nell'intervallo;
- 2) Ogni modo è equamente energetico rispetto agli altri;
- 3) Tutti i modi sono caratterizzati dallo stesso smorzamento.

A questo punto dal Paragrafo 1.3 sappiamo che un sistema continuo può essere interpretato come un insieme di sistemi a un grado di libertà e dal Paragrafo 1.5 conosciamo che due sistemi di questo tipo si scambiano della potenza, che altro non è che energia per unità di tempo. Allora in generale ciascun modo di vibrare del sottosistema 1, che indichiamo con α , scambierà della potenza con ogni modo del sottosistema 2, che indichiamo con σ . Inoltre con ε indichiamo l'energia del singolo modo. Otteniamo che la potenza scambiata da due generici modi è:

$$\Pi_{\alpha\sigma} = \langle B_{\alpha\sigma} \rangle_{\omega_\alpha\omega_\sigma} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

dove $\langle B_{\alpha\sigma} \rangle_{\omega_\alpha\omega_\sigma}$ rappresenta il valore medio del coefficiente $B_{\alpha\sigma}$ considerando le pulsazioni dei due modi equamente distribuite all'interno della banda $\Delta\omega$ della sollecitazione e ε_1 e ε_2 sono le energie modali che ricordiamo che dal punto 2 sono uguali per tutti i modi di un sottosistema e in questo modo si spiegano i pedici 1 e 2.

Allora l'energia scambiata tra tutti i modi del sottosistema 1 e il modo σ del sottosistema 2 è data moltiplicando la formula precedente per il numero di modi del sistema 1, N_1 :

$$\Pi_{1\sigma} = \langle B_{\alpha\sigma} \rangle N_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

e infine la potenza scambiata tra i sottosistemi è:

$$\Pi_{12} = \langle B_{\alpha\sigma} \rangle N_1 N_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

È di fondamentale importanza notare che il flusso di potenza nel caso di sistemi complessi è proporzionale alla differenza tra le energie modali medie dei due sottosistemi e non dalle energie totali dei sottosistemi, dove con energie modali intendiamo il rapporto tra l'energia del sottosistema in una determinata banda $\Delta\omega$ e il numero di modi nella banda. Questo significa che, paradossalmente, se un sottosistema presenta una certa energia e molti modi eccitati nel caso in cui sia a contatto con un sottosistema meno energetico globalmente ma con una energia modale più elevata, allora esso riceverà potenza e non la cederà, di fatto aumentando ancora nel tempo la sua energia.

A partire dall'ultima equazione possiamo ricavare mediante semplici passaggi la seguente uguaglianza:

$$\Pi_{12} = \omega (\eta_{12}E_1 - \eta_{21}E_2)$$

dove con E_1 e E_2 indichiamo le energie dei sottosistemi e non più quelle modali e definiamo il coefficiente di accoppiamento (CLF, Coupling Loss Factor) come:

$$\eta_{ij} = \frac{\langle B_{\alpha\sigma} \rangle N_j}{\omega}$$

in cui ω rappresenta la frequenza angolare centrale della banda.

Il coefficiente di perdite di accoppiamento η_{ij} rappresenta la potenza persa dal generico sottosistema i verso il sottosistema j a causa dell'interazione con i vari sottosistemi. D'altra parte esso rappresenta anche una misura della forza dell'accoppiamento: due sistemi che presentano un CLF elevato significano che scambiano molta potenza e molta energia. Come vedremo nel proseguire della trattazioni il coefficiente di accoppiamento è una grandezza fondamentale all'interno della teoria dell'analisi statistica dell'energia.

È importante osservare che tra i generici CLF che legano due sottosistemi vale una relazione molto semplice detta relazione di reciprocità:

$$N_i\eta_{ij} = N_j\eta_{ji}.$$

Tale relazione deriva direttamente dalla definizione che abbiamo dato per il coefficiente di perdita di accoppiamento. È bene far emergere sin da subito come uno dei principali punti legati all'analisi statistica dell'energia sarà legato alla determinazione di tali

coefficienti, che vedremo non sarà banale bensì piuttosto complessa. Allora la relazione appena vista ci tornerà spesso molto utile poiché, per ogni sottosistema, ci basterà ricavare uno dei due coefficiente e, noto il numero di modi che partecipano, conosceremo anche il coefficiente opposto. Inoltre, ricavando i coefficienti, potremmo metterci sempre nella condizione di calcolare il più semplice dei due.

Capitolo 2 : ANALISI STATISTICA DELL'ENERGIA

2.1 Introduzione.

Dopo aver introdotto i concetti elementari che stanno alla base dell'analisi statistica dell'energia in questo capitolo andremo a vedere come possiamo applicare questa teoria a sistemi più complessi.

Inizialmente vedremo come si imposta una generica analisi SEA e come si ricava il sistema di equazioni in cui le incognite sono le energie di ogni sottosistema individuato. Successivamente nel Paragrafo 2.4 focalizzeremo l'attenzione sui sottosistemi, ne daremo una definizione e vedremo come, a partire da una struttura complessa, sia possibile determinare da quali sottosistemi essa sia formata. Nei capitoli successivi poi approfondiremo tutte le altre grandezze caratteristiche di tale tipo di analisi.

2.2 Equazioni generali della SEA.

Si consideri un generico sistema complesso e lo si divida in sottosistemi, (successivamente daremo una spiegazione completa per spiegare cosa intendiamo per sottosistema, Paragrafo 2.4) dove per ora con sottosistema indichiamo un generico elemento costitutivo. Dalla teoria di base dell'analisi statistica dell'energia sappiamo che per ognuno di essi possiamo scrivere una equazione che *a regime* uguaglia la potenza in ingresso e quella in uscita:

$$\Pi_{ingresso} = \Pi_{uscita}.$$

Quindi per un generico sottosistema i , sollecitato da una forzante esterna che interessa una precisa banda in frequenza di centro ω , abbiamo che:

- Riceverà dall'esterno una certa potenza Π_i ;
- Sarà caratterizzato dalla quantità di energia E_i ;

- Dissiperà una certa potenza $\Pi_{i,diss} = \omega\eta_i E_i$ dove con η_i indichiamo lo smorzamento che caratterizza il sottosistema ($\eta_i = 2\xi_i$) e lo identifichiamo come coefficiente di perdita per smorzamento (DLF, Damping Loss Factor);
- Scambierà con il sottosistema j la potenza $\Pi_{i \rightarrow j} = \omega\eta_{ij} E_i$ dove η_{ij} prende il nome di coefficiente di perdita di accoppiamento (CLF, Coupling Loss Factor).

Allora, sempre per il generico sottosistema, abbiamo che l'equazione di equilibrio tra le potenze diventa:

$$\Pi_i + \Pi_{j \rightarrow i} = \Pi_{i,diss} + \Pi_{i \rightarrow j}$$

ovvero:

$$\Pi_i = \Pi_{i,diss} + \Pi_{ij}$$

dove in quest'ultima abbiamo messo in evidenza la potenza netta scambiata tra i generici sottosistemi i e j . Sfruttando le relazioni di base riportate precedentemente possiamo ricavare l'espressione che lega tra loro la potenza in ingresso e le energie dei sottosistemi:

$$\Pi_i = \omega\eta_i E_i + \omega(\eta_{ij} E_i - \eta_{ji} E_j).$$

Considerando ad esempio un sistema formato da 3 sottosistemi abbiamo che possiamo rappresentarlo semplicemente come in Figura 2.1:

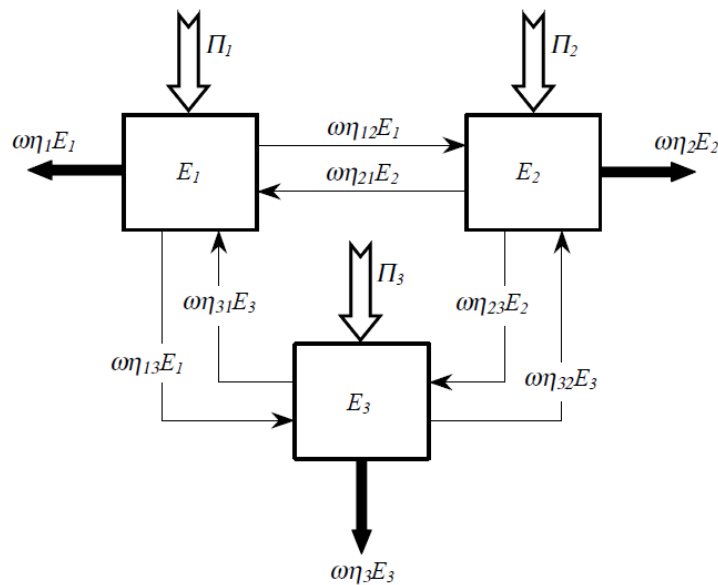


Figura 2.1: Modello SEA di tre sottosistemi (immagine tratta da [56]).

È chiaro che qualora uno dei sottosistemi non dissipi energia o non comunichi con determinati sottosistemi basta semplicemente assumere nulli i rispettivi coefficienti η_i o η_{ij} .

Le equazioni che ne derivano sono:

$$\begin{aligned}\omega(\eta_1 + \eta_{12} + \eta_{13})E_1 - \omega\eta_{21}E_2 - \omega\eta_{31}E_3 &= \Pi_1 \\ \omega(\eta_2 + \eta_{21} + \eta_{23})E_2 - \omega\eta_{12}E_1 - \omega\eta_{32}E_3 &= \Pi_2 \\ \omega(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32})E_3 - \omega\eta_{13}E_1 - \omega\eta_{23}E_2 &= \Pi_3\end{aligned}$$

oppure riscrivendole in forma matriciale:

$$\omega \begin{bmatrix} (\eta_1 + \eta_{12} + \eta_{13}) & -\eta_{21} & -\eta_{31} \\ -\eta_{12} & (\eta_2 + \eta_{21} + \eta_{23}) & -\eta_{32} \\ -\eta_{13} & -\eta_{23} & (\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{Bmatrix}$$

in cui ricordiamo che tra i vari coefficienti di perdita per accoppiamento vale la relazione $N_i\eta_{ij} = N_j\eta_{ji}$.

Noti tutti i coefficienti di perdita per smorzamento e di accoppiamento, note le potenze in ingresso dall'esterno per ogni sottosistema e nota la frequenza centrale della banda di sollecitazione possiamo semplicemente ricavare le energie che interessano i singoli sottosistemi mediante una semplice inversione di matrice. Una volta ricavata l'energia possiamo poi ricondurci ad altre grandezze di interesse ingegneristico come la velocità media, la deformazione media e la tensione media come messo in evidenza da Lyon [41].

A questo punto, a partire delle equazioni precedenti possiamo generalizzare il problema per un sistema formato da m sottosistemi [56]. Per esso la formulazione matriciale è:

$$\omega[A]\{E\} = \{\Pi\}$$

In cui $[A]$ è la matrice dei coefficienti di perdita, $\{E\}$ è il vettore delle energie dei sottosistemi e $\{\Pi\}$ è il vettore delle potenze in ingresso.

Riscrivendo il tutto in forma estesa per mettere in evidenza le singole componenti otteniamo:

$$\omega \begin{bmatrix} \eta_1 + \sum_{j \neq 1} \eta_{1j} & -\eta_{21} & \cdots & -\eta_{m1} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \sum_{j \neq 2} \eta_{2j} & \cdots & -\eta_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{1m} & -\eta_{2m} & \cdots & \eta_m + \sum_{j \neq m} \eta_{mj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \vdots \\ \Pi_m \end{Bmatrix}$$

In generale quindi, dato un certo sistema, la procedura di studio mediante l'analisi statistica dell'energia prevede di:

- Suddividere il sistema nei diversi sottosistemi;
- Identificare le bande di sollecitazione: solitamente si divide il dominio in frequenza della forzante in ottave o in terzi di ottava (si veda Paragrafo 2.6);
- Identificare per ogni banda le grandezze caratteristiche di ogni sottosistema: coefficienti di perdita di accoppiamento (CLF) e per smorzamento (DLF), densità modale e impedenze o ammettenze;
- Conoscere le potenze in ingresso tramite calcolo o misurazioni sperimentali.

Nei paragrafi seguenti spiegheremo il significato di tutte le grandezze necessarie per l'analisi e vedremo come ricavare delle formule per stimarle.

2.2.1 Ulteriori considerazioni sulla matrice dei coefficienti di perdita.

Prima di proseguire nella trattazione è doveroso notare alcuni particolari. Innanzitutto la matrice del sistema scritto come nel caso precedente non è simmetrica e di conseguenza il flusso di potenza non sarà reciproco rispetto alle energie totali dei sottosistemi [56]. D'altra parte il sistema può essere reso semplicemente simmetrico moltiplicando ogni colonna per il rispettivo numero di modi di vibrare del sottosistema e dividendo la corrispondente energia sempre per il numero di modi. Questo ci permette di ottenere un sistema simmetrico ricordando la precedente relazione di reciprocità dei coefficienti di perdita di accoppiamento:

$$N_i \eta_{ij} = N_j \eta_{ji}.$$

Otteniamo:

$$\omega \begin{bmatrix} N_1 \left(\eta_1 + \sum_{j \neq 1} \eta_{1j} \right) & -N_2 \eta_{21} & \cdots & -N_m \eta_{m1} \\ -N_1 \eta_{12} & N_2 \left(\eta_2 + \sum_{j \neq 2} \eta_{2j} \right) & \cdots & -N_m \eta_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -N_1 \eta_{1m} & -N_2 \eta_{2m} & \cdots & N_m \left(\eta_m + \sum_{j \neq m} \eta_{mj} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1/N_1 \\ E_2/N_2 \\ \vdots \\ E_m/N_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \vdots \\ \Pi_m \end{Bmatrix}$$

Come viene riportato nell'articolo [56] questa formulazione ci permette nuovamente di sottolineare che il flusso di potenza dipende dall'energia modale media e che lo scambio tra sottosistemi avviene da quello con energia modale media più elevata, ma non è detto che sia quello con energia più elevata, verso quello con energia modale media minore. Tale risultato lo avevano individuato anche precedentemente. È giusto ricordare che una delle ipotesi alla base della teoria prevede che all'interno di una banda l'energia sia equamente distribuita tra i modi, in modo tale che con il termine energia modale media indichiamo la quota parte di energia che attribuiamo a un determinato modo del sottosistema.

In secondo luogo la matrice così definita ha la proprietà di essere simmetrica e definita positiva: tutti gli elementi diagonali sono positivi mentre gli extra-diagonali sono positivi o nulli qualora un CLF fosse nullo. Tale fatto assicura che la matrice sia sempre invertibile, cosa che con la precedente formulazione non era scontata. Per di più, nel caso gli accoppiamenti siano deboli, cioè nel caso in cui siano minori rispetto al coefficiente di smorzamento, allora la matrice è anche diagonalmente dominante. Questo comporta che il problema è ben condizionato e relativamente insensibile ai valori dei CLF, che quindi anche se non vengono ricavati con estrema precisione influenzano poco i risultati in termini di energia [56].

Un terzo metodo che viene solitamente utilizzato per risolvere il problema, e che qui citiamo per completezza di trattazione, prevede di moltiplicare ogni colonna del problema iniziale per la densità modale e di dividere le energie per tale quantità.

Definiamo la densità modale come il rapporto tra il numero di modi di vibrare di un sottosistema all'interno di una banda e l'ampiezza di banda stessa:

$$n(\omega) = \frac{N(\Delta\omega)}{\Delta\omega}.$$

Data la definizione appare chiaro anche il significato di tale grandezza. Nel proseguo della trattazione verranno date ampie spiegazioni su come ricavare tale grandezza per i vari sottosistemi e perché essa è tanto importante all'interno dell'analisi statistica dell'energia.

In questo caso il sistema diventa:

$$\omega \begin{bmatrix} n_1 \left(\eta_1 + \sum_{j \neq 1} \eta_{1j} \right) & -n_2 \eta_{21} & \cdots & -n_m \eta_{m1} \\ -n_1 \eta_{12} & n_2 \left(\eta_2 + \sum_{j \neq 2} \eta_{2j} \right) & \cdots & -n_m \eta_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n_1 \eta_{1m} & -n_2 \eta_{2m} & \cdots & n_m \left(\eta_m + \sum_{j \neq m} \eta_{mj} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1/n_1 \\ E_2/n_2 \\ \vdots \\ E_m/n_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \vdots \\ \Pi_m \end{Bmatrix}$$

oppure in forma compatta:

$$[B]\{\Phi\} = \{\Pi\}$$

In cui $\Phi_i = E_i/n_i$ è detto potenziale di potenza modale e valgono le medesime considerazioni fatte precedentemente.

2.3 Analogia termica.

Questo paragrafo non ha grande validità ai fini della trattazione ma permette di tracciare un parallelismo ideale tra l'analisi statistica dell'energia e il meccanismo di trasmissione del calore, rendendo quindi più comprensibile la materia, Woodhouse [12].

Consideriamo due semplici sottosistemi, il primo dei quali viene sollecitato da una forzante esterna. Per quanto abbiamo detto precedentemente, a regime, esso presenterà

una certa energia modale e quindi una certa energia che dipende dalla densità modale. Tale energia modale deriva dall'equilibrio tra la potenza in ingresso e quelle in uscita come energia dissipata, che dipende dal DLF, e trasmessa al secondo sottosistema, che dipende dal CLF.

Dall'altra parte possiamo considerare due sottosistemi in cui il primo è soggetto a una fonte di calore. Tale corpo, a regime, presenterà una certa temperatura che dipende dalla sua capacità termica. Tale temperatura dipende dall'equilibrio tra il flusso termico in ingresso e i flussi termici in uscita verso l'ambiente, che dipende dal coefficiente radiativo, e verso il secondo sottosistema, che dipende dal coefficiente conduttivo di un fittizio elemento di collegamento.

A questo punto appare chiaro che:

- la densità modale corrisponde alla capacità termica dell'elemento, in quanto entrambi indicano la capacità di immagazzinare l'energia;
- il DLF corrisponde al coefficiente radiativo poiché entrambi indicano la predisposizione del sistema a dissipare energia verso l'ambiente;
- infine il CLF corrisponde alla conduttività termica perché entrambe le grandezze indicano quanto facilmente il sistema può scambiare energia con altri sistemi.

2.4 Individuazione dei sottosistemi.

Nel Paragrafo 2.2 abbiamo visto il processo logico con il quale è possibile studiare un sistema complesso mediante la SEA. Nella presente trattazione i sistemi che vengono considerati sono strutture composte da travi e piastre in assenza di atmosfera, in quanto rappresentano la struttura di un satellite nello spazio.

Avevamo detto che il primo passo era suddividere il sistema in sottosistemi senza però chiarire bene cosa intendevamo con tale termine, ma lasciando intendere che ogni singolo elemento, fosse esso una trave piuttosto che una piastra, potesse essere considerato tale.

Lyon [41] definisce un sottosistema come un insieme di modi *similari* che presentano caratteristiche paragonabili di smorzamento, eccitazione e accoppiamento all'interno di ogni componente di un sistema. La definizione certo non è pratica ma, sostanzialmente, significa che, data una struttura semplice composta da travi e piastre, per ogni elemento possiamo individuare 3 sottosistemi:

- sottosistema flessionale legato ai momenti flessionali;
- sottosistema longitudinale legato alle forze di compressione;
- sottosistema a taglio legato alle forze di taglio e torsionali.

Ad esempio di seguito riportiamo la suddivisione di una struttura formata da due piastre collegate mediante una trave a sezione rettangolare, Figura 2.2.

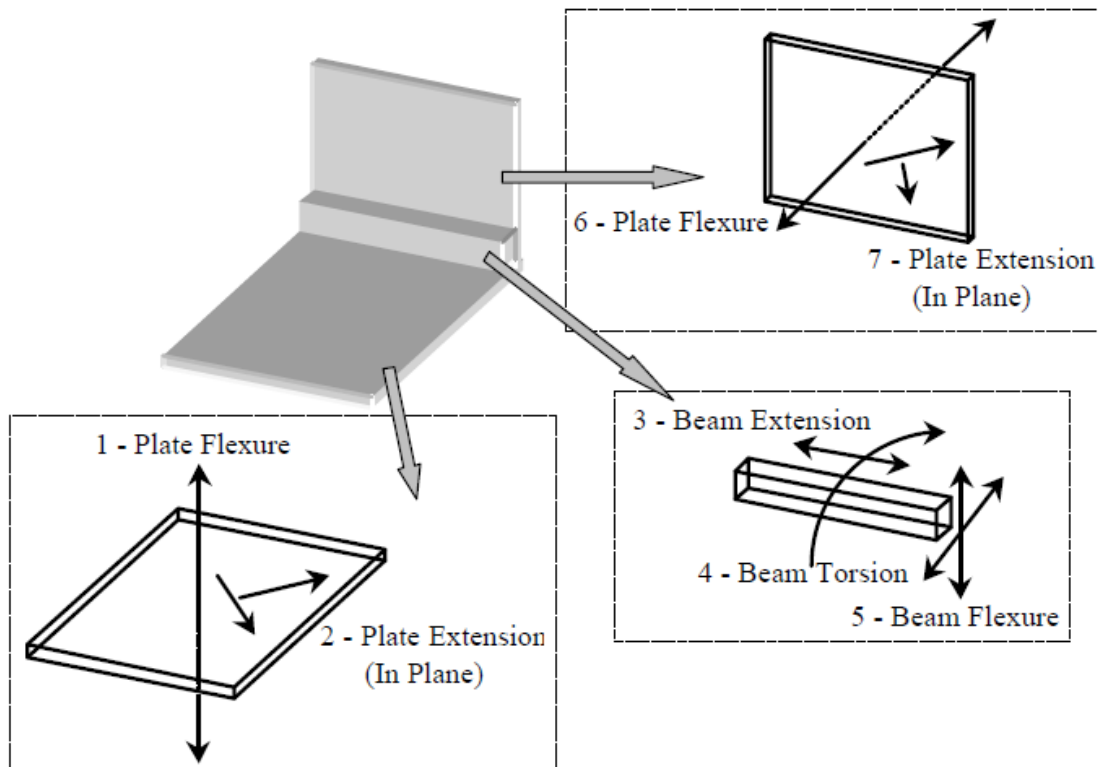


Figura 2.2: Suddivisione di una struttura semplice in sottosistemi (immagine tratta da [56]).

In questo caso per ogni elemento costitutivo della struttura possiamo individuare alcuni sottosistemi che raggruppano tra di loro i diversi modi di vibrare. Si noti che il

sottosistema “in piano” viene solitamente utilizzato per le piastre per riunire insieme i modi di vibrare longitudinale e a taglio poiché presentano un comportamento simile [66].

2.4.1 Individuazione dei sottosistemi in casi complessi.

È chiaro che quando la struttura ha una geometria semplice è facile individuare i singoli elementi e per ognuno in modi di vibrare che individuano un sottosistema. Tale procedimento risulta essere però tutt'altro che banale quando una struttura si complica. Consideriamo ad esempio una shell che presenta una apertura, una zona curvata e un ripiegamento ad angolo saldato per punti. In questo caso individuare gli elementi come compongono la struttura non è certo facile. Un procedimento che possiamo seguire in questo caso viene riportato da Totaro e Guyader [2]. Questi due autori hanno derivato una tecnica che mediante una analisi cluster classifica le funzioni di trasferimento dell'energia in gruppi, che altro non sono che i sottosistemi. Il tutto viene riassunto da un indice detto MIR (Mutual Inertia Ratio): quando esso assume un valore basso significa che i due elementi considerati risultano avere funzioni di trasferimento dell'energia differenti e quindi possono essere considerati due sottosistemi a parte, viceversa quando è elevato. È importante sottolineare che tale tipo di analisi deve essere ripetuta per ogni banda di sollecitazione: elementi simili a frequenze basse possono essere distinti a frequenze più elevate.

Di seguito riportiamo alcuni risultati prodotti da Totaro e Guyader [2] (Figura 2.3 e Figura 2.4).

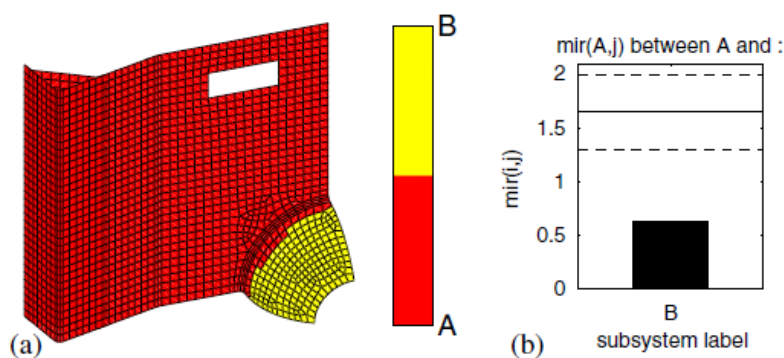


Figura 2.3: Suddivisione in sottosistemi di una shell complessa a 500 Hz e indice MIR relativo (immagine tratta da [2]).

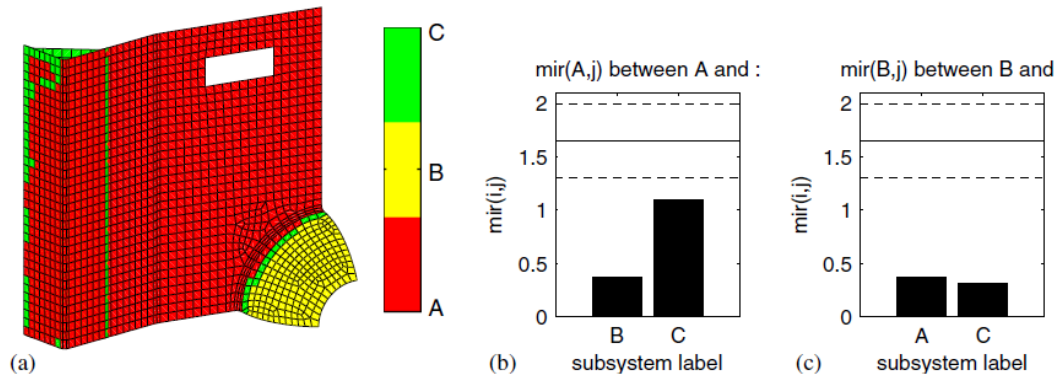


Figura 2.4: Suddivisione in sottosistemi di una shell complessa a 1000 Hz e indice MIR relativo (immagine tratta da [2]).

È chiaro che questa metodologia prevede l'utilizzo di software di simulazione numerica e ai fini del presente lavoro non risulta necessaria in quanto avremo sempre a che fare con strutture semplici in cui potremo evidenziare facilmente i sottosistemi. Qualora invece risulti necessario studiare elementi complessi si consiglia di utilizzare l'approccio presentato [2].

2.4.2 Interazioni tra i sottosistemi.

È importante sottolineare sin da subito che ciascun sottosistema, cioè ciascun gruppo di modi, può scambiare energia con un altro sottosistema, anche se quest'ultimo raggruppa modi di vibrare differenti, purché sia presente un vincolo fisico che impone un moto comune in una determinata posizione [41]. Quanto detto può essere compreso meglio facendo riferimento alla seguente Figura 2.5.

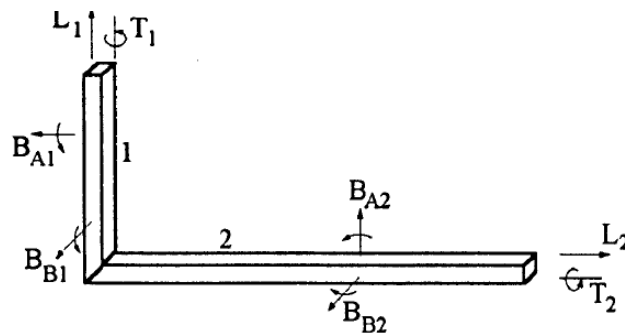


Figura 2.5: Sottosistemi di due travi disposte ad L, flessionale, longitudinale e torsionale (immagine tratta da [41]).

Dalla figura è evidente che tra le due travi deve esserci continuità rotazionale e/o traslazionale a seconda di come tale struttura sia vincolata. Ci interessa notare che nel caso la trave 1 sia soggetta a vibrazioni flessionali, la continuità della struttura implica che la trave 2 presenti vibrazioni flessionali e longitudinali di compressione e estensione. Appare evidente quindi che un moto flessionale possa trasmettere energia anche a un sottosistema longitudinale.

Per di più un sottosistema non trasferisce energia solo a sottosistemi di un altro elemento bensì anche a sottosistemi differenti dello stesso elemento [41,66]. Questo fatto risulta essere più comprensibile utilizzando non un approccio modale ma tramite onde (per comprendere come effettivamente siano approcci duali si veda [41]) che mette in evidenza come ad esempio un'onda flessionale interagendo con una giunzione possa trasmettersi in un altro elemento come onda flessionale, longitudinale o di taglio oppure nello stesso elemento sempre come onda flessionale, longitudinale o di taglio. Per maggiore chiarezza si veda la figura seguente (Figura 2.6).

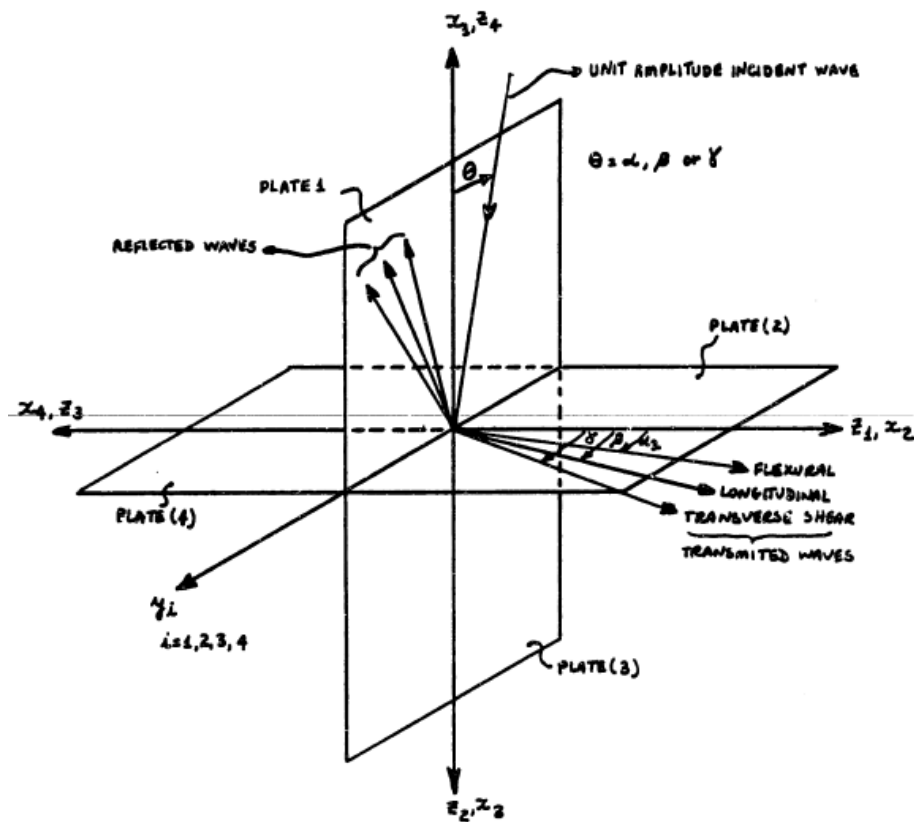


Figura 2.6: Trasmissione e riflessione di un'onda incidente una giunzione di piastre a X (immagine tratta da [66]).

Per quanto abbiamo detto allora considerando ad esempio due piastre collegate da una giunzione l'idealizzazione corretta è quella riportata di seguito in Figura 2.7: in ognuna delle 2 piastre individuiamo 3 sottosistemi: uno flessionale, uno longitudinale e uno di taglio. Ognuno di questi sottosistemi è legato ad un altro, sia che esso appartenga a un altro elemento che allo stesso, tramite i coefficienti di accoppiamento che devono essere opportunamente calcolati.

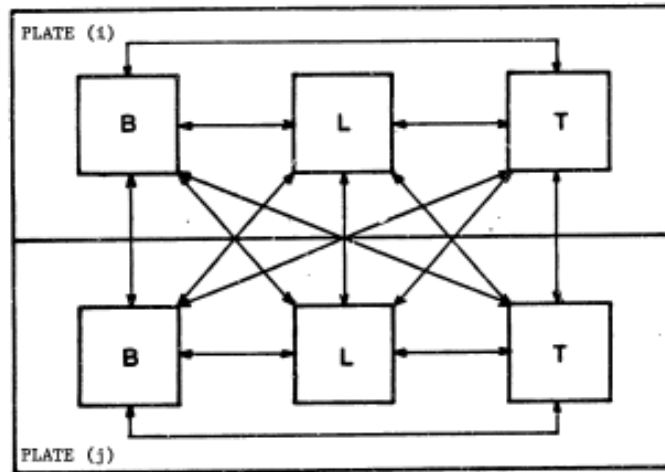


Figura 2.7: Rappresentazione dei sottosistemi di due piastre collegate tramite una giunzione (immagine tratta da [66]).

Da quanto abbiamo visto in questo paragrafo dobbiamo ricordare che:

- ogni sottosistema è una singola entità;
- la variabile che caratterizza il sottosistema è l'energia;
- per ogni sottosistema dobbiamo definire dei parametri: densità modale, coefficiente di perdita per smorzamento, coefficiente di perdita di accoppiamento con ogni sottosistema;
- ogni sottosistema può avere in ingresso una certa potenza a causa di una sollecitazione.

2.4.3 Ulteriore suddivisione di un sottosistema.

Occorre fare una precisazione di fondamentale importanza per quanto riguarda la suddivisione in sottosistemi: fino al momento abbiamo visto che basta suddividere la struttura negli elementi costitutivi e per ognuno di essere individuare quali siano i tipi di

onde che si propagano. Quello che ci chiediamo, e la domanda è lecita, è se sia possibile suddividere un elemento della struttura, ad esempio una piastra, come se fosse formata da un insieme di piastre e individuando quindi per ognuna di esse densità modale, coefficienti di perdita per smorzamento e di accoppiamento e quindi ricavare il sistema di equazioni, le deformazioni e tensioni per ognuna oppure ciò che vogliamo. Appare chiaro che ci piacerebbe utilizzare una tale strategia per ottenere una distribuzione più accurata dell'energia vibrazionale in modo tale da sapere in quale zona la struttura è più sollecitata. In apparenza sembra essere un procedimento giusto dal punto logico. Così non è: ogni elemento non può essere suddiviso in elementi più piccoli se non è presente una giunzione attraverso la quale sia effettivamente presente uno scambio di potenza [41,66]. Quindi due piastre collegate per punti o saldate individuano due elementi, ma ogni piastra non può essere ulteriormente divisa. La motivazione è da ricercare nel valore che assumerebbero i coefficienti di perdita di accoppiamento: nel caso in cui suddividiamo ulteriormente un elemento individuiamo dei sottosistemi tra di loro praticamente uguali che quindi saranno caratterizzati da CLF molto elevati, mentre alcuni potrebbero risultare negativi, soprattutto se calcolati mediante la tecnica numerica del Power Injection Method (PIM) [2]. Di seguito riportiamo un esempio tratto dall'articolo di Totaro e Guyader [2].

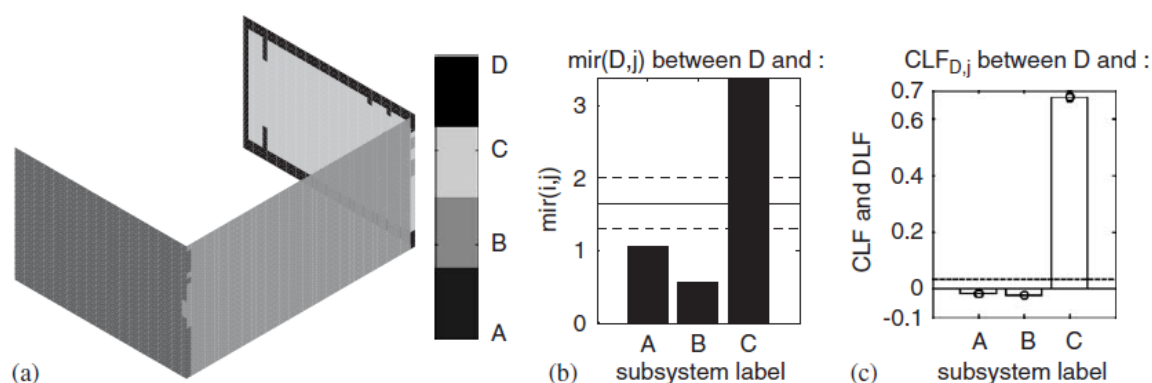


Figura 2.8: (a) suddivisione di 3 piastre in 4 sottosistemi mediante analisi cluster, (b) indice MIR tra il sottosistema D e i restanti, (c) CLF tra il sottosistema D e i restanti (immagine tratta da [2]).

In questo esempio gli autori hanno cercato di dividere il sistema formato da piastre in 4 sottosistemi mediante l'analisi cluster: essa ha individuato che un eventuale quarto sottosistema (i primi 3 sono chiaramente le tre piastre) potrebbe essere formato dal

bordo della piastra C. Intuitivamente capiamo già che tale elemento si comporterà in modo molto simile alla piastra di origine e tale fatto viene sottolineato da un indice MIR particolarmente elevato tra C e D (sopra la soglia di $MIR = 1.5$ che indica legami forti tra i sottosistemi). Considerando i CLF in Figura 2.8(c) si vede come il CLF tra C e D sia elevatissimo e addirittura negativo tra A e B. E' chiaro che quello che pensavamo essere un metodo per ottenere una maggiore accuratezza della risposta del sistema, proprio come se stessimo raffinando una mesh, in realtà ci porta a commettere errori importanti. Dal punto di vista teorico la motivazione che impedisce di applicare una tale strategia è da ricercare nella forza dell'accoppiamento che si viene a creare [66]: come si vedrà di seguito l'analisi SEA va bene nel momento in cui l'accoppiamento tra due sottosistemi è debole o nel caso esso non sia troppo forte gli errori sono contenuti in 1-2 dB. Intuitivamente è chiaro che se suddividiamo un elemento in parti che non sono collegate da una giunzione, la quale darebbe caratteristiche di debolezza, allora l'accoppiamento è forte e le ipotesi di base non sono totalmente soddisfatte.

2.4.4 Modellazioni diverse di un elemento.

Abbiamo definito un sottosistema come un gruppo di modi simili che caratterizzano un qualsiasi componente fisico di un sistema e per quanto abbiamo detto fino ad adesso possono esserci più gruppi di modi associati ad ognuno. Ciò a cui dobbiamo fare attenzione è che non bisogna suddividere il sistema in componenti che cambiano i tipi di modi presenti nel sistema. Quanto detto po' essere più chiaro considerando l'esempio di una trave a I rappresentata in Figura 2.9. Alle basse frequenze tale trave presenta un modo di vibrare longitudinale, due modi flessionali e uno torsionale che lasciano invariata la sezione trasversale. Se invece si considerano frequenze alte la trave a vibrare in modo simile a una piastra, presentando quindi deformazioni flessionali dell'anima e delle flange. È chiaro che a questo punto si tratterà di scegliere in quale modo rappresentare la trave. Abbiamo 2 possibilità:

- decidiamo che la trave è formata da due sottosistemi, uno che rappresenta i modi tipici di una trave e l'altro quelli delle piastre [41];

- attraverso l'analisi della densità modale decidiamo se si comporta come una trave o come una piastra [66]. Intuitivamente possiamo dire che se la trave ha una sezione contenuta ed è snella essa si comporterà principalmente da trave, viceversa si comporterà principalmente come se formata da piastre.

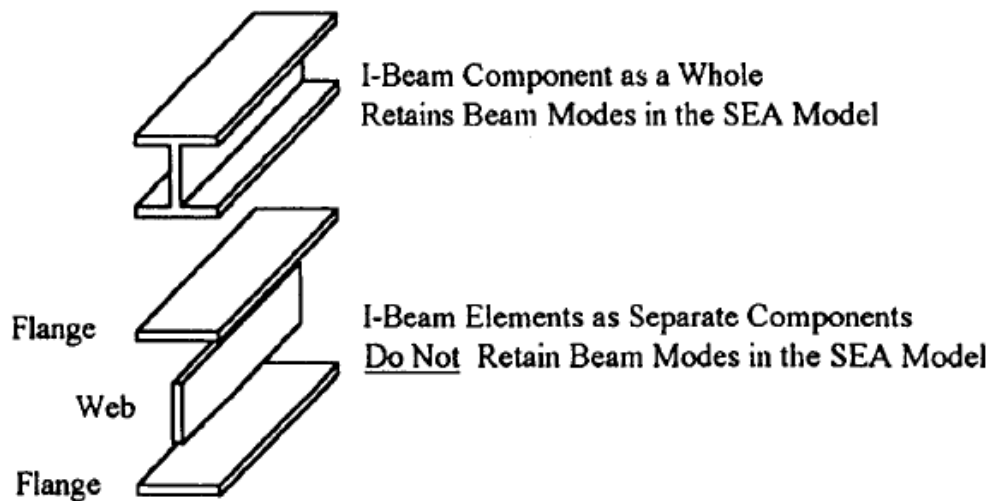


Figura 2.9: Modellazioni diverse di una trave a I nella SEA (immagine tratta da [41]).

È chiaro quindi che l'utilizzatore deve compiere delle scelte importanti per modellare correttamente il sistema considerato. Successivamente quando parleremo della densità modale torneremo su questo argomento e vedremo come possiamo farci guidare dalla densità modale in tale scelta apportando anche un esempio (Paragrafo 3.7).

2.4.5 Variabilità dei parametri modali nella divisione in sottosistemi.

Precedentemente abbiamo sottolineato che un sottosistema è composto da modi con caratteristiche simili in termini di smorzamento, risposta alle sollecitazioni esterne e accoppiamento. Questa definizione è abbastanza debole in quanto non specifica bene quali debbano essere i limiti per considerare tale similitudine. Lo stesso Lyon [41] dice che i limiti sulla variabilità dei parametri modali all'interno di un gruppo di modi non sono definiti rigorosamente. Per quanto riguarda l'incertezza sui coefficienti di accoppiamento possiamo tenerne conto tramite la varianza (si veda Paragrafo 3.11) mentre poco possiamo dire per il coefficiente di smorzamento, che di per sé è già complesso da

calcolare e spesso per averne una stima corretta bisogna ricorrere a procedure sperimentali (come vedremo nel Capitolo 4).

Quello che possiamo dire è che [41]:

- se il fattore di smorzamento per i modi individuali di un gruppo è minore dei CLF verso altri sottosistemi allora la variazione dei DLF è insignificante;
- nel caso contrario una variazione del DLF minore in un fattore 3 può essere considerata accettabile mentre se è superiore a un fattore di 10 dobbiamo dividere i modi in 2 sottosistemi differenti.

2.4.6 Sottosistemi per elementi in composito, piastre con irrigidimenti e sandwich.

Fino a questo punto abbiamo visto come idealizzare strutture formate da piastre e travi in materiali omogenei e isotropi. Rimangono da analizzare tre categorie importanti di materiali che trovano numerose applicazioni in campo aerospaziale:

- materiali compositi;
- piastre con irrigidimenti;
- pannelli sandwich.

Per i materiali compositi esistono molte prove sperimentali che mettono in evidenza come questa categoria si comporti come una piastra ortotropa indipendentemente dall'angolo tra le lamine alle alte frequenze, mentre ciò non è così vero anche alle basse [20]. Ma tenendo conto dello scopo della presente trattazione quanto detto risulta essere accettabile (i risultati di tali prove sono riportati al Paragrafo 3.5 e al Paragrafo 5.11).

D'altra parte la modellazione delle piastre rinforzate unidirezionalmente e bidirezionalmente è molto complessa e da quanto si evince dalla letteratura non ancora concluso. Per quanto riguarda le piastre unidirezionali possiamo seguire quattro differenti approcci [38]:

- Tra un irrigidimento e l'altro identifichiamo una piastra dove gli irrigidimenti fungono da elemento di accoppiamento: è un metodo valido qualora la distanza tra una trave e l'altra sia sufficiente (come viene fatto nell'articolo [40]), altrimenti dobbiamo ritenerlo non adeguato perché creiamo una serie di sottosistemi

inutilmente grande e non si crea quella funzione di banda passante e non passante delle lunghezze d'onda imposta dalla presenza degli irrigidimenti (per ulteriori dettagli si veda l'articolo [38]);

- Possiamo rappresentare la piastra rinforzata come un materiale ortotropo spalmando l'effetto delle nervature sulla direzione in cui agiscono, anche se così non teniamo conto della periodicità delle travi. Langley e Mace, come viene riportato nell'articolo [38], hanno trovato che possiamo ricorrere a questa semplificazione solo nel caso in cui gli irrigidimenti siano ravvicinati, e più precisamente se la distanza tra le travi è minore di un terzo della lunghezza d'onda, dove quest'ultima può essere calcolata tramite la formula $\lambda = 2\pi/k$ in cui k è il numero d'onda (nel Paragrafo 5.9 vedremo come calcolare tale grandezza);
- Dividiamo la piastra irrigidita in 2 sottosistemi (Figura 2.10): un sottosistema che rappresenta le onde che si trasmettono perpendicolarmente alle travi e che incorpora gli effetti periodici, l'altra descrive le onde che si propagano parallelamente alla trave. È da sottolineare che ognuno dei due sottosistemi incorpora caratteristiche sia della piastra e della trave [38]. Questo metodo appare promettente ma mancano del tutto le formule per individuare densità modali, DLF e CLF;
- Metodi che permettono di calcolare i parametri a partire da analisi FEM.

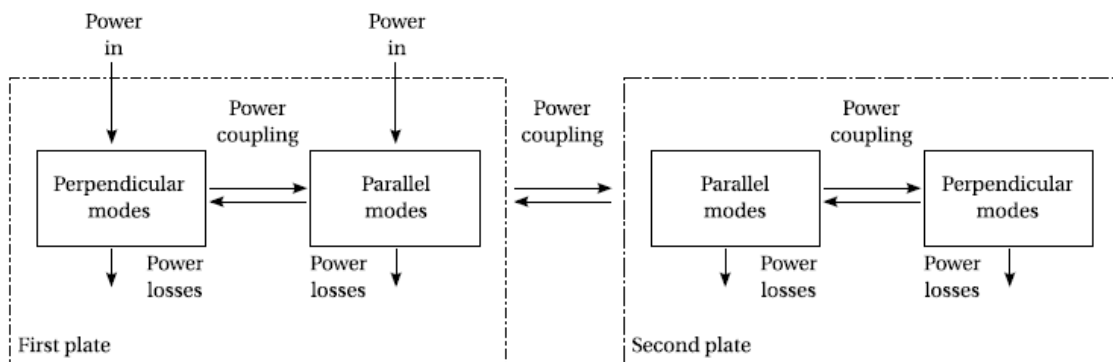


Figura 2.10: Modellazione di una piastra irrigidita mediante la tecnica proposta dall'articolo [38] (immagine tratta da [38]).

Per quanto abbiamo appena visto, e tenendo sempre presente lo scopo di questa trattazione, modelleremo qualora possibile le piastre irrigidite come piastre collegate da giunzioni formate da travi come fatto nell'articolo [40], altrimenti le considereremo come

semplici elementi ortotropi, in quanto gli irrigidimenti introducono una rigidità maggiore nella direzione degli irrigidimenti stessi.

Infine il discorso è ancora più complesso per quanto riguarda elementi come strutture isogrid o pannelli sandwich. La trattazione teorico-matematica per questi elementi è del tutto assente e vengono suggeriti solo due metodi di analisi:

- Si modella questi elementi considerando una piastra omogenea equivalente le cui proprietà sono da stabilire in modo tale che presenti la stessa velocità di gruppo delle onde dell'elemento originario [47];
- Mediante analisi FEM.

2.5 Calcolo delle deformazioni e delle tensioni.

L'obiettivo principale dell'analisi statistica dell'energia è la determinazione dell'energia vibrazionale di ogni elemento strutturale. A questo punto è necessario sottolineare che a partire da tale grandezza è possibile determinare anche le deformazioni medie e le tensioni medie per ogni sottosistema. Dalla letteratura però non sono emersi molti risultati in tale direzione e solo Lyon [41] offre delle formulazioni per quanto riguarda le deformazioni e le tensioni che si generano nelle piastre nel caso esse siano caratterizzate da energie vibrazionali flessionali o longitudinali non nulle. La discussione seguente si limita, quindi, a questi casi.

Considerando una piastra omogenea di spessore h sollecitata flessionalmente e supponendo nota l'energia del sottosistema flessionale di un elemento strutturale $E_{tot,B}$, è possibile ricavare la velocità media al quadrato flessionale mediata nel tempo e nello spazio occupato dal sottosistema:

$$\langle v^2 \rangle_B = \frac{E_{tot,B}}{M}$$

dove M rappresenta la massa del sottosistema.

Dalla meccanica dei solidi è noto che la deformazione flessionale può essere espressa in funzione della deformazione massima, che indichiamo con ε_{max} , tramite la formula:

$$\varepsilon(z) = \frac{2z}{h} \varepsilon_{max,B}.$$

Imponendo l'uguaglianza tra la densità di energia potenziale:

$$PE \text{ densità} = \frac{1}{2} \int E_y \varepsilon^2(z) dz = \frac{1}{2} \int E_y \frac{4z^2}{h^2} \varepsilon_{max,B}^2 dz = \frac{2\kappa^2}{h} E_y \langle \varepsilon_{max}^2 \rangle_B$$

(dove con E_y indichiamo il modulo di Young del materiale, con κ il raggio giratore pari a $h/\sqrt{12}$ e con $\langle \varepsilon_{max}^2 \rangle$ il valore medio al quadrato della deformazione massima) e la densità di energia cinetica:

$$KE \text{ densità} = \frac{1}{2} \rho h \langle v^2 \rangle_B$$

possiamo ottenere la deformazione media al quadrato massima:

$$PE \text{ densità} = KE \text{ densità}$$

$$\frac{2\kappa^2}{h} E_y \langle \varepsilon_{max}^2 \rangle_B = \frac{1}{2} \rho h \langle v^2 \rangle_B$$

e quindi:

$$\langle \varepsilon_{max}^2 \rangle_B = \frac{h^2}{4\kappa^2} \frac{\rho}{E_y} \langle v^2 \rangle_B = \frac{h^2}{4\kappa^2} \frac{\langle v^2 \rangle_B}{c_L^2}$$

in cui $c_L = \sqrt{E/\rho}$ è la velocità delle onde longitudinali.

A questo punto possiamo ricavare anche la tensione media al quadrato massima che interessa l'elemento tramite la legge di Hooke:

$$\langle \sigma_{max}^2 \rangle_B = E_y^2 \langle \varepsilon_{max}^2 \rangle_B$$

dove E_y è sempre il modulo di Young.

Nel caso di sollecitazione longitudinale invece, seguendo sempre quanto riportato da Lyon [41], abbiamo che la velocità media al quadrato è data dal rapporto tra l'energia longitudinale dell'elemento e la massa del sottosistema:

$$\langle v^2 \rangle_L = \frac{E_{tot,L}}{M}.$$

Tenendo conto che in questo caso $\varepsilon(z) = cost = \varepsilon_L$ e sempre applicando l'uguaglianza tra la densità di energia potenziale e la densità di energia cinetica, possiamo ottenere la deformazione media al quadrato longitudinale:

$$PE \text{ densità} = KE \text{ densità}$$

$$\frac{1}{2} E_y h \langle \varepsilon^2 \rangle_L = \frac{1}{2} \rho h \langle v^2 \rangle_L$$

e quindi:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_L = \frac{\langle v^2 \rangle_L}{c_L^2}$$

Infine la tensione media al quadrato è data da:

$$\langle \sigma^2 \rangle_L = E_y \langle \varepsilon^2 \rangle_L$$

dove i simboli utilizzati hanno lo stesso significato dei precedenti.

Da quanto appena visto quindi una volta che si è a conoscenza del valore dell'energia del sottosistema possiamo facilmente ricavare le tensioni che agiscono in esso.

2.6 Suddivisione in bande dello spettro in frequenza.

Abbiamo visto nel Paragrafo 2.2 che l'analisi SEA è un'analisi che prevede di dividere il dominio delle frequenze in bande e per ognuna di esse dobbiamo determinare densità modale, DLF, CLF, potenza in ingresso e costruire quindi il sistema lineare per ricavare le energie associate ad ogni sottosistema.

Di seguito diamo delle precisazioni su come dividere lo spettro in bande opportune.

In generale un rumore è un segnale caratterizzato da una distribuzione continua in frequenza. Tale distribuzione per i nostri fini può essere discretizzata dividendo il dominio delle frequenze in bande e attribuendo alla frequenza centrale della banda un'energia

equivalente a quella prodotta dalla banda (il procedimento è analogo a quello che valuta un integrale in modo discreto).

Nel campo dell'acustica e dell'analisi SEA si preferisce utilizzare bande di ampiezza crescente ma caratterizzate da ampiezza percentuale costante. Praticamente ogni banda è come se fosse un filtro ideale caratterizzato da una frequenza di taglio inferiore f_i e una superiore f_s . Poiché l'ampiezza percentuale deve essere uguale tra le bande significa che la frequenza superiore deve essere sempre lo stesso multiplo della frequenza inferiore. Così possiamo dividere lo spettro in frequenza in ottave se:

$$f_s = 2f_i$$

E quindi:

$$f_c = \sqrt{f_i f_s} = \sqrt{2}f_i$$

$$\Delta f = 2f_i - f_i = f_i$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{f_i}{\sqrt{2}f_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 = \text{cost}$$

Suddividendo uno spettro in ottave quindi la frequenza di taglio inferiore di una banda raddoppia rispetto alla corrispondente nella banda precedente e inoltre sia le frequenze centrali che le ampiezze di banda raddoppiano passando da una banda alla successiva. L'ampiezza di ogni banda è pari al 70,7% della frequenza nominale centrale della banda.

È chiaro che per ottenere risultati più precisi si può raffinare suddivisione in bande e quindi definiamo il terzo di ottava come quella suddivisione che prevede che:

$$f_s = \sqrt[3]{2}f_i$$

E quindi

$$f_c = \sqrt[3]{f_i f_s} = \sqrt[3]{2}f_i$$

$$\Delta f = 2f_i - f_i = f_i(\sqrt[3]{2} - 1)$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{f_i(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt[6]{2}f_i} = \frac{(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt[6]{2}} = 0.232 = \text{cost.}$$

La suddivisione in terzi di ottava prevede quindi che l'ampiezza di ogni banda sia pari al 23.2% della frequenza centrale. Tale suddivisione viene ritenuta sufficiente per una buona discretizzazione del campo delle frequenze [41,44]. Volendo possiamo ricorrere anche alla suddivisione in dodicesimi o ventiquattresimi di ottava, dove in generale possiamo dire che l'n-esimo di ottava è pari a:

$$f_s = \sqrt[n]{2}f_i.$$

Di seguito riportiamo la Tabella 2.1 in cui vengono riportate le frequenze centrali e le frequenze di taglio superiore e inferiore del campo delle frequenze diviso sia in ottave che in terzi di ottava. Come appare evidente la suddivisione in ottave discretizza in modo più accurato il dominio.

bande	ottava			1/3 d'ottava		
	taglio inf.	centrale	taglio sup.	taglio inf.	centrale	taglio sup.
frequenza (Hz)	44	63	88	56.2	63	70.8
				70.8	80	89.1
				89.1	100	112
	88	125	177	112	125	141
				141	160	178
				178	200	224
	177	250	355	224	250	282
				282	315	355
				355	400	447
	355	500	710	447	500	562
				562	630	708
				708	800	891
	710	1000	1420	891	1000	1122
				1122	1250	1413
				1413	1600	1778
	1420	2000	2840	1778	2000	2239
				2239	2500	2818
				2818	3150	3548
	2840	4000	5680	3548	4000	4467
				4467	5000	5623
				5623	6300	7079
	5680	8000	11360	7079	8000	8913
				8913	10000	11220
				11220	12500	14130

Tabella 2.1: Frequenze centrali e frequenze di taglio superiore e inferiore del campo delle frequenze diviso in ottave e in terzi di ottave.

2.7 Velocità di fase e velocità di gruppo.

In questo paragrafo approfondiamo un argomento che risulterà essere utile a partire dal prossimo capitolo per il calcolo di molte grandezze (si veda ad esempio la Tabella 3.1). Si è visto che la variabile centrale dell'analisi SEA è l'energia dei sottosistemi. Tale energia si propaga all'interno dell'elemento strutturale mediante onde vibrazionali.

Considerando un'onda che si propaga in direzione x abbiamo che la legge del moto è espressa dalla formula:

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$$

dove A_0 indica l'ampiezza dell'onda, k è il numero d'onda (si veda Paragrafo 5.9 per come calcolarlo), ω è la pulsazione dell'onda, x è la coordinata spaziale e t la coordinata temporale. Volendo x può essere anche il vettore delle coordinate spaziali, ad esempio $\bar{x} = (x, y, z)$ e k il vettore dei numeri d'onda associati alle coordinate spaziali. Possiamo esprimere anche il numero d'onda come:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

con λ la lunghezza d'onda. La pulsazione invece è esprimibile come:

$$\omega = 2\pi f$$

dove f è la frequenza.

Si definisce velocità di fase v_f il rapporto tra la pulsazione e il numero d'onda:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda f$$

mentre la velocità di gruppo v_{gr} è il rapporto infinitesimale tra la pulsazione e il numero d'onda:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = -\lambda^2 \frac{df}{d\lambda}$$

Quest'ultima grandezza assume importanza nell'analisi SEA poiché l'energia si propaga con la velocità di gruppo.

Nella Tabella 3.1 sono riportate le velocità di gruppo, indicate con il termine velocità d'onda, divise per tipologia di onda e che interessano i diversi elementi strutturali.

Capitolo 3 : DENSITA' MODALE

3.1 Introduzione.

Precedentemente nel Paragrafo 2.2.1 abbiamo introdotto la definizione di densità modale senza soffermarci più di tanto sul suo significato. In questo paragrafo spiegheremo perché essa è una grandezza fondamentale all'interno dell'analisi statistica dell'energia e vedremo come calcolarla.

La densità modale rappresenta il numero di modi risonanti disponibili a ricevere e immagazzinare l'energia vibrazionale in un sottosistema [41] e è definita come il numero di modi per unità di frequenza angolare:

$$n(\omega) := \frac{dN(\omega)}{d\omega}.$$

Nella pratica dell'analisi statistica dell'energia è sufficiente conoscere il rapporto tra i modi all'interno di una banda e la banda stessa:

$$n(\omega) = \frac{N(\Delta\omega)}{\Delta\omega}$$

dove ricordiamo che il campo delle frequenze viene solitamente diviso in terzi di ottava.

Analogamente possiamo definire la densità modale in funzione della frequenza:

$$n(f) = n(\omega) \frac{d\omega}{df} = 2\pi n(\omega)$$

oppure in funzione del numero d'onda:

$$n(k) = n(\omega) \frac{d\omega}{dk} = n(\omega) c_g$$

in cui c_g rappresenta la velocità di gruppo delle onde.

A partire dalla densità modale possiamo definire anche la divisione media in frequenza:

$$\overline{\delta f} = \frac{1}{2\pi n(\omega)}$$

che rappresenta la separazione media in frequenza tra due modi di vibrare successivi. Quando tale valore è piccolo significa che in quella banda abbiamo molti modi di vibrare che possono ricevere e immagazzinare l'energia.

Per calcolare la densità modale abbiamo tre differenti approcci:

- Formule analitiche;
- Procedure sperimentali;
- Simulazioni numeriche mediante software agli elementi finiti.

3.2 Sovrapposizione modale.

La sovrapposizione modale è un parametro strettamente legato alla densità modale ed è definito come il rapporto tra la larghezza di banda modale, che è la larghezza di banda compresa tra i punti di metà potenza e per $\eta_d < 0.3$ vale $\omega\eta_d$, e la separazione media in frequenza $\overline{\delta f}$ moltiplicata per 2π :

$$\text{sovrapposizione modale} = \frac{\omega\eta_d}{2\pi\overline{\delta f}} = \omega\eta_d n(\omega).$$

In altri casi piuttosto di riferirsi alla larghezza di banda modale ci si riferisce alla banda effettiva, definita nel Paragrafo 1.2, che è pari a $\pi/2$ volte la banda modale e in questo caso si parla di fattore di sovrapposizione modale oppure Modal Overlap Factor (MOF). Ovviamente la natura e il significato dei coefficienti è lo stesso: confrontano quanto grande sia il rapporto tra la banda risonante del sistema rispetto alla separazione tra un modo e l'altro.

3.3 Validità dell'analisi SEA e densità modale.

Nel Capitolo 1 abbiamo visto che piuttosto di considerare l'intera risposta di un modo ad una forzante è possibile definire una banda equivalente caratterizzata da ammettenza

massima tale per cui la risposta del sistema sia pressoché identica. Supponiamo adesso che una forzante con una certa banda in frequenza agisca su un sistema continuo in cui tutti i modi siano caratterizzati dalla loro banda equivalente. È chiaro che essendo tale sistema continuo qualsiasi sia la banda della sollecitazione possiamo pensare che ci siano dei modi che vengono eccitati da tale evento mentre gli altri rimangono in quiete. Ma questo discorso è vero fintantoché la banda equivalente è più larga della separazione media tra due modi ovvero fintantoché il Modal Overlap Factor è maggiore di uno. Viceversa, se ciò non è vero, significa che saranno presenti delle bande in cui, per come è stato idealizzato il sistema, nessun modo risponde alla forzante e quindi l'intera struttura rimarrebbe in quiete, fatto lontano dalla realtà. Per queste ragioni la densità modale e il Modal Overlap Factor vengono ritenuti degli indici che garantiscono l'accuratezza dei risultati dell'analisi statistica dell'energia.

Una regola pratica che deduciamo dal discorso precedente è che possiamo considerare accurata l'analisi statistica dell'energia quando:

$$\text{Modal Overlap Factor} \geq 1.$$

Va da sé che tale condizione si riflette in un vincolo sul valore della densità modale essendo il Modal Overlap Factor definito a partire da essa.

A questo punto dobbiamo fare un'osservazione importante: anche se dobbiamo ancora definire le formule della densità modale possiamo capire che il Modal Overlap Factor soddisferà tale requisito soprattutto quando le frequenze saranno alte (tipicamente a partire dai 500 Hz). Analizzando la definizione di tale parametro si vede che esso dipende dalla frequenza centrale della banda che stiamo analizzando. Tenendo quindi conto che suddividendo il campo delle frequenze in ottave abbiamo che la frequenza centrale raddoppia ad ogni banda, è facile capire come il Modal Overlap Factor cresca velocemente con la frequenza. Tale affermazione spiega quindi perché i risultati della SEA siano poco attendibili alle basse frequenze e maggiormente corretti alle alte. Molti autori hanno cercato di definire un limite inferiore di validità dell'analisi senza però giungere a delle conclusioni teoriche univoche per tutti i casi. Come si legge nell'articolo [66] fondamentale è il giudizio dell'utilizzatore dell'analisi: egli deve giudicare tramite il Modal

Overlap Factor, o il numero di modi a disposizione, se l'analisi può dare risultati attendibili e affidabili.

3.4 Calcolo della densità modale.

Precedentemente abbiamo visto che la generica struttura deve essere suddivisa in sottosistemi e per ognuno di essi deve essere calcolata la densità modale o analogamente la separazione media in frequenza tra i modi di vibrare. In generale possiamo distinguere queste grandezze per sistemi mono-dimensionali, bi-dimensionali e tri-dimensionali, dove però questi ultimi sono interessanti solo nel caso dell'analisi acustica. Inoltre per gli elementi mono-dimensionali possiamo avere sottosistemi flessionali, longitudinali e torsionali, mentre per quelli bi-dimensionali possiamo avere modi flessionali, longitudinali e associati a taglio. Per ognuno di questi sottosistemi sono state sviluppate delle formule che, indipendentemente dalle condizioni di vincolo, stabiliscono la densità modale e la separazione media in frequenza (si veda Lyon [41]).

Per valutare la densità modale è inoltre necessario conoscere la velocità di gruppo, cioè la velocità con cui si propaga l'energia, per ciascun tipo di modo.

Di seguito riportiamo la Tabella 3.1 nella quale vengono riportate le formule per la densità modale e la velocità di gruppo per le travi e le piastre. È bene esprimere le ipotesi secondo cui sono valide queste formule:

- Le travi devono presentare una lunghezza molto maggiore della sezione trasversale e le proprietà devono essere omogenee;
- Le travi sollecitate a flessione devono avere lunghezze d'onda molto maggiori dello spessore altrimenti le onde si propagano anche attraverso questa dimensione, ovvero $f \ll \frac{c_L}{4\pi\kappa}$ dove c_L è la velocità delle onde longitudinali e κ è il raggio giratore;
- Le piastre devono essere sottili rispetto alla lunghezza d'onda e omogenee;
- Le piastre sollecitate a flessione devono avere lunghezze d'onda molto maggiori dello spessore altrimenti le onde si propagano anche attraverso questa

dimensione, ovvero $f \ll \frac{c_L}{4\pi\kappa}$ dove c_L è la velocità delle onde longitudinali e κ è il raggio giratore;

System	Modal Density, n	Wave Speed
Beam, In plane Extension	$\frac{L}{\pi c_L}$	$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
Beam, Torsion	$\frac{L}{\pi c_T}$	$c_T = \sqrt{\frac{JG}{\rho I_p}}$
Beam, Flexure	$\frac{L}{2\pi\sqrt{\omega\kappa c_L}} = \frac{L}{2\pi c_B}$	$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_B = \sqrt{\omega\kappa c_L}$
Beam, Flexure with Shear Effect	$\frac{L \left(\frac{1}{c_B^2} + \frac{2}{c_\gamma^2} \right)}{2\pi \sqrt{\frac{1}{c_B^2} + \frac{1}{c_\gamma^2}}}$	$c_B = \sqrt{\omega\kappa c_L}, \quad c_\gamma = \sqrt{\frac{G}{\rho\gamma}}$
Plate, In Plane Extension	$\frac{\omega A}{2\pi\kappa c_L^2}$	$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$
Plate, In Plane Shear	$\frac{\omega A}{2\pi\kappa c_s^2}$	$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$
Plate, Flexure	$\frac{A}{4\pi\kappa c_L}$	$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$
Plate, Flexure with Shear Effect	$\frac{\omega A \left(\frac{1}{c_B^2} + \frac{2}{c_\gamma^2} \right)}{4\pi\kappa c_L}$	$c_B = \sqrt{\omega\kappa c_L}, \quad c_\gamma = \sqrt{\frac{G}{\rho\gamma}}$

Tabella 3.1: Densità modali e velocità di gruppo di sistemi semplici (immagine tratta da [56]).

Nella Tabella 3.1 abbiamo che: L è la lunghezza della trave, c_L è la velocità delle onde longitudinali, E è il modulo elastico, ρ è la densità, c_T è la velocità delle onde torsionali, J è la rigidezza al momento torsionale, G è il modulo di taglio, I_p è il momento polare di inerzia, ω è la frequenza angolare, κ è il raggio giratore, c_b è la velocità delle onde

flessionali, c_y è la velocità delle onde di taglio, A è l'area superficiale della piastra and ν è il coefficiente di Poisson.

3.5 Calcolo della densità modale per elementi in materiale composito.

Come nel caso della discussione dei sottosistemi dobbiamo dedicare un approfondimento ai materiali compositi, i quali non possono essere rappresentati dalle formule precedenti in quanto esse valgono solo per materiali che possiamo ritenere teoricamente omogenei. Nel caso di questi materiali sorge inoltre un secondo problema oltre alla ortotropia: le proprietà meccaniche di un laminato dipendono molto anche dalla successione con cui vengono disposte le singole lamine, oltre che chiaramente dalle proprietà delle fibre e della matrice. Se da una parte tenere conto di quest'ultime è semplice in quanto si rispecchiano in valori calcolabili delle velocità di gruppo, è giusto chiedersi se è necessario tenere conto della successione angolare delle lamine e nel caso come calcolare i parametri come la densità modale o il Modal Overlap Factor.

Physical properties	Plate 1	Plate 2
Numerical model		
Number of ply	4	6
Stacking sequence	$[-\theta, \theta, \theta, -\theta]$	$[\theta, -\theta, \theta, \theta, -\theta, \theta]$
Orientation angles	$\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$	$\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$
Plate size	$a = 1 \text{ m}, b = 1 \text{ m}$	$a = 1 \text{ m}, b = 0.75 \text{ m}$
Total thicknesses	$h = 4 \times 10^{-3} \text{ m}$	$h = 6 \times 10^{-3} \text{ m}$
Practical model		
Number of ply	8	8
Orientation angles	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 90^\circ$
Plate size	$a = 0.57 \text{ m}, b = 0.4 \text{ m}$	$a = 0.46 \text{ m}, b = 0.4 \text{ m}$
Total thicknesses	$h = 2.2 \times 10^{-3} \text{ m}$	$h = 2.2 \times 10^{-3} \text{ m}$
Material properties	Plate 1	Plate 2
Numerical and practical models		
Elasticity modulus of plies	$E_x = 39 \times 10^9 \text{ N/m}$ $E_y = 8.6 \times 10^9 \text{ N/m}$	$E_x = 39 \times 10^9 \text{ N/m}$ $E_y = 8.6 \times 10^9 \text{ N/m}$
Poisson's ratios of plies	$\nu_{xy} = 0.28$ $\nu_{yx} = 0.0617$	$\nu_{xy} = 0.28$ $\nu_{yx} = 0.0617$
Average density	$\rho = 2100 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 2100 \text{ kg/m}^3$

Tabella 3.2: Proprietà fisiche e materiali dei compositi studiati [20] (immagine tratta da [20]).

Recenti studi sperimentali condotti dal Seçgin [20] hanno messo in evidenza come la disposizione delle lamine non influenzi il comportamento degli elementi soprattutto alle alte frequenze, mentre alle frequenze basse (sotto i 500 Hz) l'effetto della direzionalità è più importante. Nella Tabella 3.2 sono state riassunte le proprietà dei compositi studiati e di seguito si riportano due figure che mostrano i risultati sperimentali ottenuti in termini di MOF (Figura 3.1).

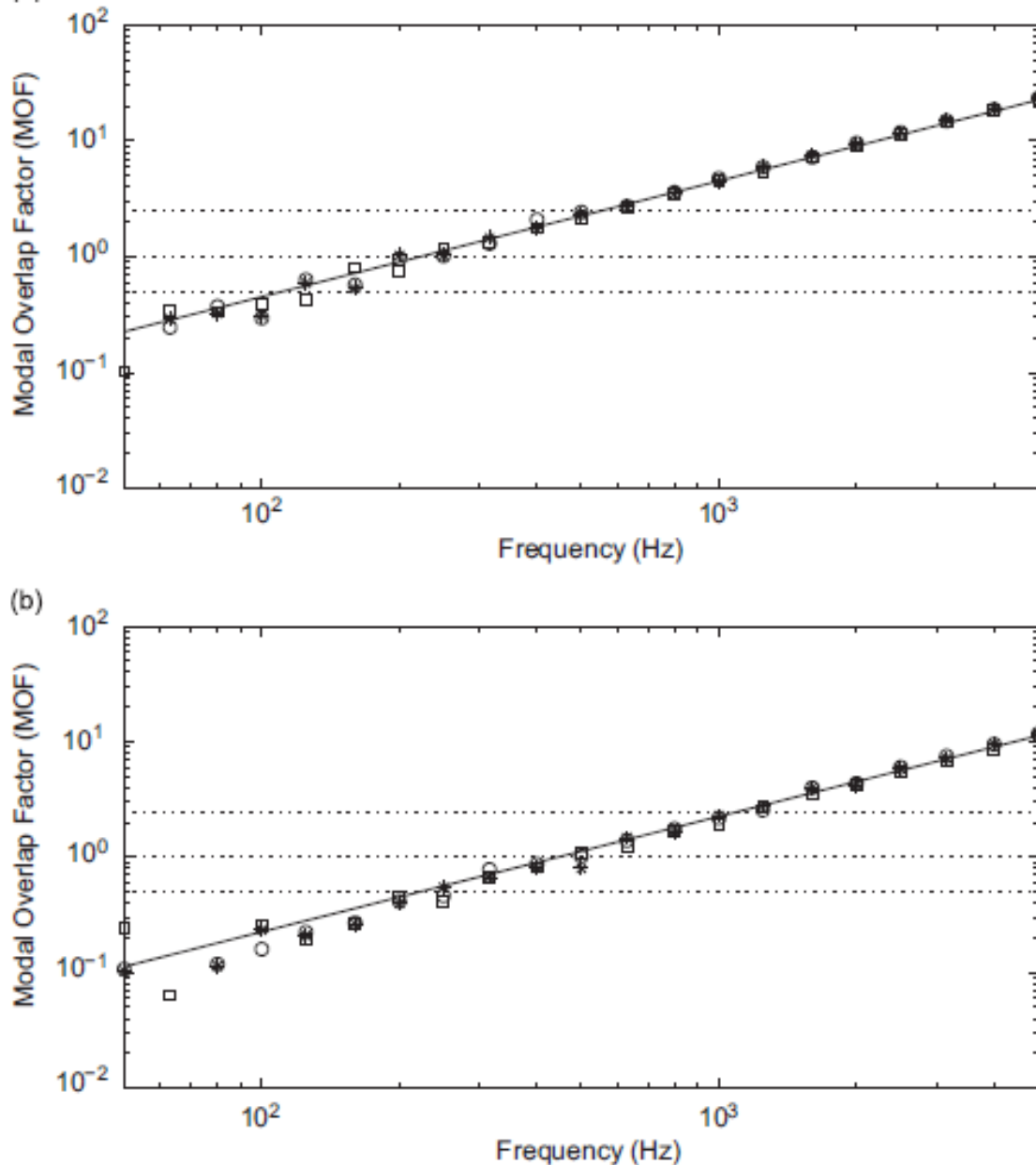


Figura 3.1: MOF per laminati in composito: (a) Plate 1, (b) Plate 2. Legenda: o: $\theta=0^\circ$, x: $\theta=15^\circ$, [] : $\theta=30^\circ$ e +: $\theta=45^\circ$. La linea continua indica il MOF analitico (immagine tratta da [20]).

Da quanto si vede nella figura possiamo comprendere che per frequenze superiori ai 500 Hz, che sono quelle di interesse pratico per l'analisi statistica dell'energia, la disposizione angolare delle lamine influenza in modo trascurabile il Modal Overlap Factor rispetto al valore che otteniamo calcolandolo nel caso di un materiale ortotropo. Viceversa l'effetto alle basse frequenze non è del tutto trascurabile e ciò sarà evidente anche quando parleremo del CLF per materiali compositi (Paragrafo 5.11).

Altro fatto da notare nelle figure precedenti è l'andamento del Modal Overlap Factor: esso è crescente e in entrambi i casi già sopra i 300-500 Hz ha un valore superiore all'unità, fatto che ci consente di dire che sopra tali frequenze i risultati dell'analisi statistica dell'energia sono accurati.

Da quanto visto dalla trattazione precedente allora possiamo dire che la densità modale dei materiali compositi po' essere studiata considerandoli dei semplici materiali ortotropi e senza tenere conto della effettiva disposizione delle lamine. Inoltre riportiamo i grafici che confrontano la separazione media in frequenza dei dati sperimentali con la soluzione analitica supponendo che il materiale si comporti in modo ortotropo (Figura 3.2).

Infine diamo la formula per valutare la separazione media in frequenza data da Seçgin [20]:

$$\overline{\delta f}_{ortho} = \frac{h}{\sqrt{3}A} \sqrt{c'_{Lx} c'_{Ly}}$$

dove h indica lo spessore del laminato, A la superficie, c'_{Lx} e c'_{Ly} sono le velocità di gruppo longitudinali equivalenti:

$$c'_{Lx} = \sqrt{\frac{E_x}{\rho(1 - \nu_{xy}^2)}}$$

e

$$c'_{Ly} = \sqrt{\frac{E_y}{\rho(1 - \nu_{yx}^2)}}$$

dove E_x e E_y rappresentano i moduli elastici nelle due direzioni principali, ρ la densità del composito, ν_{xy} e ν_{yx} i moduli di Poisson associati alle direzioni principali.

Da tale formule possiamo dedurre anche quella per il Modal Overlap Factor:

$$MOF = \frac{\pi f \eta_i}{2 \overline{\delta f_i}}$$

Successivamente vedremo anche come valutare lo smorzamento per i materiali compositi e i coefficienti di perdita per accoppiamento (si vedano Paragrafi 4.9 e 5.11).

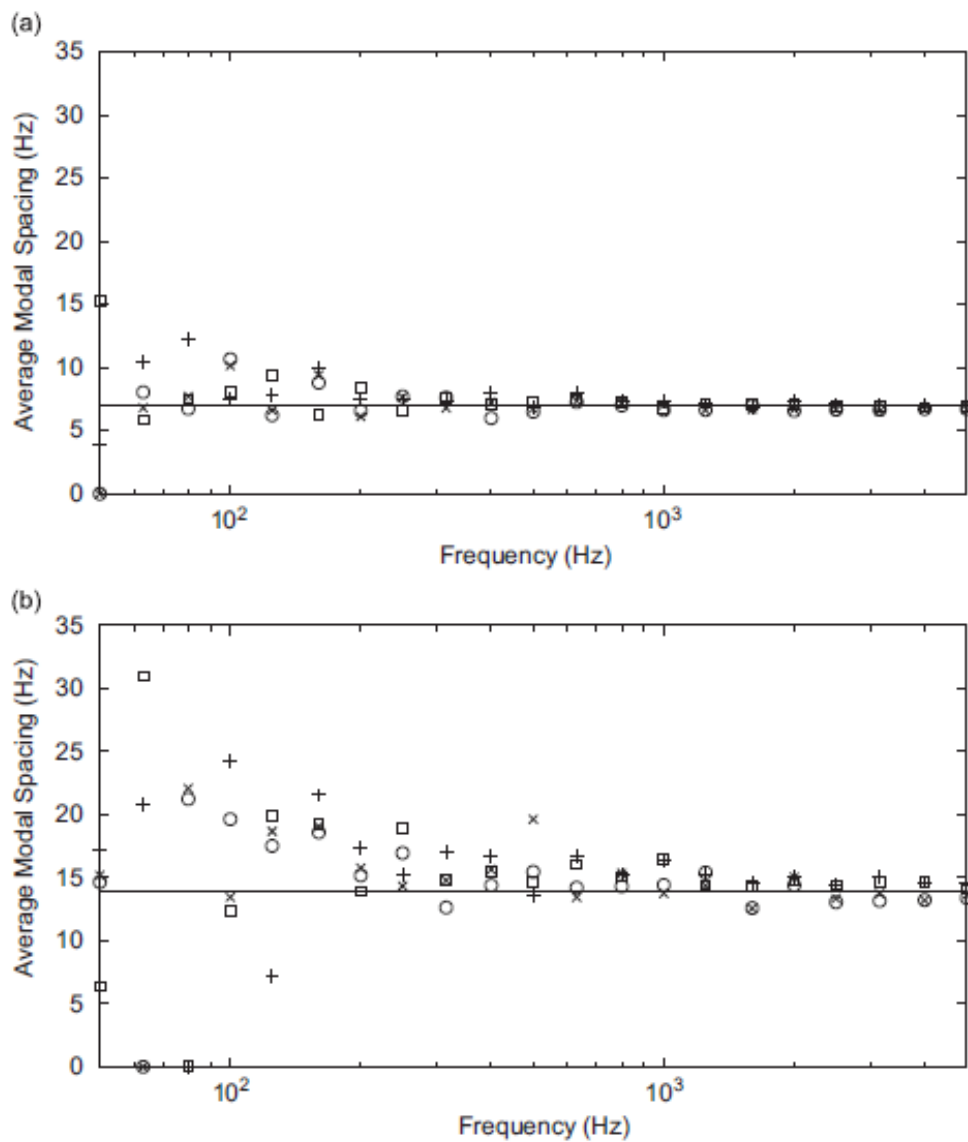


Figura 3.2: Separazione media in frequenza per laminati in composito: (a) Plate 1, (b) Plate 2. Legenda: o: $\theta=0^\circ$, x: $\theta=15^\circ$, [] : $\theta=30^\circ$ e +: $\theta=45^\circ$. La linea continua indica la separazione media in frequenza calcolata con la formula analitica (immagine tratta da [20]).

3.6 Calcolo della densità modale per piastre irrigidite.

Da quanto abbiamo visto precedentemente nel Paragrafo 2.4.6 sappiamo che la modellazione di una piastra irrigidita è complessa e tali difficoltà si rispecchiano necessariamente anche nella determinazione della densità modale. Il fatto è legato alla presenza degli irrigidimenti: essi introducono una rigidità maggiore nella direzione degli irrigidimenti stessi, il che comporta che il materiale si comporta in modo ortotropo piuttosto che omogeneo come assunto dalla teoria di base.

Nel caso di piastre irrigidite la densità modale non è costante ma dipende dalla distribuzione dei rinforzi: questi fungono da banda passante per certe onde che quindi riescono a propagarsi o non passante per altre che quindi non si propagano [38]. Inoltre il momento d'inerzia della massa rotazionale e la rigidità torsionale sono parametri importanti per determinare queste bande passanti o non passanti. È chiaro che una tale trattazione è molto complessa e esula dalle finalità della presente tesi: tenere conto di tutti questi effetti qualora si sia interessati ad indagini preliminari sul comportamento vibrazionale è troppo dispendioso.

Dickow [38] ha esaminato numericamente come tutti questi effetti influenzino la densità modale e i risultati che otteniamo per una piastra di acciaio sono in Figura 3.3.

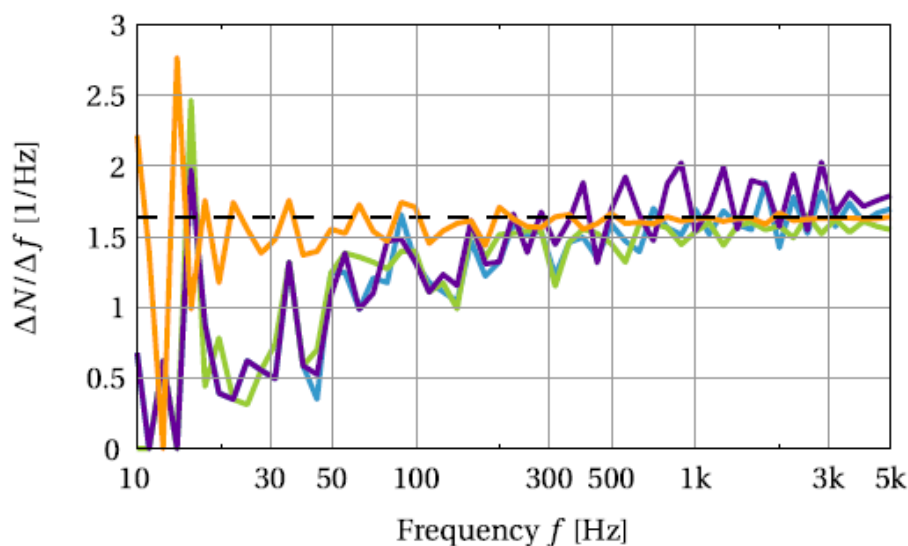


Figura 3.3: Densità modale di una piastra irrigidita in acciaio: verde: senza energia rotazionale, azzurro: con energia rotazionale, viola: con momento di inerzia, arancione: piastra senza irrigidimenti, - - densità modale analitica per una piastra semplice (immagine tratta da [38]).

Quello che possiamo dedurre dalla Figura 3.3 è che nelle frequenze in cui ci interessa applicare l'analisi statistica dell'energia, sopra i 300 Hz, possiamo tranquillamente utilizzare le formule per una piastra semplice senza tenere conto degli effetti introdotti dagli irrigidimenti. Lo spessore da utilizzare nel caso analitico è quello della piastra che forma il pannello irrigidito.

3.7 Considerazioni sul modello tramite la densità modale.

Per quanto abbiamo già spiegato nel Paragrafo 3.3 sappiamo che un requisito affinché l'analisi statistica dell'energia sia valida è che sia verificata la disuguaglianza:

$$\text{Modal Overlap Factor} \geq 1$$

e che quindi all'interno di una determinata banda cadano un numero minimo di modi affinché possiamo poi ritenere soddisfatta la richiesta. D'altra parte, però possiamo dire che se in una banda la densità modale è bassa significa che ci sono pochi modi di quel tipo a disposizione, cioè la struttura si comporta "poco in quel modo" [66]. Quanto detto ci permette di prendere alcune decisioni fondamentali dal punto di vista della modellazione della struttura e che riportiamo di seguito.

1. Supponiamo di avere a che fare con una trave a I e ci chiediamo se sia giusto modellarla come una trave monodimensionale oppure come se fosse formata da tre piastre (una anima e due flange). Alle basse frequenze tale elemento presenta dei modi vibrazionali flessionali, torsionali e longitudinali tipici delle travi e manterrà la sezione inalterata, mentre alle alte frequenze presenterà modi di vibrare tipici delle piastre [41]. È chiaro che la trave presenterà modi con entrambe le caratteristiche però considerando la densità modale possiamo capire quale dei due comportamenti è predominante senza dover tenere conto di entrambi. La trave si comporterà principalmente come la modellazione che ha la densità modale maggiore.

Consideriamo le densità modali flessionali per una trave e una piastra ad esempio:

$$n_{B,trave} = \frac{1}{2\pi c_B} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega\kappa c_L}}$$

e

$$n_{B,piastra} = \frac{A}{4\pi\kappa c_L'} = \frac{A}{4\pi\kappa c_L/(1-\nu^2)^{1/2}}$$

dove nelle formule precedenti abbiamo indicato con ω la pulsazione, con κ il raggio giratore, con $c_L = (E/\rho)^{1/2}$ la velocità longitudinale, con A l'area superficiale e con ν il coefficiente di Poisson.

Senza concentrarsi sui singoli valori numerici delle grandezze quello che bisogna notare dalle formule è che più la frequenza è elevata più $n_{B,trave}$ diminuisce mentre $n_{B,piastra}$ rimane costante. Inoltre tale densità modale dipende dalle caratteristiche geometriche della trave: se essa ha una sezione trasversale piccola allora avrà un raggio giratore piccolo mentre l'area della piastra sarà piccola e quindi si comporterà più come trave che come piastra. Viceversa quando la trave è tozza con elevata sezione trasversale si comporterà come insieme di piastre.

2. Sappiamo che sia le travi che le piastre nel caso più generale possibile presentano 3 sottosistemi che rappresentano 3 gruppi di modi di vibrare: le travi presentano onde di tipo flessionale, longitudinale e torsionale mentre le piastre onde di tipo flessionale, longitudinale e di taglio. Allora nel momento in cui consideriamo due elementi che si interfacciano attraverso una giunzione dobbiamo tenere presente che tutti sottosistemi scambiano dell'energia e abbiamo sei coefficienti di accoppiamento per ogni giunzione. In realtà spesso tutto ciò può essere semplificato: attraverso l'analisi modale possiamo capire quali siano i sottosistemi significativi. Il fatto è che non ci sono delle regole scritte per tutti i casi ma molto dipende dal tipo di sollecitazione, dal tipo e dalla geometria di giunzione e dal vincolo, quindi alcune scelte devono essere fatte da chi utilizza questo tipo di analisi.

Ad esempio la densità modale è utile per capire quanto siano importanti i modi nel piano di un elemento. Considerando due piastre collegate da una giunzione e una sola sia sollecitata flessionalmente dobbiamo chiederci se per esse dobbiamo tenere conto di tutti i sottosistemi o se eventualmente alcuni possono essere trascurati. Una tale decisione deve essere presa considerando appunto a seconda del valore che assume la densità modale, infatti:

$$n_{B,piastro} = \frac{A}{4\pi k c_L'} = \frac{A}{4\pi k c_L/(1 - \nu^2)^{1/2}}$$

mentre

$$n_{P,piastro} = \frac{\omega A}{2\pi k c_L}.$$

Dalle formule è chiaro anche in questo caso che le densità modali varino in modo differente in funzione della pulsazione e che dipendano dalle caratteristiche geometriche dell'elemento considerato. Quindi, in alcuni casi, da un loro confronto diretto possiamo anche decidere di non considerare dei sottosistemi perché possiamo dedurre che essi siano poco rappresentativi.

3.8 Calcolo del numero di modi alle basse frequenze.

Più volte abbiamo detto che l'analisi statistica dell'energia è una tecnica ritenuta valida soprattutto alle alte frequenze poiché richiede che siano presenti un numero minimo di modi di vibrare in una banda affinché il Modal Overlap Factor sia superiore all'unità. Però, visto che il metodo è statistico, abbiamo che ad ogni valore medio associamo un'incertezza a seconda di un certo livello di confidenza. Questo ci permette quindi di calcolare la risposta della struttura anche alle basse frequenze e compensiamo la poca validità della SEA con un margine di incertezza maggiore [41]. Si veda ad esempio la Figura 3.4.

Il problema è che alle basse frequenze le formule della densità modale stimano in modo scorretto il numero di modi di vibrare del sottosistema e di conseguenza i risultati non sono accurati.

Quello che viene consigliato è di calcolare il numero di modi tramite le formule della densità modale quando esse danno come risultato un numero di modi superiore a 12, mentre, al di sotto di questo limite, dovrebbe essere stimato tramite analisi numeriche o sperimentali [66]. È chiaro che qualora tali analisi non siano possibili bisogna limitare i risultati alla frequenza minima imposta dal Modal Overlap Factor oppure bisogna tenere

conto della varianza associata al risultato. Di seguito riportiamo la Tabella 3.3 in cui si vede come i modi vengano calcolati tramite le formule analitiche solo quando essi sono superiori a 12.

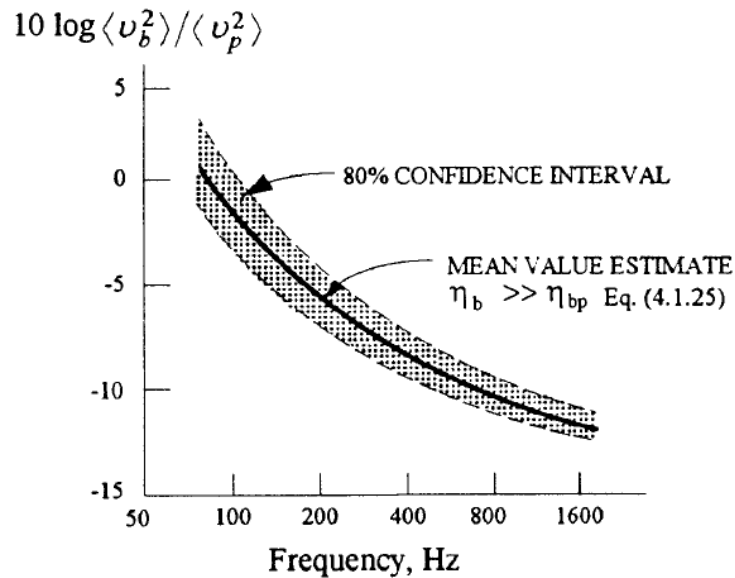


Figura 3.4: Valore medio e incertezza corrispondente a una confidenza dell'80% (immagine tratta da [41]).

1/3 Octave Band (kHz)	Top Plate (1)	Web (2)	Tank Top (3)	Tank Top (4)	Long. Girder (5,12)	Bottom Plate (6)	Bottom Plate (7)	Bracket (8)	Bracket (8)	Floor (9)	Floor (10)
0.63	1	2	2	5	2	1	4	2	2	1	4
1.25	3	8	4	12	4	3	10	6	4	3	6
2.0	2	12	4	↑	6	3	↑	5	3	4	9
2.5	2	↑	6	↑	8	5	↑	7	4	4	↑
3.15	3	↑	8	↑	10	6	↑	9	6	5	↑
4.0	3	↑	10	↑	12	8	↑	10	8	7	↑
5.0	3	↑	↑	M.D.	↑	9	↑	↑	9	10	↑
6.3	5	M.D.	↑	↑	↑	12	M.D.	↑	11	↑	↑
8.0	7	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	M.D.
10.0	8	↑	M.D.	↑	↑	↑	↑	M.D.	↑	↑	↑
12.5	9	↑	↑	↑	M.D.	M.D.	↑	↑	M.D.	M.D.	↑
16.0	12	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
20.0	M.D.	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

Tabella 3.3: Calcolo del numero di modi [66] (immagine tratta da [66]).

3.9 Approccio della somma modale.

L'approccio della somma modale assume che il numero totale dei modi di un sottosistema in una data frequenza sia la somma dei modi che esisterebbero nei

componenti del sottosistema considerati indipendentemente [41]. Questo viene considerato un buon approccio tranne che alle basse frequenze.

Questo metodo non risulta essere utile per determinare il numero di modi di un sottosistema, in quanto per ogni elemento somma tutti i modi possibili, quanto per verificare che i risultati analitici corrispondano a quelli numerici.

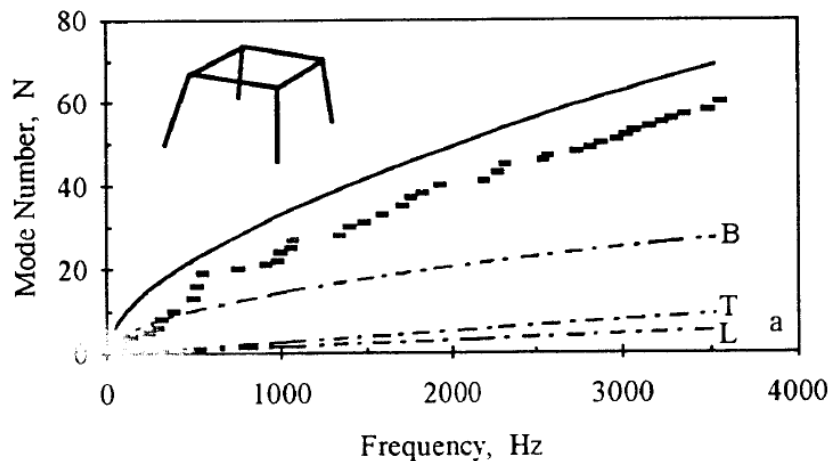


Figura 3.5: applicazione dell'approccio della somma modale applicato a una beam (linea continua) e confronto con soluzione numerica tramite un software FEM (immagine tratta da [41]).

3.10 Metodi numerici e sperimentali.

Le formule analitiche sviluppate in precedenza sono di certo utili e di facile utilizzo ma chiaramente non sono sempre adoperabili: quando la geometria è complessa o alle basse frequenze è bene ricorrere a un altro metodo per la stima. Le possibilità sono due:

- Metodi numerici: tramite l'utilizzo di software agli elementi finiti si crea una simulazione in cui si ricercano i modi di vibrare. È chiaro che più la struttura è complessa più dispendiosa è questa strategia in quanto è fondamentale avere una buona mesh per individuare i modi con precisione. Tale metodo va bene qualora dobbiamo determinare i modi alle basse frequenze poiché man mano esse si alzano abbiamo bisogno di mesh sempre più fini affinché si possano ottenere risultati affidabili;
- Metodi sperimentali: consistono nel sollecitare la struttura e determinare la funzione di risposta dalla quale possiamo determinare il numero di modi contando

i picchi di risonanza. Tale strategia è buona solo nel caso in cui i picchi non si sovrappongano eccessivamente e questo dipende dal valore dello smorzamento modale. Tipicamente si ottengono buoni risultati se la separazione modale è pari a tre volte la banda modale: $\overline{\delta f} \geq 3 \frac{\pi}{2} \eta f$.

3.11 Calcolo della varianza.

Nel Paragrafo 2.2 si è visto che mediante l'analisi SEA si giunge alla definizione un sistema lineare che, una volta risolto, permette di determinare l'energia vibrazionale che caratterizza ogni sottosistema. E' stato sottolineato che questa energia è un valore medio che caratterizza il sottosistema e quindi essa non rappresenta una buona stima della risposta del sistema nei casi in cui [41]:

- si voglia determinare la risposta media in un punto determinato del sottosistema;
- il numero di modi in una certa banda è troppo piccolo per garantire che venga rispettata la disuguaglianza $MOF \geq 1$.

E' quindi necessario affiancare un'incertezza al valore medio dell'energia che viene calcolato in modo tale da ottenere dei risultati consistenti anche in questi casi. Tale incertezza, inoltre, è tale da fornire dei risultati che tengano conto delle ipotesi che sono state introdotte per semplificare la teoria (si veda le ipotesi introdotte nel Paragrafo 1.6).

Il procedimento riportato da Lyon [41] per il calcolo delle varianze e quindi delle incertezze sull'energia che caratterizzano i sottosistemi di un sistema generico, come una struttura, è molto complesso e non viene qui riportato (nel caso si rimanda al riferimento [41]). L'unico fatto che è importante sottolineare è che le varianze delle energie che caratterizzano i sottosistemi dipendono dalla varianze della potenza in ingresso e dei coefficienti di perdita per accoppiamento (CLF), mentre le varianze dei coefficienti di perdita per smorzamento e delle densità modali hanno effetti trascurabili [41].

Di seguito riportiamo solo alcune formule in modo da mettere in evidenza quanto è di nostro interesse.

Si considerino due sottosistemi come quelli riportati in Figura 1.4 e che solo il sottosistema 1 sia sollecitato da una forzante random. E' possibile esprimere il rapporto tra la varianza della velocità a quadrato del sottosistema 2, $\sigma_{v_2^2}^2$, e il valore medio al quadrato della velocità al quadrato del sottosistema 2, $m_{v_2^2}^2$, tramite la formula:

$$\frac{\sigma_{v_2^2}^2}{m_{v_2^2}^2} = \frac{1}{n_1 n_2 \frac{\pi}{2} \omega (\eta_1 + \eta_2) \Delta \omega} \left[\frac{\langle \psi_1^4 \rangle}{\langle \psi_1^2 \rangle^2} \right]^2 \left[\frac{\langle \psi_2^4 \rangle}{\langle \psi_2^2 \rangle^2} \right]^2$$

dove con n_1 e n_2 si indicano le densità modali dei sottosistemi 1 e 2, ω è la frequenza centrale della banda in frequenza considerata, $\Delta \omega$ è l'ampiezza della banda considerata, η_1 e η_2 sono i coefficienti di perdita per smorzamento dei due sottosistemi e ψ_1 e ψ_2 rappresentano due modi di vibrare tipici dei sottosistemi 1 e 2. Lyon [41] non precisa cosa intenda con modi di vibrare tipici.

Con il rapporto:

$$\left[\frac{\langle \psi_i^4 \rangle}{\langle \psi_i^2 \rangle^2} \right]^2$$

si indica la varianza associata ai modi di vibrare di un particolare sottosistema in una data banda di frequenza. Nel caso di travi monodimensionali e delle piastre tale rapporto vale rispettivamente:

$$\left[\frac{\langle \psi_i^4 \rangle}{\langle \psi_i^2 \rangle^2} \right]^2 = \frac{3}{2} \quad (travi)$$

$$\left[\frac{\langle \psi_i^4 \rangle}{\langle \psi_i^2 \rangle^2} \right]^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{4} \quad (piastre).$$

Si sottolinea poi che la velocità media al quadrato, v_2^2 , altro non è che l'energia specifica, cioè per unità di massa, del sottosistema. Infatti:

$$v_2^2 = \frac{E_2}{M}$$

e quindi il rapporto $\sigma_{v_2^2}^2/m_{v_2^2}^2$ esprime il rapporto tra la varianza dell'energia specifica e il valore medio dell'energia specifica.

Ciò che è importante notare è che al denominatore della formula che fornisce il rapporto $\sigma_{v_2^2}^2/m_{v_2^2}^2$ compaiono i Modal Overlap Factor dei due sottosistemi. Infatti possiamo riscriverla come:

$$\frac{\sigma_{v_2^2}^2}{m_{v_2^2}^2} = \frac{1}{n_2 \left(\frac{\pi}{2} \eta_1 \omega n_1 \right) \Delta\omega + n_1 \left(\frac{\pi}{2} \eta_2 \omega n_2 \right) \Delta\omega} \left[\frac{\langle \psi_1^4 \rangle}{\langle \psi_1^2 \rangle^2} \right]^2 \left[\frac{\langle \psi_2^4 \rangle}{\langle \psi_2^2 \rangle^2} \right]^2$$

e quindi:

$$\frac{\sigma_{v_2^2}^2}{m_{v_2^2}^2} = \frac{1}{n_2 MOF_1 \Delta\omega + n_1 MOF_2 \Delta\omega} \left[\frac{\langle \psi_1^4 \rangle}{\langle \psi_1^2 \rangle^2} \right]^2 \left[\frac{\langle \psi_2^4 \rangle}{\langle \psi_2^2 \rangle^2} \right]^2.$$

In generale si deduce quindi che all'aumentare dei Modal Overlap Factor il rapporto tra la varianza e il valore medio diminuisce, viceversa quando i MOF sono piccoli la varianza è elevata.

Capitolo 4 : DAMPING LOSS FACTOR

4.1 Introduzione.

Il coefficiente di perdita per smorzamento è un parametro importante in tutte le analisi di tipo dinamico e quindi anche nell'analisi statistica dell'energia. Intuitivamente possiamo dire che per molti sistemi la risposta globale è inversamente proporzionale al livello di smorzamento [41]. Infatti considerando un sistema isolato caratterizzato da un certo smorzamento η e sfruttando la SEA possiamo scrivere l'equazione di equilibrio in condizioni stazionarie tra la potenza in ingresso al sistema e quella in uscita:

$$\Pi_{in} = \Pi_{diss} = 2\pi f \eta E_{tot}$$

In cui Π_{in} è la potenza in ingresso, Π_{diss} è la potenza dissipata, f è la frequenza centrale della banda di sollecitazione e E_{tot} è l'energia totale del sistema. Vista da un altro punto di vista la quantità $2\pi\eta$ è il rapporto tra l'energia persa in un ciclo di oscillazione e l'energia totale del sistema.

Per quanto detto si capisce l'importanza che ricopre il coefficiente di perdita per smorzamento (DLF, Damping Loss Factor). Il problema è legato al fatto che spesso esso è determinabile solo con metodi sperimentali mentre possiamo ricorrere a formule analitiche o informazioni empiriche solo in caso di configurazioni semplici [40]. Per di più dobbiamo sottolineare che i meccanismi di smorzamento spesso sono complessi e non lineari rendendo quindi difficili anche le analisi sperimentali, qualora possibili.

Una nota positiva viene però riportata da Lyon [41]: stime dei valori del coefficiente di smorzamento con accuratezza non migliore del 20% comportano un errore finale sulla risposta del sistema di appena 1 dB.

In generale possiamo dire che il coefficiente di perdita di smorzamento è formato da tre componenti:

$$\eta_d = \eta_s + \eta_{rad} + \eta_b$$

in cui:

- η_s è il fattore di perdita per lo smorzamento strutturale o dovuto al materiale di cui è formato il sottosistema e fondamentale tiene conto della conversione dell'energia vibrazionale in calore;
- η_{rad} è il fattore di perdita associato con le perdite di irradiazione acustica dalla superficie del sottosistema verso il mezzo fluido circostante. Questa perdita può essere altresì considerata come la conversione delle vibrazioni del materiale in suono. Nel caso in cui fossimo però interessati a modellare l'ambiente come un sottosistema poiché vogliamo calcolarne il livello energetico allora tale coefficiente deve essere considerato nullo in quanto non deve essere considerata energia persa ma energia scambiata con un altro sottosistema, l'ambiente. Nel nostro caso, invece, supponendo di opera in ambiente privo di atmosfera consideriamo nullo questo coefficiente;
- η_b è il fattore di perdita associato con lo smorzamento introdotto dall'accoppiamento. Nell'analisi SEA avevamo introdotto l'ipotesi che l'accoppiamento fosse ottenuto tramite elementi conservativi. Quindi nel caso in cui sia presente uno smorzamento allora possiamo attribuire al sottosistema tale quantità [41]. In altri casi invece si può modellare la giunzione in modo tale che essa tenga conto di questi effetti definendo un coefficiente di perdita per smorzamento di accoppiamento [15] (CDLF, Coupling Damping Loss Factor). Nella presente trattazione non si considera quest'ultima possibilità ma si ricorre all'approccio classico.

4.2 Dualità DLF e CLF.

I coefficienti di perdita per smorzamento (DLF, Damping Loss Factor) e i coefficienti di perdita per accoppiamento (CLF, Coupling Loss Factor) sono i parametri che descrivono come un sottosistema cede energia: nel primo caso la dissipa e solitamente avviene una conversione in calore, mentre nel secondo la trasmette verso un altro sottosistema con il quale condivide una giunzione. Appare quindi evidente che debba esserci una certa

similitudine tra i due coefficienti in quanto entrambi calcolano una perdita subita dal sistema.

Nella pratica ingegneristica accade spesso che non sia necessario definire e studiare il comportamento dell'intera struttura ma possiamo essere interessati solo ad una sua parte o a determinati elementi di essa. È chiaro che però bisogna tenere comunque conto idealmente di questi elementi non rappresentati, in quanto una quota parte di potenza, la quale sarebbe fluita verso di essi, non deve essere attribuita ad altri elementi altrimenti questi ultimi sarebbero caratterizzati da una risposta maggiore di quella effettiva. Allora in questi casi, quello che sarebbe stato da considerare un CLF va aggiunto come termine aggiuntivo fittizio ai DLF [17]. Tale procedimento è possibile grazie al fatto che le equazioni che descrivono l'analisi statistica dell'energia sono lineari (Paragrafo 2.2).

Ovviamente vale il discorso viceversa: alcuni coefficienti di perdita per attrito possono essere visti come coefficienti di perdita per accoppiamento. È questo il caso delle perdite di irradiazione acustica η_{rad} . Nel caso non fossimo interessati al livello energetico dell'ambiente allora esse dovrebbero essere inglobate tra i DLF, mentre se siamo interessati a tale grandezza allora dovremmo definire un nuovo sottosistema e quindi il CLF.

4.3 Metodi sperimentali per il calcolo dei DLF.

Il coefficiente di perdita per smorzamento è un parametro che difficilmente è calcolabile mediante approcci analitici e per questo, spesso, l'unico modo per ricavarne il valore è per via sperimentale. Possiamo ricordare che il DLF è collegato ad altre grandezze tipiche delle analisi dinamiche, quindi nel caso una di esse fosse nota potremmo ricavarne semplicemente il valore. A tal proposito si veda la Tabella 4.1.

Per quanto riguarda le tecniche sperimentali possiamo ricorrere a tre metodi di ampio utilizzo nella pratica [41,56]:

- Metodo della velocità di decadimento (decremento logaritmico);
- Metodo della larghezza di banda di metà potenza;
- Metodo del bilancio della potenza.

Damping Loss Factor, η	η
Critical Damping Ratio, ζ	2ζ
Quality Factor, Q	$\frac{1}{Q}$
Reverberation Time, T_{60} (f = Frequency, Hz)	$\frac{2.2}{fT_{60}}$
Decay Rate, DR, dB/sec	$\frac{DR}{27.3f}$
Log Decrement, δ	$\frac{\delta}{\pi f}$
Wave Attenuation, γ (c_g = Group Velocity)	$\frac{c_g \alpha}{\pi f}$
Half Power Bandwidth, $\Delta_{1/2}$	$\frac{\Delta_{1/2}}{f}$
Phase Angle, ϕ	$\tan(\phi)$
Absorption Coefficient, α (c = Sound Speed) (A = Wall Area) (V = Room Volume)	$\frac{cA\alpha}{8\pi fV}$

Tabella 4.1: Relazione tra il DLF e le più comuni grandezze di smorzamento (immagine tratta da [56])

È molto importante sottolineare che questi metodi permettono di stabilire il valore assunto dal coefficiente totale di perdita di un sottosistema: questo coefficiente è dato dalla somma della trasmissione di potenza attraverso gli accoppiamenti con altri sottosistemi e dello smorzamento del sottosistema. Perciò, quando ci si accinge a compiere delle misurazioni, dobbiamo assicurarci che il sottosistema sia correttamente isolato dal resto degli elementi.

4.3.1 Metodo della velocità di decadimento.

Il metodo della velocità di decadimento si basa sulla risposta transitoria di un modo risonante caratterizzato da smorzamento lineare e dalla frequenza di risonanza f . Dopo

aver sollecitato con una forzante un sistema a un grado di libertà, dalla meccanica delle vibrazioni, abbiamo che il moto è rappresentato dalla legge:

$$y(t) = C e^{-\frac{1}{2} 2\pi f \eta t} \sin \left(2\pi f \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{4}} + \varphi \right)$$

dove C è l'ampiezza dell'oscillazione che dipende dalle condizioni iniziali e φ è la fase tra la forzante e il moto. Con η indichiamo il DLF.

La somma delle energie potenziale, $PE = \frac{1}{2} K y^2$, e cinetica, $PE = \frac{1}{2} M \dot{y}^2$, mediata in una oscillazione vale:

$$\langle E \rangle_{\sim} = \frac{1}{2} K C^2 e^{-2\pi f \eta t}$$

e quindi l'energia alla risonanza decade nel tempo secondo la legge $e^{-2\pi f \eta t}$ e è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del picco di risposta che abbiamo indicato con C . D'altra parte la risposta avrà una diminuzione in ampiezza proporzionale a $e^{-\pi f \eta t}$. Considerando quindi due successivi istanti temporali possiamo esprimere le ampiezze:

$$C_1 \propto e^{-\frac{1}{2} 2\pi f \eta t_1}$$

$$C_2 \propto e^{-\frac{1}{2} 2\pi f \eta t_2}$$

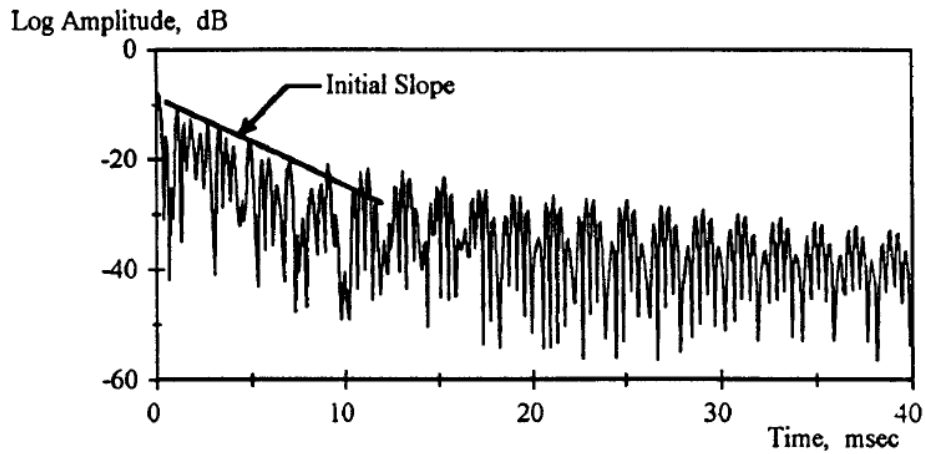
e l'ampiezza di decadimento in dB come:

$$20 \log_{10} \left(\frac{C_1}{C_2} \right) = 20\pi f \eta (t_1 - t_2) \log_{10}(e).$$

Definendo la velocità di decadimento DR come la pendenza del decadimento il dB/s $DR = 20 \log_{10} \left(\frac{C_1}{C_2} \right) / (t_1 - t_2)$, allora il coefficiente di perdita per smorzamento è pari a:

$$\eta = \frac{DR}{20\pi \log_{10}(e) f}.$$

Di seguito riportiamo un grafico ottenuto sperimentalmente che ci permette di capire come utilizzare la procedura sperimentale (Figura 4.1).



b. Log Response Amplitude vs. Time

Figura 4.1: Valutazione sperimentale del DLF tramite velocità di decadimento (immagine tratta da [41]).

Valutando la pendenza iniziale della risposta in scala logaritmica abbiamo subito una stima del DR. L'applicazione della formula è immediata.

È importante ricordare che tale metodo può essere utilizzato per determinare il DLF di:

- Un singolo modo;
- Un gruppo di modi all'interno di una banda. In questo caso la forzante deve ovviamente interessare tutta la banda e la pendenza iniziale del decadimento è proporzionale al coefficiente di perdita effettivo del sottosistema.

Altri aspetti di cui tenere conto e che possono influenzare negativamente i dati sperimentali riguardano la strumentazione: da una parte dobbiamo assicurarci che nel caso in cui lo smorzamento sia basso essa non aggiunga il proprio smorzamento alla misurazione e dall'altra dobbiamo verificare che nel caso lo smorzamento del sistema sia elevato essa riesca a seguire velocemente la risposta.

4.3.2 Metodo della larghezza di banda di metà potenza.

Questo metodo permette di ricavare il valore del coefficiente di perdita per smorzamento a partire dalla misurazione appunto della larghezza di banda di metà potenza della

funzione di risposta in frequenza (Figura 4.2), ovvero considerando l'ampiezza della banda identificata dai punti a -3 dB dal picco di risonanza che indichiamo con Δf .

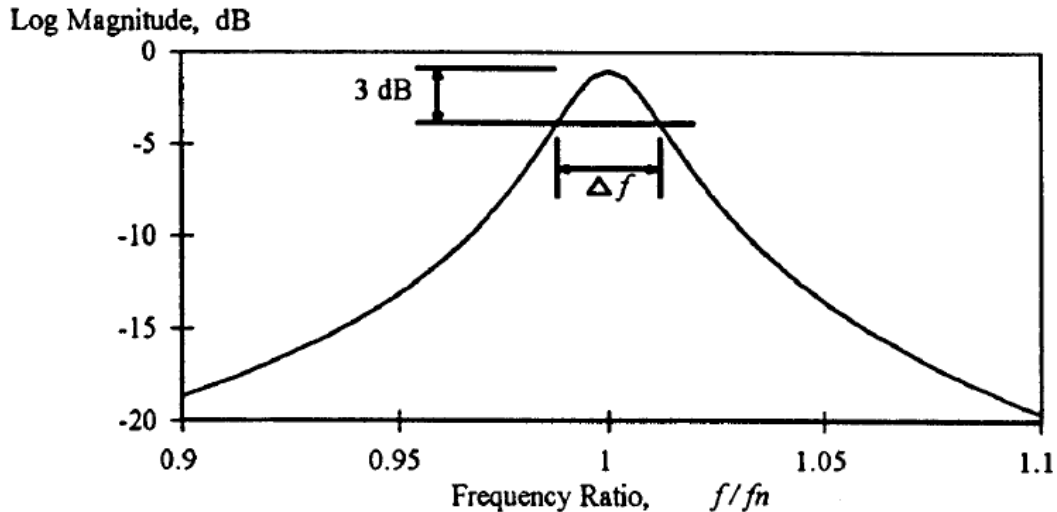


Figura 4.2: Valutazione sperimentale del DLF tramite il metodo della larghezza di metà potenza (immagine tratta da [41]).

Analiticamente troviamo che il DLF vale:

$$\eta = \frac{\Delta f}{f_n}.$$

È importante tenere conto che il metodo della larghezza della banda di metà potenza è adatto solo nel caso in cui si voglia determinare lo smorzamento di un singolo modo. Inoltre tale metodo non può essere utilizzato nel caso in cui la separazione media modale sia inferiore a $\Delta f < 3\eta f$ poiché in tal caso non riusciamo a individuare i punti di metà potenza a causa della sovrapposizione modale.

Altre considerazioni riguardano il campionamento: affinché tale metodo sia attendibile il picco di risonanza deve essere descritto in modo sufficientemente accurato, fatto che richiede che nello spettro in frequenza calcolato con la FFT almeno 5 punti cadano all'interno dell'intervallo. Perciò la durata del segnale digitale deve essere almeno pari a $5/\eta f_n$.

4.3.3 Metodo del bilancio della potenza.

Il metodo del bilancio della potenza è basato sulla teoria dell'analisi statistica dell'energia: considerando un sistema isolato la potenza in ingresso deve essere uguale a quella dissipata e quindi:

$$\eta = \frac{\Pi_{in}}{2\pi f E_{tot}}$$

dove l'energia totale è stimabile come il prodotto tra la massa del sottosistema e la velocità media al quadrato $M\langle v^2 \rangle$. Il setup sperimentale deve essere in grado quindi di rilevare in diversi punti il valore della velocità al quadrato in modo tale che, mediandola, possiamo conoscere il valore dell'energia posseduta dal sistema.

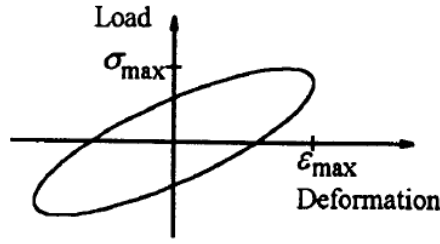
Con questa tecnica è possibile rilevare lo smorzamento di:

- Un singolo modo;
- Un gruppo di modi all'interno di una banda purché la forzante ecciti tutta la banda.

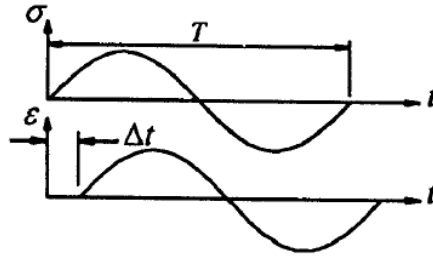
4.4 Smorzamento generato dal materiale.

Abbiamo visto che il coefficiente di perdita per smorzamento in generale è dato dalla somma di tre termini η_s , η_{rad} e η_b di cui possiamo trascurare il secondo in quanto supponiamo di operare in ambiente privo di atmosfera. In questo paragrafo vedremo come calcolare il coefficiente relativo alle perdite introdotte dalla struttura.

Nella grandissima maggioranza dei casi lo smorzamento prodotto dal materiale è dovuto al lavoro di isteresi che lo caratterizza: assumendo una certa curva tensione-deformazione quando il materiale viene deformato parte del lavoro meccanico è convertito in calore o in un'altra forma di energia non recuperabile. Si deduce quindi che, nel momento in cui l'elemento sia soggetto a carichi continui e ciclici, esso dissipa della potenza (Figura 4.3) [41,71].



a. Load vs. Deformation



b. Load and Deformation vs. Time

Figura 4.3: Curva tensione-deformazione (immagine tratta da [41]).

Dalla figura precedente si può notare che se un elemento è soggetto a un carico sinusoidale allora la deformazione seguirà l'andamento della tensione con un ritardo. Per tenere conto di questo ritardo di fase ci torna utile definire il modulo di elasticità complesso come:

$$E_{y,Re} + jE_{y,Im}$$

dove E_y è il modulo di Young che siamo soliti indicare con E , ma per evitare di confonderlo con l'energia del sottosistema aggiungiamo il pedice y .

A questo punto possiamo esprimere la relazione tra la tensione σ e la deformazione ϵ nel modo seguente:

$$\sigma = Re[(E_{y,Re} + jE_{y,Im})\epsilon].$$

Sfruttando le definizioni appena date possiamo calcolare l'energia dissipata e l'energia totale [41]. Rispettivamente:

$$E_{diss} = \pi E_{y,Im} \epsilon_{max}^2$$

$$E_{tot} = \int_0^{\varepsilon_{max}} \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} E_{y,Re} \varepsilon_{max}^2$$

Dalla definizione di fattore di perdita di smorzamento otteniamo:

$$\eta = \frac{E_{diss}}{2\pi E_{tot}} = \frac{E_{y,Im}}{E_{y,Re}}.$$

A questo punto appare chiaro che l'artificio del modulo complesso è stato utilizzato per creare una grandezza che tenesse conto sia del Modulo di Young che del DLF:

$$E_{y,Re} + jE_{y,Im} = E_{y,Re}(1 + j\eta) = E_y(1 + j\eta).$$

Di seguito riportiamo una figura che riassume le caratteristiche di modulo elastico complesso e di coefficiente di perdita per smorzamento (DLF) per diverse classi di materiali di uso comune (Figura 4.4).

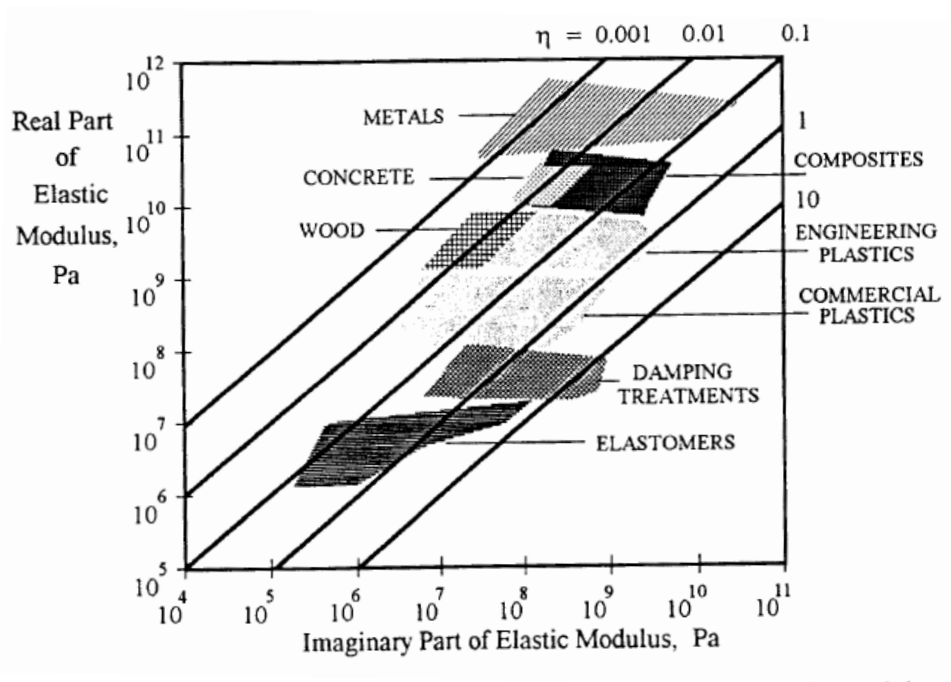


Figura 4.4: Modulo elastico complesso e DLF per alcune classi di materiali (immagine tratta da [41]).

Per quanto ci interessa possiamo notare che generalmente i metalli hanno modulo elastico elevato ma un coefficiente di perdita per smorzamento tendenzialmente basso e minore di altri meccanismi di dissipazione come ad esempio l'attrito (per le perdite di

Table III.2. Mechanical Properties of Metals Under Standard Conditions (approx. 20 °C)

Material	Density g/cm ³	Modulus of Elasticity* dyn/cm ²	Shear Modulus* dyn/cm ²	Poisson's Ratio	c_{LII} cm/sec	c_T cm/sec	Loss Factor Longitudinal	Flexural	Remarks (see footnotes)
Aluminium	2.7	72×10^{10}	27×10^{10}	0.34	5.2×10^5	3.1×10^5	$0.3 - 10 \times 10^{-5}$	$\approx 10^{-4}$	1 2 6
Lead	11.3	17×10^{10}	6×10^{10}	0.43	1.25×10^5	0.73×10^5	$5 - 80 \times 10^{-2}$	$\approx 2 \times 10^{-2}$	1 chem. pure
Iron	7.8	200×10^{10}	77×10^{10}	0.30	5.05×10^5	3.1×10^5	$1 - 4 \times 10^{-3}$	$2 - 6 \times 10^{-4}$	1 incl. antimony
Steel	7.8	210×10^{10}	77×10^{10}	0.31	5.1×10^5	3.1×10^5	$1 - 4 \times 10^{-4}$	$2 - 6 \times 10^{-4}$	1 s s pure
Gold	19.3	80×10^{10}	28×10^{10}	0.423	2.0×10^5	1.2×10^5	$0.2 - 3 \times 10^{-4}$		
Copper	8.9	125×10^{10}	46×10^{10}	0.35	3.7×10^5	2.3×10^5	$\approx 3 \times 10^{-4}$	$\approx 2 \times 10^{-3}$	5 polycrystalline
Magnesium	1.74	43×10^{10}	17×10^{10}	0.29	5×10^5	3.1×10^5	$2 - 7 \times 10^{-4}$	$\approx 10^{-4}$	single crystal
Brass	8.5	95×10^{10}	36×10^{10}	0.33	3.2×10^5	2.1×10^5	$0.2 - 1 \times 10^{-3}$	$< 10^{-3}$	1
Nickel	8.9	205×10^{10}	77×10^{10}	0.30	4.8×10^5	2.9×10^5		$< 10^{-3}$	5
Silver	10.5	80×10^{10}	29×10^{10}	0.37	2.7×10^5	1.6×10^5	$\approx 4 \times 10^{-4}$	$< 3 \times 10^{-3}$	4 5
Bismuth	9.8	3.3×10^{10}	1.3×10^{10}	0.38	0.58×10^5	0.36×10^5		$\approx 8 \times 10^{-4}$	5
Zinc	7.13	13.1×10^{10}	5×10^{10}	0.33	1.35×10^5	0.85×10^5		$\approx 3 \times 10^{-4}$	5
Tin	7.28	4.4×10^{10}	1.6×10^{10}	0.39	0.78×10^5	0.47×10^5		$\approx 20 \times 10^{-4}$	5

¹ Wegel, R., Walter, H.: Physics 6 (1935) 141. — ² Zemanek and Rudnik: J. Acoust. Soc. Amer. 33 (1961) 1283. — ³ Schmidt, R.: Ing. Arch. 5 (1943) 352. — ⁴ Bennewitz, K., Rötger, H.: Phys. Z. 37 (1936) 578. — ⁵ Bordon, Nuovo, Verdini: Proceedings of the Third Intern. Congress on Acoustics, Stuttgart 1959 (ed. L. Cremer), Elsevier: 1961, Vol. I, p. 633. — ⁶ Förster, F., Köster, W.: Z. Metallkunde 29 (1937) 116.

* $10^{10} \text{ dyn/cm}^2 = 10^9 \text{ N/m}^2 \approx 10^4 \text{ kp/cm}^2$.

Tabella 4.2: Proprietà meccaniche e DLF per i metalli di uso comune (immagine tratta da [71]).

attrito si veda Paragrafo 4.7). D'altra parte la classe dei materiali polimerici presenta modulo elastico basso e valori di smorzamento significativi. Quest'ultima categoria di materiali ci interessa particolarmente in quanto vengono utilizzati nei trattanti per aumentare lo smorzamento di un elemento: sopra un elemento metallico, caratterizzato un valore basso del DLF, ne poniamo un altro in materiale polimerico. In questo modo otteniamo un disaccoppiamento delle funzioni: la parte metallica svolge il ruolo strutturale mentre quella polimerica dissipa l'energia. Nel Paragrafo 4.6 approfondiremo quanto detto ricavando delle formule per stimare il comportamento di questi elementi sia longitudinalmente che flessionalmente.

Riportiamo anche una tabella in cui vengono riassunte le proprietà meccaniche e i DLF dei principali materiali metallici (Tabella 4.2): è bene ricordare che tali valori sono indicativi poiché il comportamento dipende dalla temperatura. In ogni caso sono utili per determinare l'ordine di grandezza dello smorzamento.

4.5 Coefficiente di perdita per accoppiamento per i polimeri.

A questo punto è necessario fare un approfondimento sui materiali polimerici in quanto essi svolgono un importante ruolo nei trattamenti per aumentare lo smorzamento e nei materiali compositi.

Lo studio di questa categoria di materiali è molto complesso in quanto il loro comportamento è fortemente caratterizzato dalla temperatura e dalla frequenza della sollecitazione, fatto che comporta che al variare di queste grandezze cambino i valori del coefficiente di perdita per smorzamento η e del modulo elastico E_y . Le proprietà meccaniche dei polimeri cambiano con la temperatura a causa di variazioni nella configurazione delle catene molecolari che caratterizzano il polimero. Al di sotto della temperatura di transizione vetrosa T_g il polimero presenta un modulo elastico relativamente alto e basso livello di smorzamento, mentre all'aumentare della temperatura le catene si distanziano sempre di più comportando una diminuzione del modulo elastico e uno smorzamento maggiore. In sostanza il polimero passa da un comportamento rigido a un comportamento visco-elastico. Nella Figura 4.5 possiamo

vedere come effettivamente le proprietà del materiale polimerico, polivinilcloride (PVC) in questo caso, cambino al variare della temperatura e della frequenza.

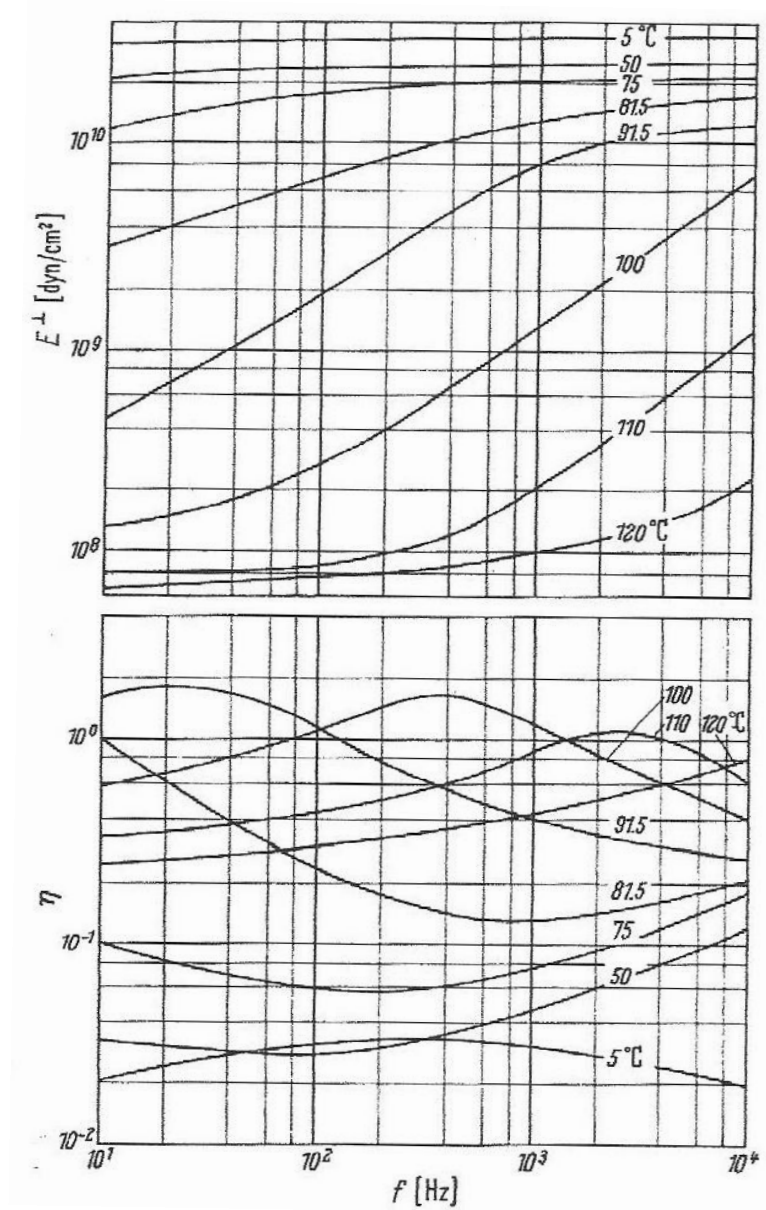


Figura 4.5: Modulo elastico [$\text{dyn/cm}^2 = 10^{-1} \text{ Pa}$] e DLF per PVC in funzione della temperatura (immagine tratta da [71]).

Riportiamo inoltre una figura semplificativa che mette bene in evidenza sia l'effetto della temperatura che l'effetto della frequenza (Figura 4.6).

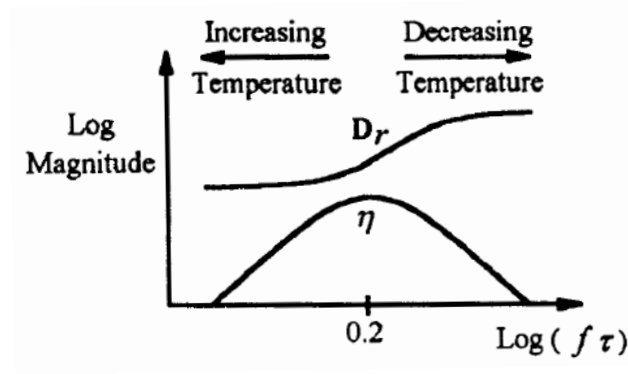


Figura 4.6: Effetti della frequenza e della temperatura sullo smorzamento e sul modulo elastico dei materiali polimerici (immagine tratta da [41]). Nella figura con D_r si indica la parte reale del modulo di Young e con η il DLF.

Da questa figura è anche possibile notare come il massimo valore dello smorzamento si verifichi in prossimità della massima variazione del modulo elastico del materiale. Nella figura abbiamo che τ indica il tempo di rilassamento del materiale. Una buona stima di tale grandezza in funzione della temperatura è data da:

$$\tau = \tau_0 a(T)$$

dove τ_0 è il valore del tempo di rilassamento alla temperatura T_0 e la funzione $a(T)$ per molti polimeri vale:

$$\log_{10}[a(T)] = -\frac{8.86 (T - T_0)}{101.6 + (T - T_0)}$$

In cui la temperatura di riferimento in gradi Celsius vale $T_0 \approx T_g + 50^\circ\text{C}$.

Definiamo inoltre la frequenza ridotta come: $f_R = f a(T)$.

Delle formule per stimare quindi il modulo elastico e il coefficiente di perdita per attrito sono le seguenti:

$$E_{y,Re} = \frac{E_{y,low} + \sqrt{E_{y,low}E_{y,high}}(f_R/f_m)^{2/q}}{1 + \sqrt{E_{y,low}/E_{y,high}}(f_R/f_m)^{2/q}}$$

$$\eta = \frac{(f_R/f_m)^{1/q}(\eta_{max} - \eta_{min})}{1 + (f_R/f_m)^{1/q}} + \eta_{min}$$

dove $E_{y,low}$ e $E_{y,high}$ sono i valori asintotici del modulo di elasticità, f_m è il valore della frequenza ridotta in corrispondenza del valore massimo del coefficiente di perdita per smorzamento che è η_{max} , mentre η_{min} è il valore minimo che assume tale grandezza. Il coefficiente q è un numero compreso tra 1 e 4 che permette di aggiustare la formula con i dati sperimentali.

Di seguito riportiamo una figura che confronta i risultati ricavati analiticamente con quelli sperimentali per il PVC in funzione della frequenza ridotta f_R (Figura 4.7) per il quale: $T_0 = 110^\circ \text{ C}$, $f_m = 5000 \text{ Hz}$, $q = 2$, $E_{y,low} = 7 \times 10^6 \text{ Pa}$, $E_{y,high} = 1.8 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\eta_{max} = 1.2$ e $\eta_{min} = 0.1$ (le caratteristiche delle differenti prove sperimentali non sono state precisate dall'autore).

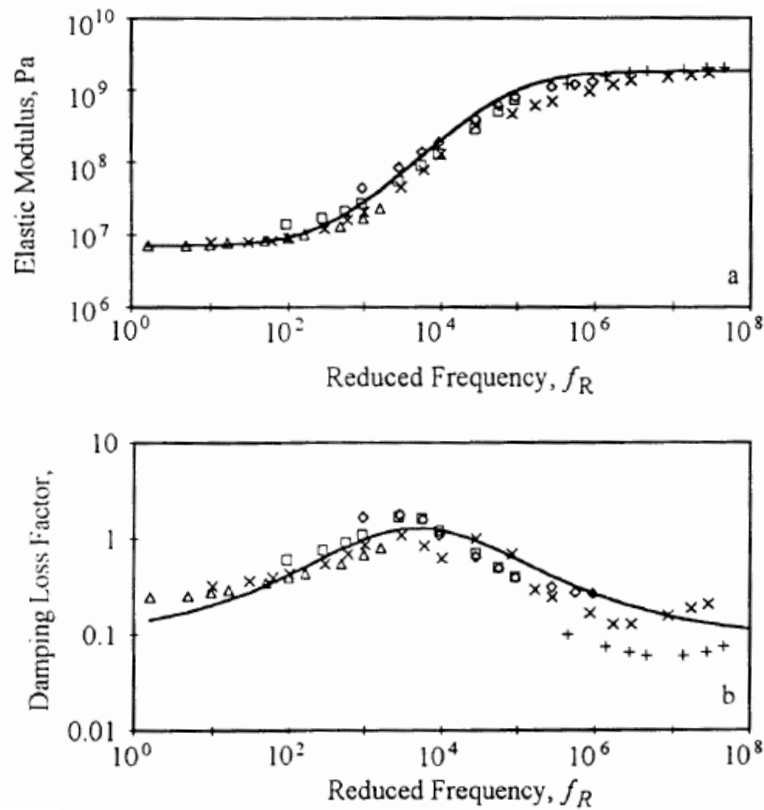


Figura 4.7: Modulo elastico e DLF del PVC in funzione della frequenza ridotta f_R . (immagine tratta da [41]).

Nella Figura 4.8 riportiamo alcuni valori per quanto riguarda il coefficiente di perdita per smorzamento massimo e il modulo elastico valutati nelle condizioni di temperatura e frequenza che garantiscono il livello massimo di smorzamento per alcuni polimeri.

Polyvinylchloride (pure)	$\eta = 1.8$	$E = 3 \times 10^8$	at 92 °C and 20 Hz
Polystyrene	$\eta = 2.0$	$E = 30 \times 10^8$	at 140 °C and 2000 Hz
Polyisobutylene	$\eta = 2.0$	$E = 0.6 \times 10^8$	at 20 °C and 3000 Hz
Nitrile Rubber	$\eta = 0.8$	$E = 33 \times 10^8$	at 20 °C and 1000 Hz
Hard Rubber	$\eta = 1.0$	$E = 20 \times 10^8$	at 60 °C and 40 Hz
Polyvinylchloride with 30% plasticizer	$\eta = 0.8$	$E = 2 \times 10^8$	at 50 °C and 100 Hz

Figura 4.8: DLF_{max} e modulo elastico [$\text{dyn/cm}^2 = 10^{-1} \text{ Pa}$] per alcuni materiali polimerici comuni (immagine tratta da [71]).

4.6 Metodi per aumentare lo smorzamento.

Consideriamo per semplicità un sistema composto da due sottosistemi e supponiamo di calcolare l'energia associata ad ognuno di essi nota la potenza in ingresso. Per quanto abbiamo visto dalla teoria dell'analisi statistica dell'energia ognuno dei due sottosistemi dissiperà della potenza mentre una quota parte di potenza verrà scambiata tra i due. Di seguito riportiamo in Figura 4.9 lo schema di base dell'analisi SEA tra due sottosistemi.

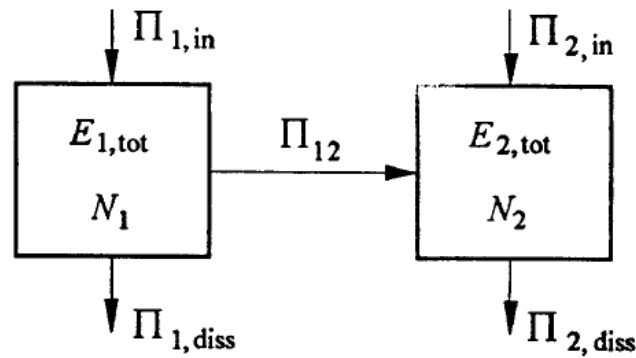


Figura 4.9: Rappresentazione schematica di due sottosistemi tramite SEA (immagine tratta da [41]).

Le equazione di bilancio della potenza in condizioni di regime che possiamo ricavare per questo semplice caso sono:

$$\Pi_{1,in} = \Pi_{1,diss} + \Pi_{12} = \omega \eta_1 E_{1,tot} + \omega (\eta_{12} E_{1,tot} - \eta_{21} E_{2,tot})$$

e

$$\Pi_{2,in} = \Pi_{2,diss} + \Pi_{21} = \omega\eta_2 E_{2,tot} + \omega(\eta_{21} E_{2,tot} - \eta_{12} E_{1,tot}).$$

Risolvendo queste semplici equazioni lineari nel caso in cui $\Pi_{2,in} = 0$ possiamo ricavare che il rapporto tra le energie dei due sottosistemi è:

$$\frac{E_{2,tot}}{E_{1,tot}} = \frac{\eta_{12}}{\eta_2 + \eta_{21}} = \frac{N_2}{N_1} \frac{\eta_{21}}{\eta_2 + \eta_{21}}$$

in cui abbiamo utilizzato anche la semplice relazione di consistenza tra i CLF:

$$N_i \eta_{ij} = N_j \eta_{ji}.$$

Allora appare evidente che all'aumentare del coefficiente η_2 il rapporto tra le energie diminuisca e il discorso vale anche viceversa scambiando i ruoli tra i sottosistemi. Da questo capiamo che se vogliamo minimizzare lo scambio di potenza (e quindi energia) tra sottosistemi dobbiamo avere che essi siano caratterizzati da coefficienti di perdita per smorzamento elevati. È importante notare che essi devono essere elevati rispetto ai CLF e non in senso assoluto.

Alla luce di quanto appena spiegato si giustifica l'utilizzo di trattamenti per aumentare lo smorzamento dei sottosistemi. Infatti dalle tabelle e dai grafici precedenti sappiamo che i metalli sono caratterizzati da DLF bassi. Allora possiamo aggiungere ad essi dei materiali polimerici in modo tale da differenziare le funzioni: il materiale metallico svolge la funzione strutturale e quello polimerico smorza le vibrazioni.

Per raggiungere tale obiettivo abbiamo a disposizione due diverse strategie:

- Poniamo il materiale polimerico sopra quello metallico in modo tale che una sua faccia sia libera (free damping layer);
- Poniamo il materiale polimerico in mezzo all'elemento metallico (constrained damping layer).

È importante notare sin da subito che il materiale polimerico lavorerà bene principalmente quando l'elemento sarà sottoposto a flessione. Infatti in tal caso su di esso si genereranno deformazioni maggiori rispetto al materiale della struttura e quindi uno smorzamento più elevato, mentre nel caso longitudinale, assumendo che ci sia sempre continuità del materiale, le deformazioni della struttura e del polimero saranno identiche.

Di seguito andiamo a vedere come stimare i coefficienti di perdita per accoppiamento longitudinale e flessionale in entrambe le configurazioni.

4.6.1 *Free damping layer.*

In questo tipo di configurazione una faccia del materiale polimerico viene lasciata libera mentre l'altra è a contatto con la superficie dell'elemento strutturale (Figura 4.10a). Possiamo definire il coefficiente effettivo di rigidezza per un materiale come:

$$K = E_y(1 + j\eta)h$$

dove con E_y indichiamo il modulo elastico per non confonderlo con l'energia E , η è il DLF e h è lo spessore del materiale.

Data questa definizione si deriva facilmente che:

$$\eta = \frac{Im(K)}{Re(K)}$$

in analogia con quanto definito nel Paragrafo 4.4:

$$\eta = \frac{Im(E_y)}{Re(E_y)}.$$

Quindi per i due elementi abbiamo:

$$K_1 = E_{y1}(1 + j\eta_1)h_1$$

e

$$K_2 = E_{y2}(1 + j\eta_2)h_2.$$

Nel caso di sollecitazioni longitudinali la deformazione dei due elementi è uguale poiché si assume perfetta continuità e la rigidezza effettiva globale è pari alla somma delle rigidezze effettive. Ne consegue che lo smorzamento equivalente sia pari a:

$$\eta_L^{free} = \frac{\eta_1 K_{1,Re} + \eta_2 K_{2,Re}}{K_{1,Re} + K_{2,Re}}$$

che altro non è che una media pesata dei coefficienti di smorzamento per le rigidezze equivalenti dei singoli materiali. Con il pedice Re indichiamo la parte reale del coefficiente effettivo di rigidezza.

Nel caso in cui siano $K_{2,Re} \ll K_{1,Re}$ possiamo semplificare la formula in:

$$\eta_L^{free} = \eta_1 + \frac{\eta_2 K_{2,Re}}{K_{1,Re}} = \eta_1 + \frac{\eta_2 E_{y2} h_2}{K E_{y1} h_1}.$$

Quello che possiamo notare è che i moduli elastici dei materiali metallici sono piuttosto elevati rispetto quelli dei materiali polimerici (10^{10} Pa confronto a 10^9 Pa nei casi migliori) e di conseguenza il coefficiente η_L^{free} sarà di poco superiore al coefficiente di perdita per smorzamento del metallo. Le vibrazioni longitudinali sono quindi debolmente smorzate utilizzando spessori di materiale polimerico contenuti.

Considerando il caso flessionale possiamo raggiungere livelli di smorzamento maggiori in quanto, essendo il materiale polimerico disposto a una distanza maggiore dall'asse neutro, sarà caratterizzato da deformazioni maggiori rispetto al materiale strutturale. Ne consegue che più distante sarà il polimero rispetto all'asse neutro maggiore sarà l'effetto finale. Per tale motivo spesso si interpongono degli elementi (spacer) di funzioni strutturali trascurabili ma tali che sia possibile aumentare il DLF flessionale (si veda Figura 4.10(b)).

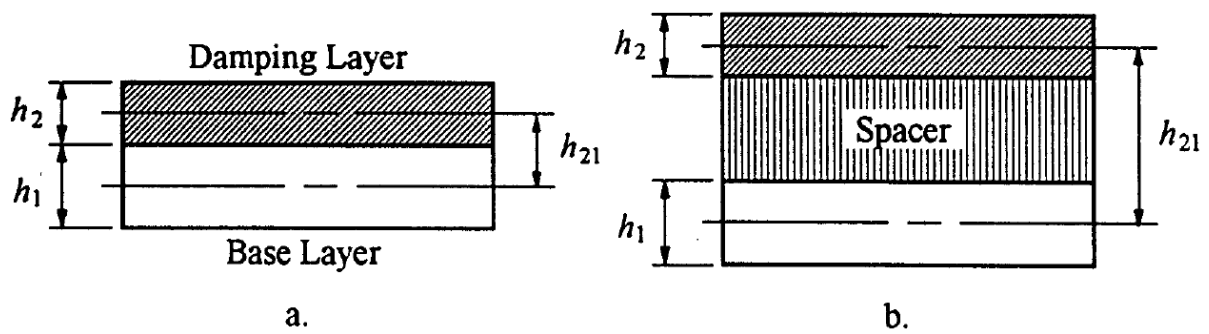


Figura 4.10: Free damping layer: configurazione semplice(a) e con spacer (b) (immagine tratta da [41]).

La formula analitica per calcolare il coefficiente di perdita per smorzamento nel caso flessionale è:

$$\eta_B^{free} = \eta_1 + \frac{\eta_2 K_{2,Re} \left[\kappa_2^2 + \frac{h_{21}^2}{(1 + K_{2,Re}/K_{1,Re})^2} \right]}{K_{1,Re} \left[\kappa_1^2 + \frac{h_{21}^2}{(1 + K_{1,Re}/K_{2,Re})^2} \right]}$$

che nel caso in cui sia vera la diseuguaglianza $K_{2,Re} \ll K_{1,Re}$ diventa:

$$\eta_B^{free} = \eta_1 + \frac{\eta_2 K_{2,Re} (\kappa_2^2 + h_{12}^2)}{K_{1,Re} \kappa_1^2}$$

dove κ_1 e κ_2 sono i raggi giratori della sezione che per piastre omogenee sono pari a $h/\sqrt{12}$ mentre il significato degli spessori è chiaro dalla Figura 4.10.

Di seguito riportiamo una figura che confronta i risultati analitici ottenuti utilizzando le formule precedenti con i dati numerici di una prova flessionale.

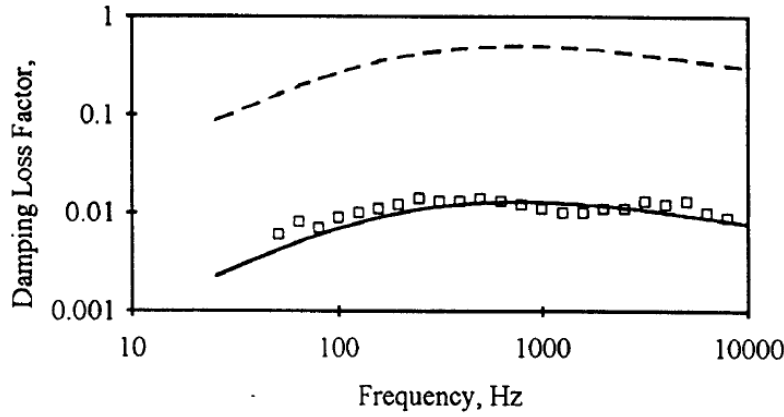


Figura 4.11: Confronto tra la formula analitica (linea continua) e i valori sperimentali di η_B^{free} per una piastra in acciaio spessa 5.1 mm e da un elemento smorzante in EAR C-1002 spesso 3.2 mm (immagine tratta da [41]).

Quello che possiamo vedere dalla figura è che c'è una buona corrispondenza tra i valori calcolati analiticamente e i valori misurati sperimentalmente. Inoltre si nota che il DLF dipende dalla frequenza della sollecitazione. Ci si poteva aspettare tale comportamento visto che le proprietà dei materiali di base dipendono da questa grandezza.

Un'altra formula utile per valutare η_B^{free} viene data da Cremer [71] (valida nel caso in cui non venga utilizzato uno spacer):

$$\eta_B^{free} = \eta_2 \frac{E_{y2} h_2 a^2}{B}$$

in cui η_2 , E_{y2} , h_2 e a sono rispettivamente DLF, modulo elastico, spessore e distanza dall'asse neutro del materiale polimerico, dove quest'ultima possiamo valutarla come $a = (h_1 + h_2)/2$. Mentre B è la rigidezza flessionale che è valutabile semplicemente come:

$$B \approx \frac{E_{y1} h_1^3}{12} + E_{y2} h_2 a^2.$$

Questa formula risulta essere utile per verificare la dipendenza di η_B^{free} dal rapporto di spessore al variare del rapporto tra i moduli elastici dei due materiali (Figura 4.12).

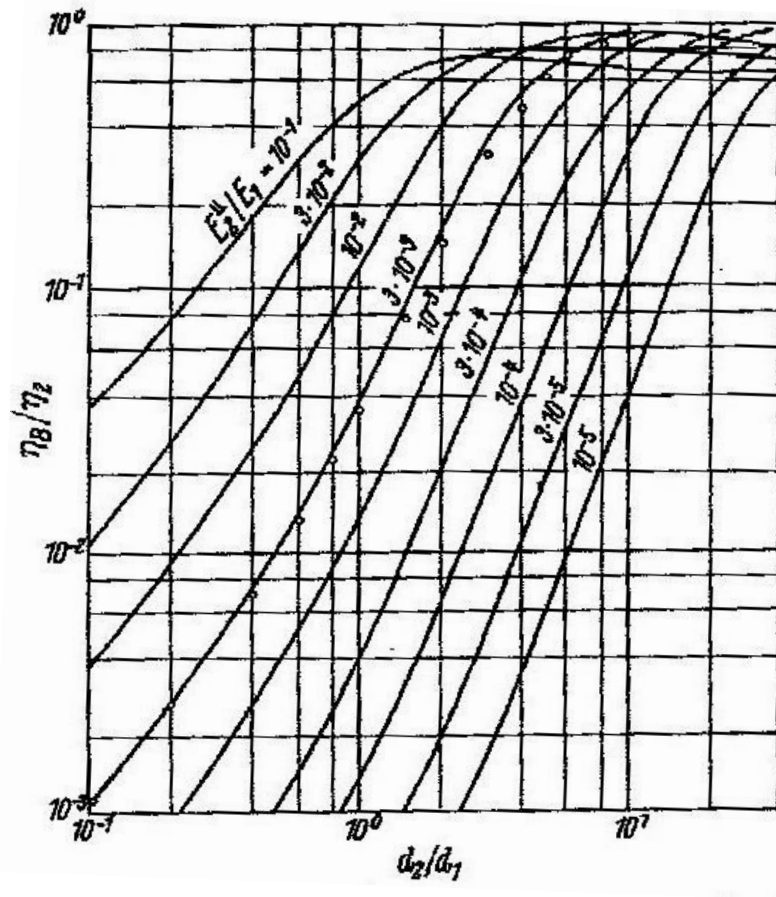


Figura 4.12: Andamento di η_B^{free}/η_2 al variare del rapporto di spessore e per vari rapporti tra i moduli elastici E_{y2}/E_{y1} (immagine tratta da [71]).

Dalla figura possiamo vedere che all'aumentare dello spessore dell'elemento smorzante il DLF globale tende al valore di η_2 e inoltre più è elevato il rapporto tra i moduli elastici più elevato è il valore dello smorzamento.

4.6.2 Constrained damping layer.

In questa seconda tipologia di configurazione il materiale polimerico viene disposto tra due elementi strutturali (Figura 4.13).

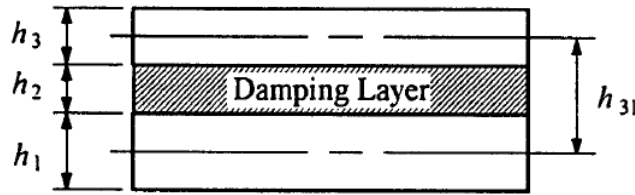


Figura 4.13: Configurazione constrained damping layer (immagine tratta da [41]).

Per quanto riguarda il caso longitudinale il comportamento dell'assemblato risulta essere identico al caso del free damping layer in quanto la deformazione longitudinale prevede che tutti gli elementi subiscano la stessa deformazione e l'ordine degli elementi non influenza il risultato finale. Quindi basta tenere conto nella formula di un terzo termine aggiuntivo e otteniamo:

$$\eta_L^{constr} = \frac{\eta_1 K_{1,Re} + \eta_2 K_{2,Re} + \eta_3 K_{3,Re}}{K_{1,Re} + K_{2,Re} + K_{3,Re}}$$

in cui il significato dei simboli è in il medesimo rispetto al caso free damping layer.

Per quanto riguarda il caso flessionale in questo caso il calcolo è molto complesso poiché si ha la presenza di tre elementi differenti. Seguendo quanto riporta Lyon [41], possiamo però ottenere delle formule semplificate considerando prima l'elemento alle basse frequenze e poi alle alte (Lyon non specifica i limiti di applicabilità delle singole formule al variare della frequenza), ottenendo rispettivamente:

$$\eta^{LF} \approx \frac{2\pi f \eta_2 h_2 \sqrt{M''}}{G_2 (1 + \eta_2^2) \left(\frac{1}{K_{1,Re}} + \frac{1}{K_{2,Re}} \right)^2 \sqrt{B_{Re}^{LF}}}$$

dove

$$B_{Re}^{LF} \approx B_{1,Re} + B_{3,Re} + \frac{h_{31}^2}{\frac{1}{K_{1,Re}} + \frac{1}{K_{3,Re}}}$$

e

$$\eta^{HF} \approx \frac{\eta_2 G_2 h_{31}^2}{2\pi f h_2 \sqrt{M'' B_{Re}^{HF}}}$$

dove

$$B_{Re}^{HF} \approx B_{1,Re} + B_{3,Re}.$$

Nelle formule precedenti abbiamo che M'' indica la densità media dell'elemento, G_2 è il modulo di rigidezza a taglio, mentre $B_i = E_{y,i}(1 + j\eta_i)h_i^3/12$ è la rigidezza flessionale dell' i -esimo elemento. Il significato degli altri simboli si evince dalla Figura 4.13.

Infine Lyon [41] propone una formula che garantisce una buona approssimazione valida in tutto il campo delle frequenze sfruttando le formule precedenti:

$$\eta_B^{constr} = \frac{1}{\frac{1}{\eta^{LF}} + \frac{1}{\eta^{HF}}}.$$

Di seguito riportiamo una figura che confronta i valori del coefficiente di perdita per smorzamento dati dalla formula numerica con i dati sperimentali (Figura 4.14).

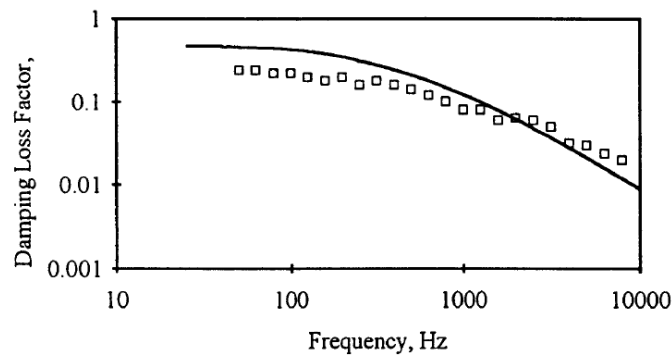


Figura 4.14: Confronto tra la formula analitica (linea continua) e i valori sperimentali di η_B^{constr} per due piastre di acciaio di spessori 5.1 mm e 1.3 mm separate da un elemento smorzante in EAR C-1002 spesso 3.2 mm (immagine tratta da [41]).

4.7 Smorzamento generato dalle giunzioni.

Fino a questo punto abbiamo visto come calcolare lo smorzamento prodotto dal materiale, il caso particolare dei materiali polimerici e come utilizzare questi ultimi per aumentare il coefficiente di perdita per smorzamento di elementi strutturali.

Rimane da trattare il caso dello smorzamento introdotto dalle giunzioni che abbiamo indicato nel Paragrafo 4.1 con η_b e che come già più volte ricordato deve essere considerato un fattore di perdita del materiale in quanto supponiamo che le giunzioni si comportino in modo conservativo.

Di seguito diamo le formule analitiche necessarie per valutare η_b .

Nel caso i cui la giunzione sia puntuale, ad esempio quando una trave è bullonata a una piastra o due travi sono bullonate insieme, allora per ognuno dei due sottosistemi vale:

$$\eta_{point} = \frac{\overline{\delta f}}{\pi f} \frac{\alpha}{2 - \alpha}$$

dove α è il coefficiente di assorbimento (rapporto tra la potenza assorbita alla giunzione e la potenza incidente) e viene valutato sperimentalmente, $\overline{\delta f}$ è la separazione media in frequenza e f è la frequenza centrale della banda in cui si vuole avere una stima di η_{point} .

Nel caso in cui la giunzione sia lineare possiamo utilizzare:

$$\eta_{line} = \frac{kL_\alpha}{\pi} \frac{\overline{\delta f}}{\pi f} \frac{\bar{\alpha}}{2 - \bar{\alpha}}$$

in cui kL_α/π rappresenta il numero di semi-lunghezze d'onda lungo la linea L_α e può essere pensato come il numero equivalente di punti di assorbimento in funzione della frequenza e $\bar{\alpha}$ è il valore medio del coefficiente di assorbimento lungo la linea che deve essere valutato sperimentalmente. k è il numero d'onda dell'onda che interessa la giunzione (successivamente nel Paragrafo 5.9 vedremo le formule per ricavare tale grandezza noto il tipo di onda e cioè se essa è flessionale, longitudinale o di taglio).

È importante sottolineare che i sistemi che presentano giunti bullonati, rivettati o saldati per punti dissipano energia a causa dell'attrito e dell'azione del fluido viscoso (fluid

pumping) che occupa le intercapedini tra gli elementi delle giunzioni. L'attrito secco è un fenomeno non lineare che assume importanza quando gli spostamenti relativi sono elevati. Nel caso che stiamo considerando le ampiezze del moto sopra i 100 Hz sono comprese tra i 10^{-10} e i 10^{-5} metri [71]. Se ne deduce che i livelli di smorzamento associati all'attrito secco sono spesso piccoli se confrontati con quelli provocati dal fluido viscoso [41,71]. Per tale motivo se non consideriamo l'azione del fluido abbiamo che il DLF risulta essere superiore di meno di un ordine di grandezza rispetto al caso in cui non venga considerato l'attrito all'interfaccia (si veda anche la Figura 4.15). Di seguito riportiamo una figura che descrive l'andamento del coefficiente di assorbimento al variare della frequenza e della distanza tra i bulloni (tiene conto principalmente dell'azione del fluido).

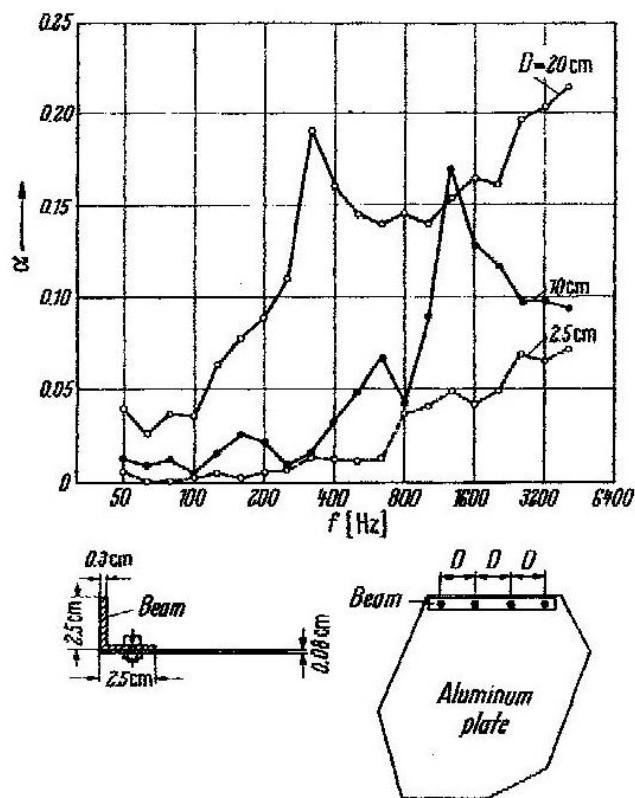


Figura 4.15: coefficiente di assorbimento al variare della frequenza e della distanza tra i bulloni (immagine tratta da [71]).

Dalla figura precedente possiamo notare come all'aumentare della frequenza aumenti il coefficiente di assorbimento e inoltre esso dipende anche dalla distanza tra i bulloni: all'aumentare di questa quantità il coefficiente aumenta. Al diminuire della pressione atmosferica tale smorzamento diminuisce a causa del minore effetto del fluido viscoso.

4.8 Alcuni dati empirici.

Nella trattazione precedente abbiamo già riportato alcune tabelle, grafici e formule dalle quali possiamo ricavare i valori del DLF.

In questo paragrafo, alla luce di quanto visto, sottolineiamo alcuni aspetti importanti per quanto riguarda lo smorzamento. Di seguito riportiamo la Figura 4.16.

Dalla figura possiamo notare delle cose importanti:

- Il valore del coefficiente di smorzamento per elementi saldati e senza trattamenti che ne aumentino lo smorzamento è compreso tra 2.5×10^{-4} e 5×10^{-2} [17,41];
- Il coefficiente di smorzamento tende a diminuire all'aumentare della frequenza [17,41];
- La presenza di giunti bullonati e rivettati aumenta lo smorzamento di meno di un ordine di grandezza;
- L'utilizzo di polimeri aumenta considerevolmente lo smorzamento fino a quasi due ordini di grandezza (nella figura il free layer è considerato senza spacer) e in alcuni casi si può arrivare ad avere un DLF unitario [71].

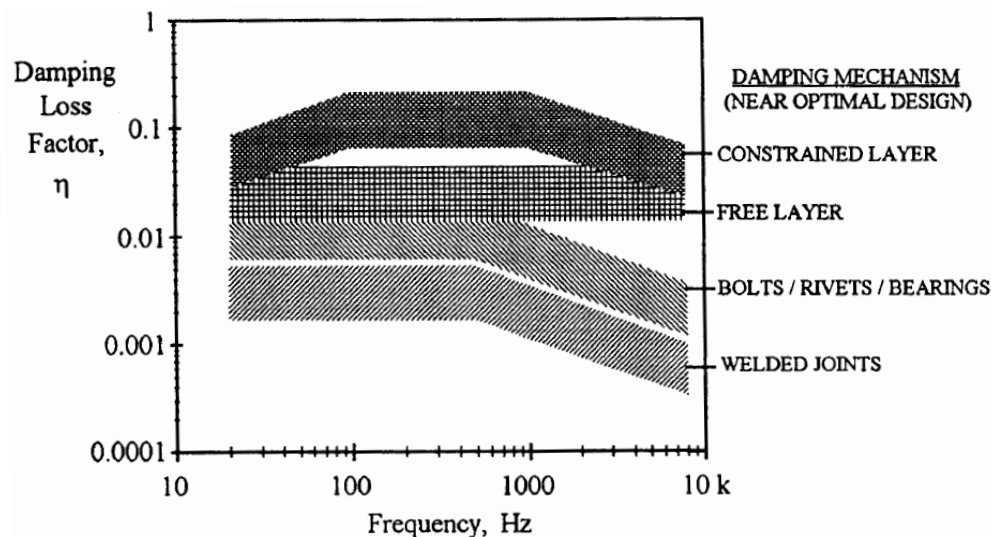


Figura 4.16: Dati sperimentali per piastre di alluminio e acciaio di dimensioni tra 0.1 e 10 m (immagine tratta da [41]).

4.9 DLF per materiali compositi e pannelli irrigiditi.

Per quanto riguarda i materiali compositi e i pannelli irrigiditi il discorso è più complesso e dalla letteratura non emergono formule analitiche che possano dare una stima del coefficiente di perdita per smorzamento.

Di certo quello che possiamo dire per i materiali compositi è che il DLF dipende dai materiali delle fibra e della matrice che formano l'elemento strutturale. Quindi è chiaro che se il materiale è a matrice polimerica presenterà uno smorzamento dello stesso ordine di grandezza del corrispondente polimero. Questo fatto può essere messo bene in evidenza dalla Figura 4.4 in cui possiamo vedere come questa categoria di materiali presenti un valore di DLF compreso tra 0.01 e 1. D'altra parte se la matrice è metallica allora il coefficiente di perdita per smorzamento sarà dello stesso ordine di grandezza del metallo di base.

Considerando i pannelli irrigiditi il discorso è complesso e si complica ulteriormente se utilizziamo un materiale polimerico per aumentare lo smorzamento. Per questi casi non sono a disposizione formule analitiche. Allora nel caso si procederà considerando i pannelli come se non fossero irrigiditi.

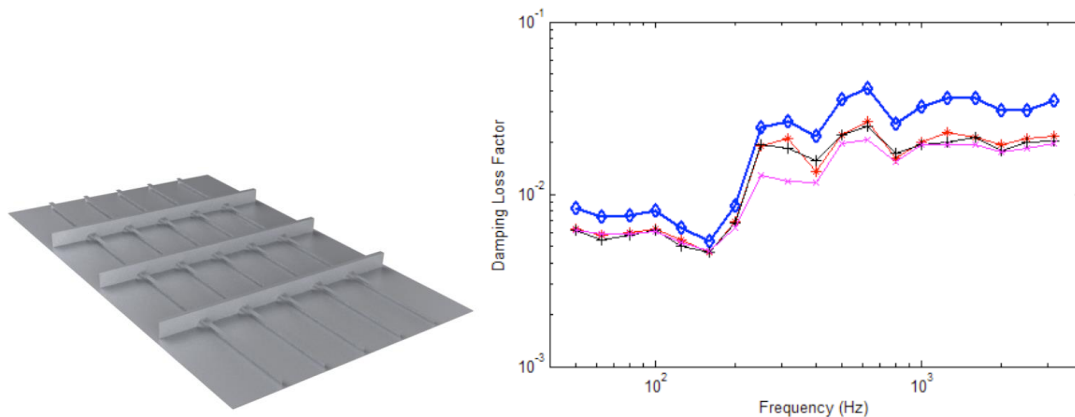


Figura 4.17: pannello irrigidito studiato nell'articolo [40] e DLF per 4 diverse configurazioni del materiale polimerico (immagine tratta da [40]).

Una eventuale metodologia di calcolo che invece tiene conto degli irrigidimenti viene proposta da Cordioli [40]: essa si basa sulla analisi FEM e permette di determinare anche la disposizione migliore del materiale polimerico per ottenere un DLF maggiore. In questo

caso è stata proposta una metodologia FEM in quando in fase di progettazione bisogna considerare molte configurazioni e quindi non è possibile ricorrere ai test perché dispendiosi in termini di tempo ed economici. In Figura 4.17 sono riportati alcuni risultati ottenuti da Cordioli osservando che essi valgono solo per il caso studiato nell'articolo relativo e non possono essere considerati valori assoluti (per ulteriori dettagli si veda [40]).

Capitolo 5 : COUPLING LOSS FACTOR

5.1 Introduzione.

Il coefficiente di perdita per accoppiamento (CLF, Coupling Loss Factor) è un parametro fondamentale all'interno dell'analisi statistica dell'energia, infatti, come abbiamo visto nel Paragrafo 1.6, si assume che la potenza media scambiata tra due sottosistemi sia proporzionale alla differenza di energia modale media dei sottosistemi tramite un fattore di proporzionalità che comprende il CLF. L'equazione che rappresenta lo scambio di potenza (energia per unità di tempo) tra sottosistemi è quindi:

$$\Pi_{12} = 2\pi f (\eta_{12}E_1 - \eta_{21}E_2)$$

dove f rappresenta la frequenza centrale della banda di sollecitazione considerata e E_1 e E_2 rappresentano le energie totali dei sottosistemi 1 e 2 rispettivamente.

In generale possiamo quindi definire il CLF come una quantità che misura la potenza che fluisce da un sottosistema ad un altro attraverso una giunzione. Tale grandezza dipende nel caso più generale da:

- Caratteristiche fisiche e geometriche del sottosistema;
- Tipo di connessione tra sottosistemi (punto, linea o superficie);
- Tipo di giunzione (massa distribuita, trave a sezione aperta, trave a sezione chiusa, rivetti, bulloni).

Per stimare questo coefficiente abbiamo [41]:

- Metodi analitici che ci permettono di ricavare delle formule semplici secondo due differenti approcci: modale e tramite onde;
- Metodi sperimentali;
- Metodi numerici.

I metodi sperimentali sono quelli che offrono risultati migliori anche se ovviamente valgono per il singolo caso esaminato e comportano investimenti in termini di tempo ed economici.

Per quanto riguarda i metodi numerici possiamo dire che si cerca di farne un uso sempre maggiore soprattutto perché essi permettono di studiare geometrie e giunzioni complesse e la ricerca in questo campo è molto attiva (si vedano ad esempio i riferimenti [14, 16, 19, 22, 29, 39]). È chiaro che se da una parte questa tecnica permette dei vantaggi per quanto riguarda la complessità del sistema dall'altra dobbiamo sottolineare che presenta dei limiti sia in termini temporali, infatti realizzare un modello FEM e ottenere risultati accurati è dispendioso, sia di validità alle alte frequenze in quanto sappiamo che la precisione dei risultati dipende dalla raffinatezza della mesh.

Per quanto appena esposto e tenendo conto che il nostro scopo è quello di utilizzare l'analisi statistica dell'energia come metodo di analisi rapido per il confronto di diverse geometrie strutturali utilizzeremo l'approccio analitico tramite il quale ricaveremo delle formule e delle metodologie per calcolare i CLF.

Inoltre occorre sottolineare che per i nostri obiettivi è sufficiente considerare accoppiamenti puntuali e lineari, ma non superficiali.

Infine dobbiamo ricordare che i CLF vanno valutati per ogni banda della sollecitazione.

5.2 Sottosistemi collegati in un punto.

Consideriamo due sottosistemi accoppiati e per semplicità assumiamo che siano accoppiati in un solo punto. Assumendo che:

- gli elementi siano semi-infiniti oppure analogamente che le onde che si propagano in essi siano incoerenti
- e che il campo vibrazionale sia diffuso

per essi possiamo scrivere:

$$\Pi_{1 \rightarrow 2} = 2\pi f \eta_{12} E_1$$

ma possiamo anche scrivere che la potenza trasmessa dipende dalla potenza incidente tramite:

$$\Pi_{tra} = \tau_{12,\infty} \Pi_{inc}.$$

Dove $\tau_{12,\infty}$ è il coefficiente di trasmissione nelle condizioni sopra riportate. Allora possiamo ricavare la relazione che lega CLF e coefficiente di trasmissione [41] nel caso in cui i due sottosistemi siano collegati in un solo punto:

$$\eta_{12} = \frac{\overline{\delta f_1}}{\pi f} \frac{\tau_{12,\infty}}{2 - \tau_{12,\infty}}$$

In cui $\overline{\delta f_1}$ è la separazione media in frequenza del sottosistema considerato. Sempre ritenendo valide le ipotesi riportate ad inizio paragrafo possiamo esprimere il coefficiente di trasmissibilità come:

$$\tau_{12,\infty} = \frac{4R_{1\infty}R_{2\infty}}{|Z_{1\infty} + Z_{2\infty}|^2}$$

dove $Z_{1\infty}$ e $Z_{2\infty}$ sono le impedenze meccaniche dei due sistemi e $R_{1\infty}$ e $R_{2\infty}$ sono le rispettive parti reali [41]. Allora note tali impedenze è possibile stimare il coefficiente di trasmissione e quindi il CLF.

È chiaro che il coefficiente di trasmissione calcolato in questo modo abbastanza approssimato e una stima migliore può essere data da:

$$\bar{\tau}_{12} = \frac{\tau_{12,\infty}}{\left(\left(\frac{1}{2\pi(\beta_1 + \beta_2)} \right)^2 + \left(1 + \tau_{12,\infty} \left(\frac{1}{2\pi\beta_1} + \frac{1}{2\pi\beta_2} \right) \right)^2 \right)^{1/2}}$$

dove con β_1 e β_2 rappresentiamo la sovrapposizione modale dei due sistemi: $\beta_i = f\eta_i/\overline{\delta f_i} = MOF/\pi/2$.

D'altra parte entrambe queste formule risultano essere un'approssimazione del reale coefficienti di trasmissione $\tau(f)$ tra due elementi. Il fatto è che per ottenere il reale coefficienti di trasmissione bisogna passare attraverso calcoli matematici molto complessi e per di più è possibile ottenerne delle formule analitiche solo in casi molto semplici (si

veda [71]). Di seguito riportiamo una figura in cui confrontiamo l'andamento teorico del coefficiente di trasmissione $\tau(f)$ per due travi in alluminio collegate ad angolo retto e $\bar{\tau}_{12}$ che otteniamo con la formula precedente (Figura 5.1) considerando appoggiati gli estremi in comune in modo tale che si trasferiscano solo le onde flessionali.

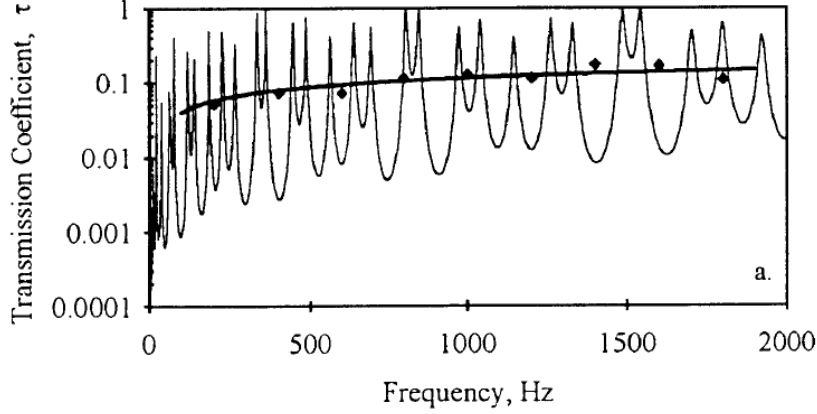


Figura 5.1: Confronto tra $\tau(f)$ (linea sottile), $\bar{\tau}_{12}$ (linea spessa) e dati sperimentali mediati su 400 Hz per due travi in alluminio di dimensioni 0.01x0.04x1.4 m e 0.01x0.04x1.9 m collegate ad angolo retto (immagine tratta da [41]).

Dalla figura possiamo notare come il valore medio stimato siamo particolarmente in accordo con i valori sperimentali, mentre l'andamento reale è complesso e di scarsa utilità per i nostri scopi.

A partire quindi dal valore di $\bar{\tau}_{12}$ possiamo calcolare il valore del CLF tramite la formula:

$$\eta_{12} = \frac{\overline{\delta f_1}}{\pi f} \frac{\bar{\tau}_{12}}{2 - \bar{\tau}_{12} \left(\frac{1}{\pi \beta_1} + \frac{1}{\pi \beta_2} \right)}$$

che risulta essere un adattamento di quella per il caso di elementi semi-infiniti.

Per comprendere la differenza tra le due formulazioni proposte (semi-infinita e media) possiamo riportare il risultati ottenuti sempre considerando l'esempio delle due travi in alluminio disposte da angolo retto dove si definisce il modal coupling factor come $\beta_{ij} = f \eta_{ij} / \overline{\delta f_i}$ (Figura 5.2).

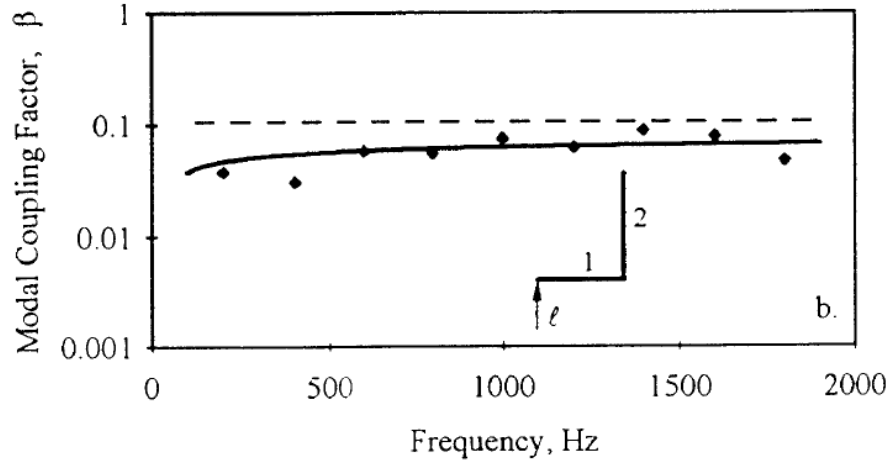


Figura 5.2: Confronto tra $\beta_{12,\infty}$ (linea tratteggiata), β_{12} (linea continua) e dati sperimentali mediati su 400 Hz per due travi in alluminio di dimensioni $0.01 \times 0.04 \times 1.4$ m e $0.01 \times 0.04 \times 1.9$ m collegate ad angolo retto (immagine tratta da [41]).

Possiamo notare quindi che l'approccio che implica la valutazione di $\bar{\tau}_{12}$ è in buon accordo con i dati sperimentali, mentre $\beta_{12,\infty}$ risulta essere una stima più approssimativa tenendo conto che il grafico riportato è semilogaritmico.

Nel momento in cui poi la sovrapposizione modale è maggiore di 0.5 la differenza tra η_{12} calcolato mediante $\tau_{12,\infty}$ e $\bar{\tau}_{12}$ è trascurabile [41]. Di seguito quindi utilizzeremo come riferimento la formula che utilizza $\tau_{12,\infty}$, che indicheremo semplicemente con τ_{12} , sapendo che all'occorrenza, ovvero per sovrapposizioni modali inferiori a 0.5, possiamo ricorrere alla seconda. I ragionamenti che svilupperemo saranno validi in entrambi i casi.

Per sottolineare che la formula:

$$\eta_{12} = \frac{\overline{\delta f_1}}{\pi f} \frac{\tau_{12,\infty}}{2 - \tau_{12,\infty}}$$

è valida anche considerando sistemi bi-dimensionali collegati in un punto riportiamo un confronto tra dati analitici ricavati utilizzando le formule precedenti e dati sperimentali per due piastre sottili tenendo conto di un coefficiente di confidenza pari al 95% sui dati sperimentali (Figura 5.3) e che le piastre si trasmettono solo onde flessionali.

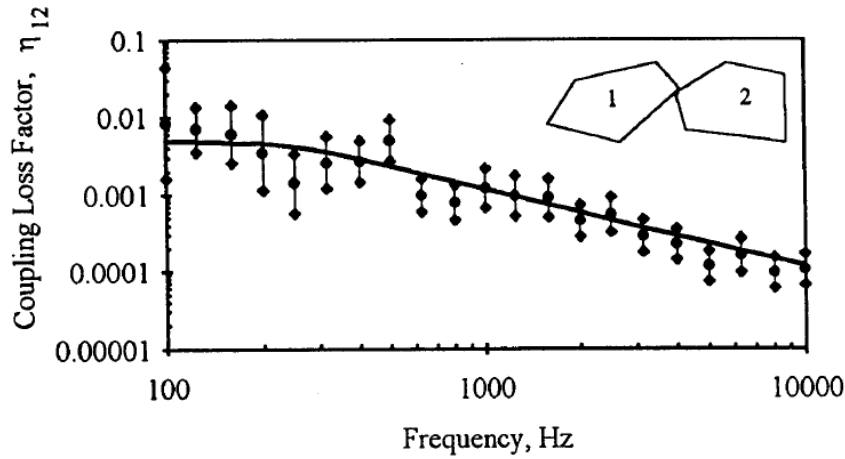


Figura 5.3: Confronto tra dati analitici e dati sperimentali del CLF per due piastre con confidenza pari al 95% sui dati sperimentali (immagine tratta da [41]).

È importante sottolineare che le differenze maggiori si riscontrano per frequenze basse per le quali sappiamo che una delle ipotesi dell'analisi statistica dell'energia, ovvero che il Modal Overlap Factor sia maggiore di 1, è difficilmente verificata.

Fino al momento abbiamo visto che il metodo SEA non prevede di valutare direttamente il CLF ma è necessario prima valutare il coefficiente di trasmissione. Questa procedura vale sempre per qualsiasi configurazione, tanto che possiamo scrivere in generale che:

$$\eta_{12} = \frac{\overline{\delta f_1}}{\pi f} \frac{\tau_{12}}{2 - \tau_{12}}$$

dove si tratta di valutare opportunamente la grandezza τ_{12} caso per caso.

5.3 Sottosistemi collegati lungo una linea.

Consideriamo due semplici piastre collegate una all'altra lungo una linea di lunghezza L_j . È intuitivo capire che una qualsiasi onda che si propaga su una piastra e che incide la giunzione in un punto e con un certo angolo verrà in parte trasmessa alla piastra adiacente e in parte riflessa (Figura 5.4).

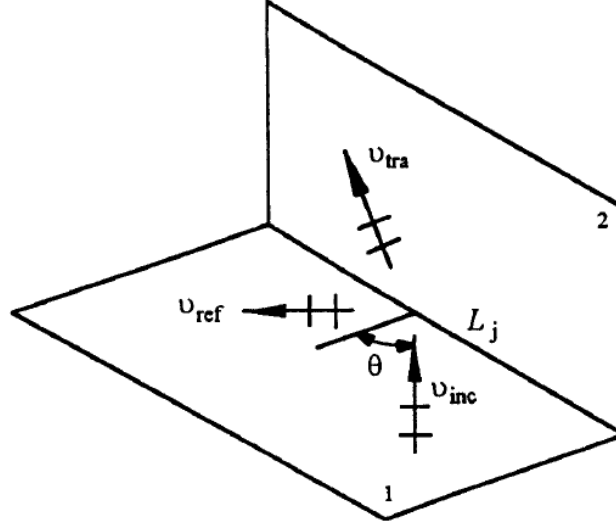


Figura 5.4: Piastre sottili collegati tramite una giunzione lineare (immagine tratta da [41]).

Dobbiamo anche considerare che per una singola onda incidente la lunghezza interessata è $\delta L_j \cos \theta$ e non δL_j , cioè dobbiamo tenere conto della sola proiezione ortogonale al fronte d'onda e non dell'intera lunghezza della giunzione.

Da quanto detto nel paragrafo precedente e per quanto appena sottolineato allora possiamo calcolare il CLF tramite la seguente formula:

$$\eta_{12}(\theta) = \frac{\overline{\delta f_1}}{\pi f} \frac{k_1 L_j \cos(\theta)}{2} \frac{\tau_{12}(\theta)}{2 - \tau_{12}(\theta)}$$

dove k_1 è in numero d'onda dell'onda considerata ($k = 2\pi/\lambda$, con λ lunghezza d'onda), L_j è la lunghezza della giunzione e il coefficiente di trasmissione $\tau_{12}(\theta)$ dipende dall'angolo di incidenza dell'onda θ .

Poiché si suppone che una sollecitazione che agisca sulla piastra crei un campo vibrazionale diffuso, allora sulla giunzione incideranno onde che formano con l'ortogonale un angolo θ variabile. E' quindi necessario ricavare il valore medio del CLF e ciò può essere fatto applicando il teorema del valore medio:

$$\langle \eta_{12} \rangle_\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \eta_{12}(\theta) d\theta.$$

A questo punto è chiaro che nel caso di sottosistemi collegati lungo una linea si tratta di andare a calcolare i coefficienti di trasmissione per ogni angolo di incidenza e poi mediare i risultati così ottenuti per ricavare il coefficiente di accoppiamento.

Di fatto però, nella letteratura, nel caso di piastre collegate lungo una linea non si calcola mai il coefficiente di trasmissione a partire dalle impedenze meccaniche ma si preferisce utilizzare un'altra tecnica che si basa sull'approccio delle onde e che ci permette di ricavare $\tau_{12}(\theta)$ per ogni banda di frequenza tramite le equazioni di equilibrio dell'analisi statica e la continuità del materiale. Di seguito, nel Paragrafo 5.9 vedremo tale approccio.

Per il momento sottolineiamo la correttezza del procedimento riportando in Figura 5.5 un confronto tra dati analitici e sperimentali per due piastre collegate ad angolo retto lungo lunghezze differenti (Lyon [41] non precisa la geometria e il materiale delle piastre).

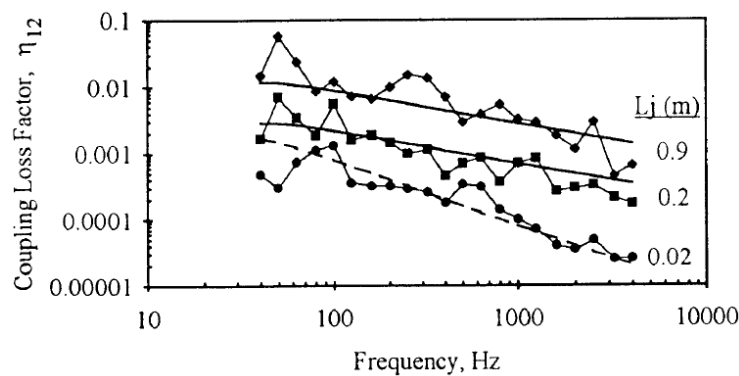


Figura 5.5: Confronto tra dati analitici e sperimentali per due piastre collegate ad angolo retto lungo lunghezze differenti (immagine tratta da [41]).

Dalla figura possiamo notare la buona corrispondenza tra dati analitici e sperimentali soprattutto per frequenze sopra i 100 Hz e che al diminuire della lunghezza della giunzione i risultati tendono a quelli della giunzione tramite un punto.

5.4 Impedenze utili per il calcolo dei CLF.

Precedentemente abbiamo visto come per il calcolo dei coefficienti di trasmissibilità sia necessario conoscere le impedenze meccaniche dei sistemi che scambiano potenza.

Di seguito riportiamo due tabelle che riportano le impedenze meccaniche per i principali sistemi sia che essi siano sollecitati tramite forze (Tabella 5.1) che tramite momenti (Tabella 5.2).

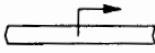
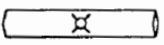
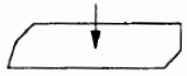
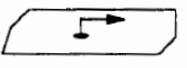
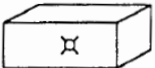
Subsystem Type	Illustration	Point Impedance
Bar, Longitudinal		$Z_L^{F,1D} = 2\rho S c_L$
Thin Beam, Bending		$Z_B^{F,1D} = 2\rho S c_B (1 + j)$
1D Acoustic Duct*		$Z_0^{U,1D} = 2\rho_0 c_0 / S$
Thin Plate, Bending		$Z_B^{F,2D} = 8\rho h \kappa_B c_L$
Plate, Inplane**		$Z_I^{F,2D} = 8\pi\rho h f r^2 \left(1 - \frac{j}{k_I r}\right)$
Acoustic Space*		$Z_0^{U,3D} = \frac{\pi\rho f^2}{c_0} \left(1 + \frac{j}{k_0 r}\right)$

Tabella 5.1: Impedenze meccaniche per sistemi sollecitati da forze (** r è il raggio di applicazione della forzante) (immagine tratta da [41]).

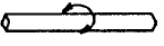
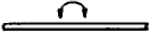
Subsystem Type	Illustration	Moment Impedance
Bar, Torsional*		$Z_T^{M,1D} = 2\rho\kappa_T^2 S c_L$
Thin Beam, Bending		$Z_B^{M,1D} = \frac{2\rho S c_B}{k_B^2} (1 - j)$
Thin Plate, Bending**		$Z_B^{M,2D} = \frac{16\rho h \kappa_B c_L / k_B^2}{1 + j(4/\pi) \ln(1/k_B r)}$

Tabella 5.2: : Impedenze meccaniche per sistemi sollecitati da momenti (** r è il raggio di applicazione della forzante) (immagine tratta da [41]).

Queste impedenze considerano solo il caso in cui la forza o il momento siano applicati all'interno dell'elemento strutturale. Cremer [71] riporta anche le impedenze nel caso le sollecitazioni siano applicate all'estremità e possiamo ricavare le seguenti regole:

- per una trave sollecitata longitudinalmente all'estremità l'impedenza $Z_L^{F,1D}$ va divisa per due;
- per una trave sollecitata flessionalmente da una forza all'estremità l'impedenza $Z_B^{F,1D}$ va divisa per 4;
- per una piastra sollecitata flessionalmente da una forza all'estremità l'impedenza vale $Z_B^{F,2D} = 3.5\rho h k_B c_L$;
- per una trave sollecitata flessionalmente da un momento flettente all'estremità l'impedenza $Z_B^{M,1D}$ va divisa per 4;
- per una piastra sollecitata flessionalmente da un momento flettente all'estremità il coefficiente non è 16 ma 5.3.

È importante sottolineare che tali impedenze sono utile anche per calcolare la potenza in ingresso quando è nota la forzante e il suo spettro in frequenza:

$$P_{in} = \langle l^2 \rangle \operatorname{Re}(Y) = \langle l^2 \rangle \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right).$$

5.5 Procedimento per il calcolo dei CLF.

Dopo aver introdotto le prime formule è bene spendere due parole sul procedimento da seguire per l'individuazione e il calcolo dei coefficienti di perdita di trasmissione:

1. Data la struttura la si divide in elementi strutturali (travi e piastre nei casi più semplici);
2. Per ogni elemento strutturale si individuano i sottosistemi e in base al valore della densità modale possiamo capire se siano tutti significativi o in caso contrario se alcuni possano essere trascurati;
3. Nel caso degli accoppiamenti tra travi o tra una trave e una piastra per ogni coppia di sottosistemi stimiamo il valore del coefficiente di accoppiamento utilizzando le impedenze opportune e le formule sopra riportate (nel caso più generale):

$$\tau_{12,\infty} = \frac{4R_{1\infty}R_{2\infty}}{|Z_{1\infty} + Z_{2\infty}|^2}$$

$$\bar{\tau}_{12} = \frac{\tau_{12,\infty}}{\left(\left(\frac{1}{2\pi(\beta_1 + \beta_2)} \right)^2 + \left(1 + \tau_{12,\infty} \left(\frac{1}{2\pi\beta_1} + \frac{1}{2\pi\beta_2} \right) \right)^2 \right)^{1/2}}$$

e infine

$$\eta_{12} = \frac{\overline{\delta f_1}}{\pi f} \frac{\bar{\tau}_{12}}{2 - \bar{\tau}_{12} \left(\frac{1}{\pi\beta_1} + \frac{1}{\pi\beta_2} \right)}$$

4. Nel caso delle giunzioni tra piastre a X, T o L utilizzeremo un approccio diverso che non utilizza le impedenze ma ricava i diversi coefficienti di perdita per accoppiamento tramite l'approccio delle onde e la continuità strutturale e le equazioni di equilibrio (Paragrafo 5.9).
5. Il caso di due piastre collegate da una trave è un caso particolare del caso 4 e può essere visto come un pannello irrigidito. Nel Paragrafo 5.8 si vedranno gli effetti introdotti dalla trave come spiegati nell'articolo [30].

È fondamentale notare che tale procedimento deve essere ripetuto per ogni banda in cui viene diviso lo spettro in frequenza della sollecitazione. Per semplificare il tutto poi vengono assunti dei valori medi all'interno di ogni banda sia per quanto riguarda la forzante che per i parametri che descrivono il sistema (densità modale, DLF e CLF).

5.6 Limiti di validità della teoria: accoppiamenti deboli e forti.

Quando nel Paragrafo 1.6 avevamo introdotto i CLF li avevamo ricavati a partire dal caso di due sistemi accoppiati e sottoposti a un rumore ad ampia banda dando sempre per scontato due fatti:

- I CLF sono indipendenti dal livello energetico effettivo dei due sottosistemi a cui si riferiscono;
- I CLF sono indipendenti da altri parametri del sottosistema come lo smorzamento.

In più nel Paragrafo 5.2 abbiamo introdotto le ipotesi:

- Gli elementi sono semi-infiniti oppure di dimensioni tali per cui valga la incoerenza delle onde tra due sottosistemi;
- Campo vibrazionale diffuso.

Di tutte queste ipotesi l'unica accettabile senza ulteriori considerazioni è che il campo vibrazionale sia diffuso. Per quanto riguarda le altre invece, si dice spesso nella letteratura, *sono vere qualora l'accoppiamento tra i sottosistemi sia debole* senza specificare di più sulla sua natura. Recentemente Mace [10,13,18] ha svolto dei lavori molto approfonditi per definire i limiti entro cui la teoria dell'analisi statistica dell'energia è valida e di seguito daremo i principali risultati trovati.

Innanzitutto, poiché Mace ha utilizzato la teoria di propagazione delle onde, consideriamo un'onda che incida con un certo angolo la giunzione e introduciamo il numero d'onda k e la traccia del numero d'onda k_y che altro non è che la proiezione del numero d'onda sulla giunzione. Ad esempio considerando un'onda flessionale abbiamo:

$$k = \sqrt{\frac{m\omega^2}{B}}$$

dove m è la massa, ω è la frequenza angolare e B è la rigidezza flessionale.

Ad ogni giunzione per ogni onda parte dell'energia viene trasmessa e parte riflessa e di questo teniamo conto attraverso i coefficienti di riflessione $r_{ii,n}$ e trasmissione $t_{ij,n}$. Ad esempio per due elementi generici a e b (Figura 5.6):

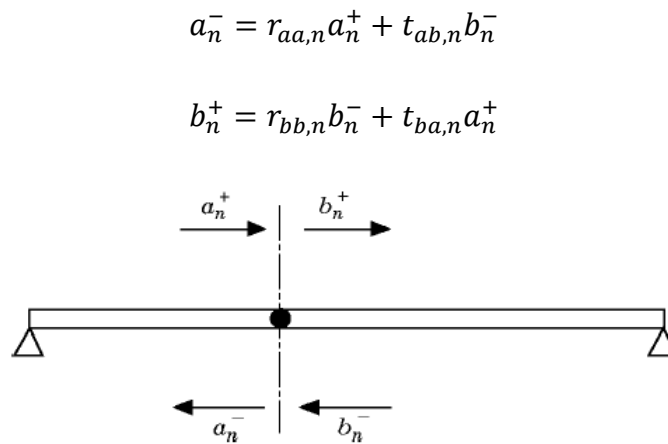


Figura 5.6: Elementi generici collegati da una giunzione (immagine tratta da [13]).

Per i coefficienti definiti valgono anche le seguenti relazioni:

$$|r_{aa,n}| = |r_{bb,n}| = R_n$$

$$|t_{ab,n}| = |t_{ba,n}| = T_n$$

$$R_n^2 + T_n^2 = 1.$$

E' bene precisare che in generale le prime due uguaglianze appena riportate non sono vere in generale. I coefficienti di riflessione e di trasmissione possono essere differenti, in quanto dipendono da proprietà e caratteristiche geometriche degli elementi.

Inoltre ad ogni bordo dobbiamo considerare che solo parte dell'energia viene riflessa mentre il resto viene dissipata e di questo teniamo conto attraverso i coefficienti ρ :

$$a_n^+ = \rho_{a,n} a_n^-$$

$$b_n^- = \rho_{b,n} b_n^+$$

dove:

$$\rho_n = e^{-\mu_n} e^{-i\Phi_n}.$$

La grandezza μ_n è detta riflettanza ed è una grandezza legata allo smorzamento del sistema [10,13] e che dipende dalla riflettanza di base μ_0 :

$$\mu_0 = \frac{kl\eta}{2}$$

$$\mu_n = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_y}{k}\right)^2}}$$

dove l è una specie di cammino libero medio che corrisponde alla lunghezza della trave o a una lunghezza media per le piastre che si ottiene dividendo l'area superficiale per il perimetro.

In tutte le formule precedenti il pedice n indica che tali valori si riferiscono all' n -esima banda in frequenza. Inoltre fissata una banda, e quindi un valore di k , la proiezione di tale

grandezza lungo la giunzione, che indichiamo con k_y , può variare a seconda dell'angolo di incidenza che l'onda forma con la giunzione.

La riflettanza è una grandezza fondamentale nell'analisi di Mace [10,13,18] e è caratterizzata da un andamento come quello riportato in Figura 5.7. In tale figura possiamo vedere come per tracce di lunghezza d'onda elevate la riflettanza sia un valore particolarmente elevato mentre per tracce inferiori essa non si discosti dal valore di base μ_0 .

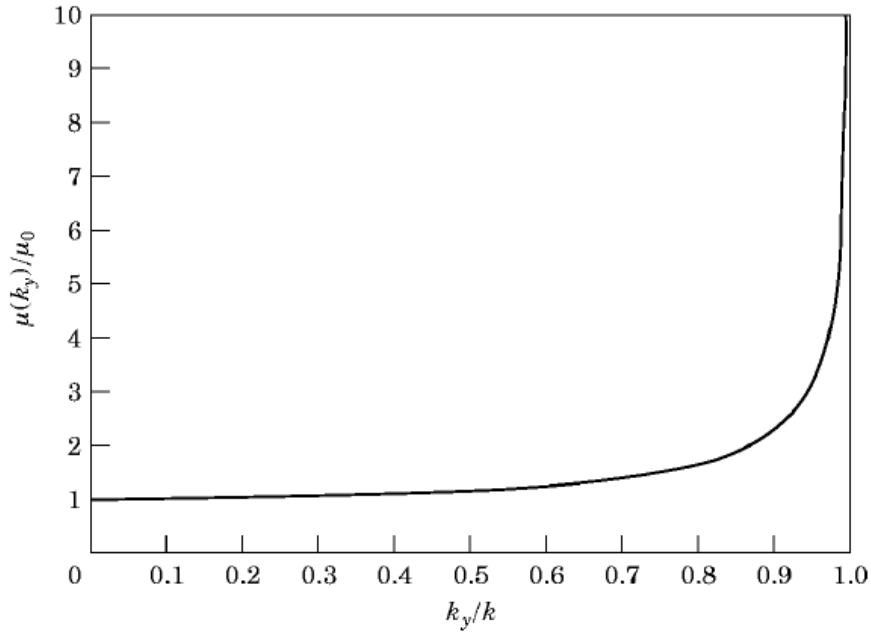


Figura 5.7: Riflettanza normalizzata in funzione della traccia del numero d'onda normalizzato (immagine tratta da [13]).

Mace inoltre introduce un parametro che tiene conto della forza dell'accoppiamento:

$$\gamma_n^2 = \frac{T_n^2 \cosh^2(\mu_{dn})}{\sinh(\mu_{an}) \sinh(\mu_{bn})}$$

dove T_n^2 è il valore del coefficiente di trasmissibilità, μ_{an} è la riflettanza dell'elemento a, μ_{bn} è la riflettanza dell'elemento b e μ_{dn} è la semidifferenza delle riflettanze di a e b. Questo parametro praticamente tiene conto di quanto l'accoppiamento è forte rispetto alla riflettanza e cioè di quanto l'accoppiamento è più forte dello smorzamento. Quando tale indice è $\gamma_n^2 \leq 1$ allora siamo in condizioni di accoppiamento debole.

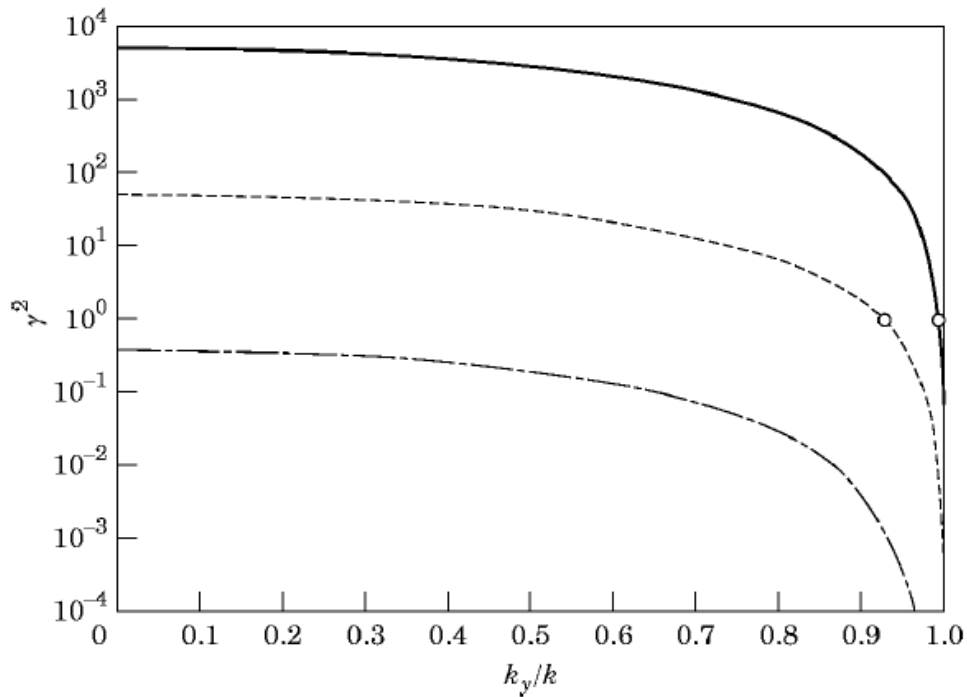


Figura 5.8: Andamento del parametro γ_n^2 al variare della traccia del numero d'onda al variare della riflettanza di base: $\mu_0=0.01$ (linea continua), $\mu_0=0.1$ (linea tratteggiata), $\mu_0=1$ (linea tratto-punto) (immagine tratta da [13]).

Ciò che risulta dalla Figura 5.8 è che quando la riflettanza è elevata allora l'accoppiamento risulta debole per tutte le onde incidente, mentre per valori non troppo elevati per le onde che elevata traccia l'accoppiamento è debole mentre per le altre l'accoppiamento è forte.

A questo punto ci interessa capire come varia la potenza trasmessa al variare della riflettanza (Figura 5.9).

Quello che possiamo notare è che fintantoché la riflettanza è superiore ad una certa soglia, che dipende dal rapporto delle riflettanze, allora la potenza scambiata è pari alla potenza scambiata considerando l'accoppiamento debole. Se ne deduce che un accoppiamento è debole non in senso assoluto ma dipende sempre dalla riflettanza dei sottosistemi e cioè dal loro smorzamento.

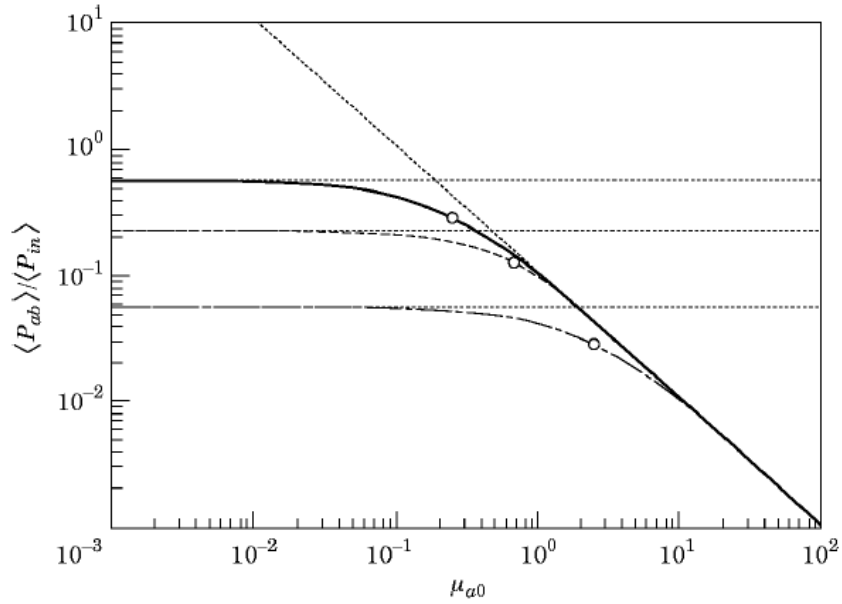


Figura 5.9: Rapporto potenza media trasmessa su potenza media in ingresso al variare della riflettanza di base μ_{a0} per 3 diversi rapporti di riflettanza: $\mu_{a0}/\mu_{b0}=10$ (linea continua), $\mu_{a0}/\mu_{b0}=1$ (linea tratteggiata), $\mu_{a0}/\mu_{b0}=0.1$ (linea tratto punto), asintoto obliquo per accoppiamento debole in tutto l'intervallo (immagine tratta da [13]).

Infine dobbiamo considerare come varia il CLF al variare della riflettanza di base e del rapporto tra le riflettanze dei sottosistemi (Figura 5.10).

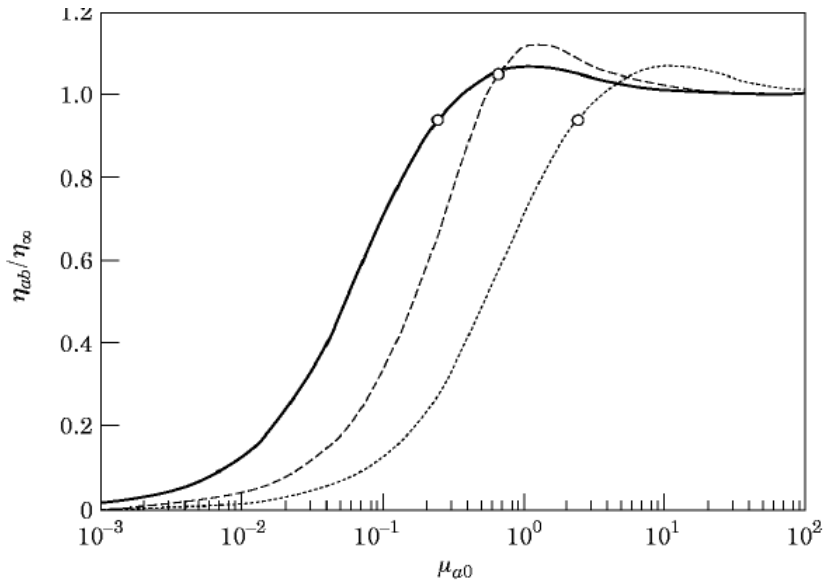


Figura 5.10: Rapporto CLF effettivo su CLF asintotico al variare della riflettanza di base μ_{a0} per 3 diversi rapporti di riflettanza: $\mu_{a0}/\mu_{b0} = 10$ (linea continua), $\mu_{a0}/\mu_{b0} = 1$ (linea tratteggiata), $\mu_{a0}/\mu_{b0} = 0.1$ (linea tratto punto) (immagine tratta da [13]).

Allora possiamo dire che se la riflettanza, e quindi lo smorzamento dei sottosistemi, è sufficientemente elevata vale considerare:

$$\eta_{ab} \rightarrow \eta_{\infty}.$$

Nel caso contrario invece abbiamo che il CLF per elementi semi-infiniti o tali per cui sia verificata l'incoerenza delle onde risulta essere una sovrastima.

Riassumendo quanto visto fino ad adesso:

- Ogni sottosistema è caratterizzato da una certa riflettanza che dipende dalla riflettanza di base e dalla traccia del numero d'onda (Figura 5.7);
- All'aumentare della riflettanza di base e della traccia del numero d'onda l'accoppiamento si comporterà sempre di più in modo debole (Figura 5.8);
- In generale il valore del CLF dipende dalla riflettanza di base e quindi dallo smorzamento (Figura 5.10);
- All'aumentare della riflettanza di base (smorzamento) possiamo supporre che il CLF calcolato con la teoria di base sia una ottima stima (Figura 5.10).

Da quanto detto appare chiaro che quindi un accoppiamento non deve essere considerato debole o forte a priori ma solo in relazione alla riflettanza e cioè allo smorzamento.

Infine sottolineiamo che valori pratici della riflettanza di base senza elementi visco-elastici smorzanti è a cavallo del valore unitario. Visto che nella pratica poi utilizziamo tali strategie per aumentare lo smorzamento possiamo garantire l'accuratezza dell'analisi SEA utilizzando η_{∞} come valore per i CLF.

Altri grafici che rappresentano come effettivamente il CLF dipenda dal valore dello smorzamento sono i seguenti (Figura 5.11). Inoltre è possibile notare che più il coefficiente di perdita per accoppiamento è piccolo, dove nel grafico si riporta la rigidità della molla che unisce le due piastre nell'analisi FEM condotta in [13], più le piastre presentano comportamento pari a quello asintotico per un valore di riflettanza minore.

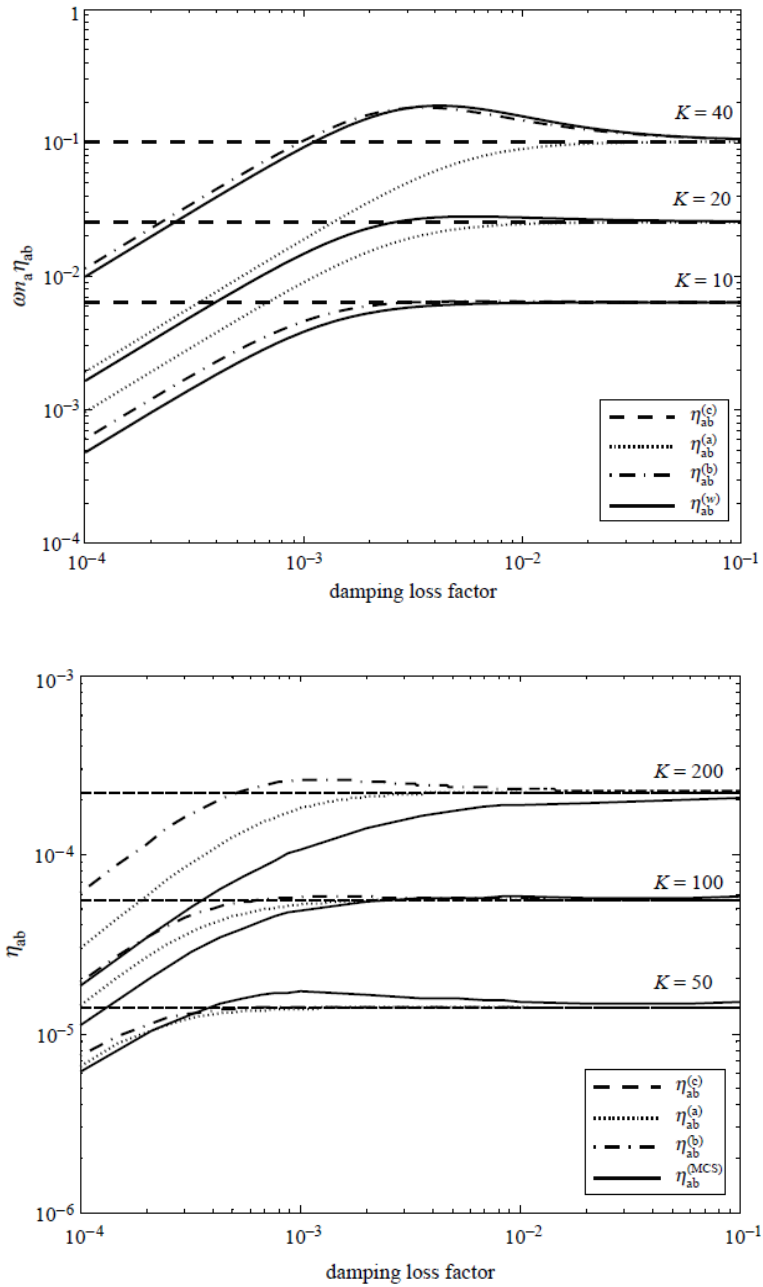


Figura 5.11: (a) CLF per due travi al variare del DLF per diversi rigidezze di accoppiamento, (b) CLF per due piastre al variare del DLF per diversi rigidezze di accoppiamento (immagine tratta da [13]).

5.7 Limiti di validità della teoria: geometria degli elementi.

Per quanto abbiamo esposto fino al momento siamo in grado di determinare i CLF in casi di strutture composte da travi e piastre di geometria semplice. Il fatto è che poter considerare nell'analisi SEA solo piastre rettangolari è piuttosto limitativo. Mace [10] ha svolto un'analisi importante in cui ha studiato quanto effettivamente la forma della

piastra influenzi i risultati in termini di potenza scambiata e CLF. Per capire quanto la forma della piastra sia effettivamente importante vengono confrontati 3 differenti metodi per valutare la potenza trasmessa e i CLF:

- L'analisi SEA come svolta da Mace negli articoli [10,13] che adatta la teoria di Lyon [41] in modo tale da tenere conto sia di accoppiamenti forti che deboli. Si sottolinea che le formule ricavate da Mace sono riportate in [10,13] e non vengono qui riportate perché troppo complesse per essere di utilizzo pratico. Però i risultati che otteniamo sono utili per il seguente confronto;
- La teoria tradizionale di Lyon [41] che è un'analisi semplificata che prevede piastre semi-infinite o incoerenza delle onde e accoppiamenti deboli. Per questa teoria è irrilevante tenere conto della forma effettiva della piastra. Di seguito ci riferiremo ad essa come teoria asintotica seguendo il lavoro di Mace;
- Analisi FEM tramite il software ANSYS.

In particolare vengono studiate diverse geometrie di diverse dimensioni (piccola e grande) e composte da:

- Elementi rettangolari (R);
- Pentagoni dalla forma rettangolare (D);
- Pentagoni (P).

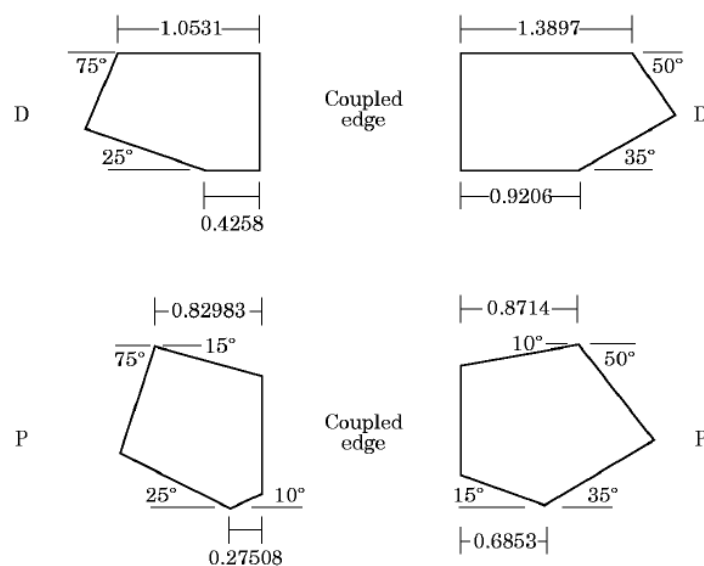


Figura 5.12: Piastre di forma non rettangolare e quote geometriche (immagine tratta da [13]).

Per le analisi FEM e per le formule sono state considerate piastre in acciaio con le caratteristiche riportate in Tabella 5.3.

Elastic modulus	2×10^{11}	Length of coupled edge	0.9
Density	8×10^3	Plate area (a, b)	0.9, 1.26
Poisson's ratio	0.3	Modal density (a, b)	0.0297, 0.0416
Thickness	0.01	System total modal density	0.0714

Tabella 5.3: Caratteristiche fisiche e geometriche delle piastre in acciaio (unità SI) (immagine tratta da [13]).

Per quanto riguarda la potenza trasmessa sono state effettuate simulazioni in tre differenti bande di frequenza rispettivamente centrate a 500, 1000 e 1500 Hz e si sono ottenuti i risultati riportati in Figura 5.13.

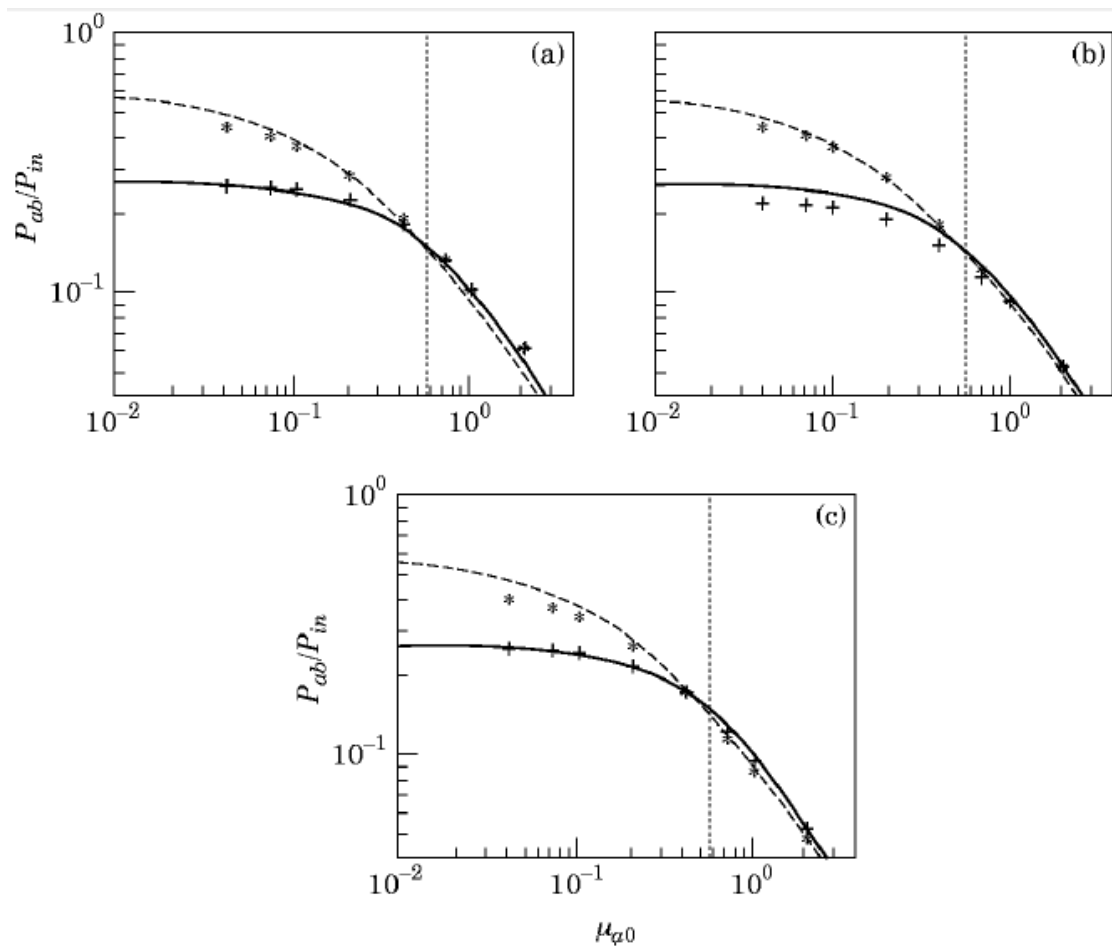


Figura 5.13: Andamento del rapporto tra la potenza trasmessa e quella in ingresso nel caso in cui venga sollecitata la piastra più piccola in 3 differenti bande 500 Hz (a), 1000 Hz (b) e 1500 Hz (c). teoria per piastre rettangolari (linea continua), teoria asintotica (linea tratteggiata), FEM con piastre RR +, FEM con piastre PP * (immagine tratta da [13]).

Quello che si vede è che la teoria asintotica è in ottimo accordo con le simulazioni numeriche in tutto il dominio nel caso di piastre di forma pentagonale, mentre la teoria per piastre rettangolari lo è, ovviamente, per piastre rettangolari. Dobbiamo però notare che la differenza tra i due metodi è nulla per elevate riflettanze: quando lo smorzamento è elevato entrambi i metodi vanno bene.

Analoghe conclusioni possono essere fatte per i coefficienti di accoppiamento (Figura 5.14):

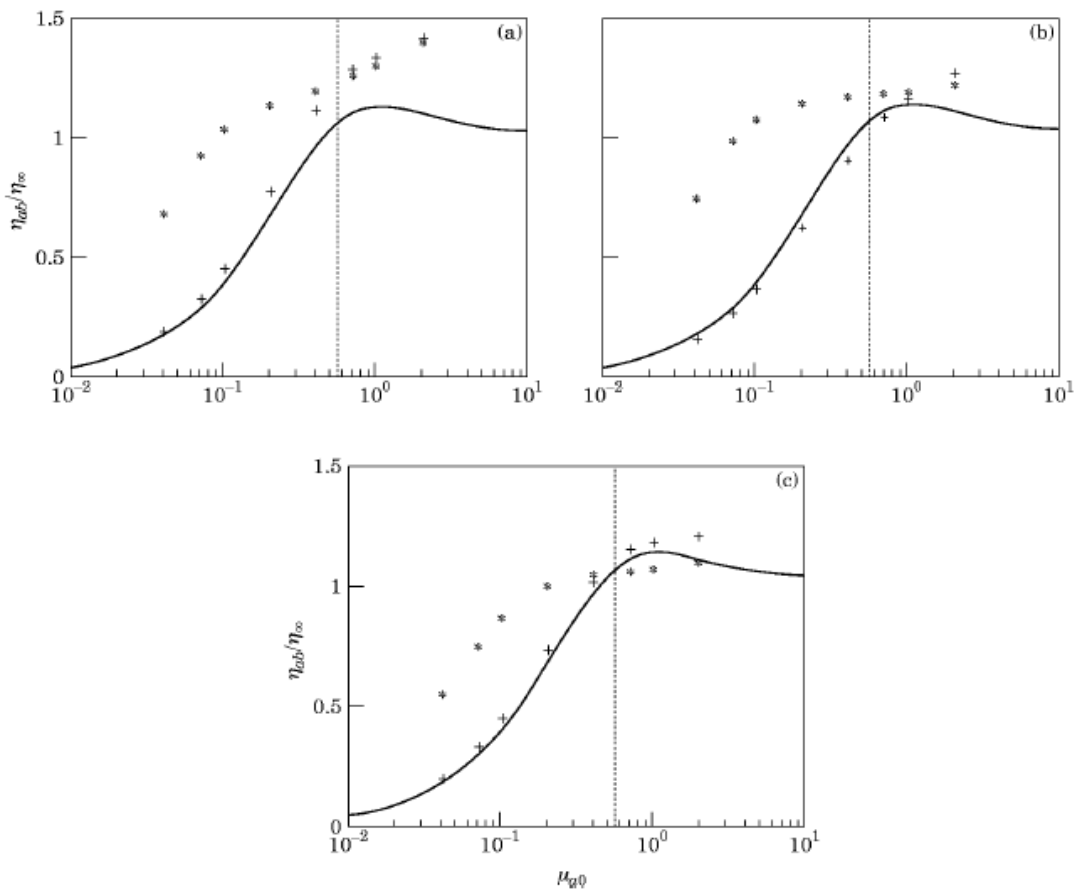


Figura 5.14: Andamento del CLF nel caso in cui venga sollecitata la piastra più piccola in 3 differenti bande 500 Hz (a), 1000 Hz (b) e 1500 Hz (c). teoria per piastre rettangolari (linea continua), FEM con piastre RR +, FEM con piastre PP * (immagine tratta da [13]).

Dalla figura è evidente la corrispondenza tra teoria analitica e risultati numerici per piastre rettangolari mentre i risultati per le piastre pentagonali sono accurati solo per elevati valori della riflettanza di base.

Per quanto riguarda poi giunzioni che collegano piastre di tipo differente possiamo vedere il loro effetto solo tramite le simulazioni numeriche (Figura 5.15 e Figura 5.16):

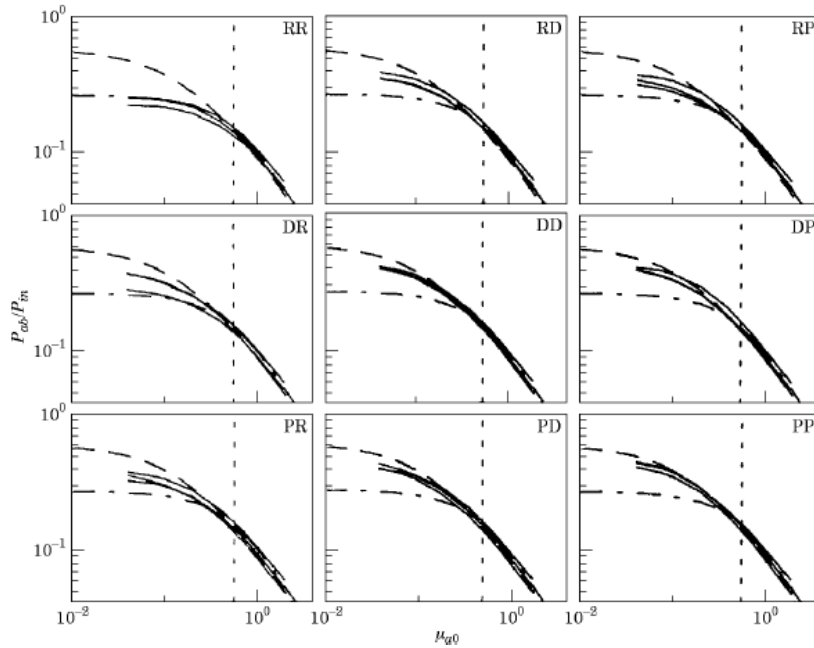


Figura 5.15: Andamento del rapporto tra la potenza trasmessa e quella in ingresso nel caso in cui venga sollecitata la piastra più piccola in 3 differenti bande 500 Hz (a), 1000 Hz (b) e 1500 Hz (c). teoria per piastre rettangolari (linea continua), teoria asintotica (linea tratteggiata), FEM con piastre in varie configurazioni (immagine tratta da [13]).

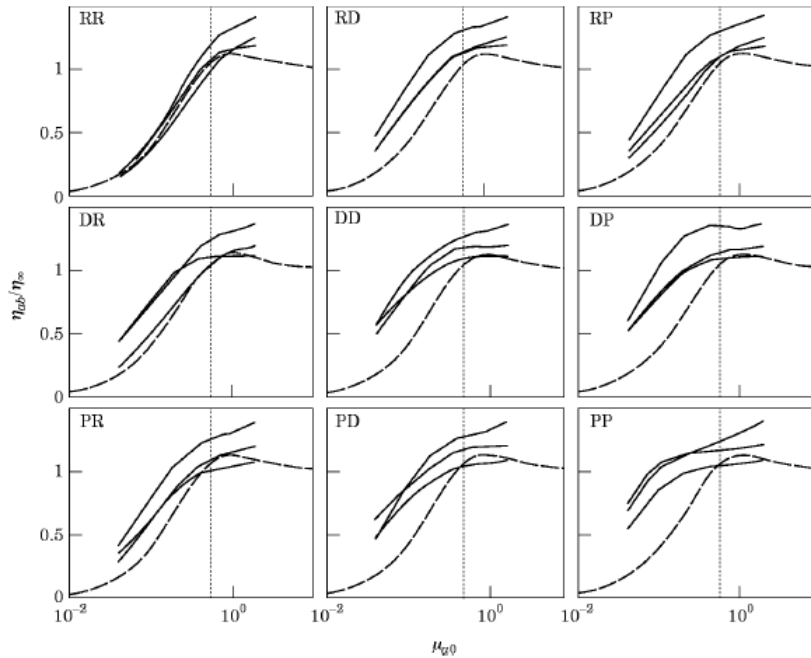


Figura 5.16: Andamento del CLF nel caso in cui venga sollecitata la piastra più piccola in 3 differenti bande 500 Hz (a), 1000 Hz (b) e 1500 Hz (c). teoria per piastre rettangolari (linea continua), FEM con piastre in varie configurazioni (immagine tratta da [13]).

Riassumendo quanto visto in questo paragrafo:

- I risultati FEM confermano che nel caso rettangolare la teoria di Mace [13] è corretta e che nel caso di piastre di forma irregolare la teoria asintotica delle onde valuta correttamente la potenza trasmessa e il CLF;
- Nei casi intermedi nessuna delle due teorie offre risultati accurati per bassi valori della riflettanza;
- Per valori della riflettanza che assicurano che tra piastre vi sia accoppiamento debole entrambe le teorie offrono risultati molto accurati sia in termini di potenza trasmessa che di CLF.

Allora abbiamo visto che se la riflettanza è sufficientemente elevata da garantire accoppiamento debole allora sia che le piastre siano non semi-infinite (Paragrafo 5.6) sia che abbiano forma non rettangolare (Paragrafo 5.7) allora possiamo dire che:

$$\eta_{ab} \rightarrow \eta_{\infty}.$$

5.8 Considerazioni sui CLF per piastre collegate da una giunzione.

Nel Paragrafo 5.5 abbiamo sottolineato che nel caso dell'accoppiamento tra le piastre non utilizziamo l'approccio tramite le impedenze ma l'approccio delle onde. Di seguito nel Paragrafo 5.9 riporteremo e spiegheremo quanto formulato da Langley [70] e poi ripreso e semplificato da Johansson e Connell [17] per il calcolo dei CLF.

Prima di arrivare a tale punto dobbiamo però sottolineare alcune cose.

Considerando due piastre collegate da una giunzione abbiamo che in generale ognuna delle due è caratterizzata da tre sottosistemi: longitudinale, flessionale e di taglio. Tutti questi sottosistemi, nel caso più generale possibile, scambiano dell'energia tra di loro quindi dobbiamo tenere conto di molteplici CLF (Figura 5.17). Per quanto avevamo visto parlando della densità modale e della divisione degli elementi in sottosistemi non sempre è necessario considerarli tutti, ma facendoci guidare dalla densità modale, è possibile scartare quelli meno significativi in quanto il loro contributo energetico, avendo pochi modi a disposizione, sarà basso.

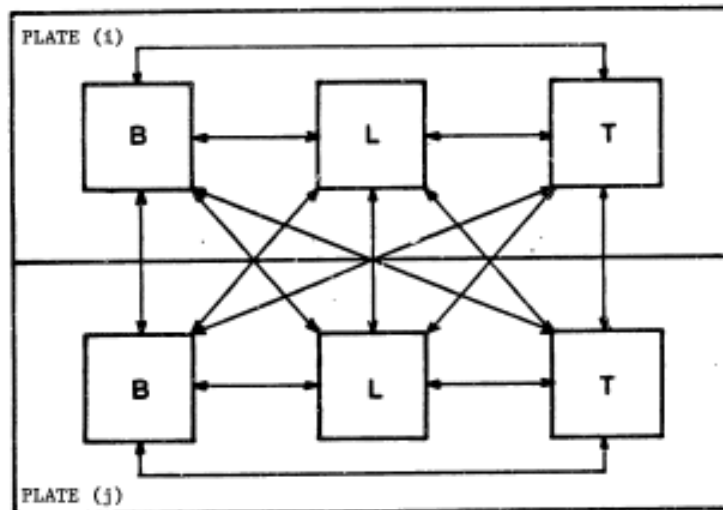


Figura 5.17: Sottosistemi e CLF per il caso di due piastre collegate da una giunzione (immagine tratta da [66]).

Un'altra caratteristica che dobbiamo sottolineare è che il coefficiente di trasmissione τ_{ij} tra due piastre (consideriamo sempre due piastre perché è il caso più semplice, è chiaro che il discorso è generalizzabile) dipende da come è formata la giunzione: essa può essere ottenuta attraverso saldatura, bullonatura, rivettatura, tramite una trave a sezione chiusa, a sezione a C, Z o I e secondo molte altre configurazioni. È chiaro che si apre una serie di possibilità molto ampia. Yilmazel [30] ha studiato come varia il coefficiente di trasmissione, e quindi il CLF, sia per piastre collegate da una massa distribuita che non ha rigidità flessionale né torsionale, che per piastre collegate da travi di Eulero o di Timoshenko a sezione aperta e chiusa. Quello che ha individuato è che il coefficiente di trasmissione e il CLF dipendono da molti parametri:

- Densità del materiale che forma della giunzione;
- Forma della sezione della trave (chiusa, a C, Z, I o L);
- Rigidità flessionale;
- Rigidità flessionale laterale;
- Rigidità torsionale;
- Offset verticale del centro di taglio;
- Offset orizzontale del centro di taglio;
- Coefficiente di ingobbamento.

Di seguito riportiamo alcune figure (Figura 5.18 e Figura 5.19) che rappresentano i risultati ottenuti da Yilmazel [30] in termini di coefficiente di trasmissione e CLF al variare della frequenza e dell'angolo di incidenza dell'onda. I risultati sono espressi secondo il coefficiente di perdita R [dB]:

$$R = -\log_{10}(\tau).$$

Quindi, essendo τ una quantità compresa nell'intervallo $[0;1]$, quando R è piccolo significa che τ è elevato e i due sistemi scambiano molta energia (come se fosse una banda passante) e quando R è grande significa che τ è piccolo e i due sistemi scambiano una quantità minore di energia.

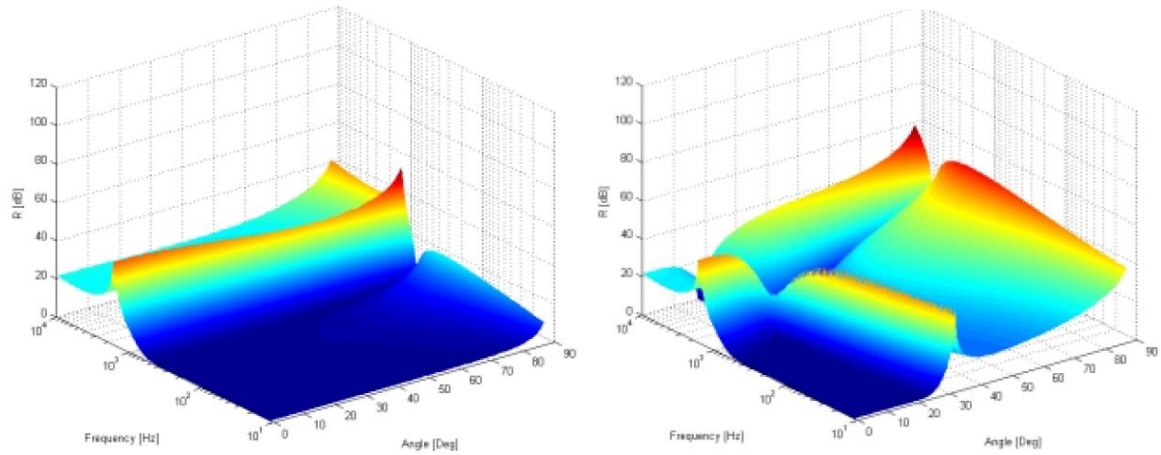


Figura 5.18: Andamento di τ al variare della frequenza e dell'angolo di incidenza per una giunzione formata da una massa distribuita (a) e da una trave di Eulero (b) (immagine tratta da [30]).

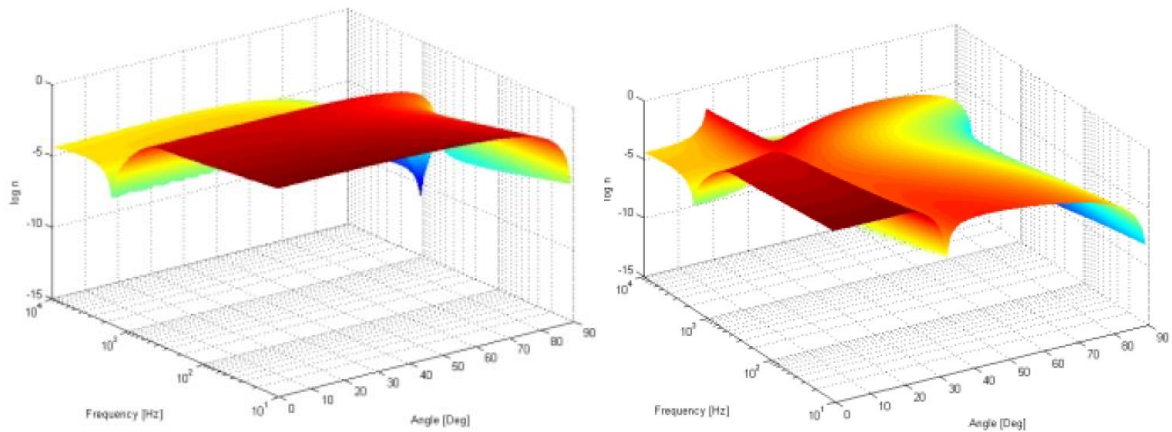


Figura 5.19: Andamento di η al variare della frequenza e dell'angolo di incidenza per una giunzione formata da una massa distribuita (a) e da una trave di Eulero (b) (immagine tratta da [30]).

Quello che possiamo notare senza addentrarci in ulteriori dettagli è che la giunzione funge da filtro passa-basso: alle frequenze basse lo scambio energetico è elevato (R piccolo) mentre all'aumentare della frequenza o dell'angolo di incidenza, che è misurato rispetto alla normale alla giunzione, la trasmissione viene attenuata.

È chiaro che non esiste nessuna formula riassuntiva che possa tenere conto di tutto ciò e di caso in caso bisognerebbe seguire l'analisi come impostata da Yilmazel [30] per poter tenere conto di una possibilità così ampia di parametri. Tutto ciò esula dalle finalità del presente lavoro.

Però possiamo sottolineare come i risultati ottenuti mediante la teoria classica di Langley [70], non si discostino più di tanto da quelli ottenuti da Yilmazel [30] una volta che dobbiamo mediare su tutti gli angoli di incidenza per tenere conto del fatto che il campo vibrazionale sia diffuso.

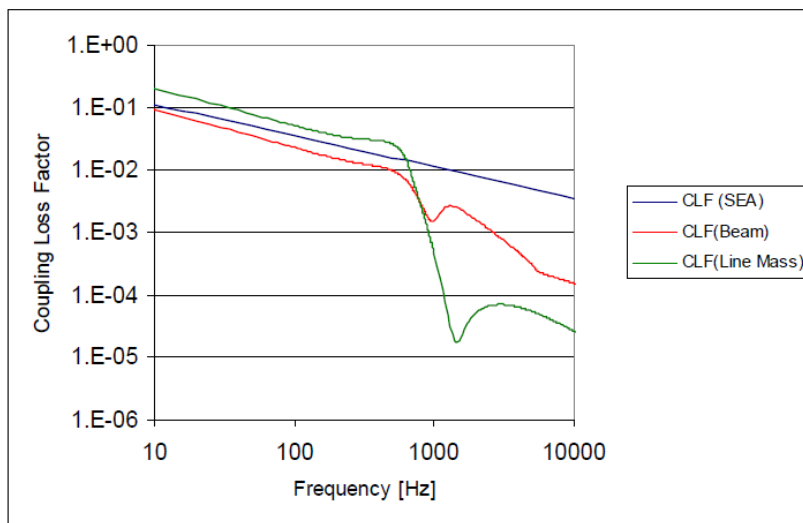


Figura 5.20: Andamento del CLF in funzione della frequenza mediano il coefficiente di trasmissione sull'angolo di incidenza secondo tre diversi approcci: Langley [70] (blu), trave (rosso) e massa distribuita (verde) (immagine tratta da [30]).

Allora in generale possiamo dire che il risultato fornito da Langley è accurato fintantoché si considerano frequenze non troppo elevate, mentre per esse abbiamo che le giunzioni tramite massa distribuita e travi si comportano maggiormente come un filtro passabasso.

Questo quindi comporta che otterremo una sovrastima dello scambio di energia alle alte frequenze nel caso le piastre non siano direttamente collegate tra di loro.

5.9 Calcolo dei CLF per piastre collegate mediante una giunzione.

Consideriamo una serie di piastre collegate da una giunzione e per ognuna di esse definiamo un sistema di riferimento in cui l'asse x è lungo la giunzione, y giace sul piano della piastra e z completa la terna (Figura 5.21). Inoltre assumiamo una delle piastre come riferimento globale e indichiamo la corrispondente terna con il pedice g . θ_j rappresenta l'angolo tra la piastra di riferimento e la piastra j -esima (si faccia attenzione al fatto che la notazione è diversa da quella usata da Mace [10,13,18]).

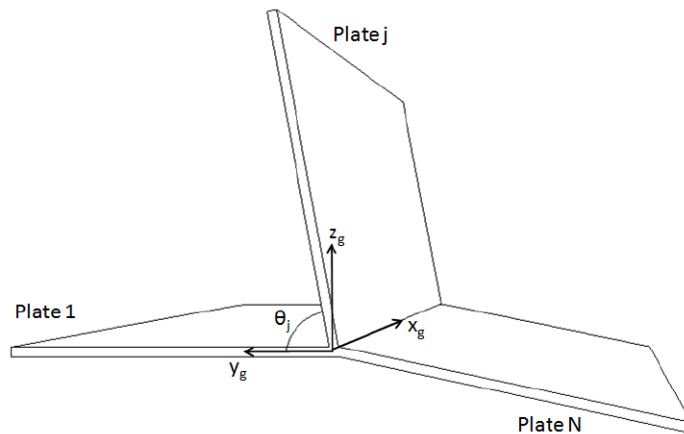


Figura 5.21: Giunzione tra piastre e sistema di riferimento (immagine tratta da [17]).

Per ogni piastra possiamo definire gli spostamenti e le forze agenti come in Figura 5.22.

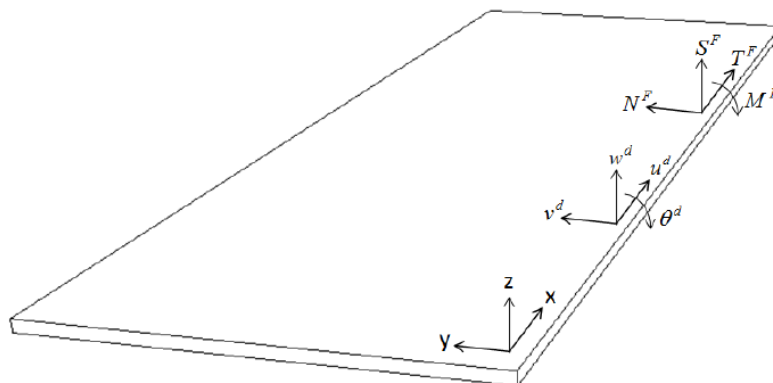


Figura 5.22: Spostamenti generalizzati e forze generalizzate agenti sulla singola piastra (immagine tratta da [17]).

Un'onda elastica che si propaga in una qualsiasi piastra ha la seguente dipendenza spazio-temporale: $e^{-ikx+\mu y+i\omega t}$. La continuità della giunzione impone che tutte le piastre siano caratterizzate dal medesimo comportamento lungo x nel tempo e quindi presentano la stessa dipendenza $e^{-ikx+i\omega t}$, mentre la dipendenza lungo y è espressa dall'equazione del moto. Tale onda è caratterizzata da un preciso numero d'onda che dipende dal tipo di onda considerato, dalla frequenza e dalle caratteristiche geometriche e del materiale della piastra secondo le formule:

$$k_B^4 = \frac{\rho_j \omega^2}{B_j} \quad \text{onde flessionali}$$

$$k_L^2 = \frac{\rho_j \omega^2 (1 - \vartheta_j^2)}{E_{y,j} h_j} \quad \text{onde longitudinali}$$

$$k_S^2 = \frac{2\rho_j \omega^2 (1 + \vartheta_j)}{E_{y,j} h_j} \quad \text{onde di taglio}$$

dove ρ_j è la massa per unità di area, B_j è la rigidezza flessionale, $E_{y,j}$ è il modulo di Young, h_j è lo spessore della piastra e ϑ_j è il modulo di Poisson. Per sottolineare che tali grandezze dipendono dal tipo di piastra abbiamo utilizzato il pedice j .

Nella dipendenza spazio-temporale dell'onda compaiono k e μ che sono rispettivamente le proiezioni lungo x e lungo y del numero d'onda, poiché come è intuitivo un'onda può propagarsi nella piastra formando un angolo qualsiasi con la giunzione. Appare evidente che noto il tipo di onda che si sta propagando, la frequenza, le caratteristiche della piastra e l'angolo formato dall'onda con la giunzione conosciamo il numero d'onda e le sue proiezioni.

A questo punto introduciamo un concetto che ci tornerà utile nel proseguo della trattazione: data un'onda qualsiasi incidente la giunzione possono generarsi nelle altre piastre e riflettersi nella medesima anche onde di tipo diverso, le quali saranno però caratterizzate dalla stessa proiezione del numero d'onda lungo x dell'onda incidente. Questo concetto è simile alla legge di Snell di trasmissione e riflessione delle onde luminose nell'ottica. Per una trattazione approfondita di come si ricava tale legge di veda Cremer [71].

Quindi nota una ipotetica onda incidente la giunzione possiamo ricavare in principio le proiezioni dei numeri d'onda che si generano in tutte le piastre secondo le leggi:

$$\mu_B = \pm(k^2 \pm k_B^2)^{1/2} \quad \text{onde flessionali}$$

$$\mu_L = \pm(k^2 - k_L^2)^{1/2} \quad \text{onde longitudinali}$$

$$\mu_S = \pm(k^2 - k_S^2)^{1/2} \quad \text{onde di taglio}$$

dove ricordiamo che k è la proiezione lungo x dell'onda incidente la giunzione (che può essere flessionale, longitudinale o di taglio) ed è uguale per tutte le onde generate, k_B , k_L e k_S sono i numeri d'onda noti a priori per ogni piastra e μ_B , μ_L e μ_S sono le proiezioni lungo y che ricaviamo dalle formule appena sopra. Dovrebbe essere chiaro al lettore che tutti questi valori cambiano da piastra a piastra. Notiamo dalle formule che il caso flessionale ha quattro differenti soluzioni, mentre i casi longitudinale e di taglio solamente due. Ciò è una conseguenza del fatto che le equazioni differenziali del moto nel caso flessionale sono di quarto ordine mentre negli altri sono del secondo ordine.

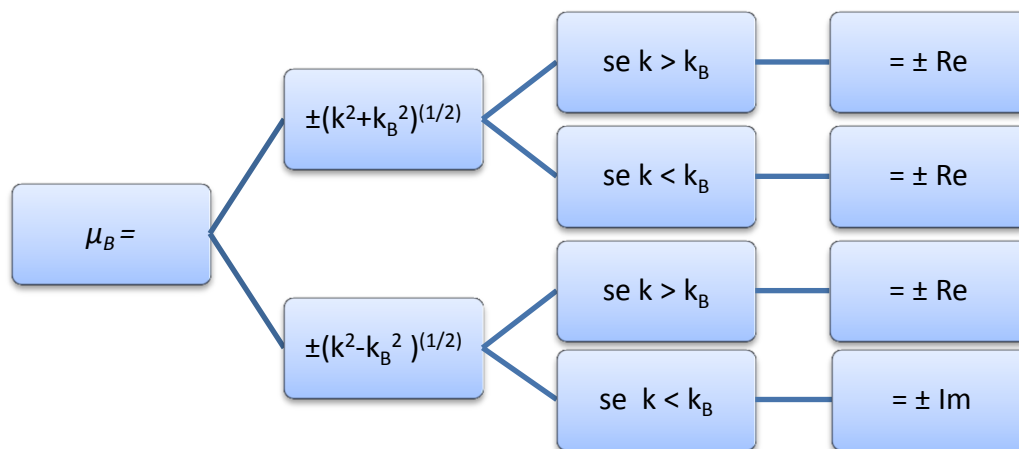
A questo punto nota l'onda incidente sappiamo tutte le caratteristiche di tutte le onde che si generano in tutte le piastre.

Prima di proseguire la trattazione di Langley dobbiamo fare un'altra precisazione fondamentale. Consideriamo che un'onda incidente qualsiasi generi un'onda longitudinale in una piastra. L'onda incidente sarà caratterizzata da un certo k mentre la piastra sarà tale da avere un certo k_L che dipende dalle sue proprietà. Se $k > k_L$ allora μ_L assume due valori reali, uno positivo e l'altro negativo. Per come è stata definita la dipendenza spazio-temporale solo la soluzione negativa ha senso poiché per $y \rightarrow \infty$ la risposta deve attenuarsi. Dato che l'esponente associato è reale e negativo significa che l'onda longitudinale che si propaga non ha carattere oscillatorio e si attenua allontanandosi dalla giunzione. Una onda di questo tipo viene definita *onda di nearfield*: essa è un'onda che non si propaga nella piastra e si assume che la potenza associata ad essa sia trascurabile. Se invece $k < k_L$ allora μ_L è un numero immaginario e si considera solo la soluzione immaginaria negativa poiché l'onda deve allontanarsi dalla giunzione.

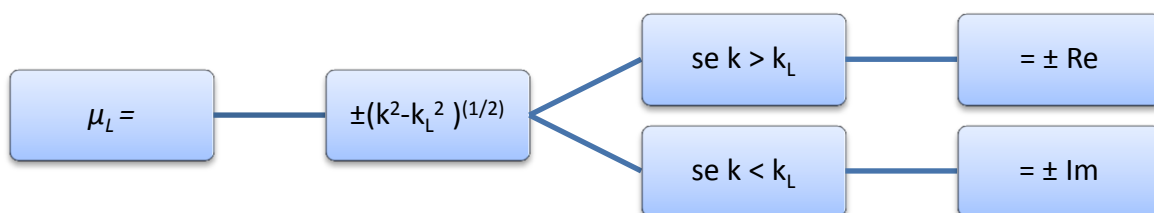
Nel caso in cui l'onda trasmessa sia flessionale la soluzione è più complessa poiché deriva dalla soluzione di un'equazione di quarto ordine. Se $k > k_B$ allora abbiamo quattro soluzioni reali, due positive e due negative. Come in precedenza solo quelle negative hanno senso in quanto per $y \rightarrow \infty$ devono attenuarsi e sono entrambe onde di nearfield. Se invece $k < k_B$ abbiamo due soluzioni reali, una positiva e una negativa, e due immaginarie, anche queste una positiva e una negativa. Ancora una volta teniamo solo quelle negative perché per $y \rightarrow \infty$ l'onda di nearfield devono attenuarsi e l'onda immaginaria deve allontanarsi dalla giunzione.

Infine nel caso in cui l'onda trasmessa sia di taglio abbiamo che vale la discussione fatta per le onde longitudinali. Di seguito riportiamo degli schemi che ci permettono di riassumere quanto detto. Ricordiamo che le solo le soluzioni negative hanno significato fisico e inoltre che quelle reali negative sono dei nearfield mentre quelle immaginarie negative sono delle onde che si propagano e a cui è associata una certa potenza.

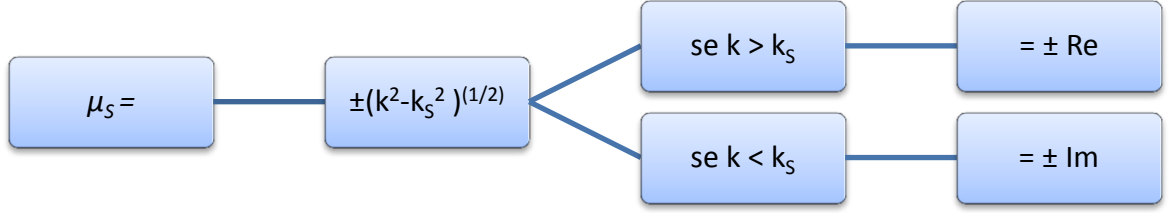
Per quanto riguarda le onde flessionali abbiamo:



Per le onde longitudinali vale:



E infine per le onde di taglio:



A questo punto, avendo chiaro questo discorso sulla trasmissione delle onde, possiamo continuare la trattazione di Langley [70].

Considerando la Figura 5.22 possiamo legare gli spostamenti generalizzati b_j subiti dalla piastra j-esima alle forze generalizzate F_j che caratterizzano sempre la piastra j-esima tramite la seguente relazione:

$$F_j = [K_j]b_j$$

dove $[K_j]$ è la matrice di rigidezza dinamica della medesima piastra. La relazione precedente espressa in forma estesa è la seguente:

$$\begin{bmatrix} T_j^F \\ N_j^F \\ S_j^F \\ M_j^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{ej}^d \\ v_{ej}^d \\ w_{ej}^d \\ \theta_{ej}^d \end{bmatrix}$$

Note le caratteristiche della piastra conosciamo anche ogni singola componente della matrice di rigidezza grazie alle formule seguenti e riportate in [17]:

$$\alpha_{11} = -\frac{\mu_L(\mu_S^2 - k^2)}{2(1+\vartheta_j)} * \frac{E_{y,j}h_j}{k^2 - \mu_S\mu_L}$$

$$\alpha_{12} = -\frac{ik(\mu_S^2 + k^2 - 2\mu_L\mu_S)}{2(1+\vartheta_j)} * \frac{E_{y,j}h_j}{k^2 - \mu_S\mu_L}$$

$$\alpha_{21} = \left(\frac{ik(\mu_L^2 - \vartheta k^2)}{1 - \vartheta^2} - \frac{jk\mu_L\mu_S}{1 + \vartheta} \right) * \frac{E_{y,j}h_j}{k^2 - \mu_S\mu_L}$$

$$\alpha_{22} = \left(\frac{\mu_S(\vartheta k^2 - \mu_L^2)}{1 - \vartheta^2} + \frac{k^2\mu_S}{1 + \vartheta} \right) * \frac{E_{y,j}h_j}{k^2 - \mu_S\mu_L}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{33} &= (\mu_{B1}^2 \mu_{B2} - \mu_{B2}^3 \mu_{B1}) * \frac{B_j}{\mu_{B1} - \mu_{B2}} \\ \alpha_{34} &= (\mu_{B2}^3 - \mu_{B1}^3 + (2 - \vartheta_j)(\mu_{B1} - \mu_{B2})k^2) * \frac{B_j}{\mu_{B1} - \mu_{B2}} \\ \alpha_{43} &= (\mu_{B1}^2 \mu_{B2} - \mu_{B2}^2 \mu_{B1} + \vartheta_j k^2 (\mu_{B1} - \mu_{B2})) * \frac{B_j}{\mu_{B1} - \mu_{B2}} \\ \alpha_{44} &= (\mu_{B1}^2 - \mu_{B2}^2) * \frac{B_j}{\mu_{B1} - \mu_{B2}}\end{aligned}$$

in cui con $E_{y,j}$, h_j , ρ_j , B_j e ϑ indichiamo rispettivamente modulo di Young, spessore, densità, rigidezza flessionale e modulo di Poisson della piastra j-esima, mentre k è la proiezione lungo x dell'onda considerata (che ricordiamo è uguale a quello dell'onda incidente) e i vari μ sono le varie proiezioni lungo y dei tre tipi di onde. Notiamo che nel caso dell'onda flessionale abbiamo due valori piuttosto che uno in quanto deriva da un problema di quarto ordine a differenza degli altri.

Lo spostamento generalizzato della j-esima piastra può essere ricavato dallo spostamento generalizzato della giunzione espresso secondo la piastra di riferimento, che indichiamo con a , mediante la relazione:

$$b_j = [R_j]^T a$$

dove:

$$a = \begin{bmatrix} u^d \\ v^d \\ w^d \\ \theta^d \end{bmatrix}$$

$$b_j = \begin{bmatrix} u_{ej}^d \\ v_{ej}^d \\ w_{ej}^d \\ \theta_{ej}^d \end{bmatrix}$$

$$R_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 \\ 0 & \sin \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo notare che la relazione precedente è una semplice rotazione del sistema di riferimento intorno all'asse x .

Considerando a questo punto una giunzione in cui convergono N piastre, nel momento in cui un'onda trasportata dalla m -esima piastra incide la giunzione si generano delle forze che devono essere in equilibrio tra loro secondo la relazione:

$$\left\{ \sum_{j=1}^N [R_j][K_j][R_j]^T \right\} a = [R_m]f_m$$

in cui $[R_m]$ è la matrice di rotazione della m -esima piastra e f_m è una forzante che dipende dalle caratteristiche dell'onda incidente la giunzione.

Per capire come ricavare f_m dobbiamo fare una precisazione: la relazione $F_j = [K_j]b_j$ vale solo per le piastre che non trasportano l'onda incidente. Per quest'ultima vale una relazione differente che tiene conto anche delle forze generalizzate prodotte dall'onda incidente per l'appunto. Tale relazione è:

$$F_j - F'_j = [K_j](b_j - b'_j)$$

dove F'_j e b'_j sono rispettivamente le forze generalizzate e gli spostamenti generalizzati prodotti dall'onda incidente in prossimità della giunzione.

Le quantità F'_j e b'_j sono note nel momento in cui è nota la tipologia di onda incidente. L'equazione precedente può essere riarrangiata nel seguente modo:

$$F_j = [K_j]b_j - f_j$$

in cui

$$f_j = f_m = [K_j]b'_j - F'_j.$$

A questo punto per risolvere il problema ci rimane da fornire le formule per costruire i vettori F'_j e b'_j .

Nel caso in cui l'onda incidente sia flessionale con angolo di incidenza pari a φ_B (angolo compreso tra l'onda e la giunzione, non la sua normale) e ampiezza α essi valgono:

$$\mathbf{F}'_j = \begin{bmatrix} T_j^{F'} \\ N_j^{F'} \\ S_j^{F'} \\ M_j^{F'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha B_j(\mu^3 - (2 - \vartheta_j)k^2\mu) \\ \alpha B_j(\mu^2 - \vartheta_j k^2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}'_j = \begin{bmatrix} u_{ej}^{d'} \\ v_{ej}^{d'} \\ w_{ej}^{d'} \\ \theta_{ej}^{d'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \alpha\mu \end{bmatrix}$$

Dove $k = k_B \cos(\varphi_B)$ e $\mu = ik_B \sin(\varphi_B)$

Nel caso di onda longitudinale con angolo di incidenza pari a φ_L (angolo compreso tra l'onda e la giunzione, non la sua normale) e ampiezza α :

$$\mathbf{F}'_j = \begin{bmatrix} T_j^{F'} \\ N_j^{F'} \\ S_j^{F'} \\ M_j^{F'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha E_{y,j} h_j k \mu / (1 + \vartheta_j) \\ i\alpha E_{y,j} h_j (\mu^2 - \vartheta_j k^2) / (1 - \vartheta_j^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}'_j = \begin{bmatrix} u_{ej}^{d'} \\ v_{ej}^{d'} \\ w_{ej}^{d'} \\ \theta_{ej}^{d'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha k \\ i\alpha\mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove $k = k_L \cos(\varphi_L)$ e $\mu = ik_L \sin(\varphi_L)$.

E infine nel caso di onda di taglio con angolo di incidenza pari a φ_S (angolo compreso tra l'onda e la giunzione, non la sua normale) e ampiezza α :

$$\mathbf{F}'_j = \begin{bmatrix} T_j^{F'} \\ N_j^{F'} \\ S_j^{F'} \\ M_j^{F'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\alpha E_{y,j} h_j (\mu^2 + k^2) / 2(1 + \vartheta_j) \\ -\alpha E_{y,j} h_j k \mu / (1 + \vartheta_j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}'_j = \begin{bmatrix} u_{ej}^{d'} \\ v_{ej}^{d'} \\ w_{ej}^{d'} \\ \theta_{ej}^{d'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\alpha\mu \\ -\alpha k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dove $k = k_S \cos(\varphi_S)$ e $\mu = ik_S \sin(\varphi_S)$.

Ricapitolando:

- 1) nota l'onda incidente ricaviamo $f_m = f_j = [K_j]b'_j - F'_j$
- 2) dopo aver ricavato le matrici di rigidezza per ogni piastra risolviamo il sistema $\left\{ \sum_{j=1}^N [R_j][K_j][R_j]^T \right\} a = [R_m]f_m$ e ricaviamo il valore di a
- 3) dal vettore a otteniamo gli spostamenti di ogni piastra secondo il proprio sistema di riferimento con una semplice rotazione intorno all'asse x: $b_j = [R_j]^T a$
- 4) dagli spostamenti calcoliamo le forze generalizzate che agiscono su ogni piastra: $F_j = [K_j]b_j$.

A questo punto dobbiamo ricavare le potenze associate ad ogni onda che si è originata a partire dall'onda incidente. Per farlo calcoliamo prima le ampiezze delle onde della piastra j-esima invertendo la legge:

$$\begin{bmatrix} u_{ej}^d \\ v_{ej}^d \\ w_{ej}^d \\ \theta_{ej}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & i\mu_S & 0 & 0 \\ i\mu_L & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_{B1} & \mu_{B2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_S \\ \alpha_{B1} \\ \alpha_{B2} \end{bmatrix}$$

in cui con α indichiamo le ampiezze dei vari tipi di onde, mentre al termine noto abbiamo le varie componenti di b_j . Le componenti della matrice dipendono dalle caratteristiche della piastra.

Dalle ampiezze possiamo calcolare la potenza associata ad ogni onda che si propaga in una qualsiasi piastra a seconda che essa sia flessionale, longitudinale o di taglio:

$$P_{B,j} = \frac{\rho_j \omega^2 \alpha_{B,j}^2}{k_{B,j}} \sin \varphi_{B,j}$$

$$P_{L,j} = \frac{\rho_j \omega^2 \alpha_{L,j}^2 k_{L,j}}{2} \sin \varphi_{L,j}$$

$$P_{S,j} = \frac{\rho_j \omega^2 \alpha_{S,j}^2 k_{S,j}}{2} \sin \varphi_{S,j}$$

dove il pedice j sottolinea appunto che tale potenza va calcolata per ogni singola piastra e per ogni tipo di onda. Con φ indichiamo l'angolo che l'onda trasmessa genera con la giunzione. Tale angolo dipende dal tipo di onda e può essere calcolato tramite le formule:

$$\varphi_{B,j} = \cos^{-1} \frac{k}{k_{B,j}}$$

$$\varphi_{L,j} = \cos^{-1} \frac{k}{k_{L,j}}$$

$$\varphi_{S,j} = \cos^{-1} \frac{k}{k_{S,j}}$$

in cui k è la proiezione del numero d'onda su x che ricordiamo è uguale per tutte le onde alla proiezione del numero d'onda dell'onda incidente, mentre $k_{B,j}$, $k_{L,j}$ e $k_{S,j}$ sono rispettivamente i numeri d'onda flessionale, longitudinale e di taglio delle piastra j -esima.

Sottolineiamo che le onde trasmesse possono essere anche nella stessa piastra dell'onda incidente e in tale caso vengono denominate onde riflesse.

A questo punto siamo in grado di definire tutti i coefficienti di trasmissione come il rapporto tra una potenza trasmessa e la potenza incidente. Quest'ultima si calcola con una opportuna formula tra quelle appena date, tenendo conto del tipo di onda. L'ampiezza dell'onda incidente è nota a priori oppure può essere fissata a piacere se l'obiettivo sono i coefficienti di trasmissione.

Seguendo la procedura riportata otteniamo i coefficienti di trasmissione per una determinata onda incidente p nella piastra i e una determinata onda trasmessa r nella piastra j , per una determinata frequenza angolare e per un determinato angolo di incidenza: $\tau_{pr}^{ij}(\omega, \varphi)$.

Poiché in seguito ad una sollecitazione il campo vibrazionale è diffuso, a noi interessa conoscere il valore medio del coefficiente di perdita per accoppiamento $\eta_{pr}^{ij}(\omega)$ al variare dell'angolo e tale risultato può essere ottenuto tramite la formula:

$$\eta_{pr}^{ij}(\omega) = \frac{\overline{\delta f_p^i}}{\pi f} \frac{k_p^i L_j}{2} \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau_{pr}^{ij}(\omega, \varphi) \sin(\varphi)}{2 - \tau_{pr}^{ij}(\omega, \varphi)} d\varphi$$

in cui compare il seno dell'angolo poiché, secondo il riferimento preso da Langley [70] l'angolo è misurato rispetto alla giunzione e non rispetto alla sua giunzione.

Tale integrale può essere valutato numericamente e il numeri di angoli che utilizziamo è fondamentale per ottenere una buona accuratezza. Nell'articolo [17] troviamo che utilizzando 100 angoli l'errore è compreso tra 0.1-1 dB mentre con 10000 angoli esso è inferiore a 0.01 dB. Detto ciò nel programma implementato in MATLAB abbiamo utilizzato default un valore di 1000 angoli per mantenere una buona accuratezza e una certa velocità di calcolo.

5.10 Calcolo semplificato dei CLF per le piastre.

In alcuni casi particolari vi è la possibilità di semplificare l'analisi SEA considerando per ogni elemento il solo sottosistema flessionale. Tale approssimazione nasce nel campo dell'acustica in quanto solo le vibrazioni flessionali producono moti delle piastre tali per cui l'ambiente venga sollecitato e quindi venga prodotto del rumore. Però tale approssimazione vale anche nel caso delle strutture qualora una piastra venga sollecitata a flessione e le giunzioni siano tutte piane oppure ad L [44].

Delle formule particolarmente semplici vengono date Cremer [71] e sono state utilizzate da Robinson [44]. In questo caso indichiamo con θ l'angolo compreso tra la normale alla giunzione e la direzione dell'onda. Innanzitutto occorre definire due parametri χ e ψ :

$$\chi = \frac{k_j}{k_i} = \sqrt[4]{\frac{\rho_{s,j} B_{p,i}}{\rho_{s,i} B_{p,j}}} = \sqrt{\frac{f_{c,j}}{f_{c,i}}} = \sqrt{\frac{c_{L,i} h_i}{c_{L,j} h_j}}$$

$$\psi = \frac{B_{p,j} k_j^2}{B_{p,i} k_i^2} = \frac{\rho_{s,j} f_{c,i}}{\rho_{s,i} f_{c,j}} = \frac{c_{L,j} h_j \rho_{s,j}}{c_{L,i} h_i \rho_{s,i}}$$

Nel caso in cui si voglia determinare $\tau_{ij}(\theta)$ tra due piastre ortogonali se $\chi \geq \sin(\theta)$ allora:

$$\tau_{ij}(\theta) = \frac{0.5 J_1 J_2 \psi \cos \theta \sqrt{\chi^2 - \sin^2 \theta}}{(J_2 \psi)^2 + \chi^2 + J_2 \psi \left(\frac{\sqrt{1 + \sin^2 \theta} \sqrt{\chi^2 + \sin^2 \theta} + \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \sqrt{\chi^2 - \sin^2 \theta}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \sqrt{\chi^2 - \sin^2 \theta}} \right)}$$

viceversa se $\chi < \sin(\theta)$:

$$\tau_{ij}(\theta) = 0.$$

I coefficienti J_1 e J_2 dipendono dalla configurazione geometrica della giunzione e sono riportati nella seguente Tabella 5.4:

Joint	J_1	J_2
	1	2
	2	0.5
	2	2
	4	1

Tabella 5.4: Coefficienti J_1 e J_2 per diverse configurazioni di giunzioni (immagine tratta da [44]).

Invece per determinare $\tau_{ij}(\theta)$ tra due piastre parallele se $\chi \geq \sin(\theta)$ allora:

$$\tau_{ij}(\theta) = \frac{0.5 \chi^2 \cos^2 \theta}{(J_3 \psi)^2 + \chi^2 + J_3 \psi \left(\frac{\sqrt{1 + \sin^2 \theta} \sqrt{\chi^2 + \sin^2 \theta} + \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \sqrt{\chi^2 - \sin^2 \theta}}{\chi^2} \right)}$$

viceversa se $\chi < \sin(\theta)$:

$$\tau_{ij}(\theta) = \frac{\cos^2 \theta}{2 + \frac{(J_3 \psi)^2 C^2}{\chi^4} + \frac{2 J_3 \psi C}{\chi^2} \sqrt{1 + \sin^2 \theta}}$$

dove

$$C = \sqrt{\chi^2 + \sin^2 \theta} + \sqrt{\sin^2 \theta - \chi^2}$$

In questo caso il valore del coefficiente J_3 vale (Tabella 5.5):

Joint	J_3
	1
	0.5

Tabella 5.5: Coefficiente J_3 per diverse configurazioni di giunzioni (immagine tratta da [44]).

A questo punto per tutte queste configurazioni si ottengono i coefficienti di trasmissione al variare dell'angolo di incidenza dell'onda flessionale. Per ottenere il coefficiente di trasmissione diffuso bisogna applicare il teorema del valore medio in funzione dell'angolo e da esso quindi ricavare il CLF.

Infine si precisa che si è scelto di non utilizzare tale teoria semplificata per il calcolo dei CLF nei seguenti capitoli in quanto essa permette di determinare solo i coefficienti di perdita per accoppiamento tra i sottosistemi flessionali e in più il valore calcolato è costante in tutto il dominio delle frequenze.

5.11 CLF per materiali compositi, sandwich e piastre rinforzate.

Per quanto riguarda il caso dei materiali compositi abbiamo già visto che la densità modale, e quindi la separazione media in frequenza, può essere calcolata utilizzando le formule che considerano un materiale ortotropo. Seçgin [20] ha inoltre dimostrato che sia le ammettenze che i coefficienti di perdita per accoppiamento possono essere ricavati utilizzando le formule per i materiali ortotropi. Dalle simulazioni si nota anche come l'angolo di orientazione delle fibre non risulti essere un parametri che influenzi ammettenze e CLF.

Le formule analitiche che vengono utilizzate per ricavare il coefficiente di trasmissione e i CLF sfruttano l'approccio delle impedenze. Queste ultime, rispettivamente per una forza e per un momento, per un materiale ortotropo sono le seguenti (il pedice n indica che può essere valido sia x che y) [20]:

$$Z_{\infty}^{F_z} = \frac{4}{\sqrt{3}} \rho h^2 \sqrt{c'_{Lx} c'_{Ly}}$$

$$Z_{\infty}^{M_n} = \frac{8 \rho h^2 c_{Ln} / k_{bn}^2}{\sqrt{3} (1 + i(4/\pi) \ln(1/r k_{bn}))}$$

Dove ρ è la densità della piastra, h è lo spessore della piastra, c'_{Lx} è la velocità longitudinale lungo x equivalente per un materiale ortotropo, c'_{Ly} è l'analogia velocità lungo y , r è il raggio della zona in cui agisce la forzante, $c_{Ln} = \sqrt{E_n/\rho}$, $c_{Bn} = \sqrt{\pi f h c_{Ln} / \sqrt{3}}$ e $k_{bn} = 2\pi f / c_{Bn}$.

Queste formule sono valide qualora vengano rispettate 2 condizioni:

$$2r > 3h$$

e

$$h < \frac{\pi}{3k_{bn}}.$$

Nel caso la forzante o il momento vengano applicati su un bordo le impedenze vanno ridotte di un fattore pari a 2.29 [20].

A questo punto possiamo semplicemente ricavare il coefficiente di trasmissione:

$$\tau_{ij,\infty} = \frac{4\text{Re}(Z_{i,\infty})\text{Re}(Z_{j,\infty})}{|Z_{i,\infty} + Z_{j,\infty}|^2}$$

e quindi il CLF:

$$\eta_{ij,\infty} = \frac{\overline{\delta f_i}}{\pi f} \frac{\tau_{ij,\infty}}{2 - \tau_{ij,\infty}}.$$

Di seguito riportiamo i risultati ottenuti da Seçgin [20] che ha confrontato le formule analitiche con risultati numerici ottenuti sfruttando il metodo del Power Injection Method (Figura 5.23 e Figura 5.24) (le caratteristiche della piastra 1 sono riportate in Tabella 3.2 e inoltre riportiamo i risultati solo per la piastra 1 essendo quelli per la piastra 2 simili).

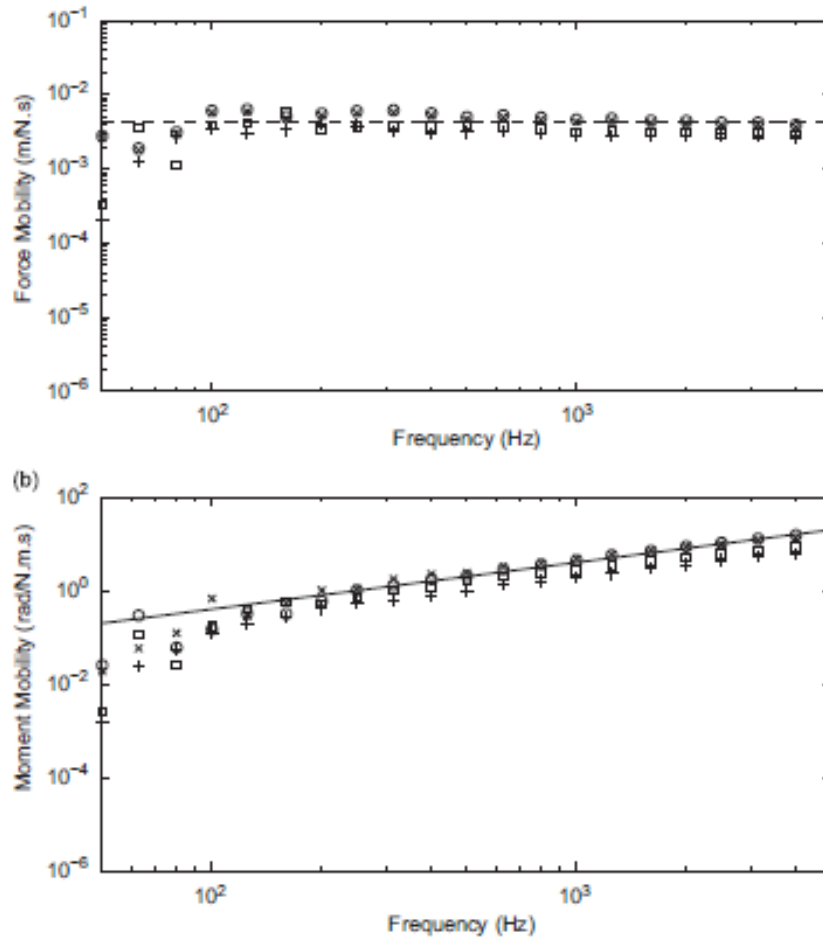


Figura 5.23: Risultati numerici per le ammettenze nel caso di una forza (a) e di un momento (b) per la piastra 1. Legenda: o: $\theta=0^\circ$, x: $\theta=15^\circ$, [] : $\theta=30^\circ$ e +: $\theta=45^\circ$, risultati analitici in linea continua (immagine tratta da [20]).

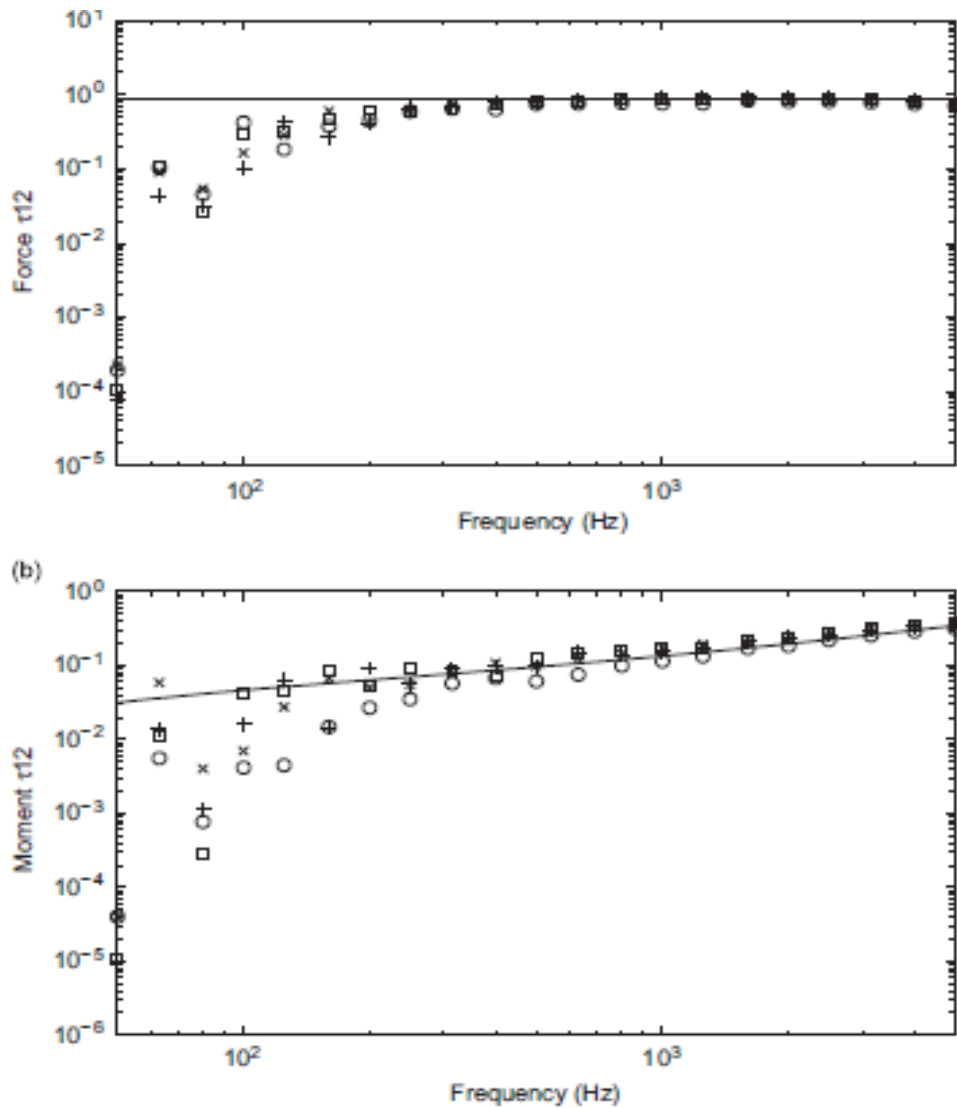


Figura 5.24: Risultati numerici per i CLF nel caso di una forza (a) e di un momento (b) per la piastra 1. Legenda: o: $\theta=0^\circ$, x: $\theta=15^\circ$, [] : $\theta=30^\circ$ e +: $\theta=45^\circ$, risultati analitici in linea continua (immagine tratta da [20]).

Quello che possiamo notare è che i risultati numerici sono in ottima corrispondenza con i risultati analitici ottenuti utilizzando le formule precedenti per un materiale ortotropo. C'è da notare una lieve dispersione dei risultati alle basse frequenze.

È importante sottolineare anche che l'angolo di disposizione delle fibre non influenza i risultati in termini di impedenze e di coefficienti di perdita per accoppiamento soprattutto alle alte frequenze, mentre alle basse si verificano delle differenze. Ciò sottolinea ancora una volta un concetto base dell'analisi SEA: più le frequenze si alzano e più contano le proprietà generiche dell'elemento strutturale.

Per quanto riguarda i materiali sandwich e le piastre rinforzate la letteratura è ancora assente per quanto riguarda la valutazione dei CLF. Quello che viene suggerito [41] in tale caso è di riportarsi a un materiale ortotropo equivalente che abbiamo visto essere già una buona approssimazione per la densità modale nel caso di queste strutture.

5.12 Limiti dell'analisi SEA.

A questo punto abbiamo visto come valutare tutti i parametri necessari per impostare l'analisi statistica dell'energia. Rimangono delle precisazioni da fare a livello generale di validità del metodo. Alcune sono già state ampiamente trattate e quindi si rimanda il lettore ai paragrafi corrispondenti.

1. Una assunzione fondamentale nell'analisi SEA è che la potenza scambiata tra due sottosistemi sia proporzionale alla differenza delle energie modali medie. Di fatto avevamo ipotizzato che l'energia fosse equamente distribuita tra i modi e nella realtà così non è. D'altra parte è possibile tenere conto di ciò associando ai risultati un'incertezza opportuna (Paragrafo 3.11). Inoltre sappiamo che lo scambio è proporzionale alle energie modali medie solo per accoppiamenti deboli e abbiamo visto nel Paragrafo 5.6 possiamo ritenere che gli accoppiamenti siano tali con una buona sicurezza;
2. Accoppiamenti deboli e forti: nel Paragrafo 5.6 abbiamo riportato quanto studiato da Mace [10,13,18] e abbiamo visto che in molti casi possiamo considerare gli accoppiamenti tra gli elementi come deboli. Mace [13] inoltre riporta le formule per accoppiamenti forti tra piastre.
3. Abbiamo visto che anche la sovrapposizione modale è un parametro importante e che possiamo ritenere accurati i risultati dell'analisi SEA quando $MOF \geq 1$, anche se Lyon [41] afferma che basta che sia maggiore a 0.5 in quanto, tenendo conto della varianza, possiamo associare un'incertezza che ci permette di tenere conto anche della mancanza di un numero sufficiente di modi di vibrare.
4. Le sollecitazioni che agiscono su sottosistemi diversi non devono essere correlate: solo in questo caso le energie che si originano dalle singole forzanti possono essere sommate linearmente. Inoltre, al fine di garantire l'accuratezza dei risulta

dell'analisi SEA, la forzante migliore sia un rumore ad ampio spettro poiché le formule della teoria di base (Capitolo 1) sono state ricavate considerando tale sollecitazione.

5. Accoppiamenti conservativi: generalmente non è un gran problema perché nel caso non fossero conservativi possiamo tenerne conto allocando tale smorzamento al sottosistema. Un'altra strategia viene suggerita nell'articolo [15].
6. Dobbiamo imporre un limite anche alla dimensione massima dell'elemento. Questo è associato al fatto che, essendo il sottosistema dotato di smorzamento, deve giungere dell'energia alla giunzione. È chiaro che se l'elemento ha delle dimensioni troppo grandi esso avrà dissipato tutta l'energia prima che l'onda arrivi alla giunzione. Possiamo dare la seguente regola analitica:

$$l < \frac{c_g}{2\pi f \eta_d}.$$

Dove con c_g indichiamo la velocità di gruppo dell'onda, con f la frequenza centrale della banda, con η_d il coefficiente di smorzamento. Infine l è la lunghezza della trave o una dimensione media della piastra pari a A/d in cui A è l'area superficiale e d il perimetro.

7. Infine dobbiamo assicurarci che lo spessore della piastra non sia eccessivo in modo tale da poter applicare la teoria della piastra sottile. Ciò impone che sia:

$$\lambda > 6h$$

Ovvero la lunghezza d'onda deve essere tale che l'onda non si propaghi attraverso lo spessore.

Capitolo 6 : VALIDAZIONE DEL SOFTWARE

6.1 Introduzione.

In questo capitolo verranno validati i risultati ottenuti dal codice MATLAB implementato confrontando i risultati numerici in termini di coefficienti di trasmissione tra piastre ottenuti dallo stesso e quelli calcolati e riportati nel riferimento [66].

Innanzitutto precisiamo che siamo interessati a validare solamente i coefficienti di trasmissione poiché essi rappresentano il punto centrale dell'analisi SEA: una volta che siamo a conoscenza di tali grandezze ricavare i coefficienti di perdita per accoppiamento e poi implementare il codice per l'analisi completa è un problema solo dal punto di vista computazionale.

In secondo luogo verifichiamo solo i coefficienti tra piastre poiché per esse abbiamo applicato la teoria della matrice di rigidezza dinamica di Langley [70] che è stata utilizzata e verificata nel riferimento [17] esclusivamente per giunzioni tra due piastre e quindi merita ulteriori approfondimenti e confronti.

Per quanto riguarda invece i coefficienti di trasmissione tra travi e piastre abbiamo utilizzato l'approccio classico che prevede il calcolo tramite le impedenze. Questa scelta è stata fatta poiché dalla letteratura non sono emerse strategie alternative e possibilmente più accurate. Sottolineiamo che tali risultati non sono stati validati con risultati numerici o sperimentali prodotti da altri autori a causa della completa mancanza di essi. Ciò è dovuto alla focalizzazione degli studi di ricerca sulle giunzioni tra piastre.

È stato scelto di validare i risultati del codice con quelli del riferimento [66] in quanto la loro accuratezza, tenendo ovviamente conto dell'incertezza, è stata verificata sperimentalmente e quindi possiamo considerarli un riferimento attendibile. Inoltre, come verrà evidenziato di seguito, in tale riferimento vengono riportati i risultati in termini di coefficienti di trasmissione per tutti i tipi di giunzioni tra piastre che ci

interessano dal punto di vista ingegneristico. Dal confronto tra i risultati del codice MATLAB implementato e quelli disponibili dalla letteratura è ovvio attendersi delle differenze in quanto utilizzano metodo di analisi differenti, quello che ci basta verificare è che i risultati siano confrontabili possibilmente entro un margine di ± 3 dB in modo tale che la potenza trasmessa sia compresa tra il doppio e la metà di quella calcolata con il metodo del riferimento [66].

6.2 Descrizione della struttura utilizzata per la validazione.

La struttura analizzata nel riferimento [66] deriva dall'idealizzazione dello scafo di una nave (Figura 6.1). In tale studio l'obiettivo era quello di determinare le sollecitazioni vibrazionali prodotte sulla struttura dal funzionamento dei motori tramite l'analisi SEA.

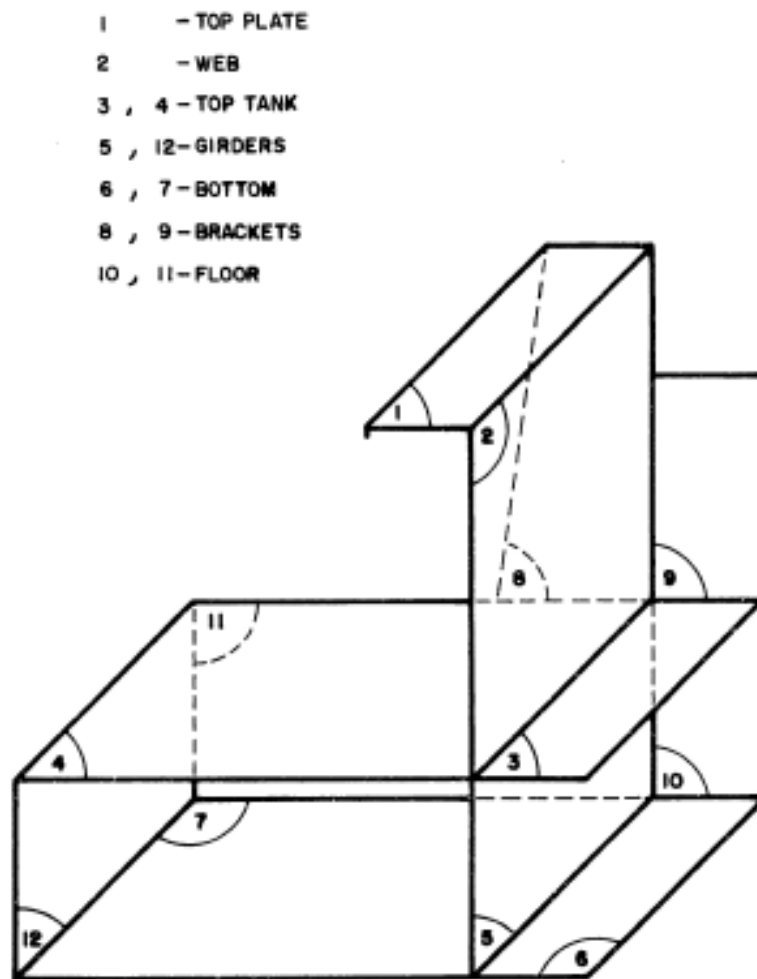


Figura 6.1: Idealizzazione della struttura studiata nel riferimento [66] (immagine tratta da [66]).

Tale struttura risulta essere interessante poiché presenta sia giunzioni a L tra due piastre che giunzioni a T tra tre piastre e infine giunzione a X tra quattro piastre, coprendo quindi le principali configurazioni dal punto di vista ingegneristico. Inoltre abbiamo a disposizione tutte le grandezze necessari per il calcolo dei coefficienti di trasmissione e che riportiamo direttamente da [66] (Tabella 6.1).

	PIASTRA	SPESSORE [mm]	AREA [m ²]	DIMENSIONI [mm]	MASSA [kg]
1	TOP	8.2	0.077	178x432	5.335
2	WEB	3.3	0.225	584x432	6.654
3	TANK TOP	2.6	0.088	203x432	1.698
4	TANK TOP	2.6	0.329	762x432	6.624
5	LONG GIRDER	3.3	0.143	330x432	3.717
6	BOTTOM	3.3	0.088	203x432	2.107
7	BOTTOM	3.3	0.329	762x432	8.154
8	BRACKET	3.3	0.126	178x254x564	3.306
9	BRACKET	3.3	0.077	381x203	2.027
10	FLOOR	3.3	0.067	203x330	1.770
11	FLOOR	3.3	0.251	762x330	6.668
12	LONG GIRDER	3.3	0.143	330x432	3.717

Tabella 6.1: Grandezze caratteristiche delle piastre del riferimento [66].

Il materiale utilizzato è acciaio ma non sono state fornite le proprie caratteristiche. Dalla tabella possiamo ricavare la densità che risulta essere uguale 7800 kg/m^3 . È chiaro che parte dell'impresione dei risultati in parte è dovuta alla mancanza di tali informazioni.

Detto ciò dividiamo la trattazione seguente per tipologia di giunzione tra piastre confrontando di volta in volta i risultati del programma MATLAB implementato e quelli disponibili.

6.3 Giunzioni a L tra due piastre.

Come primo caso consideriamo le giunzioni a L tra due piastre in quanto, chiaramente, rappresentano la configurazione più semplice da studiare. L'angolo che formano le due piastre è retto. Le due piastre della struttura che presentano una tale configurazione sono la 1 e la 2 di Figura 6.1 e le cui caratteristiche sono riportate in Tabella 6.1. Di seguito riportiamo il grafico che viene dato nel riferimento [66] (Figura 6.2a) e quello ottenuto dal codice MATLAB (Figura 6.2b).

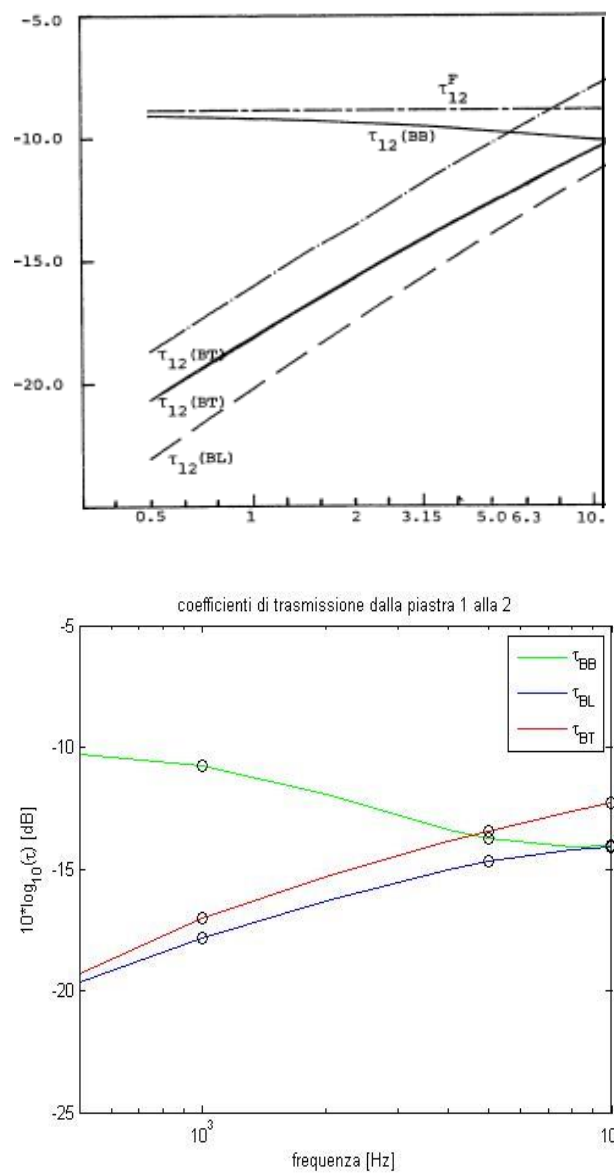


Figura 6.2: Confronto tra i risultati del riferimento [66] (a) e quelli ottenuti dal programma MATLAB (b) nel caso della giunzione a L tra le piastre 1 e 2 di Figura 6.1 (immagine tratta da [66])

Confrontando le due precedenti figure possiamo notare che:

- Per quanto riguarda il coefficiente di trasmissione dal sottosistema flessionale della piastra 1 a quello flessionale della piastra 2, indicato con $\tau_{12}(BB)$ nella Figura 6.2a e in verde nella Figura 6.2b, i risultati sono affini, soprattutto per le frequenze inferiori ai 5000 Hz. Entrambi si attestano a cavallo dei -10dB anche se l'andamento dei coefficiente calcolato dal codice decresce più rapidamente rispetto a quello del riferimento [66]. Ciò significa che la potenza trasmessa alle alte frequenze calcolata attraverso il codice risulterà essere inferiore rispetto a quella che otterremmo utilizzando $\tau_{12}(BB)$. La grandezza riportata in Figura 6.2a e indicata con τ_{12}^F è il coefficiente di trasmissione tra i sottosistemi flessionali calcolato mediante una teoria semplificata che non prende in considerazione i sottosistemi longitudinale e nel piano delle piastre che formano la giunzione.

Per dare una descrizione più quantitativa riportiamo i risultati a 1000, 5000 e 10000 Hz per $\tau_{BB,12}$ (sono indicati con anche nel grafico precedente):

$$\tau_{BB,12}(f = 1000 \text{ Hz}) = -10.79 \text{ dB}$$

$$\tau_{BB,12}(f = 5000 \text{ Hz}) = -13.74 \text{ dB}$$

$$\tau_{BB,12}(f = 10000 \text{ Hz}) = -14.04 \text{ dB}$$

Il fatto che il calcolo del coefficiente di trasmissione sia molto buono alle basse frequenza e peggiore alle elevate non ci preoccupa in quanto è alle basse frequenze che otteniamo i valori in termini di energia più elevati mentre al crescere della frequenza il contenuto energetico del sottosistema diminuisce, perciò sappiamo che, in caso, stiamo sottostimando la parte energeticamente meno importante;

- C'è una ottima concordanza tra i coefficienti di trasmissione dal sottosistema flessionale della piastra 1 ai sottosistemi longitudinale e di taglio della piastra 2. In particolare possiamo notare che in entrambe le figure il coefficiente di trasmissione dal sottosistema flessionale a quello di taglio risulta essere leggermente superiore di quello verso il sottosistema longitudinale. L'andamento

delle due curve è leggermente differente in quanto secondo il riferimento [66] dovrebbero essere leggermente convergenti all'aumentare della frequenza e invece dal programma risultano essere divergenti. Numericamente possiamo osservare che sono in prossimità di -20 dB a 500 Hz e comprese tra -10 e -15 dB a 10000 Hz. Quantitativamente a 1000, 5000 e 10000 Hz otteniamo i seguenti risultati, rispettivamente per i coefficienti dal sottosistema flessionale a quello longitudinale e da quello flessionale verso quello di taglio:

$$\tau_{BL,12}(f = 1000 \text{ Hz}) = -17.83 \text{ dB}$$

$$\tau_{BL,12}(f = 5000 \text{ Hz}) = -14.68 \text{ dB}$$

$$\tau_{BL,12}(f = 10000 \text{ Hz}) = -14.12 \text{ dB}$$

$$\tau_{BT,12}(f = 1000 \text{ Hz}) = -17.00 \text{ dB}$$

$$\tau_{BT,12}(f = 5000 \text{ Hz}) = -13.42 \text{ dB}$$

$$\tau_{BT,12}(f = 10000 \text{ Hz}) = -12.30 \text{ dB}$$

Infine precisiamo che nella figura la seconda grandezza indicata con $\tau_{12}(BT)$ e che presenta valori maggiori in realtà è l'andamento del coefficiente di trasmissione dal sottosistema flessionale della piastra 1 a quello "nel piano" della piastra 2 e che è dato dalla somma dei due coefficienti precedenti e dovrebbe essere indicato con $\tau_{12}(BP)$. Si tratta quindi di un riferimento errato.

In conclusione possiamo dire per le giunzioni a L tra due piastre i risultati del programma implementato presentano una buona concordanza con quelli calcolati e forniti in [66], anche se per esse abbiamo confrontato solo i coefficienti di trasferimento dal sottosistema flessionale a tutti quelli della piastra 2. In realtà sarebbero da confrontare anche i coefficienti dai sottosistemi longitudinale e di taglio della piastra 1 ma tali risultati non sono riportati nel riferimento [66].

Importante è notare dai grafici di Figura 6.2 che alle basse frequenze la trasmissione dell'energia è principalmente tra i sottosistemi flessionali delle due piastre mentre all'aumentare della frequenza una quota sempre maggiore di energia viene trasferita ai

sottosistemi longitudinale e di taglio della piastra 2, tanto che al di sopra dei 5000 Hz il coefficiente tra i sottosistemi flessionali risulta essere persino minore degli altri.

6.4 Giunzione a X tra quattro piastre.

Passiamo a esaminare il caso in cui quattro piastre formano una giunzione X con angoli una rispetto all'altra pari a 90°. In questo tipo di configurazione dobbiamo esaminare due tipologie principali di vie di trasmissione: la prima considera piastre che sono disposte ad angolo retto mentre la seconda piastre che risultano essere affiancate una all'altra e che giacciono sullo stesso piano. Dalla seguente analisi vedremo le differenze che si generano nelle due tipologie di trasmissione appena descritte.

Il caso che viene riportato nel riferimento [66] considera la giunzione formata dalla piastra 2, 3, 4 e 5 di Figura 6.1. Come primo passo confrontiamo i grafici relativi ai coefficienti di trasmissione tra le piastre 2 e 5 che formano un angolo piatto tra di loro.

Dalla Figura 6.3 appare evidente che i risultati ottenuti dal programma sono in buon accordo con quelli forniti dal riferimento [66], in particolare:

- Il coefficiente di trasmissione tra i sottosistemi flessionali delle piastre 2 e 5 hanno una buona corrispondenza: nel caso del programma MATLAB vale poco meno di -10dB mentre nell'altro caso è leggermente superiore. La differenza comunque è molto contenuta. Numericamente abbiamo che $\tau_{BB,25}$ calcolato con il metodo di Langley è costante nel dominio della frequenza e vale:

$$\tau_{BB,25} = cost = -10.88 \text{ dB}.$$

Dai risultati che abbiamo a disposizione da [66] invece possiamo notare come all'aumentare della frequenza il coefficiente di trasmissione abbiamo una leggera diminuzione che però risulta essere più importante sopra i 10000 Hz e quindi al di fuori del campo di interesse della presente trattazione.

- I coefficienti di trasmissione tra i sottosistemi longitudinali e di taglio $\tau_{LT,25}$ e $\tau_{TL,25}$ sono anch'essi in ottimo accordo con i risultati a disposizione. In particolare notiamo come la trasmissione dal sottosistema longitudinale della piastra 2 a quello di taglio della piastra 5 è leggermente superiore dell'altro. L'andamento dei risultati del programma è praticamente costante, varia leggerissimamente, e non presenta quella lieve diminuzione che caratterizza quelli del riferimento [66]. Quantitativamente possiamo vedere che in entrambi i casi i coefficienti sono compresi tra -15 e -20 dB.

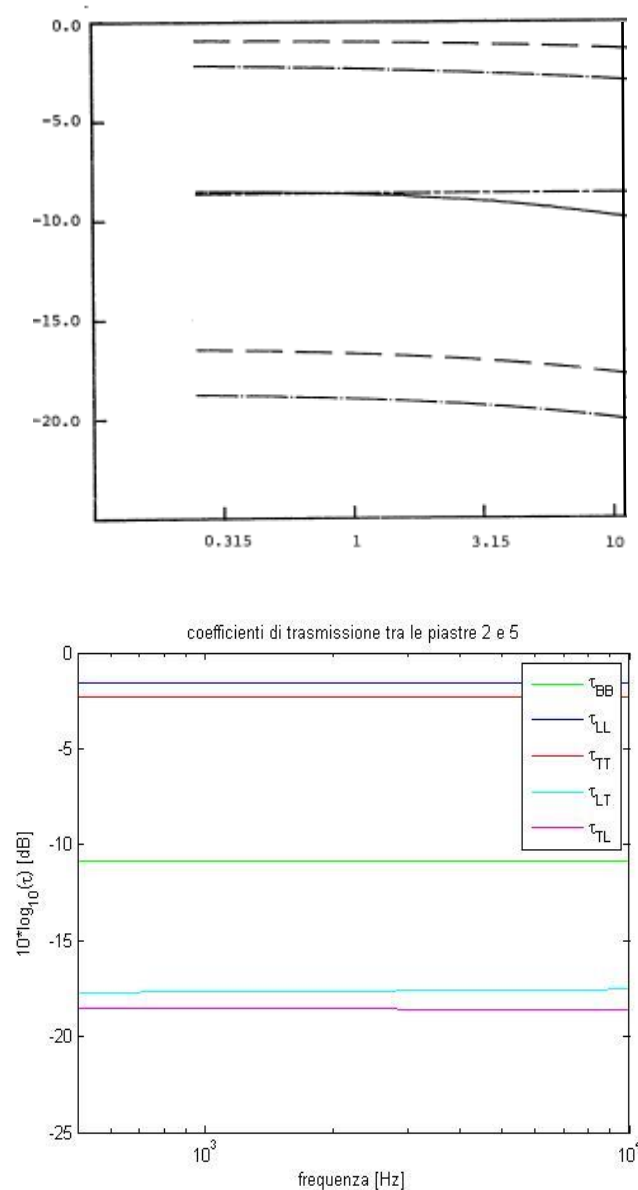


Figura 6.3: Confronto tra i risultati del riferimento [66] (a) e quelli ottenuti dal programma MATLAB (b) nel caso della giunzione a X tra le piastre 2 e 5 di Figura 6.1 (immagine tratta da [66])

- Infine anche i risultati per quanto riguarda i coefficienti di trasmissione tra il sottosistema longitudinale della piastra 2 e quello longitudinale della piastra 5, che indichiamo con $\tau_{LL,25}$ in Figura 6.3b, e quello tra il sottosistema di taglio della piastra 2 a quello di taglio della piastra 5, $\tau_{TT,25}$, sono in ottima corrispondenza con quelli forniti dal riferimento [66].

Quello che possiamo notare dai grafici precedenti, e che potevamo anche intuire, è che due piastre disposte in modo tale da formare un angolo piatto scambiano energia principalmente con i sottosistemi dello stesso tipo: ad esempio se la piastra 2 è sollecitata longitudinalmente è chiaro che la giunzione solleciterà la piastra 5 allo stesso modo e tale ragionamento vale anche per le altre tipologie di onde. A confermare ciò notiamo che i coefficienti di trasmissione tra sottosistemi di tipo differente, come $\tau_{LT,25}$ e $\tau_{TL,25}$ sono particolarmente bassi.

Dopo aver visto i grafici relativi ai coefficienti di trasmissione tra le piastre 2 e 5 passiamo ad analizzare quelli tra le piastre 2 e 4 della medesima giunzione a X che nella configurazione di Figura 6.1 sono disposte ortogonalmente. L'obiettivo è quello di verificare come variano i coefficienti rispetto alla disposizione descritta appena sopra nel corrente paragrafo.

Dal confronto tra la Figura 6.4a e la Figura 6.4b possiamo osservare:

- come in tutti i casi precedenti la corrispondenza tra i coefficienti di trasmissione tra i sottosistemi flessionali è molto buona. E' chiaro che avendo a disposizione solo tali grafici non riusciamo a dare un valore numerico preciso alla valutazione della differenza tra i coefficienti calcolati nei due modi, ma possiamo affermare che essa è minore di 3dB. Il valore numerico che otteniamo dal programma per il coefficiente tra i sottosistemi flessionale è:

$$\tau_{BB,24} = cost = -12.80 \text{ dB}$$

mentre dalla Figura 6.4a possiamo di certo dire che vale meno di -10 dB e quindi la nostra affermazione precedente risulta essere giustificata.

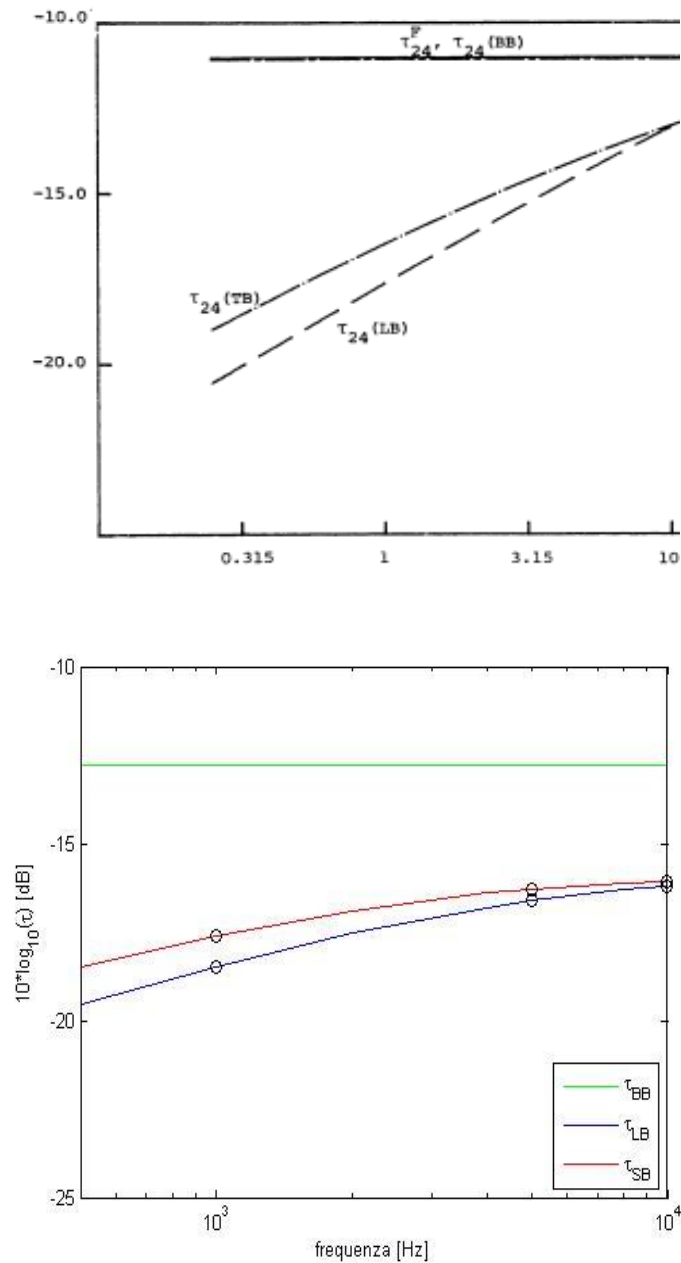


Figura 6.4: Confronto tra i risultati del riferimento [66] (a) e quelli ottenuti dal programma MATLAB (b) nel caso della giunzione a X tra le piastre 2 e 4 di Figura 6.1 (immagine tratta da [66])

- Il confronto tra i coefficienti di trasferimento dai sottosistemi longitudinale e di taglio della piastra 2 a quello flessionale della piastra 4 invece risultano essere differenti soprattutto all'aumentare della frequenza. In particolare l'andamento delle curve ottenute dal programma è meno crescente delle corrispondenti curve riportate nel riferimento [66]. Come riferimenti possiamo dire che secondo il

riferimento [66] a 1000 e 10000 Hz dovrebbero essere entrambi di poco superiori rispettivamente a -20 e -15 dB, mentre i valori che otteniamo sono i seguenti:

$$\tau_{LB,24}(f = 1000 \text{ Hz}) = -18.47 \text{ dB}$$

$$\tau_{LB,24}(f = 5000 \text{ Hz}) = -16.62 \text{ dB}$$

$$\tau_{LB,24}(f = 10000 \text{ Hz}) = -16.20 \text{ dB}$$

$$\tau_{TB,24}(f = 1000 \text{ Hz}) = -17.60 \text{ dB}$$

$$\tau_{TB,24}(f = 5000 \text{ Hz}) = -16.28 \text{ dB}$$

$$\tau_{TB,24}(f = 10000 \text{ Hz}) = -16.06 \text{ dB} .$$

E' chiaro che in questo caso siamo di fronte a risultati meno accurati rispetto ai casi precedenti. Possiamo giustificare parzialmente questi errori ricordando che nel riferimento [66] non vengono riportate le caratteristiche del materiale utilizzato per la realizzazione delle piastre, limitandosi a dire che sono realizzate in acciaio. Inoltre per ricavare i coefficienti abbiamo utilizzato una teoria diversa e quindi è logico aspettarsi che i risultati non siano sempre pienamente concordi. D'altra parte siamo particolarmente interessati a verificare la corrispondenza tra i coefficienti tra solo i sottosistemi flessionali poiché, come vedremo nel Capitolo 7, la densità modale dei sottosistemi longitudinale e di taglio è troppo bassa per considerarli sottosistemi significativi. Quindi, anche in questo caso, possiamo ritenerci soddisfatti della corrispondenza tra il programma implementato e i risultati fornito dal riferimento [66].

6.5 Giunzione a T tra tre piastre.

L'ultima tipologia di giunzione che ci rimane da analizzare è quella formata da tre piastre disposte in modo tale da formare una sezione a T. Come nel caso della giunzione a X anche in questo dobbiamo considerare che la giunzione è formata da due tipologie di configurazioni: la prima prevede che due piastre siano disposte una ortogonalmente all'altra, mentre la seconda è composta da piastre affiancate e che giacciono sullo stesso piano.

Le piastre che vengono prese in considerazione nel riferimento [66] sono le piastre 4, 8 e 11 riportate in Figura 6.1.

Iniziamo considerando i coefficienti di trasmissione tra la piastra 8 e 4 che sono due piastre disposte ortogonalmente una rispetto all'altra.

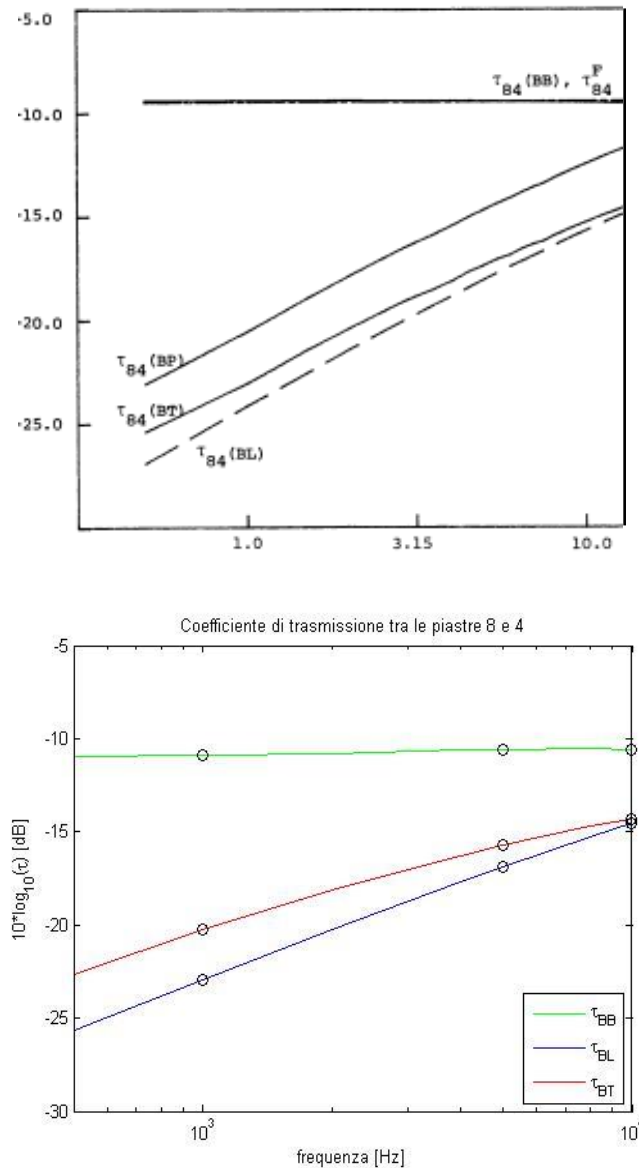


Figura 6.5: Confronto tra i risultati del riferimento [66] (a) e quelli ottenuti dal programma MATLAB (b) nel caso della giunzione a T tra le piastre 8 e 4 di Figura 6.1 (immagine tratta da [66])

Confrontando i due grafici precedenti possiamo dire che:

- la corrispondenza tra il coefficiente di trasmissione tra il sottosistema flessionale della piastra 8 e il medesimo della piastra 4 e il coefficiente fornito dal riferimento [66] è molto buona in quanto in entrambi i casi siamo prossimi al valore di -10dB. Inoltre in entrambi i casi l'andamento è pressoché costante al variare della frequenza. Numericamente dal programma otteniamo:

$$\tau_{BB,84}(f = 1000 \text{ Hz}) = -10.89 \text{ dB}$$

$$\tau_{BB,84}(f = 5000 \text{ Hz}) = -10.57 \text{ dB}$$

$$\tau_{BB,84}(f = 10000 \text{ Hz}) = -10.55 \text{ dB}.$$

- per quanto riguarda i coefficienti di trasmissione dal sottosistema flessionale della piastra 8 a quelli longitudinale e di taglio, rispettivamente $\tau_{BL,84}$ e $\tau_{BT,84}$, i risultati a disposizione confermano quanto calcolato dal programma entro un margine di 3 dB. numericamente otteniamo i seguenti valori:

$$\tau_{BL,84}(f = 1000 \text{ Hz}) = -22.91 \text{ dB}$$

$$\tau_{BL,84}(f = 5000 \text{ Hz}) = -16.86 \text{ dB}$$

$$\tau_{BL,84}(f = 10000 \text{ Hz}) = -14.53 \text{ dB}$$

$$\tau_{BT,84}(f = 1000 \text{ Hz}) = -20.21 \text{ dB}$$

$$\tau_{BT,84}(f = 5000 \text{ Hz}) = -15.74 \text{ dB}$$

$$\tau_{BT,84}(f = 10000 \text{ Hz}) = -14.29 \text{ dB}.$$

Analizzando la Figura 6.5 quello che appare evidente è che il coefficiente di trasmissione tra i sottosistemi flessionali è il più importante e in questo risulta essere chiaro se consideriamo la disposizione relativa tra le due piastre, che ricordiamo sono ortogonali tra di loro. Dobbiamo anche sottolineare che all'aumentare della frequenza aumentano i coefficienti di trasmissione dal sottosistema flessionale della piastra 8 verso i sottosistemi “nel piano” della piastra 4, benché i risultati ottenuti dal programma rimangano inferiori al precedente in tutto lo spettro in frequenza di nostro interesse.

Dopo aver discusso dei coefficienti tra le piastre ortogonali passiamo ad analizzare i risultati per le piastre disposte sullo stesso piano e quindi consideriamo i coefficienti di trasmissione tra le piastre 8 e 11. I risultati sono riassunti nella seguente Figura 6.6.

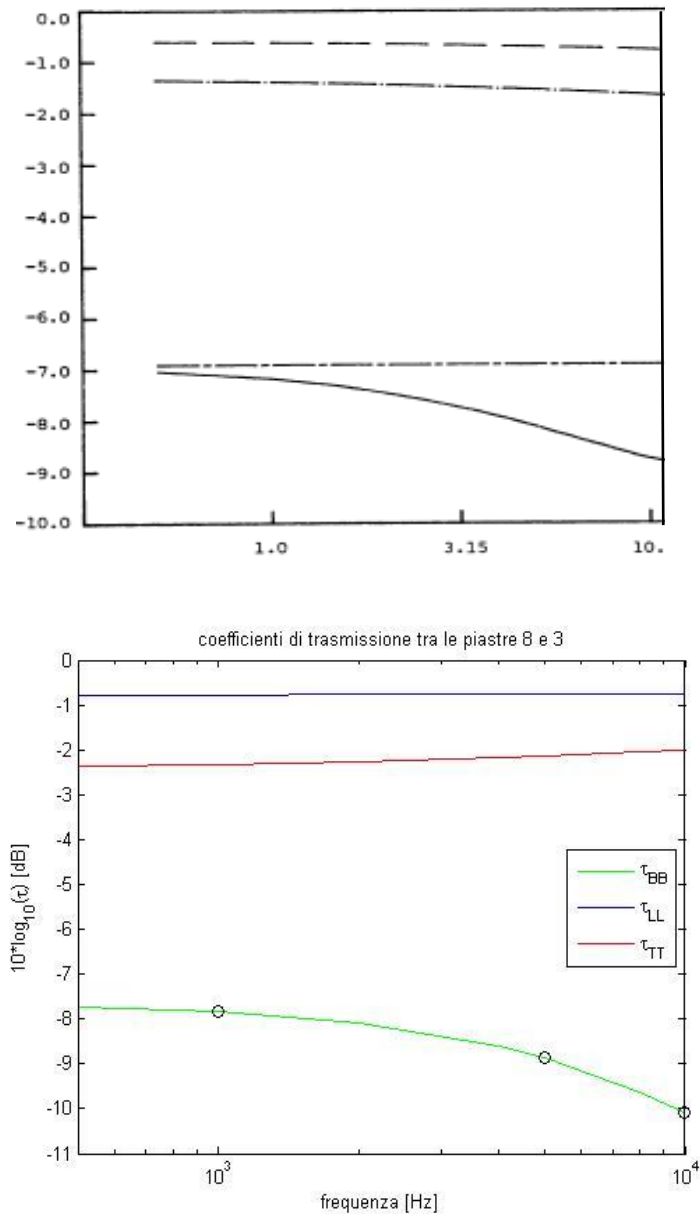


Figura 6.6: Confronto tra i risultati del riferimento [66] (a) e quelli ottenuti dal programma MATLAB (b) nel caso della giunzione a T tra le piastre 8 e 11 di Figura 6.1 (immagine tratta da [66])

Confrontando le due figure possiamo dire che:

- la differenza tra il coefficienti di trasmissione tra i sottosistemi flessionali è molto contenuta e pari all'incirca a 1 dB in tutto il campo delle frequenze di interesse in tale trattazione. In entrambe le figure all'aumentare della frequenza abbiamo che il coefficiente di trasmissione si attenua rispetto al valore iniziale. Dal programma implementato otteniamo i seguenti valori numerici rispettivamente a 1000, 5000 e 10000 Hz:

$$\tau_{BB,811}(f = 1000 \text{ Hz}) = -7.83 \text{ dB}$$

$$\tau_{BB,811}(f = 5000 \text{ Hz}) = -8.87 \text{ dB}$$

$$\tau_{BB,811}(f = 10000 \text{ Hz}) = -10.08 \text{ dB}.$$

La differenza tra i risultati riportati e quelli disponibili nel riferimento [66] sono dovuti molto probabilmente al diverso metodo teorico utilizzato per descrivere il sistema.

- come avevamo visto nel Paragrafo 6.4 quando avevamo considerato le due piastre non disposte ortogonalmente della giunzione a X, anche in questo caso otteniamo che sono tali da garantire che la maggior parte dell'energia trasmessa sia tra i sottosistemi dello stesso tipo. Ancora una volta se immaginiamo che una delle due piastre sia sollecitata longitudinalmente è ovvio attendersi che la giunzione ecciti allo stesso modo anche la piastra inizialmente in quiete, dato che esse sono due piastre una affiancata all'altra e che giacciono sullo stesso piano. Possiamo notare che tra i due grafici è presente una leggera differenza soprattutto per quanto riguarda τ_{TT} ma risultando comunque accettabile.

6.6 Ulteriori considerazioni sui coefficienti di trasmissione.

In questo capitolo abbiamo confrontato i risultati in termini di coefficienti di trasmissione forniti dal programma implementato con alcuni risultati disponibili in letteratura. Principalmente eravamo interessati a verificare l'accuratezza dei coefficienti di

trasmissione tra i sottosistemi flessionali in quanto, per quello che vedremo nel Capitolo 7, solo questi sottosistemi presentano le caratteristiche in termini di densità modale e Modal Overlap Factor tali da garantire che i risultati dell'analisi SEA siano significativi.

Alla luce di quanto analizzato possiamo quindi affermare che la corrispondenza tra i coefficienti di trasmissione flessionale sia sufficiente a validare il programma implementato.

Infine abbiamo visto che anche i risultati dei coefficienti di trasmissione tra gli altri sottosistemi sono in buon accordo nella quasi totalità dei casi. Quindi, qualora ci sia la necessità di modellare il sistema anche tramite i sottosistemi longitudinale e di taglio, siamo sicuri dell'accuratezza dei risultati ottenuti.

Capitolo 7 : ANALISI SEA DI UNA STRUTTURA

7.1 Introduzione.

In questo capitolo si applica l'analisi statistica dell'energia a una struttura complessa. Questa analisi applicata a un tale sistema risulta essere utile per studiare come i vari elementi della struttura rispondono in seguito a una sollecitazione caratterizzata da un ampio spettro in frequenza che interessa una qualsiasi parte della stessa.

La grandezza principale che ci interessa conoscere è l'energia che caratterizza ogni elemento strutturale in quanto essa rappresenta un indice che ci permette di capire in quale misura l'elemento sia sollecitato. Si ricorda ancora una volta che l'energia di cui si parla è l'energia totale del sottosistema data dalla somma di energia cinetica e potenziale che nel Capitolo 1 della presente trattazione sono state dimostrate essere uguali. L'energia di un elemento strutturale è poi data dalla somma delle energie dei sottosistemi che lo compongono: per le piastre si hanno tre sottosistemi (flessionale, longitudinale e di taglio che però possiamo riassumere in solo due sottosistemi unendo quelli longitudinale e di taglio nel sottosistema "nel piano") e per le travi tre sottosistemi (flessionale, longitudinale e torsionale). Quindi, in linea teorica, mediante l'analisi SEA ricaveremo l'energia di ogni sottosistema e quindi otterremo l'energia di ogni elemento strutturale sommando le energie dei sottosistemi che lo compongono [41].

Si ricorda inoltre che una volta nota l'energia che caratterizza un determinato sottosistema è possibile anche ricavare le tensioni che lo interesseranno (si veda Paragrafo 2.5). Tali tensioni saranno ovviamente delle tensioni medie sia nel tempo che nello spazio che agiscono su un elemento, come dovrebbe ormai essere ovvio al lettore, dato che derivano dalla soluzione del problema mediante SEA.

Infine ricaveremo un valore medio globale dell'energia che interessa ogni elemento in quanto ci interessa capire quanto esso sia mediamente sollecitato in modo tale da

confrontare il valore ottenuto con il limite attuale secondo cui un satellite viene considerato irrimediabilmente danneggiato e pari a 40 J/g. Per ottenere tale valore medio globale di energia, fissato l'intervallo in frequenza in cui si vuole ottenere tale informazione, utilizzeremo il teorema del valore medio applicato all'energia del singolo elemento strutturale.

Prima di passare a quanto detto dobbiamo prima fare delle considerazioni sull'idealizzazione del sistema alla luce di quanto visto nei precedenti capitoli.

7.2 Descrizione della struttura studiata mediante SEA.

Il satellite che è stato studiato mediante analisi SEA è composto da un corpo centrale a forma di parallelepipedo e presenta pannelli solari deployable ciascuno composto da tre elementi a forma di piastra collegati uno all'altro lungo una giunzione lineare. Tali pannelli solari sono collegati al corpo centrale da una trave a sezione circolare. Di seguito in Figura 7.1 riportiamo una rappresentazione del satellite ottenuta tramite Solidworks e in cui è riportata anche la numerazione delle piastre che è stata utilizzata per l'implementazione del codice MATLAB.

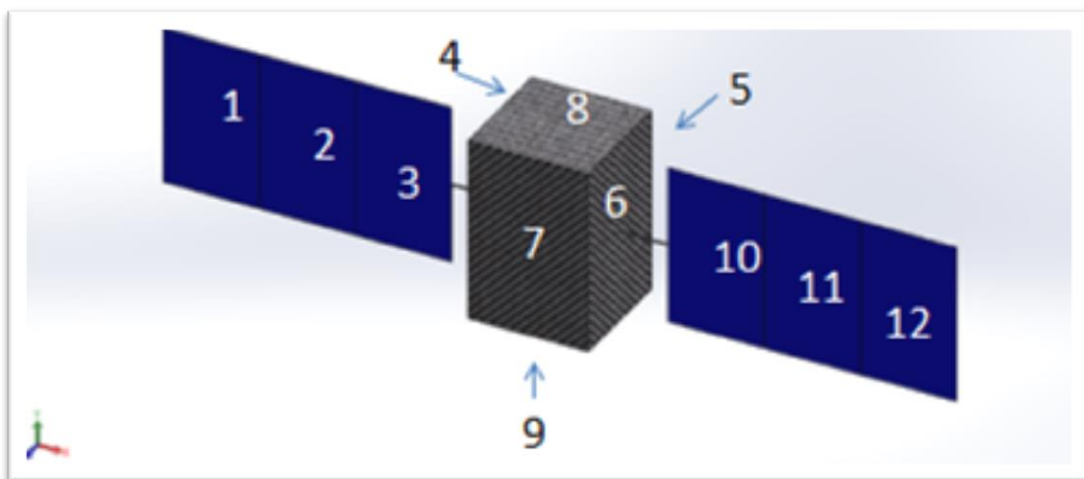


Figura 7.1: Rappresentazione tridimensionale del satellite studiato e numerazione delle piastre.

Per quanto riguarda il corpo centrale esso è formato da piastre rettangolari di dimensione 1x1.5m mentre le facce superiore e inferiore sono quadrate di dimensione 1x1m. Per

entrambe le tipologie di piastra lo spessore è pari a 10mm. Per quanto riguarda il materiale consideriamo che esso abbia le seguenti proprietà:

- Modulo elastico: 70 GPa;
- Densità: 1700 kg/m³;
- Coefficiente di Poisson: 0.3.

Come già riportato precedentemente ciascun pannello solare è composto da tre piastre, le quali sono collegate tra di loro da una giunzione lineare. Per esse ci interessano delle proprietà generali in termini di dimensioni e caratteristiche del materiale, poiché come sottolineato da Lyon [41] sono le proprietà generali che descrivono il comportamento dell'elemento strutturale e quindi non serve specificare ulteriori dettagli che sono inutili al fine dell'analisi. Le dimensioni di ciascuno dei tre elementi che formano il pannello sono 1.3x0.8m. Lo spessore è pari a 2.5 mm. Le proprietà del materiale sono:

- Modulo elastico: 70 GPa;
- Densità: 1800 kg/m³;
- Coefficiente di Poisson: 0.3.

Le travi di sostegno dei pannelli solari sono a sezione circolare con diametro pari a 15mm e di lunghezza pari a 0.4m. Il materiale utilizzato per esse è acciaio con:

- Modulo elastico: 210 GPa;
- Densità: 7800 kg/m³;
- Coefficiente di Poisson: 0.3.

Le travi sono collegate a sbalzo sulla piastra del corpo centrale (rispettivamente alla piastra 4 e 6) e lungo il lato più lungo della piastra che forma il pannello solare. In entrambi i casi le giunzioni sono rappresentabili mediante degli incastri.

7.3 Idealizzazione del sistema e metodi di analisi utilizzati.

Per quanto riguarda l'idealizzazione del sistema facciamo alcune precisazioni anche se essa rappresenta uno passo piuttosto diretto dell'analisi poiché non sono presenti

elementi geometricamente complessi (Paragrafo 2.4.1) o pannelli irrigiditi (Paragrafo 2.4.6).

Nel Paragrafo 2.4.4 si è spiegato come il comportamento delle travi possa essere duplice, ovvero alle basse frequenze presentano modi di vibrare tipici delle travi mentre all'aumentare della frequenza presentano anche modi di vibrare tipici delle piastre. Nel Paragrafo 3.7 si è sottolineato come la densità modale possa essere utilizzata come strumento per definire quale sia il comportamento principale di questo elemento. Nel caso in esame però si ha a che fare con una trave a sezione circolare che quindi non è scomponibile in piastre, come la sezione a I ad esempio, e inoltre essa è caratterizzata da una snellezza elevata. Infatti la snellezza λ è data da:

$$\lambda = L/r_{g,min}$$

dove L è la lunghezza della trave e $r_{g,min}$ è il raggio giratore minore che è pari al rapporto tra il momento d'inerzia minore I_{min} e l'area della sezione trasversale S . Nel caso corrente:

$$\lambda = L/r_{g,min} = \frac{L}{\sqrt{\frac{I_{min}}{S}}} = \frac{L}{\sqrt{\frac{\pi R^4/4}{\pi R^2}}} = \frac{0.4}{\sqrt{\frac{\pi(0.0075)^4/4}{\pi(0.0075)^2}}} \approx 106.67.$$

Queste due considerazioni permettono di affermare che la trave è caratterizzata esclusivamente da modi di vibrare tipici di una trave e verrà quindi idealizzata come tale.

Per quanto riguarda le piastre che formano il corpo centrale si ha che esse sono state studiate tramite l'approccio delle onde (Paragrafo 5.9) poiché grazie ad esso possiamo ricavare i CLF tra tutti i possibili sottosistemi, mentre con il metodo semplificato (Paragrafo 5.10) consideriamo solo i sottosistemi flessionali. Per le stesse motivazioni le piastre che compongono il pannello solare sono state studiate con il metodo delle onde proposto da Langley (Paragrafo 5.9).

Le giunzioni tra piastra e trave sono di due tipi: la prima considera la trave collegata a sbalzo e quindi ortogonale al piano medio della piastra, mentre nella seconda la trave giace nel piano della piastra e le si congiunge lateralmente. La trave è fortemente

monodimensionale visto quanto detto appena sopra. Per quanto riguarda queste giunzioni è stato utilizzato l'approccio delle impedenze che ci ha permesso di ottenere a partire da esse il coefficiente di trasmissione e quindi il CLF tra tutti i sottosistemi.

7.4 Smorzamento dei vari elementi strutturali.

Dalla precedente trattazione teorica dell'analisi SEA sappiamo che lo smorzamento è un parametro fondamentale in quanto ad esso è associata la potenza dissipata da ogni sottosistema ($\Pi_{diss,i}$), calcolabile tramite la formula:

$$\Pi_{diss,i} = 2\pi f \eta_i E_i$$

Dove con f indichiamo la frequenza centrale della banda e con η_i e E_i rispettivamente il coefficiente di perdita per smorzamento (DLF) e l'energia dell' i -esimo sottosistema.

Inoltre il coefficiente di perdita per smorzamento rientra nella formula che ci permette di valutare il Modal Overlap Factor. In particolare dobbiamo verificare che sia:

$$Modal\ Overlap\ Factor \geq 1$$

anche se Lyon [41] afferma che il limite può essere abbassato a 0.5 associando poi a tali risultati una incertezza maggiore.

Nelle simulazioni seguenti considereremo due differenti casi di smorzamento:

- Il primo prevede di considerare solo lo smorzamento degli elementi strutturali. In particolare si è scelto di considerare un DLF pari a 0.001 (fattore di qualità $Q = 1/\eta = 1000$) per tutti gli elementi. Esso corrisponde al valore minore tipico per materiali metallici (si veda Figura 4.4). Abbiamo scelto di condurre delle analisi di questo tipo per verificare il comportamento della struttura nel caso in cui il Modal Overlap Factor sia inferiore al valore unitario;
- Nel secondo abbiamo ipotizzato che tutte le superfici siano caratterizzate da un DLF pari a 0.1. Tale valore corrisponde a un rapporto di smorzamento $\xi = 0.05$ e a un fattore di qualità $Q = 1/\eta = 10$ che risultano essere valori utilizzati nella pratica per i materiali metallici. D'altra parte un tale valore può essere ottenuto trattando anche un metallo caratterizzato da DLF = 0.001 su cui sia stato applicato

uno strato di materiale polimerico in configurazione “free layer”. Si noti poi che nel caso il materiale sia caratterizzato da un DLF elevato, ad esempio 0.1, l’applicazione di uno strato polimerico ci permetterebbe di ottenere uno smorzamento ancora più elevato e quindi anche un Modal Overlap Factor ancora maggiore.

Di seguito riportiamo le formule fornite da Cremer [71] che ci permettono di calcolare lo smorzamento di tale configurazione “free layer” (si veda anche Paragrafo 4.6.1). Il coefficiente di smorzamento è dato da:

$$\eta_B^{free} = \eta_2 \frac{D_{2r} h_2 a^2}{B}$$

dove η_2 , D_{2r} , h_2 e a sono rispettivamente il coefficiente di smorzamento, il modulo elastico, lo spessore e la distanza dall’asse neutro del materiale polimerico valutabile con la formula $(h_1 + h_2)/2$ in cui h_1 è ovviamente lo spessore della piastra di base. B è infine la rigidezza flessionale della piastra trattata con il materiale polimerico che può essere stimata con la seguente formula semplificata:

$$B \approx \frac{D_{1r} h_1^3}{12} + D_{2r} h_2 a^2$$

In cui il significato dei simboli risulta essere chiaro.

Si consideri, ad esempio, di utilizzare per il trattamento superficiale un polimero che abbia come valori rappresentativi $\eta_2 = 0.5$ e modulo elastico pari a 1 GPa, benché tali grandezze dipendano dalla temperatura e dalla frequenza della sollecitazione. Trascurando tali aspetti otteniamo che lo spessore del materiale polimerico affinché si abbia un tale valore di smorzamento deve essere pari a 10mm sulle piastre del corpo centrale e pari a 3mm sulle piastre che compongono il pannello solare.

7.5 Densità modale e considerazioni sui sottosistemi.

In questo paragrafo riportiamo i risultati in termini di densità modale dei differenti sottosistemi che compongono la struttura e faremo anche delle considerazioni per

quanto riguarda il Modal Overlap Factor. Ricordiamo brevemente (si veda anche Capitolo 3) che la densità modale di un determinato sottosistema è definita come il rapporto tra il numero di modi di vibrare di un determinato sottosistema all'interno di una banda di frequenza ΔN e l'ampiezza della banda stessa $\Delta\omega$:

$$n(\omega) = \frac{\Delta N}{\Delta\omega}$$

ed è legata alla separazione media in frequenza $\overline{\delta f}$ dall'espressione:

$$n(\omega) = \frac{1}{2\pi\overline{\delta f}}.$$

In particolare ci interessa ricavare la densità modale, o analogamente la separazione media in frequenza, per definire se tutti i sottosistemi devono essere considerati nell'analisi e per calcolare il Modal Overlap Factor tramite la formula:

$$MOF = \frac{\pi}{2} 2\pi f \eta_d n(\omega) = \frac{\pi f \eta_d}{2 \overline{\delta f}}.$$

Quindi per ogni sottosistema, nota la densità modale, calcolabile con le formule riportate in Tabella 3.1, e noto lo smorzamento, possiamo valutare anche il Modal Overlap Factor.

Consideriamo come primo caso che il coefficiente di perdita per smorzamento sia pari a 0.001 per tutti i sottosistemi. Per quanto riguarda la densità modale a dei sottosistemi flessionali otteniamo la seguente Figura 7.2.

Data la simmetria del sistema nella Figura 7.2 sono state riportati gli andamenti della densità modale dei sottosistemi divisi per categoria: n_{ps} rappresenta la densità modale delle piastre che formano il pannello solare, n_{lat} la densità modale delle piastre che formano la superficie laterale del corpo centrale, n_{top} la densità modale delle piastre che formano le basi del corpo centrale e n_t la densità modale della trave. Dalla figura notiamo che la densità modale flessionale delle piastre è costante in tutto il dominio della frequenza, mentre quella delle travi diminuisce esponenzialmente all'aumentare della frequenza, poiché dobbiamo tenere conto che il diagramma è in forma logaritmica.

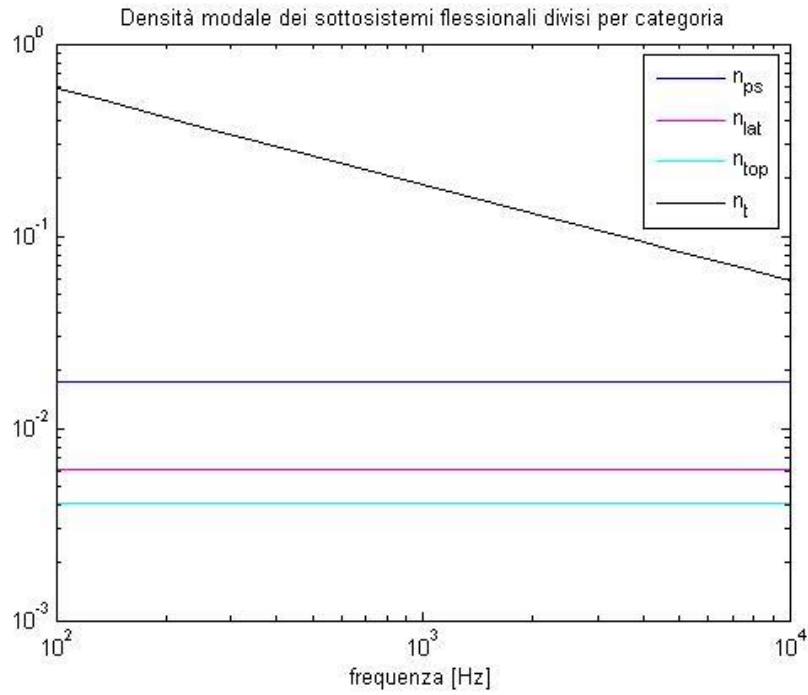


Figura 7.2: Densità modale dei sottosistemi flessionali della struttura.

A questo punto possiamo anche calcolare il Modal Overlap Factor dei sottosistemi flessionali con DLF pari a 0.001 (Figura 7.3).

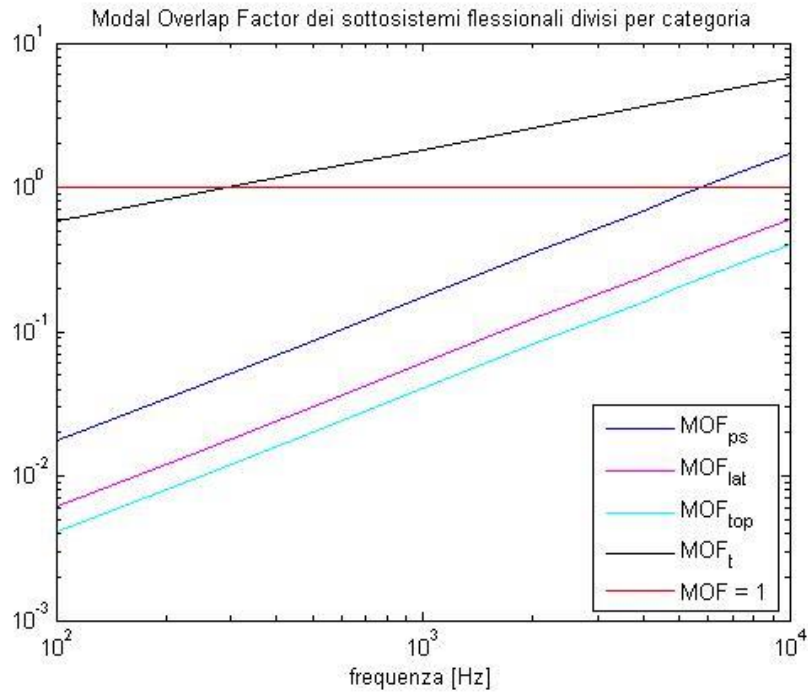


Figura 7.3: Modal Overlap Factor dei sottosistemi flessionali (DLF=0.001).

Dalla figura è possibile notare che i MOF dei sottosistemi flessionali delle piastre con tale valore di smorzamento risultano essere inferiori al valore unitario. Questo fatto comporta che dovrà essere associata un'incertezza maggiore ai risultati che si ottengono dall'analisi SEA (si veda Paragrafo 3.11).

Per quanto riguarda i sottosistemi “nel piano” delle piastre e longitudinale e torsionale delle travi otteniamo le densità modali in Figura 7.4.

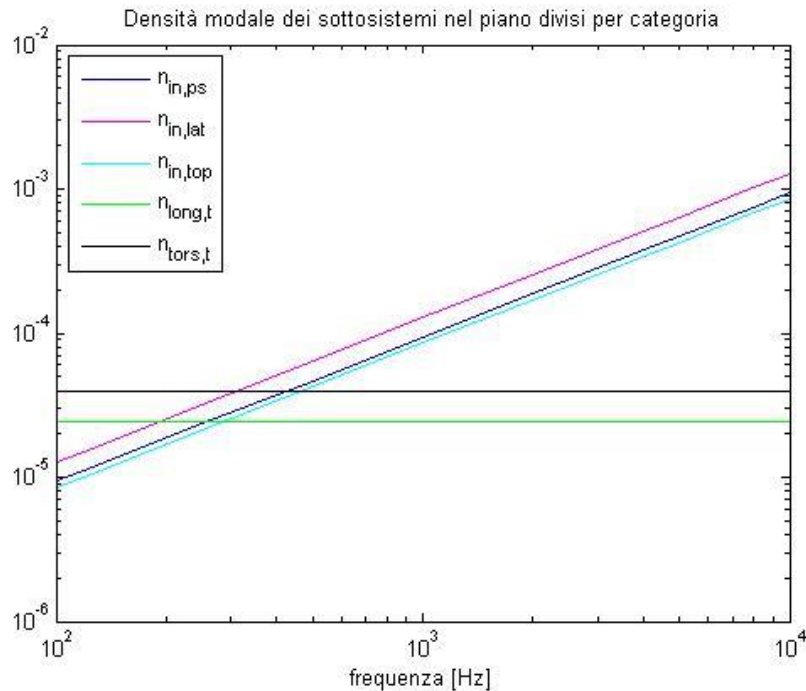


Figura 7.4: Densità modale dei sottosistemi “nel piano” della struttura.

Come nel caso precedente data la simmetria del sistema abbiamo riportato la densità modale dei sottosistemi divisi per categoria: $n_{in,ps}$ rappresenta la densità modale nel piano delle piastre che formano il pannello solare, $n_{in,lat}$ la densità modale nel piano delle piastre che formano la superficie laterale del corpo centrale, $n_{in,top}$ la densità modale nel piano delle piastre che formano le basi del corpo centrale, $n_{long,t}$ la densità modale longitudinale della trave e $n_{tors,t}$ la densità torsionale della trave. In questo caso sono le densità modali associate alla trave ad essere costanti, mentre quelle associate alle piastre sono crescenti. Di fatto però abbiamo a che fare con densità particolarmente basse, in quanto quelle della trave sono minori di 10^{-4} modi di vibrare per banda, mentre quella delle piastre è compresa tra un minimo di 10^{-5} e un massimo di poco superiore ai 10^{-3} modi per banda.

Da un primo confronto con la Figura 7.2 possiamo notare che le densità modali dei sottosistemi “nel piano” delle piastre e longitudinale e torsionale delle travi risultano essere inferiori rispetto alle densità modali flessionali. Questo può già permetterci di capire che il Modal Overlap Factor risulterà essere inferiore a quello dei casi flessionali. In Figura 7.5 riportiamo tale grafico.

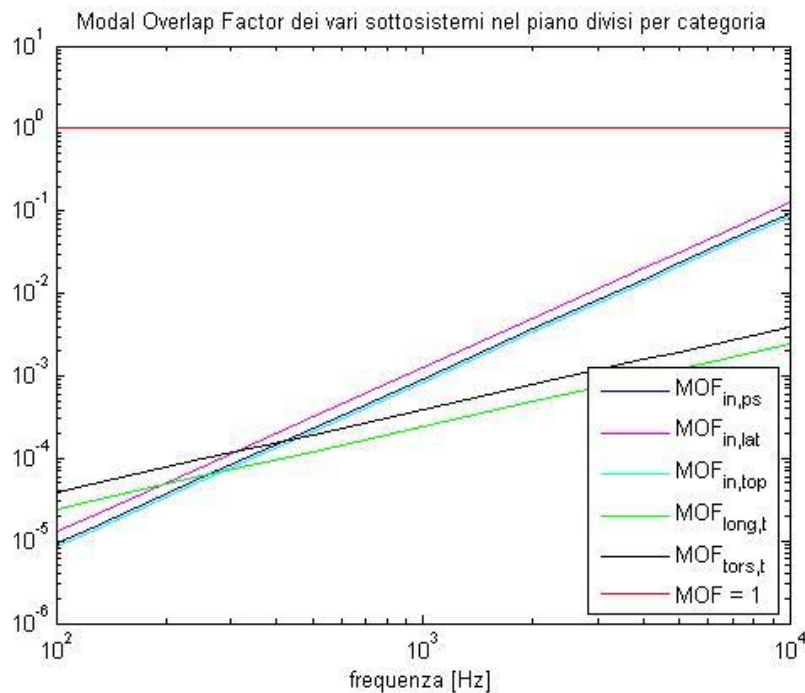


Figura 7.5: Modal Overlap Factor dei sottosistemi “nel piano” (DLF=0.001).

Dalla figura precedente è doveroso notare che il Modal Overlap Factor dei vari sottosistemi non risulta essere prossimo al valore unitario. Questo comporta che sia necessario associare ai risultati una incertezza più ampia rispetto al caso in cui fosse stata verificata questa condizione.

In conclusione, per quanto riguarda il caso in cui il coefficiente di perdita per smorzamento è pari a 0.001, alla luce dei risultati ottenuti in termini di densità modale si ha che i sottosistemi nel piano presentano valori molto inferiori a quelli dei sottosistemi flessionali. Questo fatto, quindi, permette di considerare solamente quest’ultimi sottosistemi all’interno dell’analisi SEA, poiché l’energia associata ai modi di vibrare nel piano è trascurabile (si veda anche Paragrafo 3.7). Il fatto che il Modal Overlap Factor sia inferiore all’unità comporta che i risultati siano affetti da un’incertezza maggiore (Paragrafo 3.11).

A questo punto passiamo ad analizzare la medesima struttura ma supponendo che sia applicato uno strato di materiale polimerico in configurazione “free layer”, in modo tale che il DLF sia pari a 0.1 come riportato nel Paragrafo 7.4.

La densità modale dei sottosistemi risulta essere la medesima in quanto essa dipende dalle sole caratteristiche geometriche e del materiale dell’elemento strutturale. Inoltre si trascura il fatto che il materiale polimerico possa interagire con i modi di vibrare degli elementi su cui è applicato: esso ha la sola funzione di aumentare lo smorzamento del sistema senza vere ulteriori funzioni. Detto ciò di seguito riportiamo e commentiamo solamente i grafici relativi al Modal Overlap Factor in questo secondo caso. Il fatto che la densità modale sia la medesima ci permette di affermare che anche in questo caso è sufficiente rappresentare il sistema attraverso i soli sottosistemi flessionali degli elementi strutturali per le motivazioni riportate al caso precedente.

Per quanto riguarda il Modal Overlap Factor dei sottosistemi flessionali osserviamo la Figura 7.6.

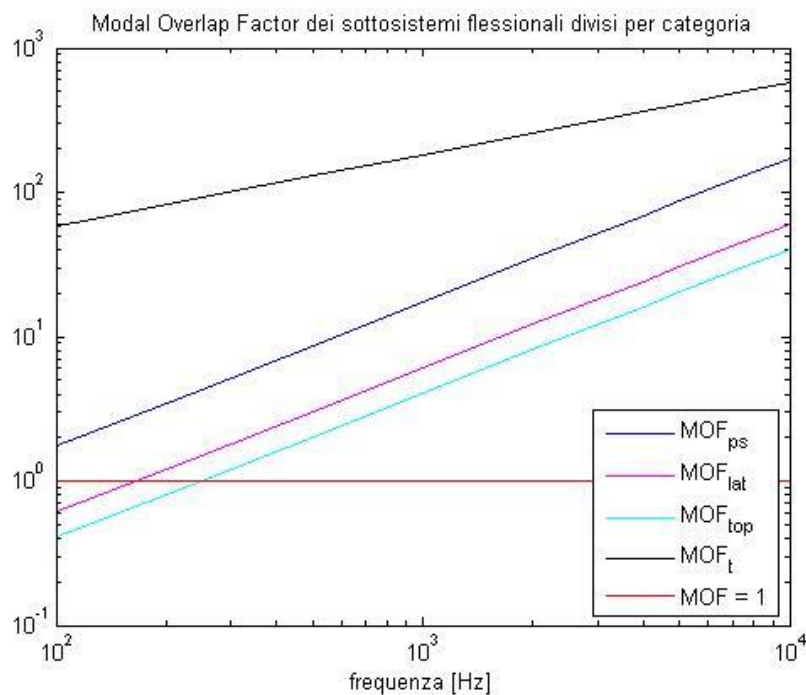


Figura 7.6: Modal Overlap Factor dei sottosistemi flessionali (DLF=0.1).

Confrontando la Figura 7.3 e la Figura 7.6 possiamo notare come l'aumento di due ordini di grandezza del DLF si ripercuota nell'aumento dello stesso ordine di grandezza dei Modal Overlap Factor. Questa è una mera conseguenza della definizione dei MOF:

$$MOF = \frac{\pi}{2} 2\pi f \eta_d n(\omega)$$

e, visto che la densità modale non cambia se gli elementi sono i medesimi, allora risulta essere ovvio che una variazione dello smorzamento modifica alla stesso modo il Modal Overlap Factor. Tale fatto può essere quindi utilizzato al contrario per determinare quale deve essere lo smorzamento minimo tale per cui possiamo ritenere esatti i risultati nota una determinata struttura. In questo caso possiamo notare come per frequenze superiori ai 300 Hz tutti i sottosistemi flessionali presentino un valore tale da garantire un valore minore di incertezza rispetto al caso con $DLF = 0.001$.

Passando ai Modal Overlap Factor dei sistemi “nel piano” dobbiamo considerare i valori riportati nella seguente Figura 7.7.

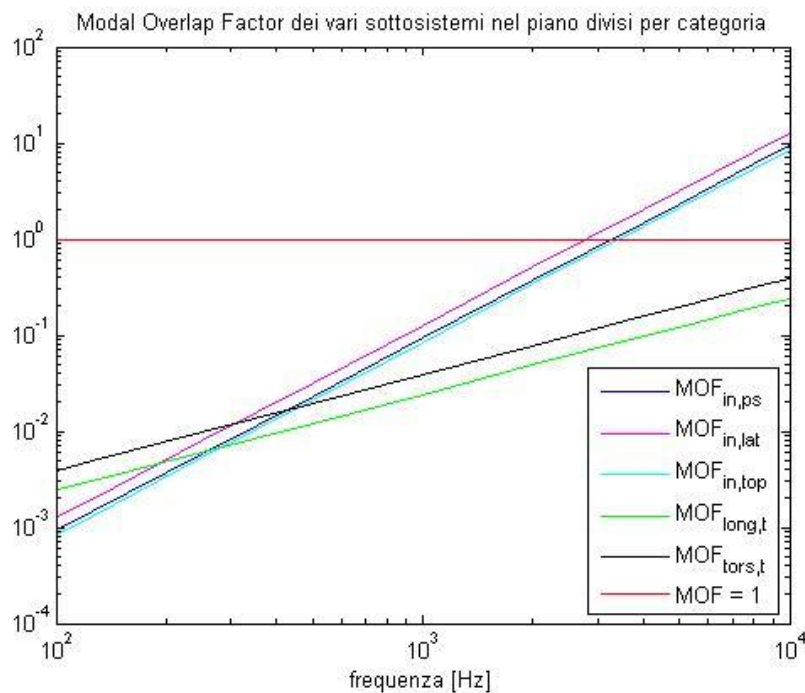


Figura 7.7: Modal Overlap Factor dei sottosistemi “nel piano” (DLF=0.1).

Anche in questo caso possiamo notare che l'aumento del coefficiente di perdita per smorzamento comporta un aumento dei Modal Overlap Factor di due ordini di grandezza in quanto lo smorzamento è passato da $DLF=0.001$ a $DLF=0.1$. Per quanto riguarda le travi abbiamo che anche in questo secondo caso non soddisfano quanto richiesto dalla teoria, mentre le piastre solo per frequenze superiori ai 3000 Hz otteniamo valori di Modal Overlap Factor superiori all'unità.

Da quanto abbiamo visto possiamo dire che:

- L'analisi SEA compiuta considerando $DLF=0.001$ non soddisfa pienamente i requisiti dell'analisi e quindi i risultati medi che si ottengono dalla risoluzione del sistema lineare devono essere corretti da un'incertezza maggiore rispetto al caso in cui tale ipotesi fosse stata verificata;
- L'analisi SEA compiuta considerando $DLF=0.1$ risulta essere caratterizzata da $MOF > 1$ per tutti i sottosistemi flessionali in tutto il campo tra 300 e 10000 Hz, mentre per i sottosistemi "nel piano" lo è solo per le piastre sopra ai 3000 Hz. In questo caso l'incertezza da associare sarà minore del caso in cui $DLF = 0.001$.

Detto ciò si è scelto di rappresentare il sistema solo attraverso i sottosistemi flessionali per i seguenti motivi:

- Confrontando la Figura 7.2 e la Figura 7.4 possiamo osservare come la densità modale flessionale degli elementi sia ampiamente superiore in tutto il campo a quella "nel piano". La differenza è pari a tre ordini di grandezza alle frequenze minori, mentre è uguale a un ordine di grandezza per le piastre e ancora a tre ordini di grandezza per le travi a 10000 Hz. Questo fatto che ci permette di dire che il sistema si comporti in modo prettamente flessionale;
- Siamo interessati ad ottenere dei risultati medi in termini di energia dei sottosistemi (Paragrafo 7.7) in un campo definito dall'utente. Il fatto è che, come vedremo nel Paragrafo 7.6, il livello energetico dei sottosistemi è decrescente all'aumentare della frequenza. Di conseguenza il contributo principale a tale valore medio viene dalle bande di frequenza più basse dove la presenza dei sottosistemi "nel piano" è trascurabile poiché la loro densità modale è particolarmente bassa, cioè dell'ordine di 10^{-5} modi per banda;

- Supponiamo in tutti i casi che la sollecitazione sia perpendicolare al piano medio della piastra su cui agisce e quindi è ovvio che solamente il sottosistema flessionale di questa venga sollecitato.

7.6 Analisi dei risultati ottenuti dal programma.

In questo paragrafo riportiamo e analizziamo i risultati ottenuti attraverso il codice MATLAB implementato che ci ha permesso di studiare la struttura descritta nel Paragrafo 7.2. Sottolineiamo che il codice permette all'utente di modificare secondo la sua volontà le caratteristiche di ogni elemento che compone il sistema. I casi studiati sono i seguenti:

- 1) La sollecitazione interessa la piastra 1 (si veda Paragrafo 7.1 per la numerazione delle piastre) ed agisce perpendicolarmente al piano medio della piastra introducendo una potenza costante in ogni banda pari a 1000 W. Il coefficiente di perdita per smorzamento è pari a 0.1;
- 2) Ci poniamo nelle condizioni del caso 1 ma con coefficiente di perdita per smorzamento di 0.001. Dal Paragrafo 7.5 sappiamo che in questo caso non vengono soddisfatte le ipotesi di base dell'analisi SEA ma ci interessa capire che tipo di risultati vengono eventualmente generati;
- 3) La sollecitazione interessa la piastra 7 ed agisce perpendicolarmente al piano medio della piastra introducendo una potenza costante in ogni banda pari a 1000 W. Il coefficiente di perdita per smorzamento è pari a 0.1;
- 4) Riprendiamo il caso 3 ma considerando il coefficiente di perdita per smorzamento pari a 0.001. La motivazione è la medesima del caso 2, ovvero vogliamo vedere i risultati forniti nonostante il Modal Overlap Factor non sia adeguato.
- 5) Riprendiamo il caso 1 ma consideriamo una forzante tale da garantire una energia costante sulla piastra 1 in tutte le bande e pari a 1J;
- 6) Riprendiamo il caso 3 ma consideriamo una forzante tale da garantire una energia costante sulla piastra 7 in tutte le bande e pari a 1J.

7.6.1 Caso 1: sollecitazione sulla piastra 1 con potenza costante e $DLF=0.1$.

La sollecitazione agisce sulla piastra 1 che è la piastra più esterna del pannello solare. La forzante è tale per cui la potenza immessa nel sistema è costante e pari a 1000 W per ogni banda in cui viene suddiviso il dominio delle frequenze. Il DLF è uguale a 0.1 e per quanto abbiamo visto le ipotesi alla base dell'analisi SEA sono verificate. I risultati che otteniamo in termini energetici sono riportati nella seguente Figura 7.8.

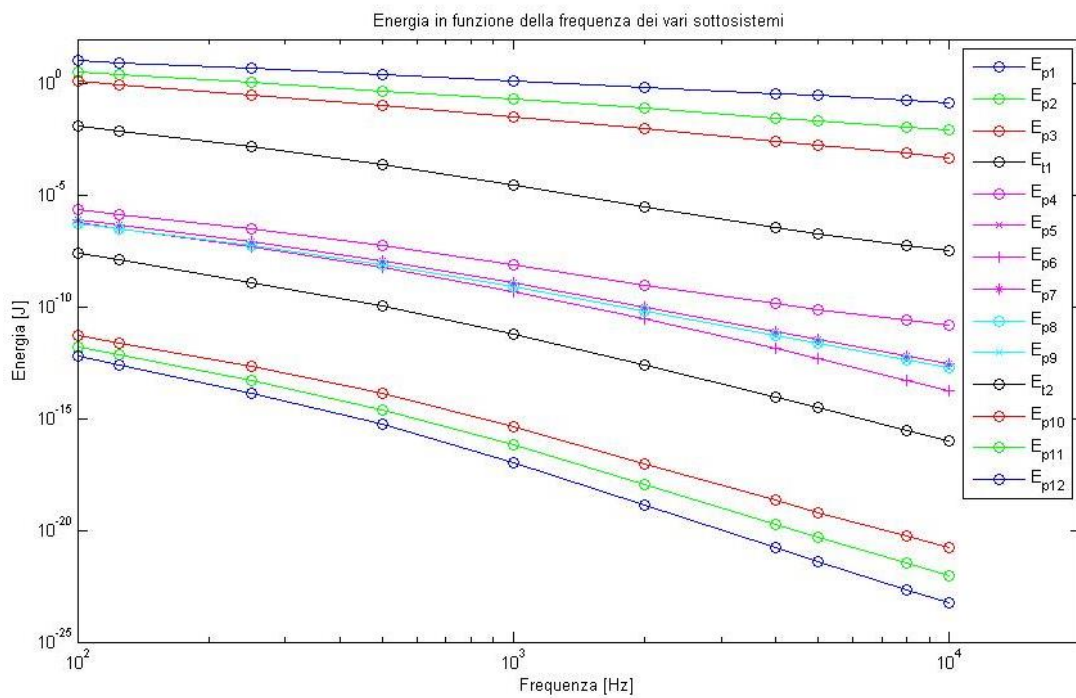


Figura 7.8: Energia in funzione della frequenza dei vari sottosistemi nel caso in cui venga sollecitata la piastra 1 con potenza costante in ogni banda e pari a 1000 W e $DLF=0.1$.

Da essa possiamo notare che allontanandosi progressivamente dalla piastra su cui avviene la sollecitazione l'energia dei sottosistemi diminuisce. Questo conferma quanto poteva già essere intuito: tale diminuzione è legata al fatto che solo parte della potenza viene trasferita tra i sottosistemi e tale potenza ceduta dipende dal valore dei coefficienti di perdita per accoppiamento (CLF). In particolare possiamo osservare che gran parte delle variazioni in termini energetici sono da attribuire alle giunzioni tra le piastre e le travi mentre le differenze in energia tra due piastre consecutive è minore. La spiegazione di tale fatto è abbastanza intuitiva: le giunzioni tra piastra e travi sono giunzioni puntuali mentre quelle tra piastre sono lineari. Di conseguenza la trasmissione di energia risulta

essere facilitata nel secondo caso. Questo fatto viene sottolineato da Lyon [41] che riporta il seguente grafico (Figura 7.9), nel quale possiamo notare come per due piastre collegate ad angolo retto al diminuire della lunghezza della giunzione diminuisca progressivamente il CLF (Lyon [41] non specifica ulteriori proprietà delle piastre).

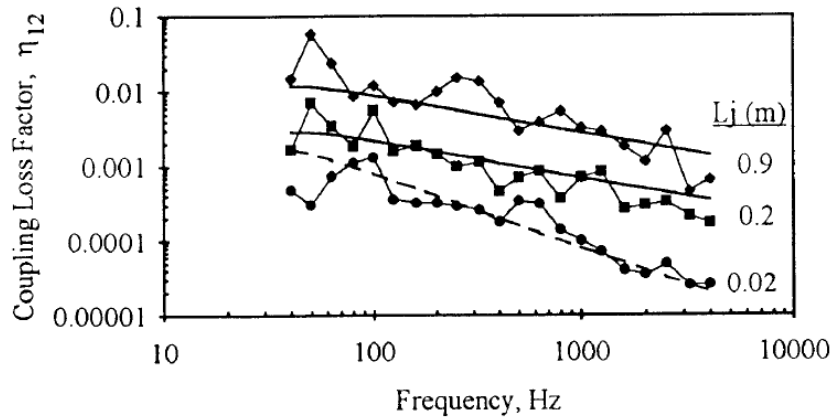


Figura 7.9: Andamento del CLF al variare della lunghezza della giunzione tra due piastre con confronto tra dati teorici (linea continua e tratteggiata) e sperimentali.

Dalla Figura 7.8 possiamo evidenziare anche che la simmetria del sistema si ripercuote anche nei risultati in termine energetici: la piastra 5 e la piastra 7 infatti rappresentano un percorso equivalente dal punto di vista energetico e infatti otteniamo che esse hanno lo stesso valore di energia in funzione della frequenza. Lo stesso discorso può essere fatto anche per le piastre 8 e 9.

Un'altra considerazione importante da fare riguarda i valori energetici assunti dai vari sottosistemi. Le piastre che si trovano nel pannello solare opposto a quello dove è applicata la sollecitazione presentano valori di energia molto bassi, dell'ordine di 10^{-10} J a 100 Hz e 10^{-20} J a 10000 Hz, quindi all'incirca 10 ordini di grandezza in meno rispetto alla piastra sollecitata. Questo è dovuto al fatto che il valore del coefficiente di smorzamento è piuttosto elevato. Di seguito vedremo che senza di esso gli elementi saranno molto più sollecitati.

Infine notiamo che all'aumentare della frequenza il valore di energia che caratterizza il sistema diminuisce. Tale andamento sembra piuttosto lento ma dobbiamo tenere sempre

conto che il diagramma è in forma logaritmica e quindi in realtà la variazione è molto più accentuata.

7.6.2 Caso 2: sollecitazione sulla piastra 1 con potenza costante e $DLF=0.001$.

Il caso è il medesimo appena studiato in cui consideriamo un coefficiente di perdita per smorzamento pari a 0.001, fatto che come abbiamo visto non ci permette di ottenere un valore maggiore o al limite uguale a 1 in termini di Modal Overlap Factor.

Di seguito riportiamo la figura che riassume le energie dei vari sottosistemi in funzione della frequenza (Figura 7.10).

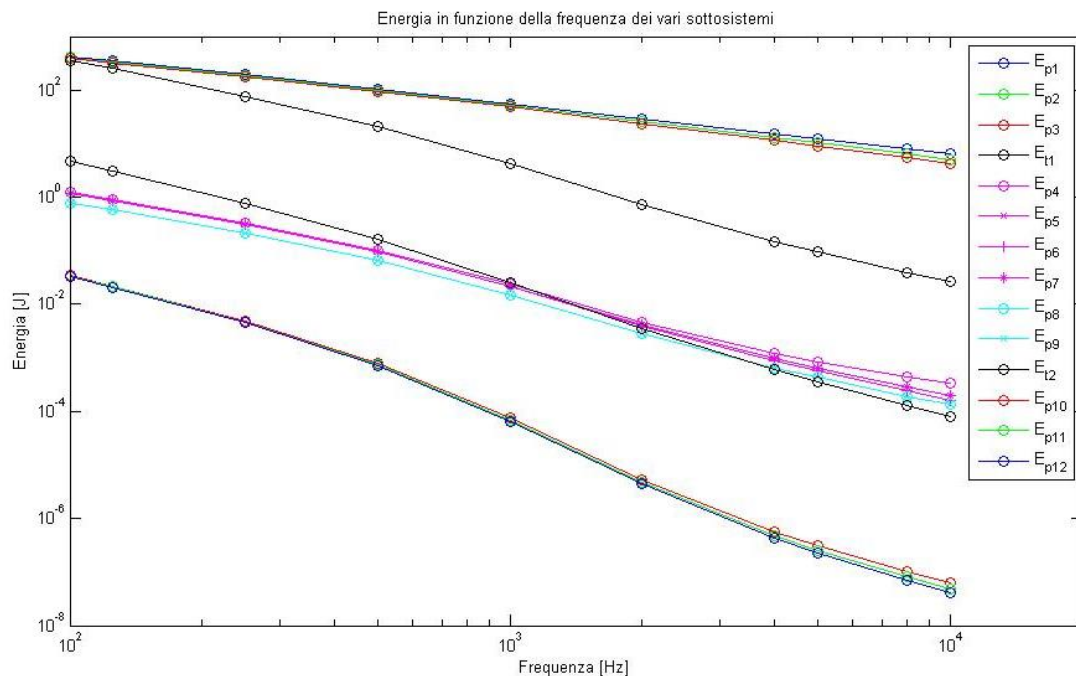


Figura 7.10: Energia in funzione della frequenza dei vari sottosistemi nel caso in cui venga sollecitata la piastra 1 con potenza costante in ogni banda e pari a 1000 W e $DLF=0.001$.

In essa notiamo come nel caso precedente che allontanandoci dalla piastra sollecitata l'energia dei sottosistemi diminuisce e esattamente come nel caso precedente l'energia diminuisce all'aumentare della frequenza.

Una differenza che possiamo subito notare è che in questo caso, dato che lo smorzamento è molto minore e pari a 0.001, le energie risultano essere parecchi ordini di

grandezza più elevate: le piastre del pannello solare opposto a quello che viene interessato dalla sollecitazione presentano un'energia dell'ordine di 10^{-2} J a 100 Hz e 10^{-7} J a 10000 Hz, quindi all'incirca quattro ordini di grandezza più piccoli della piastra sollecitata. Da questo esempio possiamo capire quanto risulti essere importante l'utilizzo dei materiali che aumentano lo smorzamento onde evitare che le sollecitazioni che interessano una parte si propaghino in tutta la struttura, indipendentemente dal fatto che sappiamo che le ipotesi dell'analisi SEA non siano pienamente verificate.

Il fatto che il Modal Overlap Factor non sia verificato si può notare anche dal grafico di Figura 7.10 in quanto esso contiene alcune irregolarità. A primo impatto può sembrare strano, ad esempio, che le energie delle piastre che compongono i pannelli solari siano quasi coincidenti. In realtà dato che lo smorzamento è piccolo abbiamo che due sottosistemi adiacenti si trasmettono più potenza e quindi risultano essere caratterizzati da livelli energetici maggiori in quanto quello che dobbiamo risolvere è un sistema lineare con in ingresso la stessa quantità di potenza del caso 1. Ciò che invece risulta essere non corretto è il fatto che l'energia della seconda trave risulti essere superiore delle singole energie delle piastre che compongono il corpo centrale, in particolare è più elevata dell'energia della piastra 6 che eccita direttamente la trave. Tale risultato più che altro è da imputare alle piastre piuttosto che alla trave in quanto, come appare evidente dalla Figura 7.3, è il Modal Overlap Factor associato ad esse ad essere particolarmente basso.

7.6.3 Caso 3: sollecitazione sulla piastra 7 con potenza costante e $DLF=0.1$.

In questo terzo caso consideriamo che la forzante non sia più applicata alla piastra più esterna del pannello solare ma piuttosto alla piastra frontale della superficie laterale del corpo centrale. Il coefficiente di perdita per accoppiamento è tale da garantire la correttezza dell'analisi. Di seguito in Figura 7.11 riportiamo l'output grafico del programma.

In essa possiamo notare quanto già detto precedentemente, ovvero che allontanandosi dalla piastra sollecitata diminuisce l'energia associata ai sottosistemi e che essa diminuisce all'aumentare della frequenza.

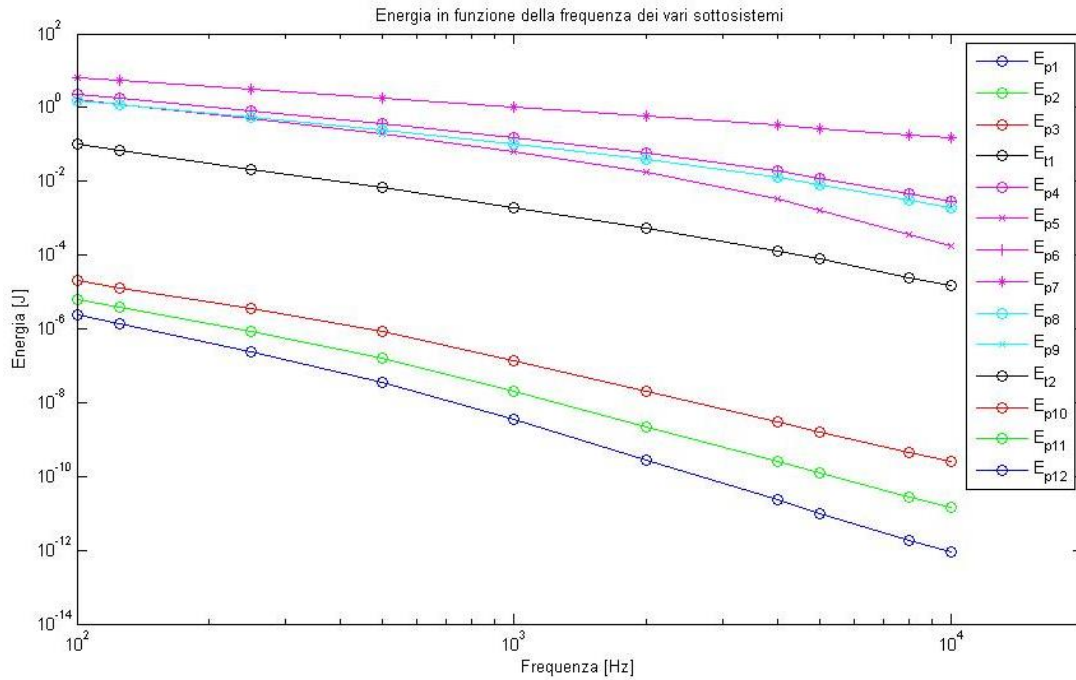


Figura 7.11: Energia in funzione della frequenza dei vari sottosistemi nel caso in cui venga sollecitata la piastra 7 con potenza costante in ogni banda e pari a 1000 W e DLF=0.1.

Inoltre in questo caso appare più evidente rispetto al caso 1 l'influenza della simmetria del sistema sulla simmetria dei risultati in termini energetici. Infatti le piastre 4 e 6, 8 e 9, 3 e 10, 2 e 11, 1 e 12 e le travi 1 e 2 presentano il medesimo andamento dell'energia in funzione della frequenza proprio perché esse sono simmetriche rispetto al percorso di carico.

Infine sottolineiamo come in questo caso la differenza di energia tra il sottosistema eccitato e quello meno sia più contenuta rispetto a caso 1 e dell'ordine di 10^{-6} a 100 Hz benché anche in questo caso il DLF sia pari a 0.1. Quello che possiamo dire è che l'energia nel caso 1 rimane principalmente all'interno dei pannelli solari e l'energia che passa al corpo centrale e al secondo pannello è bassa, mentre in caso presente l'energia tende a trasferirsi maggiormente dalla piastra centrale verso gli altri sottosistemi perché tale piastra è collegata a un numero maggiore di sottosistemi e quindi trasferisce ad essi una energia maggiore.

7.6.4 Caso 4: sollecitazione sulla piastra 7 con potenza costante e $DLF=0.001$.

Considerando il caso di forzante applicata alla piastra 7 riportiamo velocemente i risultati nel caso in cui il coefficiente di perdita per smorzamento sia pari a 0.001. (Figura 7.12).

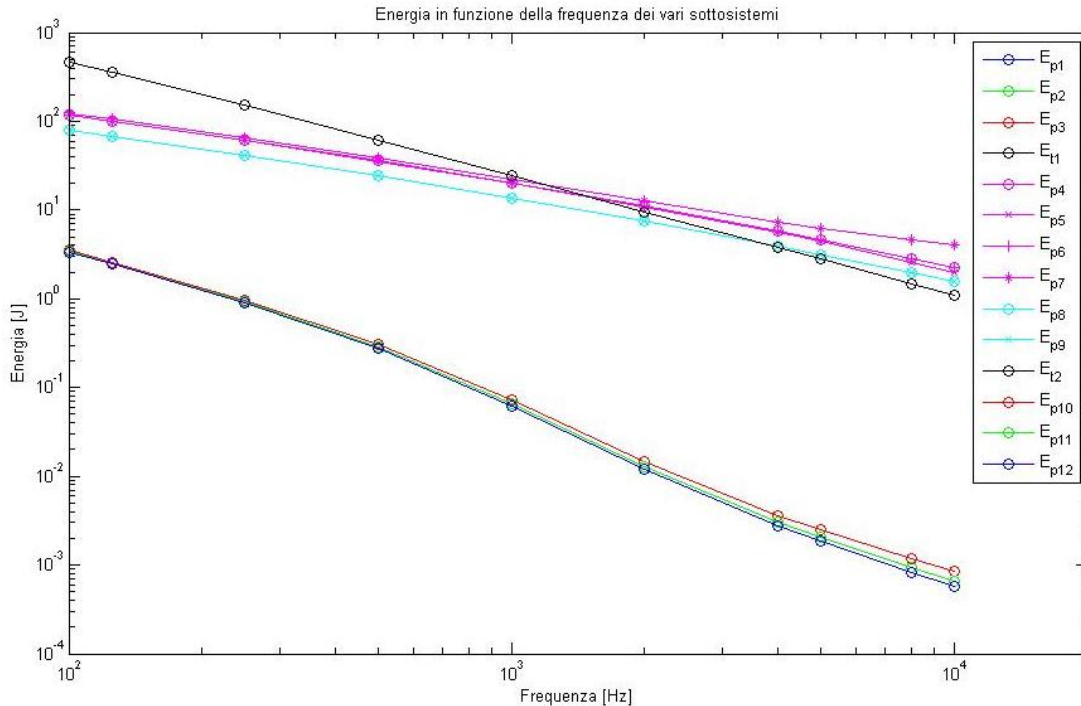


Figura 7.12: Energia in funzione della frequenza dei vari sottosistemi nel caso in cui venga sollecitata la piastra 7 con potenza costante in ogni banda e pari a 1000 W e $DLF=0.001$.

In analogia con quanto visto nel Paragrafo 7.6.3 abbiamo che la simmetria del sistema e della forzante si rispecchiano nella coincidenza delle piastre che sono disposte in posizioni corrispondenti. Di fatto però si riscontrano delle imprecisioni in quanto il Modal Overlap Factor non è sufficientemente elevato: in particolare possiamo notare che alle basse frequenze l'energia associata alle travi risulta essere maggiore della stessa energia della piastra interessata dalla forzante e delle piastre che trasmettono direttamente l'energia alle travi, fatto impossibile all'interno dell'analisi SEA.

7.6.5 Caso 5: sollecitazione sulla piastra 1 con energia costante e $DLF=0.1$.

In questi due ultimi paragrafi consideriamo che sul sistema agisca una forzante tale che l'energia che caratterizza la piastra sollecitata sia pari a 1 J in ogni banda.

Tale scelta è stata fatta per verificare se sono presenti eventuali cambiamenti significativi rispetto ai casi precedenti. Inoltre ci limiteremo a considerare il DLF uguale a 0.1 in quanto ci attendiamo risultati analoghi anche per smorzamento differente. Di seguito riportiamo la figura che descrive la distribuzione di energia dei sottosistemi al variare della frequenza (Figura 7.13).

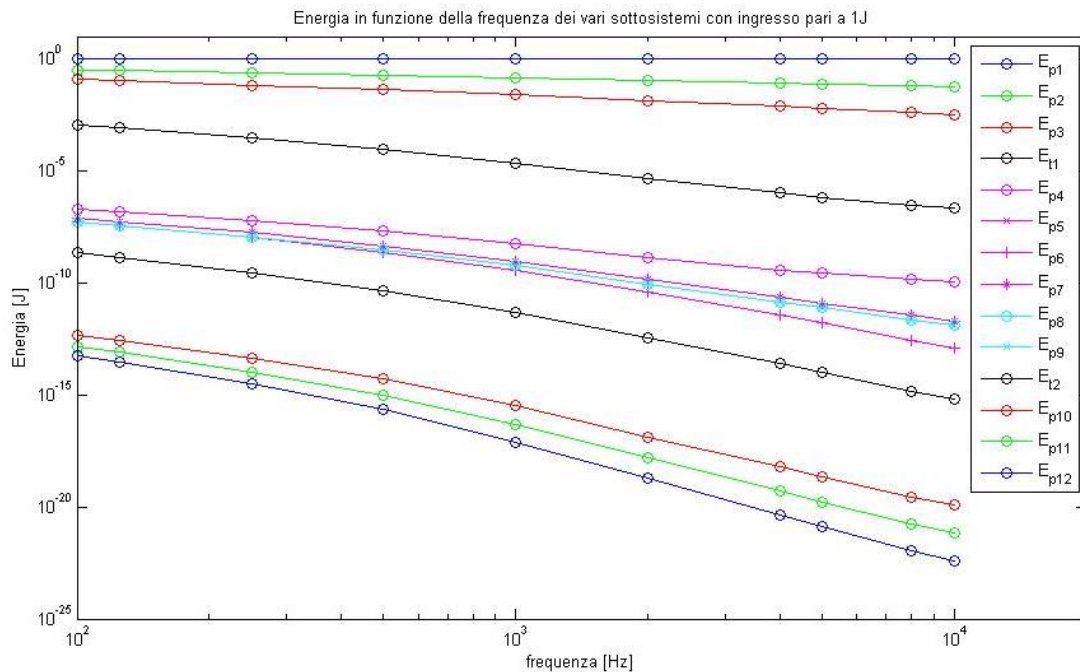


Figura 7.13: Energia in funzione della frequenza dei vari sottosistemi nel caso in cui venga sollecitata la piastra 1 e caratterizzata da energia costante in ogni banda pari a 1 J e DLF=0.1.

Dalla figura e dai risultati non si evidenziano particolari differenze in termini di andamento rispetto al caso del Paragrafo 7.6.1, anche se ovviamente i risultati numerici risultano essere differenti. Sottolineiamo solamente che effettivamente l'energia della piastra sollecitata risulta essere pari a 1 J in tutte le bande di frequenza.

7.6.6 Caso 6: sollecitazione sulla piastra 7 con energia costante e DLF=0.1.

Riportiamo il risultato grafico di tale caso solo per completezza avendo già osservato nel precedente paragrafo che non sono presenti differenze fondamentali rispetto al caso con ingresso potenza costante (Figura 7.14).

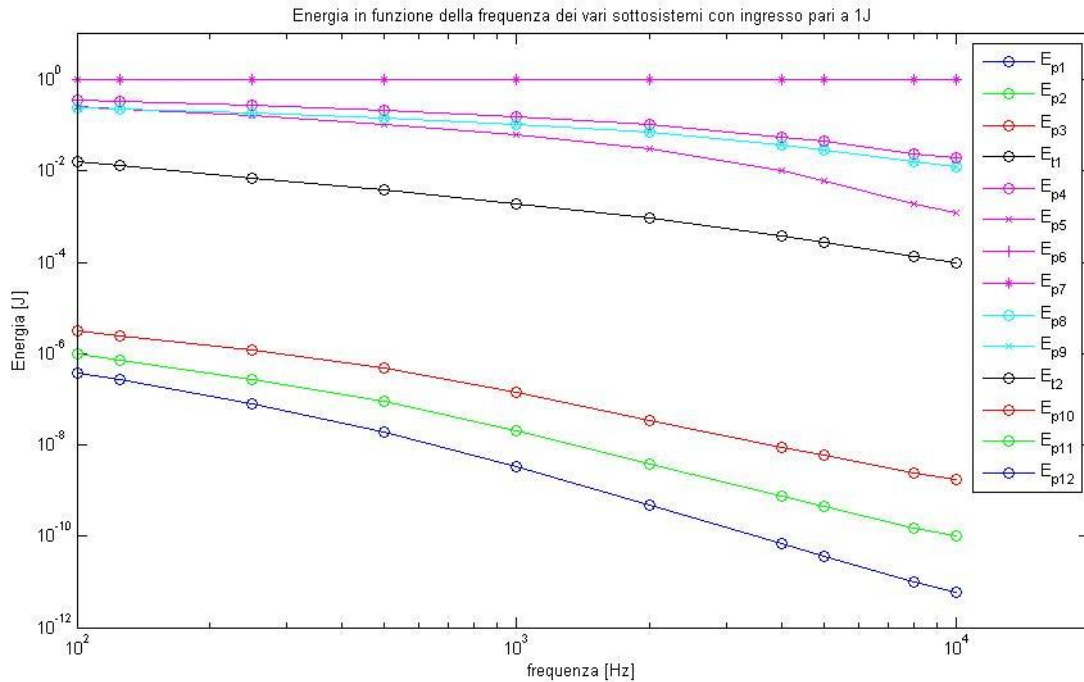


Figura 7.14: Energia in funzione della frequenza dei vari sottosistemi nel caso in cui venga sollecitata la piastra 7 e caratterizzata da energia costante in ogni banda pari a 1 J e DLF=0.1.

7.7 Energie medie dei sottosistemi nel campo 100-5000 Hz e alcune considerazioni.

Dal punto di vista pratico siamo interessati a conoscere il valore medio dell'energia che caratterizza i sottosistemi all'interno di una banda definita dall'utente. Nei seguenti esempi abbiamo considerato quella tra 100 e 5000 Hz. E' importante notare che il contributo maggiore a tale valore medio deriva dalle bande a frequenza minore e quindi, se si vuole conoscere quanto ogni elemento sia eccitato globalmente, tale analisi deve comprendere la prima parte del campo delle frequenze. Ottenuti quindi i risultati descritti precedentemente abbiamo applicato il teorema del valore medio sull'intervallo desiderato ottenendo i risultati riportati nelle seguenti tabelle. Ricordiamo che tale teorema permette di ottenere il valore medio di una funzione in un intervallo nota la funzione, secondo la formula (valida nel caso uno dimensionale):

$$\bar{y} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

E quindi nel nostro caso l'energia media di un sottosistema è data da:

$$\bar{E} = \frac{1}{f_2 - f_1} \int_{f_1}^{f_2} E(f) df$$

dove $f_2 = 5000$ Hz, $f_1 = 100$ Hz e $E(f)$ è una funzione che conosciamo per punti in seguito alla soluzione tramite l'analisi SEA. Per valutare l'integrale è quindi stata utilizzata la function di Matlab trapz.m.

Inoltre abbiamo calcolato per ogni elemento strutturale l'energia specifica, e cioè per unità di massa, che lo caratterizza. Questo ulteriore risultato è stato calcolato alla luce del fatto che attualmente un impatto che genera più di 40 J/g viene ritenuto catastrofico.

Per quanto riguarda il caso in cui la sollecitazione interessi la piastra 1 con una potenza in ingresso pari a 1000 W per ogni banda della frequenza e DLF = 0.1 otteniamo i risultati riportati in Tabella 7.1:

	Energia media nella banda 100-5000 Hz [J]	Energia media per grammo nella banda 100-5000 Hz [J/g]	Energia percentuale [%]
Piastra 1	1.12 e+00	2.39 e-04	82.01
Piastra 2	1.97 e-01	4.21 e-05	14.46
Piastra 3	4.78 e-02	1.02 e-05	3.50
Trave 1	2.34 e-04	4.24 e-07	0.01
Piastra 4	4.51 e-08	1.77 e-12	< 0.01
Piastra 5	1.41 e-08	5.51 e-13	< 0.01
Piastra 6	9.05 e-09	3.55 e-13	< 0.01
Piastra 7	1.41 e-08	5.51 e-13	< 0.01
Piastra 8	9.37 e-09	5.51 e-13	< 0.01
Piastra 9	9.37 e-09	5.51 e-13	< 0.01
Trave 2	3.17 e-10	5.75 e-13	< 0.01
Piastra 10	5.96 e-14	1.27 e-17	< 0.01
Piastra 11	1.71 e-14	3.66 e-18	< 0.01
Piastra 12	6.11 e-15	1.31 e-18	< 0.01
TOTALE	1.36 e+00	-	100

Tabella 7.1: Energia media di ogni elemento della struttura nell'intervallo 100-5000 Hz con sollecitazione applicata alla piastra 1 e che introduce 1000 W per banda.

Considerando invece sia sollecitata la piastra 7 tramite una forzante che introduce sempre 1000 W per ogni banda e DLF = 0.1 otteniamo i valori riportati in Tabella 7.2.

	Energia media nella banda 100-5000 Hz [J]	Energia media per grammo nella banda 100-5000 Hz [J/g]	Energia percentuale [%]
Piastra 1	4.01 e-08	8.57 e-12	< 0.01
Piastra 2	1.24 e-07	2.64 e-11	< 0.01
Piastra 3	4.83 e-07	1.03 e-10	< 0.01
Trave 1	3.20 e-03	5.74 e-06	0.23
Piastra 4	1.43 e-01	5.59 e-06	10.45
Piastra 5	7.30 e-02	2.86 e-06	5.35
Piastra 6	1.43 e-01	5.60 e-06	10.45
Piastra 7	8.08 e-01	2.17 e-05	59.23
Piastra 8	9.57 e-02	5.63 e-06	7.02
Piastra 9	9.57 e-02	5.63 e-06	7.02
Trave 2	3.20 e-03	5.74 e-06	0.23
Piastra 10	4.83 e-07	1.03 e-10	< 0.01
Piastra 11	1.24 e-07	2.64 e-11	< 0.01
Piastra 12	4.01 e-08	8.57 e-12	< 0.01
TOTALE	1.36 e+00	-	100

Tabella 7.2: Energia media di ogni elemento della struttura nell'intervallo 100-5000 Hz con sollecitazione applicata alla piastra 7 e che introduce 1000 W per banda.

L'ultima colonna della tabelle riporta il rapporto tra l'energia del singolo elemento e la somma di tutte le energie medie di tutti gli elementi, somma che può essere interpretata come l'energia globale che la sollecitazione ha generato sul sistema nella sua interezza.

Analizzando le due tabelle possiamo notare quanto avevamo già sottolineato precedentemente confrontando i grafici di Figura 7.8 e di Figura 7.11: nel caso in cui la sollecitazione interessi la piastra 1 la maggior parte dell'energia rimane confinata all'interno del pannello solare e in particolare sulla piastra 1, mentre nel caso in cui sia la piastra 7 ad essere caratterizzata da tale evento vediamo che l'energia associata ad essa è minore ed è presente una redistribuzione con le piastre adiacenti. La spiegazione di tale risultato sta nel fatto che la piastra 7 presenta ben quattro giunzioni con altrettante piastre, mentre la piastra 1 è in contatto solo con la piastra 2. Di conseguenza la piastra 7 può dissipare molta più energia verso gli altri sottosistemi, mentre ciò non è possibile per la piastra 1. Da un altro punto di vista però preferiremmo una situazione come quella della piastra 1, in quanto, nel caso in cui il satellite fosse caratterizzato da un fenomeno di impatto, vorremmo che la sollecitazione rimanesse confinata il più possibile nella zona su cui esso è avvenuto, cosa che invece avviene in modo minore nella piastra 7.

Per ottenere il risultato espresso possiamo:

- Indebolire i CLF tra le giunzioni tra la piastra 7 e le adiacenti;
- Aumentare il DLF della piastra 7.

La prima soluzione proposta prevede di intervenire sugli spessori delle piastre che formano il corpo centrale, modificando quindi la loro rigidità, e quindi proseguire con una analisi di sensibilità assumendo come variabile appunto lo spessore. E' necessario puntualizzare che tale modifiche in termini di rigidità devono essere tali da garantire che la struttura soddisfi i comuni criteri di dimensionamento. La seconda strategia ha come scopo aumentare la potenza dissipata dal sottosistema interessato in modo tale che l'energia degli altri sistemi risulti essere inferiore.

Possiamo ulteriormente approfondire quest'ultimo aspetto riportando i risultati ottenuti dal programma MATLAB implementato e assumendo che la forzante agisca sulla piastra 7 introducendo 1000 W per banda esattamente come nel Paragrafo 7.6.3. In questo caso però imponiamo un DLF unitario su questa piastra mentre tutte le altre piastre hanno uno smorzamento di 0.1 (Figura 7.15).

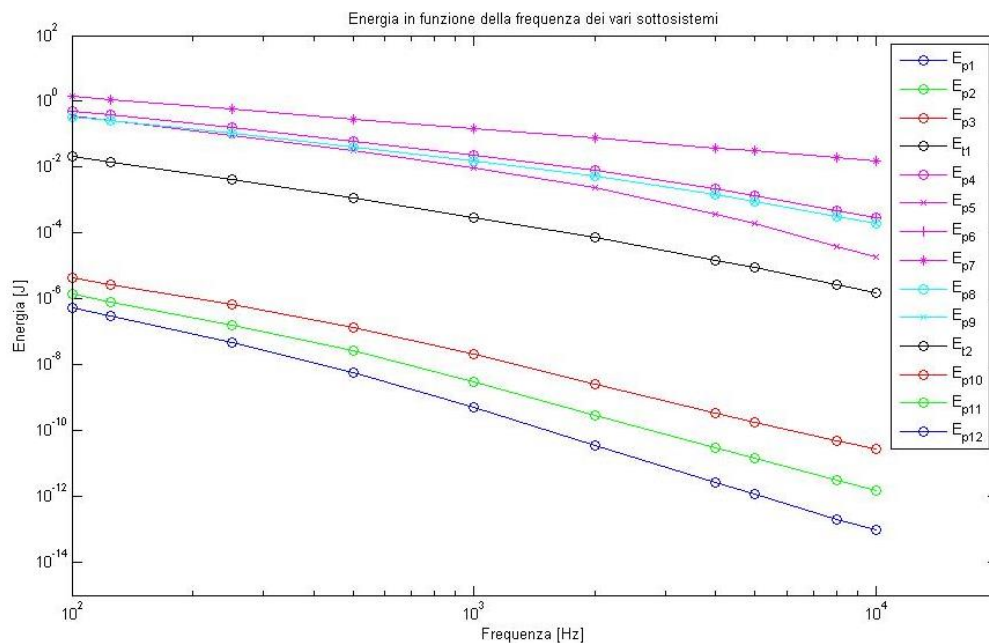


Figura 7.15: Energia in funzione della frequenza nel caso in cui venga sollecitata la piastra 7 con potenza costante in ogni banda e pari a 1000 W. DLF=1 sulla piastra 7 e DLF=0.1 sulle altre.

Ovviamente una tale condizione soddisfa la richiesta *Modal Overlap Factor* ≥ 1 in quanto rispetto al caso del Paragrafo 7.6.3 abbiamo aumentato solamente lo smorzamento della piastra 7.

Quello che possiamo notare graficamente è che tutti i sottosistemi in questo caso sono caratterizzati da un valore di energia inferiore rispetto a quello del Paragrafo 7.6.3. Tale fatto risulta essere più evidente riportando la tabella delle energie mediate nell'intervallo 100-5000 Hz.

	Energia media nella banda 100-5000 Hz [J]	Energia media per grammo nella banda 100-5000 Hz [J/g]	Energia percentuale [%]
Piastra 1	8.15 e-09	1.74 e-12	< 0.01
Piastra 2	2.47 e-08	5.28 e-12	< 0.01
Piastra 3	9.46 e-08	2.02 e-11	< 0.01
Trave 1	5.92 e-04	1.07 e-06	0.26
Piastra 4	2.47 e-02	9.67 e-07	11.03
Piastra 5	1.32 e-02	5.19 e-07	5.92
Piastra 6	2.47 e-02	9.67 e-07	11.03
Piastra 7	1.27 e-01	4.97 e-06	56.68
Piastra 8	1.66 e-02	9.74 e-07	7.41
Piastra 9	1.66 e-02	9.74 e-07	7.41
Trave 2	5.92 e-04	1.07 e-06	0.26
Piastra 10	9.46 e-08	2.02 e-11	< 0.01
Piastra 11	2.47 e-08	5.28 e-12	< 0.01
Piastra 12	8.15 e-09	1.74 e-12	< 0.01
TOTALE	2.24 e-01	-	100

Tabella 7.3: Energia media di ogni elemento della struttura nell'intervallo 100-5000 Hz con sollecitazione applicata alla piastra 7 e che introduce 1000 W per banda e DLF=1 sulla piastra 7.

Dal confronto tra la Tabella 7.2 e Tabella 7.3 possiamo notare che l'aumento del DLF sulla sola piastra 7 ha comportato una diminuzione dell'energia che caratterizza tutti i sottosistemi, non solo la piastra 7. Questo si spiega con il fatto che aumentando lo smorzamento aumenta la potenza dissipata dalla piastra 7 che ricordiamo vale:

$$\Pi_{diss,7} = 2\pi f \eta_7 E_7$$

e lasciando invariata la potenza in ingresso abbiamo che una quota minore di potenza deve essere dissipata dagli altri sottosistemi e quindi saranno caratterizzati da un livello

energetico minore. Tra l'altro è facile accorgersi che globalmente il sistema è meno sollecitato considerando l'energia totale data dalla somma delle energie dei singoli sottosistemi.

Osservando poi la colonna che riporta le energie percentuali ci accorgiamo però che aumentando solo lo smorzamento abbiamo che diminuisce l'energia percentuale sulla piastra sollecitata direttamente e aumenta sulle altre.

In conclusione possiamo dire che aumentando solo lo smorzamento:

- Otteniamo una diminuzione delle energie che caratterizzano tutti i sottosistemi, anche nel caso in cui esso sia aumentato alla sola piastra interessata dalla sollecitazione;
- Non isola maggiormente il sottosistema a cui viene applicato, anzi aumenta la percentuale di energia trasmessa.

Detto ciò se vogliamo ottenere quest'ultimo risultato dobbiamo agire sulla struttura in modo tale da diminuire i CLF.

7.8 Calcolo della risposta utilizzando i CLF medi.

Fino a questo momento abbiamo calcolato la risposta dei sottosistemi che compongono la struttura e abbiamo anche calcolato il valore medio in termini di energia che li caratterizza nella banda 100-5000 Hz. Per fare ciò abbiamo applicato il teorema del valore medio ai risultati dell'analisi SEA. A questo punto è interessante osservare che risultati otteniamo con un'altra strategia: prima di risolvere il sistema calcoliamo i valori medi dei CLF nella medesima banda in modo tale quindi da poter applicare una sola volta l'analisi.

Nella Tabella 7.4 e nella Tabella 7.5 confrontiamo quindi i risultati ottenuti mediante queste due differenti strategie considerando rispettivamente che la sollecitazione agisca sulla piastra 1 e sulla piastra 7 (Figura 7.1) e tale che essa immetta nel sistema una potenza pari a 1000W per ogni banda.

Capitolo 7: Analisi SEA di una struttura

	Energia media nella banda 100- 5000 Hz [J]	Energia con CLF medi nella banda 100-5000 Hz [J]	Energia percentuale [%]	Energia percentuale con CLF medi [%]
Piastra 1	1.12 e+00	1.94 e+00	82.01	95.10
Piastra 2	1.97 e-01	0.93 e-02	14.46	4.56
Piastra 3	4.78 e-02	5.06 e-03	3.50	0.25
Trave 1	2.34 e-04	3.25 e-07	0.01	< 0.01
Piastra 4	4.51 e-08	1.16 e-10	< 0.01	< 0.01
Piastra 5	1.41 e-08	1.57 e-12	< 0.01	< 0.01
Piastra 6	9.05 e-09	6.74 e-14	< 0.01	< 0.01
Piastra 7	1.41 e-08	1.57 e-12	< 0.01	< 0.01
Piastra 8	9.37 e-09	9.89 e-13	< 0.01	< 0.01
Piastra 9	9.37 e-09	9.89 e-13	< 0.01	< 0.01
Trave 2	3.17 e-10	3.45 e-16	< 0.01	< 0.01
Piastra 10	5.96 e-14	6.63 e-21	< 0.01	< 0.01
Piastra 11	1.71 e-14	3.61 e-22	< 0.01	< 0.01
Piastra 12	6.11 e-15	1.96 e-23	< 0.01	< 0.01
TOTALE	1.36 e+00	2.04 e+00	100	100

Tabella 7.4: Confronto tra il valore di energia media dei sottosistemi nell'intervallo 100-5000 Hz e il valore di energia calcolato con i CLF mediati nello stesso intervallo. La sollecitazione agisce sulla piastra 1 e introduce 1000W per banda.

	Energia media nella banda 100- 5000 Hz [J]	Energia con CLF medi nella banda 100-5000 Hz [J]	Energia percentuale [%]	Energia percentuale con CLF medi [%]
Piastra 1	4.01 e-08	4.47 e-12	< 0.01	< 0.01
Piastra 2	1.24 e-07	8.22 e-11	< 0.01	< 0.01
Piastra 3	4.83 e-07	1.72 e-09	< 0.01	< 0.01
Trave 1	3.20 e-03	1.04 e-04	0.23	< 0.01
Piastra 4	1.43 e-01	2.03 e-02	10.45	1.28
Piastra 5	7.30 e-02	8.82 e-04	5.35	0.05
Piastra 6	1.43 e-01	2.03 e-02	10.45	1.28
Piastra 7	8.08 e-01	1.51 e+00	59.23	95.57
Piastra 8	9.57 e-02	1.29 e-02	7.02	0.82
Piastra 9	9.57 e-02	1.29 e-02	7.02	0.82
Trave 2	3.20 e-03	1.04 e-04	0.23	< 0.01
Piastra 10	4.83 e-07	1.72 e-09	< 0.01	< 0.01
Piastra 11	1.24 e-07	8.22 e-11	< 0.01	< 0.01
Piastra 12	4.01 e-08	4.47 e-12	< 0.01	< 0.01
TOTALE	1.36 e+00	1.58 e+00	100	100

Tabella 7.5: Confronto tra il valore di energia media dei sottosistemi nell'intervallo 100-5000 Hz e il valore di energia calcolato con i CLF mediati nello stesso intervallo. La sollecitazione agisce sulla piastra 7 e introduce 1000W per banda.

Dai risultati riportati nel primo caso (Tabella 7.4) possiamo notare come i risultati in termini di energia calcolata utilizzando i CLF medi comporti una sovrastima del 73% nel caso si consideri la piastra sollecitata direttamente. Per tutti gli altri elementi strutturali invece i risultati sono sottostimati: la differenza è pari a un ordine di grandezza per le piastre 2 e 3, che sono quelle che compongono il pannello solare sollecitato, mentre essa cresce allontanandosi progressivamente dalla zona in cui agisce la forzante.

Considerando il secondo caso (Tabella 7.5) si ha che il risultati sull'elemento sollecitato direttamente è sovrastimato dell'86% mentre gli altri risultati sono sottostimati. La differenza è più contenuta rispetto al caso precedente almeno per quanto riguarda gli elementi che compongono il corpo centrale, dato che la differenza è inferiore ai due ordini di grandezza.

Le ragioni di tali risultati sono di difficile comprensione e meritano ulteriori approfondimenti. Da quanto riportato nel presente lavoro sembra che utilizzando i CLF medi otteniamo delle stime sufficientemente accurate almeno per gli elementi che sono prossimi a quello sollecitato direttamente.

Nella terza e quarta colonna delle tabelle precedenti abbiamo infine riportato i risultati in termini percentuali, in modo tale da confrontare come si redistribuisce l'energia nei vari sottosistemi rispetto a quella totale. Più precisamente la terza colonna riporta i risultati percentuali mediando le energie dei sottosistemi mentre la quarta colonna riporta quelli utilizzando i CLF medi. I risultati sono piuttosto differenti: utilizzando direttamente i CLF medi abbiamo che, in entrambi i casi, la maggior parte dell'energia si concentra nell'elemento strutturale sollecitato, in quanto ad esso è attribuito circa il 95% dell'energia. La differenza è particolarmente importante soprattutto nel caso della Tabella 7.5.

Capitolo 8 : TRANSIENT SEA

8.1 Introduzione.

L'Analisi Statistica Transitoria dell'Energia, che di seguito viene indicata con l'acronimo TSEA (Transient Statistical Energy Analysis), è una tecnica che deriva dall'analisi SEA e che, a differenza di quest'ultima, permette di determinare la risposta dei vari sottosistemi al variare del tempo. Infatti nel Paragrafo 2.2 è stato messo in evidenza che l'equazione di bilancio della potenza ($\Pi_{uscita} = \Pi_{ingresso}$) è valida fintantoché si considera che il sistema sia in condizioni a regime stazionario. Grazie all'analisi TSEA si è in grado quindi di studiare i fenomeni transitori che interessano un sistema con l'obiettivo di determinare l'energia media di ogni sottosistema in una determinata banda di frequenza al variare della coordinata temporale. In modo analogo tale energia è un'informazione media sul sottosistema a cui può essere associata un'incertezza a seconda della confidenza scelta e da essa ricavare anche informazioni in termini di deformazioni e tensioni, esattamente utilizzando le formule fornite per la SEA che ovviamente devono essere ripetute per ogni istante temporale.

In questo capitolo inizialmente vengono fornite le equazioni necessarie per tale analisi e successivamente verrà applicata l'analisi TSEA alla struttura considerata nel Capitolo 7 con il fine di ottenere la risposta in termini di energia media qualora essa sia sollecitata da forzanti esterne di tipo transitorio e confrontando i risultati ottenuti mediante le due diverse analisi (TSEA e SEA).

8.2 Equazioni generali dell'analisi TSEA.

Il procedimento che caratterizza l'analisi TSEA è il medesimo dell'analisi SEA:

- dato un sistema complesso se ne individuano i sottosistemi;
- si divide il campo delle frequenze in bande;

- per ogni banda si applica l'analisi TSEA con l'obiettivo di ottenere un'informazione in termini di energia media del sottosistema.

La differenza è che nel caso dell'analisi TSEA questa energia media è una grandezza variabile nel tempo. Per ottenere una tale informazioni l'equazione di bilancio della potenza deve essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{dE_i(t)}{dt} = \Pi_{i,uscita}(t) - \Pi_{i,ingresso}(t)$$

in cui $dE_i(t)/dt$ indica la variazione di energia dell' i -esimo sottosistema al variare del tempo, mentre $\Pi_{i,uscita}(t)$ e $\Pi_{i,ingresso}(t)$ sono rispettivamente le potenze in ingresso e in uscita dal sottosistema. Tale equazione può essere riscritta nel seguente modo tenendo conto di quanto visto nel Paragrafo 2.2:

$$\frac{dE_i(t)}{dt} = \left(\Pi_{i,ext}(t) + \sum_{j(j \neq i)} \omega \eta_{ji} E_j(t) \right) - \left(\omega \eta_{d,i} E_i(t) + \sum_{j(j \neq i)} \omega \eta_{ij} E_i(t) \right)$$

dove $\Pi_{i,ext}(t)$ è la potenza in ingresso al sottosistema dalla forzante, $\sum_{j(j \neq i)} \omega \eta_{ji} E_j(t)$ è la potenza ceduta dai sottosistemi j -esimi al sottosistema i -esimo, $\omega \eta_{d,i} E_i(t)$ è la potenza dissipata dall' i -esimo sottosistema e $\sum_{j(j \neq i)} \omega \eta_{ij} E_i(t)$ è la potenza trasmessa dall' i -esimo sottosistema a tutti i j -esimi. Applicando tale equazione a tutti i sottosistemi e isolando le potenze in ingresso delle forzanti otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 + \sum_{i \neq 1}^k \eta_{1i} & -\eta_{21} & \dots & -\eta_{k1} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \sum_{i \neq 2}^k \eta_{2i} & \dots & -\eta_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\eta_{1k} & -\eta_{2k} & \dots & \eta_k + \sum_{i \neq k}^k \eta_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \\ \dots \\ E_k(t) \end{bmatrix} (2\pi f) + \begin{bmatrix} \frac{dE_1(t)}{dt} \\ \frac{dE_2(t)}{dt} \\ \dots \\ \frac{dE_k(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1(t) \\ \Pi_2(t) \\ \dots \\ \Pi_k(t) \end{bmatrix}$$

in cui k è il numero totale di sottosistemi considerati e che in forma compatta diventa:

$$\omega[A]\{E\} + \{dE/dt\} = \{\Pi\}.$$

Prima di tutto è necessario notare che tale sistema è differenziale e non più algebrico. Inoltre esso corrisponde al sistema del Paragrafo 2.2 in cui è stato aggiunto il vettore che tiene conto della variazione dell'energia nel tempo. La matrice $[A]$ è la matrice di accoppiamento che comprende DLF e CLF e ha le stesse caratteristiche di quella dell'analisi SEA mentre ω è la pulsazione centrale della banda considerata.

8.3 Considerazioni teoriche sull'analisi TSEA.

A questo punto è necessario fare una precisazione sui coefficienti di perdita per accoppiamento da utilizzare nell'analisi TSEA. Lai e Soom [74] hanno studiato come varia il CLF di due piastre debolmente smorzate soggette a una forzante transitoria. Da quanto riportato si evince che per descrivere l'interazione modale generata da un transitorio è necessario ricorrere all'utilizzo di CLF variabili nel tempo. Tali coefficienti però sono valutabili sperimentalmente e sono inferiori a quelli calcolabili mediante l'analisi SEA. Il fatto positivo riportato nel riferimento [74] è che all'aumentare del DLF i coefficienti di perdita per accoppiamento tendono ad assumere il valore di quelli utilizzati per l'analisi SEA e, a maggior ragione, si possono assumere tali valori se il campo vibrazionale che caratterizza i sottosistemi è diffuso. Robinson [44], basandosi su quest'ultima affermazione, ha applicato l'analisi TSEA e ha verificato sperimentalmente i risultati ottenendo risultati in ottimo accordo tra i dati previsti e misurati. Detto ciò, visto che anche nel caso della presente tesi si ha a che fare con campi vibrazionali diffusi e livelli di smorzamento non troppo bassi, assumiamo che i CLF per l'analisi TSEA coincidano con quelli dell'analisi SEA. Infine precisiamo che Lai e Soom [74] non forniscono formule per determinare il livello minimo di smorzamento tale da assumere quanto riportato.

Pinnington e Lednik [57,58] hanno poi svolto un lavoro molto importante al fine di sottolineare la veridicità dei risultati ottenuti dall'analisi TSEA considerando di utilizzare per essa i medesimi CLF utilizzati per l'analisi SEA. Nel loro primo lavoro ([57]) hanno applicato l'analisi TSEA al caso di un semplice sistema a due gradi di libertà a masse concentrate che è riportato in Figura 8.1 e hanno confrontato i risultati ottenuti con quelli forniti dalla soluzione analitica esatta.

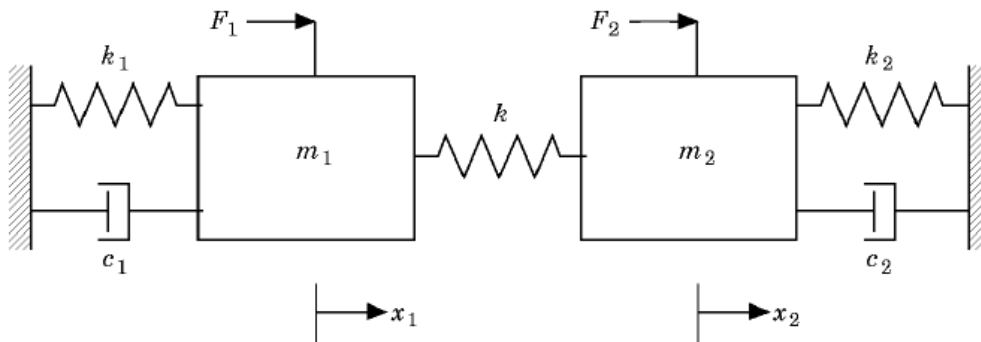


Figura 8.1: Sistema a due gradi di libertà con masse concentrate considerato da Pinnington e Lednik (immagine tratta da [57]).

I risultati che sono stati ottenuti, si veda anche la Figura 8.2, sono i seguenti:

- l'integrale dell'energia trasmessa sollecitando il sistema con un impulso è identica;
- l'analisi TSEA ha una risposta iniziale più rapida e raggiunge il valore massimo in metà del tempo della soluzione analitica;
- il valore massimo della risposta ottenuto tramite la TSEA è sovrastimato del 30%;
- durante la fase di attenuazione la differenza tra i due metodi è contenuta.

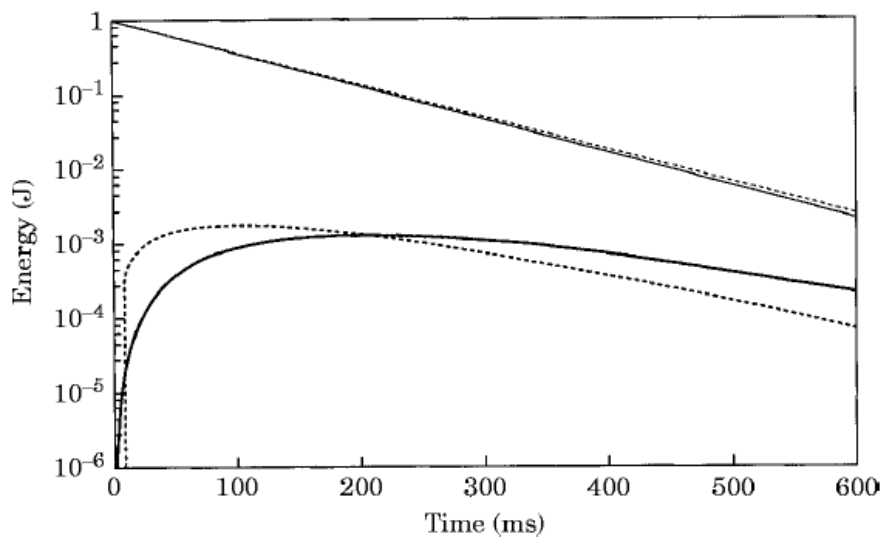


Figura 8.2: Confronto tra la potenza in ingresso (rette) e la potenza trasmessa (caratterizzata da andamento crescente e poi decrescente dalla massa 1 alla 2 in seguito ad un impulso agente sulla massa 1: risultati analitici (linea continua) e risultati forniti dalla TSEA (linee tratteggiate). L'accoppiamento è debole. (immagine tratta da [57]).

Nel riferimento [58] Pinnington e Lednik applicano poi l'analisi TSEA a due travi accoppiate e sollecitate in modo impulsivo. In questo caso verificano il comportamento sia nel caso le travi vengano sollecitate flessionalmente che longitudinalmente confrontando i risultati ottenuti con la soluzione esatta. In entrambi i casi è stato dimostrato che l'analisi TSEA fornisce risultati accurati in termini di valore massimo raggiunto dall'energia e una lieve sottosistema del tempo necessario a raggiungere tale massimo. Di seguito, in Figura 8.3, riportiamo un confronto tra i dati sperimentali e quelli ottenuti applicando la TSEA nel caso in cui due travi in perspex siano accoppiate mediante un vincolo rigido e sollecitate flessionalmente. Le travi hanno una sezione trasversale rispettivamente pari a $1,45 \times 10^{-3}$ e $2,91 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ e lunghezza uguale a 1,19 e 1,32m.

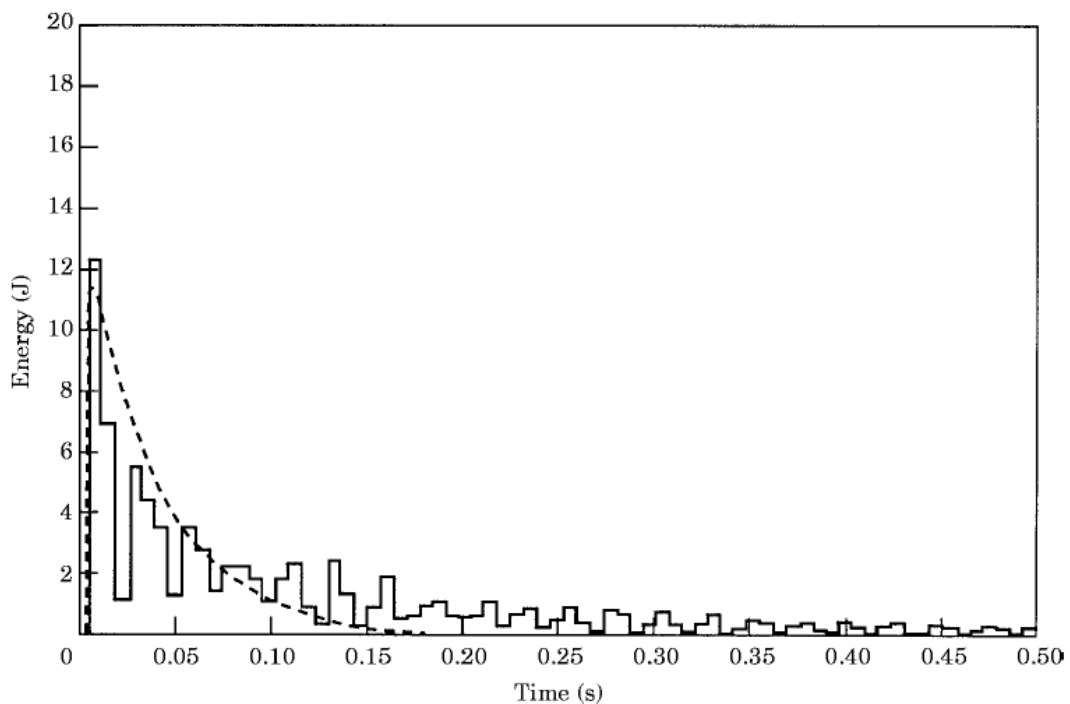


Figura 8.3: Confronto tra l'energia misurata (linea continua) e quella calcolata mediante l'analisi TSEA (linea tratteggiata) nel caso in cui due travi vengano sollecitate flessionalmente (immagine tratta da [58]).

Da quanto visto in questo Paragrafo possiamo quindi concludere che per gli scopi della presente trattazioni è possibile studiare il comportamento transitorio di un sistema complesso applicando l'analisi TSEA ricavando i coefficienti di perdita per accoppiamento con le stesse strategie utilizzate per l'analisi SEA.

8.4 Discretizzazione dell'intervallo temporale.

Nel Paragrafo 8.2 sono state fornite le equazioni differenziali necessarie per studiare un sistema soggetto a una sollecitazione transitoria tramite l'analisi SEA. Quello che si ottiene è un sistema di equazioni differenziali di primo ordine. Una strategia semplice per la risoluzione dell'analisi SEA senza ricorrere a metodi di integrazione numerica (ad esempio i metodi Runge-Kutta) consiste nell'applicare il metodo delle differenze divise alle singole equazioni dei sottosistemi. In tale modo possiamo quindi discretizzare il dominio del tempo e calcolare la soluzione in termini di energia ad ogni passo. L'equazione di un sottosistema scritta in forma generale diventa:

$$\frac{E_i(t_{n+1}) - E_i(t_n)}{\Delta t} = \left(\Pi_{i,ext}(t_n) + \sum_{j(j \neq i)} \omega \eta_{ji} E_j(t_n) \right) - \left(\omega \eta_{d,i} E_i(t_n) + \sum_{i(i \neq j)} \omega \eta_{ij} E_i(t_n) \right)$$

che scritta in forma esplicita è:

$$E_i(t_{n+1}) = E_i(t_n) + \Delta t \left[\left(\Pi_{i,ext}(t_n) + \sum_{j(j \neq i)} \omega \eta_{ji} E_j(t_n) \right) - \left(\omega \eta_{d,i} E_i(t_n) + \sum_{i(i \neq j)} \omega \eta_{ij} E_i(t_n) \right) \right]$$

in cui $E_i(t_{n+1})$ è l'energia dell' i -esimo sottosistema al passo $n + 1$, $E_i(t_n)$ è l'energia al passo n , Δt è l'intervallo temporale discreto tra due passi successivi e tutte le potenze in ingresso e in uscita sono valutate al passo n . Il sistema di equazioni differenziali diventa quindi un sistema algebrico:

$$\{E(t_{n+1})\} = \{E(t_n)\} + \Delta t (\{\Pi(t_n)\} - \omega[A]\{E(t_n)\})$$

che riordinato in modo da raccogliere l'energia al passo n è:

$$\{E(t_{n+1})\} = \Delta t \{\Pi(t_n)\} + ([I] - \Delta t \omega[A]) \{E(t_n)\}$$

in cui $[I]$ è la matrice di identità.

A questo punto è necessario fare una precisazione: avendo modificato l'equazione differenziale in un'equazione algebrica si ha che l'equazione di bilancio della potenza dell'analisi TSEA di fatto è essenzialmente un'equazione di bilancio a regime in cui anche i CLF utilizzati sono quelli validi per una soluzione a regime [44]. In pratica l'analisi TSEA così modificata assume che all'interno dell'intervallo temporale l'energia sia un fenomeno

stazionario, anche se questa rappresentazione non corrisponde all'effettivo fenomeno fisico.

L'intervallo temporale Δt utilizzato da considerare nell'analisi TSEA deve essere:

- sufficientemente breve in modo tale da ottenere una descrizione accurata della variazione dell'energia dei sottosistemi;
- sufficientemente lungo da garantire che in ogni intervallo temporale si raggiunga lo stesso livello energetico in tutti i punti di un sottosistema. Tale valore deriva da studi statistici sui percorsi di trasmissione delle onde che dipendono dal cammino libero medio e dalla velocità di gruppo delle onde ("path statistic", si veda per tale argomento il riferimento [44]);
- non troppo breve al fine di mantenere una buona velocità computazionale.

Un metodo per stimare un adeguato valore dell'intervallo temporale viene suggerito da Lyon [41] che viene anche ripreso e utilizzato da Robinson [44]. Considerando un sottosistema, si ha che l'energia che lo caratterizza decade secondo la legge (si veda Paragrafo 4.3.1):

$$E(t) \propto e^{-2\pi f \eta t}$$

che scritta considerando due istanti temporali successivi diventa:

$$\frac{E(t_{n+1})}{E(t_n)} = e^{-2\pi f \eta \Delta t}$$

in cui con η si indica il DLF che lo caratterizza, con f la frequenza considerata (o la frequenza centrale della banda considerata) e con Δt l'ampiezza dell'intervallo temporale. Per ottenere risultati accurati è sufficiente imporre:

$$2\pi f \eta \Delta t \ll 1.$$

In particolare Lyon [41] e Robinson [44] suggeriscono:

$$2\pi f \eta \Delta t \leq \frac{1}{3}$$

e quindi un intervallo temporale pari a:

$$\Delta t \leq \frac{1}{6\pi f\eta}.$$

Quello che possiamo notare dalla formula appena fornita è che l'intervallo temporale si riduce all'aumentare della frequenza e del DLF che caratterizza il sottosistema poiché all'aumentare di queste grandezze aumenta la velocità di variazione dell'energia del sistema.

Per quanto riguarda invece la stima del valore inferiore dell'intervallo temporale poco si può dire in via generale in quanto è possibile ottenere un tale valore solo attraverso delle stime statistiche sui percorsi di trasmissione che nella presente trattazione non vengono considerate.

Prima di passare all'analisi dei risultati ottenuto è necessario precisare un punto fondamentale: all'interno di una stessa banda di frequenza può accadere che per differenti sottosistemi si debbano utilizzare intervalli temporali differenti a causa di differenti valori del DLF. Tale punto se trascurato può comportare errori nei risultati ottenuti dalla TSEA. Negli esempi seguenti, al fine di semplificare l'analisi, ci si pone nel caso in cui tutti i sottosistemi siano caratterizzati dal medesimo DLF e si rimanda il lettore al riferimento [45] in cui viene descritta una strategia denominata "numerical local time stepping" che permette di considerare un intervallo adeguato per ogni sottosistema.

8.5 Analisi dei risultati ottenuti.

Come anticipato nell'introduzione a questo Capitolo l'analisi TSEA è stata applicata alla struttura considerata nel Capitolo 7 al fine di evidenziare come essa risponde in seguito ad una sollecitazione transitoria piuttosto che a regime. Nella seguente trattazione si considera solo il caso in cui venga sollecitata la piastra 7 (si veda Figura 7.1) poiché ha poca importanza dove agisce la sollecitazione al fine di ottenere tale confronto. Come nel Capitolo 7 si ha che la forzante è tale da fornire in ingresso una potenza pari a 1000 W. Infine si precisa che l'analisi TSEA viene applicata solo a determinare frequenze in quanto i risultati evidenziati di seguito sono poi generalizzabili ad ogni banda di frequenza.

Quanto segue è suddiviso nel modo seguente:

- inizialmente viene confrontato il comportamento di due sottosistemi differenti (piastra 5 e piastra 7) considerando una sollecitazione sulla piastra 7 pari a 0.010s e poi 0.002s e riportando anche i valori a regime dell'energia;
- dopodiché si passa ad analizzare come cambia la risposta transitoria in funzione del DLF;
- infine si riportano i risultati ottenuti considerando tutti i sottosistemi.

8.5.1 Confronto tra i risultati transitori e quelli a regime.

In questa prima analisi si è interessati a confrontare i risultati forniti dall'analisi TSEA con quelli a regime ottenuti tramite l'analisi SEA. Si considera che la sollecitazione agisca sulla piastra 7 e i grafici di confronto riportati di seguito si riferiscono alla banda la cui frequenza centrale è pari a 1000 Hz. Il DLF è pari a 0.1 su tutti i sottosistemi.

Nella Figura 8.4a e nella Figura 8.4b sono riportati rispettivamente gli andamenti dell'energia della piastra 7 e della piastra 5 nel momento in cui la sollecitazione è caratterizzata da una durata complessiva pari a 0.010s e poi si annulla. Per quanto riguarda la piastra 7 è possibile notare che:

- presenta un transitorio crescente fintantoché la sollecitazione agisce sul sistema e poi un transitorio decrescente;
- nell'intervallo compreso tra circa 0.008 e 0.010s l'energia vibrazionale è pari a quella calcolata mediante l'analisi SEA (linea rossa). La giustificazione è da individuare nel fatto che la piastra 7 dopo circa 0.008s è effettivamente in una condizione di regime. Se la forzante non venisse rimossa si otterrebbe che l'energia rimarrebbe fissa a tale valore nel tempo (si veda anche la Figura 8.7).

Considerando poi la piastra 5 è possibile dire che:

- anche essa presenta un transitori crescente seguito da uno decrescente anche se entrambi sono meno accentuati di quelli che caratterizzano la piastra 7;
- la piastra 5 tende al valore a regime e presenta il valore massimo apparentemente quando la forzante viene rimossa.

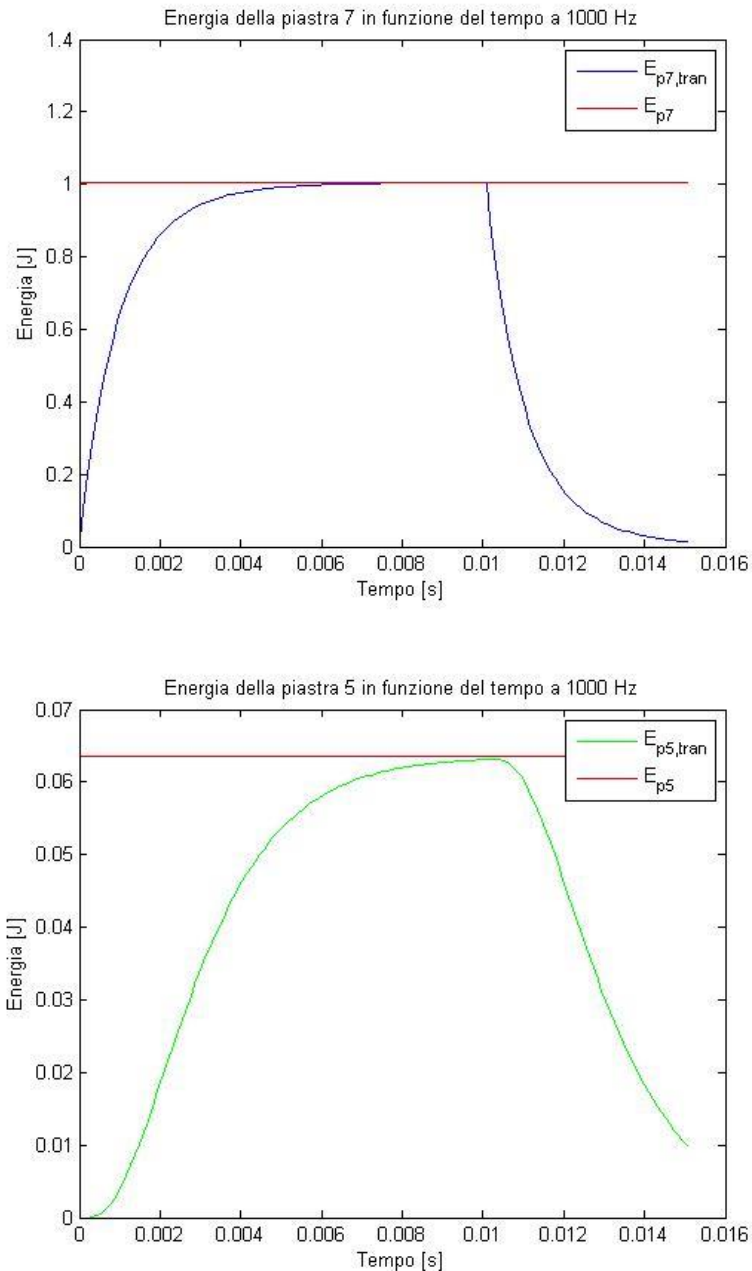


Figura 8.4: Confronto tra i risultati dell'analisi TSEA e SEA (linee rosse) nella banda con frequenza centrale pari a 1000 Hz per le piastre 7 (caso a) e 5 (caso b). La forzante agisce per 0.010s.

Adesso si consideri che la forzante agisca per un periodo di tempo minore al caso precedente e pari a 0.002s. Le risposte in termini di energia che otteniamo per le piastre 7 e 5 sono riportate rispettivamente in Figura 8.5a e in Figura 8.5b. A differenza del caso precedente è possibile notare che nessuna delle due piastre raggiunge il valore di energia stimato dall'analisi SEA poiché il periodo di tempo che la forzante interessa il sistema è troppo breve per considerare che esso sia a regime.

In generale quindi è possibile affermare che:

- Tutti i sottosistemi presentano un transitorio crescente e uno decrescente che sono tanto più rapidi quanto il sottosistema è in prossimità del sottosistema sollecitato dalla forzante;
- Le energie vibrazionali tendono al proprio valore a regime, che è diverso a seconda del sottosistema considerato, e nel caso questo venga raggiunto non viene superato.

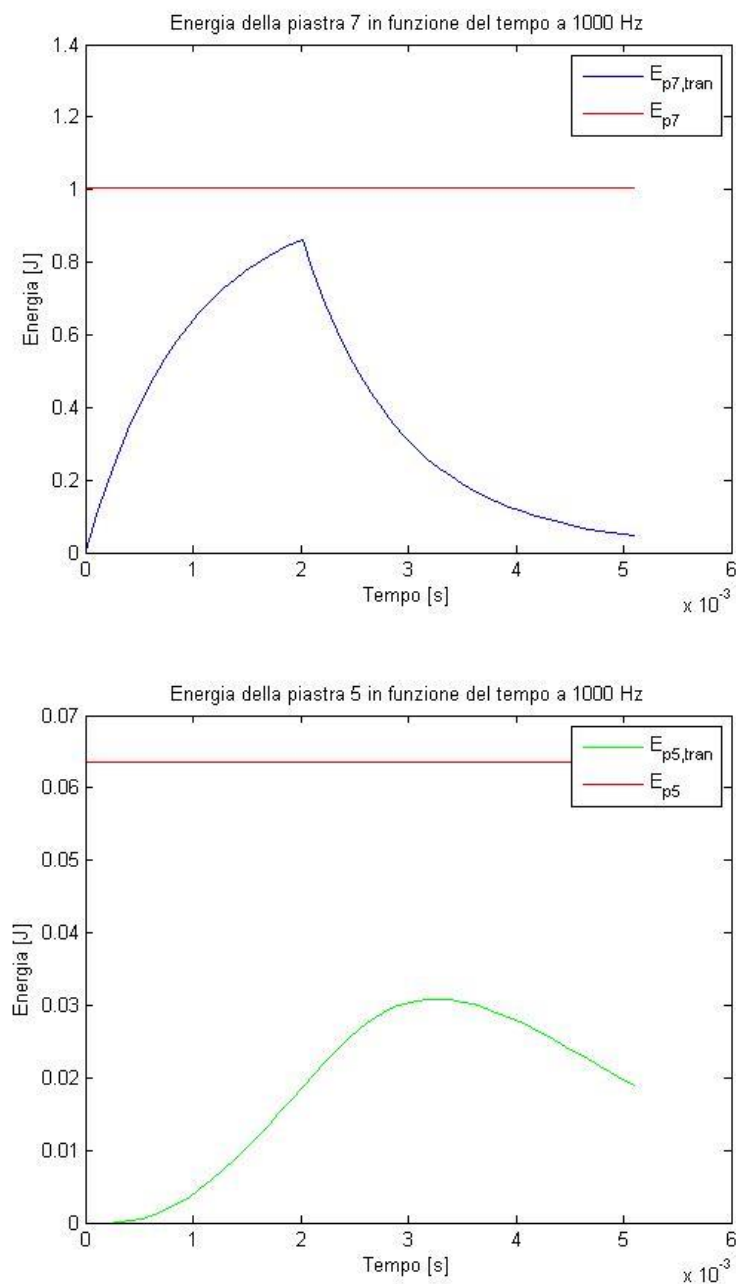


Figura 8.5: Confronto tra i risultati dell'analisi TSEA e SEA (linee rosse) nella banda con frequenza centrale pari a 1000 Hz per le piastre 7 (caso a) e 5 (caso b). La forzante agisce per 0.002s.

8.5.2 Effetto dello smorzamento nell'analisi TSEA.

In questo paragrafo viene messo in luce come varia la risposta transitoria ottenuta tramite l'analisi TSEA in funzione del DLF (si veda Figura 8.6a e Figura 8.6b). Si prenda in considerazione solo la risposta della piastra 7 e la banda con frequenza centrale pari a 1000 Hz in quanto i risultati sono estendibili a tutte le piastre e in tutte le bande in generale. La forzante è la medesima del Paragrafo 8.5.1 e agisce per 0.01s.

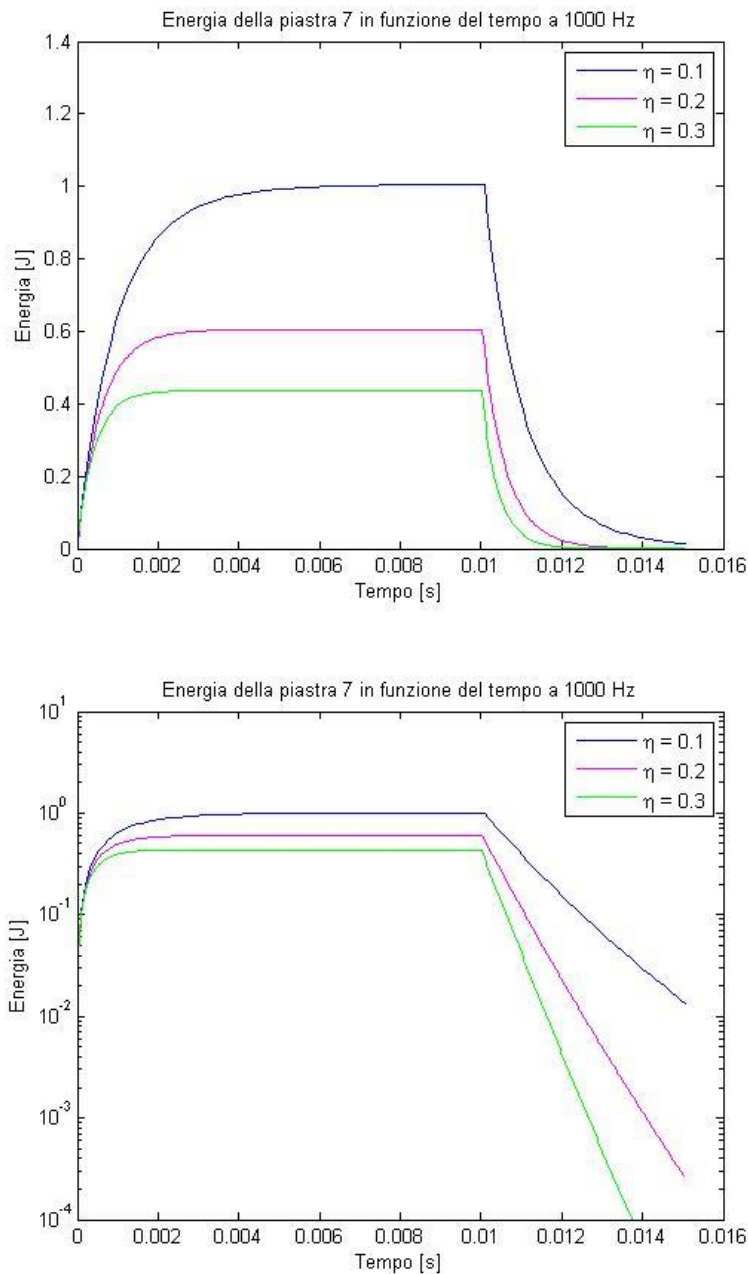


Figura 8.6: (a) Risposta in termini di energia della piastra 7 per due DLF differenti ($\eta=0.1$ e $\eta=0.2$); (b): diagramma semilogaritmico.

Dalla Figura 8.6 è possibile notare che:

- all'aumentare dello smorzamento il valore a regime che caratterizza la piastra 7 diminuisce. Questo fatto era già stato messo in evidenza nel Paragrafo 7.6 confrontando i risultati forniti dall'analisi SEA con differenti livelli di smorzamento;
- all'aumentare dello smorzamento la condizione a regime viene raggiunta più velocemente;
- il transitorio decrescente è tanto più rapido quanto lo smorzamento del sottosistema è maggiore e questo risulta essere particolarmente dal diagramma semilogaritmico (Figura 8.6b).

8.5.3 Risultati globali dell'analisi TSEA.

Dopo aver analizzato alcune risultati forniti dall'applicazione dell'analisi TSEA alla struttura complessa di Figura 7.1 riportiamo di seguito gli andamenti delle energie vibrazionali di tutti i sottosistemi nel caso in cui si consideri ancora una volta che la sollecitazione agisca sulla piastra 7 e che sia tale da generare un ingresso di potenza pari a 1000 W in tutte le bande di frequenza in cui viene diviso lo spettro.

Nel primo caso si consideri che la forzante agisca sul sistema per tutta la durata temporale del fenomeno, ovvero 0.015s. Dalla Figura 8.7 possiamo notare che l'energia diminuisce man mano che aumenta la distanza del sottosistema da quello sollecitato e che tutte le energie tendono al loro valore a regime. Allontanandosi poi dalla zona dove agisce la forzante il tempo necessario affinché il fenomeno transitorio cessi aumenta. Osservando poi il grafico è possibile notare anche nei primi istanti le piastre non sollecitate presentano valori di energia nulli, che non vengono rappresentati in quanto il diagramma è semilogaritmico. Tale lasso di tempo aumenta poi all'aumentare della distanza del sottosistema dalla forzante.

Nel caso in cui la forzante agisca per 0.005s otteniamo quanto riportato in Figura 8.8. Quando l'azione della forzante si esaurisce l'energia vibrazionale dei sottosistemi decresce. Nell'intervallo temporale in cui agisce la sollecitazione alcuni sottosistemi arrivano alle condizioni di regime (ad esempio la piastra 7) mentre altri no (ad esempio le piastre del pannello solare). Inoltre valgono le considerazioni fatti nel caso precedente.

Capitolo 8: Transient SEA

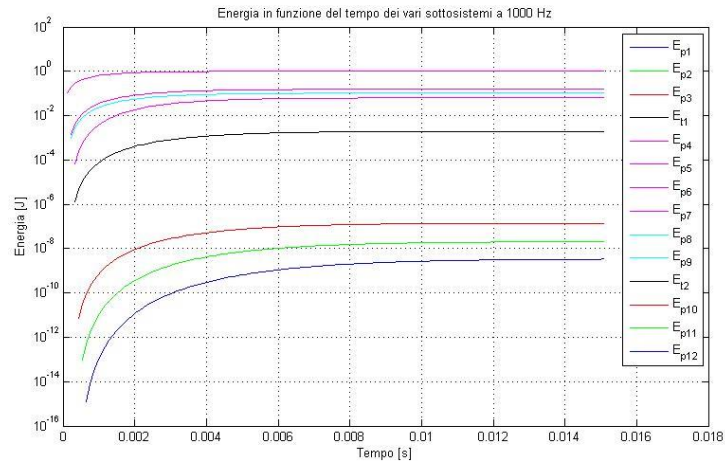


Figura 8.7: Energia dei sottosistemi in funzione del tempo (1000 Hz). Durata sollecitazione 0.015s.

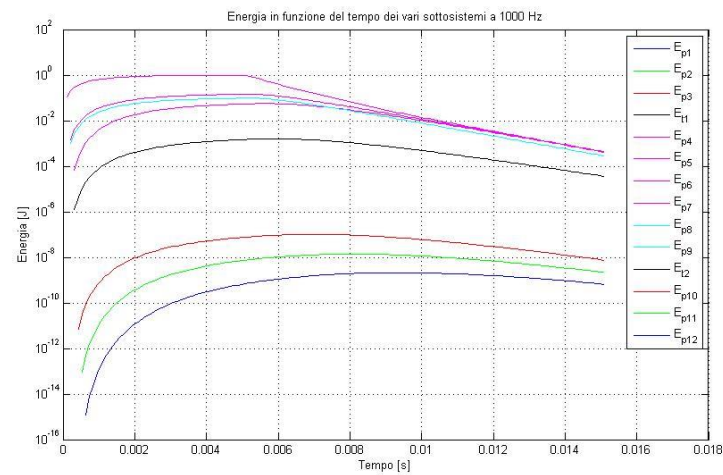


Figura 8.8: Energia dei sottosistemi in funzione del tempo (1000 Hz). Durata sollecitazione 0.005s

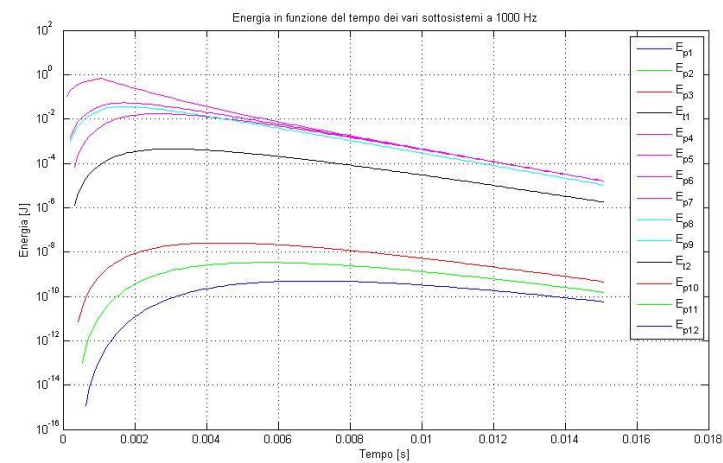


Figura 8.9: Energia dei sottosistemi in funzione del tempo (1000 Hz). Durata sollecitazione 0.001s.

Infine quando la durata è pari a 0.001s abbiamo i risultati riportati in Figura 8.9. Da essi possiamo osservare che nessun sottosistema giunge alle condizioni a regime.

Quanto visto considerando la banda in frequenza a 1000 Hz può essere ripetuto anche in tutte le altre tenendo conto che la risposta dei sottosistemi varia da banda a banda. Ad esempio di seguito riportiamo i risultati nella banda con frequenza centrale di 5000 Hz.

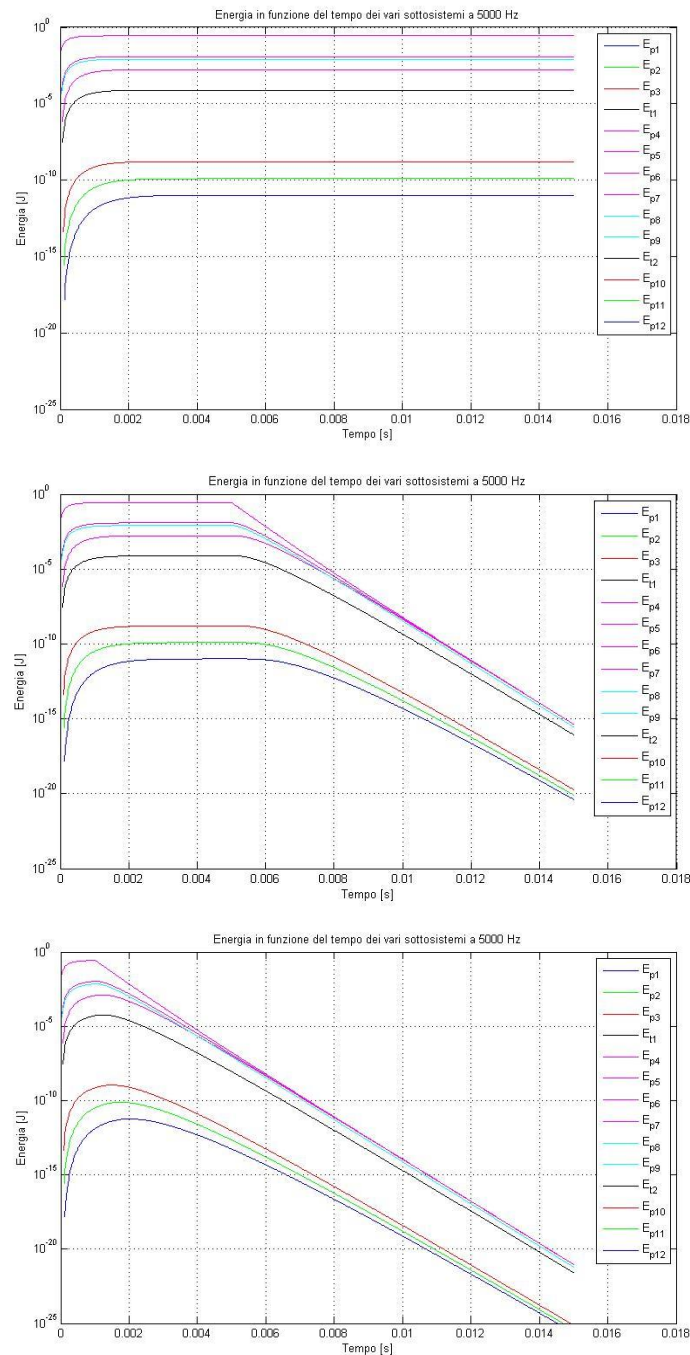


Figura 8.10: Energia dei sottosistemi in funzione del tempo (5000 Hz). Durata sollecitazione: (a) 0.015s, (b) 0.005s e (c) 0.001s.

In generale è possibile affermare che:

- a frequenze differenti si hanno valori a regime dell'energia differenti, e questo dovrebbe essere chiaro alla luce della Figura 7.11;
- all'aumentare della frequenza i fenomeni transitori sono più rapidi sia quando si tratti di un transitorio crescente che di uno decrescente;
- il lasso di tempo i cui i sottosistemi non sollecitati direttamente dalla forzate presentano energia nulla diminuisce all'aumentare della frequenza.

8.6 Studio dei fenomeni di shock mediante SEA e TSEA.

I fenomeni di shock, come quelli generati dall'attuazione di dispositivi pyro per la separazione degli stadi di un lanciatore o fenomeni di impatto, sono caratterizzati da elevati contenuti in frequenza, anche oltre i 10000 Hz, e ampiezze della sollecitazione molto elevate, anche 10000g (dove con g si è indicata l'accelerazione di gravità media). I range di frequenza tipici di tali forzanti transitorie sono ben oltre i limiti pratici di utilizzo delle tecniche standard di analisi deterministica, come le Analisi agli Elementi Finiti (FEA), che possono generare risultati accurati considerando forzanti che presentano contenuti in frequenza inferiori a 500-1000 Hz.

Una tecnica che è possibile utilizzare per tali scopi è l'analisi TSEA: noto l'andamento della sollecitazione nel tempo si può utilizzare tale informazione come input all'analisi e ricavare da essa le informazioni in termini di energia, deformazioni e tensioni che caratterizzano i diversi elementi variabili nel tempo.

Un'altra metodologia per lo studio dei fenomeni di shock è stata proposta e verificata mediante confronti numerici e sperimentali da Iadevaia [59]. Il procedimento prevede di costruire degli Shock Response Spectrum (SRS) per gli elementi della struttura a partire dallo SRS della sollecitazione attraverso l'analisi SEA che considera fenomeni a regime e non transitori. Utilizzando tale tecnica si perde l'informazione temporale legata alla sollecitazione in quanto essa viene rappresentata tramite il suo SRS e quindi non si può ricostruire nemmeno la storia di carico dell'elemento strutturale poiché non sono note le fasi delle singole risposte dei modi di vibrare dell'elemento. Però tale mancanza non

risulta essere limitante poiché è fondamentale conoscere il livello massimo della risposta a cui è soggetta la struttura mentre non è importante definire l'effettivo istante temporale in cui si verifica.

La procedura proposta da Iadevaia [59] è la seguente:

- per il sistema preso in considerazione si assembla l'analisi SEA standard;
- si calcola lo SRS dello shock in ingresso al sistema;
- tale SRS della sollecitazione, diviso in bande di frequenza, viene usato come ingresso per l'analisi SEA;
- dai risultati forniti dalla SEA si assemblano gli SRS legati a quella determinata forzante per i differenti elementi strutturali.

Di seguito riportiamo i risultati ottenuti da Iadevaia [59].

8.6.1 Analisi SEA tramite SRS per una singola piastra: validazione numerica.

Si consideri una piastra di dimensioni 1x1,5m e spessore 1mm. Il materiale è alluminio con le seguenti proprietà: modulo elastico 70×10^9 Pa, modulo di Poisson 0,34 e densità 7800 kg/m^3 . Di seguito in Figura 8.11 si riporta l'andamento temporale della sollecitazione e il relativo SRS sia per la sollecitazione massima positiva che la sollecitazione massima negativa.

In Figura 8.12 vengono confrontati i risultati in termini di velocità media per banda ottenuti nel riferimento [59] utilizzando sia l'analisi FEM sia l'analisi SEA tramite SRS. Si sottolinea che i risultati considerati sono limitati a 1000 Hz affinché i risultati numerici possano essere ritenuti accurati. E' possibile notare come effettivamente ci sia ottima corrispondenza tra i risultati delle differenti analisi nella maggior parte del dominio in frequenza: solo alle frequenze maggiori sono evidenziabili delle differenze imputabili alla minor correttezza dell'analisi FEM in tali intervalli. La differenza sostanziale tra le due tipologie di analisi è in termini di tempo necessario per ottenere i risultati: per l'analisi FEM sono necessarie 4 ore mentre per l'analisi SEA sono sufficienti 10 minuti con un computer di prestazioni standard.

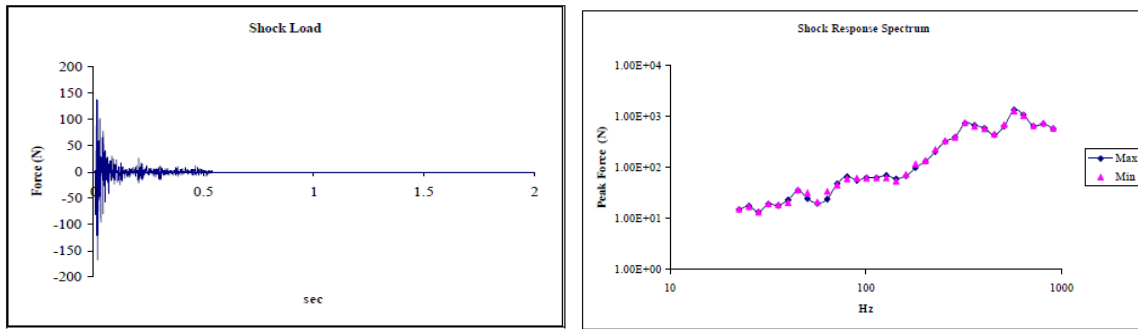


Figura 8.11: (a) andamento temporale della sollecitazione e (b) SRS associati ad essa (immagine tratta da [59]).

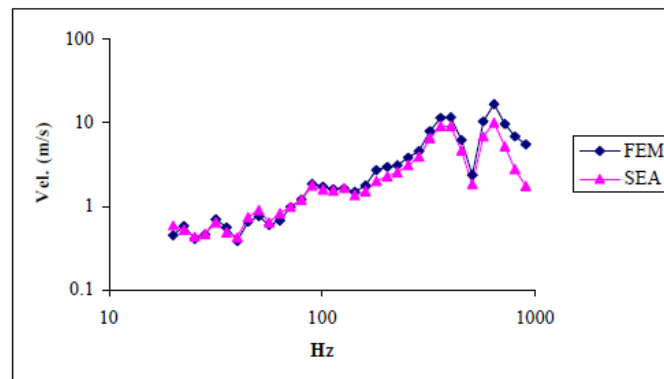


Figura 8.12: Confronto tra i risultati in termini di velocità della piastra descritta ottenuti mediante FEM e analisi SEA per la sollecitazione in figura 8.11 (immagine tratta da [59]).

8.6.2 Analisi SEA tramite SRS per tre piastre: validazione sperimentale.

Al fine di validare anche sperimentalmente i risultati ottenuti si consideri un sistema formato da tre piastre disposte una di seguito all'altra con angoli di 120° . Le piastre 1, 2 e 3 hanno rispettivamente aree superficiali pari a 0.7m^2 , 0.8m^2 e 0.5m^2 e tutte hanno spessore uguale a 1mm. Le piastre sono saldate le une alle altre e la giunzione ha una lunghezza di 0.75m. Per ottenere i risultati sperimentali sono state misurate le risposte in termini di accelerazione mediante l'utilizzo di accelerometri miniaturizzati (10mV/g, 0.0005 kg) disposti in 5 punti disposti in modo random su ogni piastra. In Figura 8.13 vengono riportati la forzante e lo SRS associato mentre in Figura 8.14 vengono confrontati i risultati forniti dalla SEA e quelli sperimentali per le tre differenti piastre.

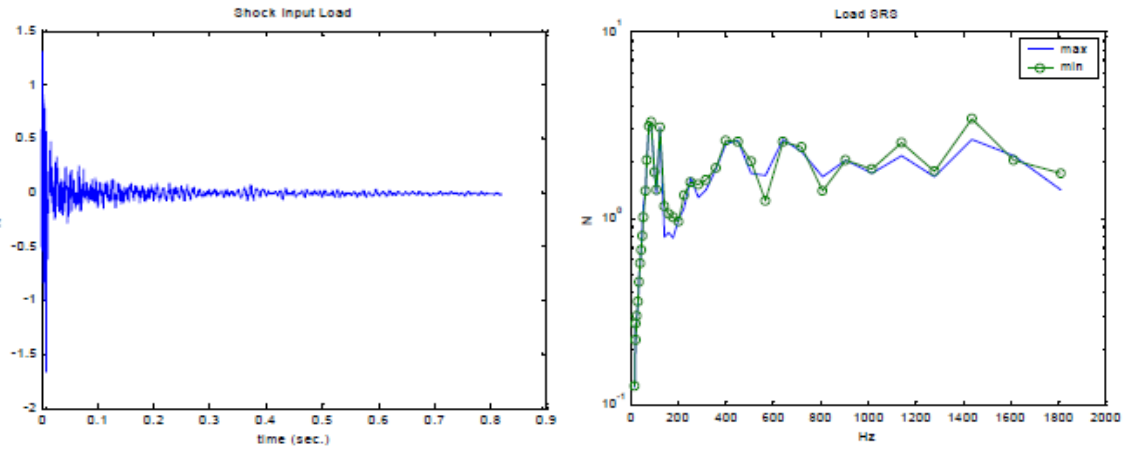


Figura 8.13: (a) andamento temporale della sollecitazione e (b) SRS associati ad essa (immagine tratta da [59]).

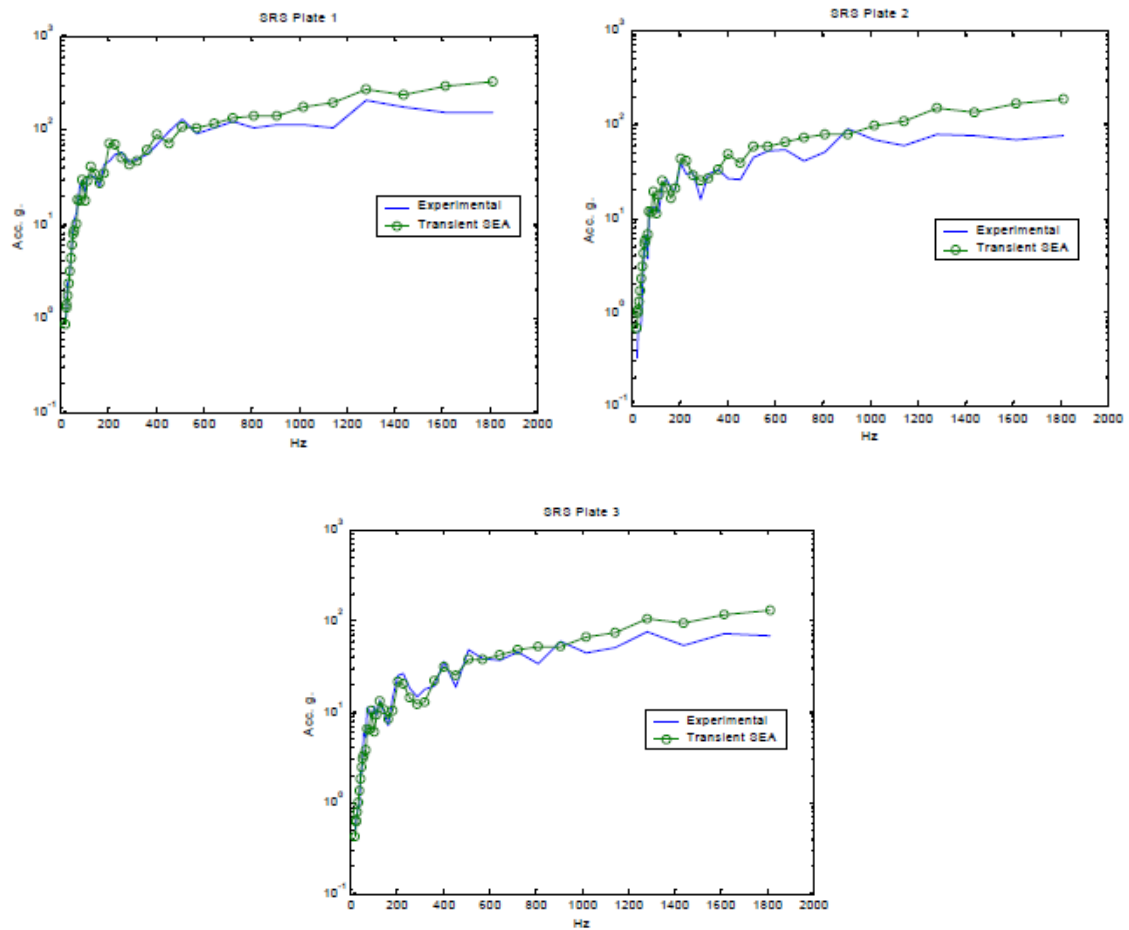


Figura 8.14: (a) SRS della piastra 1, (b) SRS della piastra 2, (c) SRS della piastra 3 (immagini riprese da [59]).

Dalla Figura 8.14 appare evidente l'ottima corrispondenza tra i dati sperimentali e i risultati forniti dall'analisi SEA in tutto il dominio delle frequenze considerato e per tutte e tre le piastre considerate.

Si può quindi concludere affermando che la procedura proposta da Iadevaia [59], che prevede di valutare la risposta dei sottosistemi dando in ingresso all'analisi SEA lo SRS della forzante, permette di estendere le analisi dinamiche anche nel campo delle frequenze comprese tra 500 e 10000 Hz, in cui le analisi tradizionali sono di difficile applicazione.

Conclusione.

Nella presente tesi è stato studiato e applicato ad una struttura complessa il metodo dell'Analisi Statistica dell'Energia con l'obiettivo di fornire una tecnica che permetta di determinare la risposta dinamica degli elementi che la compongono, qualora essa sia soggetta a sollecitazioni caratterizzate da componenti in frequenza superiori ai 300-500 Hz e fino a 10000 Hz. La necessità di un tale approfondimento si è resa necessaria a causa della mancanza di analisi tradizionali che consentano di calcolare le sollecitazioni che si sviluppano in tale range di frequenza: le analisi agli elementi finiti infatti forniscono risultati che possono essere ritenuti accurati solo se le forzanti in ingresso non superano i 500 Hz, mentre sopra tale soglia i costi computazionali, in termini di tempo e volume dei file prodotti, sono troppo onerosi.

Si è scelto di approfondire tale teoria anche poiché, per il suo utilizzo, è necessario conoscere solo poche caratteristiche generali degli elementi strutturali (geometria, proprietà del materiale e tipologia delle giunzioni), fatto che la rende particolarmente adatta per confrontare diverse configurazioni strutturali durante la fase di dimensionamento preliminare di un sistema complesso. Inoltre essa risulta essere molto efficiente dal punto di vista computazionale, sia per strutture semplici che complesse, a differenza delle analisi FEM.

Al fine di ottenere tali risultati, innanzitutto, è stato fondamentale uno studio teorico approfondito dell'Analisi Statistica dell'Energia in quanto essa presenta caratteristiche molto differenti dalle comuni analisi dinamiche strutturali. Nel Capitolo 1, quindi, si sono messi in luce gli aspetti di base della teoria, la cui comprensione risulta essere quanto più necessaria per capire l'idea su cui si fonda e per giustificare le formule che sono presenti dai seguenti capitoli.

La parte di trattazione compresa tra il Capitolo 2 e il Capitolo 5 è stata organizzata in modo tale da fornire al lettore tutto ciò che è necessario conoscere dal punto di vista teorico al fine di applicare l'analisi SEA a casi pratici di interesse ingegneristico. Tutto ciò

che è riportato deriva da un attento e approfondito studio bibliografico allo stato dell'arte. Purtroppo bisogna sottolineare che, essendo a tutt'oggi una teoria molto recente, una gran parte dei libri e degli articoli che trattano l'argomento sono di carattere prettamente teorico. Lo scopo dei primi Capitoli è stato quello di raccogliere tutti gli aspetti teorici che sono necessari dal punto di vista ingegneristico per l'applicazione dell'analisi SEA a casi pratici. Questo è stato fatto mettendo sempre bene in evidenza tutti gli aspetti che nascono dai risultati della ricerca. Tenendo ben in mente ciò si riportano brevemente gli aspetti salienti dell'Analisi Statistica dell'Energia.

Nel Capitolo 2, oltre a descrivere come assemblare il sistema di equazioni che permette di calcolare le energie vibrazionali dei singoli sottosistemi, si è dato spazio a un argomento fondamentale: la divisione della struttura in sottosistemi. Questo è il primo passo da compiere nell'analisi SEA e di conseguenza l'accuratezza dei risultati ottenuti dipende da esso. Facendo un parallelismo leggermente forzato ma utile, si può assimilare l'importanza della divisione in sottosistemi alla raffinatezza della mesh di un'analisi FEM (tenendo ben presente quanto visto nel Paragrafo 2.4.3): sbagliare la suddivisione in sottosistemi, o trascurarne alcuni, è come sperare di ottenere risultati accurati da una mesh grossolana. Per di più non considerare un sottosistema significa non prendere in considerazione delle caratteristiche dell'elemento strutturale che potrebbero essere peculiari. L'aspetto positivo è che l'individuazione dei sottosistemi nei casi di elementi strutturali semplici è diretto: le travi sono caratterizzate da tre sottosistemi (flessionale, longitudinale e torsionale) e le piastre da altrettanti sottosistemi (flessionale, longitudinale e di taglio). Qualora invece l'elemento sia complesso, ad esempio una shell con fori o parti emisferiche, tale suddivisione non è immediata e necessita studi preliminari dedicati (si veda Paragrafo 2.4.1). D'altra parte non tutti i sottosistemi sono significativi: alcuni possono presentare una densità modale troppo bassa affinché essi possano rappresentare una caratteristica peculiare dell'elemento di cui fanno parte. Nel Capitolo 3 si è sottolineato proprio come la densità modale svolga un ruolo centrale all'interno dell'analisi SEA. E' tale grandezza che ci permette di determinare quanto significativo sia un sottosistema al fine di rappresentare un certo comportamento (che nel caso di strutture semplici è flessionale, longitudinale o di taglio/torsionale) dell'elemento. Va da sé che includere un sottosistema poco "significativo" comporta un'analisi più

onerosa e i cui risultati possono essere affetti da incertezza maggiore a causa del fatto che il Modal Overlap Factor associato a tale sottosistema non è sufficientemente elevato (si vedano Paragrafo 3.3 e Paragrafo 3.11). E' chiaro che tutto ciò è legato a considerazioni del progettista e non è possibile fornire delle regole generali poiché tutto dipende dal singolo caso considerato. Questo punto rappresenta la parte chiave della teoria: chiunque debba affrontare tale analisi è chiamato a prendere delle decisioni che deve giustificare adeguatamente. Detto ciò il Capitolo 3 fornisce tutte le formule necessarie per valutare la densità modale e i parametri ad essa associata, come il Modal Overlap Factor, per tutti gli elementi strutturali di interesse ingegneristico disponibili in letteratura: travi, piastre, elementi in materiale composito e piastre irrigidite.

Il Capitolo 4 affronta il tema del coefficiente di perdita per smorzamento (DLF), parametro che svolge un ruolo molto importante all'interno dell'analisi SEA. D'altra parte va detto che la sua valutazione risulta essere molto complicata in quanto spesso le formule analitiche o i dati empirici a disposizione riescono a fornirne solo una stima approssimativa. Il fatto positivo è che un'accuratezza del 20% comporta un errore sul valore finale dei risultati in termini di energia di 1dB [41]. Detto ciò la prima parte del Capitolo 4 raccoglie tutti i metodi, sperimentali e analitici, e i dati empirici che sono emersi dalla bibliografia, nella speranza di fornire dati utili per le successive applicazioni della teoria. La parte sicuramente più importante riguarda i trattamenti superficiali di elementi metallici mediante l'applicazione di uno strato di materiale polimerico con lo scopo di ottenere un elemento strutturale che garantisca, allo stesso tempo, l'adeguata rigidità e uno smorzamento sufficientemente elevato (si veda Paragrafo 4.6). Dal punto di vista pratico, grazie alle analisi numeriche svolte nel Capitolo 7 e 8, poi si è visto come effettivamente lo smorzamento sia un parametro fondamentale al fine di limitare la risposta in termini di energia vibrazionale, e quindi in termini di deformazioni e tensioni, degli elementi: più esso è elevato e meno sollecitata è la struttura (si vedano Paragrafi 7.6 e 8.5.2).

Il Capitolo 5 pone l'accento su quello che è definito il parametro principe dell'Analisi Statistica dell'Energia: il coefficiente di perdita per accoppiamento (CLF). Tale argomento è stato affrontato sia dal punto di vista teorico, con lo scopo di giustificare alcune semplificazioni presenti nella teoria (e in tal modo si leggano i Paragrafi 5.6 e 5.7), sia dal

punto di vista pratico fornendo i procedimenti e le formule necessarie per valutare questa grandezza per un'ampia gamma di giunzioni tra elementi strutturali. In particolare, per calcolare questa grandezza, è emerso che bisogna distinguere tra sottosistemi collegati tramite giunzioni puntuali o tramite giunzioni lineari. In entrambi questi casi i CLF possono essere valutati utilizzando il metodo delle impedenze (Paragrafo 5.4) che però implica considerazioni non banali da parte del progettista, il quale deve comprendere quali sottosistemi dei due elementi strutturali considerati scambiano energia, e inoltre fornisce risultati approssimati. Per tale motivo, nel Capitolo 7 e nel Capitolo 8, l'approccio delle impedenze è stato utilizzato solo per le giunzioni puntuali poiché per esse è l'unico metodo a disposizione. Per le giunzioni lineari tra piastre, invece, i CLF sono stati valutati mediante il metodo fornito da Langley [70] (Paragrafo 5.9). Quest'ultimo metodo permette il calcolo diretto di tutti i CLF tra i vari sottosistemi senza che il progettista debba fare alcuna considerazione preliminare: nel caso in cui due sottosistemi siano debolmente accoppiati quel particolare CLF risulterà automaticamente di ordini di grandezza inferiore rispetto agli altri. Inoltre viene riportata anche una strategia semplificata per il calcolo dei CLF tra piastre con giunzione lineare (Paragrafo 5.10): tale metodo risulta essere utile per effettuare dei semplici conti preliminari a mano, poiché da esso otteniamo solo un valore dei CLF costante al variare della frequenza tra i sistemi flessionali. Perciò tale metodologia, per quanto attraente, risulta essere troppo semplificata per ottenere risultati accurati.

Con il Capitolo 5 si chiude la parte teorica della trattazione. Dopo questo studio iniziale della teoria dell'Analisi Statistica dell'Energia si è implementato un software MATLAB con il fine di studiare la risposta dinamica che caratterizza una struttura complessa. Prima di arrivare a tale punto, nel Capitolo 6, è stato necessario validare i risultati ottenuti dal software: per tale motivo si sono confrontati i coefficienti di trasmissioni calcolati dal programma con quelli disponibili in letteratura per un caso pratico. Tenendo conto che essi sono stati calcolati mediante approcci di calcolo differenti è stato possibile concludere che, comunque, essi sono sufficientemente accurati per garantire la correttezza dei risultati forniti in termini di energia vibrazionale.

Nel Capitolo 7 si è applicata l'Analisi Statistica dell'Energia ad una struttura complessa che rappresenta la geometria di un satellite con pannelli solari di tipo deployable. Si è studiato

come varia la risposta in termini di energia vibrazionale qualora essa sia soggetta a sollecitazioni agenti in zone differenti e per diversi valori del DLF. In particolare si è messo in evidenza il ruolo fondamentale svolta dalla densità modale e dal Modal Overlap Factor come è emerso dalla trattazione teorica. Grazie alla densità modale si è visto come effettivamente, per le sollecitazioni considerate, sia sufficiente modellare il sistema solo attraverso i sottosistemi flessionali (Paragrafo 7.5) mentre il Modal Overlap Factor ci ha permesso di stabilire i casi in cui i risultati sono affetti da un'incertezza maggiore. Quello che è emerso è che, al fine di minimizzare la sollecitazione sugli elementi, è necessario diminuire il valore dei CLF o aumentare quello dei DLF. La prima strategia però è difficilmente perseguibile in quanto richiede che venga diminuita la rigidità delle giunzioni fatto che è in contrasto con i requisiti di rigidità che deve garantire la struttura. Di conseguenza è necessario intervenire sul DLF e nel Paragrafo 7.7 si sono visti gli effetti positivi di una tale azione su tutto il sottosistema: aumentare lo smorzamento anche solo dell'elemento su cui agisce la sollecitazione diminuisce la risposta di tutti i sottosistemi.

Infine nel Capitolo 8 è stata approfondita l'Analisi Statistica Transitoria dell'Energia: essa permette, a differenza dell'analisi SEA, di studiare la risposta dinamica degli elementi che compongono una struttura nel momento in cui essa sia sollecitata da una forzante variabile nel tempo o transitoria. Tale argomento è stato affrontato sia dal punto di vista teorico, sottolineando tutti gli aspetti chiave come l'importanza della scelta del passo temporale per la soluzione delle equazioni differenziali, sia pratico, applicando tale tecnica alla struttura considerata nel Capitolo 7. Ciò che si è ottenuto è che tale analisi permette di ottenere i medesimi risultati dell'analisi SEA in caso di sollecitazione a regime e in più consente anche di studiare tutti i fenomeni transitori. Particolare rilievo è stata data anche alla tecnica suggerita da Iadevaia [59] che, noto lo Shock Response Spectrum (SRS) della forzante, permette di ricavare gli SRS degli elementi strutturali attraverso l'analisi SEA. Tale metodo risulta promettente e, per quanto riportato nel riferimento [59], accurato.

I lavori futuri legati alla presente trattazione sono:

- validazione dei risultati ottenuti dalle analisi attraverso metodi sperimentali;
- calcolo dell'incertezza associato all'energia dei sottosistemi;
- calcolo delle deformazioni e delle tensioni dei singoli elementi;
- calcolo della risposta del sottosistema considerando anche i sottosistemi “nel piano” e confronto con i relativi risultati;
- applicare il metodo che attraverso lo SRS della sollecitazione permette di determinare lo SRS sui singoli elementi strutturali.

Bibliografia:

- 1) Fahy F. J., James P. P., "A study of the kinetic energy impulse response as an indicator of the strength of coupling between sea subsystems", *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 190(3), 363-386
- 2) Totaro N., Guyader J. L., "SEA substructuring using cluster analysis: the MIR index", *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, 2006, 264-289
- 3) Guasch O., Aragonés A., "Finding the dominant energy transmission paths in the statistical energy analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, 2011, 2325-2338
- 4) Buessow R., Petersson B. A. T., "Path sensitivity and uncertainty propagation in SEA", *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, 2007, 479-489
- 5) Ji L., Mace B. R., "Statistical energy analysis modeling of complex structures as coupled sets of oscillators: ensemble and variance of energy", *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, 2008, 760-780
- 6) Guasch O., Aragonés A., Janer M., "A graph cut strategy for transmission path problems in statistical energy analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, 2012, 343-355
- 7) Guasch O., "A direct transmissibility formulation for experimental statistical energy analysis with no input power measurements", *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, 2011, 6223-6236
- 8) James P. P., Fahy F. J., "A technique for the assessment of strength of coupling between SEA subsystems: experiments with two coupled plates and two coupled rooms", *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 203(2), 265-282
- 9) Fahy F. J., "An alternative to the SEA coupling loss factor: rationale and method for experimental determination", *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 214(2), 261-267
- 10) Mace B. R., "The SEA of two coupled plates: an investigation into the effects of subsystem irregularity", *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 212(3), 395-415
- 11) Manik D. N., "A new method for determining coupling loss factors for SEA", *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 211(3), 521-526
- 12) Woodhouse J., "An introduction to statistical energy analysis of structural vibration", *Applied Acoustics* 14, 1981, 455-469

- 13) Wester E. C. N., Mace B. R., "Statistical energy analysis of two edge-coupled rectangular plates: ensemble averages", *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 193(4), 793-822
- 14) Maxit L., Guyader J. L., "Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and FEM modal information, Part 1: theory", *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 239(5), 907-930
- 15) Beshara M., Keane A. J., "Statistical energy analysis of multiple, non-conservatively coupled systems", *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 198(1), 95-122
- 16) Shankar K., Keane A. J., "Vibrational energy flow analysis using a substructure approach: the application of receptance theory to FEA and SEA", *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 201(4), 491-513
- 17) Johansson D., Connell P., "Statistical Energy Analysis software", Chalmers University of Technology, Goteborg, Master's thesis, 2010
- 18) Mace B. R., Ji L., "the statistical energy analysis of coupled sets of oscillators", *Proceedings of the Royal Society A*, 2007, 463, 1359-1377
- 19) Maxit L., Guyader J. L., "Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and FEM modal information, Part 2: numerical applications", *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 239(5), 931-948
- 20) Seçgin A., "Numerical determination of statistical energy analysis parameters of directly coupled composite plates using a modal-based approach", *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, 2013, 332, 361-377
- 21) Woodhouse J., "An approach to the theoretical background of statistical energy analysis applied to structural vibration", 1981
- 22) Yan H., Parrett A., Nack W., "Statistical energy analysis by finite elements for middle frequency vibration, *Finite Elements in Analysis and Design*, 2000, 35, 297-304
- 23) Lyon R. H., "Statistical energy analysis for designers. Part 1: basic theory", 1974
- 24) Lyon R. H., "Statistical energy analysis for designers. Part 2: the engineering application", 1974
- 25) Wilkinson J. D. P., "Modal densities of certain shallow structural elements", 1967
- 26) Hungar E. E., Koronaios N., Manning J. E., "Application of statistical energy analysis to vibrations of multi-panel structures", 1973

- 27) Malushte H. S., "Evaluation of Statistical energy analysis for prediction of breakout noise from air duct", University of Nebraska-Lincoln, 2013
- 28) Keane A. J., "Statistical energy analysis of engineering structures", Brunel University, 1988
- 29) Troclet B., "FEM/SEA hybrid method for predicting mid and high frequency structure-borne transmission", The Open Acoustic Journal, 2009, 2, 45-60
- 30) Yilmazel C., "Analysis of high frequency behavior of plate and beam structures by statistical energy analysis method", Middle East Technical University, 2004
- 31) Xie S. L., Zhang Y. H., "Identification of high frequency loads using Statistical Energy Analysis method", Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 35 291-306
- 32) Sheng M. P., Wang M. Q., "Statistical Energy Analysis for complicated coupled system and its application in engineering", Journal of Sound and Vibration, 2004, 274, 877-891
- 33) Hodges C., Woodhouse J., "Theories of noise and vibration transmission in complex structures", Rep. Prog. Phys., 1986, 49, 107-170
- 34) Davis R. F., "Statistical energy analysis response prediction methods for structural systems", 1979
- 35) Galbrun L., "Vibration transmission through plate/beam structures typical of lightweight buildings: applicability and limitations of fundamental theories", Applied Acoustics, Elsevier, 2010, 71, 587-596
- 36) Thite A. N., Mace B. R., "The effects of design modifications on the apparent coupling loss factors in SEA-like analysis", Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2010, 329, 5194-5208
- 37) Tso Y. K., Hansen C. H., "The transmission of vibration through a coupled periodic structure", Journal of Sound and Vibration, 1988, 215(1), 63-79
- 38) Dickow K. A., "Modal and SEA parameters of ribbed plates", Technical University of Denmark, Master's thesis, 2009
- 39) Ahmida K. M., Arruda J. R. F., "Estimation of the SEA coupling loss factors by means of spectral elements modeling", 2003
- 40) Cordioli J. A., "On the prediction of damping loss factor of fuselage panels with viscoelastic materials using periodic structure theory and Finite Element Method", 2010

- 41) Lyon R. H., DeJong R. G., "Theory and application of statistical energy analysis", Butterworth-Heinemann, 1995
- 42) Byam B. P., Radcliffe C. J., "Statistical energy analysis model and connectors for automotive vibration isolation mounts"
- 43) Fisher M., "Seminar: vibrations and structure-borne sound in civil engineering – theory and applications", 2006
- 44) Robinson M. K., "Prediction of sound and vibration response using Transient Statistical Energy Analysis", University of Liverpool, PhD Thesis, 2012
- 45) Guasch O., Garcia C., "Numerical local time stepping strategies for Transient Statistical Energy Analysis", 20th International Congress on Sound and Vibration, 2013
- 46) Boyong M., "Impact load identification of complex structure using Transient Statistical Energy Analysis method", 20th International Congress on Sound and Vibration, 2013
- 47) Fernandez J. P., "Vibroacoustic response of solar panels: case study", NASA-JPL, 1993
- 48) Ferebee R. C., "Using the Saturn V and Titan III vibroacoustic databanks for random vibration criteria development", NASA/TM-2009-215902, 2009
- 49) Cabell R., Allen A., " Loss factor estimation using the impulse response decay method on stiffened structure", Inter-Noise 2009, 2009
- 50) Grosveld F. W., Schiller N. H., Cabell R.H., "Statistical Energy Analysis and Energy Finite Element Analysis predictions for a floor-equipped composite cylinder", NASA-TM-2011-217171, 2011
- 51) Cabell R., "Vibration response models of a stiffened aluminum plate excited by shaker", Noise-Con 2008, 2008
- 52) Cotroni V., Langley R. S., Shorter P. J., "A statistical energy analysis subsystem formulation using finite element and periodic structure theory", Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2008, 318, 1077-1108
- 53) Mejdí A., Atalla N., "Dynamic and acoustic response of bidirectionally stiffened plates with eccentric stiffeners subject to airborne and structure-borne excitations", Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2010, 329, 4422-4439
- 54) Mejdí A., Atalla N., "Vibroacoustic analysis of laminated composite panels stiffened by complex laminated composite stiffeners", International Journal of Mechanical Sciences, Elsevier, 2012, 58, 13-26

- 55) Sui F. S., Ichchou M. N., Jezequel L., "Prediction of vibroacoustic energy using a discretized transient local energy approach and comparison with SEA" *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 251(1), 163-180
- 56) Gregory J. W., "Identification of Statistical Energy Analysis parameters from measured data", North Carolina State University, PhD thesis, 2002
- 57) Pinnington R. J., Lednik D., "Transient Statistical Energy Analysis of an impulsively excited two oscillator system", *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 189(2), 249-264
- 58) Pinnington R. J., Lednik D., "Transient energy flow between two coupled beams", *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 189(2), 265-287
- 59) Iadevaia M., "Using Statistical Energy Analysis for shock pulse predictions", *Proceedings of ISMA2002, Volume V*, 2002
- 60) Koizumi T., Tsujiuchi N., "Prediction of the vibration in buildings using Statistical Energy Analysis"
- 61) Heckl M., "Wave propagation on beam-plate systems", *The Journal of The Acoustical Society of America*, 33(5), 1961
- 62) Conlon S. C., Hambric S. A., "Predicting the vibroacoustic response of satellite equipment panels", *Acoustical Society of America*, 2003
- 63) Tavallaey S. S., "Wave propagation in sandwich structures", *Kungl Tekniska Hogskolan*, 2001
- 64) Borello G., "Pyroshock modeling using virtual SEA", *InterAC*
- 65) Mao Y, Li Y., Huang H., Wang J., "Fast simulation of pyroshock responses of a conical structure using Rotation-Superposition Method", *Applied Mathematics and Information Sciences*, 5(2), 2011, 187S-193S
- 66) Tratch J. Jr., "Vibration transmission through machinery foundation and ship bottom structure", *Massachusetts Institute of Technology, PhD Thesis*, 1985
- 67) Mace B. R., "Wave coherence, coupling power and statistical energy analysis", *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 199(3), 369-380
- 68) Fahy F. J., "Statistical Energy Analysis: a critical overview", *The Royal Society*, 1994
- 69) Hopkins C., "Experimental Statistical Energy Analysis of coupled plates with wave conversion at the junction", *Journal of Sound and Vibration, Elsevier*, 2009, 322, 155-166

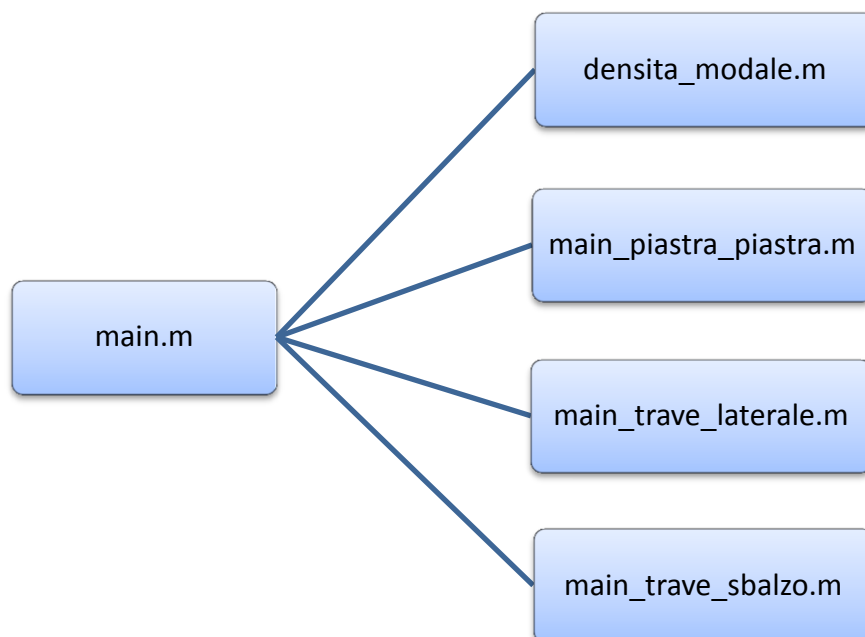
- 70) Langley R. S., Heron K. H., "Elastic wave transmission through plate/beam junctions", Journal of Sound and Vibration, 1990, 143(2), 241-253
- 71) Cremer L., Heckl M., Hungar E. E., "Structure-borne sound", second edition, Springer Verlag, 1972
- 72) Norton M. P., Karczub D. G., "Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers", second edition, Cambridge University Press, 2007
- 73) Graff K. F., "Wave motion in elastic solids", Dover Publications Inc., 1975
- 74) Lai M., Soom A., "Prediction of transient vibration envelopes using Statistical Energy Analysis techniques", Journal of Vibration and Acoustics, 1990, 112, 206-213

APPENDICE: Analisi del programma MATLAB.

Il programma implementato in MATLAB permette di studiare mediante l'analisi SEA il sistema che abbiamo descritto nel Capitolo 7. Lo scopo finale del programma è quello di ottenere le informazioni in termini di energia di tutti i sottosistemi al variare della frequenza. Una volta che abbiamo tale informazione possiamo poi ottenere gli andamenti dell'energia specifica in funzione della frequenza (espressa in J/g), un valore medio di energia considerando un intervallo definito dall'utente e una energia media specifica nel medesimo intervallo. Nella presente discussione l'intervallo è stato fissato in 100-5000 Hz. Sottolineiamo che è possibile modificare qualsiasi caratteristica dei singoli elementi che compongono il sottosistema in modo tale che sia possibile effettuare studi di sensibilità sui parametri e definire quindi una configurazione di ottimo.

Di seguito in questo paragrafo descriviamo il programma mediante l'utilizzo di diagrammi gerarchici che mettono in luce le varie function lo compongono mettendo in evidenza le grandezze in ingresso e gli output generati da ogni function.

main.m:



Come riportato in questo primo diagramma gerarchico il programma principale è main.m e al suo interno sono richiamate quattro differenti function: densita_modale.m, main_piastra_piastra.m, main_trave_laterale.m e main_trave_sbalzo.m.

In main.m l'utente specifica le caratteristiche del sistema complesso che vuole analizzare mediante l'analisi SEA. In input quindi sono richieste:

- Dimensione degli elementi. In particolare dimensioni del piano medio e spessore per le piastre, raggio della sezione e lunghezza per le travi;
- Caratteristiche dei materiali degli elementi in termini di modulo di Young, densità e coefficiente di Poisson;
- Smorzamento del materiale dell'elemento di base;
- Modulo di Young, smorzamento e spessore dell'eventuale materiale polimerico;
- Lunghezze delle giunzioni. Infatti non è detto che tutto un lato venga interessato dalla giunzione con un altro elemento, in altre parole la giunzione può anche essere parziale;
- Angoli tra le piastre che formano una giunzione.

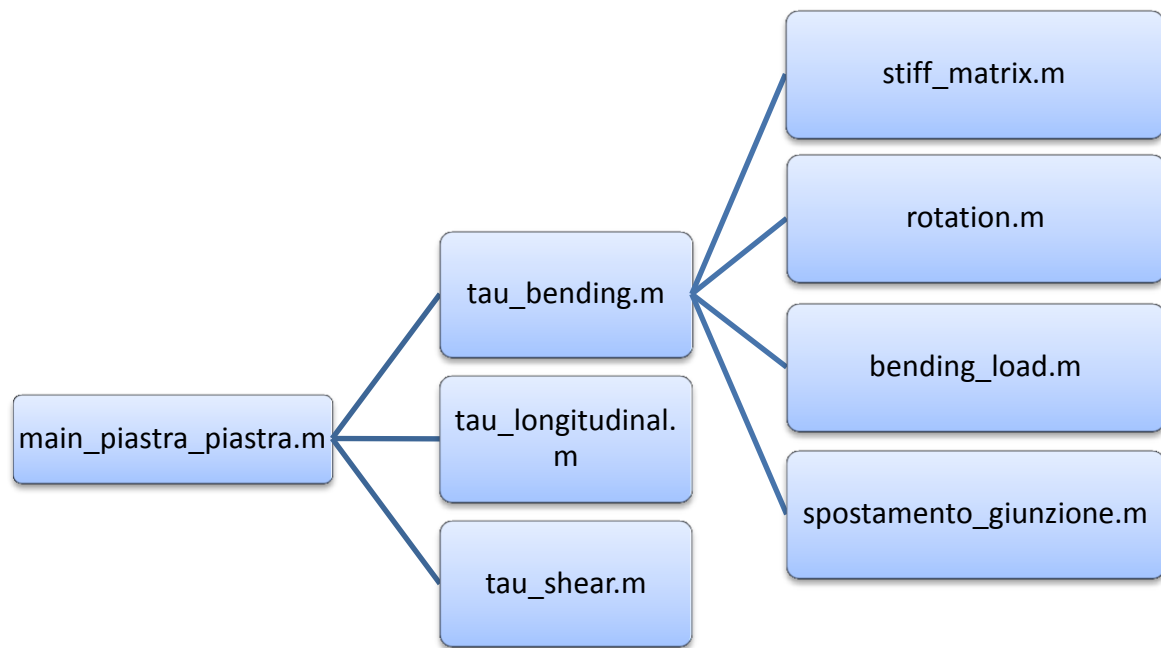
In uscita main.m fornisce i seguenti risultati per elemento:

- Energia in funzione della frequenza;
- Energia specifica in funzione della frequenza;
- Energia media in un determinato intervallo definito dall'utente;
- Energia specifica media in un determinato intervallo definito dall'utente.

densita_modale.m:

La function densita_modale.m ha in ingresso le caratteristiche degli elementi che compongono il sistema e calcola per ognuno di essi densità modale, separazione media in frequenza e Modal Overlap Factor. Nel caso quest'ultimo non sia tale da garantire la correttezza dell'analisi SEA tale fatto viene comunicato all'utente attraverso la Command Window da un messaggio di avviso.

main_piastra_piastra.m:



La function `main_piastra_piastra.m` permette di calcolare i coefficienti di perdita per accoppiamento per giunzioni tra piastre. Essa è implementata seguendo la teoria di Langley (Paragrafo 5.9) ed è in grado di gestire giunzioni fino a un massimo di quattro piastre, le quali possono essere disposte con qualsiasi angolo. All'interno di questa function ne vengono richiamate altre tre le quali calcolano i coefficienti di trasmissione, necessari per calcolare i CLF, e che si differenziano una dall'altra poiché considerano onde che incidono la giunzione differenti. Ad esempio dalla function `tau_bending.m` otteniamo tutti i coefficienti di trasmissione dal sottosistema flessionale della piastra considerata a tutti i sottosistemi che interagiscono con essa nella giunzione.

Le function `tau_bending.m`, `tau_longitudinal.m` e `tau_shear.m` sono simili tra di loro e si differenziano solo per il tipo di sottosistema di cui vogliamo conoscere i coefficienti di trasmissione, rispettivamente flessionale, longitudinale e di taglio. Queste function hanno la stessa struttura e richiamano le stesse function (nel diagramma gerarchico le abbiamo evidenziate solo per `tau_bending.m` per motivi di spazio). L'unica differenza è che quella flessionale ha come function `bending_load.m`, quella longitudinale ha `longitudinal_load.m` e quella di taglio ha `shear_load.m`. Ognuna di esse calcola i coefficienti di trasmissione

attraverso il metodo della matrice di rigidezza dinamica formulato da Langley [70] e descritto ampiamente nel Paragrafo 5.9.

Di seguito approfondiamo la function `tau_bending.m` ricordando che le altre due presentano esattamente lo stesso schema salvo le opportune modifiche. Fissata la piastra vogliamo conoscere i coefficienti di trasmissione dal suo sottosistema flessionale verso tutti i sottosistemi delle altre piastre più i sottosistemi longitudinale e di taglio della piastra stessa. Per tale motivo assumiamo che un'onda flessionale che si propaga sulla detta piastra incida la giunzione. Note le caratteristiche dell'onda incidente ricaviamo quelle delle onde trasmesse e riflesse poiché tramite la loro conoscenza possiamo ricavare la matrice di rigidezza dinamica di ogni piastra con la function `stiff_matrix.m`. Ottenute queste matrici si tratta di assemblarle e a tale fine utilizziamo la function `rotation.m`. A questo punto possiamo determinare lo spostamento imposto alla giunzione dall'onda incidente tramite `spostamento_giunzione.m`. Noto lo spostamento da esso possiamo ricavare le ampiezze delle onde flessionali, longitudinali e di taglio che si generano nelle piastre e le potenze a loro associate. Dal rapporto tra le potenze generate e la potenza incidente otteniamo i coefficienti di trasmissione per quel determinato angolo dell'onda incidente. Al variare di questo angolo però i coefficienti di trasmissione cambiano poiché si modifica il comportamento delle piastre che è espresso dalla matrice di rigidezza dinamica. Allora per determinare l'andamento di tali parametri all'interno di `tau_bending.m` mediamo rispetto all'angolo i coefficienti tramite il teorema del valore medio.

È importante sottolineare che siamo interessati a determinare tale valore medio perché il campo vibrazionale su una piastra sollecitata è diffuso.

Rimane da precisare la funzione della function `bending_load.m`: al variare del tipo di onda incidente (flessionale, longitudinale o di taglio) varia la sollecitazione imposta alla giunzione (si veda Paragrafo 5.9) che quindi viene calcolata da questa function.

`main_trave_laterale.m`:

Questa function permette di calcolare i coefficienti di perdita per accoppiamento per una giunzione tra una trave a sezione circolare e una piastra qualora la trave giaccia sul piano della piastra e le si vincoli ortogonalmente. In questo caso è stato utilizzato il metodo

delle impedenze per determinare il coefficiente di trasmissione poiché dalla letteratura non sono emersi altri metodi di calcolo e da questi abbiamo ricavato i CLF come spiegato nel Paragrafo 5.2 e nel Paragrafo 5.5.

`main_trave_sbalzo.m`:

Attraverso questa function calcoliamo i coefficienti di perdita per accoppiamento per una giunzione tra una trave vincolata perpendicolarmente al piano medio di una piastra. Per calcolare il CLF si determina prima il coefficiente di trasmissione mediante l'approccio delle impedenze e poi si utilizzano le formule riportate nel Paragrafo 5.2 e nel Paragrafo 5.5. Anche in questo caso è stata seguita questa strategia di calcolo in quanto dalla letteratura non sono emersi metodi alternativi.

Infine è stato implementato anche un programma MATLAB che fosse in grado di studiare la struttura del Capitolo 7 mediante l'analisi TSEA. La struttura di questo programma è del tutto analoga a quella dell'analisi SEA poiché la differenza tra i due metodi risiede nelle differenti equazioni di equilibrio della potenza come messo in evidenza nel Paragrafo 8.1. Perciò non si ripete di seguito una descrizione accurata di tale programma in quanto coincide con quanto appena spiegato.