Università degli studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea Triennale

MODELLI DI ENERGIA OSCURA

Relatore:
Dott.
Massimo Pietroni

Laureando:
Andrea Alberti

Anno Accademico 2012/2013

Indice

Introduzione

Alla luce delle misure compiute in ambito astrofisico–cosmologico si è osservato che l'espansione dell'universo sta accelerando. In questo elaborato iniziamo richiamando il *modello cosmologico* standard, per poi esaminare le principali osservazioni in suo supporto. Tema centrale per noi sarà lo studio dell'*energia oscura* a partire dai modelli teorici ipotizzati, per poi esaminare i vincoli imposti ai parametri presenti nei modelli affinché siano compatibili con un espansione accelerata dell'universo.

Importante strumento è fornito dalla misura di luminosità delle *supernovae* di tipo Ia (SNe Ia), che sono le candele standard più accurate per grandi distanze. Sotto opportune ipotesi che verranno discusse in seguito, si può risalire alla loro distanza misurando la luminosità apparente. Misurando poi lo spostamento verso il rosso (redshift) delle linee che caratterizzano lo spettro, si risale all'epoca cosmologica in cui è stata emessa la radiazione. Lo studio sistematico delle SNe Ia è dovuto a due progetti: *Supernova Cosmology Project* (SCP) e *High-Z Supernova Search Team*.

La misura sistematica di SNe Ia ha portato nel 2011 i tre fisici S. Perlmutter, B. Schmidt e A. Riess a vincere il premio Nobel per la Fisica, per aver provato l'accelerazione dell'espansione dell'universo[4, 5]. Useremo il set di dati *Union 2.1*, fornito da SCP che raccoglie misure di 580 SNe, per imporre dei vincoli sui parametri dei modelli proposti.

1 Richiami di cosmologia standard

In questo capitolo richiamiamo alcuni risultati già noti, che utilizzeremo in seguito. Innanzitutto presentiamo l'universo con cui lavoreremo, successivamente ricaveremo a partire dalla legge di Newton le equazioni di Friedmann che descrivono l'espansione dell'universo nelle diverse epoche cosmologiche. Introduciamo poi la distanza di luminosità e ne ricaveremo la dipendenza dal redshift.

1.1 Universo piatto

La scoperta della *Radiazione Cosmica di Fondo* (CMB) e della sua isotropia, unita all'osservazione di survey di galassie, indicano che su grandi scale superiori ai 100 Mpc l'universo è isotropo e omogeneo ed ha curvatura nulla; di seguito sottintenderemo sempre queste caratteristiche. Per un universo di questo tipo, la metrica valida è la metrica di *Fridmann–Lemaitre–Robertson–Walker*(FLRW)

$$ds^2 = c^2dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\phi^2) \right] \qquad . \tag{1}$$

Le coordinate r,θ e ϕ sono dette comoventi dato che la distanza tra due oggetti celesti è indipendente dall'espansione dell'universo. Nella formula precedente t rappresenta il tempo fisico; risulta utile definire due nuove coordinate come segue:

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} \quad , d\eta = \frac{dt}{a(t)} \tag{2}$$

e ponendo $c = 1$ troviamo

$$ds^2 = a(\eta) \left[d\eta^2 - d\chi^2 - r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\phi^2) \right] \qquad . \tag{3}$$

Nel caso di un universo piatto con $k = 0$ abbiamo $\chi = r$. Tuttavia la definizione di questa coordinata verrà usata più avanti nella sezione (2.3). Per quanto riguarda il tempo conforme η, è stato introdotto per ristabilire la simmetria tra coordinate temporali e spaziali che si incontra nello spazio di Minkowski con la metrica $\eta^{\mu\nu}$. Fissata la metrica FLWR la velocitá di allontanamento tra due galassie a distanza $dg = a(t)r$ dovuta all'espansione dell'universo è data dalla legge di Hubble:

$$v = \frac{d}{dt}(dg) = \frac{d\left(a(t)r\right)}{dt} = \frac{da}{dt}r = H(t)r \tag{4}$$

con $H(t)$ indipendente dalle coordinate spaziali. Questa legge è l'unica compatibile con un universo omogeneo e isotropo. Questo motivo, unito al fatto che in un universo con queste proprietà non esistono punti privilegiati ci dicono che la legge di Hubble è valida per ogni osservatore ed in ogni punto dell'universo su grandi scale. $H(t)$ viene chiamato parametro di Hubble, ed è definito come:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \tag{5}$$

dove non indichiamo la dipendenza dal tempo di a. Il metodo con cui si misura H_0, valore di $H(t)$ oggi si basa sul confronto di candele standard e nella misura della velocità di allontanamento che induce effetto doppler sulle righe che compongono lo spettro. Il parametro di Hubble misurato oggi vale $70 \pm 5Kms^{-1}Mpc^{-1}$.

1.2 Equazioni di Friedmann

Le equazioni di Friedmann governano la dinamica dei vari componenti dell'universo. Si deducono in maniera rigorosa risolvendo l'equazione di campo di Einstein con la metrica FLRW. Qui le ricaveremo a partire dall'equazione di Newton[6]. Durante il procedimento dovremo fare delle assunzioni non giustificate in una teoria non relativisticà, questo non deve preoccupare, in quanto è naturale che ciò accada perché le equazioni di Friedmann sono di natura relativistica.

Consideriamo un universo permeato da polvere non relativistica. Con questo termine intendiamo materia ordinaria con pressione trascurabile rispetto alla densità di energia. Fissiamo l'origine da cui misuriamo le distanze in un punto arbitrario dello spazio. Se le velocità delle particelle sono piccole rispetto alla velocità della luce, possiamo usare la meccanica classica.

Iniziamo ricavando la prima equazione di Friedmann. Consideriamo una sfera di raggio $R(t)$. La forza gravitazionale a cui è soggetta una galassia a distanza R dovuta alla materia presente all'interno della sfera di raggio $R(t)$, è la stessa se tutta la materia fosse concentrata al centro della sfera. L'energia totale è data da:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{R} \tag{6}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, m la massa della galassia a distanza R e M la massa totale all'interno della sfera di raggio R. Indicando con ρ la densità di massa dell'universo abbiamo:

$$M = \frac{4}{3}\pi G\rho \quad . \tag{7}$$

Sostituendo la (5) all'interno di (6) ricaviamo

$$\frac{2E}{mR^2} = H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho \qquad . \tag{8}$$

H e ρ sono costanti nell'universo, quindi il rapporto $\frac{2E}{mR^2}$ è uguale per tutte le galassie e visto che m ed R^2 sono positivi è definito anche il segno di E. A questo punto dobbiamo introdurre ipotesi ad hoc non previste in una teoria newtoniana. Sapendo che in relatività si verifica l'equivalenza tra massa ed energia, supponiamo qui che tutte le forme di energia diano un contributo alla gravità. Cosi facendo la densità presente in (8) va interpretata come densità di energia. Inoltre l'energia E è determinata dalla curvatura K dello spazio–tempo. Con queste assunzioni e sostituendo ad R il simbolo a l'equazione di Friedmann diventa:

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \qquad . \tag{9}$$

La seconda equazione di Friedmann rappresenta l'equazione di continuità per la conservazione dell'energia. Infatti, se il volume di cui consideriamo l'energia aumenta di un fattore dV, la pressione p compierà il lavoro pdV che andrà sottratto all'energia totale presente nel volume V

$$d\left(\rho\frac{4}{3}\pi a^3\right) = -pd\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \tag{10}$$

che implica esplicitando le variazioni

$$a\frac{d\rho}{dt} + 3(\rho + p)\dot{a} = 0 \qquad . \tag{11}$$

Prendendo la derivata rispetto al tempo, e inserendo la prima equazione di Friedmann ricaviamo infine:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)a \qquad . \tag{12}$$

L'equazione precedente impone una condizione su ρ e p, infatti se l'universo accelera la sua espansione deve essere

$$p < -\frac{1}{3}\rho \qquad , \tag{13}$$

vedremo più avanti che questa condizione impone dei vincoli nell'equazione di stato dell'energia oscura. Per risolvere queste equazioni e trovare $a(t)$ bisogna specificare per ogni costituente che contribuisce alla densità di energia l'equazione di stato, cioè la relazione tra pressione ed energia. Abbiamo già osservato che per la materia barionica abbiamo $p_m = 0$. Un altro contributo alla densità di energia è dato dalla radiazione elettromagnetica; applicando le leggi della meccanica statistica si ricava che per un gas di fotoni vale $p_\gamma = \frac{1}{3}\rho_\gamma$.

Un altro contributo viene dalla materia oscura. La sua introduzione è resa necessaria per spiegare la differenza nella stima della massa di ammassi di galassie effettuata con metodi diversi. Infatti se si usa la luminosità della galassie per stimarne la massa, al posto della dispersione delle velocità delle galassie, si ottengono risultati diversi, non compatibili con gli errori sperimentali. Per i nostri fini, ci interessa solo che l'equazione di stato della materia oscura è la stessa della materia ordinaria. Quindi per gli effetti gravitazionali materia oscura e materia barionica sono equivalenti, ma la la prima non interagisce tramite la radiazione elettromagnetica, mentre la seconda si; da qui il nome materia oscura.

Per quanto riguarda l'energia oscura, l'equazione di stato dipende dal modello che si utilizza. Affronteremo più avanti questo tema. L'eq. (8) che ricordiamo corrisponde alla conservazione dell'energia risulta valida per ogni termine della densità di energia, anche considerato singolarmente. In questo modo possiamo ricavare l'andamento di ρ_m e ρ_γ in funzione di a. Per la materia ordinaria abbiamo:

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_m a^3\right) = 0 \tag{14}$$

che implica

$$\rho_m \propto \frac{1}{a^3} \qquad . \tag{15}$$

Per la radiazione elettromagnetica usando l'equazione invece abbiamo

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_\gamma a^3\right) = -\frac{1}{3}\rho_\gamma \frac{d}{dt}a^3 \qquad , \tag{16}$$

integrandola otteniamo l'andamento:

$$\rho_\gamma \propto \frac{1}{a^4} \qquad . \tag{17}$$

Vediamo che materia e radiazione hanno dipendenze diverse dal fattore di scala. Il contributo alla densità di energia totale ρ_T dovuto alla radiazione elettromagnetica era molto importante per piccoli valori di a. Subito dopo il Big Bang ρ_γ era dominante rispetto a ρ_m. Successivamente si entra in un'epoca in cui ρ_γ diventa rapidamente trascurabile al contributo totale ρ_T. Al momento attuale siamo in un epoca in cui il contributo di ρ_m e l'energia oscura sono dello stesso ordine grandezza, con una preponderanza di energia oscura, come vedremo in seguito.

1.3 Distanza di luminosità

Definiamo il parametro di redshift z :

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \qquad , \tag{18}$$

dove con λ_{em} e λ_{obs} intendiamo rispettivamente lunghezza d'onda emessa e osservata da un oggetto celeste generico. Questa differenza di lunghezze d'onda si spiega considerando che l'universo non è statico. Infatti per la linea di universo per un fotone vale $ds = 0$, quindi:

$$d\eta^2 = d\chi^2 \tag{19}$$

Consideriamo una sorgente di fotoni con coordinate χ_{em} e η_{em}, ed un segnale da lei emesso di durata $\Delta\eta$. Un osservatore posto a $\chi_{obs} = 0$ riceve il segnale al tempo $\eta_{obs} = \eta_{em} + \chi_{em}$. La durata $\Delta\eta$ del segnale è la stessa per osservatore ed emettitore, ma il tempo fisico misurato è diverso. Ricordando la definizione di η troviamo:

$$\Delta t_{em} = a(\eta_{em})\Delta\eta \quad , \Delta t_{obs} = a(\eta_{obs})\Delta\eta \tag{20}$$

Prendendo come Δt un periodo dell'onda, ricaviamo:

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{a_0}{a(t_{em})} \qquad , \tag{21}$$

inserendo questa nella (18) troviamo

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t_{em})} \qquad . \tag{22}$$

Definiamo la distanza di luminosità:

$$d_l(z) = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \qquad , \tag{23}$$

F rappresenta il flusso di energia per unità di tempo e di superficie ed L la luminosità. Esprimendo F in funzione di z troviamo

$$F = \frac{L}{4\pi {a_0}^2 {\chi(z)}^2 (1+z)^2} \tag{24}$$

Per ricavare χ in funzione di z usiamo ancora che per i fotoni vale $d\chi = d\eta$. Possiamo quindi scrivere

$$d\chi = \frac{dt}{a} \qquad , \tag{25}$$

differenziando l'espressione (22) si ricava $dz = -(1+z)H(t)dt$ e sostituendo $a(t) = \frac{a_0}{(1+z)}$ ricaviamo :

$$\chi(z) = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})} \qquad . \tag{26}$$

Inserendo le formule (26) e (24) nella (23) otteniamo:

$$d_l(z) = (1+z) \int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})} \qquad . \tag{27}$$

Si ricava $H(z)$ dall'equazione (9), una volta nota $\rho_T(z)$; nella sezione precedente abbiamo ricavato ρ_m e ρ_γ in funzione di a, che può essere immediatamente espresso in funzione di z usando (22). Con solo questi due termini non si riesce ad interpolare i dati ricavati dalle SNe, per questo motivo si introduce l'energia oscura che avrà una sua densità di energia che indicheremo con ρ_Λ, funzione del fattore di scala.

Poiché non si è ancora osservata in laboratorio l'energia oscura e probabilmente non lo sarà mai, le uniche prove della sua esistenza sono fornite da misure indirette. Anche per ρ_Λ vale l'equazione (10), quindi il suo andamento in funzione del fattore di scala è determinato dall'equazione di stato, che viene fissata da noi quando imponiamo il modello teorico per l'energia oscura.

2 Modelli di energia oscura

Presentiamo ora tre modelli per l'energia oscura. Il primo fu proposto da Einstein per un motivo diverso, e solo in seguito fu ripreso ed interpretato come energia oscura. Stiamo parlando della famosa costante cosmologica. Passiamo poi ad un modello in cui l'energia oscura viene trattata come un fluido con un'equazione di stato arbitraria. Infine presentiamo la più recente teoria, introdotta a partire da fine anni '90 che considera l'energia oscura come un campo scalare con un'equazione di stato dinamica.

2.1 Costante cosmologica

Nel 1917 Einstein propose il primo modello cosmologico relativistico, che aveva il suo fondamento teorico nella relatività generale. L'equazione fondamentale per questa teoria è l'equazione di campo di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \qquad , \tag{28}$$

dove con G indichiamo la costante di gravitazione universale, $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia–impulso della teoria e infine $G_{\mu\nu}$ rappresenta il tensore di Einstein. Einstein successivamente riformulò l'equazione di campo aggiungendo un termine:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{29}$$

Einstein credeva che l'universo dovesse essere statico, per cui se l'equazione fosse stata semplicemente la (28) lo spazio sarebbe inevitabilmente collassato a causa dell'interazione gravitazionale, che risulta sempre attrattiva. Purtroppo questo modello non risulta stabile rispetto ad una piccola perturbazione. Inoltre nel 1929 Hubble scopri la legge che porta il suo nome, qui rappresentata dall'equazione (4); quest'ultima mostra che l'universo non è statico, ipotesi su cui si basava Einstein per introdurre la costante cosmologica nell'equazione di campo. L'ipotesi fu infine scartata dallo stesso Einstein.

Alla luce della scoperta dell'accelerazione dell'espansione dell'universo, è stata riconsiderata l'ipotesi di Einstein ma con un significato diverso. Se interpretiamo la costante cosmologica come una nuova forma di energia con densità costante nell'universo, quest'ultima potrebbe giustificare l'accelerazione dell'espansione dell'universo. Richiamiamo l'equazione di Friedmann (9), che qui abbiamo dedotto a partire dall'equazione di Newton. In una deduzione rigorosa delle equazione di Friedmann, come soluzioni delle equazioni di campo di Einstein con la metrica FLRW, la (9) rappresenta la componente 0–0 dell'equazione (28). Scrivendo la componente 0–0 della (29) otteniamo

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \Lambda \qquad , \tag{30}$$

ed esprimendo Λ in termini di un'altra costante ρ_Λ nel modo seguente:

$$\Lambda = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3} \tag{31}$$

l'equazione (29) diventa :

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G\left(\rho + \rho_\Lambda\right) \qquad . \tag{32}$$

La densità ρ presente nella formula precedente sarebbe somma di due termini : il primo dovuto alla materia (barionica e oscura) che abbiamo indicato con ρ_m e un secondo che teneva in considerazione l'energia elettromagnetica ρ_γ. Possiamo in buon approssimazione trascurare il contributo di ρ_γ. Infatti essa è trascurabile in quest'epoca cosmologica; se confrontiamo la formula (15) con la (17) vediamo che per grandi fattori di scala la seconda è trascurabile rispetto alla prima. Situazione invertita rispetto alle prime fasi di vita dell'universo, in cui la maggior parte dell'energia era sotto forma di radiazione elettromagnetica.

In questa modo possiamo riscrivere la (30) inserendo la dipendenza da a di ρ_m:

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G\left(\rho_m^0 a^{-3} + \rho_\Lambda\right) \qquad . \tag{33}$$

Calcoliamo ora l'espressione per $d_l(z)$ usando la (27) con l'equazione precedente per H:

$$d_l(z) = (1+z)\left(\frac{8}{3}\pi G\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{\sqrt{\rho_m^0 a(\bar{z})^{-3} + \rho_\Lambda^0}} \qquad . \tag{34}$$

Raccogliendo i termini costanti al denominatore fuori dall'integrale troviamo

$$d_l(z) = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{\sqrt{\Omega_m^0 a(\bar{z})^{-3} + \Omega_\Lambda^0}} \qquad . \tag{35}$$

Abbiamo definito i due nuovi parametri

$$\Omega_m^0 = \frac{\rho_m^0 8\pi G}{3H_0^2} \quad , \Omega_\Lambda^0 = \frac{\rho_\Lambda^0 8\pi G}{3H_0^2} \qquad . \tag{36}$$

Per come sono definiti, variano entrambi tra 0 e 1 e rappresentano rispettivamente la frazione di materia ed energia oscura, nella densità di energia totale. Poiché trascuriamo la densità di energia elettromagnetica devono soddisfare il vincolo

$$\Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 = 1 \qquad . \tag{37}$$

Questo è significativo perchè adesso il nostro modello dipende da un solo parametro invece che da due. Useremo l'equazione (35) per interpolare i dati provenienti dalle Sne Ia e calcolare i vincoli sul parametro Ω_m^0. Usiamo adesso l'equazione (22) per esprimere il fattore di scala a in funzione di z e troviamo :

$$d_l(z) = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{\sqrt{\Omega_m^0 (1+\bar{z})^3 + (1-\Omega_m^0)}} \qquad . \tag{38}$$

2.2 Equazione di stato arbitraria

Questo modello rappresenta la naturale evoluzione di un modello con una costante cosmologica. Infatti in questo modello si ipotizza che l'energia oscura abbia una densità ρ_Λ e che sia caratterizzata da un equazione dall'equazione di stato seguente:

$$p_\Lambda = w\rho_\Lambda \qquad . \tag{39}$$

Se fissiamo $w = -1$ ritroviamo il caso discusso nella sezione precedente. Per mostrare questo applichiamo l'equazione (10) usando l'equazione di stato (39) ponendo $w = -1$ Otteniamo così:

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_\Lambda a^3\right) = \rho_\Lambda \frac{da^3}{dt} \qquad , \tag{40}$$

sviluppando semplicemente l'espressione troviamo

$$\frac{d\rho_\Lambda}{dt} a^3 = 0 \tag{41}$$

che implica $\rho_\Lambda = cost$. Vogliamo adesso ricavare l'andamento di $\rho_\Lambda = \rho_\Lambda(a)$. Per fare questo eseguiamo un calcolo analogo al precedente lasciando però ora w generico all'interno dell'equazione di Friedmann. Il risultato trovato è :

$$\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0 a^{-3(w+1)} \qquad . \tag{42}$$

Un primo vincolo sul parametro w viene dalla teoria. Infatti inserendo nell'equazione (12) che lega accelerazione $\ddot{a}$ ad ρ_T e p_T le equazioni di stato per ρ_m e ρ_Λ troviamo

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G \left(\rho_m^0 a^{-3} + (1+3w)\rho_\Lambda^0 a^{-3(w+1)}\right) \qquad . \tag{43}$$

Se l'universo si sta espandendo, significa che $\ddot{a}$ è maggiore di 0. Poiché le costanti ρ_m^0 e ρ_Λ^0 sono positive per ipotesi, e a assume valori nel semiasse positivo della retta reale significa che $(1+3w)$ deve essere necessariamente negativo. Quindi se e solo se

$$w \leq -\frac{1}{3} \qquad . \tag{44}$$

Possiamo generalizzare l'equazione (38); i passaggi algebrici sono uguali a quelli svolti nella sezione precedente, riportiamo qui il risultato:

$$d_l(z) = \frac{1+z}{H_0}\int_0^z \frac{d\bar{z}}{\sqrt{\Omega_m^0(1+\bar{z})^3 + (1-\Omega_m^0)(1+\bar{z})^{3(w+1)}}} \qquad . \tag{45}$$

Il nostro modello dipende ora da due parametri: w e Ω_m^0.

2.3 Campo scalare

Per ricavare l'espressione per la densità di energia e per la pressione dobbiamo ricavarci il tensore $T^{\mu\nu}$ della teoria. Iniziamo con lo specificare la lagrangiana del nostro campo, lasciando per ora il potenziale non specificato:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) \qquad . \tag{46}$$

Le equazioni del moto si trovano imponendo la stazionarietà del funzionale d'azione definito nel modo seguente:

$$I = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} \qquad , \tag{47}$$

con g che rappresenta la traccia del tensore metrico $g^{\mu\nu}$. La densità di energia è data dalla componente 0–0 del tensore energia–impulso della teoria:

$$\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{48}$$

che risulta essere

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \qquad . \tag{49}$$

La pressione la ricaviamo dalle componenti spaziali del tensore energia–impulso T^{ij}, con l'ipotesi aggiuntiva che il sistema sia spazialmente isotropo, otteniamo:

$$p_\Lambda = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \qquad , \tag{50}$$

il parametro w sarà quindi dato da:

$$w = \frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \tag{51}$$

Vediamo qui esplicitamente che w non è statico, ma evolve nel tempo. Possiamo sfruttare la conservazione della componente temporale del tensore energia–impulso, che corrisponde all'equazione di continuità per l'energia $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$. Inserendo le espressioni ricavate prima per ρ_Λ e p_Λ troviamo:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \tag{52}$$

dove il primo indica la derivata rispetto a ϕ. Riscriviamo ora le due equazioni di Friedmann (9) e (12) con ρ_Λ data da (49) più l'equazione (52):

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \\ 6{M_p}^2H^2 = 2\rho_m + \dot{\phi}^2 + 2V(\phi) \\ -2{M_p}^2\dot{H} = \dot{\phi}^2 + \rho_m \end{cases} \tag{53}$$

dove abbiamo definito la nuova costante ${M_p}^2 = (8\pi G)^{-1}$. A questo punto per proseguire bisogna esplicitare il potenziale $V(\phi)$ che si considera. In letteratura si trovano molti esempi di potenziali con proprietà interessanti ai fini della cosmologia, anche per spiegare l'espansione esponenziale dell'universo dopo il Big Bang (inflazione); riportiamo qui due esempi significativi.

Potenziale esponenziale

Il potenziale considerato in questa sezione è

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi} \qquad , \tag{54}$$

il sistema (53) diventa quindi :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - V_0\lambda e^{-\lambda\phi} = 0 \\ 6{M_p}^2H^2 = 2\rho_m + \dot{\phi}^2 + 2V_0 e^{-\lambda\phi} \\ -2{M_p}^2\dot{H} = \dot{\phi}^2 + \rho_m \qquad . \end{cases} \tag{55}$$

Supponendo che nell'universo che consideriamo ora ci siano due componenti: il campo scalare e un fluido con l'equazione di stato seguente:

$$p_\gamma = (\gamma - 1)\rho_\gamma \tag{56}$$

Con $0 < \gamma < 2$ ($\gamma = 1$ nel caso della materia ordinaria). Si può mostrare[3] che il sistema ha un comportamento asintotico diverso per grandi valori del fattore di scala al variare del rapporto tra le costanti λ e γ che intervengono nel modello. In entrambi i casi vi è un attrattore, cioè una soluzione con la particolare priopriertà che se le condizioni iniziali variano entro certi limiti, l'andamento di ρ_γ risulta lo stesso. Ciò che cambia è il comportamento dell'attrattore: se $\lambda^2 > 3\gamma$ il contributo di ρ_γ diventa dominante rispetto a ρ_m. Per $\lambda^2 < 3\gamma$ il sistema tende ad una configurazione in cui $\frac{\rho_\phi}{\rho_m} \sim cost.$

Potenziale a potenza inversa

Un'altro potenziale che presenta buoni risultati è

$$V(\phi) = V_0 \left(\frac{M_p}{\phi}\right)^\alpha \qquad . \tag{57}$$

Il sistema di equazioni (53) diventa quindi:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - V_0 \alpha {M_p}^3 \left(\frac{M_p}{\phi}\right)^{\alpha-3} \\ 6{M_p}^2 H^2 = 2\rho_m + \dot{\phi}^2 + 2V_0 \left(\frac{M_p}{\phi}\right)^{\alpha} \\ -2{M_p}^2 \dot{H} = \dot{\phi}^2 + \rho_m \quad . \end{cases} \tag{58}$$

Se consideriamo la situazione con $\alpha > 0$[8], si trova che ρ_ϕ scala più lentamente di ρ_m, e quindi si trova un equazione di stato per l'energia oscura con parametro $w \neq -1$, ma che può portare ugualmente a spiegare l'accelerazione dell'espansione dell'universo, purché rispetti il vincolo dell'equazione (44)

3 Le supernovae di tipo Ia

In questo capitolo descriviamo le SNe Ia, cosa sono e i problemi che si incontrano nel determinare lo spettro di questi oggetti celesti; infatti rappresentano le migliori candele standard per grandi distanze e nella sezione successiva useremo i dati provenienti da queste stelle per porre dei vincoli sui parametri che intervengono nei modelli di energia oscura.

3.1 Classificazione delle supernovae

Le supernovae sono generate da un esplosione stellare con un intensa emissione di radiazione elettromagnetica. La classificazione delle supernovae viene effettuata sfruttando le differenze nello spettro di emissione e vengono suddivise in due grandi famiglie: supernovae di tipo I e tipo II. Nelle supernovae di tipo II vi è la presenza caratteristica delle linee di emissione dell'idrogeno, mentre nelle famiglia I non sono presenti linee dell'idrogeno. Vi è una suddivisione in sotto categorie all'interno dei due gruppi; di seguito consideriamo solo supernovae di tipo I, che è la categoria di nostro interesse.

All'interno del gruppo I si contraddistinguono tre sotto categorie: Ia, Ib e Ic. Le supernovae di tipo Ia presentano nello spettro la presenza caratteristica delle linee di assorbimento del silicio (caratteristico è il doppietto a $\lambda_1 = 643.7 \quad nm$ e $\lambda_2 = 637.1 \quad nm$). Il gruppo Ib oltre a non avere le linee caratteristiche del silicio, ha all'interno dello spettro linee caratteristiche dell'elio, proprietà che non presenta la famiglia Ic.

3.2 SNe Ia: origine e curva caratteristica

Presentiamo ora il meccanismo di formazione con cui ha origine una supernova di tipo Ia. Il modello più accreditato ipotizza che le SNe Ia abbiano origine da sistemi binari di stelle in rotazione, una delle quali più massiva. Ad un certo punto della naturale evoluzione delle due stelle, la più massiva diventa una nana bianca, accrescendo la sua massa sottraendo materiale alla stella secondaria. Raggiunto un valore limite della massa, pari a 1.4 volte la massa di Chandrasekhar si innescano reazioni termonucleari all'interno della stella che ne causano l'esplosione.

Analizziamo ora la curva di luminosità delle SNe Ia. Esse sono delle candele standard, cioè oggetti di cui si conosce la luminosità assoluta, e quindi misurando la luminosità apparente si risale alla distanza di questi oggetti. In realtà il picco di luminosità di diverse SNe Ia con lo stesso redshift z può essere diverso in misura tale da impedirne l'utilizzo come candele standard. Fortunatamente, si è riscontrata una correlazione tra luminosità assoluta delle supernovae e durata temporale del periodo in cui sono osservabili. Grazie a questa caratteristica, si analizzano le curve di luminosità delle supernovae come una famiglia di curve ad un parametro, e le si normalizza correlando il massimo di luminosià con la durata dell'evento. In questa maniera si ottiene una relazione soddisfacente tra luminosità apparente

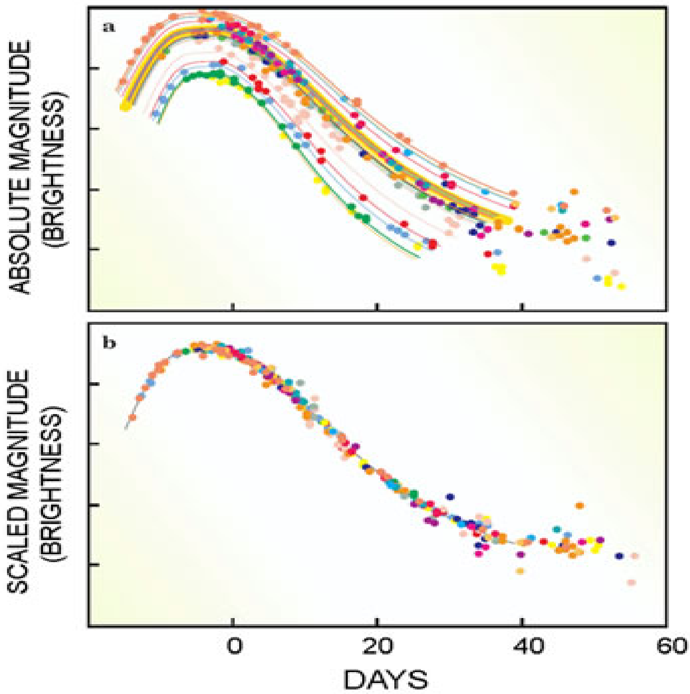

Figura 1: Spettri di diverse superonvae prima e dopo la normalizzazione

e redshift. In realtà non tutte le supernovae sono uguali. Gli spettri di diverse supernovae possono avere picchi non previsti. Alcune differenze sono dovute alla presenza di materia tra l'osservatore e la supernova, ma non si spiegano tutte le differenze con questa ipotesi. Ad esempio un fattore intrinseco che causa differenze potrebbe essere il diverso rapporto tra le quantità di ossigeno e silicio all'interno della nana bianca prima dell'esplosione.

In conclusione visto che il processo fisico che da origine alle supernovae Ia non è ancora compreso completamente vi sono caratteristiche degli spettri e sopratutto differenze in essi non ancora chiare. Nonostante questo le misure di redshift e distanza in funzione usando la luminosità permettono di utilizzare le SNe Ia come candele standard in quanto la correlazione tra picco di luminosità e durata dell'evento mostra notevole regolarità e può quindi essere parametrizzata in modo affidabile, consentendo di ricalibrare le supernovae in modo da renderle candele standard utilizzabili per misure cosmologiche.

4 Analisi dei dati e vincoli sui parametri cosmologici

In questa sezione come prima cosa descriviamo il set di dati che useremo. Passeremo poi ad interpolare i dati con i primi due modelli sperimentali. Per fare un'inferenza statistica sui parametro w e Ω_m calcoleremo il χ^2 marginalizzato sulla costante di Hubble.

4.1 Il set Union 2.1

Il padre del progetto è S. Perlumutter, che con la collaborazione di altri fisici provenienti da diversi paesi, hanno dato vita presso il *Lawrence Berkeley National Laboratory* al set Union 2.1. Le pubblicazioni che hanno portato S. Perlmutter, B. Schmidt e A. Riess a vincere il premio Nobel per la Fisica risalgono al 1998–1999 e utilizzavano rispettivamente i dati di 10[4] e 42[5] Sne Ia. Al momento le SNe Ia di cui si è osservato lo spettro sono 833, ma per i problemi a cui abbiamo accennato nella sezione 3, di queste solo 580 hanno spettri con caratteristiche uniformi.

Fattore non di secondaria importanza, riguarda la disomogeneità dei dati sperimentali. Infatti le SNe Ia sono state osservate da 19 telescopi diversi, che quindi presentano caratteristiche diverse, anche dovute alla loro collocazione (sulla terra o nello spazio). I dati resi disponibili da SCP[1] forniscono per ogni SNe Ia tre dati: il redshift, il modulo di distanza, legata alla luminosità apparente e infine l'errore sulla magnitudine apparente. All'interno del set Union 2.1 troviamo SNe Ia con redshift compreso tra $z = 0.015$ e $z = 1.414$.

4.2 Analisi dei modelli

Riportiamo ora le formule (38) e (45) che esprimono la distanza di luminosità in funzione di z nel caso di un modello con una costante cosmologica, e nel caso di un fluido con equazione di stato arbitraria:

$$d_l(z) = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{\sqrt{\Omega_m^0(1+\bar{z})^3 + (1-\Omega_m^0)}} \tag{59}$$

nel primo caso e

$$d_l(z) = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{\sqrt{\Omega_m^0(1+\bar{z})^3 + (1-\Omega_m^0)(1+\bar{z})^{3(w+1)}}} \tag{60}$$

nel secondo. Gli integrali nelle formule (59) e (60) non sono analiticamente risolubili. Visto che andavano calcolati per tutti i dati forniti da Union 2.1, abbiamo usato un processo iterativo. Il metodo implementato per calcolare gli integrali è stato il metodo di Cavallieri–Simpson. Questo metodo ha una precisione che va come $\sim h^4$ dove h rappresenta la larghezza dell'intervallo con cui si discretezza l'intervallo $[0; z]$. La precisione del metodo numerico non risulta comunque un problema, visto che le funzioni da integrare sono comunque lisce e prive di picchi.

Una volta calcolato $d_l(z)$, per metterlo in relazione con il modulo di distanza fornito da SCP abbiamo usato la seguente formula:

$$m(z) = 5 \log_{10}\left(\frac{d_l(z)}{10pc}\right) \quad . \tag{61}$$

Abbiamo poi fatto variare i parametri che intervengono nei modelli, e per ogni valore di questi ultimi abbiamo calcolato il χ^2, confrontandolo poi con i valori tabulati in letteratura per un sistema con 580 gradi di libertà. Al posto del χ^2 abbiamo utilizzato il χ^2 marginalizzato [2]. Partendo dalla definizione del χ^2, includendo in essa un parametro ξ, che rappresenta un offset del modulo di distanza delle SNe Ia:

$$\chi'^2_{SNeIa} = \sum_{i=1}^{580} \frac{[m_i - m(z_i) + \xi]^2}{\sigma_i^2} \qquad ; \tag{62}$$

i rappresenta l'indice che individua la supernova che consideriamo. Definendo poi la funzione di verosimiglianza:

$$L'_{SNeIa} = e^{-\frac{\chi'^2_{SNeIa}}{2}} \qquad , \tag{63}$$

integrando L'_{SNeIa} sul parametro ξ otteniamo la nuova funzione di verosimiglianza marginalizzata

$$L_{SNeIa} = \int d\xi L'_{SNeIa} \tag{64}$$

che ci permette di definire il nuovo χ^2 marginalizzato

$$\chi^2_{SNeIa} = S_2 - \frac{S_1^2}{S_0} \tag{65}$$

dove abbiamo definito le quantità

$$S_n = \sum_{i=1}^{580} \frac{[m_i - m(z_i)]^2}{\sigma_i^2} \qquad . \tag{66}$$

Osservando le formule (59) e (60) vediamo che $\log_{10}(H_0)$ ha lo stesso andamento di ξ, quindi stiamo effettivamente marginalizzando su H_0 che non viene quindi determinata dalla nostra procedura, incentrata sui parametri dell'energia oscura. Ricordiamo però che le misure più accurate di H_0 disponibili oggi, si basano anch'esse sullo studio di Sne Ia, in particolare su quelle a basso redshift.

Costante cosmologica

In questo caso la formula di nostro interesse è la (59). Riportiamo in figura 2 il grafico con il χ^2 in ordinata e in ascissa il valore del parametro Ω_m. Il valore che minimizza il χ^2 è stato ottenuto per $\Omega_m = 0.28$; l'intervallo con il 95% di confidenza si è compreso tra i valori $[0.15, 0.435]$

Fluido con equazione di stato arbitraria

Qui la formula utilizzata è stata la (59); in questa situazione vi sono due parametri, non riportiamo quindi il grafico con il χ^2 in funzione dei parametri in quanto di difficile comprensione. In figura 3 è riportato il grafico con gli intervalli di confidenza al variare di w e Ω_m. Il valore minimo del χ^2 è stato raggiunto per $\Omega_m = 0.28$ e $w = -1$. La figura 4 rappresenta un'immagine tratta da SCP[1], che mostra l'interpolazione dei dati delle SNe Ia; è interessante osservare le diverse barre di errore, molto diverse tra le varie supernovae e tra i diversi progetti che le hanno rilevate.

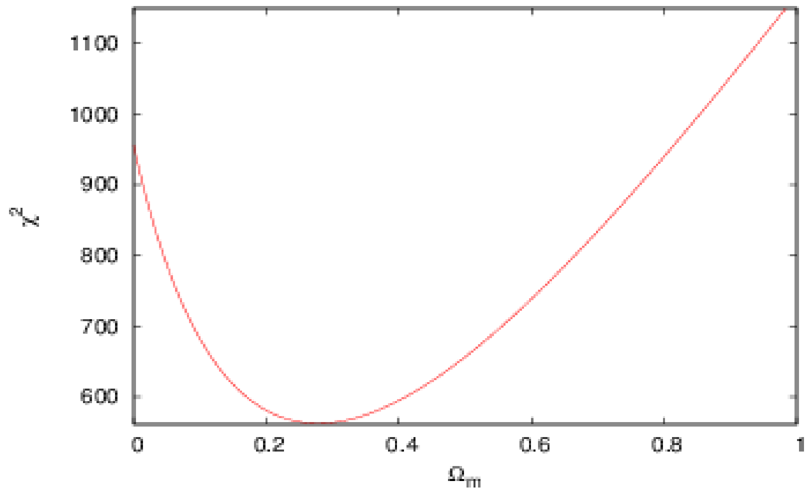

Figura 2: χ^2 in funzione di Ω_m; il sistema ha 579 gradi di libertà.

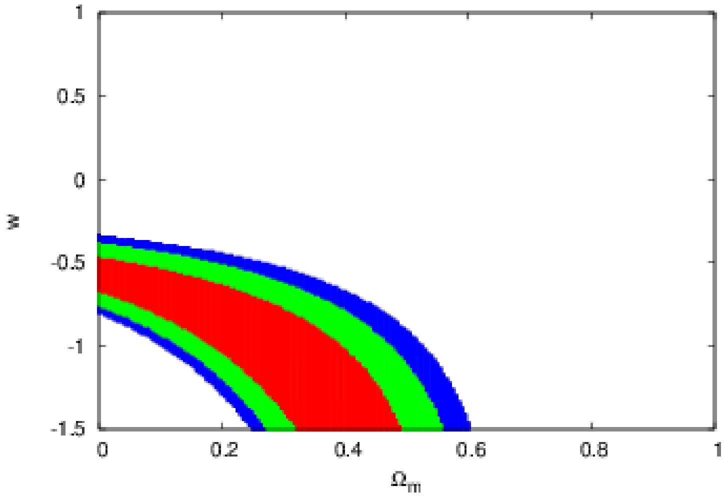

Figura 3: In blu l'intervallo con il 99.7% di confidenza, in verde il livello di confidenza è del 95.5% e in rosso il livello di confidenza è del 68.3%

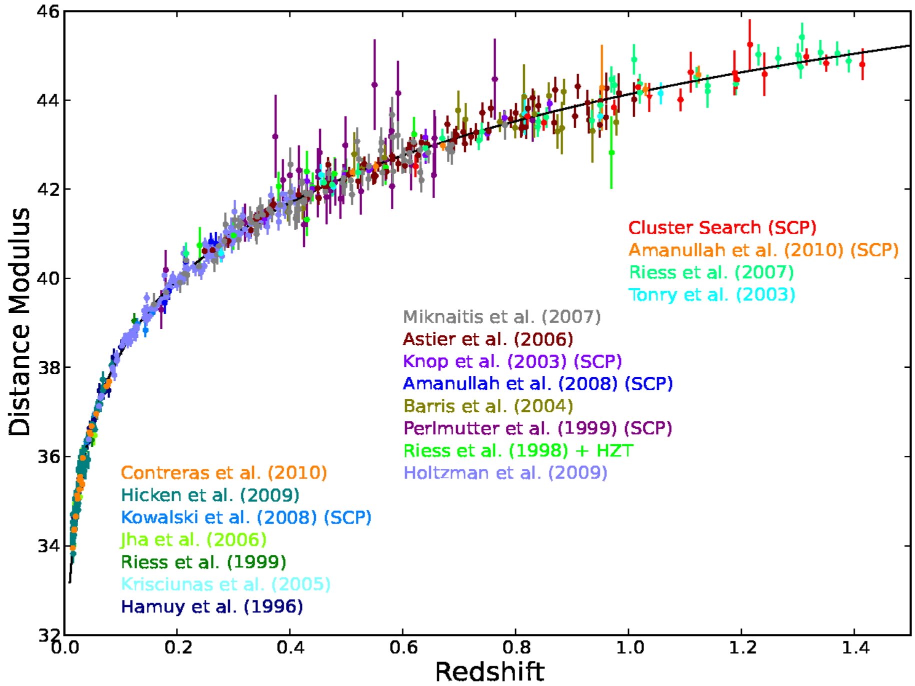

Figura 4: Modulo di distanza in funzione del redshift, sono anche indicati i vari progetti che hanno portato alla scoperta delle relative supernovae

5 Conclusioni

Dai risultati presentati nella sezione precedente, vediamo che entrambi i modelli analizzati sono perfettamente compatibili per spiegare un universo che presenta un espansione accelerata. Si possono introdurre altri vincoli ai parametri w e Ω_m usando i dati raccolti sfruttando altri due fenomeni fisici: l'oscillazione acustica barionica e le anisotropie nella radiazione cosmica di fondo. Con questa strategia si restringono gli intervalli di confidenza, ma non si riesce ancora a discernere tra i diversi modelli.

Le teorie con un campo scalare prevedono generalmente un'equazione di stato dipendente dal tempo che, se osservata, sarebbe una prova diretta dell'esistenza di una nuova dinamica. I dati attuali però non danno alcuna indicazione di una variazione del parametro w. Sarebbe auspicabile per il futuro trovare nuove supernovae a redshift più elevati in maniera da aumentare il campione statistico. Riportiamo in figura 5 gli intervalli di confidenza includendo anche le altre osservazioni[1]

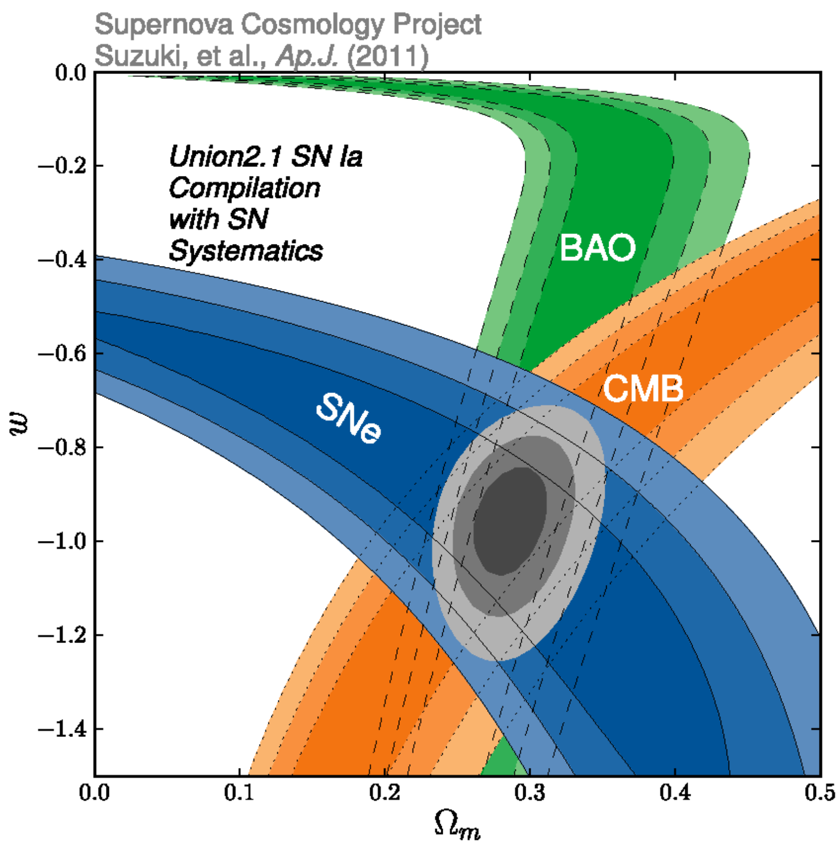

Figura 5: Intervalli di confidenza considerando anche l'oscillazione acustica barionica e la radiazione cosmica di fondo

Elenco delle figure

Riferimenti bibliografici

[1] Supernova cosmology project. http://supernova.lbl.gov/Union/, 2011.

[2] M.Baldi A.Piloyan, V.Marra and L.Amendola. Supernova constraints on multi–coupled dark energy. *arXiv:1305.3106v2*, 2013.

[3] A. R Liddle E. J. Copeland. Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Phys.Rev.D57:4686-4690*, 1998.

[4] A.G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron.J.116:1009-1038*, 1998.

[5] S. Perlmutter et al. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys.J.517:565-586*, 1999.

[6] T. F. Jordan. Cosmology calculations almost without general relativity. *Am.J.Phys.73(2005)653-662*, 2004.

[7] E.W. Kolb and M.S.Turner. *The Early universe*. Addison–Wesley Publishing Company, 1990.

[8] A. R. Liddle and R. J. Scherrer. A classification of scalar field potentials with cosmological scaling solutions. *Phys.Rev.D59:023509,1999*, 1999.