



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA ED ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Meccanica Quantistica su Spazi non Semplicemente Connessi

Candidato:

Jonathan Ronca

Matricola 1006340

Relatore:

Prof. Pieralberto Marchetti

Anno Accademico 2013-2014

Indice

1	Introduzione	5
2	Richiami matematici	7
2.1	Connessione semplice	7
2.2	Fibrati su varietà	8
2.3	Rivestimenti Universali e Gruppo fondamentale	11
2.4	Connessioni	15
3	Formalismo su spazi non contraibili	19
3.1	Costruzione generale	19
3.2	Particella sulla circonferenza	24
3.3	Particelle identiche libere	26
	Bibliografia	30

Capitolo 1

Introduzione

La Meccanica Quantistica rappresenta lo strumento di indagine essenziale nella descrizione di un qualsiasi sistema fisico delle dimensioni atomiche. La sua formulazione assiomatica rappresenta lo stato di un sistema fisico $\mathcal{S}$ come un raggio vettore associato ad un vettore $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ con $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert (complesso, finito o infinito dimensionale), e le osservabili di $\mathcal{S}$ come degli operatori autoaggiunti che agiscono su $\mathcal{H}$. In questa definizione, non viene scelto uno specifico spazio di Hilbert, quindi lo stato $\mathcal{S}$ del sistema può essere rappresentato in più modi equivalenti. Prendendo la rappresentazione delle coordinate x del sistema, associamo ad $\mathcal{S}$ lo spazio di Hilbert delle funzioni complesse con modulo quadro sommabile $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$ sullo spazio delle configurazioni M , con $d\mu$ una misura su M , ed associamo ad ogni stato $\mathcal{S}$ una *funzione d'onda* $\psi(x)$, parametrizzata dalle coordinate su M . Un tipico esempio di questa costruzione è la rappresentazione dello stato di una particella libera in una buca di potenziale su $[a, b] \subset \mathbb{R}$. In questo caso $\mathcal{H} = L^2([a, b], dx)$, ed il prodotto scalare fra $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ è dato da $\langle \psi | \phi \rangle = \int_a^b \psi^*(x) \phi(x) dx$. In questo esempio, lo spazio delle configurazioni $M = [a, b]$ è particolarmente semplice, sia per la rappresentazione della funzione d'onda che per la definizione di prodotto scalare. Per sistemi più complessi, in cui lo spazio delle configurazioni M è una generica varietà n -dimensionale, definire correttamente tramite la formulazione precedente le rappresentazioni in gioco diventa non banale. Lo scopo della tesi è mostrare come occorre modificare la trattazione standard della meccanica quantistica nel caso di varietà non semplicemente connesse.

Lo spazio delle configurazioni M , considerato come spazio base per la definizione dello spazio di Hilbert degli stati $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$, è in generale uno spazio topologico che può essere quasi sempre arricchito di struttura differenziabile. In questi casi, la formulazione della meccanica quantistica può avvalersi degli strumenti della Geometria Differenziale, che risultano essere estremamente efficaci nello studio di sistemi dalla cinematica più variegata. Sistemi con spazio delle configurazioni non semplicemente connesso danno luogo a funzioni d'onda polidrome.

Una formulazione più efficace di funzione d'onda richiede la costruzione di un fibrato vettoriale con fibra tipica $\mathbb{C}$ su M , e delle sue sezioni. Quest'ultime diventano così le nuove entità associate agli stati $\mathcal{S}$ del sistema con spazio delle configurazioni M non semplicemente connesso. Un fibrato di questo tipo non è però facilmente manipolabile; si può considerare altrimenti quindi uno spazio $\tilde{M}$ semplicemente connesso che riveste M , e trovare una relazione fra la descrizione fatta sullo spazio delle configurazioni M e quella sul rivestimento $\tilde{M}$. Questo nesso è valutabile tramite l'azione di un gruppo sul rivestimento che rispecchia in

modo algebrico le proprietà topologiche di M , ovvero il gruppo fondamentale $\pi_1(M)$. Il gruppo mette in relazione tutti i punti del rivestimento che hanno come proiezione su M lo stesso punto. Usando il gruppo fondamentale di M è possibile costruire un fibrato su $\tilde{M}$ e identificarlo con quello su M tramite una relazione di equivalenza indotta dall'azione del gruppo fondamentale $\pi_1(M)$.

Volendo però recuperare in parte il formalismo iniziale, è possibile considerare lo spazio delle funzioni a modulo quadro integrabile su M , quindi monodrome sullo spazio delle configurazioni, in prodotto tensore con uno spazio vettoriale complesso, in cui appare la struttura polidroma. La nuova funzione d'onda così definita tiene conto della struttura non semplicemente connessa di $\tilde{M}$, e risulta ben definita su M . Rimane il problema di derivare un operatore Hamiltoniano per il quale è d'obbligo la nozione di derivata. Per aggirare quest'ostacolo, si introduce una derivata covariante, che applicata ad una funzione d'onda ne mantiene le corrette proprietà di trasformazione.

Questo implica che nella costruzione della meccanica quantistica su spazi non semplicemente connessi, si introducano dei campi di gauge, dipendenti strettamente dalla rappresentazione utilizzata per descrivere la regola di passaggio fra i valori della sezione polidroma $\psi(x)$.

Le due trattazioni sopra descritte verranno approfondite e esemplificate in due sistemi particolari: una particella in moto libero sulla circonferenza e un sistema di particelle identiche nello spazio euclideo d -dimensionale. Il primo esempio ha rilevanza fisica all'interno della descrizione dell'effetto Aharonov-Bohm, in cui un flusso magnetico è introdotto nella circonferenza considerata; il secondo esempio ha particolare interesse per la descrizione di una statistica per un insieme di particelle quantistiche identiche.

Capitolo 2

Richiami matematici

2.1 Connessione semplice

Per trattare il problema della quantizzazione su spazi non semplicemente connessi M , strettamente legato alla topologia dello spazio delle configurazioni M , si utilizzano gli strumenti della geometria differenziale. Definiamo innanzitutto l'ente matematico che descrive lo spazio delle configurazioni, cioè il concetto di varietà.

Definizione 1. Sia M uno spazio topologico di Hausdorff¹. Lo spazio M si dice *varietà di dimensione n* se per ogni $x \in M$ esiste un intorno aperto U omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Ciò significa che la varietà è un insieme localmente simile ad un aperto piatto di $\mathbb{R}^n$. Dato che su $\mathbb{R}^n$ sappiamo definire funzioni e derivate, possiamo trovare un modo per trasferire gli oggetti definiti sullo spazio euclideo tramite questi omeomorfismi.

Definizione 2. Una collezione di aperti $U_\alpha \subset M$ tali che $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ e di omeomorfismi $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detto *atlante di M* , denotato con $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, e ogni (U_α, ϕ_α) è chiamata *carta locale* di $U \subset M$.

Volendo introdurre la nozione di differenziabilità, si può richiedere una condizione aggiuntiva:

Definizione 3. Siano (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) due carte locali su M tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Se, con ovvie restrizioni su dominio e immagine, le funzioni $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono infinitamente differenziabili in $\mathbb{R}^n$ allora le ϕ_α sono dette *diffeomorfismi*; la varietà risulta ora essere localmente *diffeomorfa* ad un qualche sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, e l'atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ viene detto anche *struttura differenziabile*. Una varietà topologica dotata di struttura differenziabile viene chiamata *varietà differenziabile*.

Abbiamo definito l'oggetto dello studio in modo generale. Lo spazio delle configurazioni M è una varietà n -dimensionale, su cui possiamo definire delle coordinate locali sugli aperti di M .

¹Uno spazio di Hausdorff H è uno spazio topologico tale che presi due punti distinti $p_1, p_2 \in H$ è sempre possibile trovare due intorni di tali punti che sono disgiunti. Questa richiesta è soddisfatta da gran parte degli spazi topologici usuali, ma è una proprietà fondamentale che ogni varietà deve possedere per garantire una buona definizione delle strutture differenziabili

Caratterizziamo ora lo spazio enunciando il concetto di spazio semplicemente connesso, proprietà legata alla geometria della varietà M .

Definizione 4. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n . Una funzione continua $f : I \rightarrow M$ con $I = [0, 1]$ è un *cammino* su M da $x_0 \in M$ a $x_1 \in M$ se $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$.

Siano ora f_1 e f_2 due cammini su M con gli stessi estremi, cioè $f_1(0) = f_2(0) = x_1$ e $f_1(1) = f_2(1) = x_2$. Possiamo pensare di deformare questi cammini l'uno nell'altro in modo continuo, e introdurre in questo modo una relazione di equivalenza fra cammini.

Definizione 5. Due cammini f_1 e f_2 si dicono *omotopi* se esiste una funzione detta *omotopia* $F : I \times I \rightarrow M$ tale che

$$F(t, 0) = f_1(t), \quad F(0, t) = f_2(t)$$

$$F(0, 0) = f_1(0) = f_2(0) = x_0, \quad F(1, 1) = f_1(1) = f_2(1) = x_1$$

I cammini omotopi su M definiscono classi di equivalenza, tali che $f_1 \sim f_2$ se esiste un'omotopia fra di loro. Le classi formate in questo modo si chiamano *classi di omotopia*.

Un'importante classe di cammini, che ci permette di definire in modo rigoroso la connessione semplice sono i cammini chiusi, o loop.

Definizione 6. Sia $f : I \rightarrow M$ un cammino su M e $x \in M$. Il cammino f è un *cammino chiuso* (loop) se $f(0) = f(1) = x$. Il punto x viene detto *punto base* del loop.

Si possono definire, in modo analogo al caso di cammini generici, anche le classi di omotopia dei loop. Naturalmente si possono definire i *cammini banali*, cioè generati dai cammini costanti $f(t) = x_0$ con $x_0 \in M \forall t \in [0, 1]$. I loop che sono omotopi al cammino banale si dicono *contraibili*. Finalmente siamo in grado di enunciare la definizione di connessione semplice, che in un secondo momento verrà espressa in maniera più formale.

Definizione 7. Una varietà M si dice *semplicemente connessa* se ogni loop su di essa è contraibile. Più precisamente, M è semplicemente connessa se $\forall x_0 \in M$ e per ogni loop $f : I \rightarrow M$ con punto base x_0 esiste un'omotopia fra f e il cammino banale $f_{x_0}(t) = x_0$.

La contrazione dei loop tramite omotopia deve essere continua, e ogni cammino generato da essa deve essere contenuto in M . Se ciò non può accadere per le proprietà topologiche di M , vengono a crearsi dei loop non contraibili, e lo spazio non è semplicemente connesso. Pertanto, uno spazio semplicemente connesso implica necessariamente l'esistenza di un'unica classe di omotopia, quella rappresentata dal cammino banale. Il cerchio $\mathbb{S}^1$ e il toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ sono degli esempi di spazi non semplicemente connessi.

2.2 Fibrati su varietà

Il problema che sorge ora è: come si può costruire il formalismo quantistico su uno spazio topologicamente non banale e non semplicemente connesso? Per far ciò abbiamo bisogno di definire delle strutture sulla varietà, in modo tale da poter sfruttare ciò che conosciamo in questo nuovo ambito.

Definizione 8. Siano M, E due varietà e p un'applicazione fra E e M . La terna (E, M, p) , denotata usualmente come $p : E \rightarrow M$, è un *fibrato su M con fibra F* se

1. p è suriettiva;
2. per ogni $x \in M$, l'insieme $p^{-1}(x) = F_x$ è uno spazio omeomorfo ad F , chiamato *fibra tipica*.
3. $\forall x \in M$ esiste un intorno U di x e un diffeomorfismo $\chi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F_x$ detto *banalizzazione locale di E* .

La fibra tipica F può avere qualsiasi struttura topologica o algebrica (es. insiemi discreti, spazi vettoriali reali o complessi ecc.).

In questo ambito, la varietà M si chiama *spazio base* di E , chiamato *spazio totale*. Da ora, con un piccolo abuso di notazione², si intenderà come fibrato lo spazio totale E .

A grandi linee, un fibrato è uno spazio che è localmente diffeomorfo al prodotto del suo spazio base per la sua fibra. Si può pensare che su ogni punto di M , vi sia incollato in modo differenziabile un'altro insieme. La definizione non è globale: se E è un fibrato tale per cui $E = M \times F$, E è denominato *fibrato banale*, in quanto la sua banalizzazione locale è definita per $p^{-1}(M)$, ovvero su tutto lo spazio base. Nel caso generale, sappiamo però che la varietà possiede una struttura differenziale, e quindi un atlante $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \phi_\alpha\}_\alpha$, dove $U_\alpha \in M$ e $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dato un generico atlante $\mathcal{A}$ della varietà M e un fibrato E , possiamo considerare tutte le funzioni $\chi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F_x$, con $x \in U_\alpha$. Per ogni aperto sulla varietà M , si è trovata quindi una banalizzazione locale del fibrato E con spazio base M . Da ciò discende la seguente definizione:

Definizione 9. Sia E un fibrato con spazio base M e fibra tipica F . Sia $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \phi_\alpha\}_\alpha$ un atlante di M . Si dice che $\mathcal{A}$ banalizza E se ogni aperto dell'atlante U_α banalizza localmente $p^{-1}(U_\alpha)$. La banalizzazione locale ottenuta tramite l'atlante $\mathcal{A}$ si denota come $\mathcal{A}_E = \{(U_\alpha, \phi_\alpha, \chi_\alpha)\}$.

Ora, per definizione l'atlante $\mathcal{A}$ deve contenere solo carte C^∞ -compatibili, cioè tali che prese comunque due carte dell'atlante (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) con intersezione non nulla ($U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$), la composizione delle funzioni coordinate $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : U_\beta \rightarrow U_\alpha$, con ovvie restrizioni, devono essere $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Questo induce a pensare che una struttura analoga sorga sullo spazio totale, ad ogni intersezione di carte su M . Infatti, la composizione di banalizzazioni $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ deve indurre un isomorfismo della fibra F , dipendente dal punto $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Dato quindi un $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $f \in F_x$, la funzione $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(x, f) = (x, g_{\alpha\beta}(x)f)$ è una mappa fra i punti della fibra F_x .

Proposizione 1. Sia E un fibrato con spazio base M con fibra tipica fibra F e $\mathcal{A}_E = \{U_\alpha, \phi_\alpha, \chi_\alpha\}_\alpha$ un atlante di E . Le funzioni $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ generano le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}(x)$ di E . L'insieme degli isomorfismi della fibra genera un gruppo G , denominato gruppo di struttura, tale che $g_{\alpha\beta}(x) : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$.

²Quando si pensa al fibrato tangente TM di una varietà M (di dimensione n) si intende lo spazio totale TM con proiezione $p : TM \rightarrow M$ e fibra $T_x M$. Questo è un classico esempio di *fibrato vettoriale di rango n* .

Il gruppo di struttura ci dà una regola di passaggio fra i punti $f \in F_x$ su x nella zona di overlap delle carte di M . Questo particolare sarà fondamentale nella costruzione del formalismo quantistico su questi spazi: come si vedrà più avanti, la funzione d'onda di un sistema fisico, si interpreta più rigorosamente come la sezione di un qualche fibrato sullo spazio delle configurazioni, e proprio il gruppo di struttura su spazi non topologicamente banali ci permette di definire una funzione d'onda in modo rigoroso.

Proseguendo la discussione sui gruppi di struttura, possiamo mostrare il seguente risultato:

Proposizione 2. *Le funzioni di transizione di un fibrato E non sono uniche.*

Infatti, scelta una base M , una fibra F ed un gruppo di struttura G , esiste un unico fibrato E su M (a meno di omeomorfismi). In particolare sono topologicamente equivalenti tutti i fibrati che hanno funzioni di transizione che differiscono tra loro per una diversa scelta di coordinate locali su M . Gli elementi di G per due fibrati topologicamente equivalenti E ed E' sono legati da una sorta di relazione di coniugio: dati $g_{\alpha\beta} \in G(E)$ e $g'_{\alpha\beta} \in G(E')$ e date due carte locali (U_α, ϕ_α) di E e (U_α, ψ_α) di E' , si ha $g'_{\alpha\beta} = h_\alpha^{-1} g_{\alpha\beta} h_\beta$, ove $h_\alpha(x) = \phi_\alpha(x) \psi_\alpha^{-1}(x)$. Questa proprietà dei fibrati topologicamente equivalenti è di estrema importanza per la teoria quantistica su spazi non semplicemente connessi, in quanto introduce le trasformazioni di gauge sulle coordinate, e l'omeomorfismo h_α rappresenta la libertà di gauge delle coordinate su M .

Se lo spazio base M è semplicemente connesso, si può dimostrare che tutti i fibrati costruibili su di esso sono necessariamente banali, quindi scrivibili come $E = M \times F$. Le funzioni di transizione a valori sul gruppo di struttura di M possono essere prese tutte identiche: $g_{\alpha\beta} = id_F$.

Definizione 10. Sia E un fibrato sullo spazio di base M . Una *sezione* di E è una funzione $s : M \rightarrow E$ tale per cui $p \circ s = id_M$, con p la proiezione $p : E \rightarrow M$.

La sezione di un fibrato associa ad ogni punto dello spazio base M un punto dello spazio totale E , in particolare un punto della fibra. Se la sezione è definita solo per un intorno U di $x \in U \subset M$, la sezione si dirà *locale*. Tramite la sezione, possiamo associare ad ogni punto dello spazio delle configurazioni M un elemento della fibra tipica F .

Concentriamoci per un attimo sulla costruzione dei fibrati vettoriali, di importanza capitale per la formulazione quantistica su un generico spazio delle configurazioni M .

Definizione 11. Un fibrato $p : E \rightarrow M$ è detto *vettoriale di rango r* se la fibra F_x su $x \in M$ ha la struttura di spazio vettoriale di dimensione r su un campo $\mathbb{K}$.

La fibra su ogni punto $x \in M$ è quindi uno spazio vettoriale: dalla definizione di fibrato discende il fatto che, preso un aperto $U \in M$, il fibrato E è localmente diffeomorfo al prodotto $U \times \mathbb{K}^r$ tramite la banalizzazione locale χ . Il gruppo di struttura G del fibrato vettoriale E è il gruppo degli omeomorfismi della fibra sulle intersezioni degli aperti $U_\alpha \cap U_\beta$, che tramite banalizzazioni locali è possibile scrivere come $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r$, che si riduce agli omeomorfismi di $\mathbb{K}^r$. Questi omeomorfismi non sono altro che le matrici di ordine r con determinante non nullo, quindi il gruppo di struttura dei fibrati vettoriali è $G = GL(r, \mathbb{K})$. Dove interviene il gruppo di struttura nella costruzione delle funzioni di transizione? Tramite le banalizzazioni locali, si ha

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$$

ove $x \in M$, $v \in \mathbb{R}^r \simeq F_x$ e $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \mathbb{K})$. Le $g_{\alpha\beta}$ sono le *funzioni di transizione* cercate.

Ovviamente è possibile che tutte le funzioni di transizione abbiano valori in un sottogruppo $G' < GL(r, \mathbb{K})$, in tal caso si può parlare di fibrato vettoriale con gruppo di struttura G' .

Infine consideriamo una classe importante di sezioni:

Definizione 12. Siano $p : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango r su M e $U \subseteq M$. Un *referimento locale* per E su U è una r -upla $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\} \in \mathcal{U}(U)$ di sezioni di E su U tali che $\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x)\} \in F_x$ formi una base per F_x per ogni $x \in U$.

Questa r -upla di sezioni forma una base liscia al variare di $p \in M$ per la fibra tipica. Ciò permette una descrizione per gli enti sul fibrato tramite componenti rispetto al referimento locale.

2.3 Rivestimenti Universali e Gruppo fondamentale

La domanda che ci si pone è: quale gruppo di struttura è conveniente da utilizzare nell'analisi degli spazi non semplicemente connessi? Avendo definito spazi semplicemente connessi per mezzo di loop contraibili, possiamo avanzare l'ipotesi che questi particolari cammini siano utili anche per definire in modo corretto il fibrato di cui abbiamo bisogno. Riprendendo le definizioni di cammini e loop sulla varietà M , abbiamo visto che i cammini omotopi formano delle classi di equivalenza. Introducendo un'operazione binaria sui cammini, vedremo che viene a generarsi un gruppo particolare:

Definizione 13. Siano f e g due cammini su M tali che $f(1) = g(0)$. Si definisce il *prodotto di archi*, indicato con $*$, il seguente cammino:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definizione 14. Sia $\pi_1(M, x)$ l'insieme delle classi di loop omotopi su M e punto base $x \in M$. Sia $[f] \cdot [g] = [f * g]$ con $[f], [g] \in \pi_1(M, x)$ l'operazione binaria fra gli elementi di $\pi_1(M, x)$. L'insieme $(\pi_1(M, x), \cdot)$ forma un gruppo, chiamato *gruppo fondamentale*, con elemento neutro $[id_x]$ la classe di equivalenza dei loop costanti (e omotopi ad essi) e inverso $[f^{-1}] = [\bar{f}]$, ovvero la classe di equivalenza del loop f percorso a ritroso.

Possiamo vedere subito che gli spazi semplicemente connessi hanno come gruppo fondamentale il gruppo banale $\pi_1(M, x) = \{[id_x]\} \forall x \in M$. Supponiamo di avere un gruppo fondamentale non banale. Presi due punti $x, y \in M$ e un cammino $c(t)$ fra di loro, si dimostra facilmente che $\pi_1(M, x) \simeq \pi_1(M, y)$, ovvero che i gruppi fondamentali con punti base x e y sono isomorfi. Da ciò discende che

Proposizione 3. *Tutte le classi di omotopia della varietà M al variare di x sono isomorfe. Pertanto il gruppo fondamentale in questo ambito verrà denotato come $\pi_1(M)$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di varietà, discende che essa è localmente diffeomorfa ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, che è connesso per archi. Da ciò discende la proposizione. $\square$

Abbiamo trovato quindi un gruppo costruito sullo spazio base che codifica in modo algebrico il suo tipo di connessione. Dato che spazi non semplicemente connessi sono di difficile gestione dal punto di vista analitico, utilizziamo la nozione di rivestimento, introdotto qui sotto, e studiamo come si comporta questo nuovo spazio totale (che risulterà essere un tipo di fibrato).

Definizione 15. Siano M ed $\tilde{M}$ varietà e $\pi_R : \tilde{M} \rightarrow M$ un'applicazione. π_R è un *rivestimento di M* se:

- π_R è suriettiva;
- $\forall x \in M$ esiste un intorno $U \in M$ ed una famiglia $\{U_j\}_{j \in J} \in \tilde{M}$ tali che
 - $\pi_R^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$;
 - $U_j \cap U_k = \emptyset$ se $j \neq k$;
 - $\pi_R|_{U_j} : U_j \rightarrow U$ è un omeomorfismo locale

Intuitivamente, un rivestimento $\tilde{M}$ è un oggetto localmente simile allo spazio M , ma più grande, in modo tale che lo spazio M sia ricoperto più volte. Un esempio standard è il cerchio $\mathbb{S}^1$ rivestito dalla retta reale $\mathbb{R}$ tramite la proiezione $\pi_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, che può essere scritta come $\pi_R(t) = \exp(it)$.

Questa definizione di rivestimento è topologica, cioè non richiede nessuna struttura differenziabile. Si può richiedere inoltre che lo spazio $\tilde{M}$ sia semplicemente connesso: un rivestimento $(\tilde{M}, \pi_R)$ di M semplicemente connesso viene detto *rivestimento universale di M* . Si dimostra che un rivestimento universale è unico, a meno di isomorfismi.

Vediamo come la nozione di loop viene trasferita sul rivestimento di M :

Definizione 16. Sia $\tilde{M}$ un rivestimento di M e $f : I \rightarrow M$ un loop in M . Il *sollevamento di f su E* è un cammino $\tilde{f}$ tale che $\pi_R \circ \tilde{f} = f$

Si dimostra che se il dominio di f è connesso, allora il suo sollevamento $\tilde{f}$ è unico. Questo è proprio il caso dei loop, in cui il dominio è un intervallo della retta reale. Possiamo enunciare ora un importante teorema per il sollevamento dei cammini di M sul rivestimento $\tilde{M}$.

Teorema 2.3.1. Sia $\pi_R : \tilde{M} \rightarrow M$ un rivestimento. Allora

1. Per ogni cammino $f : I \rightarrow M$ e per ogni $x \in \tilde{M}$ tale che $\pi_R(x) = f(0)$ esiste un unico arco $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{M}$ tale che $\pi_R \circ \tilde{f} = f$ ed $\tilde{f}(0) = x$.
2. per ogni funzione continua $f : I \times I \rightarrow M$ e per ogni $x \in M$ con $\pi_R(x) = F(0, 0)$, esiste una sola funzione continua $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{M}$ tale che $\pi_R \circ \tilde{F} = F$ e $\tilde{F}(0, 0) = x$.

Questo teorema, dato per un generico cammino f ha un'importante conseguenza sui loop.

Teorema 2.3.2 (Teorema di monodromia). Sia $\pi_R : \tilde{M} \rightarrow M$ un rivestimento. Siano f_1, f_2 due loop omotopi con base $\bar{x} \in M$. Fissato $x = \pi_R^{-1}(\bar{x})$ e denotando con $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ i sollevamenti di f_1 e f_2 , si ha che $\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0) = \bar{x}$ e $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$

Notiamo quindi che ad ogni loop su M , corrisponde un cammino fra due punti del ricoprimento $\tilde{M}$ che hanno la stessa immagine su M . Questo risulta importante in quanto si riesce, tramite l'azione del gruppo di omotopia (che dopo definiremo), a dare una regola di passaggio fra le antiimmagini del punto base $\bar{x}$ ogniqualvolta si percorre un cammino chiuso sulla varietà delle configurazioni M .

Essendo anche $\tilde{M}$ una varietà, quindi uno spazio topologico ben definito, possiamo costruirvi sopra il suo gruppo fondamentale $\pi_1(\tilde{M}, x)$ con $x \in \tilde{M}$. Dato che si è stabilito una corrispondenza fra loop su M e $\tilde{M}$, possiamo chiederci se esiste un legame anche fra i gruppi fondamentali sui due spazi. La risposta è affermativa ed è di carattere generale per qualsiasi spazio topologico.

Proposizione 4. *Siano $\tilde{M}$ e M due spazi topologici, ed $\pi_R : \tilde{M} \rightarrow M$ una funzione continua. Si ha che*

1. *se ϕ è un cammino in $\tilde{M}$, allora $\pi_R \circ \phi$ è un cammino in M ;*
2. *se $\phi \sim \psi$, allora $\pi_R \circ \phi \sim \pi_R \circ \psi$;*
3. *se ϕ è un loop su $\tilde{M}$ di punto base $x \in \tilde{M}$, allora $\pi_R \circ \phi$ è un loop su M con punto base $f(x) \in M$.*

Resta quindi definita una mappa π_R^* fra $\pi_1(\tilde{M}, x)$ e $\pi_1(M, \pi_R(x))$, tale che, definita la $\pi_R : \tilde{M} \rightarrow M$, si ha $\pi_R^* : \pi_1(\tilde{M}, x) \rightarrow \pi_1(M, \pi_R(x))$ e $\pi_R^*([\phi]) = [\pi_R \circ \phi]$. Essa risulta essere un omomorfismo di gruppi, chiamato *omomorfismo indotto da π_R* . Questa proprietà vale ovviamente nel caso dei rivestimenti, e nel caso particolare in cui il rivestimento è universale, l'omomorfismo indotto è banale, in quanto il gruppo fondamentale di $\tilde{M}$ risulta $\pi_1(\tilde{M}) = id$.

Siamo pronti per definire ora l'azione del gruppo $\pi_1(M)$ sul rivestimento:

Definizione 17. Sia $\tilde{M}$ un rivestimento di M . Sia $\pi_1(M)$ il gruppo fondamentale di M . Sia $[\gamma] \in \pi_1(M)$, $x \in M$ e $\tilde{x} \in \pi_R^{-1}(x) \in \tilde{M}$. Si definisce l'*azione di monodromia*, denotata con $\tilde{x} * [\gamma] \in \pi_R^{-1}(x)$, l'azione del gruppo $\pi_1(M)$ sul ricoprimento $\tilde{M}$. Dato che esiste un'unica classe di equivalenza per i cammini $\tilde{\phi} \in \tilde{M}$ tali che $\pi_R(\tilde{\phi}) = \phi$ con punto iniziale $\tilde{x} \in \pi_R^{-1}(x)$, si pone $\tilde{x} * [\gamma] \in \tilde{M}$ come il punto finale della classe di cammini $[\tilde{\phi}]$.

Si dimostra che l'azione di questo gruppo su $\tilde{M}$ è transitiva su $\pi_R^{-1}(x) \in \tilde{M}$ e commuta con tutti i possibili automorfismi di $\tilde{M}$; inoltre, il gruppo delle trasformazioni di $\pi_R^{-1}(x) \in \tilde{M}$ è isomorfo al gruppo quoziente $\pi_1(M)/\pi_R^*(\pi_1(\tilde{M}))$. Questo implica che per un rivestimento universale, il gruppo delle trasformazioni di $\pi_R^{-1}(x) \in \tilde{M}$ è isomorfo a $\pi_1(M)$, pertanto l'ordine del gruppo è uguale alla cardinalità di $\pi_R^{-1}(x) \in \tilde{M}$.

I rivestimenti universali sono molto importanti per la costruzione della teoria quantistica su spazi non contraibili, ed è fondamentale mostrare che sono anch'essi dei particolari fibrati:

Definizione 18. Sia $p : E \rightarrow M$ un fibrato con fibra tipica F e G un gruppo. Una *G-struttura* su E è data da:

- Un'azione $\theta : G \times F \rightarrow F$ di G su F

- Un atlante $\mathcal{A}_E$ del fibrato e una famiglia di applicazioni differenziabili $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, dette *funzioni di transizione della G -struttura* rispetto ad $\mathcal{A}_E$ tali che le funzioni di transizione siano date dall'azione di G :

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(x, f) = \theta(g_{\alpha\beta}(x), f) = g_{\alpha\beta}(x) \cdot f, \quad \forall x \in M, \quad \forall f \in F_x$$

Un fibrato di questo tipo viene chiamato *G -fibrato*. Notiamo che un rivestimento $\tilde{M}$ può essere interpretato quindi come un fibrato $\pi_R : \tilde{M} \rightarrow M$ dotato di una $\pi_1(M)$ -struttura. Chiamiamo quindi $\pi_R^{-1}(x) \in \tilde{M}$ la fibra di $x \in M$ su $\tilde{M}$. Da quanto enunciato in precedenza, la fibra su $x \in M$ tramite π_R ha la stessa cardinalità di $\pi_1(M)$, pertanto possiamo immaginare una sorta di biiezione fra questi due spazi, rendendoli isomorfi. Questo definisce il seguente fibrato:

Definizione 19. Un *G -fibrato principale* è un G -fibrato $p : E \rightarrow M$ tale che la fibra $F_x = p^{-1}(x) \in E$ è isomorfa al gruppo di struttura G , in cui l'azione di G sulla fibra è la traslazione sinistra di $f \in F_x$. Tale fibrato è denotato spesso con (M, E, G) .

Quindi un rivestimento universale non è altro che un $\pi_1(M)$ -fibrato principale con azione θ di $\pi_1(M)$ data dall'azione di monodromia.

Vi è un'ulteriore definizione che ci permette la costruzione di un fibrato vettoriale $\tilde{B}$ che in un qualche modo è legato al fibrato principale, nel senso che l'azione di G su E induce una funzione di transizione su $\tilde{B}$.

Prima abbiamo bisogno di una definizione importante per caratterizzare l'azione di un gruppo astratto su uno spazio vettoriale:

Definizione 20. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e V uno spazio vettoriale di dimensione r . Una *representazione lineare* di G su V è un omomorfismo $\rho : G \rightarrow GL(r, \mathbb{K})$, ovvero un'applicazione fra G e $GL(r, \mathbb{K})$ che rispetta la legge di composizione di G , ovvero

- $\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$;
- $\rho(id_G) = id_r$;
- $\rho(g^{-1}) = \rho^{-1}(g)$.

$$\forall g_1, g_2 \in G$$

La dimensione dello spazio vettoriale V è detta *dimensione della rappresentazione* ρ . Se la rappresentazione è iniettiva, cioè $\rho(g) = \rho(g') \Leftrightarrow g = g'$, si dice che ρ è una *rappresentazione fedele*. Si ha inoltre che una rappresentazione che non è scrivibile come somma diretta di altre rappresentazioni, ovvero che non ammette sottospazi di V invarianti sotto la sua azione, si dice *irriducibile*.

Le rappresentazioni irriducibili sono efficaci per trasferire l'informazione riguardante l'azione di G su un certo spazio, all'equivalente azione di matrici su uno spazio vettoriale. Possiamo ora definire in modo corretto la correlazione fra un G -fibrato principale ed un fibrato vettoriale generico.

Definizione 21. Sia $p : E \rightarrow M$ un G -fibrato principale e $\rho : G \rightarrow GL(r, \mathbb{K})$ una rappresentazione r -dimensionale di G . Un fibrato $\tilde{B} : \tilde{B} \rightarrow M$ è detto *associato al G -fibrato principale* se le funzioni di transizione di $\tilde{B}$ sono immagini tramite ρ dell'azione di G su M .

Applicando questa proprietà ai rivestimenti: rivestendo una varietà M tramite $\pi_R : \tilde{M} \rightarrow M$, e costruendo un fibrato vettoriale $\tilde{p} : \tilde{B} \rightarrow M$ di rango r , vogliamo che le funzioni di transizione di $\tilde{B}$ rispecchino la struttura del rivestimento. Basta quindi notare che una generica funzione di transizione $g_{\alpha\beta}(x) : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \mathbb{K})$ del fibrato è un elemento del gruppo di Lie $GL(r, \mathbb{K})$. Volendo in qualche modo rappresentare tramite $GL(r, \mathbb{K})$ ciò che succede facendo agire $\pi_1(M)$ su $\tilde{M}$, si prenderà quindi un sottoinsieme di $GL(r, \mathbb{K})$, le cui matrici rappresentano l'azione di $\pi_1(M)$ sullo spazio di base $\tilde{M}$ tramite ρ . Il fibrato $\tilde{B}$ associato al fibrato principale che si ottiene può essere scritto tramite la relazione di equivalenza introdotta da $\pi_1(M)$:

$$\tilde{B} = [\tilde{M} \times \mathbb{K}^r] / \sim_G$$

con $\sim_G$ la relazione di equivalenza data da

$$(x, v) \sim (y, u) \iff \exists [\gamma] \in \pi_1(M) \text{ tale che } y = [\gamma]x, u = \rho([\gamma])v$$

per ogni $x, y \in \tilde{M}$ e per ogni $u, v \in \mathbb{K}^r$.

Il fibrato che si ottiene in questo modo specifico risulta associato a $\pi_R : \tilde{M} \rightarrow M$ tramite l'azione $\theta : \pi_1(M) \rightarrow GL(r, \mathbb{K})$. Nel senso descritto alla fine della sezione 2.2, parleremo di $\pi_1(M)$ come gruppo di struttura del fibrato $\tilde{B}$.

2.4 Connessioni

Avendo definito un generico fibrato $p : E \rightarrow M$, siamo interessato ora alla derivazione di sezioni sulla varietà. Questo ovviamente è di fondamentale importanza nella trattazione del formalismo quantistico su varietà generiche, in quanto possiamo già intuire che per definire un'hamiltoniana in un certo sistema di coordinate su M , è necessario avere un'operatore di derivazione ben definito. Questo è possibile nell'ambito dei fibrati.

Una definizione intuitiva si può dare nel seguente modo: sia $V : M \rightarrow E$ una generica sezione del fibrato E ed X un campo vettoriale su M . Denotiamo lo spazio delle sezioni sul fibrato di base M come $\mathcal{E}(M)$ e quello dei campi vettoriali su M come $\mathcal{V}(M)$. Potremo definire una derivata della sezione V lungo la direzione X nel punto $p \in M$ come

$$\partial_X V(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(x + tX) - V(x)}{t}$$

Il problema di questa definizione ad hoc è che stiamo confrontando due vettori $V(x + tX) \in F_{x+tX}$ e $V(x) \in F_x$ appartenenti a spazi diversi e non identificati in modo canonico. Il modo di definire una derivata con le caratteristiche giuste è il seguente:

Definizione 22. Sia $p : E \rightarrow M$ un fibrato. Una *connessione* è un'applicazione $\nabla : TM \times \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$, definita³ da $(X, V) \mapsto \nabla_X V$ tale che

1. $\nabla_X V$ è $C^\infty(M)$ -lineare in X .
2. $\nabla_X V$ è $\mathbb{R}$ -lineare in V .

³Non è la definizione più generale. Essa richiederebbe di definire in modo rigoroso i sottospazi orizzontali e verticali. Tale definizione non è adatta alla trattazione che ne seguirà

3. $\nabla_X V$ soddisfa la regola di Leibniz, cioè:

$$\nabla_{fX} V = (Xf)V + f\nabla_X V$$

Si può inoltre dimostrare che $\nabla_X V(x)$ dipende da $X(x)$ nel punto $x \in M$ e dal comportamento locale della sezione V in un intorno di x ⁴. Con queste proprietà, la sezione $\nabla_X V$ risulta essere una derivazione ben definita, per cui si è trovato un modo di derivare delle generiche sezioni di un fibrato generico.

Definiamo ora le k -forme sul fibrato E , essenziali per definire rigorosamente una derivata covariante nel caso di interesse per la presente tesi:

Definizione 23. Sia $p : E \rightarrow M$ un fibrato. Le k -forme a valori in E sono sezioni del fibrato⁵ $\Lambda^k M \otimes E$.

Sappiamo che le generiche 1-forme su M sono delle applicazioni con argomento un vettore tangente di M , quindi elementi di T^*M . Sia $\Omega^1(M)$ lo spazio vettoriale delle 1-forme su M . Le 1-forme a valori in E sono sezioni del fibrato $T^*M \otimes E$. Da ciò discende che, presa $\omega \in \Omega^1(M)$ ed una sezione $V \in \mathcal{E}(M)$, alla sezione $\omega \otimes V$ è associata l'applicazione $X \mapsto \omega(X)V \in E$, per ogni $X \in TM$. Chiamiamo $\Omega(M; E)$ l'insieme delle 1-forme su M a valori in E .

Da queste considerazioni possiamo intuire che, data una connessione ∇ su E , un applicazione che associa ad un elemento $X \in TM$ una sezione $\nabla_X V \in \mathcal{E}(M)$ induce una 1-forma su E , e la sua formalizzazione è data dalla seguente proposizione:

Proposizione 5. Sia $\nabla : TM \times \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$ una connessione su E . Posto $DV(X) = \nabla_X V$, si ottiene un'applicazione $\mathbb{R}$ -lineare $D : \mathcal{E}(M) \rightarrow \Omega^1(M; E)$ tale che

$$D(fV) = df \otimes V + fDV$$

Dimostrazione. Partendo dalla definizione, si ha che

$$D(fV)(X) = \nabla_X(fV) = X(f)V + f\nabla_X V = df(X)V + f\nabla_X V = [df \otimes V + fDV](X)$$

□

Quindi una connessione genera una 1-forma su E e viceversa. Scrivendo le componenti di D utilizzando un riferimento locale $\{e_1, \dots, e_r\}$ (nel caso di un fibrato vettoriale) su $U \subset M$, otteniamo

$$De_j = \omega_j^k \otimes e_k \implies De_j(X) = \omega_j^k(X)e_k$$

Resta così definita una matrice $\omega = (\omega_j^k)$, chiamata *matrice della forma di connessione* rispetto al riferimento locale definito in precedenza. Ci chiediamo infine come trasforma questa matrice di connessione al cambio di riferimento locale. Sia $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_r\}$ un altro riferimento locale su U e $\Lambda = (\Lambda_i^j)$ la matrice di cambio di riferimento su U tale che $\tilde{e}_j = \Lambda_j^k e_k$. Sia $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_j^k)$ la matrice di connessione rispetto al nuovo riferimento locale: si ha

⁴In realtà si dimostra ancor di più: $\nabla_X V(x)$ dipende solo da $X(x)$ e dal comportamento di V ristretto ad una curva con tangente $X(x)$ in x

⁵Con $\Lambda^k M$ si intende l'antisimmetrizzazione di $T^*M \otimes \dots \otimes T^*M$, ovvero delle k -forme differenziali su M .

$$\begin{aligned}
De_i &= \omega_i^j \otimes e_j = \Lambda_h^j \tilde{\omega}_i^h \otimes e_j = \tilde{\omega}_i^h \otimes \Lambda_h^j e_j = D\tilde{e}_i = \\
&= D(\Lambda_i^j e_j) = d\Lambda_i^j \otimes e_j + \Lambda_i^j De_j = d\Lambda_i^j \otimes e_j + \Lambda_i^k \omega_k^j \otimes e_j = \\
&= [d\Lambda_i^j + \Lambda_i^k \omega_k^j] \otimes e_j
\end{aligned}$$

Rinominando gli indici in modo più conveniente, le precedenti relazioni mostrano che

$$\Lambda_k^j \tilde{\omega}_i^k \otimes e_j = [d\Lambda_i^j + \Lambda_i^k \omega_k^j] \otimes e_j$$

che in forma matriciale possiamo scrivere come

$$\Lambda \cdot \tilde{\omega} = d\Lambda + \omega \cdot \Lambda$$

e dato che la matrice Λ è invertibile, si ottiene

$$\tilde{\omega} = \Lambda^{-1} \omega \cdot \Lambda + \Lambda^{-1} d\Lambda$$

Abbiamo quindi trovato come trasforma, sotto un cambio di riferimento inerziale, la derivata covariante D . Questo risulta di fondamentale importanza per la trattazione del formalismo quantistico su spazi non semplicemente connessi quando si definirà una derivazione sullo spazio delle configurazioni tramite D , in particolare si è definito un contributo additivo alla derivata semplice che è l'espressione di un *campo di gauge* definito dalle trasformazioni che lasciano invariate la fisica del sistema. Questa trattazione verrà discussa nel prossimo capitolo.

Capitolo 3

Trattazione di un sistema quantistico su uno spazio non contraibile

In questo capitolo ci occuperemo di formalizzare in modo rigoroso la meccanica quantistica su spazi non semplicemente connessi. Occorre precisare una cosa: nel capitolo precedente, per definire le varietà e i fibrati, si è richiesto che fossero tutte entità lisce, in modo tale da non creare problemi riguardanti il numero delle differenziazioni applicabili. In meccanica quantistica, invece, vi è bisogno della struttura di spazio di Hilbert di $L^2(M, d\mu)$, pertanto si deve riscrivere tutta la formulazione matematica riguardante le quantità C^∞ prendendone la chiusura in $L^2(M, d\mu)$ rispetto alla 2-norma che definisce il prodotto scalare. Procedendo in questo modo, tutte le quantità in gioco (in particolari le sezioni del fibrato) risultano ben definite in ambito quantistico.

3.1 Costruzione generale

La trattazione quantistica di un sistema prevede che ad ogni stato del sistema corrisponda un raggio-vettore in uno spazio di Hilbert, finito o infinito dimensionale. Consideriamo un sistema fisico formato da un numero generico n di particelle. Sia $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ un vettore di stato del sistema quantistico. Possiamo rappresentare questo vettore sfruttando la completezza degli autostati generalizzati dell'operatore posizione come $\langle x | \psi \rangle = \psi(x)$ con $\psi \in L^2(M, d\mu)$, ovvero come una funzione dal dominio delle posizioni delle particelle ai numeri complessi $\mathbb{C}^1$.

Ciò suggerisce una struttura più generale: restando nell'ambito delle funzioni d'onda, possiamo notare che lo spazio delle posizioni delle particelle forma la varietà delle configurazioni M e che ad ogni punto di M posso associare uno spazio vettoriale $\mathbb{C}$ unidimensionale. Denotiamo quest'associazione puntuale come $B_x = \mathbb{C}$ e con $B = \cup_{x \in M} B_x$. Posto $p : B \rightarrow M$ che associa ogni B_x a $x \in M$, si costruisce un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ di M e le biiezioni $\chi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$, tali che, preso $b \in B$, $\chi(b) = (x, z_x)$, con $x \in M$ e $z_x \in B_x$. In tal modo, B dotata di proiezione p definita in precedenza risulta avere la struttura di fibrato vettoriale di rango 1 con spazio base la varietà delle configurazioni M e fibra B_x omeomorfa ad $F = \mathbb{C}$.

Se lo spazio delle configurazioni è contraibile, sappiamo che l'unico fibrato realizzabile è quello banale: in questo caso $B = M \times \mathbb{C}$ e l'analisi di questi fibrati diventa immediata. Il

¹La trattazione per codominio $\mathbb{C}^n$ con $n > 1$ è analoga

caso di nostro interesse, invece implica l'esistenza di fibrati non banali, e la loro costruzione è essenziale per la trattazione quantistica di problemi su spazi non contraibili.

Ci interessa ora capire come agiscono le funzioni d'onda su questi particolari spazi. Una funzione d'onda è una funzione $\psi : M \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\psi(x) \in L^2(M, d\mu)$, ossia a modulo quadro Lebesgue-integrabile. Scegliendo una misura adeguata sullo spazio M , resta ben definito il prodotto scalare fra le funzioni d'onda $L^2(M, d\mu)$, dato da $\langle \psi | \psi \rangle = \|\psi\|^2 = \int_M \psi^*(x)\psi(x)d\mu$. Avendo definito il fibrato B in precedenza, faremo vedere che se M non è semplicemente connesso, la generalizzazione della funzione d'onda risulta essere una *sezione* di B , definita come un'applicazione $\psi : M \rightarrow B$ tale che $\pi \circ \psi = id_M$.

Su uno spazio semplicemente connesso, lo spazio delle sezioni su M è canonicamente isomorfo allo spazio delle funzioni $L^2(M, d\mu)$: sia $B = M \times \mathbb{C}$ e poniamo $\pi_2 : M \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Presa una qualunque sezione $\psi(x)$ di B , basta notare che $\pi_2 \circ \psi : M \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione da M a $\mathbb{C}$, quindi $\pi_2 \circ \psi \in L^2(M, d\mu)$. In definitiva, se lo spazio M è contraibile, si può parlare a buon diritto di *funzione* d'onda.

Finora abbiamo costruito il fibrato B localmente diffeomorfo a $M \times \mathbb{C}$ e definito le funzioni d'onda come sezioni di B . Cerchiamo ora le funzioni di transizione del fibrato.

Definendo un atlante per il fibrato $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}$, formato dalle carte locali di M e dalle banalizzazioni locali di B , vogliamo che le composizioni $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C} \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}$ inducano isomorfismi di $\mathbb{C}$. Esisteranno quindi delle applicazioni $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(1, \mathbb{C})$ che agiscano come $(x, z) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)z)$ con $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $x \in \mathbb{C}$. Questo dimostra che le *funzioni di transizione* trovate in questo modo, corrispondono alla moltiplicazione della funzione d'onda per un numero complesso z dipendente in modo continuo dal punto della varietà delle configurazioni M . In realtà si deve richiedere di più: dovendo preservare il prodotto scalare fra le funzioni d'onda su B , perchè in base ad esso si definiscono le probabilità di transizione, fisicamente misurabili, si necessita che questi numeri complessi abbiano modulo 1: vogliamo cioè che, date due sezioni $\psi, \phi \in \mathcal{E}(M)$, si abbia

$$\int_M z^*(x)\psi^*(x)z(x)\phi(x)d\mu = \int_M \psi^*(x)\phi(x)d\mu$$

Ciò implica che in realtà le funzioni di transizione generino dei $z(x)$ tali che $|z(x)|^2 = 1$ per ogni $x \in M$. In definitiva si ha una mappa².

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U(1)$$

Abbiamo quindi trovato che il gruppo di struttura adatto a descrivere il nostro fibrato B è $U(1)$, o eventualmente un suo sottogruppo.

Riassumendo brevemente, la meccanica quantistica su uno spazio non contraibile è interpretabile come un $U(1)$ -fibrato B con fibra tipica $\mathbb{C}$ sulla varietà delle configurazioni M .

Finora però non conosciamo un modo di calcolare esplicitamente tutte le quantità in gioco, e non conosciamo nemmeno un prodotto scalare adeguato al calcolo delle probabilità legate alle funzioni d'onda. Per ovviare a questo problema si utilizzano le proprietà del ricoprimento universale di uno spazio topologico e il suo legame col gruppo fondamentale.

²Ciò implica che un eventuale gruppo G che agisce sullo spazio base di B ha una *rappresentazione unitaria* unidimensionale sullo spazio di Hilbert degli stati

La funzione d'onda associata alla sezione di B è (nei casi non banali) una funzione polidroma, ed è di difficile gestione.

Definiamo allora un *rivestimento universale* dello spazio base M definito dalla proiezione $\pi_R : \tilde{M} \rightarrow M$. Essendo $\tilde{M}$ semplicemente connesso, su $\tilde{M}$ possiamo ridefinire la meccanica quantistica usuale: chiamiamo $\tilde{B} = \tilde{M} \times \mathbb{C}$ il fibrato vettoriale banale costruito sullo spazio base $\tilde{M}$. Anch'esso è un $U(1)$ -fibrato vettoriale e le funzioni di transizione fra carte locali risultano essere banali, ovvero $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U(1)$ tali che $g_{\alpha\beta} = id_{\tilde{M}}$. In questo caso, lo spazio delle sezioni $\mathcal{E}(\tilde{M})$ di $\tilde{B}$ è isomorfo alle funzioni su $\tilde{M}$ a valori complessi. Chiamiamo queste sezioni banali $\tilde{\psi} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}$. Sottolineiamo il fatto che esse non sono funzioni d'onda.

In effetti sappiamo che, definendo un ricoprimento universale, si è intrinsecamente costruito un altro fibrato, il *fibrato principale* $\pi_R : \tilde{M} \rightarrow M$. Si tratta di un $\pi_1(M)$ -fibrato con gruppo di struttura $\pi_1(M)$. Una qualsiasi banalizzazione locale $\chi : \pi_R^{-1}(U) \rightarrow U \times \pi_1(M)$, con $U \subset M$, mostra che questo fibrato è localmente diffeomorfo al prodotto fra un aperto di M e il suo gruppo di struttura, cioè le fibre su ogni punto $X \in M$ sono isomorfe al gruppo di struttura.

Possiamo subito mostrare che B è un *fibrato associato al fibrato principale* $(M, \tilde{M}, \pi_1(M))$. Dato che vogliamo che l'informazione contenuta nel modulo quadro della sezione ψ sia preservata al passaggio tramite π_R fra $\tilde{M}$ ed M . Essendo $\tilde{M}$ un ricoprimento universale, è ben definita l'azione di monodromia $\pi_1(M)$ su $\tilde{M}$, tale che $([\gamma], \tilde{x}) \mapsto [\gamma]\tilde{x} = \tilde{y} \in \tilde{M}$: mappa un punto $\tilde{x}$ del ricoprimento nel punto finale del sollevamento del cammino con punto iniziale $\tilde{x}$ tale che la sua proiezione su M sia chiusa. Quest'azione risulta fondamentale, in quanto è quella che ci permette la costruzione del fibrato associato B . Definiamo $B = \tilde{B} / \sim$, con $\sim$ la relazione d'equivalenza derivata dall'azione tale che

$$\tilde{x} \sim \tilde{y} \iff \exists [\gamma] \in \pi_1(M) \quad \text{tale che} \quad \tilde{y} = [\gamma]\tilde{x}$$

Si agisce nel seguente modo: avendo definito un fibrato banale sul ricoprimento $\tilde{M}$ di M , richiediamo che sulla fibra tipica $\mathbb{C}$ agisca una *rappresentazione unitaria* $U : \pi_1(M) \rightarrow U(1)$ del gruppo fondamentale. In tal modo, le funzioni $\tilde{\psi}(\tilde{x})$ trasformano in modo unitario sotto l'azione di $\pi_1(M)$

$$\tilde{\psi}([\gamma]\tilde{x}) = U([\gamma])\tilde{\psi}(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{M}, \forall [\gamma] \in \pi_1(M)$$

Abbiamo quindi mostrato che l'azione del gruppo fondamentale sulla fibra di $x \in M$ si tramuta in una trasformazione unitaria sulle funzioni d'onda $\tilde{\psi}(\tilde{p})$: in tal modo, le descrizioni della funzione d'onda sullo spazio di ricoprimento diventano tutte unitariamente equivalenti.

Il fibrato associato al $\pi_1(M)$ -fibrato $\tilde{M}$ risulta dato dal quoziente fra il fibrato banale $\tilde{M} \times \mathbb{C}$ e la relazione di equivalenza introdotta dall'azione di $\pi_1(M)$, ovvero

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) \sim \tilde{\psi}(\tilde{y}) \iff \tilde{y} = [\gamma]\tilde{x} \quad \forall [\gamma] \in \pi_1(M)$$

o equivalentemente

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) \sim \tilde{\psi}(\tilde{y}) \iff \tilde{\psi}(\tilde{y}) = U([\gamma])\tilde{\psi}(\tilde{x})$$

Il fibrato associato $\tilde{B} / \sim$ costruito identificando i valori della funzione $\tilde{\psi}$ su $\tilde{B}$ che sono legati da una trasformazione unitaria $U([\gamma])$ per qualche $[\gamma] \in \pi_1(M)$, risulta isomorfo al fibrato B costruito sulla varietà delle configurazioni B : la formalizzazione del sistema quantistico sul fibrato B e sul fibrato associato $\tilde{B} / \sim$ risulta equivalente.

Si noti che in questo caso, le rappresentazioni $U([\gamma])$ di $\pi_1(M)$ sono unidimensionali, pertanto esse corrispondono alla moltiplicazione della funzione d'onda per una fase che dipende dalla rappresentazione scelta: $U([\gamma]) = e^{i\theta}$. In realtà, i ricoprimenti sono caratterizzati da una fibra discreta, quindi il gruppo fondamentale è discreto. Ciò si riflette nel seguente fatto: prese due carte U_α, U_β di M con intersezione non vuota, le uniche rappresentazioni su di essa sono costanti su ciascuna componente connessa dell'intersezione. Infatti, se in una di queste vi fosse una dipendenza di $U([\gamma])$ dal punto $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, non sarebbe possibile scegliere una rappresentazione continua non costante, dato che $\pi_1(M)$ è discreto e $U(1)$ ha la cardinalità del continuo.

Resta un problema da risolvere: come definisco i prodotti scalari sullo spazio di ricoprimento? La definizione usuale data per spazi contraibili, in questo caso è mal definita, in quanto si vorrebbe che l'informazione del modulo quadro delle $\psi(x)$ sullo spazio di base M si trasferisse sullo spazio di ricoprimento evitando il sovraconteggio del valore di ψ . Il problema è che $\pi_R: \tilde{M} \rightarrow M$ è una suriezione, pertanto il dominio è più grande del codominio, e inevitabilmente la definizione $\langle \tilde{\psi} | \tilde{\phi} \rangle = \int_{\tilde{M}} \tilde{\psi}^*(\tilde{x}) \tilde{\phi}(\tilde{x}) d\tilde{x}$ risulterebbe divergente.

Questo problema si ovvia cambiando la misura d'integrazione $d\mu$, che risulta mal definita. Abbiamo dimostrato che, preso un punto $\tilde{x} \in \tilde{M}$, tutti i punti della fibra di $x = \pi_R(\tilde{x})$ si trovano facendo agire l'azione di monodromia $[\gamma]\tilde{x}$ al variare della classe di equivalenza $[\gamma]$: allora $\pi_R([\gamma]\tilde{x}) = x \in M$, cioè sono tutti punti che proiettati sullo spazio di base hanno tutti la stessa immagine. Dato che vogliamo preservare il fatto che la fisica del sistema è contenuta nello spazio delle configurazioni M , dobbiamo trovare una misura che escluda i punti omologhi del ricoprimento. Consideriamo il *dominio fondamentale* per l'azione di monodromia, che è un aperto $\mathcal{F} \subset \tilde{M}$ tale per cui

$$[\gamma]\tilde{x} \in \tilde{M} \setminus \mathcal{F}, \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{F}$$

I punti di $\mathcal{F}$ sono tali che non possono essere legati dall'azione di monodromia, quindi sono tutti punti con proiezione distinta su M , e se ci restringiamo all'integrazione su questo dominio fondamentale possiamo avere la certezza di non avere un sovraconteggio degli stati. La misura così definita è tale che $\int_{\tilde{M}} d\mu = \int_{\mathcal{F}} d\tilde{x}$, ovvero seleziona un dominio fondamentale per l'azione di monodromia e si svolge l'integrazione ordinaria. Pertanto il nuovo prodotto scalare è definito da

$$\int_{\tilde{M}} \tilde{\psi}^*(\tilde{p}) \tilde{\phi}(\tilde{x}) d\mu = \int_{\mathcal{F}} \tilde{\psi}^*(\tilde{x}) \tilde{\phi}(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad \forall \tilde{\psi}, \tilde{\phi} \in \mathcal{H}_U$$

denotando con $\mathcal{H}_U = \{\tilde{\psi} \in L^2(\tilde{M}, d\mu) | \tilde{\psi}([\gamma]\tilde{x}) = U([\gamma])\tilde{\psi}(\tilde{x})\}$ le funzioni d'onda di $L^2(\tilde{M}, d\mu)$ che trasformano nel modo descritto in precedenza.

Riassumendo, la meccanica quantistica su una varietà delle configurazioni non semplicemente connessa M è equivalente alla meccanica quantistica sul suo rivestimento universale $\tilde{M}$, ove le sezioni $\psi \in \mathcal{E}(M)$ sono legate alle funzioni d'onda single-valued $\tilde{\psi} \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{C})$ dalla relazione d'equivalenza $\tilde{\psi}(\tilde{x}) \sim \tilde{\psi}(\tilde{y})$ se $[\gamma]\tilde{x} = \tilde{y}$ per qualche $[\gamma] \in \pi_1(M)$: in tal caso i valori della funzione d'onda in $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ sono unitariamente equivalenti. Si può quindi vedere la $\psi(x)$ con $x \in M$ come la classe di equivalenza dei valori della corrispondente funzione d'onda sul ricoprimento. Il modulo quadro delle sezioni $\psi(x)$ è legato a quello della corrispondente funzione d'onda single-valued $\tilde{\psi}$ tramite la ridefinizione del prodotto scalare su $\tilde{M}$ operata in precedenza.

Possiamo fare un'ulteriore precisazione: la scelta della rappresentazione $U(1)$ di $\pi_1(M)$ non è univoca, essa è soggetta ad una certa libertà, in particolare è una fase determinata a meno di un parametro. Il cambio di questo parametro però non è un'osservabile, quindi è soggetta ad una *libertà di gauge*. Tramite questa proprietà, possiamo ritrasferire la nostra descrizione sullo spazio base M , considerando le funzioni d'onda sullo spazio delle configurazioni $L^2(M, d\mu)$. A tal proposito, scriviamo tutte le funzioni d'onda in $\tilde{\psi} \in \mathcal{H}_U$ come $\tilde{\psi}(\tilde{p}) = \tilde{\psi}_0(\tilde{p})\chi(\tilde{p})$, con $\tilde{\psi}_0 \in \mathcal{H}_U$ di modulo unitario ($|\tilde{\psi}_0|^2 = 1$) e $\chi \in \mathcal{H}_{id}$ tale che $\chi([\gamma]\tilde{p}) = \chi(\tilde{p})$. Le funzioni χ quindi, sono funzioni che sono invarianti sotto la rappresentazione del gruppo fondamentale, quindi sono delle buone candidate per essere una classe di funzioni ben definite sullo spazio base. Costruiamo allora una derivata ben definita su una sezione di B , essenziale nella trattazione quantistica (ad esempio dell'operatore Hamiltoniano). Facciamo quindi agire una derivata su questa funzione d'onda (omettiamo la dipendenza dal punto $\tilde{x}$):

$$\partial_{\tilde{x}}\tilde{\psi} = \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\psi}_0\chi) = \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\psi}_0)\chi + \tilde{\psi}_0\partial_{\tilde{x}}(\chi)$$

Raccogliendo una $\tilde{\psi}_0$ e ricordando che $|\tilde{\psi}_0|^2 = 1$, quindi $\tilde{\psi}_0^* = \tilde{\psi}_0^{-1}$, si ottiene

$$\partial_{\tilde{x}}\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0(\partial_{\tilde{x}} + \tilde{\psi}_0^{-1}\partial_{\tilde{x}}\tilde{\psi}_0)\chi$$

Notiamo che $\tilde{\psi}_0$ ha valori in $U(1)$, possiamo quindi sfruttarla per definire una trasformazione unitaria da $\mathcal{H}_U$ allo spazio corrispondente alla rappresentazione U banale, cioè lo spazio delle $\chi \in \mathcal{H}_{id}$ che discendono in modo naturale come funzioni su M , quindi a funzioni in $L^2(M, d\mu)$. Questa è quindi una trasformazione $\psi_0 : \mathcal{H}_U \rightarrow L^2(M, d\mu)$ che mappa la derivata ordinaria di $\tilde{\psi} \in \mathcal{H}_U$ nella derivata covariante $D_{\tilde{x}} = \partial_{\tilde{x}} + \tilde{\psi}_0^{-1}\partial_{\tilde{x}}\tilde{\psi}_0$ di χ .

Le funzioni χ utilizzate in questa definizione, possono rappresentare in modo fedele le sezioni sul fibrato B : esse sono invarianti rispetto all'azione di monodromia, quindi sono ben definite sullo spazio delle configurazioni M . Pertanto è ben definita anche la loro variazione su M , dato dalla derivata covariante D . Come si nota, D è composta da due addendi: una derivata ordinaria, ed un addendo dipendente dalla rappresentazione del gruppo fondamentale. Questo addendo è l'espressione di un nuovo campo non osservabile, che dipende strettamente dalla scelta del parametro libero della rappresentazione di $\pi_1(M)$. Cioè si è inserito un *campo di gauge* sul sistema.

Questa derivata covariante, in realtà non è altro che la rappresentazione in coordinate della *forma di connessione* sul fibrato B , in particolare la matrice delle forme di connessione che descrive la derivata covariante è 1×1 . Si può dimostrare che è una *connessione piatta* valutando il commutatore fra due derivate covarianti. Questa connessione risulta necessariamente piatta perchè il gruppo che genera la connessione sulla varietà è discreto.

3.2 Meccanica quantistica di una particella vincolata ad una circonferenza

Occupiamoci ora di un'applicazione pratica della trattazione precedente. Consideriamo come varietà delle configurazioni di una particella la circonferenza, quindi

$$M = \mathbb{S}^1$$

Sappiamo che $\mathbb{S}^1$ ha gruppo fondamentale non banale, infatti $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$, pertanto non è uno spazio semplicemente connesso. Siamo interessati allo studio della funzione d'onda sul cerchio. Costruiamo allora un $U(1)$ -fibrato sul cerchio localmente diffeomorfo allo spazio prodotto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$, e per farlo, seguiremo la costruzione standard di un fibrato partendo da spazio base $\mathbb{S}^1$, fibra $\mathbb{C}$ e gruppo di struttura $U(1)$. Dapprima consideriamo un atlante di $\mathbb{S}^1$ subordinato ad un ricoprimento $\mathbb{S}^1 = U_1 \cup U_2$, con U_1, U_2 contraibili, e lo spazio totale del fibrato come $\bar{B} = \cup_{\alpha} U_{\alpha} \times \mathbb{C}$. Notiamo subito che $U_{\alpha} \cap U_{\beta} = A_1 \cup A_2$ e parametrizziamo con θ ogni punto della circonferenza. Quindi inseriamo una relazione di equivalenza tramite le funzioni di transizione su ogni componente connessa: poniamo

$$\begin{aligned} (\theta_1, z_1) \sim (\theta_2, z_2) &\iff \theta_1 = \theta_2, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in U_1 \cap U_2, \text{ e} \\ z_1 &= z_2, \quad \forall \theta \in A_1, \text{ e } z_2 = e^{i\delta} z_1 \quad \forall \theta \in A_2 \end{aligned}$$

ove si è posto $g_{A_1}(\theta) = id$ e $g_{A_2}(\theta) = \exp(i\delta)$ costanti. Data questa relazione di equivalenza, il nostro fibrato è $B = \bar{B}/\sim$ e, denotando con $[(\theta, z)]$ la classe di equivalenza in B rappresentato da $(p, z) \in \bar{B}$ si possono definire la proiezione $p : B \rightarrow \mathbb{S}^1$ tale che $[(\theta, z)] \mapsto \theta$, e le banalizzazioni locali tramite le inverse: $\chi^{-1} : U_{\alpha} \times \mathbb{C} \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha})$ tale che $(\theta, z) \mapsto [(\theta, z)]$.

A questo punto, possiamo definire le sezioni di B , ovvero le funzioni d'onda sul cerchio, sulle carte subordinate ai ricoprimenti. Una sezione $\psi : \mathbb{S}^1 \rightarrow B$ è una coppia di funzioni sul ricoprimento di $\mathbb{S}^1 = U_1 \cup U_2$ tali che, nella zona d'intersezione $\psi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow U_{\alpha} \times \mathbb{C}$ manda $\theta \mapsto (\theta, \psi_{\alpha}(\theta))$ ³. Questa coppia di funzioni, per rappresentare una sezione, deve soddisfare $(\theta, \psi_2(\theta)) = (\theta, e^{i\delta} \psi_1(\theta))$ per ogni $\theta \in A_2$; la sezione ψ , ad ogni giro sulla circonferenza acquista quindi una fase $e^{i\delta}$.

Ci interessa ora definire esattamente la fase δ che acquista la sezione ψ ad ogni giro su $\mathbb{S}^1$. Definiamo quindi il rivestimento universale $\tilde{M} = \mathbb{R}$ di $\mathbb{S}^1$. Si può mostrare che effettivamente $\mathbb{R}$ riveste $\mathbb{S}^1$ con proiezione $\pi_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$. Considerando l'immersione della circonferenza $i_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ nel piano complesso, si vede che $i_{\mathbb{S}^1} \circ \pi_R$ tale che $t \mapsto \exp(i2\pi t)$ è un rivestimento a numero infinito di fogli. Tale rivestimento è un fibrato principale del cerchio, quindi un $\mathbb{Z}$ -fibrato principale su $\mathbb{S}^1$: preso un $\theta \in \mathbb{S}^1$ ed un suo intorno $A \subset \mathbb{S}^1$ di θ , allora $\pi_R^{-1}(A) \simeq A \times \mathbb{Z}$ e la fibra su θ è composta da $\mathbb{Z}$ punti di $\mathbb{R}$.

Costruiamo ora l' $U(1)$ -fibrato banale $\tilde{B} = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Chiamiamo $\tilde{\psi}(\tilde{\theta})$, con $\tilde{\theta} \equiv t \in \mathbb{R}$, le funzioni su $\mathbb{R}$ monodrome. Sapendo che questo fibrato banale è associato al fibrato principale su $\mathbb{S}^1$ tramite l'azione sinistra di $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ sulla fibra di $\theta \in \mathbb{S}^1$, sappiamo che quest'azione ha una rappresentazione unitaria sullo spazio delle funzioni d'onda. Per la trattazione generale discussa in precedenza, le funzioni tali che $\tilde{\psi}([\gamma]\tilde{\theta}) = U([\gamma])\tilde{\psi}(\tilde{\theta})$ rappresentano un vettore di stato e il gruppo $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ ha una rappresentazione unitaria $U : \mathbb{Z} \rightarrow U(1)$ che seleziona delle

³Si intende che la funzione viene composta alle coordinate locali, denotando con lo stesso simbolo $\psi(x)$ con $x \in U_{\alpha}$ e $\psi \circ \theta^{-1}(t)$ con $t \in I_{\alpha}$. Pertanto si usa θ come variabile, con un piccolo abuso di notazione.

fasi precise in $U(1)$. Essendo una rappresentazione unitaria, deve valere che preso $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ deve valere che $n_1 + n_2 \mapsto U(n_1 + n_2) = U(n_1)U(n_2)$. Una rappresentazione fedele è operata da $U_\phi hi(n) = \exp(i\phi n)$, labellata dal parametro ϕ . Siamo quindi riusciti a selezionare delle fasi precise all'interno di $U(1)$, gruppo di struttura del fibrato banale $\tilde{B}$, che operano come funzioni di transizione. Quindi le fasi aggiunte alla funzione d'onda ad ogni cammino con proiezione chiusa su $\mathbb{S}^1$ sono legate al suo gruppo fondamentale. Resta ora da definire un dominio fondamentale per l'azione di monodromia, in modo tale da trovare un buon prodotto scalare fra le $\tilde{\psi}(\tilde{\theta})$. Vediamo che il dominio $\mathcal{F} = [0, 2\pi)$ è fondamentale per $\mathbb{Z}$. Infatti, preso un punto $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, l'azione di monodromia corrisponde a traslazioni di multipli di 2π sulla retta reale, quindi è facile trovare un $[n] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$ tale che $[n]\tilde{\theta} \in \mathcal{F}$. Analogamente si mostra che non esiste nessun $[n] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$ tale che se $\tilde{\theta} \in \mathcal{F}$ allora $[n]\tilde{\theta} \in \mathcal{F}$ (a parte $[0] = id$). In realtà in tal modo si trova un numero infinito di domini fondamentali, cioè $\mathcal{F}_a = [2\pi a, 2\pi(a+1))$ con $a \in \mathbb{R}$; scegliamo $\mathcal{F}_0$.

Ora possiamo definire un sottoinsieme di $\mathcal{E}(\tilde{B})$ tali che il loro prodotto scalare risulta non divergente. Si prende $\mathcal{H}_\phi = \{\tilde{\psi} \in \mathcal{E}(\tilde{B}) | \tilde{\psi}([n]t) = U_\phi(n)\tilde{\psi}(t)\}$, con prodotto scalare fra $\tilde{\psi}, \tilde{\phi} \in \mathcal{H}_\phi$ dato da

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}^*(\tilde{\theta})\tilde{\phi}(\tilde{\theta})d\mu_\phi = \int_{\mathcal{F}_0} \tilde{\psi}^*(\tilde{\theta})\tilde{\phi}(\tilde{\theta})d\tilde{\theta} = \int_0^{2\pi} \tilde{\psi}^*(\tilde{\theta})\tilde{\phi}(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}$$

prendendo infine la chiusura di $\mathcal{H}_\phi$ in L^2 tramite il prodotto scalare. Cerchiamo ora una descrizione unitariamente equivalente a quella finora svolta tramite funzioni su $\mathbb{S}^1$, considerando lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}' = L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}$. Per farlo, si deve costruire una derivata covariante sulla circonferenza $\mathbb{S}^1$. Consideriamo una generica sezione $\tilde{\psi}(\tilde{\theta}) = \tilde{\psi}_0(\tilde{\theta})\chi(\tilde{\theta})$ con $\chi([n]\tilde{\theta}) = \chi(\tilde{\theta})$, cioè una funzione 2π -periodica, e $\tilde{\psi}_0 \in \mathcal{H}_\phi$ di modulo unitario. Dato che la $\psi(\tilde{\theta})$ acquista una fase ϕ ogni giro, si dimostra che è possibile scegliere $\tilde{\psi}_0 = e^{i\phi\frac{\tilde{\theta}}{2\pi}}$. Vediamo come agisce la derivata ordinaria su questa generica $\tilde{\psi}(\tilde{\theta})$:

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{\theta}}\tilde{\psi}(\tilde{\theta}) &= \partial_{\tilde{\theta}}e^{i\phi\frac{\tilde{\theta}}{2\pi}}\chi(\tilde{\theta}) = \partial_{\tilde{\theta}}(e^{i\phi\frac{\tilde{\theta}}{2\pi}})\chi(\tilde{\theta}) + e^{i\phi\frac{\tilde{\theta}}{2\pi}}\partial_{\tilde{\theta}}\chi(\tilde{\theta}) = e^{i\phi\frac{\tilde{\theta}}{2\pi}}\left(i\frac{\phi}{2\pi}\right) + e^{i\phi\frac{\tilde{\theta}}{2\pi}}\partial_{\tilde{\theta}}\chi(\tilde{\theta}) = \\ &= e^{i\phi\frac{\tilde{\theta}}{2\pi}}\left(i\frac{\phi}{2\pi} + \partial_{\tilde{\theta}}\right)\chi(\tilde{\theta}) \end{aligned}$$

e da questo conto, si nota che la derivata covariante giusta da utilizzare per funzioni definite sulla circonferenza $\mathbb{S}^1$ risulta essere $D_\theta = \partial_\theta + i\frac{\phi}{2\pi}$. Essendo quindi le $\chi(\tilde{\theta})$ funzioni invarianti sotto l'azione di $\mathbb{Z}$, sono identificabili con le funzioni d'onda $\psi(\theta)$, con θ l'angolo che parametrizza la circonferenza $\mathbb{S}^1$.

Vediamo quindi che, considerando un'operatore Hamiltoniano $H(\tilde{\theta}, \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}})$ su $\mathcal{H}_\phi$ sul ricoprimento $\mathbb{R}$ di $\mathbb{S}^1$, si può ottenere una descrizione equivalente su $\mathbb{S}^1$ prendendo come hamiltoniana $H'_\phi(\theta, D_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\frac{\phi}{2\pi})$ su $\mathcal{H}'$. Formalmente, preso $\mathcal{H}$ come lo spazio di Hilbert delle funzioni $L^2(\mathcal{F}_0, d\tilde{\theta})$ che soddisfano $\tilde{\psi}([\gamma]\tilde{\theta}) = U_\phi([\gamma])\tilde{\psi}(\tilde{\theta})$, e preso $\mathcal{H}' = L^2(\mathbb{S}^1, d\bar{\mu}) \otimes \mathbb{C}$, otteniamo che $(\mathcal{H}_\phi, H)$ e $(\mathcal{H}', H'_\phi)$ sono descrizioni quantistiche equivalenti della particella vincolata ad una circonferenza.

Quest'esempio ha una grande rilevanza fisica nello studio sull'effetto *Aharonov-Bohm*, ovvero uno sfasamento della funzione d'onda dovuta alla presenza di un potenziale elettromagnetico. Preso un solenoide cilindrico di raggio R idealmente infinitamente lungo, una

particella all'esterno di esso, classicamente non risente di alcuna forza, in quanto non è mai in presenza di un campo magnetico. Quantisticamente, il potenziale generato dal solenoide si estende in tutto lo spazio, e questo influenza la funzione d'onda della particella, sfasandola di un angolo $\delta\phi = \frac{q\varphi}{\hbar}$, ove q è la carica della particella e φ è il flusso del campo magnetico. Questo si può interpretare come il fatto che il dominio della funzione d'onda in un piano ortogonale al solenoide è in realtà il piano bucato, dato che la funzione d'onda non può penetrare l'interno del solenoide, e dato che il piano bucato e il cerchio sono superfici omologhe, possiedono lo stesso gruppo di omotopia. Da ciò discende che lo sfasamento della funzione d'onda di particella singola in presenza di un potenziale esterno è dovuto al fatto che lo spazio base non è semplicemente connesso, e il suo studio è analogo a quello impostato per la particella in moto sulla circonferenza.

È importante sottolineare che quest'effetto ha rilevanza sperimentale, ossia tramite un esperimento a doppia fenditura è possibile misurare lo sfasamento introdotto dal flusso magnetico??.

3.3 Trattazione di un sistema di n particelle identiche nello spazio euclideo

Supponiamo di avere un sistema di n particelle che si muovono in uno spazio euclideo di dimensione d . Lo spazio delle configurazioni della singola particella è $\mathbb{E}^d$, che è semplicemente connesso. Consideriamo però ora un set di n particelle identiche. Vogliamo che le particelle non possano essere nello stesso punto di $\mathbb{E}^d$ e che siano indistinguibili. Chiamiamo S_n il gruppo delle permutazioni di n elementi e $D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^{dn} | x_i = x_j, i \neq j\}$. Lo spazio delle configurazioni di questo sistema, per come è stato definito, risulta essere $M_n = [\mathbb{E}^{dn} \setminus D_n]/S_n$. Valutiamo il gruppo fondamentale di questo spazio, vedendo se esistono degli elementi di $\pi_1(M)$ non banali al variare di d . Si può mostrare il seguente risultato:

$$\pi_1(M_n) = \begin{cases} S_n & \text{se } d \geq 3, \\ B_n & \text{se } d = 2, \\ id & \text{se } d = 1 \end{cases}$$

ove B_n è il gruppo delle trecce, presentato da

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} | \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1} \text{ per } j = 1 \dots n-1, \sigma_j \sigma_k = \sigma_k \sigma_j \text{ per } |j-k| > 2 \rangle$$

Notiamo da subito che se $d = 1$, lo spazio delle configurazioni M_n è semplicemente connesso, ed è lo spazio di n particelle che si muovono sulla retta reale, e il fibrato risulta banale: $M_n \times \mathbb{C}$.

Per $d \geq 3$, il gruppo fondamentale è $\pi_1(M_n) = S_n$. La costruzione del fibrato B è analoga a quella svolta per la particella singola sul cerchio, per cui non sarà trattata nuovamente. Siamo interessati quindi alla rappresentazione del gruppo S_n sull' S_n -fibrato principale, che definisce il nostro sistema fisico in modo particolare. Dato che il gruppo non è abeliano per $n \geq 2$, cerchiamo le rappresentazioni irriducibili U unidimensionali (che sono le uniche per $n = 1, 2$). Come per la trattazione precedente, $U : S_n \rightarrow U(1)$, cioè $U([\pi]) = e^{i\delta}$. Ci interessa capire ora quanto vale δ .

Si dimostra che esistono solo due rappresentazioni irriducibili in una dimensione complessa. Queste sono

$$U_{FD}([\pi]) = \text{sign}(\pi), \quad U_{BE}([\pi]) = id, \quad \forall \pi \in S_n$$

Per la trattazione precedente, sappiamo che queste rappresentazioni agiscono su $\tilde{M}_n \times \mathbb{C}$, cioè il fibrato banale associato al rivestimento $\tilde{M}_n = \mathbb{E}^{dn} \setminus D_n$ (basta notare dalla definizione di M_n che questo è un rivestimento adeguato), e presa una funzione $\tilde{\psi}$ su $\tilde{M}$, si ha $U_{FD}([\pi])\tilde{\psi}(x) = -\tilde{\psi}(x)$ e $U_{BE}([\pi])\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(x)$, $\forall [\gamma] = [\pi] \in \pi(M) \simeq S_n$, ove si è denotato con $x = (x_1, \dots, x_n)$ le coordinate delle particelle sul ricoprimento.

L'azione di S_n su $\tilde{M}_n$ non è altro che lo scambio di posizione di due coordinate sul ricoprimento: preso un elemento $\pi_{ij} \in S_n$, l'azione di π_{ij} su $x = (x_1, \dots, x_n) \in \tilde{M}_n$ è data da

$$\pi_{ij}x = \pi_{ij}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = \tilde{x}$$

Le due rappresentazioni trovate descrivono quindi il comportamento della funzione d'onda rispetto allo scambio dei suoi argomenti, ovvero la posizione delle particelle in $\tilde{M}_n$. Si è quindi mostrato che, per $n \geq 3$, la scelta di una rappresentazione U di S_n equivale, per un sistema di particelle identiche, alla scelta di una *statistica* per il sistema. Scelta ad esempio la rappresentazione $U_{FD}([\pi]) = \text{sign}(\pi)$, si dice che la funzione d'onda che trasforma tramite essa è antisimmetrica rispetto allo scambio di particelle, e tale proprietà è caratteristica di un sistema di *fermioni*. La statistica $U_{FD}([\pi])$ è la nota *statistica di Fermi-Dirac*.

Analogamente, scelta la rappresentazione $U_{BE}([\pi]) = id$, una funzione d'onda che trasforma in modo identico è detta essere simmetrica rispetto allo scambio di particelle. Questa proprietà è caratteristica di un sistema di *bosoni*, e la statistica $U_{BE}([\pi])$ è nota come *statistica di Bose-Einstein*.

Abbiamo quindi mostrato che per un sistema di particelle identiche per $n \geq 3$, le uniche rappresentazioni unidimensionali del gruppo fondamentale, generano le statistiche di Fermi-Dirac e di Bose-Einstein, e sono uniche⁴

Occupiamoci ora del caso più interessante, ove lo spazio delle configurazioni di particella singola è bidimensionale $\mathbb{E}^2$. Abbiamo che $\pi(M_n) \simeq B_n$, ovvero il *gruppo delle trecce*. Questo gruppo è non abeliano per ogni n , ed esistono rappresentazioni irriducibili che non sono unidimensionali. Qui ci occuperemo solo di rappresentazioni unidimensionali. Dopo la costruzione dei fibrati su M_n e $\tilde{M}_n$ e del B_n -fibrato principale su M_n , consideriamo il fatto che ad ogni $b \in B_n$ è associata un'unica permutazione $\pi_b \in S_n$ che mappa lo stato iniziale x nello stato finale $\tilde{x}$, senza occuparsi del cammino specifico. In tal modo, si trovano due rappresentazioni $U([b]) = U([\pi_n])$ analoghe alle statistiche bosoniche e fermioniche. Però queste non sono le uniche possibili. Una generica rappresentazione unidimensionale $U([\sigma_j])$, con $\sigma_j \in B_n$ generatore del gruppo, è

$$U_\theta([\sigma_j]) = e^{i2\pi\theta}$$

⁴In realtà, considerando funzioni d'onda a più componenti, ci aspetteremo che il numero di rappresentazioni cresca, e che si generino altre statistiche. In ambito della teoria quantistica locale, per via della causalità, una rappresentazione di dimensione superiore di S_n ha le stesse proprietà di una statistica bosonica o fermionica unidimensionale, a patto di introdurre gradi di libertà aggiuntivi, sui quali agiscono simmetrie di gauge

con $\theta \in [0, 1)$. Questa è una famiglia di rappresentazioni, labellata da θ , che viene chiamata *statistica frazionaria* o *statistica θ* . Facilmente si vede che, posto $\theta = 0$ si ritrova la statistica di Bose-Einstein, e per $\theta = \frac{1}{2}$ si ha la statistica di Fermi-Dirac. Si dimostra che la $U([\sigma_j])$ non dipende dal numero di particelle n ; inoltre tale statistica ha un profondo legame con lo *spin* s delle particelle, e questa relazione è data da

$$\theta = s \bmod 1$$

ove si è denotato con s lo spin in 2 dimensioni. Cerchiamo uno spazio di Hilbert adeguato a descrivere il nostro sistema fisico. Consideriamo un sistema di coordinate $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2$ e passiamo sul piano complesso: $x_1 + ix_2 = z \in \mathbb{C}$. Parametizziamo la funzione d'onda $\tilde{\psi}(x)$ come $\tilde{\psi}(z) = \tilde{\psi}(z_1, \dots, z_n)$. Per non perdere le informazioni sulla simmetria della funzione d'onda rispetto allo scambio, possiamo scrivere la $\tilde{\psi}(z)$ composta da una parte simmetrica (risp. antisimmetrica) e da una che trasforma con una fase rispetto allo scambio:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(z_1, \dots, z_n) &= \prod_{j < k} \frac{(z_j - z_k)^{2\theta}}{|z_j - z_k|^{1+2\theta}} u_{BE}(z_1, \dots, z_n), \\ \tilde{\psi}(z_1, \dots, z_n) &= \prod_{j < k} \frac{(z_j - z_k)^{1+2\theta}}{|z_j - z_k|^{1+2\theta}} u_{FD}(z_1, \dots, z_n)\end{aligned}$$

Da qui si può proseguire l'analisi, considerando un'Hamiltoniana generica, ad esempio quella di particella libera $H_n = -(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2m} \nabla_j^2)$ che agisce su $\mathcal{H}_\theta = \{\tilde{\psi} \in \mathcal{E}(\tilde{B}) | \tilde{\psi}([b]x) = U_\theta([b])\tilde{\psi}(x), b \in B_n, x \in \mathcal{F}\}$, ove si è denotato con $\mathcal{F}$ un dominio fondamentale per l'azione di B_n su M_n .

Come ricavato in precedenza, possiamo costruire una descrizione unitariamente equivalente alla precedente sullo spazio delle configurazioni M_n . Consideriamo ora lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}' = \bigotimes_{j=1}^n L^2(\mathbb{E}^2, dz_j)$, ovvero lo spazio prodotto tensore delle funzioni d'onda single-valued su $\mathbb{E}^2 \simeq \mathbb{C}$. Per definire un'Hamiltoniana che agisce su $\mathcal{H}'$ è necessario definire una derivata covariante adeguata. Prendiamo una generica funzione $\tilde{\psi}$ definita in precedenza, e consideriamo come $\tilde{\psi}_0(z)$ (si veda il capitolo precedente) la funzione $\tilde{\psi}_0(z) = \prod_{j < k} \frac{(z_j - z_k)^{2\theta}}{|z_j - z_k|^{2\theta}}$. Riscriviamo in modo adeguato questa funzione:

$$\tilde{\psi}_0(z) = \prod_{j < k} \frac{(z_j - z_k)^{2\theta}}{|z_j - z_k|^{2\theta}} = \prod_{j < k} e^{i2\theta \arg(z_j - z_k)} = e^{i2\theta \sum_{j < k} \arg(z_j - z_k)}$$

Da questa semplice forma, possiamo calcolare il campo di gauge associato alla connessione, semplicemente valutando $\tilde{\psi}_0^*(z) \partial_{z_j}(\tilde{\psi}_0(z))$:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_0(z) \partial_{z_j}[\tilde{\psi}_0(z)] &= \tilde{\psi}_0^*(z) \partial_{z_j}[e^{i2\theta \sum_{j < k} \arg(z_j - z_k)}] = \tilde{\psi}_0^*(z) \partial_{z_j}[i2\theta \sum_{j < k} \arg(z_j - z_k)] e^{i2\theta \sum_{j < k} \arg(z_j - z_k)} = \\ &= \tilde{\psi}_0^*(z) \partial_{z_j}[i2\theta \sum_{j < k} \arg(z_j - z_k)] \tilde{\psi}_0(z) = \partial_{z_j}[i2\theta \sum_{j < k} \arg(z_j - z_k)] = i2\theta \sum_{j < k} \partial_{z_j} \arg(z_j - z_k) = iA(z_j)\end{aligned}$$

Resta da valutare la derivata della funzione $\arg(z_j - z_k)$ e lo faremo per componenti. Vediamo che

$$\partial_{z_j} \arg(z_j - z_k) = \partial_{x_j^1} \arg(z_j - z_k) = \partial_{x_j^1} \arctan\left(\frac{x_j^2 - x_k^2}{x_j^1 - x_k^1}\right) = \frac{1}{1 + \frac{(x_j^2 - x_k^2)^2}{(x_j^1 - x_k^1)^2}} \frac{x_j^2 - x_k^2}{(x_j^1 - x_k^1)^2}$$

$$= -\frac{x_j^2 - x_k^2}{|z_j - z_k|^2}$$

Analoghi calcoli dimostrano che $\partial_{x_j^1} \arg(z_j - z_k) = -\frac{(x_j^1 - x_k^1)^2}{|z_j - z_k|^2}$. Pertanto, il campo di gauge $A_\theta(z_j)$ si può scrivere come:

$$(A_\theta)_\mu(z_j) = -2\theta \sum_{j < k} \epsilon_{\mu\nu} \frac{x_j^\nu - x_k^\nu}{|z_j - z_k|^2}$$

Pertanto, la derivata covariante giusta da utilizzare risulta quindi essere $D = \nabla_{z_j} - iA_\theta(z_j)$ e l'Hamiltoniana della particella libera diventa $H'_\theta = -\sum_{j=1}^n \frac{1}{2m} (\nabla_j - iA_\theta(z_j))^2$. Lo stesso risultato si ottiene anche considerando il caso fermionico.

Abbiamo quindi mostrato che $(\mathcal{H}_\theta, H)$ e $(\mathcal{H}', H'_\theta)$ sono descrizioni unitariamente equivalenti di un sistema di particelle identiche piano euclideo $\mathbb{E}^2$. Più precisamente, si è trovata una trasformazione unitaria tra lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\theta$ costruito sul ricoprimento $\tilde{M}_n$ e quello $\mathcal{H}'$ sullo spazio base M_n introducendo uno sfasamento di un angolo θ che agisce tramite la derivata covariante D .

Bibliografia

- [1] M. Abate, F. Tivena, *Geometria differenziale*, Springer-Verlag, 2011
- [2] R. A. Bertlmann (1996), *Anomalies in quantum field theory*, Oxford Unity Press.
- [3] Vu B Ho and Michael J. Morgan, *J. Phys. A: Math. Gen.* 29 1497, (1996)
- [4] W. S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1991
- [5] G. L. Nabel, *Topology, Geometry and Gauge Fields*, Springer, 2010
- [6] J. Frohlich, *Non-Perturbative Quantum Field Theory*, World Scientific, 1992
- [7] Y. Aharonov e D. Bohm, *Significance of electromagnetic potential in quantum theory.*
Phys. Rev. 115 485-491, (1959)