

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile ed Ambientale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

TESI DI LAUREA

**Modellazione numerica del danno per fatica  
nei collegamenti saldati**

Relatore: Ch.mo Prof. Carlo Pellegrino

Correlatore: Ing. Fabio Pietro Marchesini

Laureanda: Chiara Cenci

Anno Accademico 2013-2014



---

<b>CAPITOLO 1 INTRODUZIONE.....</b>	<b>1</b>
1.1 La fatica nelle strutture .....	1
1.2 Obiettivi e struttura della tesi.....	2
<b>CAPITOLO 2 CENNI STORICI.....</b>	<b>5</b>
2.1 Rotture per fatica .....	5
2.2 Evoluzione degli studi .....	15
2.2.1 Prima dell'Ottocento .....	16
2.2.2 Individuazione del fenomeno .....	16
2.2.3 Sviluppo delle procedure sperimentali .....	17
2.2.4 Caratterizzazione della vita a fatica.....	19
2.2.5 Meccanica della frattura .....	20
<b>CAPITOLO 3 LA FATICA.....</b>	<b>23</b>
3.1 Definizione del fenomeno.....	23
3.2 Aspetto microscopico .....	24
3.2.1 Frattura fragile e frattura duttile .....	24
3.2.2 Deformazioni plastiche.....	25
3.2.3 Fasi della vita a fatica.....	27
3.3 Aspetto macroscopico.....	31
3.4 Fattori di influenza.....	34
3.4.1 Materiale.....	34
3.4.2 Caratteristiche dell'elemento.....	35
3.4.3 Ambiente .....	40
3.4.4 Applicazione del carico .....	42
<b>CAPITOLO 4 STUDIO DELLA FATICA .....</b>	<b>45</b>
4.1 Sollecitazioni cicliche .....	45
4.2 Ampiezza variabile e fatica multiassiale .....	48
4.2.1 Carico ad ampiezza costante .....	49
4.2.2 Carico a blocchi.....	49
4.2.3 Fatica multiassiale .....	50
4.3 Approccio alle tensioni .....	52
4.3.1 Il legame tensioni-numero di cicli ( $\sigma - N$ ).....	53

---

4.3.2	Il diagramma di Haigh.....	58
4.4	Approccio alle deformazioni.....	59
4.4.1	Il legame tensioni-deformazioni.....	60
4.4.2	Il legame deformazioni-numero di cicli ( $\varepsilon - N$ ).....	64
4.4.3	Effetti della tensione media.....	64
4.5	Approccio della meccanica della frattura.....	65
4.5.1	Cenni storici.....	66
4.5.2	Meccanica della frattura lineare elastica.....	68
4.5.3	Fattore di intensità di tensione.....	70
4.5.4	Accrescimento della cricca per fatica.....	71
<b>CAPITOLO 5 LA FATICA NELLA NORMATIVA .....</b>		<b>75</b>
5.1	Normativa vigente.....	75
5.1.1	Le sollecitazioni a fatica.....	76
5.1.2	La resistenza a fatica.....	79
5.1.3	Verifica a fatica.....	81
5.1.4	La fatica nelle saldature.....	83
5.2	Limitazioni dell'Eurocodice.....	84
<b>CAPITOLO 6 IL DANNO PER FATICA .....</b>		<b>87</b>
6.1	Previsione della vita a fatica.....	87
6.1.1	Legge di accumulazione lineare di Miner.....	89
6.1.2	Limiti della legge di accumulazione lineare.....	90
6.1.3	Leggi di accumulazione non lineari.....	91
6.2	La meccanica del danno.....	92
6.2.1	Fenomeno di danneggiamento.....	94
6.2.2	Variabile di danno.....	95
6.2.3	Tensione effettiva.....	97
6.2.4	Principio di equivalenza delle deformazioni.....	98
6.2.5	Misurazione del danno.....	99
6.2.6	Formulazione termodinamica.....	100
6.3	Il danno secondo il modello NLCD.....	102
6.3.1	Formulazione uniassiale.....	104
6.3.2	Determinazione del modello.....	107
6.3.3	Estensione al caso multiassiale.....	110

---

6.3.4	Vantaggi e limiti del metodo .....	115
<b>CAPITOLO 7 IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO NLCD .....</b>		<b>117</b>
7.1	Metodo computazionale.....	117
7.1.1	Condizioni iniziali .....	118
7.1.2	Cicli di carico equivalenti.....	118
7.1.3	Metodi alle differenze finite .....	120
7.1.4	Schema computazionale .....	121
7.2	Le subroutine in Abaqus .....	122
7.2.1	La subroutine UAMP .....	123
7.2.2	La subroutine UMAT .....	124
7.3	Validazione dell'implementazione .....	129
7.3.1	Materiale.....	130
7.3.2	Valori teorici.....	131
7.3.3	Valori sperimentali .....	133
7.3.4	Modellazione.....	135
7.3.5	Confronto dei risultati .....	138
7.3.6	Evoluzione del danno .....	142
7.3.7	Ridistribuzione delle tensioni .....	145
<b>CAPITOLO 8 LA FATICA NELLE SALDATURE .....</b>		<b>153</b>
8.1	I giunti saldati .....	153
8.1.1	Geometria e terminologia.....	154
8.1.2	Classificazione.....	155
8.2	Comportamento a fatica.....	156
8.2.1	Rinforzo.....	157
8.2.2	Difetti.....	157
8.2.3	Sollecitazioni termiche.....	158
8.2.4	Miglioramento della resistenza.....	158
8.3	Metodi di calcolo .....	159
<b>CAPITOLO 9 APPLICAZIONE DEL MODELLO NLCD .....</b>		<b>163</b>
9.1	Esempi applicativi .....	163
9.2	Caratterizzazione del materiale.....	164
9.2.1	Determinazione dei parametri .....	166

9.2.2	Limiti di validità.....	168
9.3	Dettaglio saldato .....	168
9.3.1	Modellazione .....	170
9.3.2	Confronto dei risultati.....	171
9.4	Dettaglio del portale.....	173
9.4.1	Portale per prove a fatica.....	173
9.4.2	Struttura del portale .....	175
9.4.3	Modellazione .....	177
9.4.4	Risultati ottenuti .....	178
<b>CAPITOLO 10 CONCLUSIONI E POSSIBILI SVILUPPI.....</b>		<b>181</b>
<b>APPENDICE A INVARIANTI DI SFORZO E INVARIANTI INGEGNERISTICI.....</b>		<b>185</b>
<b>APPENDICE B CODICE IMPLEMENTATO .....</b>		<b>187</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>		<b>197</b>

# *Capitolo 1*

## **INTRODUZIONE**

### **1.1 LA FATICA NELLE STRUTTURE**

La rottura a fatica nelle strutture metalliche è oggi un fenomeno oggetto di grande interesse. La sua conoscenza parte dall'osservazione che la singola applicazione di una sollecitazione di intensità inferiore alla resistenza della struttura non determina alcun danno su di essa, mentre la ripetizione dello stesso carico può portare al collasso.

L'attività di ricerca e l'esperienza pratica hanno portato alla comprensione dei processi di nucleazione e progressivo accrescimento della cricca, che avvengono nel materiale e che conducono al collasso; le intuizioni sono state poi confermate dagli studi effettuati sui numerosi crolli per fatica di strutture saldate, mezzi ferroviari, macchine e velivoli e dall'attività di sperimentazione in laboratorio, che hanno consentito di individuare i fattori che contribuiscono all'insufficiente resistenza delle strutture nei confronti di questo fenomeno.

Una corretta progettazione parte da queste conoscenze e dalla comprensione delle variabili in gioco, unite all'esperienza, alla scelta dei metodi di analisi e alla verifica del comportamento, supportata da prove sperimentali.

La rottura per fatica può interessare diversi tipi di materiali, come quelli polimerici e i compositi, tuttavia è nei metalli che essa, in passato, ha dimostrato tutta la sua pericolosità: oltre la metà delle rotture di componenti meccanici è attribuibile a questo fenomeno e numerosi sono i cedimenti provocati in strutture di vario genere nell'ambito dell'ingegneria civile.

Per garantire quindi una progettazione efficace e costruzioni sicure, l'analisi della fatica deve essere affrontata su più livelli, a partire dall'esame microscopico del materiale, proseguendo con la valutazione macroscopica degli effetti e lo studio dei modelli teorici che tentano di rappresentarne il meccanismo, fino alle più recenti tecniche di modellazione che si propongono di riprodurre il più fedelmente possibile il comportamento reale del materiale e il fenomeno di danneggiamento.

Il riconoscimento della fatica come fenomeno di carattere permanente, progressivo e localizzato ha indirizzato verso lo studio della produzione e successiva accumulazione del danno all'interno dei componenti, che si è tradotto in modelli di fatica di complessità crescente.

Tra questi il metodo NLCD, *Non Linear Continuum Damage Model*, di Lamaitre e Chaboche, sviluppato nell'ambito della meccanica del danno del continuo, ha assunto un ruolo centrale, fornendo un'espressione incrementale per la variabile di danno, che ne esprime l'evoluzione in funzione delle proprietà specifiche del materiale e delle caratteristiche della sollecitazione ciclica a cui esso è sottoposto.

Tale trattazione, presentando il vantaggio di essere implementabile, ha riscosso successo ancora maggiore a seguito della sua applicazione nell'ambito della modellazione agli elementi finiti, consentendo di rappresentare il processo che porta il materiale integro alla condizione fessurata, a seguito della propagazione delle cricche.

## 1.2 OBIETTIVI E STRUTTURA DELLA TESI

Questa tesi si propone di implementare il modello NLCD di Lamaitre e Chaboche nella sua formulazione multiassiale attraverso la scrittura di un codice di calcolo e il suo utilizzo nella fase di post-processamento dei risultati, in analisi condotte con il programma agli elementi finiti Abaqus 6.12.

La compilazione delle subroutine, scritte in Fortran 77, consente di usare gli output dell'analisi al termine di ogni ciclo di carico per la costruzione dell'espressione dell'incremento di danno raggiunto a seguito della sollecitazione.

L'accoppiamento con la legge costitutiva del materiale, assunta lineare elastica, permette inoltre di seguire l'evoluzione del danneggiamento rappresentandolo attraverso il degrado delle proprietà meccaniche del materiale. Il campo descritto dal modello va dalla condizione di materiale integro, privo di danno, fino alla formazione della prima macrocricca, coprendo quindi tutta la fase di micronucleazione e micropropagazione delle cricche nel materiale.

La scrittura del codice è seguita dalla sua validazione attraverso il confronto con alcuni esempi reperiti in letteratura, per procedere poi alla sua applicazione a casi specifici, come quelli delle saldature nelle strutture metalliche.



Il lavoro è suddiviso in dieci capitoli.

Il primo capitolo introduce l'argomento della tesi e costituisce una breve presentazione degli argomenti sviluppati durante tutta la trattazione.

Nel secondo capitolo sono riportati alcuni esempi di incidenti avvenuti negli ultimi due secoli, le cui cause sono state attribuite a rotture per fatica, al fine di sottolineare l'importanza e l'attualità del problema; questa rassegna è seguita da una panoramica sull'evoluzione degli studi sull'argomento, incentrati proprio dai collassi avvenuti in passato.

Il terzo capitolo affronta nel dettaglio il fenomeno della fatica, analizzando i meccanismi che avvengono nel materiale e i loro effetti, dal punto di vista sia microscopico che macroscopico.

Nel quarto capitolo vengono riportati i metodi di rappresentazione delle sollecitazioni cicliche e gli approcci teorici al problema, sviluppati a seconda delle modalità di applicazione del carico e del tipo di fatica studiata; si aggiunge anche una sezione relativa alla meccanica della frattura e ai suoi principi.

Il quinto capitolo riassume le prescrizioni normative sulla fatica, mettendone in luce i difetti, che ne limitano il campo di applicazione.

Il sesto capitolo è relativo alla valutazione della vita residua e al calcolo del danneggiamento e della sua accumulazione: vengono presentate le leggi proposte da vari autori e il loro superamento attraverso l'applicazione della meccanica del danno del continuo alla fatica. Viene presentata l'elaborazione teorica alla base del modello NLCD, adottato nella presente trattazione, nella sua formulazione uniassiale e multiassiale.

Nel settimo capitolo sono raccolte le assunzioni e le considerazioni fatte per l'implementazione del modello attraverso il codice di calcolo e vengono fornite alcune spiegazioni, utili per la lettura delle subroutine; il capitolo si conclude con la validazione delle subroutine.

Il capitolo otto riassume le caratteristiche generali delle saldature, con particolare riferimento al loro comportamento a fatica e ai fattori che lo influenzano.

Infine, il capitolo nove illustra l'applicazione del codice come post-processore nell'analisi a fatica di componenti saldati.

La tesi si conclude con il capitolo dieci, che riporta le conclusioni tratte dal lavoro svolto e alcuni spunti per possibili sviluppi futuri dell'argomento.



## *Capitolo 2*

# ***CENNI STORICI***

### **2.1 ROTTURE PER FATICA**

Fino all'inizio dell'Ottocento la rottura per fatica è sostanzialmente sconosciuta; il crescente interesse nei confronti di questa modalità di rottura, tuttora oggetto di studio, viene incentivato da una serie di incidenti e sfortunati eventi avvenuti soprattutto a partire dal XIX secolo, con la nascita e la diffusione del trasporto ferroviario.

Nel corso della storia numerosi sono gli esempi che si possono citare, soprattutto in campo ferroviario e aeronautico, a causa dei rilevanti carichi, dell'elevato numero di cicli e della contemporanea necessità di limitare il peso del mezzo, soprattutto per quanto riguarda i velivoli. La problematica tuttavia coinvolge anche l'ambito dell'ingegneria civile, con particolare riferimento alle strutture in acciaio sottoposte a sollecitazioni notevoli e cicli di carico, prime fra tutte i ponti e i loro elementi strutturali.

Si riportano di seguito alcuni esempi di disastri avvenuti negli ultimi due secoli, le cui cause sono state attribuite a rotture per fatica: dai casi riportati si evince come spesso tali incidenti siano dovuti, oltre che a carenze progettuali e difetti nella realizzazione, ad ispezioni poco attente, a non corretta manutenzione e mancata riparazione tempestiva dei danni, sottostimando la pericolosità di questo tipo di rottura.

### 2.1.1.1 Incidente ferroviario di Meudon (1842)

Questo avvenimento rappresenta il primo incidente ferroviario in Francia e uno tra i primi al mondo. L'8 maggio del 1842 due locomotive e diciassette vagoni furono coinvolti in un incidente presso Meudon, a Versailles. Il numero di vittime fu fra sessanta e cento, anche se alcune fonti forniscono stime maggiori.

La causa del disastro fu la rottura di un assale della locomotiva, che causò il deragliamento e il successivo incendio. L'incidente ebbe una enorme risonanza e fu oggetto di studi approfonditi: a partire da tale evento Rankine iniziò le sue ricerche esaminando numerosi assali ferroviari fratturati e giungendo alla corretta conclusione che la rottura fosse imputabile all'innesco della cricca in corrispondenza di punti di intensificazione delle sollecitazioni e alla sua conseguente propagazione.

### 2.1.1.2 Disastro ferroviario del fiume Ashtabula (1876)

Il 29 dicembre 1876 in Ohio il convoglio costituito da due locomotive e undici vagoni, che trasportavano complessivamente 159 passeggeri, fu coinvolto in un deragliamento a causa del crollo del ponte sul fiume Ashtabula, a soli 300 metri dalla vicina stazione ferroviaria di Ashtabula; le vittime furono 92.

Le cause dell'incidente furono attribuite alla progettazione di elementi strutturali di dimensioni insufficienti e all'assenza di adeguati controlli durante i precedenti undici anni di impiego del ponte da parte della rete ferroviaria. Tuttavia alcuni autori suggeriscono che il crollo sia stato provocato dal danneggiamento a fatica degli elementi metallici costituenti la struttura reticolare del ponte, oltre che alla loro cattiva esecuzione.

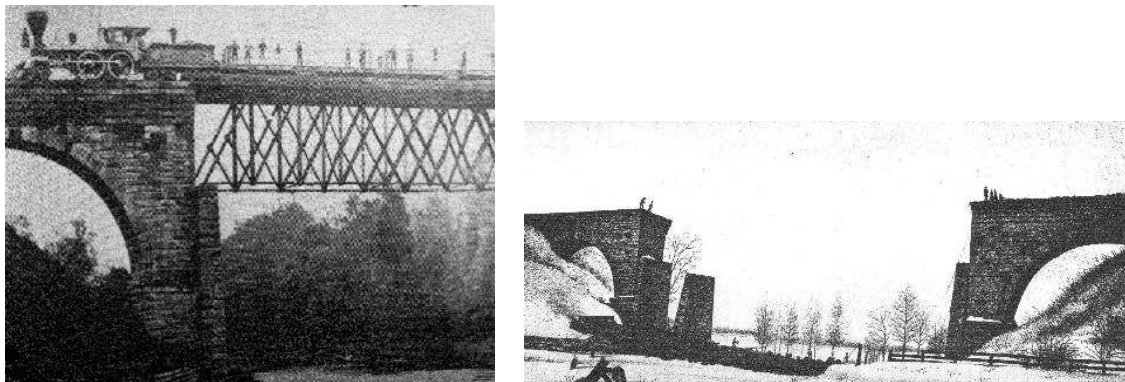


Figura 2.1: Fotografie del ponte prima e dopo il disastro

### 2.1.1.3 Inondazione di melassa di Boston (1919)

Il 15 gennaio 1919 un serbatoio di melassa di 15 metri d'altezza e 27 metri di diametro, contenente più di 8 milioni litri collassò su se stesso. Tale cedimento provocò un'onda di melassa,

alta tra i 2,5 e i 4,5 metri, con velocità di 56 km/h, la quale sviluppò una forza sufficiente a sbriciolare le strutture della vicina stazione di Atlantic Avenue della ferrovia sopraelevata di Boston e far deragliare un treno dai binari. Il liquido riversato provocò la morte di 21 persone e il ferimento di altre 150.

Il cedimento del serbatoio fu provocato da difetti strutturali, uniti ai carichi ciclici di pressione dovuti alla fermentazione della melassa per la produzione di rum e alcol etilico, alle operazioni di carico e scarico e alle escursioni termiche.



Figura 2.2: Immagine dell'area dopo il disastro

#### **2.1.1.4 Incidenti del velivolo Comet (1954)**

Progettato e costruito in Inghilterra dopo la Seconda Guerra Mondiale, nel maggio 1952 entra in servizio il Comet, il primo velivolo da trasporto civile con propulsore a getto e pressurizzazione della cabina passeggeri. Dopo meno di due anni da questa data, iniziano a verificarsi alcuni incidenti: il 10 gennaio 1954 il volo BOAC 781 con 35 persone a bordo, partito dall'aeroporto di Ciampino di Roma e diretto a quello di Heathrow di Londra, nell'ultimo tratto del viaggio iniziato da Singapore, esplose a 30000 piedi di quota (circa 9000 metri), volando al di sopra dell'isola d'Elba; l'esplosione e il successivo schianto nel Mar Mediterraneo provocarono la morte di tutte le persone a bordo.

L'esplosione fu provocata dalla decompressione per l'altitudine e fu il risultato del progressivo indebolimento della fusoliera per fenomeno di fatica, a seguito delle ripetute pressurizzazioni e depressurizzazioni della cabina dell'aereo. Dallo studio del disastro e dall'analisi delle parti dell'aereo recuperate emerse l'influenza delle modalità di costruzione dei fori dei finestrini del velivolo: le lacerazioni dei pannelli di copertura si propagavano infatti a partire dalle aperture dei finestrini di forma rettangolare e, dai test eseguiti successivamente, risultò che le tensioni in corrispondenza degli angoli raggiungevano valori tripli rispetto al resto della struttura, che rispondeva invece in modo soddisfacente.

Questo fenomeno, noto come effetto intaglio, causò un lento ma progressivo formarsi di microcrepe all'interno delle lamiere, le quali, non più capaci di sopportare lo stress della pressurizzazione, si lacerarono violentemente causando l'incidente.

Il problema fu aggravato anche dal metodo di rivettatura: le cornici dei finestrini venivano infatti fissate alla struttura con la tecnica della rivettatura a pressione (*punch-riveting*): tale metodo prevedeva l'inserimento del rivetto direttamente nella lamiera. A differenza della rivettatura con preforatura, che prevedeva la creazione di fori nelle lamiere tramite trapanatura prima della messa in opera del rivetto, questo metodo era un'ulteriore causa di riduzione dell'integrità delle componenti dei finestrini, dotandoli di fatto già in fabbrica di inneschi per le cricche, a causa della natura irregolare dei fori. Inoltre in origine fu previsto prima l'incollaggio e poi la rivettatura di tali cornici, in fase di produzione però si saltò la parte dell'incollaggio procedendo alla rivettatura diretta.

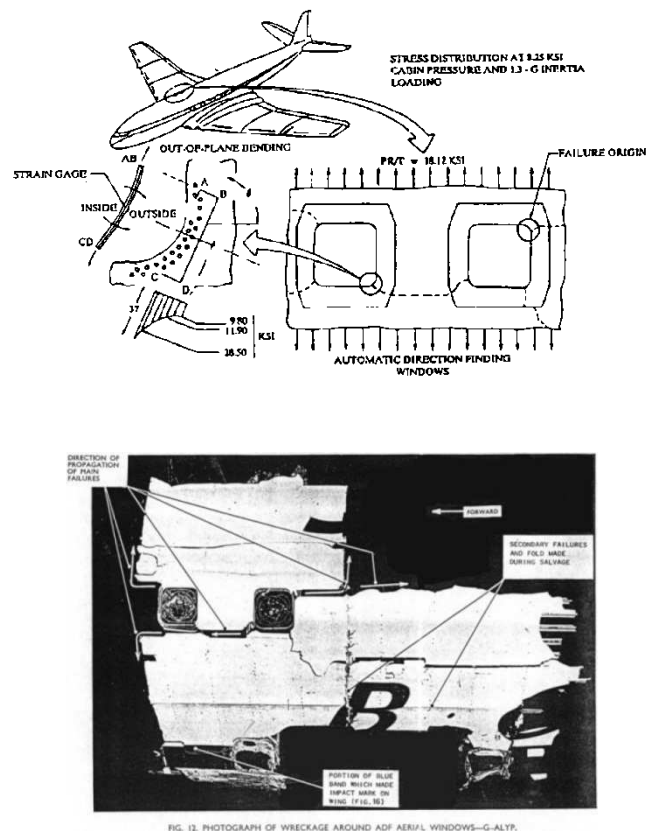


Figura 2.3: Immagine e fotografia del danneggiamento in corrispondenza dei finestrini

L'8 aprile dello stesso anno, pochi mesi dopo del precedente disastro, un altro de Havilland Comet fu protagonista di un incidente simile, mentre era in volo tra Roma e il Cairo: il volo South African Airways 201 si disintegrò inabissandosi a largo di Reggio Calabria, uccidendo i 14 passeggeri e le 7 persone dell'equipaggio.

All'epoca dell'evento erano ancora in corso le indagini sul disastro avvenuto in gennaio, ma, come per il volo BOAC 781, le cause dell'esplosione per decompressione furono attribuite all'affaticamento del metallo in corrispondenza degli angoli dei finestrini rettangolari.

Dopo il ritiro dal servizio dei Comet e lunghi accertamenti, che videro dapprima incolpate le condizioni metereologiche durante il decollo, poi altre cause che non coinvolgevano la concezione stessa dell'aereo e la sua realizzazione, le prove condotte in scala 1:1 in vasca, simulanti i cicli di pressurizzazione interna, permisero di mettere in luce il ruolo centrale assunto dalla fatica: la configurazione delle aperture, praticamente a spigolo vivo, favoriva, dopo diversi cicli di carico, la nucleazione di una cricca di fatica e la sua propagazione fino a dimensioni tali da causare il cedimento strutturale. A partire da tali accertamenti, nei successivi modelli di aerei i finestrini assunsero una forma ovale, le aperture vennero rinforzate e cambiò anche il metodo di rivettatura.



Figura 2.4: Sperimentazione in laboratorio e porzione recuperata della fusoliera

#### 2.1.1.5 Ribaltamento della piattaforma Alexander Kielland (1980)

Il 27 marzo 1980 la piattaforma petrolifera semisommersibile Alexander Kielland, di proprietà norvegese, situata nel Mare del Nord a largo della Scozia, improvvisamente si inclinò di 30° durante una tempesta con pioggia battente, nebbia, raffiche di vento fino a 40 nodi (74 km/h) e onde fino a 12 metri di altezza.

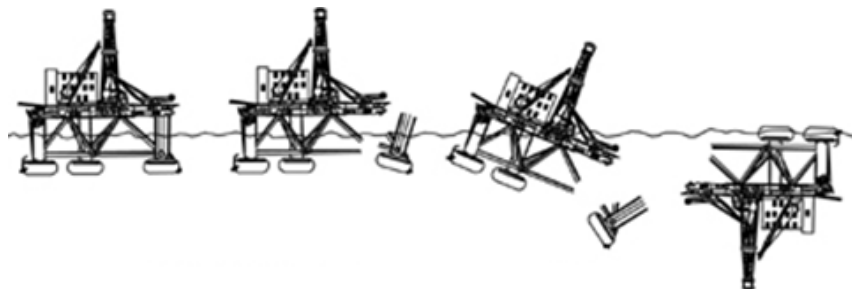


Figura 2.5: Fasi del processo di capovolgimento della piattaforma

La struttura era stata costruita come impianto di perforazione galleggiante, ma fu utilizzata per fornire alloggi ai lavoratori offshore. Lo spostamento fu dovuto al fatto che cinque dei sei cavi di

ancoraggio si spezzarono: il sesto rimase come unico vincolo contro il capovolgimento della piattaforma che si stabilizzò per qualche minuto, successivamente l'inclinazione si accentuò e, dopo circa mezz'ora, anche l'ultimo cavo si ruppe portando al capovolgimento della piattaforma. Rimasero uccisi 123 degli oltre 200 lavoratori, che si trovavano a bordo dell'Alexander Kielland avendo appena terminato il turno di lavoro sulla vicina piattaforma Edda.



Figura 2.6: Sulla sinistra la piattaforma di perforazione Edda 2/7C, sulla destra l'Alexander L. Kielland

Le indagini successive all'incidente rivelarono che il crollo fu causato da una cricca di fatica in uno dei sei controventi (sostegno D-6), che collegava il pilastro crollato (pilastro D) al resto dell'impianto di perforazione. Come origine del danno fu indicata una saldatura che collegava un elemento non portante al sostegno D-6, la cui cattiva esecuzione in stabilimento contribuì alla riduzione di resistenza a fatica del pezzo: le cricche nella saldatura determinarono l'aumento di concentrazione delle tensioni e, a seguito delle sollecitazioni cicliche dovute al moto ondoso, si giunse al collasso. Gli altri elementi strutturali portanti cedettero poi in sequenza, destabilizzando l'intera struttura.

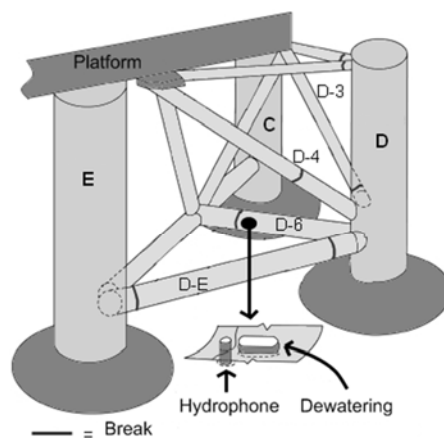


Figura 2.7: Controvento interessato dalla frattura



### 2.1.1.6 Crollo del ponte stradale sul fiume Mianus (1983)

Il 28 giugno 1983 si verificò il crollo della campata nord del ponte sul fiume Mianus, in Connecticut; il ponte, costruito nel 1958 e in servizio da soli 25 anni, aveva una sezione trasversale di 30,50 m e consentiva il passaggio dell'Interstate 95.

Tre persone morirono e altre rimasero ferite a seguito della caduta nel fiume sottostante, da oltre 21 metri di altezza, di due automobili e due autotreni, come conseguenza del collasso della campata, che fortunatamente avvenne alle ore 01.30, con traffico ridotto rispetto a quello che normalmente impegnava il ponte durante il giorno.

Il ponte era caratterizzato da campate in semplice appoggio, sostenute da travi longitudinali in acciaio poggianti complessivamente su sei pilastri, e da collegamenti a sella tra le travi portanti, con giunti a perno e piastra, più economici rispetto ad altre soluzioni progettuali e per questo diffusi negli anni '50. Non riuscendo a coprire la luce della campata con un'unica trave, il sistema prevedeva un tratto a sbalzo dalla pila e una trave sospesa collegata ad esso tramite una piastra forata e due perni passanti, uno sulla trave a sbalzo e l'altro su quella sospesa, aventi ruolo di cerniera e fissati da dadi.

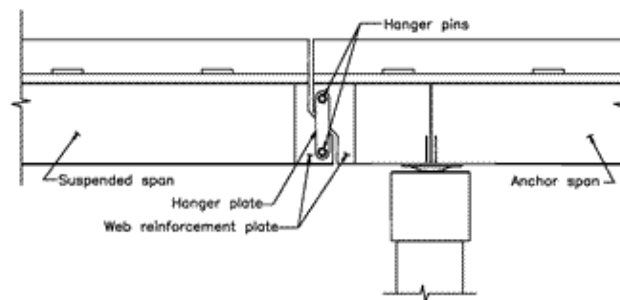


Figura 2.8: Esempio di collegamento con giunto a perno e piastra

Il collasso fu causato dal cedimento di un giunto a perno, come quello di Figura 2.8, che bloccava la campata sul lato esterno: la formazione di ruggine su uno dei due perni determinò una sollecitazione sull'unione superiore ai valori di progetto e la sua rottura; il conseguente trasferimento dell'intero carico sul rimanente perno del giunto innescò una cricca di fatica, in corrispondenza di un angolo acuto. La campata, sostenuta da soli tre appoggi, cedette al passaggio dei veicoli.

Le successive indagini accertarono che all'origine del danno vi era l'inadeguato sistema di smaltimento delle acque del ponte, i cui dreni erano stati volutamente chiusi durante le riparazioni dell'autostrada dieci anni prima e non riaperti al termine dei lavori, provocando l'infiltrazione dell'acqua piovana in corrispondenza del giunto e la formazione della ruggine sul perno. La

difficoltà di ispezione del collegamento, i controlli visivi poco accurati e il difetto di progettazione degli altri perni contribuirono al disastro.

L'incidente, oltre al problema della fatica, mise in luce l'importanza della manutenzione e dei requisiti di accessibilità e ispezionabilità nelle strutture da ponte.



Figura 2.9: La campata crollata sul fiume Mianus

#### **2.1.1.7 Incidente del volo Aloha Airlines 243 (1988)**

Il volo Aloha Airlines 243 era un volo di linea della Aloha Airlines tra le città di Hilo e Honolulu nelle Hawaii. Il 28 aprile 1988, il Boeing 737-200 subì ingenti danni in seguito ad una decompressione esplosiva avvenuta mentre si trovava alla quota di 24000 piedi (7300 m). Nonostante ciò i piloti furono in grado di atterrare in sicurezza all'Aeroporto di Kahului di Maui. L'incidente causò 65 feriti, con unica vittima l'assistente di volo, risucchiata fuori dal velivolo attraverso un buco creatosi nella fusoliera.

Nel rapporto sull'incidente, fatto dal National Transportation Safety Board, la responsabilità fu attribuita ad un inefficiente programma di manutenzione, che non permise l'individuazione di fenomeni corrosivi e di danneggiamento a fatica in corso sulla fusoliera.

#### **2.1.1.8 Incidente ferroviario di Eschede (1998)**

L'ICE (InterCity Express) 884 Wilhelm Conrad Röntgen viaggiava sulla linea tra Monaco di Baviera e Amburgo. La mattina del 3 giugno 1998, dopo una sosta a Hannover, il treno ad alta velocità ripartì in direzione nord: a sei chilometri a sud di Eschede, in Bassa Sassonia, la parte più esterna di una delle ruote del quarto vagone, si ruppe, si staccò dalla ruota e colpì il fondo della carrozza, conficcandosi in esso.

Passando sul primo di due scambi, l'elemento rimasto incastrato colpì la rotaia e la strappò dalla massicciata, facendola penetrare sul fondo del vagone, dove rimase anch'essa incastrata; questo

fece sollevare l'assale dalle rotaie e deragliare le ruote, che colpirono la leva di comando del secondo scambio e l'ultimo assale del terzo vagone fu quindi spinto su un tracciato parallelo a quello originario. Come risultato la carrozza deragliò assieme al vagone 4, schiantandosi contro i piloni del viadotto soprastante e distruggendoli. Il crollo del ponte in calcestruzzo schiacciò i vagoni seguenti e sbarrò la strada ai restanti sei, mentre, a causa della divisione dei vagoni, si attivavano i freni automatici che arrestarono la locomotiva che viaggiava a 200 km/h e le quasi intatte prime tre carrozze.



Figura 2.10: Resti del treno dopo l'incidente

L'incidente di Eschede è considerato il più grave incidente ferroviario accaduto in Germania negli ultimi cinquant'anni ed il più grave incidente avvenuto a un treno ad alta velocità. Nel disastro 101 persone morirono e più di 100 rimasero gravemente ferite.

La causa prima alla base della sfortunata catena di eventi che portò al deragliamento del treno fu la rottura a fatica della parte esterna di una delle ruote di nuova concezione, utilizzata dall'ICE al posto delle tradizionali ruote monoblocco: tentando di risolvere il problema del comfort e delle vibrazioni a bordo del treno furono realizzate delle ruote con un anello di gomma di spessore 20 mm, tra il mozzo e il bordo esterno, entrambi metallici, tipologia analoga a quella utilizzata con successo sui tram, anche se a velocità notevolmente inferiori. Il bordo esterno tuttavia si rivelò troppo sottile e l'appiattimento ad ellissoide durante i giri delle ruote portò alla propagazione di cricche di fatica con conseguente distacco del pezzo.

Le indagini accertarono inoltre che, con il consumarsi della fascia esterna, le forze dinamiche aumentavano notevolmente, accrescendo le microfratture del metallo. Nei mesi precedenti al disastro, l'autorità per i trasporti di Hannover scoprì che i bordi metallici delle ruote si consumavano troppo rapidamente rispetto alle previsioni: decise quindi di rimpiazzare tutte quelle in uso, molto prima del termine legale, e inviò una comunicazione a riguardo a tutti coloro che

usavano quella tipologia di ruote, comprese le Ferrovie Federali Tedesche, le quali tuttavia, sottovalutando il pericolo, non presero alcun provvedimento.

### 2.1.1.9 Incidente del volo China Airlines 611 (2002)

Il volo China Airlines 611 era un volo di linea della China Airlines tra Taipei e Hong Kong. Il 25 maggio 2002, mentre si trovava alla quota di 35000 piedi (circa 10600 m), l'aereo si spezzò in quattro parti e precipitò in mare, uccidendo tutte le persone a bordo. Il rapporto finale delle indagini rivelò che l'incidente avvenne per affaticamento del metallo, causato da manutenzione inadeguata dopo un precedente incidente: il 7 febbraio 1980 l'aereo aveva infatti subito danni da *tailstrike* durante la fase di atterraggio all'aeroporto di Hong Kong; dopo ripetuti cicli di depressurizzazione e di pressurizzazione durante il volo, la fusoliera indebolita cominciò a comprimersi e si staccò durante il volo del 25 maggio 2002, 22 anni dopo la riparazione. La decompressione esplosiva conseguente all'apertura della falla provocò la completa disintegrazione del velivolo.

### 2.1.1.10 Incidente del volo Chalk's Ocean Airways 101 (2005)

Il 19 dicembre 2005 il volo di linea Chalk's Ocean Airways 101, da Fort Lauderdale, Florida, a Bimini, Bahamas, si schiantò in mare al largo di Miami Beach subito dopo il decollo, in seguito ad un cedimento strutturale.

Il distacco dell'ala destra e la successiva caduta nell'oceano del velivolo furono provocati da una rottura a fatica del metallo dell'ala, imputabile a carenze nel sistema di manutenzione della Chalk's Ocean Airways, che non permisero di identificare e riparare le cricche da fatica sull'ala destra.

### 2.1.1.11 Incidente ferroviario di Viareggio (2009)



Figura 2.11: Resti dei carri cisterna coinvolti nell'incidente

La sera del 29 giugno 2009 avvenne il deragliamento del treno merci Trecate-Gricignano: il primo carro cisterna del convoglio, costituito complessivamente da quattordici carri cisterna contenenti GPL, trascinò fuori dai binari altri quattro carri. Dal primo, la cui cisterna si perforò nell'urto, fuoriuscì il gas GPL che al contatto con l'ossigeno e alla prima possibilità d'innesco prese fuoco, dando origine ad un incendio di vaste proporzioni che coinvolse la stazione di Viareggio e le aree circostanti. Undici persone morirono in pochi minuti, investite dalle fiamme o travolte dal crollo degli edifici, e decine furono ferite; di esse molte rimasero gravemente ustionate e la maggior parte morì, anche a distanza di diverse settimane dall'evento. In totale si contarono 31 morti (33 contando i due deceduti per infarto) e 25 feriti.

In attesa delle conclusioni ufficiali delle commissioni di inchiesta, la probabile causa dell'incidente è attribuibile al cedimento strutturale di un'asse del carrello del primo carro cisterna deragliato. Esso è risultato tranciato nella parte che sporge dalla ruota, detta fusello, poco prima della boccola, che consente all'asse stesso e alle ruote di girare: le foto di Figura 2.12 sembrano confermare che l'incidente sia stato provocato dalla rottura dell'asse per fatica (cricca della boccola), dato che la sezione fratturata mostra caratteristiche tipiche di questo tipo di rottura per il 90% della sua superficie, modalità che avrebbe dovuto essere evitata dalle stringenti procedure cicliche di controllo e da opportune operazioni di manutenzione.

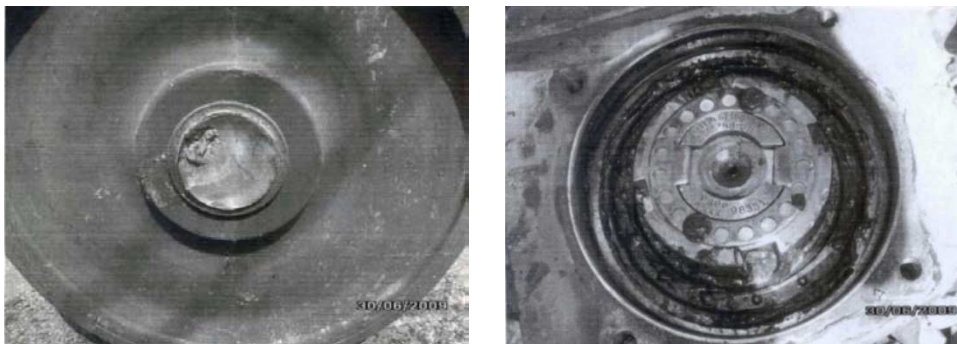


Figura 2.12: Asse del treno fessurato e parzialmente corroso dalla ruggine e probabile difetto di saldatura

## **2.2 EVOLUZIONE DEGLI STUDI**

La consapevolezza dell'importanza dei fenomeni di fatica viene di fatto acquisita a partire dall'impiego diffuso dei metalli per la realizzazione di elementi strutturali.

Risulta quindi evidente l'importanza degli esempi precedentemente citati, poiché proprio il verificarsi di rotture e incidenti ha portato l'attenzione su questo tipo di danno e ha stimolato gli studi, la sperimentazione e la ricerca in tal senso, portando ad una comprensione sempre maggiore del fenomeno, il quale continua tuttora ad essere indagato e, purtroppo, ad essere causa di disastri.

Si ripercorrono sinteticamente le tappe principali dello studio della rottura a fatica, per comprendere l'evoluzione del pensiero e lo sviluppo dei metodi di approccio al problema.

### **2.2.1 Prima dell'Ottocento**

All'inizio dell'Ottocento la rottura a fatica era una modalità sostanzialmente sconosciuta. Fino a tale momento si era affrontato il problema della caratterizzazione del comportamento dei materiali e dello stato di sollecitazione degli elementi strutturali per determinare le cause di eventi di rottura con conseguenze anche catastrofiche, tuttavia i problemi erano generalmente associati ad eccessive sollecitazioni oppure a carenze di tipo progettuale, costruttivo o intrinseche dei materiali utilizzati.

I primi studi dedicati alla frattura sono in termini di forze, non di tensioni, collegate all'evento finale della rottura, con riferimento alle singole categorie di prodotti (fili, travi, ecc.) e alla loro tecnologia di produzione, invece che essere rivolti alla caratterizzazione del materiale.

La capacità di progettare e costruire senza bisogno di una scienza dei materiali o di quella delle costruzioni non ha promosso lo studio di tensioni e deformazioni né la ricerca e lo sviluppo di materiali funzionali al miglioramento delle prestazioni.

Forza e deformazione vengono collegati tramite una relazione lineare da Robert Hooke (1635-1703) alla fine del XVII secolo, ma solo con Augustin Cauchy (1789-1857), nel XIX secolo, si arriva ad una trattazione moderna, con riferimento a tensioni e deformazioni applicate ad un mezzo continuo.

### **2.2.2 Individuazione del fenomeno**

Con la rivoluzione industriale, lo sviluppo del trasporto meccanizzato e, in generale, con l'utilizzo sempre più esteso di dispositivi meccanici e dei materiali metallici la fatica diventa una tematica di importanza crescente.

#### **2.2.2.1 Wilhelm August Julius Albert (1787-1846)**

I primi studi sul fenomeno della fatica vengono sviluppati in Germania dall'ingegnere minerario tedesco Wilhelm August Julius Albert, il quale, a partire dal 1829, analizza il fenomeno della rottura di catene di sollevamento utilizzate nelle miniere di ferro che si trovavano sotto la sua responsabilità, notando che queste non si rompevano a causa di incidentali sovraccarichi, ma che piuttosto la rottura, netta nonostante la buona qualità del materiale utilizzato, era dipendente dal carico e dal numero delle volte che esso era applicato. Per poter condurre gli esperimenti a carico ripetuto egli costruisce anche una macchina di prova, che consente di sollecitare in maniera controllata le catene oggetto del suo studio.

#### **2.2.2.2 Jean Victor Poncelet (1788-1867)**

Parallelamente all'impiego dei materiali in condizioni sempre più gravose ed al verificarsi di eventi incidentali con conseguenze spesso catastrofiche, si sviluppa lo studio del fenomeno; il termine fatica viene definitivamente associato ad una particolare modalità di rottura dei materiali metallici quando, nel 1839, Jean-Victor Poncelet, in un ciclo di lezioni presso la scuola militare di Metz, descrive i metalli sollecitati ripetutamente con carichi non elevati come stanchi. Egli si concentra sull'osservazione di molle, che, sollecitate da una forza ciclica inferiore alla resistenza massima, si rompono.

#### **2.2.2.3 William John Macquorn Rankine (1820-1872)**

Verso la metà dell'Ottocento, con l'avvento del trasporto ferroviario, hanno luogo una serie di incidenti: il primo fra questi è quello, già citato, di Versailles nel 1842. L'osservazione dell'inusuale superficie di frattura lamellare con cristalli di grandi dimensioni, decisamente diversa da quella comune, porta a identificare erroneamente il meccanismo di rottura in una trasformazione interna del materiale, una sorta di ricristallizzazione, dovuta alla sollecitazione ciclica: tale meccanismo è stato successivamente riportato in letteratura fino agli anni '50.

Tra i primi ingegneri a riconoscere che la rottura per fatica degli assali ferroviari è dovuta all'innesco ed all'avanzamento di cricche vi è William John Macquorn Rankine, il quale, dopo l'incidente ferroviario di Versailles, esamina numerosi assali ferroviari fratturati, individuando correttamente la causa della rottura nell'innesco della cricca in corrispondenza di punti di intensificazione delle sollecitazioni. Le conclusioni del suo lavoro vengono purtroppo a lungo ignorate.

### **2.2.3 Sviluppo delle procedure sperimentali**

Una volta individuato il fenomeno di fatica, il principale obiettivo degli studi diventa quello di definire delle procedure sperimentali in grado di quantificare la resistenza a fatica di un determinato materiale, in termini di numero di cicli a rottura.

#### **2.2.3.1 August Wöhler (1819-1914)**

Nella seconda metà dell'Ottocento, gli studi sistematici di Sir William Fairbairn, principalmente su grandi manufatti, e di August Wöhler, sugli assali ferroviari, permettono di definire meglio il problema della rottura degli elementi metallici nel caso di sollecitazioni ripetute con valori del carico inferiori al carico di rottura del materiale. In particolare Wöhler, ingegnere ferroviario tedesco e direttore delle ferrovie imperiali prussiane dal 1854 al 1869, affronta in modo sistematico e sperimentale lo studio della fatica degli assali ferroviari, costruendo apposite macchine di prova,

interessandosi principalmente alla prova di fatica a flessione rotante e introducendo il concetto di limite di fatica. Per primo, egli mette in evidenza come per questo tipo di rottura sia più importante il campo di variazione della tensione che non il valore massimo raggiunto dalla stessa.

Wöhler riporta i risultati ottenuti sotto forma di tabelle; solo in seguito il suo successore, Spangenberg, direttore dell'istituto di ricerca *Mechanisch Technische Versuchsanstalt*, riporta i risultati in un grafico, con assi lineari. A partire dal 1936 le curve S-N vengono denominate curve di Wöhler.

### 2.2.3.2 Johann Bauschinger (1834-1893)

Alcuni anni dopo la pubblicazione dei risultati di Wöhler, Johann Bauschinger, imponendo ad un materiale metallico dei cicli di deformazione in trazione e compressione compresi tra valori di pari intensità e tali da superare lo snervamento, rileva un particolare andamento della curva  $\sigma - \epsilon$ , diverso da quello tipico per un carico monotono, con un valore di snervamento a compressione inferiore a quello ottenuto durante la prima sollecitazione a trazione. Il fenomeno viene definito in seguito come effetto Bauschinger e consiste appunto nella diminuzione del valore della tensione di snervamento a compressione (o trazione) dopo l'applicazione di un sforzo di segno opposto di trazione (o compressione) che ha prodotto deformazioni plastiche. Risulta evidente che anche solo una inversione di segno della deformazione inelastica può modificare il comportamento del materiale.

### 2.2.3.3 Edwing e Humfrey

Nel corso del Novecento l'impiego del microscopio ottico consente di studiare il meccanismo della fatica e di associarlo alla formazione di bande di scorrimento nel materiale, con conseguenze sulla superficie del pezzo. Nel 1903, Ewing ed Humfrey esaminano e documentano sistematicamente la formazione di cricche superficiali in un provino sollecitato ciclicamente in laboratorio: essi evidenziano l'aumento della presenza di linee di scorrimento con il procedere della sollecitazione ciclica ed il loro effetto sulla formazione delle cricche di fatica.

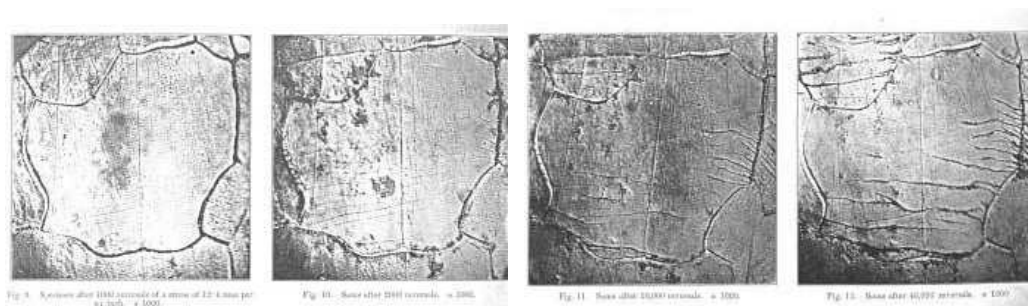


Figura 2.13: Micrografie di un acciaio per valori crescenti del numero di cicli di fatica



### 2.2.3.4 O.H. Basquin

Nel 1910 Basquin rappresenta la regione a vita finita delle curve di Wöhler utilizzando gli assi logaritmici  $\log\sigma_a - \log N$ , descrivendo questa zona con la semplice formula:

$$\sigma_a = \sigma_f (N_f)^n$$

Egli tabella i valori sperimentali per i coefficienti  $\sigma_f$  e  $n$ , utilizzando principalmente i valori ottenuti da Wöhler più di cinquant'anni prima.

## 2.2.4 Caratterizzazione della vita a fatica

La successiva fase di studi cerca di superare i limiti della trattazione semplificata di Wöhler, i cui risultati sono legati alla condizione che le prove siano svolte con ampiezza di carico costante. Diversi autori cercano quindi di estendere i risultati ottenuti ed elaborare nuovi metodi con validità più ampia per la trattazione del problema. Tra gli anni '30 e '40 numerose sono le prove sperimentali per stabilire quali fattori influenzino la vita a fatica e con quali effetti.

### 2.2.4.1 Palmgren e Miner

Nel 1945 Miner divulga ed implementa un approccio sviluppato venti anni prima da Palmgren, proponendo l'accumulo lineare del danno a seguito di sollecitazioni applicate di ampiezza differente. Secondo questo approccio, il danno accumulato dal materiale per effetto della sollecitazione ciclica è proporzionale al rapporto tra il numero di cicli che il componente ha subito  $n$  ed il numero di cicli  $N$  che provoca la rottura, entrambi per un dato livello di sollecitazione.

Il danno complessivo accumulato dal materiale per effetto della successione di carichi ciclici è quindi ottenuto mediante la sommatoria dei danni relativi ad ogni livello di carico:

$$D = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots$$

La rottura si verifica se

$$D = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \geq 1,0$$

Il metodo di Miner e la sua applicazione nel caso di tensioni di ampiezza variabile vengono successivamente sviluppati da Tatsuo Endo e Matsuishi, i quali nel 1968 elaborano il metodo del flusso di pioggia, esposto anche nella Circolare esplicativa delle Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni del 2008 al § 4.2.4.1.4.2 [15] e illustrato al paragrafo 5.1.1 della presente trattazione.

#### 2.2.4.2 Coffin e Manson

Coffin e Manson definiscono delle relazioni quantitative tra la deformazione plastica e la vita a fatica; entrambi affrontano il problema della fatica nei materiali metallici sottoposti ad elevate temperature, nei quali la deformazione inelastica non può essere trascurata.

Nel 1954, Coffin e Manson, lavorando indipendentemente su problemi di fatica termica, propongono una caratterizzazione della vita a fatica basata sull'ampiezza della deformazione plastica, nel caso di fatica a basso numero di cicli (*Low Cycle Fatigue*, LCF). Tale idea nasce dall'osservazione che il legame fra il logaritmo dell'ampiezza della deformazione plastica  $\Delta\varepsilon_p/2$  ed il logaritmo del numero di cicli a rottura  $2N_f$  è sostanzialmente lineare. La relazione proposta è la seguente:

$$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon_f (2N_f)^c$$

#### 2.2.5 Meccanica della frattura

Nella seconda metà del Novecento, ormai consolidato il concetto secondo cui la rottura per fatica è strettamente dipendente dai meccanismi di innesco e propagazione delle cricche, ci si serve della meccanica della frattura a scopo ingegneristico per la caratterizzazione della resistenza a fatica nei materiali metallici. Contemporaneamente l'introduzione del microscopio elettronico contribuisce alla migliore comprensione dei meccanismi di fatica.

Fra gli anni '70 e '90, grazie all'interesse dimostrato dall'industria, primi fra tutti i settori nucleare e aerospaziale, si registra un incremento dell'attività di ricerca sperimentale, focalizzando l'attenzione sull'importanza della presenza di difetti preesistenti negli elementi, sui meccanismi di propagazione della cricca e sulla loro interazione con la microstruttura delle diverse leghe metalliche.

L'approfondimento del tema e il sempre maggiore livello di conoscenza raggiunto sull'argomento portano al superamento delle trattazioni precedenti e alla necessità di studiare nuovi aspetti del problema, precedentemente trascurati o semplificati. Si osserva ad esempio il rallentamento della propagazione della cricca dovuto alla presenza di un campo di sforzi residui di compressione all'apice della stessa, fenomeno che mette in luce i limiti dell'approccio di Palmgren e Miner e la linearità della legge di accumulazione del danno.

Le cause dei recenti sviluppi in questo campo sono da ricercare, oltre che nel crescente interesse per la tematica, anche nell'incremento della potenza di calcolo, nell'utilizzo di diverse tecniche numeriche (ad esempio, ma non unicamente, gli elementi finiti), l'uso di strumentazione ad elevato livello tecnologico. Vengono infatti impiegati oggi calcolatori potenti, microscopi elettronici a scansione (SEM) caratterizzati da prestazioni decisamente superiori a quelle dei decenni passati, e

apparecchiature di prova più avanzate, come le macchine per prove di fatica ad altissimo numero di cicli (*Very High Cycle Fatigue*, VHCF) che, permettendo sollecitazioni a frequenze di migliaia di Hz, consentono di applicare in tempi accettabili un numero di sollecitazioni pari o anche superiori a  $10^9$ .

### 2.2.5.1 Irwin e Paris

Nel 1957 viene introdotto da Irwin il fattore di intensificazione degli sforzi  $K$ , che descrive il campo tensionale elastico in prossimità dell'apice della cricca, riconosciuto come la base della meccanica della frattura lineare elastica (*Linear Elastic Fracture Mechanics*, LEFM). Nei primi anni sessanta Paris ed altri autori definiscono in modo quantitativo l'accrescimento della cricca, proponendo che la velocità di avanzamento della cricca per ciclo di sollecitazione sia correlabile con la variazione del fattore di intensificazione introdotto da Irwin, secondo la semplice formula:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m$$

in cui

$da/dN$	velocità di accrescimento della cricca;
$a$	lunghezza della cricca;
$K$	fattore di intensificazione di tensione;
$C, m$	parametri da prove sperimentali dipendenti dal materiale.

Nei decenni successivi vengono proposte diverse formulazioni, alcune delle quali in grado anche di descrivere la correlazione fra  $da/dN$  e  $\Delta K$  oltre lo stadio lineare (zona di soglia e di rottura di schianto), tuttavia l'approccio proposto da Paris, con la relazione che da lui prende il nome, rimane la soluzione di maggior successo.

### 2.2.5.2 Elber

Alcuni anni dopo, Elber evidenzia per primo il fenomeno del *crack closure* sulla propagazione della cricca, ossia il rallentamento dello sviluppo della cricca a seguito della produzione di deformazione plastica, mostrando l'influenza della plasticizzazione all'apice della cricca, della rugosità della superficie di frattura e della formazione di ossidi sul valore effettivo di  $\Delta K$  all'apice.

### 2.2.5.3 Wells

Wells rileva che la meccanica della frattura lineare elastica cessa di essere valida nel momento in cui la frattura è preceduta da rilevanti deformazioni plastiche e non può pertanto essere applicata agli acciai strutturali aventi media e bassa resistenza, poiché troppo duttili. Dall'osservazione che le

facce della cricca si separano durante la deformazione plastica, egli propone di utilizzare tale spostamento come criterio per la frattura, indicandolo come CTOD, *Crack Tip Opening Displacement*. A partire dalla fine degli anni '60, il parametro di Wells viene largamente usato in Inghilterra per l'analisi della frattura nelle strutture saldate.

#### **2.2.5.4 Rice**

Nel 1968 Rice idealizza la deformazione plastica come elastica non lineare e propone di caratterizzare il comportamento non lineare del materiale all'apice della cricca attraverso un nuovo parametro. Egli generalizza la quantità di energia rilasciata, rappresentandola attraverso un integrale di linea, chiamato integrale  $J$ , calcolato lungo un arbitrario contorno della cricca e valido per i materiali non lineari. Successivamente Rice mette in relazione tale integrale con il campo tensionale presente all'apice della cricca nei materiali con questo tipo di comportamento:  $J$  può essere visto, quindi, come un parametro di intensità di tensione nel caso non lineare, allo stesso modo della quantità di energia liberata. Gli studi di Rice vengono sviluppati negli Stati Uniti all'inizio degli anni '70, grazie alla spinta da parte del settore dell'energia nucleare, definendo le relazioni matematiche che legano resistenza, tensione e dimensione dei difetti.

## *Capitolo 3*

# **LA FATICA**

### **3.1 DEFINIZIONE DEL FENOMENO**

La fatica è un fenomeno meccanico per cui un materiale, sottoposto a carichi variabili nel tempo, si danneggia fino a rottura, nonostante l'intensità massima delle sollecitazioni applicate sia inferiore al valore di rottura o a quello di snervamento statico del materiale stesso.

Il fenomeno riveste un ruolo particolarmente importante perché spesso risulta invisibile, ossia non si ha modo di riconoscere la situazione in cui si è in prossimità del numero di cicli che porta a rottura il pezzo: la fatica, infatti, avviene in modo fragile e improvviso, senza manifestare segnali di preavviso nemmeno nei materiali duttili, per i quali invece il cedimento statico è solitamente preceduto da grandi deformazioni plastiche che preannunciano l'imminente collasso.

Tale tipo di rottura risulta pertanto particolarmente insidiosa, sia per il suo manifestarsi inaspettato sia perché avviene in esercizio con carichi relativamente modesti; ovviamente l'alterazione delle condizioni d'uso dell'elemento rispetto a quelle previste in sede di progetto e in conformità alla norma, come ad esempio lo sviluppo di corrosione, aumentano le probabilità di una possibile rottura a fatica.

L'American Society for Testing and Materials (ASTM) ha definito la fatica come "il processo localizzato e progressivo di modifica della microstruttura di un materiale soggetto a condizioni ambientali che producono tensioni e deformazioni cicliche in uno o più punti e che si conclude con la fessurazione o la frattura completa dopo un sufficiente numero di cicli".

La definizione stessa suggerisce il ruolo centrale svolto dalle microfessure nel materiale, la cui crescita, a seguito dell'applicazione di carichi ripetuti, porta alla rottura dell'elemento.

### 3.2 ASPETTO MICROSCOPICO

Ogni processo di frattura prende avvio con la formazione di fenditure microscopiche dette cricche e si sviluppa attraverso la loro propagazione.

La vita a fatica è solitamente suddivisa in due fasi: la formazione della cricca e il suo accrescimento. Questa separazione è utile poiché alcuni fattori possono condizionare significativamente una delle due fasi, ma avere scarsa influenza sull'altra.

In realtà la divisione tra la fase di formazione della cricca e il suo sviluppo è abbastanza arbitraria; da un punto di vista ingegneristico si assume che la distinzione avvenga quando le microfessure raggiungono dimensioni tali da costituire una cricca vera e propria e la concentrazione di tensioni assume il valore critico di propagazione per il materiale.

Il numero di cicli interessato dall'una o dall'altra fase dipende dal tipo di materiale e dal carico applicato: maggiore è lo sforzo, più breve è la fase iniziale di nucleazione, mentre per basse tensioni, come nel caso di fatica ad elevato numero di cicli, la maggior parte della vita è impiegata per la formazione della cricca.

La Figura 3.1 riassume quanto illustrato.

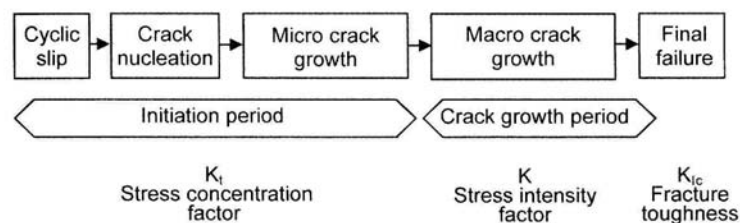


Figura 3.1: Fasi della vita a fatica e fattori che le caratterizzano

#### 3.2.1 Frattura fragile e frattura duttile

I meccanismi che portano alla frattura di un materiale sono la propagazione di una cricca o lo scorrimento plastico; il cedimento del materiale avviene per effetto del meccanismo che richiede una minore energia. Da questo punto di vista si possono distinguere i materiali a comportamento fragile e quelli a comportamento duttile.

Nei primi la frattura avviene completamente in campo elastico, senza deformazioni permanenti: il danno microstrutturale si concentra in corrispondenza dei difetti localizzati assumendo

direttamente la forma di una piccola fessura che si propaga rapidamente, vincendo le forze coesive interne al materiale. La superficie di frattura presenta un aspetto liscio. In questi materiali la propagazione della cricca richiede un'energia minore rispetto a quella necessaria per il superamento dello sforzo di snervamento e la frattura avviene con basso assorbimento di energia.

Nei materiali duttili, come ad esempio i metalli, la rottura sotto carico monotono è preceduta da rilevanti deformazioni plastiche e la superficie di frattura appare granulata. In questo caso la movimentazione delle dislocazioni avviene prima della propagazione della cricca e si ha un notevole assorbimento di energia. Tuttavia, nel caso della fatica, il meccanismo di rottura è comunque di tipo fragile, nonostante si manifestino deformazioni plastiche in piccole zone localizzate all'apice delle cricche.

La distinzione nelle due categorie non è rigida e il comportamento di uno stesso materiale può variare in relazione alla temperatura, alla velocità di deformazione e alle condizioni di applicazione dello sforzo.

### **3.2.2 Deformazioni plastiche**

Le deformazioni plastiche sono il risultato dello spostamento permanente di atomi o gruppi di essi dalle loro posizioni originali nel reticolo; al cessare della sollecitazione gli atomi non ritornano in posizione, ma conservano la collocazione spostata raggiunta. I materiali cristallini, come i metalli, sono soggetti a deformazione plastica come risultato dello scorrimento lungo piani cristallografici ben definiti, detti piani di facile scorrimento. Tipico dei metalli è il fenomeno dell'incrudimento: esso consiste nella necessità di aumentare con continuità la sollecitazione applicata per far progredire la deformazione plastica, come conseguenza del fatto che il materiale diventa sempre più duro e resistente all'avanzare della deformazione.

In un cristallo perfetto la deformazione plastica potrebbe avvenire mediante lo slittamento simultaneo di una parte del cristallo sull'altra, lungo un determinato piano di atomi, detto piano reticolare, fino a produrre sulla superficie un gradino esteso quanto il numero delle distanze reticolari che hanno rappresentato lo scorrimento stesso. In realtà, dall'osservazione al microscopio elettronico, emerge che la deformazione inizia in piccole aree del reticolo cristallino con lo sviluppo di bande di scorrimento persistente o PSB (*Persistent Slip Bands*), aventi l'orientamento più vantaggioso rispetto alla sollecitazione agente, che progressivamente si estendono a tutto il piano del reticolo, formando all'estremità del cristallo, lungo questi piani, dei gradini. Inoltre si osserva che lo sforzo teorico minimo necessario per causare lo scorrimento di un piano reticolare su un altro, verificato in laboratorio con prove su sottilissimi filamenti monocristallini esenti da difetti, risulta essere di diversi ordini di grandezza maggiore rispetto ai valori effettivamente

riscontrati nella pratica; la ragione di ciò è da ricercare nella presenza di imperfezioni contenute all'interno dei cristalli.

Quando il numero di bande di scorrimento raggiunge un livello di saturazione, le più severe si trasformano in microfratture interne al grano e si estendono successivamente ai grani vicini.

La deformabilità plastica di un materiale metallico è direttamente legata alla presenza in esso di difetti di linea, detti dislocazioni: uno scorrimento macroscopico corrisponde, infatti, all'attraversamento del cristallo da parte di un gran numero di dislocazioni, la maggior parte delle quali si originano nel corso della deformazione stessa, attraverso meccanismi di produzione e moltiplicazione.

La dislocazione è in grado di muoversi attraverso il cristallo, provocando scorrimenti plastici, sotto sollecitazioni molto inferiori a quelle richieste per lo scorrimento rigido dei piani cristallografici, in quanto coinvolge solo alcuni legami nell'ambito dell'intero cristallo, pur producendo effetti del tutto simili. In generale, l'energia richiesta per mettere in movimento una dislocazione dipende dal tipo di reticolo cristallino del materiale sottoposto a sollecitazione e dalla densità di atomi presenti sul piano cristallografico.

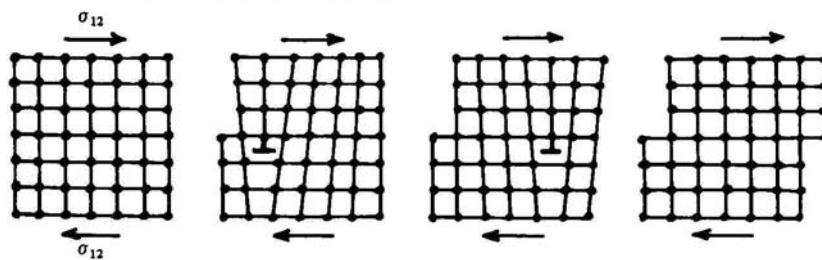


Figura 3.2: Moto di una dislocazione

I difetti superficiali, costituiti dai bordi di grano che separano i diversi grani cristallini, non sono superabili dalle dislocazioni in movimento; in corrispondenza di essi si ha una variazione delle direzioni di slittamento dei singoli grani, a seconda della diversa orientazione dei grani stessi, e un accumulo delle dislocazioni.

Il fenomeno dell'incrudimento nei materiali metallici dipende dalle dislocazioni: una volta iniziata la deformazione plastica, una parte delle dislocazioni prodotte rimane imprigionata all'interno del cristallo per effetto di ostacoli di varia natura, come le inclusioni o i bordi dei grani. Si creano delle foreste di dislocazioni immobili, che impediscono il moto delle nuove dislocazioni, che devono attraversarle per uscire dal cristallo; tale effetto è rilevabile da un punto di vista macroscopico come un'accresciuta durezza e una difficoltà a provocare un'ulteriore deformazione plastica del materiale.



L'accumulo di energia interna durante la deformazione plastica, soprattutto ai bordi dei grani, viene eliminato con trattamenti termici, che, attraverso la maggiore mobilità atomica consentita dall'innalzamento della temperatura, permettono al materiale di tornare al normale stato di equilibrio.

Sebbene la rottura a fatica avvenga in assenza di deformazioni plastiche a livello macroscopico, tali deformazioni sono molto importanti poiché si manifestano localmente e il loro sviluppo in corrispondenza dell'apice della cricca governa la propagazione della cricca stessa.

I movimenti lungo le bande di scorrimento provocano irregolarità superficiali che si manifestano come sporgenze e rientranze: l'analisi al microscopio elettronico rivela sulla superficie del metallo microintrusioni e microestrusioni delle dimensioni di  $0,1-1\ \mu\text{m}$  conseguenti all'applicazione di carichi ciclici, in corrispondenza delle quali si hanno concentrazioni di tensione e, quindi, condizioni che favoriscono l'insacco della cricca.

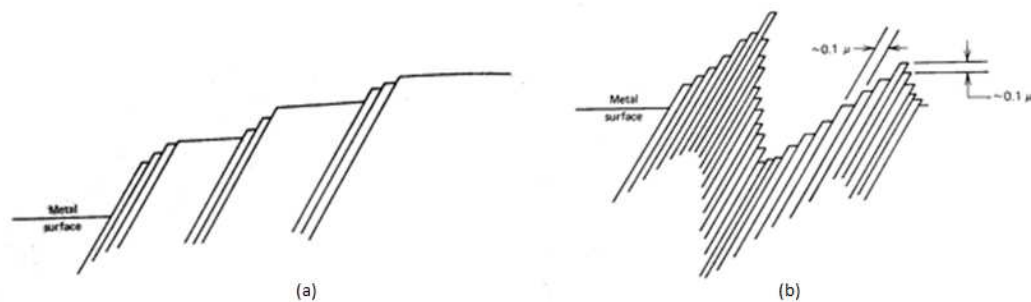


Figura 3.3: Intrusioni ed estrusioni sulla superficie metallica (a) per carico statico e (b) sollecitazione ciclica

### 3.2.3 Fasi della vita a fatica

#### 3.2.3.1 Nucleazione della cricca

Le indagini a livello microscopico condotte nel corso del Novecento hanno messo in luce come il fenomeno prenda avvio da piccole microcricche in corrispondenza delle bande di scorrimento, che si formano, in modo praticamente istantaneo al momento dell'applicazione del carico, nei grani i cui piani di scorrimento sono più favorevolmente orientati rispetto alla sollecitazione esterna e che poi crescono in dimensione e numero, interessando più grani.

Anche se il carico macroscopico esterno rimane sempre al di sotto del valore di snervamento, localmente il valore dello sforzo può superare tale limite a seguito dell'intensificazione delle tensioni in corrispondenza di microintagli e discontinuità, quali bordi di grano, inclusioni e rugosità superficiale. Ciò determina la manifestazione a livello locale di deformazioni plastiche, come risultato del movimento delle dislocazioni all'interno del reticolo cristallino, limitate ad un piccolo

numero di grani del materiale, poiché il livello tensionale, inferiore al valore di snervamento, è modesto.

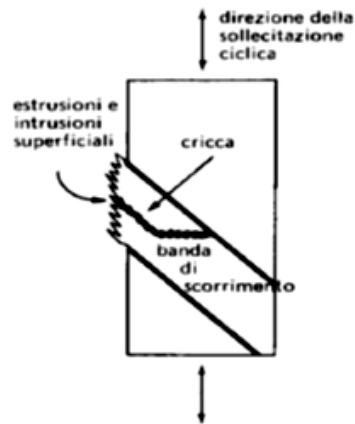


Figura 3.4: Nucleazione della cricca

La nucleazione delle microcricche è favorita in corrispondenza della superficie libera dell'elemento per un concorso di cause:

- essendo il materiale presente solamente su un lato, la deformazione, impedita in misura minore, può avvenire per tensioni inferiori;
- in superficie sono in genere presenti difetti microscopici (rugosità superficiale, micro-intagli, ecc.) che favoriscono l'innescio;
- sulla superficie possono essere presenti intagli o cavità che determinano la concentrazione delle tensioni in corrispondenza di essi;
- in superficie sono massimi gli sforzi dovuti alle sollecitazioni di flessione e torsione.

Anche se la superficie viene lavorata in modo da eliminare le irregolarità che possono dare avvio alla frattura, il materiale, a seguito dell'innescarsi dei fenomeni di scorrimento, ricrea le irregolarità attraverso la formazione delle già citate microintrusioni e microestrusioni.

La superficie dell'elemento metallico riveste quindi un ruolo importante per la vita a fatica del pezzo ed è necessario prestare la giusta attenzione alla finitura superficiale degli elementi impiegati. Per prevenire il danneggiamento per fatica o per migliorare la resistenza ad esso, oltre a fare in modo che l'elemento non presenti intagli o brusche variazioni di sezione che possano amplificare localmente gli sforzi e favorire la nucleazione di cricche di fatica, si ricorre a trattamenti superficiali di vario genere con differenti risultati; essi sono esposti con maggiore dettaglio al paragrafo 3.4.2.

A differenza di quanto avviene nei materiali duttili come i metalli, che sono oggetto della presente trattazione, nei materiali a comportamento fragile non si ha la formazione delle bande di

scorrimento e le microcricche si formano direttamente in corrispondenza di discontinuità, come inclusioni e vuoti, e da qui procedono lungo i piani in cui è massimo lo sforzo di trazione.

In generale molte microcricche arrestano il loro sviluppo e solo alcune raggiungono profondità di alcune decine di  $\mu\text{m}$ .

### 3.2.3.2 Propagazione della cricca

All'interno del processo di accrescimento delle cricche, che si formano in corrispondenza delle bande di scorrimento locali, si possono individuare due fasi, indicate come stadio I e stadio II.

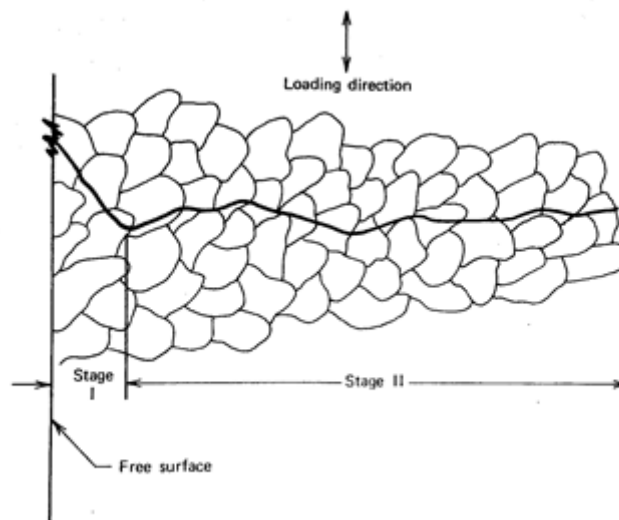


Figura 3.5: Stadio I e II di sviluppo della cricca

Lo stadio I riguarda l'accrescimento delle microcricche e può anche essere considerato come facente parte della fase di nucleazione precedentemente descritta. Durante questa fase la cricca si sviluppa dalla superficie e cresce nel piano in cui sono massime le tensioni tangenziali, nel caso di trazione monoassiale con inclinazione di  $45^\circ$ ; tale crescita è solitamente di modesta estensione e coinvolge solo alcuni grani. In molti casi, per i materiali metallici, questa fase interessa la maggior parte della vita a fatica del pezzo.

Al procedere della sollecitazione ciclica, le microcricche tendono ad unirsi e a formare una macrocricca, determinando l'inizio della fase di propagazione vera e propria, indicata come stadio II. La cricca così formata cresce perpendicolarmente alla massima tensione di trazione all'interno del materiale, scaricando parzialmente le altre microcricche e generando una forte concentrazione di tensione all'apice. Il suo sviluppo risulta essere un fenomeno legato non più alle condizioni superficiali, ma alla resistenza del materiale: si manifesta un'estensione sia intercrystallina, lungo i bordi dei grani, sia transcrystallina, con attraversamento dei bordi dei grani,

più frequente e con maggiore estensione rispetto al primo tipo di crescita. Il materiale non può più essere considerato come un mezzo continuo ed omogeneo dal punto di vista macroscopico.

Ad ogni ciclo di sforzo, la cricca avanzando può lasciare tracce caratteristiche: su entrambe le superfici di frattura si manifestano piccole rughe o avvallamenti, dette striature; il loro aspetto è simmetrico sulle due superfici di frattura affacciate. Se il ciclo di carico rimane costante, con riferimento al valore massimo, le striature vicino all'origine sono estremamente piccole e vicine tra di loro; all'avanzare della frattura, la sezione resistente si riduce e, a parità di carico massimo, aumenta la tensione applicata, determinando un aumento della spaziatura tra le striature.

Tali segni non sono sempre visibili sulla superficie del metallo e possono essere facilmente confusi quando si analizzano fratture di metalli a struttura lamellare: in questo caso l'orientamento delle lamelle varia casualmente da un punto all'altro, mentre le striature sono solitamente concentriche intorno all'origine della microcricca.

L'accrescimento della cricca si verifica ad ogni ciclo di sollecitazione con un meccanismo ripetitivo di arrotondamento e affilamento del suo apice: quando la cricca viene sollecitata a trazione, i suoi lembi vengono distanziati e all'apice deve formarsi una superficie; quando poi la sollecitazione si inverte la cricca viene compressa e i lembi si avvicinano, la nuova superficie appena creata viene schiacciata e in tal modo va ad allungare il lembi della cricca.

La velocità di avanzamento della cricca rientra nell'ambito della teoria della meccanica della frattura.

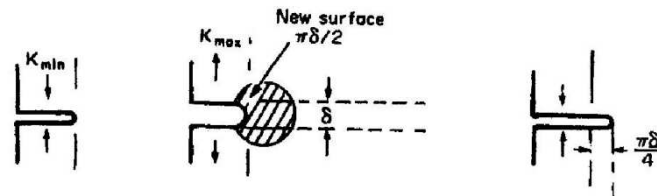


Figura 3.6: Meccanismo di accrescimento di una cricca sottoposta a cicli alternati di trazione e compressione

All'apice della cricca si ha intensificazione degli sforzi; se il materiale è duttile, come nel caso dei metalli, si ha deformazione plastica, aumento del raggio di plasticizzazione all'apice e conseguente diminuzione di  $\sigma_{max}$  al di sotto del valore di snervamento, fermando la cricca stessa.

Questo arrestarsi e ripartire della cricca dà origine alla formazione delle linee di spiaggia, tipiche della zona di propagazione, presentate parlando dell'aspetto macroscopico al paragrafo 3.3.

### 3.2.3.3 Rottura di schianto

Quando le dimensioni della cricca diventano critiche, la sua crescita diventa instabile e si manifesta la frattura. Infatti, l'accrescimento della cricca porta ad una progressiva diminuzione di

sezione resistente: quando questa diventa così ridotta da non essere più in grado di resistere alle sollecitazioni esterne, si ha la frattura finale di schianto per sovraccarico di tipo statico.

### 3.3 ASPETTO MACROSCOPICO

Il danno per fatica si produce generalmente in corrispondenza della superficie del pezzo, a partire da un difetto, una scalfittura o un intaglio, e si estende progressivamente ad un'area sempre più ampia della sezione dell'elemento, come conseguenza della sollecitazione applicata. Il punto d'origine può essere talvolta interno quando vi sia una lesione preesistente. La rottura si manifesta quando la sezione, ridotta a seguito dell'avanzare della cricca, risulta di estensione insufficiente a sopportare il carico applicato.

La superficie di un elemento rotto a fatica presenta due zone distinte: una dall'aspetto liscio, l'altra ruvida.



Figura 3.7: Sezione di un elemento rotto a fatica; si notano la zona liscia di accrescimento delle cricche, che occupa la maggior parte della sezione, e la zona ruvida della rottura di schianto nella parte superiore

La zona liscia rappresenta la regione in cui si ha la formazione delle microcricche iniziali, le quali cominciano a crescere solitamente a partire dalla superficie, propagandosi e unendosi in cricche di dimensioni maggiori.

Il materiale può rispondere in maniera diversificata alle sollecitazioni, presentando zone che oppongono minore resistenza e che di conseguenza consentono una maggiore propagazione della cricca, pertanto la velocità di avanzamento della stessa all'interno della sezione non è costante. Tale comportamento è messo in evidenza dalla presenza nella zona liscia di bande più scure e più chiare, chiamate linee di arresto o linee di spiaggia, il cui nome deriva dalla somiglianza con i segni lasciati sulla sabbia dal moto ondoso. Esse rappresentano l'avanzamento del fronte di frattura e sono dovute all'apertura, alla chiusura e al martellamento delle due superfici di una cricca, alle

successive fasi di sviluppo e arresto e al diverso grado di accrescimento della cricca durante l'applicazione ripetuta del carico. La porzione risulta liscia come conseguenza del martellamento durante il ciclo delle due facce della sezione esaminata.

La zona ruvida rappresenta invece la parte di sezione resistente residua, che si rompe improvvisamente quando la sua estensione diventa insufficiente per sopportare la sollecitazione applicata; il suo aspetto è molto simile a quello di un materiale fragile rotto a trazione.

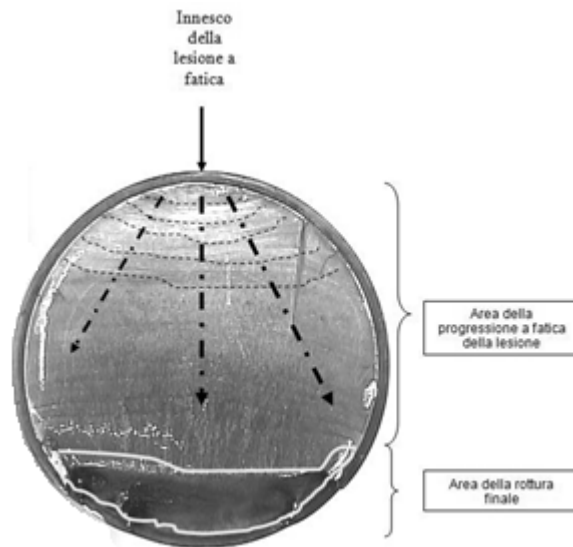


Figura 3.8: Sezione di un elemento rotto a fatica; sono evidenziati l'innescò della cricca, l'area di propagazione e la porzione interessata dalla rottura finale di schianto

La presenza, nella sezione di metalli, delle due diverse zone appena descritte è tipica della rottura a fatica, così come l'assenza di deformazione plastica a livello macroscopico. Al contrario, elevate deformazioni plastiche sono generalmente caratteristiche di un collasso a seguito dell'applicazione di un carico monotono crescente, mentre un'estesa zona ruvida può essere segno del raggiungimento del limite di snervamento del materiale.

La forma delle due superfici dipende dal tipo di sollecitazione che ha provocato prima la cricca e poi la rottura per fatica, mentre il rapporto tra le estensioni delle due zone dipende dall'entità della tensione: una grande estensione delle zona irregolare rispetto a quella levigata indica che la rottura è avvenuta sotto l'azione di uno sforzo elevato.

Nel caso di flessione rotante, ad esempio, la zona liscia tende a formarsi lungo tutto il perimetro della sezione, dove sono massime le tensioni, e ha un avanzamento concentrico che tende a circondare la superficie resistente centrale, riducendola progressivamente. La zona ruvida, dovuta alla rottura di schianto interessa soltanto al cuore del pezzo.

Le principali tipologie di sollecitazioni sono:

- trazione e trazione-comprensione;
- flessione semplice;
- flessione inversa;
- flessione rotante;
- torsione alternata.

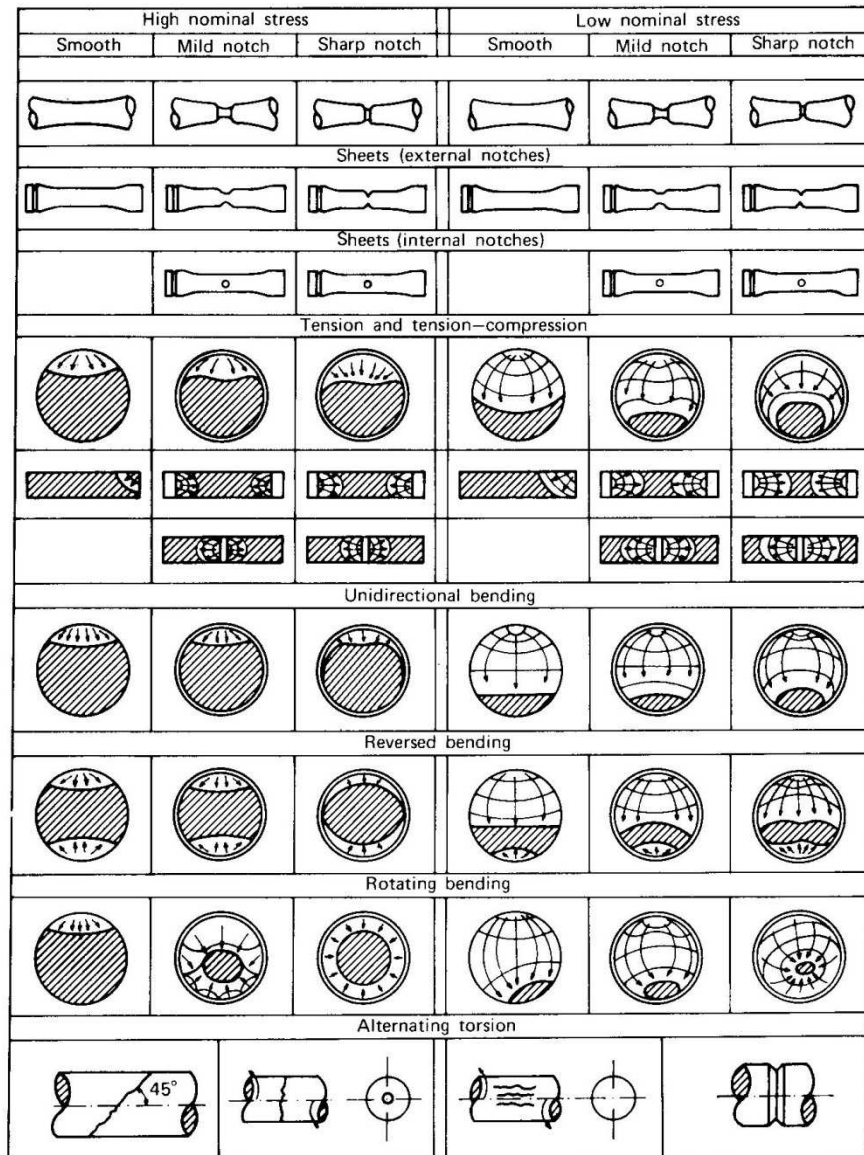


Figura 3.9: Tipologie di propagazione delle cricche nella sezione di provini sottoposti a diverse sollecitazioni di carico

## 3.4 FATTORI DI INFLUENZA

Come emerge dai dati sperimentali, diversi fattori influenzano la resistenza a fatica. Il loro peso è stato studiato attraverso un'estesa sperimentazione volta ad analizzare i differenti risultati ottenuti nelle prove di durata, al variare di ciascuno di tali parametri.

Tra i fattori che influenzano il comportamento a fatica dei componenti meccanici e degli elementi strutturali si distinguono quelli interni al materiale o legati alle caratteristiche del pezzo considerato e quelli esterni derivanti dall'ambiente e dalle condizioni di utilizzo. Si fa nel seguito riferimento ai materiali metallici.

### 3.4.1 Materiale

La resistenza a fatica di un materiale metallico può essere collegata alla sua resistenza a trazione, determinata con la classica prova di tipo statico. Numerose sono le prove sperimentali condotte in tal senso al fine di stabilire una relazione tra le due grandezze: nel caso dei metalli ferrosi il rapporto tra la resistenza a fatica e quella ultima può essere indicativamente fissato tra 0,4 e 0,55, tuttavia per una stima più corretta risulta necessario ricorrere a test specifici a seconda dei casi.

Per valori modesti del carico di rottura, la composizione chimica non incide molto sul limite di fatica dell'acciaio, mentre per elevati valori la sua influenza diventa significativa.

In generale si osserva che gli elementi in lega aumentano sia il carico di rottura che la resistenza a fatica.

#### 3.4.1.1 Struttura del materiale

A parità di limite di rottura, una struttura globulare è caratterizzata da una resistenza a fatica maggiore rispetto ad una aciculare, poiché la forma tondeggiante delle particelle riduce la concentrazione di tensioni. Le strutture lamellari, come quella perlitica di alcuni acciai, presentano tensione di rottura e limite di fatica crescenti al decrescere della spaziatura media delle lamelle.

Negli acciai il miglior comportamento a fatica si ottiene con la struttura martensitica dopo rinvenimento, per la quale il rapporto tra il limite di fatica e la tensione di rottura è circa 0,6.

Le caratteristiche di resistenza sono invece pregiudicate dall'interruzione della continuità strutturale del materiale, che facilita la formazione delle cricche, per la presenza ad esempio di inclusioni non metalliche; anche la presenza di austenite residua, per la mancata trasformazione completa della struttura in martensite, costituisce una discontinuità e peggiora il comportamento a fatica degli acciai temprati e rinvenuti.



#### **3.4.1.2 Dimensione dei grani**

L'influenza delle dimensioni del grano cristallino sulla resistenza a fatica è piuttosto modesta e variabile. In generale si può affermare che, nei metalli non ferrosi e negli acciai ricotti, l'affinamento del grano aumenta il carico di rottura e il limite di fatica: se infatti il difetto interessa un grano di piccole dimensioni, la presenza di numerosi bordi di grano rende la propagazione della cricca inferiore. Sugli acciai bonificati invece l'influenza delle dimensioni del grano è minore, se non addirittura trascurabile.

#### **3.4.1.3 Grado di incrudimento**

L'incrudimento ha notevoli effetti sulle proprietà meccaniche: aumenta la tensione di rottura e quella di snervamento, nonché la durezza, ma determina la diminuzione le proprietà di duttilità e tenacità sia statica che dinamica. Inoltre, l'incrudimento induce un incremento del limite di rottura inferiore rispetto all'aumento del limite di snervamento, mentre induce una elevata difettosità in termini di microcricche in condizioni di deformazione elevata ed è pertanto sconsigliato.

### **3.4.2 Caratteristiche dell'elemento**

I dati sperimentali sono ricavati da provini, tuttavia le caratteristiche degli elementi strutturali e degli organi meccanici possono essere differenti.

#### **3.4.2.1 Dimensioni del pezzo**

I provini utilizzati nelle prove per ricavare le proprietà del materiale sono solitamente piccoli, mentre gli elementi presenti nelle strutture sono più estesi. Generalmente le dimensioni influiscono sulla resistenza a fatica dell'acciaio, in particolar modo nelle prove di flessione e di torsione, mentre gli effetti sono trascurabili sulla prova assiale.

Nei pezzi di maggiori dimensioni è difficile, infatti, avere strutture completamente omogenee: più grande è il componente maggiore è la quantità di difetti in esso contenuti, quindi la possibilità di innesco del danneggiamento è maggiore e si verifica più rapidamente. Inoltre le lavorazioni e i trattamenti superficiali hanno minore influenza positiva nelle zone interne per elementi di dimensioni maggiori.

Per tenere conto delle dimensioni si introduce un coefficiente riduttivo della tensione limite di fatica, il quale, vista la dipendenza anche dal tipo di sollecitazione applicata, è differenziato per il caso di flessione e torsione alternata. Il suo andamento, decrescente all'aumentare delle dimensioni dell'elemento, è riportato in appositi grafici.

### 3.4.2.2 Finitura superficiale

Le rotture per fatica iniziano spesso in un punto della superficie esterna dell'elemento, poiché i cristalli in corrispondenza di essa possono presentare minore resistenza ai difetti microscopici non essendo totalmente circondati da altri cristalli e poiché le irregolarità della superficie costituiscono punti di concentrazione delle tensioni.

La superficie reale contiene sempre irregolarità nella forma di microsporgenze e microcavità: la moltitudine di irregolarità, situate molto vicine tra loro, costituisce la rugosità superficiale, la quale influisce sul limite di fatica; in particolare minore è la rugosità, migliore è la resistenza a fatica.

L'effetto della finitura superficiale sulla resistenza a fatica viene stimato mediante un coefficiente riduttivo, che determina un abbattimento tanto più elevato quanto maggiore è la rugosità superficiale e viene applicato ai dati ricavati da provini con buona finitura.

L'influenza della finitura superficiale è maggiore negli acciai ad alta resistenza ed è inferiore per vite a fatica caratterizzate da un basso numero di cicli, nelle quali prevale la propagazione della cricca.

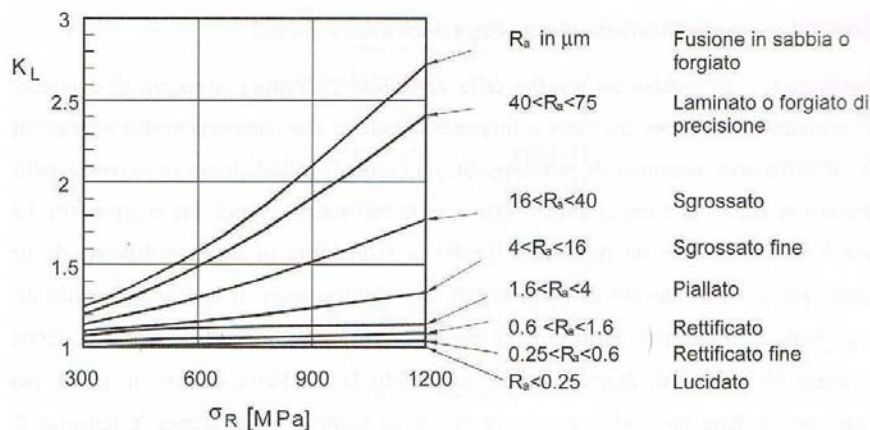


Figura 3.10: Andamento del coefficiente legato alla finitura superficiale

Per rendere ottimale la finitura superficiale i trattamenti meccanici più utilizzati sono la rettifica e la lappatura, i quali tuttavia provocano un riscaldamento del pezzo ed il raffreddamento che ne segue può indurre sforzi residui di trazione, effetto negativo dal momento che favorisce la propagazione di cricche di fatica.

### 3.4.2.3 Trattamenti superficiali

L'effetto principale dei trattamenti è quello di alterare lo stato di sforzo residuo sulla superficie libera. Gli sforzi residui nascono quando la deformazione plastica non è uniformemente distribuita sull'intera sezione trasversale del componente che è stato deformato. Quando la causa esterna che

ha provocato la deformazione viene rimossa, le regioni che hanno subito una deformazione plastica impediscono a quelle che si sono invece deformate elasticamente di recuperare la posizione indeformata. In questa maniera, le regioni deformate elasticamente diventano sede di uno sforzo residuo di trazione (o compressione), mentre quelle deformate plasticamente vengono sottoposte ad una sollecitazione di compressione (o trazione).

La condizione di sforzo residuo può essere considerata equivalente a quella provocata da una forza esterna: la presenza di uno sforzo di compressione sulla superficie è benefico e diminuisce la probabilità di una rottura a fatica, poiché tende a richiudere le cricche e ne ostacola la propagazione.

#### **3.4.2.4 Trattamenti meccanici**

Per introdurre degli stati di sforzo residui di compressione nei materiali si ricorre a:

- rullatura a freddo;
- pallinatura.

Tali lavorazioni producono deformazioni plastiche locali e, per entrambe, gli effetti sono più sensibili su vite a fatica molto lunghe, mentre diventano trascurabili per vite brevi.

La rullatura a freddo utilizza la pressione di rulli ed è appropriata nel caso di pezzi di grandi dimensioni; la pallinatura consiste nel sottoporre la superficie del pezzo all'urto con piccole sfere di acciaio da fusione lanciate a grande velocità ed è più adatta alla lavorazione di parti di dimensioni contenute.

Anche se la resistenza del materiale subisce alcune alterazioni in seguito all'incrudimento derivante da lavorazioni plastiche, il miglioramento della resistenza a fatica è principalmente dovuto allo stato di sforzo residuo di compressione che si riesce a produrre sulla superficie.

L'effetto di questi trattamenti può essere tenuto in conto attraverso fattori di correzione, che cambiano il valore dello sforzo limite di fatica; ad esempio nel caso della pallinatura lo sforzo viene incrementato fino al doppio del suo valore.

#### **3.4.2.5 Trattamenti termochimici**

Essi comprendono:

- tempra superficiale;
- carbocementazione;
- nitrurazione.

La tempra superficiale è il trattamento termico più frequentemente utilizzato. Essa è realizzata con riscaldamento sulla superficie a fiamma o a induzione e provoca nell'acciaio la trasformazione da austenite a martensite, che, come visto in precedenza, è positivo per l'aumento della resistenza.

La cementazione e nitrurazione degli acciai sono processi che si basano sulla diffusione di carbonio o azoto sulla superficie del componente, a seguito di riscaldamento a temperatura elevata, con mezzi e modalità tipiche della tempra superficiale. Gli atomi si dispongono in modo interstiziale, andando a riempire gli spazi lasciati liberi dagli atomi adiacenti di ferro, senza distorcerne le strutture cristalline, ma aumentando il volume dello strato in cui diffondono e creando uno stato di sforzo residuo di compressione sulla superficie del pezzo.

L'effetto ottenuto è un aumento della durezza superficiale e un conseguente incremento di resistenza all'usura dell'acciaio.

### 3.4.2.6 Rivestimento

Solitamente i rivestimenti si utilizzano per problemi di corrosione, fenomeno che riduce la vita a fatica del pezzo. Tuttavia l'uso non è benefico poiché, nel caso in cui nel rivestimento nasca una cricca, in quel punto si innescano fenomeni auto esaltanti di fatica e di corrosione.

### 3.4.2.7 Intaglio

Brusche variazioni delle dimensioni hanno come effetto la concentrazione degli sforzi in corrispondenza delle discontinuità geometriche, le quali rappresentano quindi una zona di probabile formazione di cricche per fatica. Il gradiente di sforzo provocato dalla presenza dell'intaglio dipende dalla configurazione dell'intaglio stesso e può essere espresso come funzione della curvatura dell'intaglio: esso è tanto maggiore quanto più piccolo è il raggio di curvatura.

Per evitare l'intensificazione locale delle tensioni, è opportuno sagomare in modo adeguato il pezzo meccanico che deve essere messo in opera, limitando il numero di spigoli vivi e preferendo raccordi dal profilo curvo.

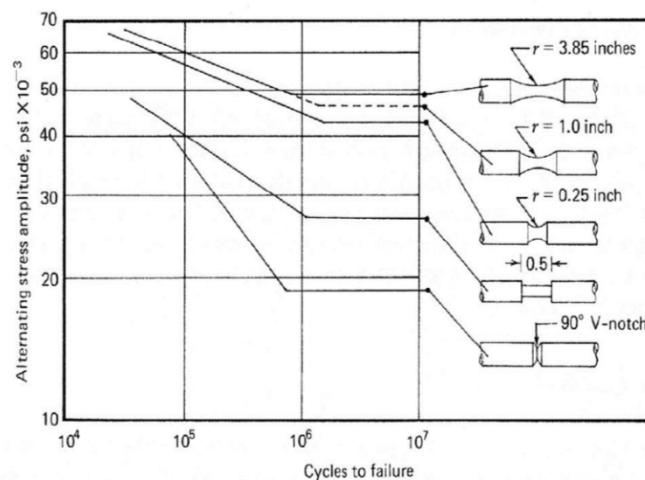


Figura 3.11: Andamento delle curve S-N per provini aventi diverse geometrie di intaglio

Si può definire un fattore teorico di concentrazione degli sforzi  $K_t$ , dato dal rapporto tra la tensione di picco in corrispondenza dell'apice dell'intaglio e la tensione nominale che sarebbe presente in assenza della concentrazione di tensione. Il calcolo del suo valore si basa sull'assunzione di comportamento elastico lineare del materiale.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

In passato i valori di  $K_t$  sono stati determinati per via sperimentale, attraverso misurazioni basate sulla fotoelasticità. Oggi la modellazione agli elementi finiti consente di calcolare in modo più rapido, meno oneroso e contemporaneamente più accurato tali valori.

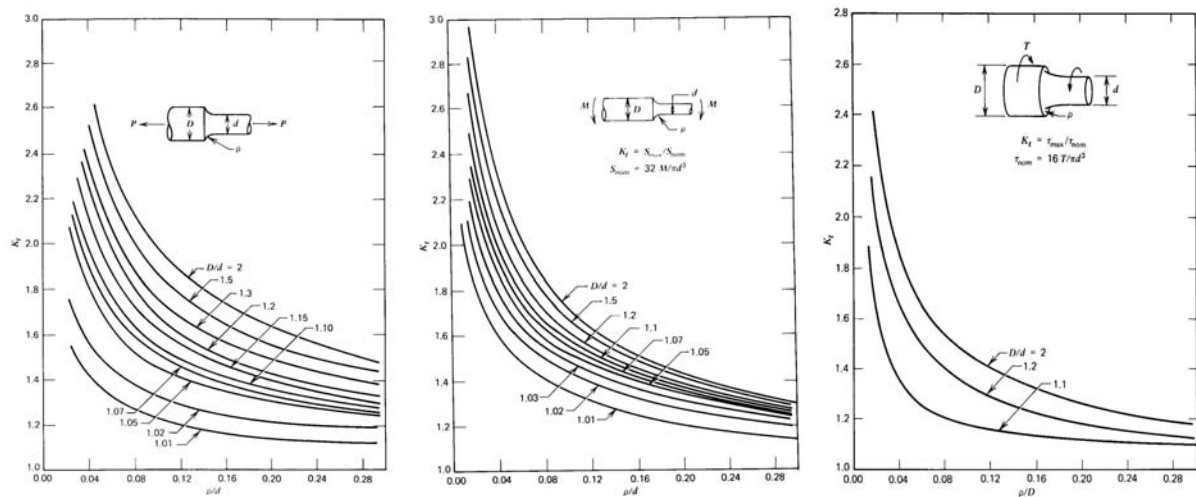


Figura 3.12: Andamento del fattore teorico di concentrazione degli sforzi rispettivamente per sollecitazioni di trazione, flessione e torsione

Per tenere conto di questo comportamento, il limite di fatica del provino viene ridotto moltiplicandolo per un coefficiente  $K_f$ , detto fattore di intaglio a fatica, funzione del fattore di intaglio teorico e dato dalla seguente espressione:

$$K_f = \frac{K_t r + q}{r + q}$$

dove:

- $K_t$  fattore teorico di concentrazione degli sforzi;
- $r$  raggio di raccordo nella zona di intaglio;
- $q$  fattore di sensibilità all'intaglio.

Il fattore  $q$  può essere espresso come:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}$$

se	$K_f = K_t$	$q = 1$	materiale sensibile all'intaglio
se	$K_f = 1$	$q = 0$	materiale non sensibile all'intaglio

Sfortunatamente  $q$  non è una costante del materiale e il suo valore aumenta al diminuire della dimensione dei grani o all'aumentare della resistenza a trazione, del raggio dell'intaglio e della dimensione della sezione. Esso è compreso tra 0 e 1 e si differenzia per materiali fragili e duttili: per quest'ultimi esso assume tipicamente valori prossimi all'unità, ad esempio per le ghise, aventi struttura a grano grosso, la sensibilità all'intaglio è molto bassa, variando nel campo  $0,0 \div 0,2$  in funzione della tensione di rottura a trazione.

I risultati prodotti dall'analisi di una grande quantità di dati sperimentali sui materiali metallici possono essere riassunti nel modo seguente:

- geometrie diverse aventi lo stesso  $K_t$  possono produrre differenti valori di  $K_f$ ;
- per bassi valori di  $K_t$ ,  $K_f$  può essere uguale a  $K_t$ , ma generalmente è inferiore;
- per elevati valori di  $K_t$ ,  $K_f$  è spesso molto inferiore di  $K_t$ ;
- per un dato materiale ed un'assegnata geometria dell'intaglio, esiste un particolare valore di  $K_t$  in corrispondenza del quale  $K_f$  raggiunge il valore massimo, valori maggiori di  $K_t$  non determinano ulteriori incrementi di  $K_f$ ;
- provini con intagli arrotondati, e quindi piccoli valori di  $K_t$ , hanno una vita a fatica dominata dalla fase di formazione della cricca;
- provini con intagli appuntiti, e quindi elevati valori di  $K_t$ , hanno una vita a fatica dominata dalla fase di propagazione della cricca.

### 3.4.3 Ambiente

L'ambiente costituisce il contesto in cui opera l'elemento in esercizio. I principali fattori che influenzano la resistenza a fatica sono la temperatura e gli agenti esterni che provocano la corrosione del metallo.

#### 3.4.3.1 Temperatura

L'aumento della temperatura diminuisce la vita a fatica del pezzo. Inoltre è possibile osservare che la curva delle tensioni in funzione del numero di cicli tende al valore asintotico, che costituisce

il limite di fatica, quando presente, in modo meno rapido rispetto al caso a temperatura ambiente, fino a che il limite sparisce per effetto della mobilitazione delle dislocazioni e la rottura a fatica si manifesta, per un qualsiasi livello di sollecitazione, ad un numero finito di cicli di carico.

Viceversa la resistenza a fatica migliora a temperature più basse, anche se è necessario tenere conto che il componente in questo caso infragilisce e la lunghezza critica della cricca si riduce.

### 3.4.3.2 Corrosione

Un ambiente corrosivo, per esempio acqua di mare, acidi ecc., peggiora la resistenza a fatica e causa in genere la scomparsa del limite di fatica negli acciai.

Gli effetti provocati dall'interazione di corrosione e fatica sono più gravi rispetto a quelli che si potrebbero prevedere considerando i due fenomeni separatamente. La corrosione e la fatica, infatti, si esaltano a vicenda in un processo piuttosto complesso e ancora oggi in fase di studio a causa delle numerose variabili in gioco: l'ambiente corrosivo attacca la superficie del metallo e crea un film di ossido, che protegge la superficie e previene ulteriore corrosione, tuttavia l'applicazione di carichi ciclici provoca microfessure nel film protettivo, che espongono nuova superficie del metallo alla corrosione; allo stesso tempo la corrosione crea irregolarità superficiali che diventano punti di concentrazione delle tensioni e favoriscono il progredire della fessurazione.

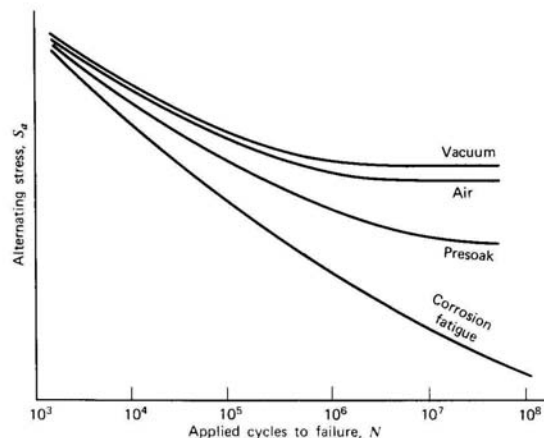


Figura 3.13: Comportamento a fatica dell'acciaio in diverse condizioni ambientali

E' necessario effettuare prove di laboratorio simulando l'ambiente di lavoro per stimare la resistenza a fatica, tuttavia questo tipo di prove sono difficili da condurre perché l'effetto della corrosione è legato al tempo e dunque non è possibile ottenere risultati attendibili con prove brevi in ambiente corrosivo.

In generale è opportuno difendere le parti soggette a corrosione con rivestimenti protettivi.

### 3.4.4 Applicazione del carico

#### 3.4.4.1 Tipo di carico

Mentre nel caso di flessione rotante le parti più esterne sono caratterizzate da tensioni maggiori e quelle più interne sono meno sollecitate secondo un gradiente di tensione che dipende dalle dimensioni della sezione stessa, nel caso di sollecitazione assiale l'intera sezione trasversale viene interessata da uno sforzo costante. Confrontando i limiti di durata nei due casi, a parità di materiale e di caratteristiche del provino, è possibile stabilire una relazione empirica:

$$\sigma_{l,assiale} = 0,6 \div 0,9 \sigma_{l,flessione}$$

Analogamente, per torsione e flessione:

$$\tau_{l,torsione} = 0,5 \div 0,6 \sigma_{l,flessione}$$

La vita a fatica è influenzata anche dalla tensione media; il suo effetto e quello dell'ampiezza di tensione possono essere studiati attraverso il diagramma a vita a fatica costante di Goodman.

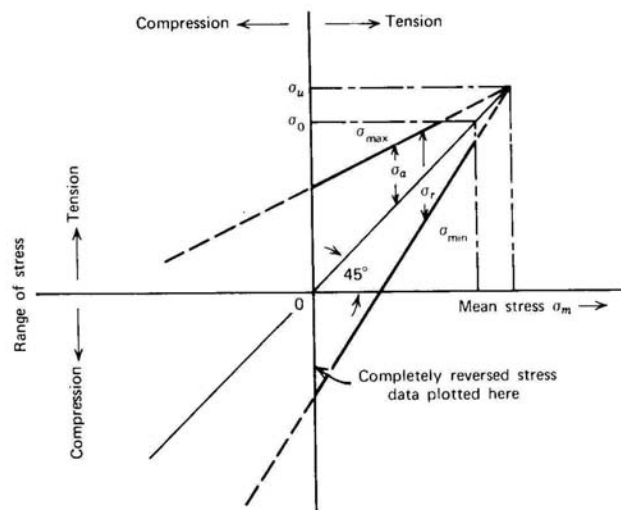


Figura 3.14: Diagramma di Goodman

Solitamente l'influenza della tensione media sul limite di fatica viene valutata attraverso il rapporto di tensione  $R$ :

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

In particolare, all'aumentare di  $R$  il limite di fatica aumenta, raggiungendo valori massimi per valori positivi del rapporto.



La Tabella 3.1 mostra i vari casi possibili, a seconda del segno assunto dalla tensione minima e da quella massima, indicando positive le trazioni e negative le compressioni.

Tabella 3.1: Valori del rapporto di tensione

$\sigma_{min}$	$\sigma_{max}$	$R$
-	+	-
0	+	0
+	+	+

### 3.4.4.2 Frequenza

In generale si considera trascurabile l'influenza della frequenza di applicazione del carico ciclico sui risultati delle prove a fatica fino a valori dell'ordine dei 100 Hz.

In linea di principio, l'aumento della frequenza del carico ciclico aumenta la resistenza del materiale metallico alla fatica perché diminuisce la durata di applicazione del carico massimo. D'altro canto, elevando troppo la frequenza, il calore prodotto per fenomeni di isteresi non viene più sufficientemente eliminato per convezione e irraggiamento, comportamento che può provocare un sensibile riscaldamento locale del materiale e una diminuzione di resistenza a fatica dovuta all'effetto della temperatura.

Fino a valori dell'ordine dei 100 Hz i due effetti sostanzialmente si compensano, mentre per valori della frequenza superiori ai 100 Hz, non è più possibile trascurare l'aumento della temperatura ed occorre prevedere opportuni sistemi di raffreddamento del provino.

In condizioni di contemporanea presenza di fatica e corrosione, la frequenza di applicazione del carico ha grande influenza: per basse frequenze vi è maggiore tempo di sviluppo del fenomeno corrosivo e la vita a fatica risulta ridotta.



## *Capitolo 4*

# ***STUDIO DELLA FATICA***

### **4.1 SOLLECITAZIONI CICLICHE**

La presenza di una sollecitazione ciclica è condizione necessaria per il verificarsi della rottura a fatica. In genere si accetta un'idealizzazione del fenomeno adottando una legge matematica sinusoidale degli sforzi nel tempo, che approssima notevolmente gli andamenti reali, i quali possono essere assai più complessi soprattutto nei casi di sollecitazione dovuta a vibrazioni.

Per ogni istante  $t$  il valore della tensione può essere espresso dalla relazione:

$$\sigma = \bar{\sigma} + \sigma_a \sin(\omega t)$$

Qualsiasi ciclo può essere rappresentato come se fosse originato dalla sovrapposizione di una tensione alternata pura di pulsazione  $\omega$  e semiampiezza  $\sigma_a$ , indicata come ampiezza di tensione, e una tensione statica  $\bar{\sigma}$ , avente significato di tensione media.

Qualunque sia il tipo di ciclo, è sempre possibile distinguere un valore superiore della tensione  $\sigma_{max}$  e un valore inferiore  $\sigma_{min}$ , espressi rispettivamente da:

$$\sigma_{max} = \bar{\sigma} + \sigma_a$$

$$\sigma_{min} = \bar{\sigma} - \sigma_a$$

Da queste relazioni si ricava che la tensione media  $\bar{\sigma}$  vale:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

L'ampiezza di tensione  $\sigma_a$  è data da:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2}$$

dove  $\Delta\sigma$  è l'escursione di tensione del ciclo.

Il comportamento a fatica pertanto non dipende solo dall'ampiezza della sollecitazione alternata  $\sigma_a$ , ma anche dalla tensione media  $\bar{\sigma}$ , che spesso è diversa da zero.

Per studiare tale effetto, si introduce il rapporto nominale di ciclo o rapporto di tensione  $R$ , definito come il rapporto tra il valore minimo e massimo di tensione durante il ciclo analizzato:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{\bar{\sigma} - \sigma_a}{\bar{\sigma} + \sigma_a}$$

Il rapporto di tensione può assumere i seguenti valori:

- $R = +1$  quando  $\sigma_a = 0$  per sollecitazione statica pura;
- $R = -\infty$  quando  $\sigma_{max} = 0$  per sollecitazione ripetuta a compressione;
- $R = -1$  quando  $\bar{\sigma} = 0$  per sollecitazione alternata simmetrica.

In generale, a parità di tensione massima, la vita a fatica si riduce al diminuire di  $R$ .

Con riferimento ad un ciclo di carico, inteso come la porzione di storia di carico che intercorre tra due massimi o due minimi successivi, si definiscono quindi:

- $\sigma_{max}$  tensione massima durante il ciclo di carico;
- $\sigma_{min}$  tensione minima durante il ciclo di carico;
- $R$  rapporto di ciclo, dato dal rapporto  $(\sigma_{min} / \sigma_{max})$ ;
- $\Delta\sigma$  escursione di tensione, differenza algebrica  $(\sigma_{max} - \sigma_{min})$ ;
- $\bar{\sigma}$  tensione media agente per tutta la durata del ciclo, data da  $(\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ ;
- $\sigma_a$  ampiezza del ciclo di carico, differenza algebrica  $(\sigma_{max} - \bar{\sigma})$ .

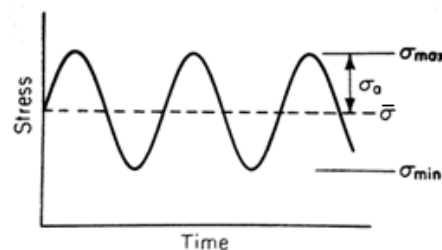


Figura 4.1: Definizione dei termini di tensione

Le rotture per fatica si possono verificare per sforzi normali, di flessione (rotante, alternata, piana) o torsionali, nonché per la loro combinazione (flesso-torsione).

L'andamento delle sollecitazioni può essere ricondotto ad uno dei casi fondamentali:

- sollecitazione alternata simmetrica;
- sollecitazione alternata asimmetrica;
- sollecitazione oscillante dall'origine;
- sollecitazione pulsante.

Tutti e quattro i tipi di andamento elencati possono essere espressi da una legge matematica di tipo sinusoidale come quella vista. Si indicano, per ciascuno di essi, le caratteristiche.

a) Sollecitazione alternata simmetrica:

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min} \quad \text{con } \bar{\sigma} = 0$$

b) Sollecitazione alternata asimmetrica:

$$\bar{\sigma} \neq 0$$

$$\sigma_{max} > 0 \quad \text{con } \bar{\sigma} < \sigma_a$$

$$\sigma_{min} < 0$$

c) Sollecitazione oscillante dall'origine:

$$\frac{\sigma_{max}}{2} = \bar{\sigma} = \sigma_a \quad \text{con } \sigma_{min} = 0$$

d) Sollecitazione pulsante:

$$\bar{\sigma} \neq 0$$

$$(\sigma_{max} - \sigma_{min}) > 0 \quad \text{con } \bar{\sigma} > \sigma_a$$

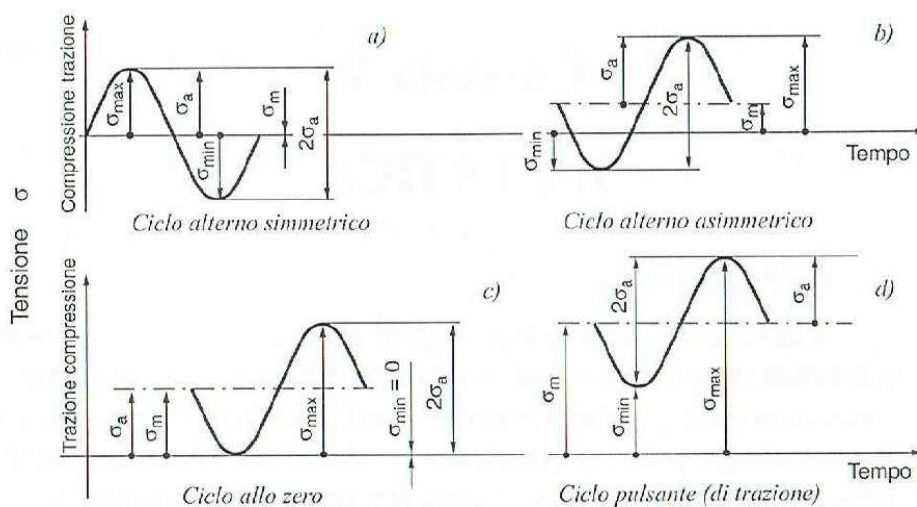


Figura 4.2: Tipi di andamento delle tensioni

In funzione del valore assunto dal rapporto nominale di ciclo si possono avere diversi casi.

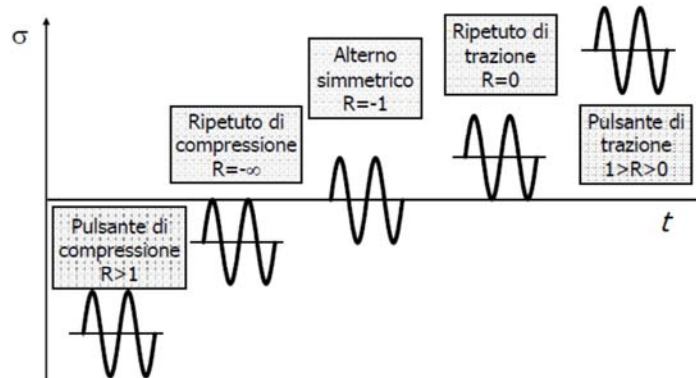


Figura 4.3: Possibili cicli di sollecitazione

## 4.2 AMPIEZZA VARIABILE E FATICA MULTIASSIALE

I primi test di fatica sono stati effettuati applicando sui provini carichi ad ampiezza costante, tuttavia le sollecitazioni reali di servizio su strutture e componenti sono caratterizzate da ampiezza variabile. Esse possono essere classificate, in base alla capacità o meno di individuare i singoli cicli di carico, in *narrow band random loading* e *broad band random loading*.

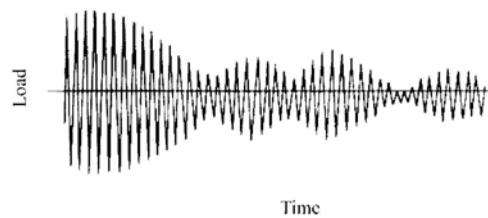


Figura 4.4: Narrow band random loading

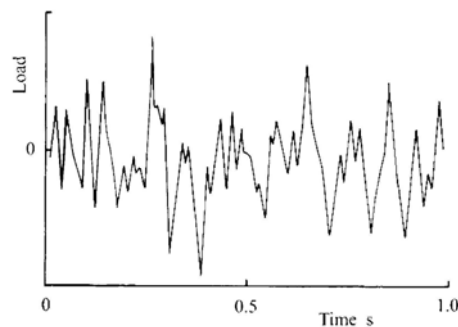


Figura 4.5: Broad band random loading

La complessità dello studio è incrementata anche dal tipo di sollecitazione: i provini e i componenti su cui vengono effettuati i test possono, infatti, essere interessati da sollecitazioni multiassiali, per simulare le condizioni reali di esercizio in cui essi si trovano in opera durante la vita della struttura. Questa condizione determina la presenza di diverse componenti di tensione in corrispondenza di uno stesso punto, che può essere provocata dall'applicazione contemporanea di più carichi oppure dalla natura del carico stesso; inoltre, nel primo caso, l'applicazione dei carichi può non essere necessariamente proporzionale o in fase.

In termini pratici, l'applicazione di un carico di fatica richiede la sua descrizione matematica: esso infatti può essere considerato come un processo stocastico e definito in termini di una forza variabile in funzione del tempo.

#### 4.2.1 Carico ad ampiezza costante

Il carico ad ampiezza costante rappresenta il caso più semplice di sollecitazione a fatica, in cui i singoli cicli di carico possono facilmente essere individuati e le tensioni variano in modo regolare. Spesso l'andamento è di tipo sinusoidale:

$$\sigma(t) = \bar{\sigma} + \sigma_a \sin(2\pi ft)$$

Il processo è stazionario e la tensione media, l'ampiezza e la frequenza risultano indipendenti dal tempo. Dal momento che il processo è ciclico è possibile sostituire la funzione continua  $\sigma(t)$  con  $\sigma(N)$ , anch'essa continua, in funzione del numero di cicli  $N = ft$ .

Per la descrizione del fenomeno di fatica nei materiali metallici i parametri di interesse sono la tensione massima, quella minima e il numero dei cicli come variabile temporale, mentre la forma della curva tra i punti di massimo e di minimo ha scarsa importanza.

#### 4.2.2 Carico a blocchi

Il carico a blocchi (*block loading*) è un tipo di carico frequentemente utilizzato nei test a fatica, in cui i parametri di carico variano nel tempo; un carico di questo tipo, che si ripete regolarmente nel tempo, può essere indicato anche come *programme loading*.

La Figura 4.6 mostra un esempio di carico a blocchi semplice, caratterizzato da due livelli, in cui ciascun blocco ha ampiezza di carico costante e il periodo di ritorno è di  $n$  cicli.

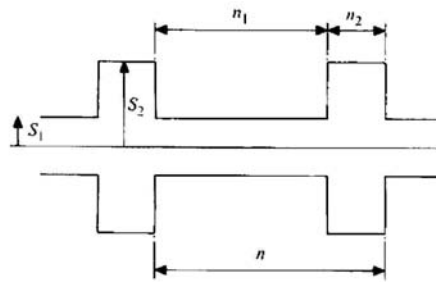


Figura 4.6: Carico a blocchi con due livelli

Questa tipologia di carico è stata usata spesso in passato per condurre test con sollecitazioni ad ampiezza variabile, ricorrendo ad un elevato numero di blocchi; il metodo è stato poi superato dall'impiego di carichi a blocchi basati su carichi random.

Le apparecchiature a disposizione per la sperimentazione consentono oggi di applicare una qualsiasi storia di carico: inizialmente ciò ha comportato l'impiego di molte diverse storie di carico e la non confrontabilità dei dati ottenuti nei differenti test sperimentali, producendo confusione e difficoltà nella comparazione tra i vari studi. Il problema è stato risolto adottando storie di carico standard per le diverse tipologie di componenti, sviluppate a partire dagli anni '80, ad esempio per aerei caccia e per strutture offshore.

### 4.2.3 Fatica multiassiale

Lo stato di tensione multiassiale in alcuni punti del pezzo in esame può essere prodotto dall'applicazione sia di più carichi aventi diverse direzioni che di un'azione monodirezionale. Nel primo caso si distinguono i carichi proporzionali e quelli non proporzionali, caratterizzati da un rapporto tra i carichi che rimane costante oppure no durante la sollecitazione. A loro volta i carichi non proporzionali possono essere suddivisi in due casi, a seconda che le direzioni delle tensioni principali varino nel tempo oppure rimangano invariate.

Il criterio di rottura multiassiale per fatica si basa sulla definizione di una tensione equivalente di trazione e sul suo confronto con le proprietà meccaniche unidirezionali del materiale.

La tensione equivalente può essere uno scalare oppure un vettore: nel secondo caso, la componente con il valore massimo individua il piano in cui si prevede avvenga la rottura, detto piano critico. Tale piano è normale alla direzione corrispondente al valore massimo del vettore oppure, se la tensione equivalente è una tensione tangenziale, corrisponde al piano dello stesso valore massimo.



#### 4.2.3.1 Criteri scalari di Tresca e Von Mises

Indicate con  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  le tensioni principali, in ordine decrescente, e con  $\sigma_y$  la tensione di snervamento, il criterio di Tresca, sviluppato nel 1864 sulla base di una lunga serie di esperimenti sui metalli, prevede che lo snervamento del materiale avvenga al verificarsi della condizione:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y$$

Da cui la tensione equivalente risulta essere pari a:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Il criterio di snervamento di Von Mises, sviluppato nel 1913, è dato da:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \sigma_y$$

La tensione equivalente è quindi:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$$

Riscrivendo l'espressione in termini di tensioni riferite agli assi cartesiani si ottiene:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}{2} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

La tensione equivalente di Von Mises è talvolta utilizzata nelle analisi a fatica con carichi proporzionali, ma non può essere impiegata per quelli non proporzionali.

#### 4.2.3.2 Approccio del piano critico

I criteri di rottura in cui la tensione equivalente è rappresentata da un vettore sono solitamente indicati come approcci del piano critico. Il più semplice tra questi metodi è quello proposto da Lamè nel 1831, detto anche criterio della massima tensione normale, secondo cui la rottura si manifesta quando la massima tensione principale raggiunge il valore della resistenza a trazione del materiale nel caso uniassiale. Questo criterio ha riscosso molto successo soprattutto per materiali fragili.

L'approccio descritto può essere adattato al caso di fatica multiassiale individuando il piano critico su cui si ha la massima escursione tensionale. Nel caso in cui siano presenti più carichi e questi risultino non in fase è necessario ricorrere ad una procedura apposita di media pesata dei vari contributi.

### 4.3 APPROCCIO ALLE TENSIONI

Per la valutazione della resistenza a fatica delle strutture metalliche si ricorre a metodi analitici che consentono di quantificare il danno per fatica. In particolare si distinguono:

- approccio alle tensioni;
- approccio alle deformazioni;
- approccio della meccanica della frattura.

L'approccio alle tensioni, il primo sviluppato e largamente utilizzato in passato nella progettazione, è tuttora impiegato quando le tensioni applicate si mantengono all'interno del campo elastico del materiale e la vita a fatica è caratterizzata da un elevato numero di cicli, regime indicato come HCF, *High Cycle Fatigue*.

Esso è fondato su basi empiriche e le relazioni derivano dall'elaborazione di dati sperimentali, pertanto è necessario porre grande attenzione in caso di applicazione in condizioni diverse da quelle delle prove in laboratorio. Nelle prove sperimentali i dati vengono prodotti conducendo i test con controllo di carico.

Uno dei limiti del metodo è rappresentato dal fatto che esso non considera il reale andamento sforzi-deformazioni, ma valuta tutte le deformazioni come elastiche: questo risulta importante se si considera che, come visto in precedenza, la nucleazione della cricca è provocata dal manifestarsi di deformazioni plastiche locali. Come conseguenza di questa assunzione semplificata, l'approccio è valido finché le deformazioni plastiche rimangono contenute, come accade per elementi con vite in esercizio lunghe. Tale metodo non è infatti applicabile nei casi di basso numero di cicli ed elevate sollecitazioni, in cui le deformazioni che si manifestano hanno una significativa componente plastica.

Inoltre, poiché il metodo non utilizza il reale andamento sforzi-deformazioni in corrispondenza delle microcricche, non vengono tenute in conto le tensioni residue derivanti dall'applicazione di una sequenza di carichi e pertanto si verificano problemi quando le sollecitazioni si discostano dalla condizione di ampiezza costante.

L'approccio si basa sul lavoro di Wöhler e sul diagramma S-N, ricavato dai suoi risultati sperimentali, che rappresenta la vita a fatica di un dato materiale, espressa come numero di cicli a rottura, in funzione dei valori di escursione di carico.

### 4.3.1 Il legame tensioni-numero di cicli ( $\sigma - N$ )

#### 4.3.1.1 La curva S-N di Wöhler

La curva S-N per un dato materiale è costruita analizzando una serie di provini con carico via via decrescente e registrando il corrispondente numero di cicli di carico ad ampiezza costante necessario per portare a rottura il pezzo. Essa è solitamente tracciata in un grafico bilogarithmico e rappresenta il risultato dell'elaborazione statistica di dati sperimentali, scegliendo come valore di vita a fatica il numero di cicli per cui si ha il 50% di possibilità di rottura del provino, per un determinato livello di escursione tensionale.

Si nota che la dispersione dei dati diminuisce all'aumentare della tensione e quindi all'avvicinarsi al caso statico, poiché esso è soggetto ad un'incertezza minore rispetto alla sollecitazione ciclica.

In generale allo stadio I di inizializzazione della cricca è associata una maggiore dispersione rispetto allo stadio II di propagazione, perciò, per elevati valori di tensione, in corrispondenza dei quali la fase di formazione della cricca è trascurabile, la dispersione dei dati è dovuta quasi esclusivamente alla fase II ed è pertanto limitata. Viceversa, per livelli tensionali bassi, la formazione della cricca occupa gran parte della vita a fatica del pezzo e la dispersione è maggiore.

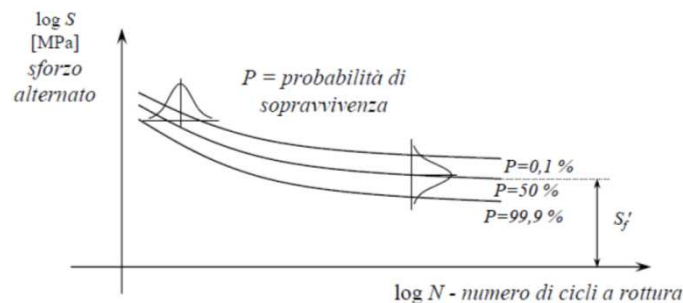


Figura 4.7: Distribuzione statistica del diagramma di Wöhler

Il diagramma descrive il comportamento di un provino di un dato materiale, sottoposto a cicli a completa inversione di carico, ossia con  $R = -1$  e  $\bar{\sigma} = 0$ ; a partire da esso è possibile ricavare le curve, per lo stesso materiale, anche per cicli di carico con diverso rapporto di ciclo, sovrapponendo al carico alternato uno stato tensionale costante. In questo modo si può osservare l'effetto dovuto ad una tensione media non nulla sul comportamento a fatica del materiale stesso.

L'aumento della tensione media determina uno spostamento della curva S-N verso sinistra e quindi la riduzione della resistenza a fatica del materiale. In generale tale effetto può essere riassunto in maniera semplificata considerando che una tensione media positiva (di trazione) riduce

la vita del provino poiché facilita l'apertura della cricca responsabile della crisi del materiale, mentre una tensione media negativa (di compressione) porta ad un miglioramento delle prestazioni, ritardando la propagazione della cricca stessa.

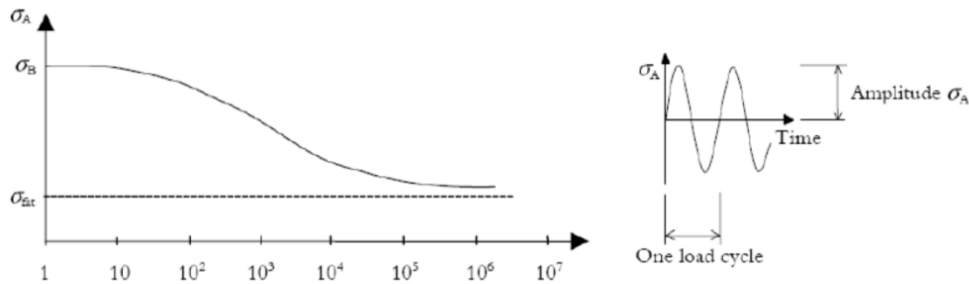


Figura 4.8: Esempio di curva S-N in un diagramma semilogaritmico

La curva di Wöhler può essere suddivisa in tre zone distinte:

1. regime LCF (*Low Cycle Fatigue*) o campo della resistenza quasi statica, per  $N < 10^3$ - $10^4$ , caratterizzato da basso numero di cicli, con processo governato da deformazioni plastiche macroscopiche;
2. regime HCF (*High Cycle Fatigue*) o campo della resistenza a termine, valido in un intervallo  $10^3$ - $10^4 < N < 2 \cdot 10^6$ , caratterizzato da alto numero di cicli, con processo governato dalla formazione di bande di scorrimento e risposta elastica macroscopica;
3. regime VHCF (*Very High Cycle Fatigue*) o zona a durata indeterminata, per  $N > 2 \cdot 10^6$ , caratterizzato da numero di cicli molto alto e bassi livelli tensionali; il passaggio a questa parte del grafico è segnato dalla presenza del ginocchio della curva, che può essere più o meno visibile a seconda del materiale.

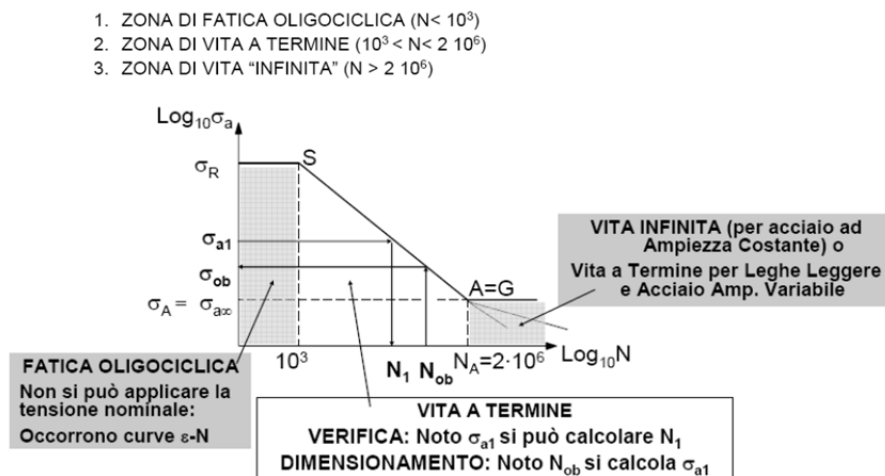


Figura 4.9: Individuazione dei tre campi nel diagramma di Wöhler

Il comportamento del materiale rientra nella zona di fatica oligociclica quando le sollecitazioni possono raggiungere per brevi periodi livelli estremamente elevati. In questo caso, dato lo sviluppo di deformazioni plastiche in zone macroscopiche del pezzo, le curve S-N non si prestano a stime accurate e si ricorre ad un approccio alle deformazioni, presentato al paragrafo 4.4, che mette in relazione la vita dell'elemento con l'ampiezza delle deformazioni reali plastiche che si sviluppano nelle zone di concentrazione di tensione e dalle quali si innescano le cricche di fatica. Per caratterizzare il materiale, inoltre non è sufficiente il diagramma  $\sigma$ - $\varepsilon$  ottenuto con il carico variabile in modo monotono, ma è necessario avere a disposizione la curva ciclica che mette in relazione la deformazione totale  $\Delta\varepsilon_r$  (o plastica) con la variazione di sforzo  $\Delta\sigma$  per cicli di isteresi stabilizzati.

Il tratto centrale della curva di Wöhler costituisce il campo di vita a termine e la sua rappresentazione in scala bilogarithmica ne evidenzia la pendenza costante. Analiticamente la sua descrizione è fornita dall'espressione seguente:

$$N\sigma_a^k = \text{costante}$$

la quale in scala bilogarithmica corrisponde a una retta di pendenza  $k$ . I valori tipici della pendenza per acciai e leghe leggere sono  $k = 8 \div 10$  per provini lisci (provini lucidati) e  $k = 3 \div 4$  per provini intagliati (fori, saldature). Si osserva che maggiore è  $k$  minore è la pendenza della retta e il limite di fatica viene raggiunto ad un numero di cicli più elevato, con conseguente aumento del tempo necessario al materiale per arrivare a rottura.

Dall'esame del diagramma in Figura 4.8 si nota che, pur rimanendo sempre al di sotto della tensione di rottura che costituisce il limite superiore della curva, al diminuire della tensione massima e anche dell'ampiezza di carico, la curva prosegue con un'inclinazione via via inferiore e il materiale arriva a rottura in un tempo superiore, in termini di numero di cicli.

Si possono quindi individuare un limite superiore, dato dalla tensione ultima di rottura e in corrispondenza del quale la crisi avviene dopo un solo carico, e un limite inferiore, non sempre presente: per alcuni acciai è possibile determinare un valore a cui la curva tende asintoticamente al crescere del numero di cicli, indicato come limite di fatica, che rappresenta il valore di tensione al di sotto del quale il materiale ha vita infinita e non è soggetto al fenomeno della fatica.

Per gli acciai ordinari la vita corrispondente al limite di fatica è assunta pari a  $N = 2 \cdot 10^6$  cicli. Dal momento che le prove con applicazione di un carico monotono crescente risultano essere, in termini di semplicità di realizzazione e di tempo, più economiche da condurre rispetto a quelle con carichi ciclici, si sono sviluppate relazioni empiriche per mettere in relazione le proprietà del materiale sottoposto a fatica e la resistenza ultima dello stesso, facendo riferimento al rapporto di fatica  $\varphi$ , definito come il rapporto tra l'escursione tensionale corrispondente a vita infinita e la

tensione ultima a trazione del materiale. Esso assume valori molto differenti per le diverse leghe ferrose, variabili tra 0,10 e 0,70; per gli acciai ordinari il valore è prossimo a 0,50.

Tabella 4.1: Valori del rapporto di fatica per le diverse categorie di acciai

Materiale	R <sub>m</sub> (MPa)	Rapporto di fatica $\varphi = \frac{\sigma_{LF}}{R_m}$		
		Flessione alternata	Assiale alternata	Torsione alternata
Acciai al carbonio	400	0,55	0,50	0,34
	650	0,47	0,42	0,27
Acciai legati bonificati	1000	0,45	0,40	0,26
Acciai ad alta resistenza	1600	0,35	0,32	0,19

La maggior parte delle leghe non ferrose, come le leghe di alluminio, non presenta limite di fatica e la curva S-N ha un andamento monotono decrescente; per questi materiali il limite viene convenzionalmente definito come il valore di tensione associato ad una vita del pezzo di  $5 \cdot 10^8$  cicli.

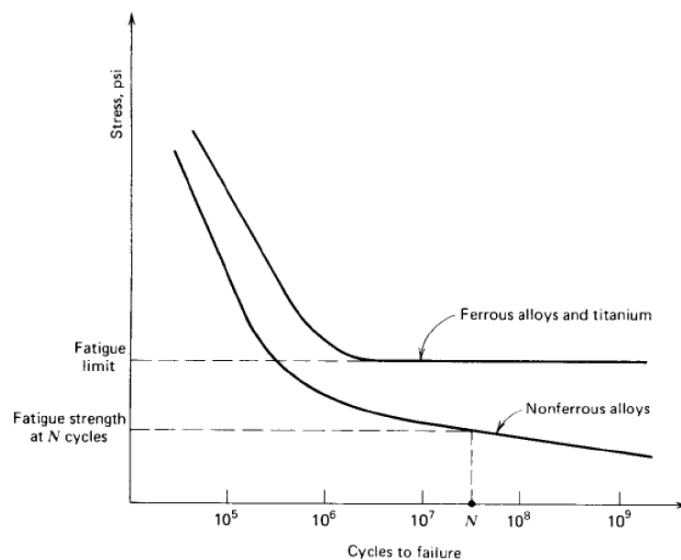


Figura 4.10: Esempio di curve S-N per leghe ferrose e non ferrose

L'esistenza del limite è legata alla presenza di elementi interstiziali, come il carbonio, in grado di bloccare le dislocazioni e di conseguenza i meccanismi di scorrimento che portano alla formazione delle microcricche nel materiale. È tuttavia consigliabile non fare affidamento su questo valore, dal momento che il limite può scomparire a causa di:

- sovraccarichi periodici;
- ambiente corrosivo;
- elevate temperature.

Le condizioni citate possono infatti sbloccare le dislocazioni e consentire nuovamente il movimento delle bande di scorrimento.

Studi recenti mettono in discussione l'esistenza del limite anche per gli acciai e le altre leghe ferrose, assumendo un andamento decrescente della curva S-N anche per questi materiali. Tuttavia, poiché lo studio sperimentale del comportamento dei metalli in regime VHCF richiede particolari tecniche per generare vibrazioni a frequenze molto più elevate di quella tradizionale di 100 Hz e dal momento che dai test effettuati emerge solamente una piccola variazione della vita a fatica in questo campo, si continua a considerare come limite di fatica il tradizionale valore di tensione corrispondente a  $N = 2 \cdot 10^6$  cicli.

Si ricorda inoltre che nella progettazione si fa riferimento al valore del limite di fatica ottenuto modificando il valore sperimentale, derivante da test su provini di materiale di dimensioni standardizzate e in condizioni controllate, attraverso fattori correttivi, che tengono conto in modo conservativo delle diverse condizioni che caratterizzano gli elementi strutturali o i componenti meccanici rispetto ai provini testati in laboratorio. Le variabili da considerare sono quelle già elencate al paragrafo 3.4 nello studio dei fattori di influenza.

#### 4.3.1.2 La retta di Basquin

Nel 1910 Basquin osserva che il legame tra tensioni e numero di cicli di vita dell'elemento può essere rappresentato in un grafico bilogarithmico da una retta; la relazione tra le due grandezze può quindi essere espressa da una funzione esponenziale. Utilizzando l'ampiezza di tensione vera:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma'_f (2N_f)^b$$

dove

$\Delta\sigma/2$  ampiezza di tensione del ciclo di carico;

$2N_f$  numero di inversioni di carico a rottura (due inversioni per ogni ciclo);

$\sigma'_f$  coefficiente di resistenza a fatica;

$b$  esponente di resistenza a fatica (esponente di Basquin).

I valori di  $\sigma'_f$  e  $b$  sono caratteristici del comportamento a fatica del materiale: essi sono coefficienti di natura empirica, che devono essere determinati con procedure sperimentali standardizzate. Il coefficiente di resistenza a fatica  $\sigma'_f$  è prossimo al valore di resistenza a frattura  $\sigma_f$ , mentre  $b$  è solitamente compreso tra -0,05 e -0,12.

### 4.3.2 Il diagramma di Haigh

Il grafico, talvolta indicato in maniera non corretta come diagramma modificato di Goodman, rappresenta i risultati di test di fatica con tensione media non nulla attraverso delle linee aventi vita a fatica costante, cioè con  $N_f = \text{cost}$ . Il diagramma consente di visualizzare l'effetto della tensione media sul comportamento a fatica.

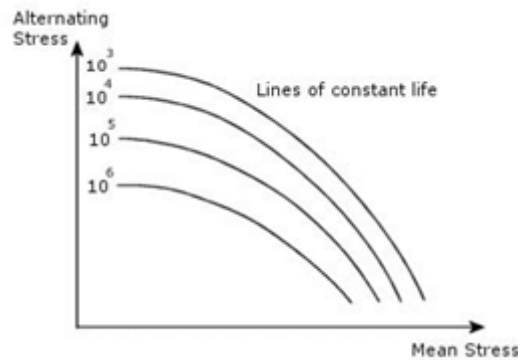


Figura 4.11: Diagramma di Haigh

I dati possono essere rappresentati anche in un grafico più articolato, che contiene, oltre agli assi della tensione applicata e di quella media, anche gli assi delle tensioni massime e minime.

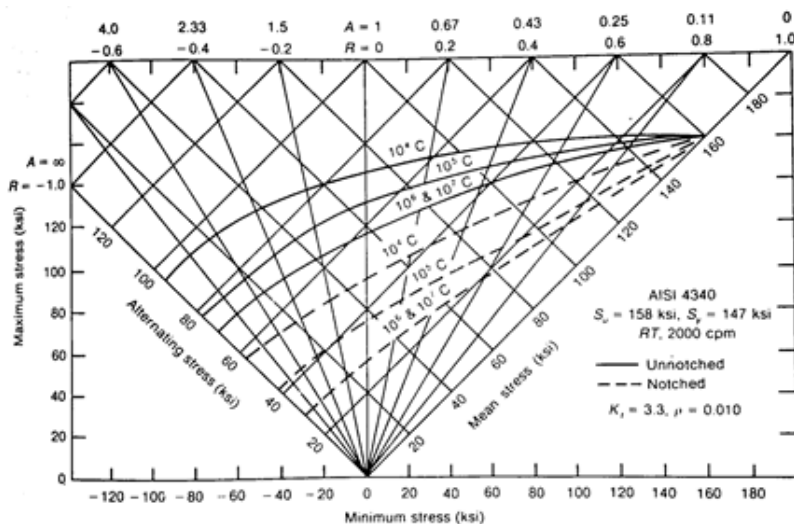


Figura 4.12: Diagramma esteso di Haigh per l'acciaio

Dato l'elevato onere a livello sperimentale per produrre i dati necessari, sono state formulate delle relazioni empiriche per costruire le linee relative alla vita infinita: le espressioni proposte da vari autori come Soderberg, Goodman, Gerber e Morrow, utilizzano diversi tipi di curve per



collegare il punto che rappresenta il limite di fatica  $S_e$  (*endurance limit*) del materiale sull'asse della tensione alternata con la tensione di snervamento  $S_y$ , la resistenza ultima  $S_u$  oppure la tensione di frattura reale  $\sigma_f$  sull'asse della tensione media, con risultati più o meno conservativi [5].

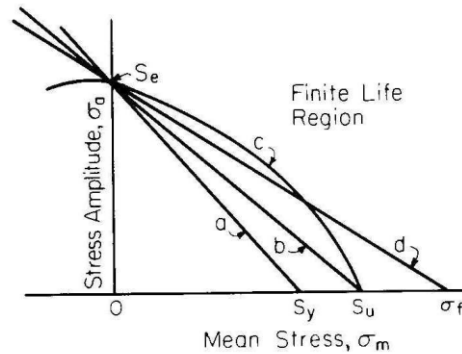


Figura 4.13: Confronto tra le espressioni di (a) Soderberg, (b) Goodman, (c) Gerber, (d) Morrow

Nel caso in cui si sia interessati alla determinazione di un valore finito di vita del pezzo, anziché alla condizione di rottura, è possibile sostituire nelle espressioni al limite di fatica il livello di tensione alternata corrispondente a quel determinato numero di cicli.

#### 4.4 APPROCCIO ALLE DEFORMAZIONI

Per bassi livelli di carico, nel caso di vita con alto numero di cicli, tensioni e deformazioni sono legate linearmente e le deformazioni plastiche sono trascurabili e pertanto non considerate; sotto queste condizioni l'approccio alle tensioni e quello alle deformazioni si equivalgono. Per elevati livelli di carico, invece, nel caso di fatica a basso numero di cicli (regime LCF), il comportamento del materiale è modellato più correttamente attraverso il controllo delle deformazioni, ossia attraverso la misurazione di esse durante il processo.

Nonostante la maggior parte dei componenti sia progettata per rimanere in campo elastico in esercizio, la concentrazione di tensioni in alcuni punti può essere causa di deformazioni plastiche locali, circondate e limitate da materiale a comportamento lineare: lo studio della zona plastica all'apice della cricca avviene con controllo di deformazioni.

In questo modo è possibile tenere in conto l'accumulo di danno sotto carichi di ampiezza variabile, a differenza di quanto avviene nell'approccio alle tensioni, anche se in entrambi i casi sono presenti costanti legate ai dati sperimentali e alle condizioni in cui sono state condotte le prove in laboratorio.

L'approccio alle deformazioni è impiegato per la determinazione della fase iniziale di nucleazione delle cricche e non può essere utilizzato per lo studio dell'accrescimento delle stesse; per stimare la durata complessiva della vita a fatica di un componente è tuttavia possibile accoppiare la valutazione della fase iniziale, fatta con questo metodo, all'analisi della successiva propagazione delle cricche, condotta attraverso l'uso della meccanica della frattura, illustrata al paragrafo 4.5.

#### 4.4.1 Il legame tensioni-deformazioni

Le curve tensione-deformazione sotto carico monotono vengono utilizzate per definire i limiti tensionali nella progettazione di strutture per carichi statici. Allo stesso modo le curve cicliche tensioni-deformazioni sono utili per la valutazione della durata di componenti sottoposti a carichi ripetuti. La risposta del materiale è rappresentata da cicli di isteresi, la cui ampiezza e altezza complessive rappresentano, rispettivamente, la variazione di deformazione e di tensione totali, come mostrato in Figura 4.14.

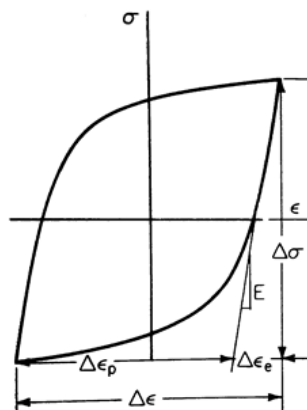


Figura 4.14: Ciclo di isteresi

Considerato un provino soggetto a sforzo assiale monotono di trazione, si indicano:

- $P$  carico applicato;
- $l_0$  lunghezza iniziale;
- $d_0$  diametro iniziale;
- $A_0$  area iniziale;
- $l$  lunghezza istantanea;
- $d$  diametro istantaneo;
- $A$  area istantanea.

Si definiscono la tensione e la deformazione ingegneristiche:

$$S = \frac{P}{A_0}$$

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

La tensione e la deformazione vere sono:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0}$$

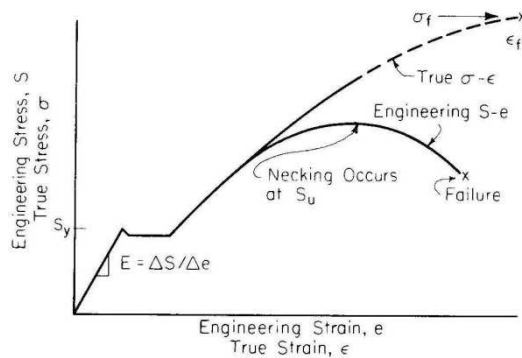


Figura 4.15: Confronto tra l'andamento della curva sforzi-deformazioni nel caso di grandezze ingegneristiche e valori veri, per prova monotona di trazione

Assumendo che la lunghezza istantanea sia data da:

$$l = l_0 + \Delta l$$

Si può scrivere la deformazione vera in funzione di quella ingegneristica:

$$\varepsilon = \ln(1 + e)$$

Assumendo la conservazione del volume:

$$Al = A_0 l_0 = cost$$

Si può scrivere la tensione vera in funzione di quella ingegneristica oppure della deformazione:

$$\sigma = S \frac{A_0}{A}$$

$$\sigma = S(1 + e)$$

Si assume inoltre la decomposizione additiva delle deformazioni:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

Il primo contributo rappresenta la deformazione elastica, esprimibile attraverso la legge di Hooke, il secondo la deformazione plastica.

Per la maggior parte dei metalli, rappresentando in un grafico bilogarithmico le tensioni vere in funzione delle deformazioni plastiche vere, si ottiene una retta; la curva può quindi essere descritta da una funzione esponenziale del tipo:

$$\sigma = K(\varepsilon_p)^n$$

dove

$K$  coefficiente di resistenza;

$n$  esponente di hardening.

La deformazione totale può essere riscritta quindi come:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{\frac{1}{n}}$$

In corrispondenza della frattura inoltre si definiscono la vera resistenza e la vera duttilità a frattura:

$$\sigma_f = \frac{P_f}{A_f}$$

$$\varepsilon_f = \ln \frac{A_0}{A_f}$$

Analogamente a quanto visto per la curva tensioni-deformazioni nel caso di carico monotono crescente di trazione, per carichi ciclici stabilizzati si ha:

$$\sigma = K'(\varepsilon_p)^{n'}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

dove

$\sigma$  ampiezza di tensione ciclica;

- $\epsilon_p$  ampiezza di deformazione plastica;
- $K'$  coefficiente di resistenza ciclico;
- $n$  esponente di hardening ciclico.

Per la maggior parte dei metalli i valori assunti da  $n'$  sono compresi tra 0,10 e 0,25, con valori medi vicini a 0,15.

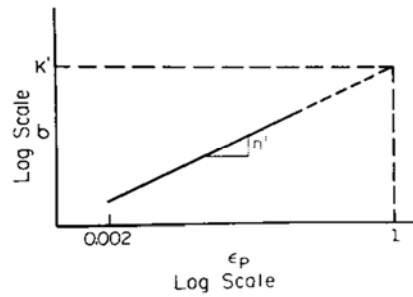


Figura 4.16: Grafico bilogarithmico delle tensioni in funzione delle deformazioni plastiche

La curva d'isteresi si ottiene a partire dalla curva tensioni-deformazioni per carico ciclico stabilizzato:

$$\Delta\epsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2 \left( \frac{\sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

Secondo le ipotesi di Massing la curva di isteresi si ottiene da quella tensioni-deformazioni raddoppiandone i valori.

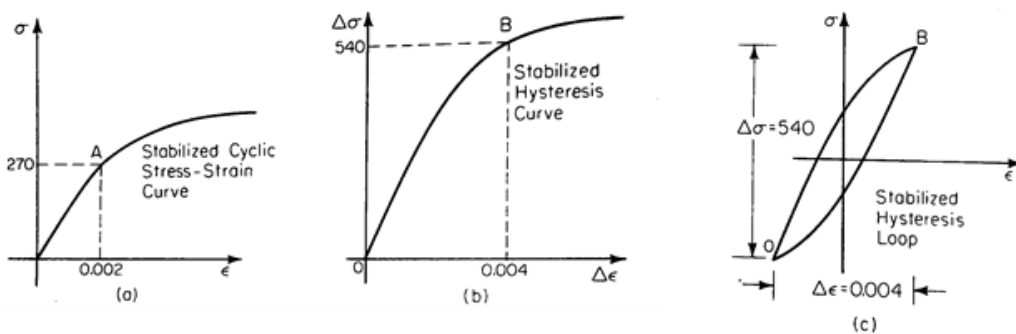


Figura 4.17: (a) Curva sforzi-deformazioni, (b) curva di isteresi e (c) ciclo di isteresi secondo le ipotesi di Massing

#### 4.4.2 Il legame deformazioni-numero di cicli ( $\varepsilon - N$ )

Analogamente a quanto fatto da Basquin con le tensioni, negli anni '50 Coffin e Manson, lavorando indipendentemente, trovano che il legame tra deformazioni e numero di cicli di vita dell'elemento può essere rappresentato in un grafico bilogarithmico da una retta.

$$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N_f)^c$$

dove

- $\Delta\varepsilon_p/2$  ampiezza di deformazione plastica durante il ciclo di carico;
- $2N_f$  numero di inversioni di carico a rottura (due inversioni per ogni ciclo);
- $\varepsilon'_f$  coefficiente di duttilità a fatica;
- $c$  esponente di duttilità a fatica.

Anche in questo caso i valori di  $\varepsilon'_f$  e  $c$  sono coefficienti di natura empirica, caratteristici del comportamento a fatica del materiale, e devono essere determinati con procedure sperimentali standardizzate. Il coefficiente di duttilità a fatica  $\varepsilon'_f$  è prossimo al valore di duttilità a frattura  $\varepsilon_f$ , mentre  $c$  è solitamente compreso tra -0,50 e -0,70.

Ricordando che in termini di ampiezza di deformazione si ha:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2}$$

L'espressione di Coffin e Manson può essere riscritta in termini di deformazione totale, come la somma di un contributo elastico e di uno plastico:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c$$

#### 4.4.3 Effetti della tensione media

Le proprietà a fatica di un materiale sono ricavate da test con controllo delle deformazioni, ad ampiezza costante e con completa inversione di carico. Tuttavia i componenti strutturali sono soggetti a carichi ciclici in presenza di una tensione media o di una deformazione media. Quest'ultima è solitamente trascurabile, mentre la tensione media può essere rilevante ai fini della determinazione della vita a fatica, soprattutto per un elevato numero di cicli.

Tensioni medie di trazione hanno effetto negativo sulla resistenza a fatica, mentre quelle di compressione sono positive. Ad alti livelli di deformazione, le significative deformazioni plastiche tendono a causare un rilassamento a zero della tensione media.

Per tenere conto della presenza di una tensione media non nulla, si introduce una correzione nell'equazione deformazioni-numero di cicli.

Morrow suggerisce di modificare il termine elastico della formula attraverso l'introduzione della tensione media  $\bar{\sigma}$ :

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \bar{\sigma}}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c$$

Questa espressione è coerente con quanto osservato sperimentalmente, ossia che gli effetti della tensione media sono significativi per basse plasticizzazioni, dove dominano le deformazioni elastiche, e diventano trascurabili per vite a fatica brevi in cui le deformazioni plastiche sono consistenti.

Tuttavia la formula prevede, in maniera non corretta, una dipendenza del rapporto tra deformazione elastica e plastica dalla tensione media, contraddetta dalle evidenze sperimentali; per correggere questo difetto Manson e Halford hanno proposto una correzione ad entrambi i contributi dell'espressione, per mantenere l'indipendenza del rapporto da  $\bar{\sigma}$ :

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \bar{\sigma}}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f \left( \frac{\sigma'_f - \bar{\sigma}}{\sigma'_f} \right)^{\frac{c}{b}} (2N_f)^c$$

## 4.5 APPROCCIO DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA

La vita a fatica di un componente è costituita da una fase di nucleazione della cricca e da una di accrescimento. Nel caso di piccola ampiezza di deformazione la maggior parte della vita dell'elemento è interessata dalla formazione della cricca, mentre nel caso di ampiezza elevata la vita a fatica è interessata principalmente dalla propagazione ed è proprio questa fase che viene stimata attraverso la meccanica della frattura.

La vita totale a fatica è data dalla somma della fase di nucleazione, valutata con l'approccio alle deformazioni, e della fase di propagazione, determinata attraverso la meccanica della frattura.

Questo approccio richiede che sia nota o si assuma a priori una dimensione iniziale della cricca; per i componenti con imperfezioni o difetti tale lunghezza può essere nota.

Il metodo LEFM, *Linear Elastic Fracture Mechanics*, consente di mettere in relazione l'intensità e la distribuzione di tensione in prossimità dell'apice della cricca con:

- la sollecitazione esterna applicata;
- la dimensione e la forma della cricca;
- le proprietà del materiale di cui è costituito il componente.

## **4.5.1 Cenni storici**

### **4.5.1.1 Prime ricerche sulla frattura**

Il primo approccio con la frattura può essere fatto risalire a Leonardo da Vinci, il quale misura la resistenza di fili metallici di diverse lunghezze riscontrando una dipendenza della stessa dall'estensione del campione analizzato: fili più lunghi presentano resistenza inferiore. Tale evidenza sperimentale dimostra la dipendenza della resistenza dalle imperfezioni del materiale, la cui presenza è tanto più probabile quanto maggiore è la dimensione del provino. Questi risultati sono comunque di carattere qualitativo; un approccio più analitico è seguito da Galileo Galilei che esamina la resistenza a trazione e compressione di colonne, osservando che essa dipende solo dalla sezione trasversale delle stesse e non dalla loro lunghezza.

Il collegamento dal punto di vista quantitativo tra le tensioni e i difetti presenti nel materiale viene esplicitato agli inizi del Novecento da Griffith, il cui modello, che prevede che il lavoro di frattura derivi esclusivamente dall'energia di superficie del materiale, è applicabile ai materiali fragili ideali; solo dopo il 1948 si riesce ad adattare tale teoria anche ai metalli.

Griffith mostra come il comportamento finale a fatica non è altro che una rottura fragile provocata dall'accrescimento, sotto carico ciclico, di una cricca a fatica fino ad una lunghezza critica, che la rende instabile; poco viene detto riguardo il modo in cui avviene tale crescita. Considerazioni dal punto di vista quantitativo relativamente al problema dell'accrescimento della cricca vengono sviluppate in seguito da Paris.

### **4.5.1.2 Dopo la guerra**

Dopo la seconda guerra mondiale si apre una nuova fase di riflessione sulla frattura. Durante il conflitto le navi Liberty, realizzate negli Stati Uniti ed inviate all'Inghilterra, sono protagoniste di gravi incidenti: molte di esse riportano seri danni a seguito della sostituzione dei giunti rivettati con le più rapide saldature, realizzate tuttavia con difetti, dalle quali si propaga la frattura, favorita anche dall'insufficiente resistenza dell'acciaio utilizzato.

Negli anni '40 viene quindi costituito un apposito laboratorio, avente la funzione di comprendere i danneggiamenti rilevati, guidato da G. R. Irwin. Egli riesce ad estendere l'approccio di Griffith ai materiali metallici, aggiungendo il contributo dell'energia dissipata durante la deformazione plastica locale, ai fini della formazione delle nuove superfici della cricca. Irwin definisce la quantità  $G$ , l'energia di deformazione rilasciata o forza di accrescimento della cricca, che rappresenta la quantità totale di energia assorbita durante la frattura per unità di lunghezza di accrescimento della cricca e unità di spessore.



Inoltre, negli anni '50, riprendendo gli studi sviluppati parallelamente da Westergaard, Irwin mostra come le tensioni e gli spostamenti in prossimità dell'apice della cricca possano essere descritti da un'unica costante  $K$ , legata alla quantità di energia liberata e definita in seguito come fattore di intensificazione di tensione.

Egli dimostra infine l'equivalenza dell'approccio energetico con  $G$  e di quello di intensità delle tensioni con  $K$  e che la propagazione della cricca avviene in entrambi i casi al raggiungimento dei valori critici, rispettivamente  $G_c$  e  $K_c$ .

Inizia così lo sviluppo della meccanica della frattura, a cui anche Paris, con riferimento alla rottura a fatica, fornisce un contributo importante, nonostante l'iniziale scetticismo e la fredda accoglienza delle sue idee, dovuti alla difficoltà di accettare l'abbandono del tradizionale approccio basato sulle curve S-N in favore di una più razionale progettazione a fatica.

#### **4.5.1.3 Tra il 1960 e il 1980**

A partire dagli anni '60, ormai sviluppati i principi su cui si fonda la meccanica della frattura lineare elastica (LEFM), l'attenzione si concentra sulla plasticizzazione all'apice della cricca. La LEFM cessa di essere valida quando la rottura è preceduta da significative deformazioni plastiche: nel giro di pochi anni diversi autori cercano di introdurre delle correzioni alla teoria sviluppata da Irwin per tenere conto dello snervamento.

Wells, dopo aver collaborato con lo stesso Irwin, cerca di estendere l'approccio agli acciai strutturali a bassa e media resistenza, i quali tuttavia sono troppo duttili per l'applicazione del metodo: egli osserva che le facce della cricca si allontanano con deformazioni plastiche e decide di adottare come parametro tale distanza, indicato come apertura della cricca (CTOD, *Crack Tip Opening Displacement*). In Inghilterra, dove gli studi sulla frattura sono incentivati dal settore economico legato all'estrazione del petrolio nel Mare del Nord, l'approccio di Wells riscuote largo successo a partire dalla fine degli anni '60 e il suo parametro viene impiegato per lo studio della frattura nelle strutture saldate.

Contemporaneamente negli Stati Uniti la ricerca nel campo della frattura è trainata dal nascente settore dell'energia nucleare e si assiste allo sviluppo degli studi di Rice sul campo tensionale all'apice della cricca.

#### **4.5.1.4 Sviluppi recenti**

Mentre negli anni '60 la maggiore preoccupazione era quella di caratterizzare lo sviluppo di deformazioni plastiche, in epoca più recente si cerca di generalizzare la meccanica della frattura, includendo i materiali con comportamento non lineare dipendente dal tempo, come quelli di tipo viscoelastico e viscoplastico.

#### 4.5.2 Meccanica della frattura lineare elastica

Griffith sviluppa la prima espressione analitica per la determinazione la capacità portante del materiale in presenza di una cricca. Il suo lavoro si basa sullo studio della trasformazione dell'energia di deformazione in energia di interfaccia durante l'estensione della cricca e considera l'energia di deformazione rilasciata  $G$ , intesa come energia messa a disposizione per la crescita della cricca per unità di area della cricca stessa, come parametro. La frattura si manifesta al momento del raggiungimento del valore critico  $G_c$ .

Vari autori, tra cui Irwin, analizzano il fenomeno da altri punti di vista, considerando lo stato di tensione in prossimità dell'apice della cricca e sviluppando un metodo basato sul fattore di intensità di tensione  $K$ . Analogamente a quanto avviene nell'approccio energetico, la frattura avviene al raggiungimento del valore critico  $K_c$ .

La meccanica della frattura elastica lineare si basa sull'applicazione della teoria dell'elasticità, e quindi delle sue ipotesi di piccoli spostamenti e linearità tra tensioni e deformazioni, a corpi contenenti microcricche o difetti.

L'espressione ricavata da Irwin per le tensioni locali vicino all'apice della cricca, espressa in funzione delle coordinate cilindriche del punto considerato, mostra la dipendenza dal fattore di intensità di tensione  $K$ :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

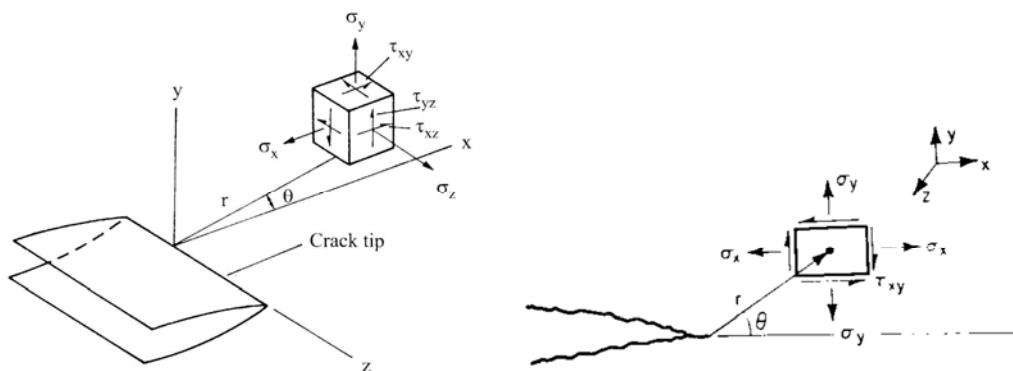


Figura 4.18: Tensioni locali in prossimità dell'apice della cricca con sistema di riferimento in coordinate cilindriche

L'espressione presenta una singolarità in corrispondenza dell'apice della cricca: al tendere a zero di  $r$  le tensioni diventano infinite. Dal momento che superato lo sforzo di snervamento il materiale sviluppa deformazioni plastiche, in corrispondenza di quest'area si forma una zona plastica.

In questo caso la validità della LEFM è legata alle dimensioni della regione, la cui estensione dipende dallo stato di tensione del corpo: il metodo può essere applicato fintanto che tali dimensioni sono piccole rispetto a quelle compressive della cricca e del componente stesso in cui essa si è formata.

Questo è in genere rispettato poiché la zona di deformazione plastica nel caso di carico ciclico è circa quattro volte più piccola di quella del caso monotono, dal momento che essa è limitata dal materiale circostante, che rimane elastico e la comprime.

Si distinguono tre modalità di carico che implicano differenti spostamenti delle superfici della cricca:

- Modo I: apertura per trazione con separazione delle facce della cricca;
- Modo II: scivolamento per taglio nel piano con scorrimento delle facce;
- Modo III: strappo per taglio fuori piano con movimento parallelo delle facce in direzione opposta.

La prima modalità è quella che si presenta con maggiore frequenza nelle applicazioni ingegneristiche ed è pertanto ad essa che ci si riferisce in seguito, con facile estensione della trattazione agli altri due casi.

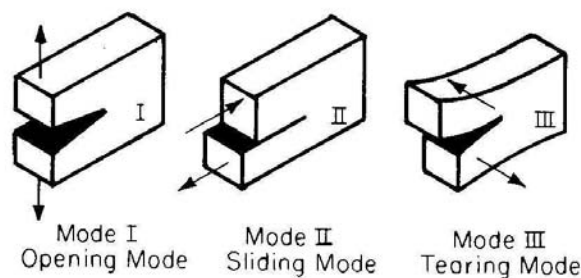


Figura 4.19: Modalità di carico e spostamento delle superfici della cricca

A causa dei vincoli imposti, solitamente per le cricche all'interno del materiale si adottano le condizioni di stato piano di deformazione (SPD), mentre in corrispondenza della superficie si instaura uno stato piano di tensione (SPT), dal momento che la tensione in direzione normale alla superficie stessa è nulla.

Tabella 4.2: Componenti di tensione e deformazione per SPD e SPT

SPD		SPT	
$\sigma_x \neq 0$	$\varepsilon_x \neq 0$	$\sigma_x \neq 0$	$\varepsilon_x \neq 0$
$\sigma_y \neq 0$	$\varepsilon_y \neq 0$	$\sigma_y \neq 0$	$\varepsilon_y \neq 0$
$\sigma_z \neq 0$	$\varepsilon_z = 0$	$\sigma_z = 0$	$\varepsilon_z \neq 0$

### 4.5.3 Fattore di intensità di tensione

Il fattore di intensità di tensione  $K$  definisce l'entità delle tensioni locali in prossimità dell'apice della cricca, come si vede dalla formula di Irwin, mettendole in relazione con la tensione  $\sigma$  derivante dalla sollecitazione esterna. Esso dipende da:

- $\sigma$ , sforzo applicato;
- $a$ , dimensione della cricca;
- forma della cricca;
- $f(a/w)$ , caratteristiche geometriche, con  $w$  spessore del provino.

L'espressione generale fornita è:

$$K = f(g)\sigma\sqrt{\pi a}$$

dove

- $\sigma$  tensione derivante dall'applicazione del carico esterno (non locale);
- $a$  lunghezza della cricca;
- $f(g)$  fattore di correzione dipendente dal campione e dalle caratteristiche geometriche della cricca, in genere compreso tra 1,0 e 1,4.

Nel momento in cui il fattore di intensità di tensione raggiunge il valore critico  $K_c$  si verifica la frattura instabile; tale valore prende il nome di resistenza a frattura del materiale e può essere considerato come il valore limite dell'intensità degli sforzi, allo stesso modo in cui la tensione di snervamento è il limite dello sforzo applicato.

Questo valore critico dipende sia dalla temperatura che dallo spessore del provino e viene determinato attraverso prove sperimentali, condotte con procedure standardizzate.

Solitamente si fa riferimento al valore  $K_{Ic}$ , legato alla condizione di stato piano di deformazione e indipendente dallo spessore.

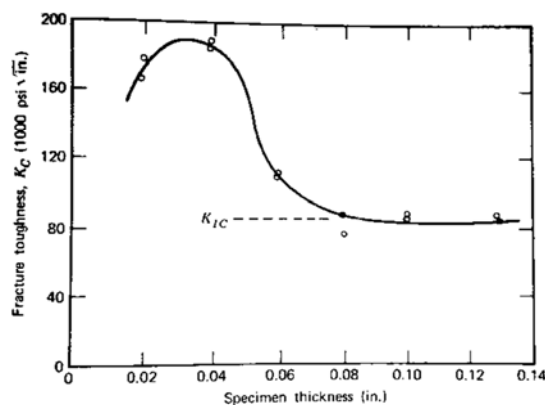


Figura 4.20: Effetto dello spessore del provino sulla resistenza a frattura

In letteratura [5] sono contenute le soluzioni ottenute sperimentalmente per le più comuni condizioni di carico e per vari tipi di provini. Il valore nel caso di situazioni più complesse può essere ottenuto dalla scomposizione del problema in casi semplici aventi soluzione note e dalla sovrapposizione dei risultati, attraverso la somma algebrica con opportune formule, che tengano conto dell'interazione tra i casi.

La determinazione di  $K$  può avvenire anche con metodi numerici.

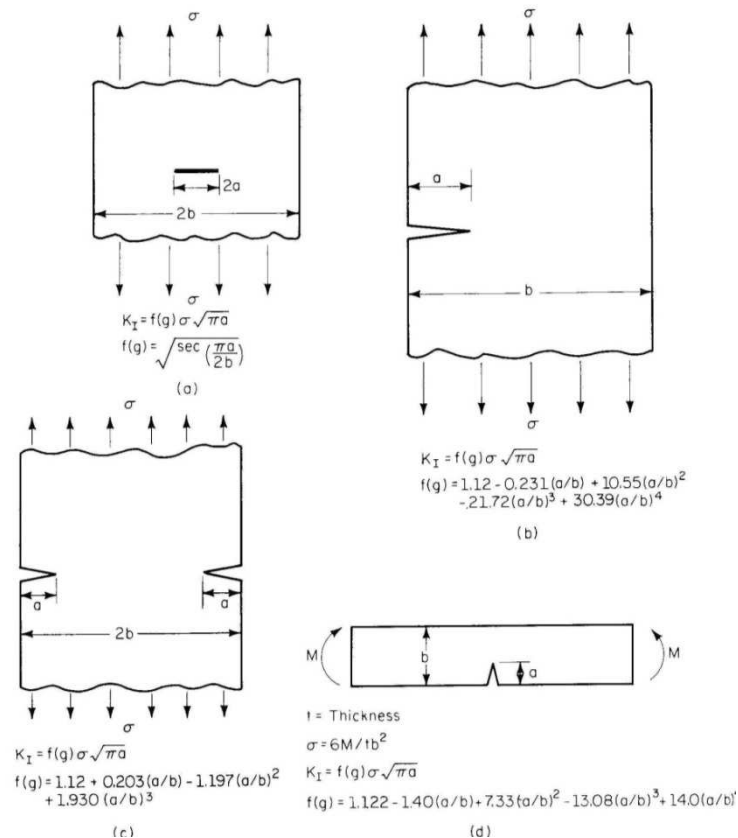


Figura 4.21: Fattore di intensità di tensione per alcuni casi comuni

#### 4.5.4 Accrescimento della cricca per fatica

L'obiettivo dell'applicazione della meccanica della frattura per lo studio della propagazione della cricca nel fenomeno della fatica è la determinazione del numero di cicli necessari per raggiungere una determinata lunghezza della cricca stessa oppure per arrivare al collasso finale del pezzo.

La lunghezza della cricca risulta maggiore e il suo accrescimento più rapido tanto maggiore è la variazione di tensione a cui è sottoposto il componente.

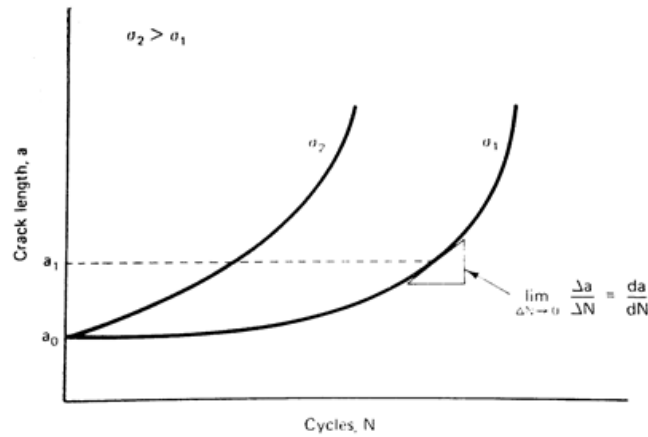


Figura 4.22: Andamento della lunghezza della cricca in funzione del numero di cicli

La curva mostrata in Figura 4.22 è ottenibile da una prova di propagazione della cricca, in cui viene misurata la lunghezza della stessa durante l'applicazione ripetuta del carico. Fissata una determinata lunghezza  $a$  è possibile ricavare dal grafico la velocità di accrescimento corrispondente  $da/dN$  come la pendenza in quel punto; inoltre, assumendo che  $a$  sia costante e che varino solo le tensioni, si calcola il valore di  $\Delta K$ .

Con le coppie di valori così ottenuti si può costruire la curva dell'andamento della velocità di propagazione  $da/dN$ , il quale può essere determinato anche per via numerica. La rappresentazione di  $da/dN$  in un grafico bilogarithmico in funzione di  $\Delta K$  produce una curva sigmoide e consente di individuare tre zone, mostrate in Figura 4.23.

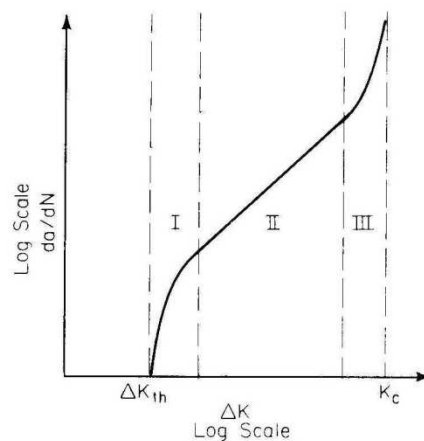


Figura 4.23: Le tre zone della curva di propagazione della cricca

Inizialmente la velocità di propagazione non è misurabile; si ricorda infatti che il metodo che applica la meccanica della frattura è adatto per rappresentare la fase di crescita della cricca e non

quella iniziale della sua nucleazione. Successivamente  $\Delta K$  raggiunge il valore di soglia (*threshold*)  $\Delta K_{th}$ , in corrispondenza del quale l'accrescimento può essere rilevato. Infine, al termine del tratto centrale rettilineo, viene raggiunto il valore critico  $\Delta K_c$ , la velocità aumenta e si manifesta la frattura.

La maggior parte delle applicazioni della LEFM interessano la regione II del grafico, in cui la curva assume un andamento approssimativamente lineare; diversi autori hanno proposto espressioni per descrivere il comportamento del materiale, quella che ha riscosso maggiore successo è quella elaborata da Paris all'inizio degli anni '60:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m$$

dove

$C$  costante del materiale;

$m$  costante del materiale, solitamente con valori tra 3 e 4;

$\Delta K$  variazione del fattore di intensità di tensione, pari a  $(K_{max} - K_{min})$ .

Indicando con  $a_i$  e  $a_f$  rispettivamente la lunghezza della cricca iniziale e finale, ossia quella critica, è possibile ricavare dall'espressione il numero di cicli a rottura e quindi la vita a fatica del pezzo:

$$N_f = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C(\Delta K)^m}$$

Richiamando la definizione di  $\Delta K$

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} = f(g)\sigma\sqrt{\pi a}$$

si osserva la dipendenza dalla lunghezza della cricca non solo di  $\Delta K$ , ma anche del fattore correttivo  $f(g)$ , pertanto la determinazione di  $N_f$  richiede una procedura iterativa con integrazione per via numerica. Talvolta è possibile fare l'assunzione, in prima approssimazione, di un valore di  $f(g)$  calcolato in corrispondenza di  $a_i$ .

Si sottolinea che la vita a fatica è fortemente influenzata dalla lunghezza iniziale della cricca, mentre l'influenza di quella finale è in genere modesta, con l'eccezione di materiali particolarmente resistenti sottoposti a forti variazioni di tensioni, in cui vi è poca differenza tra la lunghezza iniziale e quella finale.

La dimensione iniziale della cricca può essere determinata con una valutazione non distruttiva, mentre quella finale è legata alla resistenza a frattura del materiale. Da quanto detto si deduce, quindi, in generale una non-dipendenza della vita a fatica dalla resistenza a frattura del materiale.

Un fenomeno importante, soprattutto nel caso di sforzi ad ampiezza variabile, è la chiusura della cricca, studiato da Elbert all'inizio degli anni '70. Egli osserva che le superfici della cricca si chiudono in posizione di contatto l'una con l'altra quando la sollecitazione esterna applicata è ancora di trazione e non si riaprono finché non viene raggiunto un certo valore di sforzo al successivo ciclo di carico. Secondo Elbert tale comportamento è dovuto alla plasticizzazione all'apice della cricca.

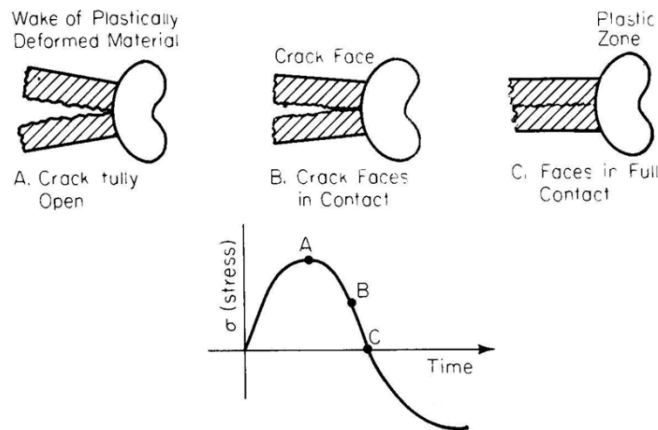


Figura 4.24: Fenomeno di chiusura della cricca

Secondo questa teoria la propagazione della cricca avviene solo quando le due superfici sono completamente aperte.

$$\Delta K = K_{max} - K_{min}$$

$$\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{open}$$

Dal momento che

$$K_{open} > K_{min}$$

risulta

$$\Delta K > \Delta K_{eff}$$

Pertanto nella valutazione dell'accrescimento della cricca per fatica deve essere considerato un valore inferiore della variazione del fattore di intensità di tensione.

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K_{eff})$$



## Capitolo 5

# LA FATICA NELLA NORMATIVA

### 5.1 NORMATIVA VIGENTE

La normativa vigente prevede, tra gli Stati Limite da verificare, la condizione di rottura per fatica: al § 2.2 del Decreto Ministeriale del 14 gennaio 2008 “Nuove Norme Tecniche per le costruzioni” [22] è presente lo Stato Limite Ultimo di fatica per membrature e collegamenti; inoltre tra gli Stati Limite di Esercizio vengono elencati i danni per fatica che possono compromettere la durabilità.

La fatica, quale problematica specifica, è trattata nelle NTC in termini generali, approfondendo soltanto gli aspetti applicativi più ricorrenti; maggiori indicazioni sono contenute nella Circolare n. 617 del 2 febbraio 2009 “Istruzioni per l’applicazione delle nuove Norme Tecniche per le costruzioni” [15].

La norma stessa invita a fare riferimento, per questioni di dettaglio, a normative di comprovata validità, con particolare riferimento agli Eurocodici e al documento UNI EN1993-1-9 [49].

Si distinguono due possibili approcci progettuali:

- il criterio del danneggiamento accettabile è adottato per le strutture poco sensibili alla rottura per fatica, ossia per quei casi in cui può esserci un danneggiamento della struttura e il mantenimento del richiesto livello di affidabilità nei riguardi dello stato limite di fatica è garantito attraverso un appropriato programma di ispezione, controllo, monitoraggio e riparazione delle lesioni di fatica, esteso alla vita di progetto della struttura. Questo metodo è detto anche *damage tolerant*.

- il criterio della vita utile a fatica viene applicato alle strutture sensibili alla rottura per fatica, ossia a quei casi in cui l'ispezione, il monitoraggio e le riparazioni non sono agevoli e il collasso avviene rapidamente dopo la formazione locale di cricche per fatica. Tali strutture devono essere progettate a fatica adottando dettagli costruttivi e livelli di sforzo tali da garantire, per la vita a fatica prevista, gli stessi livelli di sicurezza adottati per le altre verifiche agli stati limite ultimi, anche in assenza di specifiche procedure di ispezione e manutenzione durante la vita di esercizio. Questo metodo è detto anche *safe life*.

In generale le prescrizioni sono valide per tutti i tipi di acciai strutturali, acciai inossidabili e acciai resistenti alla corrosione atmosferica non protetti, impiegati in strutture operanti in condizioni atmosferiche normali, con sufficiente protezione contro la corrosione, sottoposte a manutenzione regolare ed esposte a temperature inferiori a 150°C.

### 5.1.1 Le sollecitazioni a fatica

La normativa prevede di considerare una distribuzione temporale delle azioni nel corso della vita nominale della struttura, coerente con la tipologia strutturale in esame e con il regime di impegno previsto, assegnata mediante il cosiddetto spettro di carico, dal quale è possibile ricavare lo spettro di tensione.

#### 5.1.1.1 Spettro di carico

Gli spettri di carico rappresentano una sequenza definita di carichi applicati alla struttura e possono essere determinati mediante studi specifici o anche dedotti da normative di comprovata validità. Nel caso di ponti stradali e ferroviari, essi sono assegnati al § 5.1.4.3 delle NTC.

Quando lo spettro di carico effettivo è complesso al punto da non poter essere impiegato direttamente nelle verifiche, esso può essere sostituito da spettri convenzionali, in grado di riprodurre il danneggiamento a fatica o il livello massimo di escursione delle tensioni  $\Delta\sigma_{max}$ , prodotti dallo spettro effettivo.

#### 5.1.1.2 Oscillogramma di tensione

L'applicazione delle azioni dello spettro di carico alla struttura induce nel dettaglio considerato l'oscillogramma di tensione  $\sigma(t)$ . Esso rappresenta la storia delle tensioni in un punto particolare della struttura durante l'evento di carico e viene ricavato mediante registrazioni o calcolo.

L'oscillogramma deve essere elaborato con opportuni metodi di identificazione e di conteggio ciclico: per le strutture civili si può impiegare il metodo del serbatoio (*reservoir method*) o, in alternativa, il metodo del flusso di pioggia (*rainflow method*); per singole strutture, ad esempio

strutture offshore, anche in considerazione della particolare tipologia dello spettro di carico a cui sono soggette, si può far ricorso a metodi di conteggio alternativi.

Rispetto al metodo del serbatoio, il metodo del flusso di pioggia ha il vantaggio di poter essere più facilmente implementato sul calcolatore.

### 5.1.1.3 Metodo del serbatoio

Nel metodo del serbatoio si ipotizza che l'oscillogramma delle tensioni rappresenti il profilo di fondo di un serbatoio pieno di liquido, i cui paramenti esterni sono costituiti dal tratto convergente verso il massimo assoluto e da un tratto corrispondente, reale o fittizio, posto al termine del diagramma stesso.

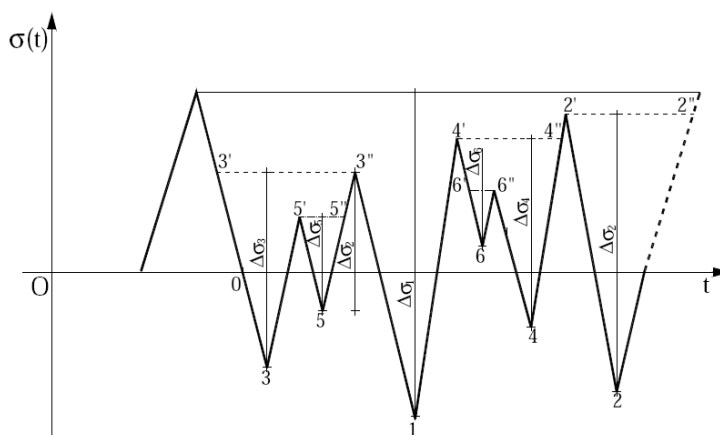


Figura 5.1: Metodo del serbatoio

Con riferimento alla Figura 5.1, si immagina di svuotare il serbatoio a partire dal minimo assoluto, in questo caso indicato con il punto 1, al vuoto che si forma corrisponde il primo ciclo e alla differenza di quota tra 1 ed il pelo libero originario rappresenta la relativa escursione di tensione; al termine di questa operazione si formano altri bacini, semplici (2'22'') o multipli (3'35'53'') e (4'66''44''). L'operazione si ripete procedendo a svuotare in successione dagli altri punti di minimo relativo, ordinati in senso crescente,  $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ , fino a svuotare l'intero serbatoio; ad ogni operazione di svuotamento corrisponde un ciclo, la cui variazione di tensione è pari all'altezza di liquido svuotato.

### 5.1.1.4 Metodo del flusso di pioggia

Il metodo del flusso di pioggia, meno intuitivo e abbastanza complesso dal punto di vista operativo, individua i cicli mediante il flusso di una goccia d'acqua che scorre sulla traiettoria, immaginando l'asse dei tempi disposto verticalmente.

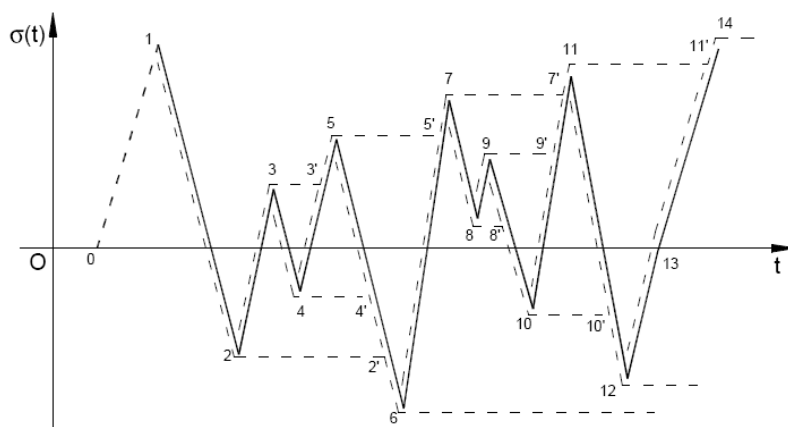


Figura 5.2: Metodo del flusso di pioggia

Si procede alternativamente da un massimo locale e da un minimo locale, curando che i massimi siano ordinati in senso decrescente e i minimi in senso crescente. Ogni volta che la goccia si distacca dalla traiettoria e cade o incontra un tratto già bagnato inizia un nuovo semiciclo, in modo che ciascun tratto dell'oscillogramma venga percorso una sola volta. I semicicli di uguale ampiezza vengono poi accoppiati in modo da individuare i cicli [49].

### 5.1.1.5 Spettro di tensione

Dall'elaborazione dell'oscillogramma di tensione con uno dei metodi descritti si ottiene lo spettro di tensione, caratterizzato da valori di ampiezza di tensione  $\Delta\sigma_i$  per ciascun ciclo di carico. Tali valori rappresentano le sollecitazioni agenti, da confrontare, attraverso l'introduzione di opportuni coefficienti di sicurezza riportati nella norma, con la resistenza del dettaglio in esame.

L'Eurocodice 3[49] impone che per le verifiche di fatica siano utilizzate le tensioni allo stato limite di esercizio, calcolate nei punti di potenziale innesco del danno per fatica, attraverso un calcolo lineare elastico della struttura.

Gli effetti che producono concentrazioni di sforzo nei particolari costruttivi devono essere considerati amplificando il valore dell'escursione tensionale in modo appropriato, impiegando soluzioni analitiche note dalla teoria elastica o i risultati di un'analisi agli elementi finiti.

I valori di progetto degli intervalli di variazione della tensione assumono, rispettivamente per tensioni normali e tangenziali, la seguente forma:

$$\gamma_{Ff}\Delta\sigma_{E,2} = k_f \times \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_i \times \dots \times \lambda_n \times \Delta\sigma(\gamma_{Ff}Q_k)$$

$$\gamma_{Ff}\Delta\tau_{E,2} = k_f \times \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_i \times \dots \times \lambda_n \times \Delta\tau(\gamma_{Ff}Q_k)$$

dove

$\Delta\sigma_{E,2}$	escursione tensionale corrispondente ad una vita a fatica di $2 \cdot 10^6$ cicli;
$\gamma_{Ff}$	fattore di sicurezza parziale per le verifiche a fatica;
$k_f$	coefficiente di concentrazione della tensione che tiene conto dell'amplificazione locale dello sforzo;
$\lambda_i$	coefficienti di danneggiamento equivalente;
$\Delta\sigma(\gamma_{Ff}Q_k)$	intervallo di variazione della tensione prodotto dai carichi a fatica.

### 5.1.2 La resistenza a fatica

Nell'Eurocodice 3 la resistenza a fatica è rappresentata dalle curve S-N, tracciate nel piano bilogaritmico  $\log(\Delta\sigma)$ - $\log(N)$  o  $\log(\Delta\tau)$ - $\log(N)$ , con  $N$  il numero di cicli a rottura.

Esse sono state ottenute da test effettuati su provini in scala reale, per tenere conto in modo corretto degli effetti dovuti alle imperfezioni geometriche e strutturali, derivanti dalla produzione del materiale e dall'esecuzione (per esempio tensioni residue derivanti dalla saldatura), che influenzano la vita a fatica.

Ogni curva è individuata mediante la classe di resistenza a fatica  $\Delta\sigma_C$  o  $\Delta\tau_C$ , valore caratteristico per cui i provini presentano il 95 % di probabilità di sopravvivenza, che rappresenta la resistenza a fatica del dettaglio, espressa in MPa, per  $N = 2 \cdot 10^6$  cicli.

Si definisce inoltre  $\Delta\sigma_D$  o  $\Delta\tau_D$ , limite di fatica ad ampiezza costante, il valore limite di escursione tensionale al di sotto del quale, in prove ad ampiezza costante, non si verifica danneggiamento a fatica, mentre si indica con  $\Delta\sigma_L$  o  $\Delta\tau_L$  il limite per il calcolo a fatica (*cut-off limit*), ossia il valore al di sotto del quale gli intervalli di variazione della tensione dello spettro di progetto non contribuiscono al danneggiamento cumulativo.

Seguendo la normativa, si distinguono le curve per le tensioni normali e per quelle tangenziali.

#### 5.1.2.1 Curve S-N per tensioni normali

Le curve S-N per tensioni normali sono caratterizzate da:

$\Delta\sigma_C$	classe di resistenza a fatica, corrispondente a $N = 2 \times 10^6$ cicli;
$\Delta\sigma_D$	limite di fatica ad ampiezza costante, corrispondente a $N = 5 \times 10^6$ cicli;
$\Delta\sigma_L$	limite per i calcoli a fatica, corrispondente a $N = 10^8$ cicli.

L'equazione della curva S-N è data da:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_C \left( \frac{2 \cdot 10^6}{N} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{per } N \leq 5 \cdot 10^6$$

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_D \left( \frac{5 \cdot 10^6}{N} \right)^{\frac{1}{m+2}} \quad \text{per } 5 \cdot 10^6 \leq N \leq 10^8$$

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_L \quad \text{per } N > 10^8$$

dove  $m = 3$ , da cui risulta

$$\Delta\sigma_D = 0,737\Delta\sigma_C$$

$$\Delta\sigma_L = 0,549\Delta\sigma_D$$

Le curve S-N per tensioni normali sono rappresentate in Figura 5.3.

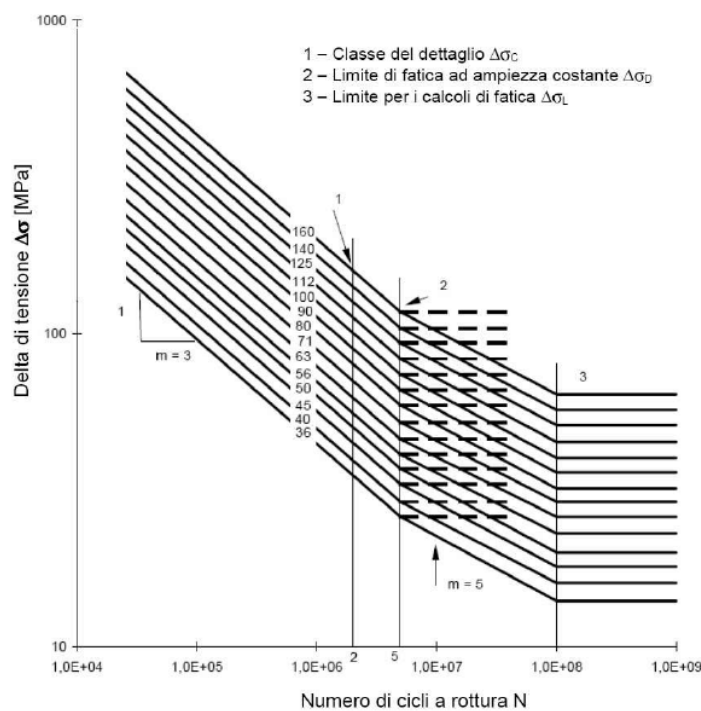


Figura 5.3: Curve S-N per dettagli ed elementi soggetti a tensioni normali

### 5.1.2.2 Curve S-N per tensioni tangenziali

Le curve S-N per tensioni tangenziali sono caratterizzate da:

$\Delta\tau_C$  classe di resistenza a fatica, corrispondente a  $N = 2 \cdot 10^6$  cicli;

$\Delta\tau_L$  limite per i calcoli a fatica, corrispondente a  $N = 10^8$  cicli.

L'equazione della curva S-N è data da:

$$\Delta\tau = \Delta\tau_C \left( \frac{2 \cdot 10^6}{N} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{per } N \leq 10^8$$

$$\Delta\tau = \Delta\tau_L \quad \text{per } N > 10^8$$

dove  $m = 5$ , da cui risulta

$$\Delta\tau_L = 0,457\Delta\tau_C$$

Le curve S-N per tensioni tangenziali sono rappresentate in Figura 5.4.

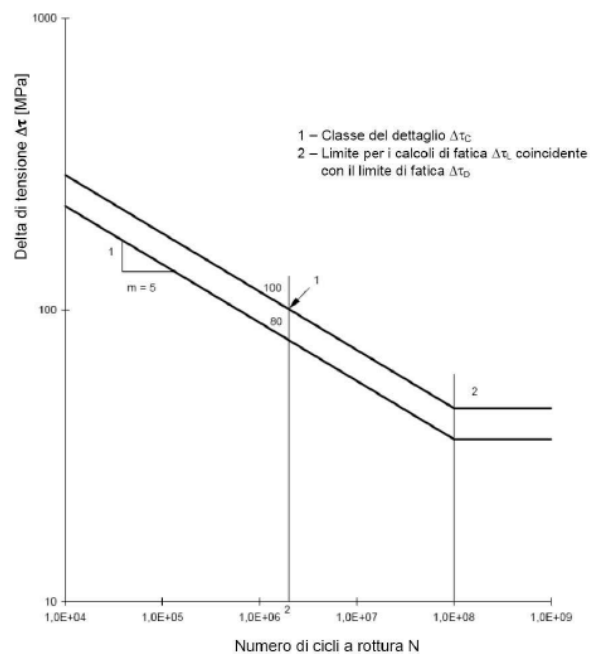


Figura 5.4: Curve S-N per dettagli ed elementi soggetti a tensioni tangenziali

### 5.1.3 Verifica a fatica

La verifica a fatica per intervalli di variazione della tensione normale assume la seguente forma:

$$\frac{\gamma_{Ff} \Delta\sigma_{E,2}}{\Delta\sigma_C / \gamma_{Mf}} \leq 1,0$$

Si deve inoltre porre attenzione che le escursioni tensionali non eccedano il limite:

$$\Delta\sigma \leq 1,5f_y$$

Analogamente per intervalli di variazione della tensione tangenziale:

$$\frac{\gamma_{Ff} \Delta \tau_{E,2}}{\Delta \tau_c / \gamma_{Mf}} \leq 1,0$$

Con particolare attenzione che sia:

$$\Delta \tau \leq 1,5 \frac{f_y}{\sqrt{3}}$$

In caso di combinazione di entrambe le escursioni tensionali si ha:

$$\left( \frac{\gamma_{Ff} \Delta \sigma_{E,2}}{\Delta \sigma_c / \gamma_{Mf}} \right)^3 + \left( \frac{\gamma_{Ff} \Delta \tau_{E,2}}{\Delta \tau_c / \gamma_{Mf}} \right)^5 \leq 1,0$$

Il cosiddetto effetto scala, dovuto allo spessore o ad altri effetti dimensionali, viene considerato attraverso l'impiego del coefficiente  $k_s$ , che riduce la resistenza a fatica  $\Delta \sigma_c$ , a seconda del tipo di dettaglio.

Per storie di carico con cicli ad ampiezza variabile, l'Eurocodice prevede inoltre la verifica basata sull'accumulo del danneggiamento, inteso come inverso della vita residua. Esso viene valutato con la formula di Miner, che prevede un'accumulazione di tipo lineare.

Indicati i diversi livelli tensionali con  $i$ , si ha:

$$D_d = \sum_i^m \frac{n_i}{N_i}$$

dove

$n_i$  numero di cicli associati all'escursione tensionale  $\gamma_{Ff} \Delta \sigma_i$ ;

$N_i$  numero di cicli a rottura ottenuti dalla curva S-N del dettaglio in esame in corrispondenza di un livello tensionale pari a  $\gamma_{Ff} \Delta \sigma_i$ .

Una volta calcolato  $D_d$ , è possibile convertire la storia di carico composta da cicli ad ampiezza variabile in una storia di carico con cicli ad ampiezza costante, tali da generare lo stesso danno.

La verifica può quindi essere condotta in termini di tensioni oppure direttamente controllando che sia:

$$D_d \leq 1,0$$



### 5.1.4 La fatica nelle saldature

Per le saldature l'Eurocodice prevede che le tensioni da considerare siano le tensioni normali, trasversali all'asse della saldatura:

$$\sigma_{wf} = \sqrt{\sigma_{\perp f}^2 + \tau_{\perp f}^2}$$

e quelle tangenziali, parallele all'asse della saldatura:

$$\tau_{wf} = \tau_{\parallel f}$$

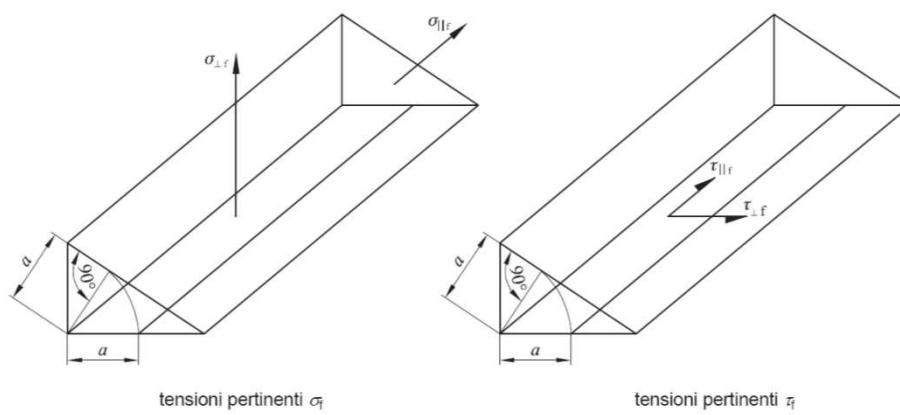


Figura 5.5: Tensioni nelle saldature a cordone d'angolo

La normativa si basa sul metodo delle tensioni nominali e fa pertanto riferimento alla tensione nominale alla base del cordone di saldatura, rappresentata dalla tensione principale massima al piede.

La classificazione della normativa suddivide i particolari costruttivi sulla base delle loro caratteristiche specifiche; per gli elementi saldati i dettagli sono distinti a seconda di:

- geometria dell'unione saldata;
- direzione della sollecitazione;
- possibile posizione del punto di innesco della cricca;
- metodi di fabbricazione ed ispezione della saldatura.

Oltre ai particolari costruttivi la cui classe di resistenza a fatica è definita sulla base delle tensioni nominali, la norma prevede per i dettagli saldati delle categorie aggiuntive a cui fare riferimento nel caso di valutazione della resistenza a fatica con il metodo della tensione geometrica (*hot spot stress*) [49].

Per tensione geometrica di picco si intende la tensione principale massima nel materiale base adiacente al piede del cordone di saldatura, considerando gli effetti della concentrazione delle tensioni dovute alla geometria globale del determinato particolare costruttivo.

In generale, poiché le curve S-N sono ricavate sperimentalmente, esse includono diversi effetti:

- direzione della tensione;
- tensioni residue;
- concentrazioni locali di tensione dovute alla geometria della saldatura;
- condizioni metallurgiche;
- dimensione e forma delle discontinuità accettabili;
- processi di saldatura;
- eventuali trattamenti migliorativi.

Nelle categorie riportate non sono invece trattati gli effetti del disallineamento e della fatica con innesco della cricca alla radice della saldatura e conseguente propagazione attraverso la gola della saldatura stessa.

## **5.2 LIMITAZIONI DELL'EUROCODICE**

I vantaggi della trattazione del problema della fatica nell'Eurocodice sono la semplicità e la facilità di applicazione.

Tuttavia la classificazione dei dettagli sulla base delle sole caratteristiche geometriche generali e della tipologia di carico dominante, nonostante da un lato aiuti nella verifica, dall'altro possono diventare fonte di errori per la corretta valutazione comportamento a fatica degli elementi strutturali in opera.

La resistenza a fatica nell'Eurocodice 3 viene trattata come una proprietà del dettaglio costruttivo: per quanto numerose, le categorie della norma non possono comprendere la grande varietà di configurazioni geometriche che si presentano nella pratica costruttiva. Nella progettazione o nell'analisi di strutture esistenti si incontrano pertanto numerosi particolari che non rientrano in questa classificazione e per i quali la normativa si rivela povera di indicazioni. Questa carenza rende difficoltosa la scelta della categoria da considerare per il dettaglio oggetto di studio ed espone ad una forte soggettività l'individuazione della curva S-N a cui fare riferimento per la verifica.

Inoltre all'interno della norma non viene mai considerato l'effetto della tensione media. L'unica eccezione è rappresentata dalla valutazione dell'effetto benefico di una tensione media di compressione, che limita l'apertura della cricca e aumenta la vita a fatica: questo effetto viene tenuto in conto consentendo di ridurre del 40% l'ampiezza della parte del ciclo di carico in

compressione per la valutazione dell'escursione tensionale di progetto, come mostrato in Figura 5.6.

Il caso di tensione media positiva, ossia di trazione, non è considerato, nonostante la sua pericolosa capacità di favorire l'apertura della cricca e la sua propagazione.

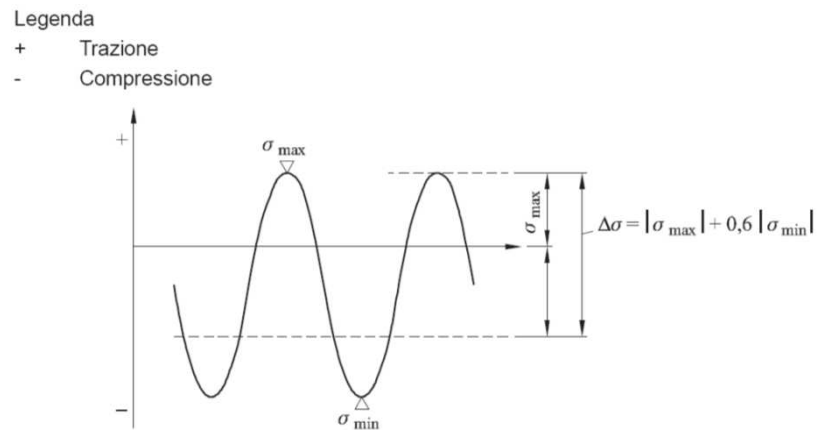


Figura 5.6: Intervallo di variazione di tensione modificato

Infine, con riferimento al metodo per la valutazione del danno, l'Eurocodice adotta la formula di Miner, caratterizzata da un'accumulazione lineare alla Palmgren; essa, anche se è caratterizzata dalla semplicità di applicazione, presenta tutte le limitazioni esposte al paragrafo 6.1 e pertanto risulta essere inadeguata per una corretta valutazione del danneggiamento.



## *Capitolo 6*

# ***IL DANNO PER FATICA***

### **6.1 PREVISIONE DELLA VITA A FATICA**

L'obiettivo principale dello studio del fenomeno della fatica consiste nella determinazione della vita a fatica del pezzo o del dettaglio costruttivo, ai fini della progettazione, della valutazione della sicurezza e dell'ottimizzazione di componenti e strutture.

La determinazione della vita residua sotto l'azione di sollecitazioni cicliche richiede la comprensione dell'evoluzione che porta alla rottura per fatica: quest'ultima, infatti, risulta essere l'esito di un processo di accumulo di danno, progressivo e irreversibile, in cui le proprietà meccaniche del materiale degradano in modo continuo sotto l'azione di carichi ciclici e il danneggiamento dipende dall'entità di tensioni e deformazioni.

È quindi noto che la fatica si manifesta come un progressivo deterioramento del materiale che si accumula al procedere dei cicli di carico, tuttavia il problema della rappresentazione di tale danneggiamento è di non facile soluzione.

Per lo studio di questo processo si rende necessaria la formulazione di un metodo che consenta di valutare e quantificare l'accumulo del danno per fatica.

L'interesse per questo aspetto del fenomeno è maggiore dopo gli anni '70, determinando un aumento delle pubblicazioni in tal senso; in generale le trattazioni sviluppate prima di questa data sono principalmente di carattere fenomenologico, mentre quelle successive sono semi-analitiche. Esse possono essere classificate nel modo seguente:

- legge di accumulazione lineare, LDR (*Linear Damage Rule*), introdotta da Miner nel 1945 sulla base delle osservazioni fatte da Palmgren vent'anni prima;
- curve di danno non lineari e approcci bilineari, che comprendono DCA (*Damage Curve Approach*), RDLDR (*Refined Double Linear Damage Rule*), DDCA (*Double Damage Curve Approach*), sviluppati da Manson e Halford negli anni '80;
- approcci basati sulle curve S-N modificate;
- approcci basati sull'accrescimento della cricca;
- approcci basati sull'energia;
- modelli basati sull'approccio della CDM (*Continuum Damage Mechanics Approach*), che descrivono il danno nel continuo.

I confini tra alcuni di questi approcci non sono sempre ben distinguibili; una presentazione più estesa e completa delle diverse teorie è contenuta in [24].

In ogni caso nessuna di esse è universalmente accettata, poiché ciascuna riesce a considerare solo alcuni dei fattori che influenzano il fenomeno, come la dipendenza dal carico, gli effetti della sequenza delle sollecitazioni e della loro interazione, la non linearità dell'accumulazione, i cicli con ampiezza inferiore al limite di fatica e la tensione media. L'applicabilità di ciascun modello dipende quindi dal particolare problema che si intende studiare.

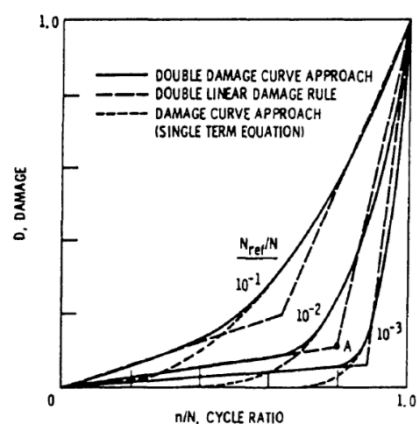


Figura 6.1: Confronto tra gli approcci DCA, DLDR e DDCA

In particolare ci si sofferma sulla distinzione tra le teorie di accumulo di danno lineari e quelle non lineari.

La prima formulazione matematica per quantificare il danno per fatica è la legge di accumulazione proposta nel 1945 da Miner, sulla base della teoria lineare di Palmgren del 1924, e nota come legge di accumulazione lineare (LDR) o regola di Palmgreen-Miner o, più semplicemente, legge di Miner.

### 6.1.1 Legge di accumulazione lineare di Miner

L'approccio di Miner si basa sulle seguenti assunzioni:

- il tasso di accumulo del danno rimane costante per ogni ciclo di carico, indipendentemente dal livello di carico;
- il danneggiamento a fatica si verifica e si accumula solo quando la tensione dovuta al carico è superiore al limite di fatica;
- l'accumulazione è di tipo lineare rispetto al numero di cicli;
- i cicli sono estratti e disposti in ordine crescente senza considerare l'ordine con cui si presentano realmente.

Il danno per fatica è rappresentato da una variabile scalare  $D$  tale che:

$$D = 0 \quad \text{per} \quad N = 0 \quad \text{intera vita a fatica rimanente}$$

$$D = 1 \quad \text{per} \quad N = N_f \quad \text{vita a fatica esaurita}$$

Si indica con  $N_i$  il numero di cicli di ampiezza  $\Delta\sigma_i$  necessario per provocare la rottura per fatica del materiale, ricavato dalla curva S-N in corrispondenza del livello tensionale d'interesse.

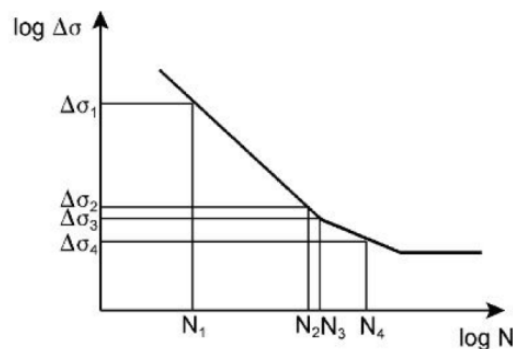


Figura 6.2: Ottenimento della vita a fatica  $N_i$  corrispondente ad un dato livello di carico attraverso la curva S-N

Si ricavano quindi le espressioni del danno secondo questa trattazione.

Per un solo ciclo di carico di ampiezza  $\Delta\sigma_i$ :

$$D_i = \frac{1}{N_i}$$

Per  $n_i$  cicli di carico di ampiezza  $\Delta\sigma_i$ :

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}$$

Assumendo la linearità dell'accumulazione, il danno per fatica di componenti sottoposti a carichi ad ampiezza variabile, con  $k$  diversi livelli di carico, può essere stimato come:

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i}$$

dove:

$D$  danno totale, assunto pari all'unità in corrispondenza della fine della vita a fatica;

$n_i$  numero di cicli di carico ad un dato livello di tensione  $\Delta\sigma_i$ ;

$N_i$  numero di cicli a rottura per il dato livello di tensione  $\Delta\sigma_i$ .

L'espressione proposta da Miner ha riscosso grande successo ed è presente nella normativa di riferimento come metodo per il calcolo del danno per fatica come riportato al paragrafo 5.1.3, grazie alla sua semplicità e alla facilità di applicazione, poiché essa richiede, oltre alle proprietà a fatica del materiale, solamente la conoscenza dei livelli tensionali agenti sul componente strutturale.

Tuttavia, essa fornisce buoni risultati solo per carichi caratterizzati da piccole variazioni dell'ampiezza e del valore medio della tensione; considerando i casi reali, in cui l'accumulazione non avviene in modo lineare, la formulazione risulta inadeguata per descrivere l'effettivo progredire del danno.

### 6.1.2 Limiti della legge di accumulazione lineare

Le assunzioni alla base della formulazione di Miner ne costituiscono anche i limiti. La legge di accumulazione lineare proposta, infatti, presenta i seguenti difetti:

- indipendenza dal livello di carico, dal momento che si considera che tutti i carichi provochino lo stesso danno  $D$ ;
- assenza dei contributi, in termini di danno, dovuti a tensioni inferiori al limite di fatica, che sono una delle cause principali degli errori delle previsioni teoriche rispetto ai risultati ottenuti sperimentalmente;
- mancanza di sensibilità nei confronti della sequenza dei carichi, trascurando l'interazione dovuta alla successione delle sollecitazioni.

Per questi motivi la legge di Miner spesso porta ad una discrepanza tra la vita prevista e quella sperimentale. Essa è stata pertanto oggetto di modifiche da parte di diversi autori, nel tentativo di impiegare con successo, per la stima del danno, la semplice formula proposta.

Un esempio è costituito dai modelli bilineari, che prevedono la separazione dello sviluppo del danno in due fasi distinte, quella di formazione e quella di propagazione della cricca in stato I,



proponendo l'applicazione di una legge, sempre lineare, a ciascuna delle due fasi, ma con pendenze differenti.

Tuttavia, a causa delle carenze intrinseche, la previsione di vita a fatica basata sull'accumulazione lineare alla Miner è spesso insoddisfacente.

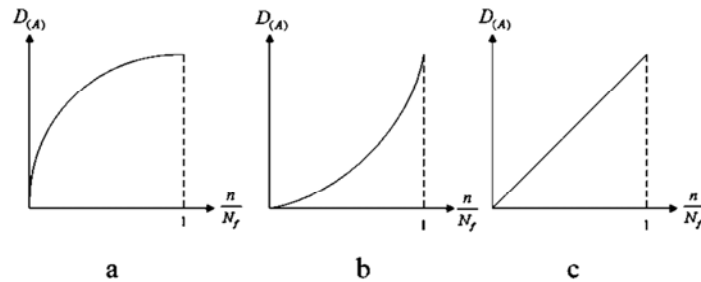


Figura 6.3: Effetti della sequenza di carico sulle curve di accumulazione di danno a fatica (a) sotto carico *high-low*, (b) sotto carico *low-high*, (c) con legge di accumulazione lineare di Miner

### 6.1.3 Leggi di accumulazione non lineari

Per tenere conto degli effetti dovuti alla successioni dei carichi sono state proposte diverse leggi di accumulazione del danno non lineari, molte delle quali basate su formule empiriche o semi empiriche, senza fondamento teorico.

Una delle prime formulazioni è quella di Marco e Starkey, pubblicata nel 1954, che prevede una struttura simile a quella di Miner, ma in forma esponenziale:

$$D = \sum_{i=1}^k \left( \frac{n_i}{N_i} \right)^{m_i}$$

in cui  $m_i$  è un coefficiente dipende dall' $i$ -esimo livello di carico.

L'espressione fornita considera gli effetti della sequenza di carico, tuttavia le ricerche hanno dimostrato che solo in alcuni casi e per alcuni materiali la vita di fatica prevista dal modello di Marco e Starkey mostra un buon accordo con i risultati sperimentali; inoltre, il coefficiente  $m_i$  risulta di difficile determinazione. La formulazione, pertanto, ha un uso limitato nelle applicazioni ingegneristiche.

Un altro approccio proposto si occupa del comportamento meccanico di un mezzo continuo sottoposto a danneggiamento, sulla base della meccanica del danno del continuo e del concetto di tensione efficace, introdotto da Kachanov nel 1958 nell'ambito dello studio del fenomeno di creep e poi esteso anche alla fatica.

Negli anni '80 Chaboche e Lemaitre applicano questi principi per formulare un'equazione che descrive l'evoluzione non lineare del danno:

$$dD = f(\sigma, \varepsilon, \varepsilon_p, D, T, \dots)dN$$

dove le variabili nella funzione  $f$  possono essere la tensione, deformazione totale, deformazione plastica, la variabile di danno, la temperatura e le variabili di hardening.

Dal confronto con le teorie precedenti, i punti di forza della trattazione sono:

- la capacità di descrivere un'accumulazione non lineare del danno, derivante dal fatto che la variabile di danno e i parametri di carico risultano non separabili;
- la considerazione del danno provocato anche da cicli di carico bassi, associati a tensioni inferiori al limite di fatica;
- la sensibilità agli effetti dovuti alla tensione media.

Successivamente alla pubblicazione di questi studi, l'approccio di Chaboche è stato adottato, con varie modifiche ed integrazioni, da molti autori al fine di ricavare nuove equazioni per descrivere il danno a fatica [20], [21], [33], [45].

## **6.2 LA MECCANICA DEL DANNO**

La meccanica del danno del continuo (CDM, *Continuous Damage Mechanics*) costituisce, come la meccanica della frattura, uno strumento per lo studio dei processi di progressivo degrado che si sviluppano nei materiali a causa di sollecitazioni meccaniche, termiche o chimiche.

Sia la meccanica della frattura che la meccanica del danno si propongono di stimare l'effetto dei processi di danneggiamento, che consistono nella formazione, propagazione e coalescenza di microdifetti, sulla risposta macroscopica del materiale.

Mentre la meccanica della frattura, i cui principi sono stati esposti al paragrafo 4.5, analizza la propagazione delle cricche, considerate come discontinuità nel materiale integro, rimuovendo perciò l'ipotesi di continuità del mezzo, la meccanica del danno, partendo dall'ipotesi di continuità, studia l'effetto dell'insieme delle discontinuità della microstruttura sull'elemento di volume rappresentativo del continuo e si basa su variabili medie su tale volume. Essa è in grado, perciò, di descrivere il processo di danneggiamento a partire dal materiale integro fino alla formazione di fratture macroscopiche.

Nonostante i processi di degrado siano conseguenza di un unico e generale meccanismo microscopico legato alla rottura dei legami atomici e molecolari, a livello macroscopico, il danneggiamento si può manifestare in vari modi a seconda della natura del materiale, del tipo di carico e della temperatura.

Si possono perciò avere i seguenti diversi tipi di processi:

- danno fragile, in cui la fessurazione del materiale avviene sotto carichi monotoni senza significative deformazioni irreversibili e si manifesta in modo localizzato in una zona ristretta del materiale;
- danno duttile, in cui il danneggiamento è accompagnato da deformazioni plastiche ed è conseguenza della formazione di vuoti dovuta alla decoesione tra inclusioni e matrice e della loro crescita e coalescenza;
- danno fragile visco-plastico, tipico dei metalli a medie ed alte temperature, in cui il danno è accompagnato da deformazioni viscose, è dovuto ad un processo di decoesione intergranulare che si verifica per deformazioni sufficientemente elevate ed è funzione del tempo;
- danno a fatica, in cui la formazione di microfratture fragili avviene sotto l'azione di carichi ripetuti nel tempo in regime di piccole deformazioni ed è funzione del numero di cicli di carico.

Nella meccanica del danno del continuo lo studio del fenomeno di danneggiamento è quindi del tutto generale: essa si propone di descrivere tutti questi processi di degrado del materiale, sottoposto a condizioni di carico e ambientali di qualsiasi natura, e tradurre a livello macroscopico i processi che avvengono a livello microscopico durante la deformazione, rappresentando il comportamento del materiale e il progressivo deterioramento che accompagna la formazione delle cricche attraverso variabili globali del continuo, nonostante la natura non omogenea dei difetti che ne sono causa.

Uno dei principali vantaggi della trattazione è la possibilità di considerare gli effetti dell'accoppiamento tra il processo di danneggiamento e il comportamento del materiale in termini di tensioni e deformazioni.

Questo approccio è stato introdotto dai lavori sul fenomeno di scorrimento viscoso (creep) nei materiali metallici sottoposti a sforzo uniassiale di Kachanov nel 1958 e di Rabotnov nel 1969. I concetti in essi contenuti sono stati ripresi negli anni '70 da diversi autori ed estesi alla frattura duttile e a quella a fatica, generalizzando al caso isotropo multiassiale, inserendo lo studio all'interno del più ampio ambito dei processi irreversibili della termodinamica.

Ai fini del presente lavoro di tesi sono di particolare interesse l'applicazione del metodo al caso del fenomeno della fatica nei materiali metallici e la trattazione di Lemaitre e Chaboche, esposta al paragrafo 6.3.

### 6.2.1 Fenomeno di danneggiamento

Il fenomeno del danneggiamento si manifesta sotto forma di discontinuità di superficie, come microcricche, o di volume, come microvuoti. Il processo è fortemente irreversibile e i classici trattamenti termomeccanici possono solo parzialmente rimuovere i difetti.

Come condizioni iniziali del processo di danno in genere si assumono quelle esistenti all'inizio della storia di carico, mentre lo stato finale è identificato con la frattura dell'elemento e la formazione di una cricca macroscopica, le cui dimensioni sono di difficile individuazione e generalmente assunte dell'ordine di 0,1-1 mm per i metalli: la teoria del danno descrive, quindi, l'evoluzione del materiale dallo stato vergine all'apertura della macrocricca, quando le discontinuità sono tali da non poter più considerare il mezzo come un continuo e l'analisi dello stato tensionale e deformativo richiede l'utilizzo della meccanica della frattura.

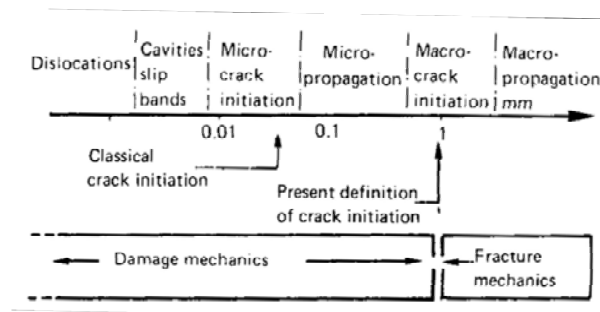


Figura 6.4: Fasi dello sviluppo delle cricche e teorie usate per il loro studio

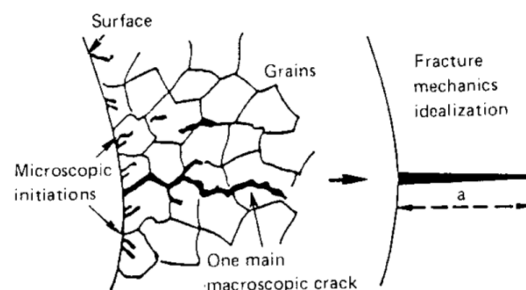


Figura 6.5: Inizializzazione della cricca macroscopica

In generale il processo può essere dovuto a tre meccanismi:

- danno duttile plastico, che accompagna le ampie deformazioni plastiche;
- danno fragile viscoelastico (o creep), funzione del tempo, che per metalli a medie ed alte temperature corrisponde alla decoesione intergranulare che accompagna le deformazioni viscoplastiche;

- danno per fatica (o microplastico), causato da carichi ripetuti e identificato come funzione del numero di cicli.

Anche i fenomeni come la corrosione, l'irradiazione e il processo di ossidazione possono essere considerati come danneggiamento, ma per essi, a differenza di quelli precedentemente elencati, non è ancora stato sviluppato un modello termomeccanico.

La teoria del danno riguarda tutti i materiali, a basse o alte temperature, sottoposti a qualsiasi tipo di carico: conoscendo la storia delle tensioni e delle deformazioni per un dato elemento di volume della struttura, è possibile integrare rispetto al tempo la legge di danno per ottenere l'evoluzione del danneggiamento e il numero di cicli corrispondenti alla formazione della macrocricca nel punto maggiormente sollecitato della struttura.

Lo studio del danno costituisce il criterio moderno di analisi della resistenza delle strutture ai fini sia della progettazione che della verifica e del controllo delle condizioni di esercizio.

Esso può essere misurato attraverso:

- la vita residua, valutata con le leggi di accumulazione viste in precedenza;
- la microstruttura, osservando e quantificando i difetti irreversibili prodotti, mediante misurazioni distruttive e facendo uso della riduzione di area netta per l'interpretazione in termini di parametri meccanici;
- parametri fisici e il concetto di tensione effettiva, come illustrato al paragrafo 6.2.5.

Risulta necessario definire delle variabili interne in grado di rappresentare lo stato di deterioramento della materia: l'approccio scelto è quello di fare affidamento sulla misura meccanica globale della variazione delle proprietà elastiche, plastiche o viscoplastiche, traducibile in termini di danno attraverso il concetto di tensione effettiva introdotto da Rabotnov.

## 6.2.2 Variabile di danno

Si considera un elemento di volume di un solido danneggiato, indicando con  $S$  l'area della sezione di volume di normale  $\vec{n}$ : su tale sezione sono individuabili fessure e vuoti che rappresentano le tracce del danneggiamento, generato dal processo di carico.

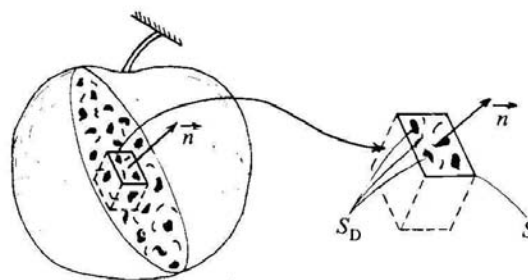


Figura 6.6: Elemento danneggiato

Si definisce l'area danneggiata  $S_D$  come l'area totale dei difetti, corretta tenendo conto dell'interazione tra di essi e della concentrazione di tensione in prossimità delle discontinuità geometriche. La sezione resistente effettiva è quindi data dalla differenza tra queste due aree:

$$\tilde{S} = S - S_D$$

Si osserva che il calcolo dell'area danneggiata o di quella effettiva risulta molto complesso a causa della non nota geometria dei difetti e delle incertezze relative all'applicabilità della meccanica del continuo.

Si definisce misura meccanica del danno locale, con riferimento alla direzione  $\vec{n}$ , il rapporto:

$$D_n = \frac{S_D}{S}$$

Fisicamente, la variabile di danno rappresenta l'area relativa delle cricche e dei vuoti, individuata sul piano di normale  $\vec{n}$ . Dal punto di vista matematico, al tendere di  $S$  a zero, cioè per dimensioni infinitesime dell'elemento di volume,  $D_n$  indica la densità superficiale delle discontinuità del materiale su tale sezione.

Il campo di esistenza della variabile di danno è compreso tra 0 e 1, dove  $D_n = 0$  corrisponde al materiale vergine non danneggiato e  $D_n = 1$  individua la condizione di rottura dell'elemento di volume in due parti, lungo il piano di normale  $\vec{n}$ . Lo stato di danno è quindi dato da:

$$0 \leq D_n < 1$$

Nel caso generale di anisotropia del danneggiamento, il valore della variabile scalare  $D_n$  dipende dalla direzione della normale al piano considerato e la corrispondente variabile intrinseca è rappresentata da un tensore del secondo o del quarto ordine.

Introducendo l'ipotesi di isotropia, le cricche e i vuoti non hanno un'orientazione preferenziale e risultano distribuiti uniformemente in tutte le direzioni: in questo caso la variabile di danno non dipende da  $\vec{n}$  e lo stato di danno è interamente definito dallo scalare  $D$ .

$$D_n = D \quad \forall \vec{n}$$

Il tensore di danno  $\mathbf{D}$  si riduce alla variabile scalare  $D$ , moltiplicata per il tensore identità.

$$\mathbf{D} = D \cdot \mathbf{I}$$

### 6.2.3 Tensione effettiva

Si introduce il concetto di tensione effettiva per descrivere l'effetto del danno sul comportamento deformativo del materiale: un volume di materiale danneggiato, caratterizzato da  $D$  e sottoposto ad una tensione applicata  $\sigma$ , esplica la stessa risposta in termini di deformazione di un materiale integro, avente  $D = 0$ , soggetto ad una tensione effettiva  $\tilde{\sigma}$ , con  $\tilde{\sigma} > \sigma$ .

La tensione effettiva è la tensione calcolata sulla porzione di sezione che effettivamente resiste alle forze agenti. In presenza di danneggiamento isotropo, l'area effettiva può essere espressa come funzione della variabile di danno, definita al paragrafo 6.2.2:

$$\tilde{S} = S - S_D = S(1 - D)$$

Nel caso uniassiale, essendo  $\sigma = F/A$  e indicata con  $F$  la forza sulla sezione dell'elemento di volume, la tensione effettiva che soddisfa l'equilibrio risulta essere:

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{S}{\tilde{S}} = \frac{\sigma}{1 - D}$$

L'espressione mostra la dipendenza della tensione effettiva dalla variabile di danno; essa, infatti, è maggiore di  $\sigma$ , assume valore pari a  $\sigma$  per materiale vergine e tende invece ad infinito al momento della frattura. Si può quindi scrivere:

$$\tilde{\sigma} = \sigma \quad \text{per} \quad D = 0$$

$$\tilde{\sigma} = \infty \quad \text{per} \quad D = 1$$

Nel caso di danno isotropo multiassiale, il rapporto tra l'intera superficie e l'area effettiva non dipende dall'orientamento della normale e il termine  $(1 - D)$  può essere applicato a tutte le componenti:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}$$

La risposta in termini di deformazione monodimensionale o tridimensionale di un materiale danneggiato si traduce con le leggi di comportamento del materiale integro, nelle quali si sostituisce al tensore di tensione di Cauchy  $\sigma$  quello di tensione effettiva  $\tilde{\sigma}$ . La tensione effettiva, cioè, viene utilizzata nelle equazioni costitutive per descrivere l'effetto del danno sul comportamento macroscopico del materiale.

Utilizzando il concetto di tensione effettiva al momento della frattura, si ottiene il valore critico di danno; per semplicità nel caso uniassiale:

$$\tilde{\sigma}_u = \frac{\sigma_u}{1 - D_c}$$

da cui

$$D_c = 1 - \frac{\sigma_u}{\tilde{\sigma}_u}$$

Gli ordini di grandezza delle tensioni e di  $D_c$ , in funzione del modulo elastico  $E$ , sono i seguenti:

$$\tilde{\sigma}_u = \frac{E}{50} \div \frac{E}{20}$$

$$\sigma_u = \frac{E}{100} \div \frac{E}{250}$$

$$D_c = 0,5 \div 0,9$$

### 6.2.4 Principio di equivalenza delle deformazioni

Nella trattazione della meccanica del danno si assume come ipotesi la validità del principio di equivalenza delle deformazioni: ogni comportamento deformativo, uniassiale o multiassiale, di un materiale danneggiato è rappresentato dalle leggi costitutive del materiale vergine, in cui il tensore di tensione è sostituito dal tensore di tensione effettiva.

Materiale vergine  $\epsilon = F(\sigma, t)$

Materiale danneggiato  $\epsilon = F(\tilde{\sigma}, t)$

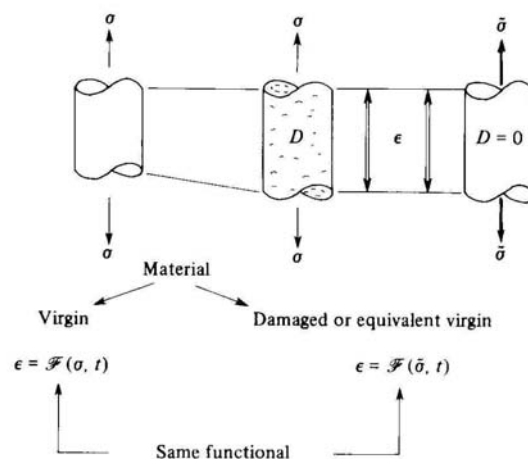


Figura 6.7: Tensione effettiva ed equivalenza delle deformazioni



Nel caso uniassiale, ad esempio, la legge elastica del materiale danneggiato, indicato con  $E$  il modulo elastico di Young del materiale vergine, diventa:

$$\varepsilon_e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E}$$

### 6.2.5 Misurazione del danno

Il danneggiamento non è una grandezza direttamente misurabile, la sua valutazione quantitativa è legata alla variabile scelta per rappresentare il fenomeno.

Le tecniche di indagine come i raggi X, le correnti parassite, la magnetoscopia e i liquidi penetranti misurano  $D$  dalle variazioni delle caratteristiche meccaniche globali di elasticità o plasticità e sono quindi considerate tecniche indirette, mentre quelle di emissione acustica permettono un controllo qualitativo in tempo reale dell'avanzamento del danno durante la sollecitazione del materiale.

Adottando la definizione di tensione effettiva e l'ipotesi di equivalenza delle deformazioni, il danneggiamento viene accoppiato alla deformazione e può quindi essere misurato attraverso l'osservazione della variazione delle proprietà meccaniche del materiale.

Riprendendo l'espressione della legge elastica nel caso uniassiale:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)} = E\varepsilon_e$$

$$\sigma = E(1-D)\varepsilon_e = \tilde{E}\varepsilon_e$$

dove si è indicato

$$\tilde{E} = E(1-D)$$

inteso come il modulo elastico del materiale danneggiato, funzione di quello del materiale vergine e della variabile di danno;  $\varepsilon_e$  è la deformazione misurata nel materiale danneggiato.

Ai fini della determinazione del danneggiamento, si ha quindi:

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}$$

con

$$\tilde{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_e}$$

Noto che sia il modulo di Young, la misurazione del valore attuale del modulo di elasticità consente di ricavare la variabile  $D$  che descrive lo stato di danneggiamento: questo processo viene definito come misurazione del danno.

Il valore di  $\tilde{E}$  si ottiene in campo elastico: durante la deformazione plastica il provino viene gradualmente scaricato fino a sollecitazione nulla, ottenendo in tal modo un tratto rettilineo nella curva  $(\sigma, \epsilon)$ , come mostrato in Figura 6.8, corrispondente al rilascio in modo elastico dell'energia immagazzinata durante la deformazione. Il modulo elastico del materiale danneggiato  $\tilde{E}$  si ottiene come pendenza di questo tratto rettilineo nella fase di scarico.

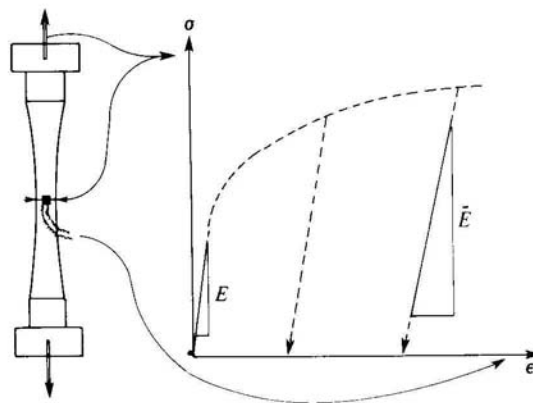


Figura 6.8: Metodo di misurazione del danno

Nonostante la semplicità del principio, la misurazione di  $\tilde{E}$ , che consente la determinazione di  $D$ , non è spesso agevole da effettuare, poiché per ottenere il modulo di elasticità sono richieste misure precise di deformazioni molto piccole. Il danneggiamento risulta essere un fenomeno localizzato e per i metalli le misurazioni vengono fatte su scala dell'ordine di 0,5-5,0 mm.

### 6.2.6 Formulazione termodinamica

La trattazione sviluppata da Chaboche e Lamaitre ha come obiettivo la definizione termodinamica del tensore di danno e la sua applicazione al caso del fenomeno di fatica nei metalli in regime HCF.

Applicando il principio di equivalenza delle deformazioni, le equazioni costitutive rispettivamente del materiale vergine e di quello danneggiato, espresse in notazione tensoriale, sono:

$$\sigma = \mathbf{a} : \boldsymbol{\epsilon}^e$$

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{a} : \boldsymbol{\epsilon}^e$$

dove  $\mathbf{a}$  è il tensore di elasticità del quarto ordine del materiale integro.

L'energia di deformazione del materiale danneggiato può essere definita in modo diretto introducendo un tensore di elasticità  $\tilde{\mathbf{a}}$ , diverso da  $\mathbf{a}$ , ma dotato delle stesse proprietà termodinamiche di simmetria.

$$\tilde{a}_{ijkl} = \tilde{a}_{ijlk} = \tilde{a}_{jikl} = \tilde{a}_{klij}$$

$$\psi_e = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{a}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

Si deriva da quest'ultima relazione l'equazione costitutiva del materiale danneggiato:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \tilde{\mathbf{a}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

Richiamando il principio di equivalenza delle deformazioni, si definisce  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  come quel tensore di tensione che, applicato al materiale vergine, produce lo stesso stato deformativo  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  dell'applicazione di  $\boldsymbol{\sigma}$  al materiale danneggiato. Dalla combinazione delle espressioni si ottiene:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a} : \tilde{\mathbf{a}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Delta} : \boldsymbol{\sigma}$$

dove:

$\boldsymbol{\sigma}$  tensore di tensione del secondo ordine;

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  tensore di tensione del secondo ordine;

$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{a} : \tilde{\mathbf{a}}^{-1}$ , tensore del quarto ordine i cui coefficienti sono determinati a partire dai tensori di elasticità del materiale integro e del materiale danneggiato.

Indicando con  $\mathbf{I}$  il tensore identità e introducendo il tensore del quarto ordine  $\mathbf{D}$ , non simmetrico e tale che

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} = \boldsymbol{\Delta}$$

si può scrivere:

$$\tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \mathbf{a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$$

Il tensore della tensione effettiva si ottiene quindi dall'applicazione dell'operatore di danno contenente  $\mathbf{D}$  al tensore della tensione  $\boldsymbol{\sigma}$ . Questa scrittura rappresenta il caso più generale di danneggiamento anisotropo e la variabile di danno è pertanto definita nelle tre dimensioni.

Si introduce l'ipotesi di isotropia dello stato di danno e della sua evoluzione; questa assunzione è accettabile nel caso della fatica nei metalli, poiché il modello si occupa di prevedere la vita a fatica nelle fasi di inizializzazione delle cricche e di propagazione in stato I lungo i bordi dei grani, durante le quali la diffusione del danno è caratterizzata da una isotropia di compenso.

Sotto questa ipotesi, il tensore di danno è dato dal tensore identità del quarto ordine moltiplicato per lo scalare  $D$ .

La variabile di danno è considerata come una variabile di stato nella rappresentazione termodinamica e il potenziale termoelastico viene riscritto come:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, D)$$

Nell'ipotesi di termoelasticità lineare,  $\psi$  è un potenziale quadratico in  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  e  $T$ .

Con l'assunzione del concetto di tensione effettiva e con la definizione data per  $D$ , il potenziale termoelastico dipende linearmente dal danno:

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(1 - D)\mathbf{a} : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\Delta T) : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\Delta T) + C\Delta T^2$$

dove  $\mathbf{k}\Delta T$  rappresenta la dilatazione termica.

Utilizzando il potenziale così definito, è possibile accoppiare la legge di danno e l'elasticità, scrivendo la legge costitutiva del materiale danneggiato:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (1 - D)\mathbf{a} : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\Delta T) = \tilde{\mathbf{a}} : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\Delta T)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1 - D)} = \mathbf{a} : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\Delta T)$$

La variabile associata al danno è il rateo di energia elastica rilasciata, indicata con lo scalare  $Y$ :

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\Delta T) : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\Delta T)$$

Tale espressione equivale, a meno del segno, a metà della variazione di energia elastica generata da una variazione di danno a tensione e temperatura costanti.

### 6.3 IL DANNO SECONDO IL MODELLO NLCD

Le espressioni di sviluppo del danno riportate nel paragrafo 6.2 sono scritte in termini di potenziale di dissipazione e hanno validità generale.

Esse possono essere specificate in termini di tasso di danno per i vari processi di danneggiamento, quali creep, fatica, danneggiamento duttile e fragile, a cui sono associate diverse variabili di danno.

A differenza di altri fenomeni per cui la variabile di riferimento è costituita dal tempo e gli incrementi di danno sono scritti come funzione degli incrementi temporali, nel caso della fatica si utilizza il concetto di ciclo di carico per definire l'evoluzione del danno e misurare nel tempo la vita del componente. Pertanto le equazioni dipendono dal carico attraverso le grandezze definite globalmente per un ciclo, come l'ampiezza, il valore massimo e quello medio della tensione o della deformazione.

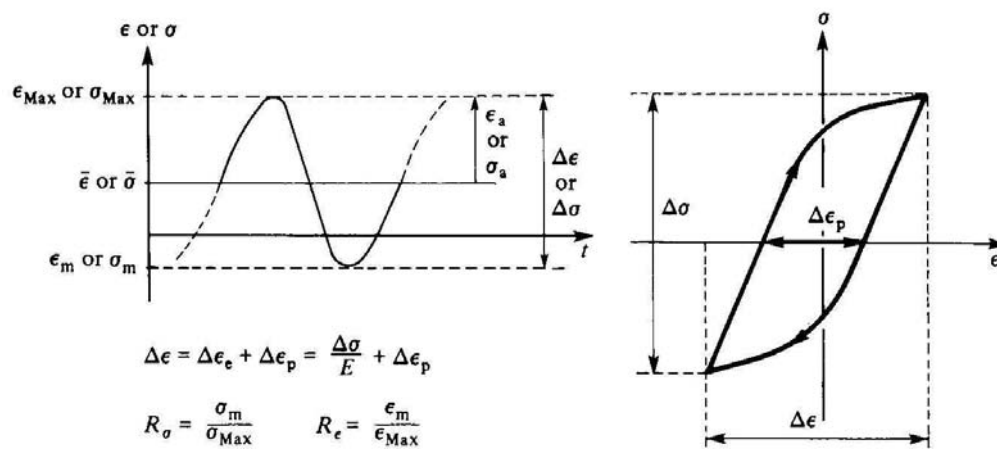


Figura 6.9: Definizione delle quantità rispetto ad un ciclo per la caratterizzazione a fatica

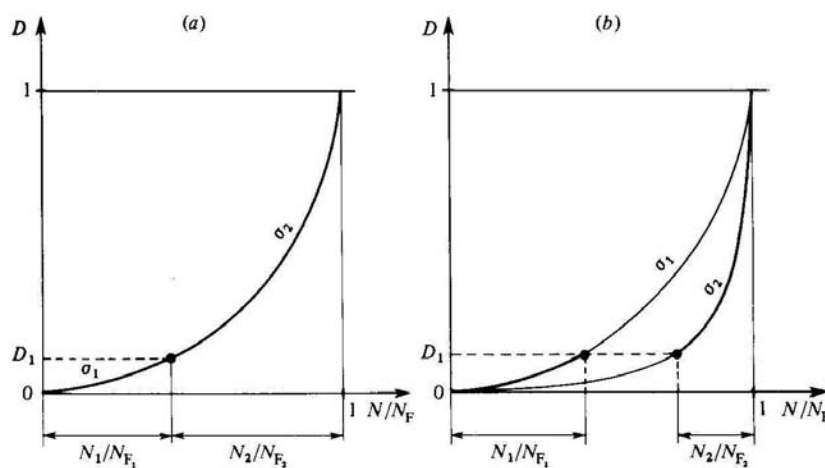


Figura 6.10: Danneggiamento con evoluzione non lineare e (a) accumulazione lineare, (b) accumulazione non lineare

Per un'evoluzione del danno sia lineare che non lineare, se nell'espressione che descrive il fenomeno il carico e il danneggiamento  $D$  sono variabili separabili, l'accumulazione risulta essere lineare, come nella legge di Miner. Al contrario, se la curva di sviluppo del danno, espressa come funzione del rapporto  $N/N_f$ , dipende dal carico, allora si ha un'accumulazione non lineare: è questo il caso delle teorie di accumulazione non lineare del danno per fatica proposte da diversi autori, tra i quali Henry (1955), Gatts (1961), Marco e Starkey (1954) e Mason (1967).

La differenza tra i due casi è mostrata in Figura 6.10.

Il modello di danno per fatica a cui si fa riferimento nella presente trattazione è quello proposto da Chaboche nel 1974, basato sulla CDM, indicato come modello NLCD, cioè *Non Linear Continuum Damage Model*.

Riferendo l'integrazione temporale ad ogni ciclo, l'espressione di sviluppo del danno per fatica assume la forma già accennata in precedenza:

$$dD = f(\sigma, \varepsilon, \varepsilon_p, D, T, \dots) dN$$

Si osserva in particolare che la variazione di danno dipende, oltre che dalle variabili di stato all'inizio del ciclo, come temperatura, stato di danno e variabili di hardening, anche dai valori medio e massimo, all'interno di un ciclo, dei parametri che definiscono il carico, siano essi tensioni, deformazioni totali o deformazioni plastiche, a seconda che si tratti di regime HCF o LCF.

### 6.3.1 Formulazione uniassiale

Il modello NLCD di Lemaitre e Chaboche, sviluppato a partire da provini lisci sottoposti a carichi ciclici di trazione-compressione, si propone di descrivere il progressivo processo di danneggiamento del materiale prima della formazione della macrocricca, che misurazioni sperimentali fissano per i metalli indicativamente al raggiungimento di profondità di 300-1000  $\mu\text{m}$ , includendo quindi con continuità le fasi di micronucleazione e micropropagazione.

La formulazione è in forma differenziale e si basa sull'assunzione che la formazione della macrocricca si abbia al raggiungimento del valore unitario della variabile di danno, per  $N = N_f$ , e che tale stato, pari a circa 1 mm di profondità della cricca, sia approssimabile con la rottura a fatica del provino, trascurando la fase di macropropagazione.

L'espressione proposta da Chaboche è:

$$\dot{D} = \frac{dD}{dN} = D^{\alpha(\sigma_{max}, \bar{\sigma})} \left[ \frac{\sigma_{max} - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right]^\beta$$

La dipendenza del rateo di danno dal danneggiamento  $D$  stesso determina un'evoluzione non lineare del fenomeno nel tempo, rappresentato dal numero di cicli, mentre la non separabilità tra il

danneggiamento e il carico, data dalla dipendenza dell'esponente  $\alpha$  dai parametri di carico, produce la non linearità dell'accumulazione.

Per carico ad ampiezza costante, per cui si assumono costanti i valori di  $\sigma_{max}$  e  $\bar{\sigma}$ , l'integrazione dell'espressione fornisce:

$$D = \left( \frac{N}{N_f} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Considerando come estremi di integrazione  $D = 0$  e  $D = 1$  e ricordando che per quest'ultimo valore si ha  $N = N_f$ , si ottiene il numero di cicli a rottura:

$$N_f = \frac{1}{1-\alpha} \left[ \frac{\sigma_{max} - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right]^{-\beta}$$

Questa formulazione permette una descrizione qualitativa dei risultati sperimentali ottenuti su diversi materiali, tuttavia la valutazione di  $D$  in termini di sola vita residua  $N/N_f$  non è sufficiente per definirne il valore in ogni istante: per carichi diversi, infatti, la vita a fatica può essere la stessa, mentre il danneggiamento prodotto può essere differente, come mostra la Figura 6.11.

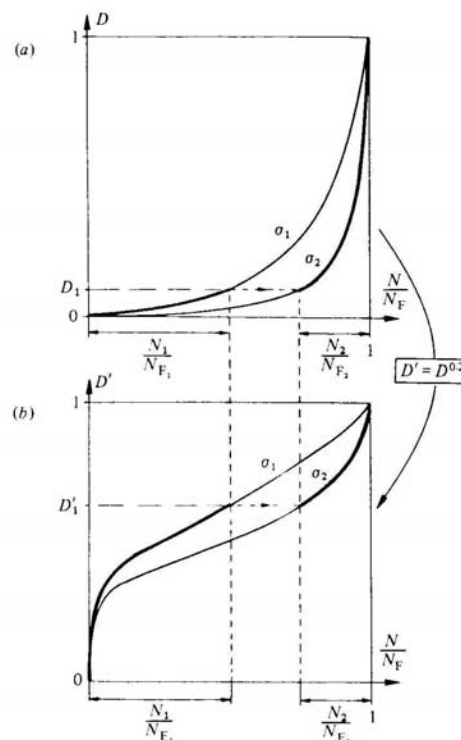


Figura 6.11: Accumulazione non lineare e parziale indeterminazione del danno misurato in termini di vita residua

Per evitare questa indeterminazione, la formulazione viene combinata con il concetto di tensione effettiva precedentemente introdotto; formalmente è sufficiente effettuare un cambio di variabile, sostituendo a  $D$  l'espressione:

$$1 - (1 - D)^{\beta+1}$$

Con l'opportuno cambio di variabile, l'equazione differenziale diventa:

$$\dot{D} = \frac{dD}{dN} = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^{\alpha(\sigma_{max}, \bar{\sigma})} \left[ \frac{\sigma_{max} - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})(1 - D)} \right]^{\beta}$$

Per carico ad ampiezza costante, per cui si assumono costanti le tensioni  $\sigma_{max}$  e  $\bar{\sigma}$ , integrando l'espressione si ha:

$$D = 1 - \left[ 1 - \left( \frac{N}{N_f} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{\frac{1}{\beta+1}}$$

Dall'integrazione tra  $D = 0$  e  $D = 1$ , con  $N = N_f$  per  $D = 1$ , si ottiene il numero di cicli a rottura:

$$N_f = \frac{1}{(\beta + 1)[1 - \alpha(\sigma_{max}, \bar{\sigma})]} \left( \frac{\sigma_{max} - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right)^{-\beta}$$

Nel caso di fatica a basso numero di cicli (LCF), la vita a fatica viene espressa in termini di deformazioni plastiche oppure di deformazioni totali; l'equazione scritta può essere ancora utilizzata, una volta che sia nota la curva che rappresenta il comportamento ciclico del materiale e il legame tra  $\sigma_{max}$  e  $\Delta\varepsilon_p$ . Il regime LCF non è oggetto della presente trattazione e pertanto tale aspetto non viene approfondito.

Si osserva che la formulazione presentata è in accordo con il significato fisico del danneggiamento per fatica. In particolare risultano verificate le seguenti condizioni che traducono in termini matematici il comportamento reale del materiale:

- la variabile di danno soddisfa le condizioni al contorno:

$$N = 0 \qquad D = 0$$

$$N = N_f \qquad D = 1$$

- il danneggiamento per fatica è un processo irreversibile di deterioramento del materiale ed aumenta in modo monotono con l'applicazione dei cicli di carico:



$$\frac{\partial D}{\partial N} > 0$$

- carichi più elevati producono un danneggiamento maggiore

$$\frac{\partial^2 D}{\partial N \partial \sigma} > 0$$

### 6.3.2 Determinazione del modello

L'espressione finale fornita da Chaboche è quindi:

$$\dot{D} = \frac{dD}{dN} = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^{\alpha(\sigma_{max}, \bar{\sigma})} \left[ \frac{\sigma_a}{M(\bar{\sigma})(1 - D)} \right]^\beta$$

Il significato dei simboli della formula è il seguente:

- $D$  variabile di danno;
- $N$  numero di cicli di carico;
- $\sigma_a$  ampiezza del ciclo di carico, pari a  $(\sigma_{max} - \bar{\sigma})$ ;
- $\sigma_{max}$  massima tensione raggiunta durante il ciclo di carico;
- $\bar{\sigma}$  tensione media durante il ciclo di carico.

Le funzioni  $\alpha$  e  $M$  devono essere in grado di rappresentare contemporaneamente la rottura di tipo statico in un ciclo, il limite di fatica e gli effetti dell'accumulazione non lineare.

#### 6.3.2.1 Funzione $\alpha$

La funzione  $\alpha(\sigma_{max}, \bar{\sigma})$  dipende dai parametri di carico:

$$\alpha(\sigma_{max}, \bar{\sigma}) = 1 - a \left\langle \frac{\sigma_a - \sigma_l(\bar{\sigma})}{\sigma_u - \sigma_{max}} \right\rangle$$

In cui  $\langle \rangle$  rappresenta il simbolo di MacCauley, avente il seguente significato:

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= 0 & \text{se} & \quad u < 0 \\ \langle u \rangle &= u & \text{se} & \quad u > 0 \end{aligned}$$

Il coefficiente  $a$  viene determinato attraverso il confronto con i dati ricavati dalle misurazioni di danno; la scelta del valore da attribuire a questo parametro risulta importante se la fatica si manifesta in combinazione ad altri fenomeni di danneggiamento, come ad esempio lo scorrimento viscoso.

### 6.3.2.2 Limite di fatica $\sigma_l$

La tensione  $\sigma_l(\bar{\sigma})$  rappresenta il limite di fatica per  $\bar{\sigma} \neq 0$ , ossia per una generica tensione media non nulla. L'influenza della tensione media sul limite di fatica è rappresentata in modo soddisfacente dalla relazione lineare di Goodman, che ben approssima i dati sperimentali:

$$\sigma_l(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} + \sigma_{l_0} \left(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_u}\right)$$

$$\sigma_l(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} + \sigma_{l_0}(1 - b_1\bar{\sigma})$$

$$\sigma_l(\bar{\sigma}) = \sigma_{l_0} + \bar{\sigma}(1 - b_1\sigma_{l_0})$$

dove

$\sigma_{l_0}$  limite di fatica per  $\bar{\sigma} = 0$ , per sollecitazione alternata simmetrica con  $R = -1$ ;

$\sigma_u$  tensione ultima di trazione;

$b_1$  coefficiente caratteristico del materiale.

### 6.3.2.3 Funzione M

La funzione  $M(\bar{\sigma})$  è anch'essa funzione della tensione media:

$$M(\bar{\sigma}) = M_0(1 - b_2\bar{\sigma})$$

### 6.3.2.4 Espressione del rateo di danno

Sostituendo le definizioni date, si ottiene:

$$\dot{D} = \frac{dD}{dN} = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^{\alpha(\sigma_{max}, \bar{\sigma})} \left[ \frac{\sigma_a}{M_0(1 - b_2\bar{\sigma})(1 - D)} \right]^\beta$$

Richiamando la definizione di tensione effettiva, l'ampiezza è data da:

$$\tilde{\sigma}_a = \frac{\sigma_a}{1 - D}$$

Si può quindi riscrivere l'espressione nella forma seguente:

$$\dot{D} = \frac{dD}{dN} = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^{\alpha(\sigma_{max}, \bar{\sigma})} \left[ \frac{\tilde{\sigma}_a}{M_0(1 - b_2\bar{\sigma})} \right]^\beta$$

Per carico ad ampiezza costante, il numero di cicli a rottura diventa:

$$N_f = \frac{1}{\beta + 1} \frac{1}{\alpha M_0^{-\beta}} \frac{\langle \sigma_u - \sigma_{max} \rangle}{\langle \sigma_a - \sigma_l(\bar{\sigma}) \rangle} \left( \frac{\sigma_a}{1 - b_2\bar{\sigma}} \right)^{-\beta}$$

Tale espressione viene di seguito indicata come forma integrata dell'equazione differenziale.

È importante osservare che la formulazione di Chaboche prevede il danneggiamento venga incrementato anche per cicli di carico di ampiezza inferiore al limite di fatica, purché esso sia stato innescato da cicli di ampiezza superiore: in questi casi infatti  $\alpha$  assume valore unitario e il rateo di danno ha valori non nulli.

### 6.3.2.5 Parametri del modello NLCD

I parametri del modello  $M_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\beta$  e  $a$  sono coefficienti caratteristici di ciascun materiale e vengono determinati attraverso test di fatica e confrontando l'espressione del rateo di danno, riscritta dopo l'integrazione, con le curve di Wöhler del materiale corrispondente.

Si considera dapprima il caso di carico completamente invertito, avente  $R = -1$  e  $\bar{\sigma} = 0$ . La formula integrata si semplifica nel seguente modo:

$$N_f = \frac{1}{\beta + 1} \frac{1}{aM_0^{-\beta}} \frac{\langle \sigma_u - \sigma_{max} \rangle}{\langle \sigma_a - \sigma_{l_0} \rangle} (\sigma_a)^{-\beta}$$

Dal confronto di quest'espressione, che lega  $\sigma_a$  e  $N_f$ , riscritta in forma logaritmica, con la curva S-N del materiale per  $\bar{\sigma} = 0$  si ricavano i valori di  $\beta$  e  $aM_0^{-\beta}$ .

Scegliendo poi una curva di Wöhler per un diverso livello di carico e analizzando l'andamento del limite di fatica nei due casi, si ottiene il valore del coefficiente  $b_1$  della formula di Goodman; considerando un punto qualsiasi di questa seconda curva, ormai noti tutti gli altri termini nell'espressione di  $N_f$ , si ricava anche il valore di  $b_2$ .

Infine, il valore del coefficiente  $a$ , non necessario se si fa uso della forma integrata dell'equazione, è richiesto per la scrittura dell'espressione incrementale, che viene implementata nell'algoritmo agli elementi finiti. Lemaitre e Chaboche propongono di ricavarlo a partire da misurazioni del parametro di danno basate sull'alterazione delle proprietà elastiche del materiale durante la sollecitazione a fatica; alcuni metodi di tipo sperimentale per la determinazione del parametro sono contenute in [12].

In assenza di tali misurazioni, come nella presente trattazione, si può ricorrere ad una correlazione di tipo numerico, confrontando l'espressione in forma integrata che fornisce  $N_f$  con i risultati forniti dall'implementazione [51].

Noti i valori di  $\beta$  e  $aM_0^{-\beta}$ ,  $a$  è identificato, quindi, come il valore che fa in modo che il numero di cicli a rottura che si ottiene dalla formula integrata coincida con la vita a fatica fornita dal metodo incrementale applicato alla modellazione tridimensionale agli elementi finiti.

In [13] sono riportati in forma tabellare i valori dei parametri necessari alla determinazione del modello NLCD, ricavati dagli autori per alcuni acciai.

Tabella 6.1: Coefficienti del modello NLCD per alcuni acciai, con riferimento a MPa [13]

Material	T (°C)	$\sigma_w$	$\sigma_u$	$\beta$	$B_0$	$b$	$a$	$M_0$
IN 100	700	300	950	2.6	6560		0.120	4750
IN 100	900	240	715	3	4430		0.072	2925
IN 100	950	180	600	4.8	1637	0.0013	0.108	1485
IN 100	1000	140	470	6	880		0.138	875
IN 100	1110	70	250	4.7	645		0.162	635
INCO 718	550	600	1150	10.3	1586		0.015	1335
A 201	20	150	412	6	932	0.0070		
A 517	20	400	790	7.4	1528	0.0038	0.710	1945
C 35	20	255	458	4	5434			
316 L	20	222	760	5	1213		0.900	1700
Maraging	20	310	2028	4	5820			
AISI 4130 S	20	240	890	5.5	1590			
AISI 4130 H	20	292	1420	5	2460			
AISI 304	20	240	950	5.8	2000			
52100 steel	20	360	2005	3.3	6320			
Cu 5456 H311	20	76	400	4.7	832			
AISI 304	593	150	700	3	4207	0.005	0.100	3100
AISI 304	650	140	580	3.7	1728		0.200	1700
316 L (ICL 167)	600	200	650	5.5	1144		0.200	1200

### 6.3.3 Estensione al caso multiassiale

Il concetto di tensione o deformazione di soglia, al di sotto della quale il danneggiamento è considerato trascurabile può essere generalizzato nelle tre dimensioni.

Nel caso monodimensionale, il valore soglia, in termini di tensione, definisce l'intervallo di resistenza del materiale:

$$-\sigma_D < \sigma < \sigma_D$$

Quando  $|\sigma|$  supera il valore soglia  $\sigma_D$  viene prodotto danneggiamento.

In campo tridimensionale il concetto viene esteso attraverso una superficie di danno limite, rappresentata dall'espressione:

$$f_D(\sigma, D) = 0$$

Quando  $f_D \geq 0$  si manifesta il danno.

Nel caso multiassiale, il limite di fatica  $A_{II}^*$  viene definito, in modo del tutto analogo al caso uniassiale, come quel valore di ampiezza di tensione  $A_{II}$  al di sotto del quale il ciclo di carico non determina alcun danneggiamento e si ha una vita a fatica infinita:

$$A_{II} \leq A_{II}^*$$

Il valore di  $A_{II}^*$  varia a seconda del criterio limite adottato; in generale, i dati sperimentali mostrano che la tensione tangenziale media non ha effetto sul limite di fatica, mentre la tensione media di trazione influisce su di esso in modo lineare.

Per la definizione dei criteri di calcolo limite a fatica, si introducono due parametri di carico: l'ampiezza di tensione tangenziale ottaedrica e la tensione idrostatica media o massima, a seconda del criterio assunto.

Per una migliore comprensione delle formule che seguono e dei simboli in esse utilizzati si consiglia di consultare l'Appendice A.

Indicando con  $\sigma_{ai}$  le ampiezze delle tensioni principali, pari a  $\Delta\sigma_i/2$ , l'ampiezza di tensione tangenziale ottaedrica è definita come:

$$A_{II} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2 + (\sigma_{a2} - \sigma_{a3})^2 + (\sigma_{a3} - \sigma_{a1})^2]}$$

Per un carico proporzionale essa può essere scritta nel modo seguente:

$$A_{II} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma'_{ijmax} - \sigma'_{ijmin}) \cdot (\sigma'_{ijmax} - \sigma'_{ijmin})}$$

dove  $\sigma'_{ijmax}$  e  $\sigma'_{ijmin}$  sono, rispettivamente, il valore massimo e minimo di ciascuna componente del tensore di tensione deviatorica, durante un ciclo.

Per carichi non proporzionali, l'ampiezza di tensione equivalente diventa:

$$A_{II} = \frac{1}{2} \max_{t_0} \max_t J_2(\boldsymbol{\sigma}(t) - \boldsymbol{\sigma}(t_0))$$

dove  $J_2$  è il secondo invariante ingegneristico del tensore di tensione.

### 6.3.3.1 Criterio di Sines

Secondo il criterio di Sines, che si pone come estensione diretta della teoria lineare di Goodman, il limite di fatica è espresso da:

$$A_{II}^* = \sigma_{l_0}(1 - 3b\bar{\sigma}_H)$$

dove  $\bar{\sigma}_H$  rappresenta la tensione idrostatica media durante un ciclo, definita nel modo seguente:

$$\bar{\sigma}_H = \text{mean}J_1(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \text{mean}I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{6} [\max(\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})) + \min(\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}))]$$

in cui  $J_1(\boldsymbol{\sigma})$  è l'invariante ingegneristico del primo ordine e  $I_1(\boldsymbol{\sigma})$  il primo invariante di sforzo, pari alla traccia.

Per stati biassiali di tensione generati da condizioni di carico proporzionali, in cui cioè le componenti di tensione variano secondo un comune andamento temporale, la superficie limite

appartenente al piano  $\sigma_3 = 0$  coincide con l'ellisse di Von Mises, la cui area aumenta per tensioni idrostatiche medie negative (di compressione) e diminuisce per quelle positive (di trazione).

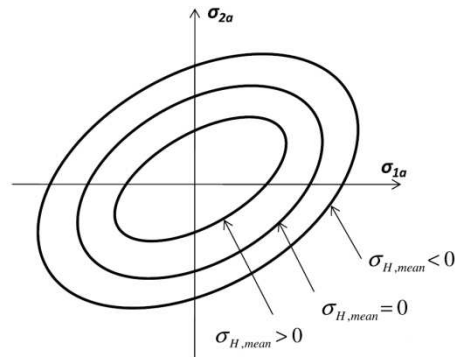


Figura 6.12: Curve limite di fatica secondo il criterio di Sines al variare della tensione idrostatica

### 6.3.3.2 Criterio di Crossland

Il criterio di Crossland modifica l'espressione di Goodman:

$$A_{II}^* = \sigma_{l_0} \frac{1 - 3b\sigma_{Hmax}}{1 - b\sigma_{l_0}}$$

dove  $\sigma_{Hmax}$  rappresenta la massima tensione idrostatica in un ciclo, definita nel modo seguente:

$$\sigma_{Hmax} = \max J_1(\sigma) = \frac{1}{3} \max I_1(\sigma)$$

In questo caso, nel piano  $\sigma_3 = 0$ , la curva corrisponde ad una porzione di ellisse, ma con eccentricità e centro diversi rispetto a quella di Von Mises.

### 6.3.3.3 Criterio di Dang Van

Dang Van introduce un criterio con solido fondamento fisico, che richiede l'individuazione di un piano critico, definito come il piano sottoposto alla massima ampiezza di sforzo tangenziale durante il ciclo di carico. Per carichi proporzionali il criterio assume la forma seguente:

$$A_{II}^* = \sigma_{l_0} \frac{1 - 3b\sigma_{Hmax}}{2(1 - b\sigma_{l_0})}$$

Questa espressione fornisce implicitamente la direzione dei difetti, attraverso l'individuazione del piano critico, ma presenta maggiori difficoltà di applicazione.

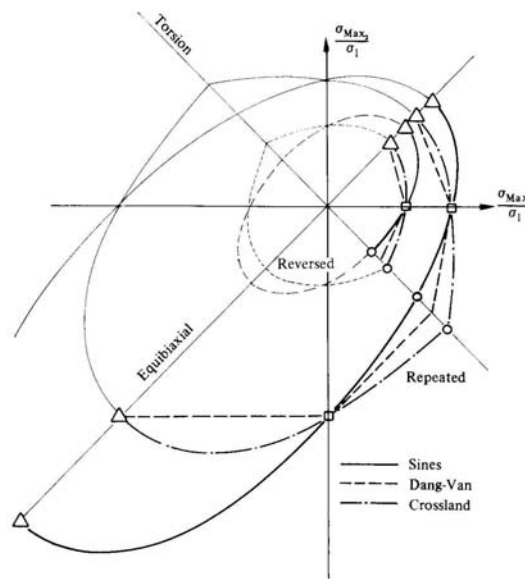


Figura 6.13: Rappresentazione grafica dei criteri di Sines, Crossland e Dang Van per stato di tensione biaassiale generato da carichi proporzionali

Per la generalizzazione del metodo NLCD al caso multiassiale si devono combinare:

- la legge uniassiale introdotta al paragrafo 6.3.1, per una corretta descrizione dell'evoluzione del danno e degli effetti di accumulazione non lineare;
- i criteri di calcolo limite per la fatica multiassiale appena esposti, scelti a seconda del materiale impiegato.

Si sceglie di adottare il criterio di Sines, ottenendo:

$$A_{II} \leq A_{II}^*(\bar{\sigma}_H)$$

con

$$A_{II} = \frac{1}{2} \max_{t_0} \max_t J_2(\boldsymbol{\sigma}(t) - \boldsymbol{\sigma}(t_0))$$

$$A_{II}^*(\bar{\sigma}_H) = \sigma_{l_0} (1 - 3b_1 \bar{\sigma}_H)$$

Il termine  $(\sigma_u - \sigma_{max})$ , che nell'equazione differenziale rappresenta la frattura statica nel caso monodimensionale, viene sostituito con il corrispondente termine per la situazione tridimensionale  $(\sigma_u - \sigma_{eq,max})$ , dove  $\sigma_{eq,max}$  indica il valore massimo durante un ciclo di carico della tensione equivalente di Von Mises, la quale è pari a  $J_2(\boldsymbol{\sigma})$ , invariante ingegneristico del secondo ordine del tensore di tensione, ed è espressa da:

$$\sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

Con queste assunzioni, le funzioni  $\alpha$  e  $M$  diventano:

$$\alpha(A_{II}, \bar{\sigma}_H, \sigma_{eq,max}) = 1 - a \left\langle \frac{A_{II} - A_{II}^*(\bar{\sigma}_H)}{\sigma_u - \sigma_{eq,max}} \right\rangle$$

$$M(\bar{\sigma}_H) = M_0(1 - 3b_2\bar{\sigma}_H)$$

Sostituendo le espressioni date, si ottiene:

$$\dot{D} = \frac{dD}{dN} = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^{\alpha(A_{II}, \bar{\sigma}_H, \sigma_{eq,max})} \left[ \frac{A_{II}}{M_0(1 - 3b_2\bar{\sigma}_H)(1 - D)} \right]^\beta$$

L'ampiezza della tensione effettiva nel caso multiassiale diventa:

$$\tilde{A}_{II} = \frac{1}{2} \max_{t_0} \max_t J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t_0))$$

L'ipotesi di isotropia del danneggiamento fornisce:

$$\tilde{A}_{II} = \frac{A_{II}}{1 - D}$$

Si può quindi riscrivere l'espressione nella forma seguente:

$$\dot{D} = \frac{dD}{dN} = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^{\alpha(A_{II}, \bar{\sigma}_H, \sigma_{eq,max})} \left[ \frac{\tilde{A}_{II}}{M_0(1 - 3b_2\bar{\sigma}_H)} \right]^\beta$$

Per carico ad ampiezza costante, il numero di cicli a rottura diventa:

$$N_f = \frac{1}{\beta + 1} \frac{1}{aM_0^{-\beta}} \frac{\langle \sigma_u - \sigma_{eq,max} \rangle}{\langle A_{II} - A_{II}^*(\bar{\sigma}_H) \rangle} \left( \frac{A_{II}}{1 - 3b_2\bar{\sigma}_H} \right)^{-\beta}$$

È possibile generalizzare ulteriormente la formulazione nel caso di comportamento anisotropo; tale aspetto non viene tuttavia approfondito non essendo oggetto della presente trattazione.



### **6.3.4 Vantaggi e limiti del metodo**

Il metodo NLCD proposto da Chaboche e Lamaitre, come estensione della meccanica del danno, sviluppata da Kacharov e Robotnov, ha il vantaggio di essere applicabile a diversi tipi di sollecitazione, in particolare a carichi ciclici, come avviene nel caso della fatica.

Esso può rappresentare inoltre molti diversi fenomeni che avvengono nei materiali, per ciascuno dei quali sono state sviluppate specifiche formulazioni, che non vengono riportate poiché non sono oggetto della presente trattazione, la quale si concentra esclusivamente sul fenomeno della fatica nei materiali metallici.

Il metodo NLCD consente di tenere in conto contemporaneamente di diversi fattori di influenza del comportamento del componente strutturale sottoposto a sollecitazioni a fatica:

- la tensione media;
- l'ampiezza di tensione;
- la sequenza dei carichi;
- l'evoluzione non lineare del danneggiamento;
- l'accumulazione non lineare del danno;
- la valutazione della vita residua in termini di numero di cicli.

Un ulteriore vantaggio è rappresentato dalla possibilità di estendere la trattazione dal caso monodimensionale a quello multiassiale, comprendendo la maggior parte dei problemi che si verificano nella pratica costruttiva.

Lo studio del danneggiamento del materiale attraverso questo modello consente di seguire il comportamento del materiale fino alla fase di macronucleazione della cricca, proponendosi come analisi complementare rispetto alla meccanica della frattura, che segue invece la successiva crescita e propagazione della cricca fino alla frattura finale.

Gli autori stessi in [13] hanno verificato la validità del metodo per diversi tipi di metalli, attraverso il confronto con dati sperimentali ottenuti da test a fatica monoassiali; i risultati sono riportati in Figura 6.14.

La migliore capacità di previsione della vita a fatica e del comportamento del materiale rispetto ad altri metodi, illustrata anche al paragrafo 6.1, è sottolineata in [12] attraverso la dimostrazione di come il modello NLCD generalizzi e unifichi molte delle altre trattazioni.

Un indubbio vantaggio del metodo di Lamaitre e Chaboche è rappresentato dalla possibilità di essere implementato all'interno di un codice agli elementi finiti: a differenza ad esempio delle indicazioni contenute nella normativa vigente, l'ambito di validità non è limitato ad un ristretto numero di classi, ma è esteso ad una qualsiasi configurazione geometrica.

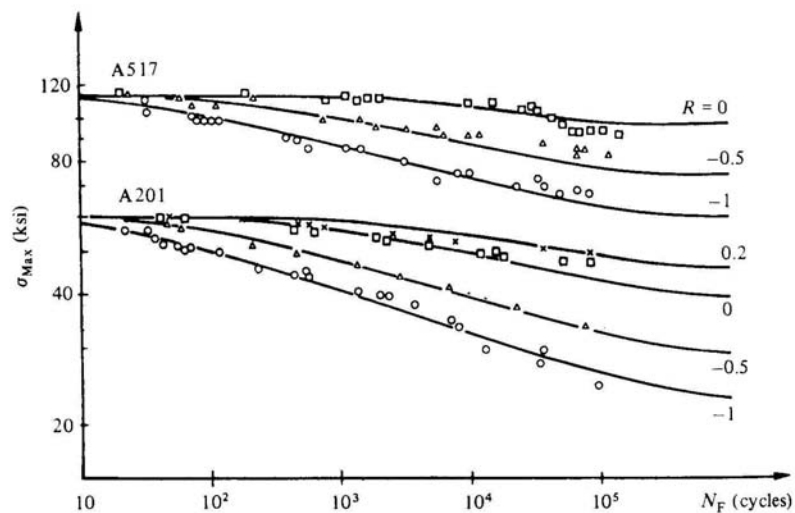


Figura 6.14: Curve di Wöhler per gli acciai A201 e A517 a 20°C

Inoltre i parametri necessari al modello sono in numero limitato e facilmente ricavabili dalle curve S-N derivanti da test sperimentali, seguendo il procedimento illustrato al paragrafo 6.3.2.

Si osserva che il metodo NLCD viene applicato nella presente trattazione al campo della fatica ad alto numero di cicli (HCF), tuttavia esso è in grado di fare previsioni sulla vita a fatica anche in regime LCF, purché l'espressione incrementale venga opportunamente formulata, come accennato al paragrafo 6.3.1, poiché in questo caso particolare la risposta del materiale diventa di tipo plastico non solo a livello locale, ma anche dal punto di vista macroscopico.

Sebbene quindi il metodo teorico presenti un'applicabilità estesa, l'implementazione all'interno del codice agli elementi finiti, descritta al Capitolo 7, tiene conto di un comportamento del materiale di tipo elastico lineare, limitando la validità al solo regime HCF.

Infine, la possibilità di accoppiare il metodo NLCD alla legge costitutiva del materiale consente di estenderne ulteriormente le potenzialità e le capacità di previsione di vita a fatica, come illustrato al Capitolo 7.

# *Capitolo 7*

## ***IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO NLCD***

### **7.1 METODO COMPUTAZIONALE**

L'obiettivo del presente lavoro consiste nell'applicazione del metodo NLCD, esposto nella sua trattazione teorica al Capitolo 6. Nelle analisi si utilizza un programma agli elementi finiti per il calcolo del campo tensionale, mentre il modello di Lemaitre e Chaboche viene implementato attraverso un codice di calcolo e utilizzato nella fase di post-processamento dei risultati; un analogo impiego del modello come post-processore, ma con differenti scopi e modalità, si ritrova in [6], [37], [51].

Il programma agli elementi finiti impiegato è Abaqus 6.12 [1].

Il metodo NLCD fornisce un valido strumento per il calcolo dell'incremento di danno all'aumentare del numero di cicli di carico, tuttavia l'utilizzo della sola equazione differenziale comporta il mancato accoppiamento tra il danneggiamento indotto nel materiale e il comportamento dello stesso, nella presente trattazione scelto come elastico.

Per includere questo effetto, seguendo quanto riportato in [51], al termine di ogni ciclo di carico e per ciascun elemento, si aggiunge il calcolo del modulo elastico ridotto del materiale danneggiato, utilizzando il valore ottenuto per lo stato di danno incrementato, secondo la relazione ricavata sfruttando la definizione di tensione effettiva e l'ipotesi di equivalenza delle deformazioni, già riportata al paragrafo 6.2.5:

$$E^{(i+1)} = (1 - D^{(i+1)})E^{(i)}$$

Questo accorgimento, che realizza di fatto l'accoppiamento tra lo stato di danno e la legge di elasticità del materiale, presenta un duplice vantaggio:

- cogliere il degrado del materiale attraverso il decadimento delle proprietà meccaniche;
- tenere conto della redistribuzione delle tensioni dovuta al danneggiamento.

Tali aspetti sono approfonditi e messi in evidenza attraverso il confronto dei dati ottenuti dalle analisi al paragrafo 7.3.

Per l'implementazione si è utilizzata la subroutine UMAT, che consente di definire leggi costitutive non standard, nella quale, durante tutta la storia di carico, il danno è calcolato in corrispondenza di ciascun punto di integrazione per ogni incremento temporale e accumulato continuamente, modificando di conseguenza il modulo elastico.

### 7.1.1 Condizioni iniziali

L'espressione del rateo di danno

$$\dot{D} = \frac{dD}{dN} = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^{\alpha(A_{II}, \bar{\sigma}_H, \sigma_{eq,max})} \left[ \frac{A_{II}}{M_0(1 - 3b_2\bar{\sigma}_H)(1 - D)} \right]^{\beta}$$

è un'equazione differenziale non lineare, che richiede una soluzione di tipo numerico.

Per la sua risoluzione è richiesto un valore iniziale della variabile di danno: al primo ciclo di carico per cui si verifica il danneggiamento, su esempio di quanto suggerito da Zhang in [51], si sceglie un valore pari a  $D = 1/N_f$ , , dove  $N_f$  è la vita a fatica calcolata, a partire dai valori tensionali forniti dal programma di calcolo al primo ciclo di carico, con la formula integrata:

$$N_f = \frac{1}{\beta + 1} \frac{1}{aM_0^{-\beta}} \frac{\langle \sigma_u - \sigma_{eq,max} \rangle}{\langle A_{II} - A_{II}^*(\bar{\sigma}_H) \rangle} \left( \frac{A_{II}}{1 - 3b_2\bar{\sigma}} \right)^{-\beta}$$

### 7.1.2 Cicli di carico equivalenti

Poiché, ai fini del calcolo, derivare l'accumulazione del danneggiamento per ciascun ciclo di carico risulta troppo oneroso, al solo scopo di ottenere vantaggi dal punto di vista computazionale, si introducono dei cicli di carico equivalenti, indicati con  $\Delta N$ . Ad ogni ciclo calcolato corrispondono pertanto  $\Delta N$  cicli di fatica: in questo modo è possibile diminuire i tempi dell'elaborazione e ridurre le dimensioni dei risultati prodotti, rendendoli più gestibili.

Si considera che, durante ciascun incremento di cicli di fatica  $\Delta N$ , il danneggiamento sia contenuto e lo stato tensionale possa quindi essere ritenuto costante.

L'equazione che esprime l'incremento di danno, riscritta in funzione dei cicli equivalenti invece che per ogni ciclo di carico, assume la forma seguente:

$$\Delta D = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^{\alpha} \left[ \frac{A_{II}}{M_0(1 - 3b_2\bar{\sigma}_H)(1 - D)} \right]^{\beta} \Delta N$$

L'ampiezza del salto  $\Delta N$  influenza la qualità della soluzione ed è perciò necessario studiarne con attenzione l'effetto, ai fini di un'opportuna scelta della dimensione del passo di integrazione da utilizzare nelle analisi.

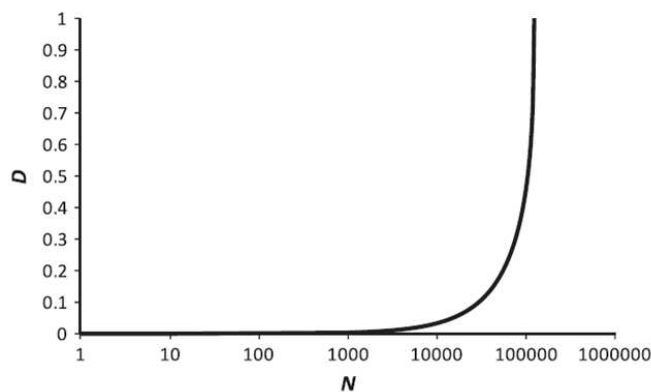


Figura 7.1: Evoluzione del danno, per un provino senza intagli con  $\sigma_{max} = 800$  MPa e  $R = -0,5$  [45]

La curva D-N di Figura 7.1, che rappresenta l'evoluzione del danneggiamento, mostra come il danno sia inizialmente di poca entità, ma si accumuli rapidamente all'avvicinarsi di  $N$  a  $N_f$  [51]. Pertanto l'impiego di un valore costante per  $\Delta N$  non risulta del tutto efficiente, in quanto troppo oneroso per  $N$  bassi e non abbastanza preciso in prossimità di  $N_f$ . È possibile, perciò, adottare un  $\Delta N$  variabile, utilizzando, ad esempio, un algoritmo di controllo della pendenza della curva, come in [51].

Tale pendenza è data da:

$$m = \frac{D^{(i+1)} - D^{(i)}}{\Delta N}$$

Nella presente trattazione si è adottato per semplicità un valore costante di  $\Delta N$ , ma, come spiegato al paragrafo 7.3.4, sufficientemente piccolo da fornire risultati che ben si adattano alla previsione di vita a fatica teorica fatta attraverso la formula che fornisce il numero di cicli a rottura  $N_f$ .

### 7.1.3 Metodi alle differenze finite

La variabile di danno  $D$  è funzione del numero di cicli  $N$ .

$$D = f(N)$$

Nel modello NLCD presentato, le derivate prima e seconda sono rispettivamente:

$$\dot{D} = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^\alpha \left[ \frac{A_{II}}{M_0(1 - 3b_2\bar{\sigma}_H)(1 - D)} \right]^\beta$$

$$\ddot{D} = \dot{D} \left[ \frac{A_{II}}{M_0(1 - 3b_2\bar{\sigma}_H)} \right]^\beta \left\{ \alpha(\beta + 1)[1 - (1 - D)^{\beta+1}]^{\alpha-1} + \beta(1 - D)^{-(\beta+1)}[1 - (1 - D)^{\beta+1}]^\alpha \right\}$$

Per l'integrazione numerica dell'equazione differenziale di Chaboche si possono scegliere diversi schemi di integrazione; si riportano di seguito le alternative possibili.

Lo schema alle differenze in avanti, o metodo esplicito, è espresso da:

$$D^{(i+1)} = D^{(i)} + \Delta N^{(i+1)} \dot{D}^{(i)}$$

Lo schema alle differenze centrali è dato da:

$$D^{(i+1)} = D^{(i)} + \Delta N^{(i+1)} \dot{D}^{(i+\frac{1}{2})}$$

dove il termine  $\dot{D}^{(i+\frac{1}{2})}$  si ottiene nel modo seguente:

$$\dot{D}^{(i+\frac{1}{2})} = \frac{\dot{D}^{(i)} + \dot{D}^{(i-1)}}{2} + \Delta N^{(i+1)} \ddot{D}^{(i)}$$

Lo schema delle differenze all'indietro, o metodo implicito, è:

$$D^{(i+1)} = D^{(i)} + \Delta N^{(i+1)} \dot{D}^{(i+1)}$$

dove il termine  $\dot{D}^{(i+1)}$  viene stimato implicitamente attraverso il metodo di Newton-Raphson.

Nella presente trattazione si è scelto di adottare lo schema alle differenze in avanti, poiché esso, attraverso un'adeguata scelta di  $\Delta N$ , fornisce buoni risultati, in accordo con la soluzione teorica, presentando contemporaneamente il notevole vantaggio di un onere computazionale decisamente inferiore rispetto ai due casi delle differenze centrali e all'indietro.

Si osserva che quest'ultimo metodo è in generale il più conservativo al crescere del passo di integrazione  $\Delta N$  rispetto alla vita a fatica  $N_f$ , come mostrato dalla Figura 7.18 al paragrafo 7.3.4, ma richiede tempi di calcolo maggiori.

### 7.1.4 Schema computazionale

L'algoritmo implementato prevede le seguenti fasi:

4. inizializzazione di tutti i parametri;
5. lettura dei valori tensionali in corrispondenza dei punti di integrazione, a seguito dell'analisi agli elementi finiti;
6. inizializzazione della variabile di danno  $D = 1/N_f$ ;
7. calcolo, in ogni punto di integrazione, del valore incrementato del danneggiamento  $D^{(i+1)}$  dopo  $\Delta N$  cicli, a seconda dello schema di integrazione adottato;
8. controllo del valore raggiunto dalla variabile di danno;
9. calcolo del modulo elastico ridotto  $E^{(i+1)}$ , modificato a seguito del deterioramento a fatica del materiale.

Fintanto che  $D$  si mantiene inferiore al valore unitario si prosegue con l'accumulazione del danneggiamento, ripartendo dal punto 4; una volta che il danno, in un qualsiasi punto di integrazione, raggiunge valore pari a 1, si considera avvenuta la nucleazione della macrocricca per fatica in corrispondenza di tale punto e si arresta l'analisi.

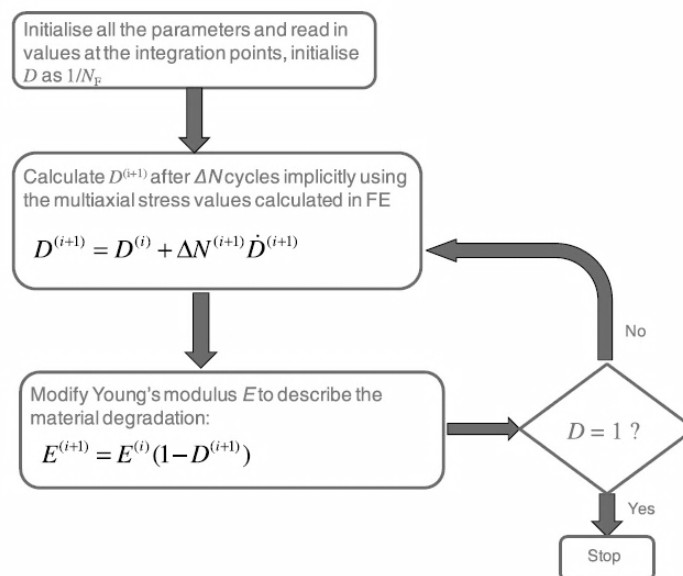


Figura 7.2: Algoritmo semplificato della subroutine UMAT

## 7.2 LE SUBROUTINE IN ABAQUS

Abaqus consente un uso avanzato dell'analisi agli elementi finiti, attraverso la scrittura da parte dell'utente di subroutine che permettono di personalizzare una vasta gamma di funzionalità del programma.

Per la compilazione e il collegamento di una subroutine scritta dall'utente è richiesto un compilatore Fortran; Simulia non garantisce la compatibilità di Abaqus con subroutine scritte in linguaggio diverso da Fortran, che risulta pertanto fortemente consigliato [1].

Date queste indicazioni, nella presente trattazione si è scelto di utilizzare il linguaggio Fortran 77, associato al compilatore *Intel Fortran Compiler 11.1*, che presenta perfetta compatibilità con Abaqus 6.12.

Nella presente trattazione sono state scritte tre diverse subroutine.

- La subroutine UMAT consente di definire il comportamento meccanico del materiale: si ricorre ad essa per la definizione di modelli costitutivi complessi, che descrivono il comportamento di materiali, che non possono altrimenti essere rappresentati in modo accurato, a causa della loro differenti caratteristiche rispetto a quelle dei materiali contenuti nella libreria di modelli, disponibile in Abaqus. La legge costitutiva così definita può avere vari gradi di complessità, a seconda delle esigenze, usare variabili dipendenti dalla soluzione e può essere utilizzata con qualsiasi tipo di elemento finito di Abaqus; è inoltre possibile implementare il comportamento di più materiali nella stessa subroutine UMAT.
- La subroutine SDIVINI consente di inizializzare i valori delle *Solution-Dependent state Variables* (SDV), ossia delle variabili dipendenti dalla soluzione, che vengono aggiornate durante l'analisi. Il valore di tali variabili deve essere calcolato dall'utente all'interno della subroutine principale, come funzione di qualsiasi altra variabile contenuta nella subroutine stessa; Abaqus si limita a riservare lo spazio necessario per salvare i valori ottenuti come risultato, in base al numero di SDV indicato dall'utente.
- La subroutine UAMP consente di descrivere il valore dell'ampiezza come funzione del tempo ed è in grado di calcolare anche le derivate e gli integrali della funzione ampiezza, definita dall'utente.

In Abaqus è disponibile anche una varietà di utility routine per agevolare nella scrittura delle subroutine definite dall'utente; l'utility routine, quando viene chiamata nella subroutine, esegue una funzione predefinita, il cui risultato può essere utilizzato nella subroutine stessa.

Le utility routine utilizzate nella scrittura della subroutine UMAT sono:

- XIT, che termina l'analisi assicurando la chiusura di tutti i file ad essa associati;



- SINV, che calcola gli invarianti del tensore di tensione.

Il testo completo del codice delle tre subroutine, scritto in linguaggio Fortran, è riportato nell'Appendice B.

### 7.2.1 La subroutine UAMP

Prima di illustrare le caratteristiche della subroutine per la definizione del carico, è importante sottolineare che Abaqus non possiede un sistema di unità di misura intrinseco: è compito dell'utente scegliere a quale sistema riferirsi ed usare di conseguenza unità di misura coerenti. Nella presente trattazione si è scelto di adottare il sistema N-mm.

Tabella 7.1: Unità di misura consistenti

Quantity	SI	SI (mm)	US Unit (ft)	US Unit (inch)
Length	m	mm	ft	in
Force	N	N	lbf	lbf
Mass	kg	tonne (10 <sup>3</sup> kg)	slug	lbf s <sup>2</sup> /in
Time	s	s	s	s
Stress	Pa (N/m <sup>2</sup> )	MPa (N/mm <sup>2</sup> )	lbf/ft <sup>2</sup>	psi (lbf/in <sup>2</sup> )
Energy	J	mJ (10 <sup>-3</sup> J)	ft lbf	in lbf
Density	kg/m <sup>3</sup>	tonne/mm <sup>3</sup>	slug/ft <sup>3</sup>	lbf s <sup>2</sup> /in <sup>4</sup>

In tale sistema di riferimento le generiche unità con cui è scandito il tempo in Abaqus assumono il significato di secondi.

L'andamento del carico nel tempo è assunto di tipo sinusoidale. La funzione che ne rappresenta l'evoluzione è stata costruita in modo tale che un ciclo completo si concluda, anziché a  $2\pi$ , in corrispondenza dell'unità di tempo: l'argomento della funzione seno è stato, perciò, opportunamente modificato a tale scopo e la frequenza della sollecitazione risulta essere di 1 Hz. Questo accorgimento consente di avere una pratica coincidenza tra le unità temporali dell'analisi e il numero di cicli di carico con cui viene sollecitata la struttura, facilitando la gestione del modello e favorendo la lettura dei risultati da esso ottenuti.

Si osserva che il valore di  $\pi$  deve essere inserito in Fortran come un numero reale avente un certo numero di cifre decimali; tale approssimazione, tanto più contenuta quanto maggiore è il numero di cifre decimali considerate, influenza il valore dell'ampiezza. Per analisi lunghe, caratterizzate da un elevato numero di cicli di carico, le imprecisioni così prodotte si amplificano portando a valori non nulli dell'ampiezza in corrispondenza del periodo e del semiperiodo, come invece ci si aspetterebbe da una funzione di tipo sinusoidale.

Sfruttando la costruzione della funzione che realizza un ciclo completo nell'unità temporale dello step, come descritto, si è fatto dipendere l'argomento del seno dal tempo dello step, a cui è stata però sottratta la parte intera, evitando così che l'errore si accresca di ciclo in ciclo.

L'espressione dell'ampiezza di carico diventa quindi:

$$a = \sin[2\pi(t - \text{int}(t))]$$

## 7.2.2 La subroutine UMAT

La Figura 7.3 illustra la sequenza di azioni che caratterizza il processo svolto da Abaqus dall'inizio dell'analisi al termine dello step; a lato del diagramma di flusso sono riportati i nomi delle subroutine, in base alla fase del processo in cui intervengono.

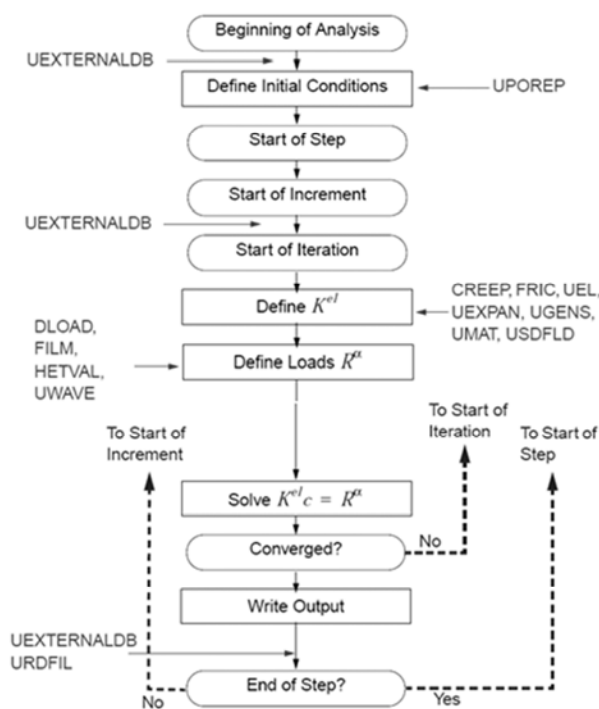


Figura 7.3: Diagramma di flusso di un'analisi in Abaqus/Standard

All'interno di ciascun incremento, la subroutine UMAT si inserisce nella definizione del legame costitutivo per ciascuna iterazione; in particolare essa consente la costruzione della matrice jacobiana e del tensore di tensione. Lo schema in Figura 7.4 riporta con maggiore dettaglio le fasi che caratterizzano la singola iterazione.

Alla prima iterazione di ciascun incremento la subroutine viene richiamata due volte: durante la prima chiamata viene formata la matrice di rigidità iniziale utilizzando la configurazione del

modello all'inizio dell'incremento corrente, mentre durante la seconda viene creata la nuova matrice di rigidità, basata sulla configurazione aggiornata del modello. Nelle iterazioni successive la subroutine viene invece richiamata una sola volta, poiché le correzioni alla configurazione del modello vengono apportate basandosi sulla rigidità al termine dell'iterazione precedente.

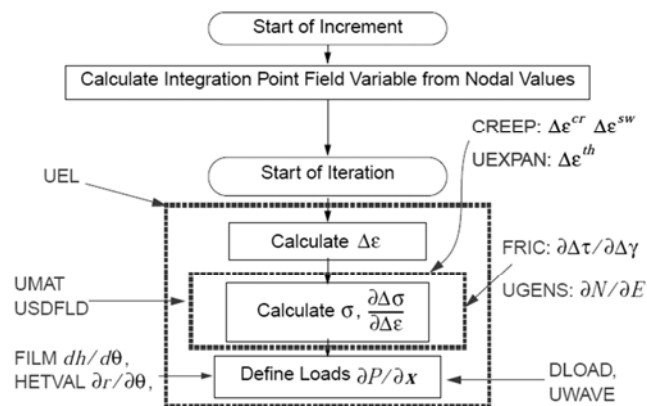


Figura 7.4: Diagramma di flusso dettagliato relativo ad una iterazione

### 7.2.2.1 Variabili a disposizione della subroutine

Le principali grandezze che la subroutine UMAT ha a disposizione sono elencate di seguito, riportando anche il nome che esse assumono nella scrittura del codice.

Variabili all'inizio dell'incremento:

- TIME* valore complessivo del tempo;
- TEMP* valore della temperatura (non considerata nella presente trattazione);
- STRESS* vettore delle tensioni;
- STRAIN* vettore delle deformazioni;
- DFGRD0* matrice del gradiente di deformazione;
- STATEV* variabili dipendenti dalla soluzione (SDV);
- PROPS* vettore delle costanti del materiale, definito dall'utente.

Variabili incrementate:

- DTIME* incremento temporale;
- DTEMP* incremento temperatura (non considerato nella presente trattazione);
- DSTRAIN* vettore degli incrementi di deformazione;
- DROT* matrice dell'incremento di rotazione;
- DFGRD1* matrice del gradiente di deformazione alla fine dell'incremento.

Oltre a queste, sono presenti altre variabili, che forniscono ulteriori informazioni:

- NDI* numero delle componenti di tensione dirette;
- NSHR* numero delle componenti di tensione di taglio;
- NTENS* dimensione dei vettori contenenti le componenti di tensione e di deformazione;
- NSTATV* numero delle SDV (definito nell'opzione DEPVAR del materiale in Abaqus);
- NPROPS* numero delle costanti del materiale definito dall'utente.

Infine, si hanno:

- KSTEP* numero di step corrente;
- KINC* numero di incremento corrente;
- NOEL* numero di elemento;
- NPT* numero di punto di integrazione.

Si osserva che in Abaqus tensioni e deformazioni sono memorizzate come vettori; la convenzione adottata dal programma nella definizione delle componenti di tensione per elementi tridimensionali è la seguente:

- componenti dirette:  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ ;
- componenti di taglio:  $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ .

Le componenti di deformazione vengono ordinate in modo del tutto analogo.

### 7.2.2.2 Variabili da definire nella subroutine

Le grandezze che devono necessariamente essere definite attraverso la scrittura della subroutine UMAT sono elencate di seguito, riportando anche il nome che esse assumono nella scrittura del codice.

- DDSDDE* matrice jacobiana del modello costitutivo;
- STRESS* vettore delle tensioni alla fine dell'incremento;
- STATEV* variabili dipendenti dalla soluzione (SDV) alla fine dell'incremento.

### 7.2.2.3 Costruzione del legame costitutivo

Il metodo agli elementi finiti utilizza l'approccio agli spostamenti, determinando, a partire da un campo di spostamenti congruenti, il corrispondente campo tensionale equilibrato. Per passare da termini infinitesimi a termini finiti e realizzare la trasformazione della legge costitutiva differenziale in un'equazione incrementale si ricorre ad uno dei metodi alle differenze finite.

Secondo lo schema alle differenze in avanti si ha:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(i)} + \mathbf{C}^{(i+1)} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$$

dove il valore di  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  viene letto dalla subroutine direttamente dal modello in Abaqus, attraverso la variabile DSTRAN utilizzata nella scrittura del codice, mentre  $\mathbf{C}$  è la matrice jacobiana, che deve essere costruita opportunamente all'interno della subroutine UMAT.

Per i problemi nell'ambito delle piccole deformazioni o per quelli con grandi deformazioni, ma piccole variazioni di volume, come nel caso della plasticità nei metalli, la matrice jacobiana è definita come:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}$$

dove  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  e  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  rappresentano rispettivamente l'incremento di tensione e di deformazione.

Adottando il metodo esplicito, la matrice jacobiana coincide con la matrice di elasticità  $\mathbf{D}$ , tale che:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Anche se in letteratura tale matrice è solitamente denominata  $\mathbf{D}$ , per evitare ambiguità con il simbolo utilizzato per il tensore di danno, nella presente trattazione si preferisce indicarla come  $\mathbf{C}$ , dal momento che essa coincide anche con la matrice jacobiana.

Per materiale elastico lineare isotropo:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

con

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

dove

- $E$  modulo di elasticità longitudinale o di Young;
- $\nu$  coefficiente di contrazione trasversale o di Poisson;
- $G$  modulo di elasticità tangenziale o prima costante di Lamé;
- $\lambda$  seconda costante di Lamé.

La subroutine UMAT utilizza quindi il legame costitutivo elastico isotropo così definito, accoppiandolo al danneggiamento, anch'esso isotropo, introdotto attraverso la riduzione lineare del modulo di Young, utilizzato nelle espressioni precedenti.

$$E^{(i+1)} = (1 - D^{(i+1)})E^{(i)}$$

#### 7.2.2.4 Implementazione del metodo NLCD

Il calcolo dell'incremento di danno va effettuato al termine del ciclo di carico. Per individuare correttamente questa condizione si ricorre ad una funzione ausiliaria con andamento sinusoidale, avente periodo doppio rispetto a quella utilizzata nella subroutine UAMP; tale funzione si annulla pertanto in corrispondenza della fine del ciclo di carico.

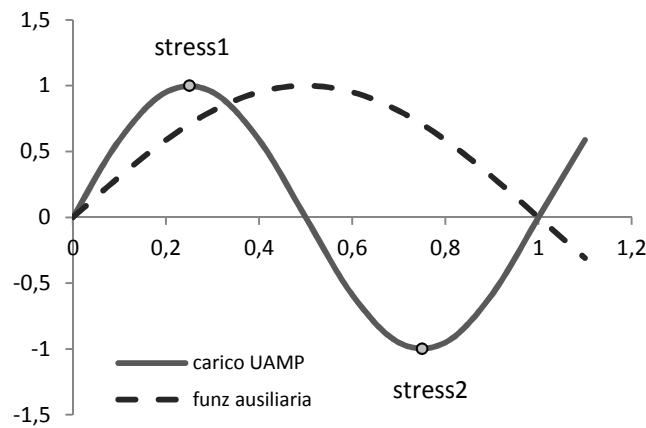


Figura 7.5: Esempio di funzione sinusoidale che descrive l'andamento del carico e funzione ausiliaria

Data l'approssimazione del valore di  $\pi$ , di cui si è già parlato nel paragrafo 7.2.1 relativo alla UAMP, nuovamente si è fatto dipendere l'argomento del seno dal tempo dello step, a cui è stata sottratta la parte intera.

Per la costruzione delle grandezze necessarie al calcolo dell'incremento di danno, come  $\bar{\sigma}_H$ ,  $A_{II}$  e  $\sigma_{eq,max}$ , si rendono necessarie operazioni di media e di individuazione del valore massimo di tali grandezze all'interno di un ciclo di carico. Per fare ciò il codice prevede di memorizzare, attraverso l'uso delle SDV, lo stato di tensione in corrispondenza dei punti di picco della sinusoide indicati in Figura 7.5 come stress1 e stress2, i quali non necessariamente corrispondono a tensioni di trazione e di compressione, e calcolare quindi i valori richiesti.

Il calcolo del rateo di danno e dello stato di danno aggiornato avviene seguendo le formule del Capitolo 6, in cui si è esposto il metodo NLCD dal punto di vista teorico.

Infine viene memorizzato in una SDV il nuovo valore della variabile di danno.

### 7.2.2.5 Controllo dei risultati

Nell'impostazioni dell'analisi si richiede che il programma fornisca i risultati ogni 0,25 dell'unità temporale, in modo da controllare la corretta applicazione del carico e l'effetto che esso produce sul modello.

Per verificare che la subroutine funzioni correttamente, alla parte strettamente necessaria per l'implementazione si è aggiunta una sezione finale nella quale si esaminano i risultati ottenuti dall'analisi con riferimento ad un elemento di controllo.

Si è scelto di scrivere gli output nel *message file* (.msg) di Abaqus/Standard, corrispondente all'unità 7 associata al comando *write* in Fortran.

## 7.3 VALIDAZIONE DELL'IMPLEMENTAZIONE

Per la validazione del codice scritto è necessario comparare i risultati ottenuti dal programma agli elementi finiti con quelli teorici e con dati sperimentali noti.

Un utile termine di confronto è costituito dal lavoro di Marmi e altri collaboratori [37], consistente nell'applicazione del modello di danneggiamento del continuo per fatica come post-processore nell'analisi agli elementi finiti di campioni sottoposti a trazione, in presenza e in assenza di intagli, finalizzata alla stima della vita a fatica, e la successiva comparazione dei risultati con i dati sperimentali a disposizione.

Tali analisi tuttavia, al fine di introdurre semplificazioni computazionali, si basano sull'assunzione che l'influenza del danno sul campo delle tensioni sia debole, consentendo un disaccoppiamento tra la formula incrementale di danneggiamento e la legge costitutiva: il modulo elastico non viene modificato come conseguenza dell'evoluzione del danno, lo stato tensionale è assunto costante e il danno è accumulato in modo non lineare. In questo modo si tiene conto unicamente dell'andamento temporale delle tensioni in corrispondenza di ciascun punto di integrazione, applicando localmente il modello di danneggiamento e ottenendo risultati conservativi.

Per tenere conto del fatto che in realtà un campione caratterizzato da concentrazione di tensione tollera una tensione massima più elevata, Marmi [37] propone di utilizzare il metodo del gradiente secondo la formulazione di Papadopoulos [41], applicato alla tensione equivalente del modello di Lamaitre e Chaboche.

Nella presente trattazione si è scelto, invece, di introdurre l'accoppiamento con il comportamento del materiale, per una più realistica descrizione del comportamento dello stesso.

La differenza tra i due approcci è ben rappresentata dal grafico di confronto di Figura 7.28 al paragrafo 7.3.6.

### 7.3.1 Materiale

Il materiale di cui sono costituiti i campioni utilizzati nei test a fatica da Marmi all'Università di Liegi è il Ti-6Al-4V: noto anche con il nome di Grade 5, è la lega di titanio più comunemente usata, poiché rappresenta un'ottima combinazione di resistenza, resistenza alla corrosione, saldabilità e lavorabilità. Significativamente più resistente del titanio, pur avendo la stessa rigidità e uguali proprietà termiche, ad eccezione della conducibilità termica, che è inferiore di circa il 60% rispetto a quella del titanio, questa lega può subire trattamenti termici e, grazie alle sue caratteristiche, trova impiego in ambito aeronavale, biomedico, in quello meccanico nei componenti dei motori e in campo civile nelle strutture offshore.

Il Ti-6Al-4V è composto da 6% di alluminio, 4% di vanadio, 0,25% (massimo) di ferro, 0,2% (massimo) di ossigeno e la restante parte di titanio. La composizione chimica esatta è riportata in Tabella 7.2.

Tabella 7.2: Composizione chimica del Ti-6Al-4V in percentuali del peso totale

Simbolo	Elemento	Peso %
Fe	ferro	0.14
V	vanadio	4.0
Al	alluminio	6.26
C	carbonio	0.008
O	ossigeno	0.18
N	azoto	0.004
Y	ittrio	<0.0004
H (ppm)	idrogeno	58
O+2N	ossigeno e azoto	0.19

Il materiale di cui sono costituiti i provini utilizzati per i test è stato sottoposto a trattamento termico di ricottura a 760°C per un'ora; questo tipo di processo garantisce prestazioni migliori della lega in termini di durezza e contemporaneamente maggiore duttilità.

Le informazioni dettagliate per questo metallo sono contenute nel Military Handbook 5J [40], aggiornamento della precedente versione 5H, del Dipartimento della Difesa statunitense: il testo contiene indicazioni generali sulle caratteristiche della lega relative alla produzione e ai trattamenti termici, accompagnate da grafici specifici che mostrano il comportamento a fatica del materiale.

Le proprietà meccaniche del Ti-6Al-4V ricotto sono contenute in Tabella 7.3.



Tabella 7.3: Proprietà meccaniche del Ti-6Al-4V

<b>E [MPa]</b>	<b><math>\nu</math></b>	<b><math>f_y</math> [MPa]</b>	<b><math>f_u</math> [MPa]</b>
109400	0.37	940	1040

I coefficienti del modello NLCD sono stati ricavati da Marmi come spiegato al paragrafo 6.3.2, relativo alla determinazione del modello; i loro valori per la lega di titanio sono riassunti nella Tabella 7.4.

Tabella 7.4: Parametri del Ti-6Al-4V per il modello NLCD

<b><math>\beta</math></b>	<b><math>aM_0^{-\beta}</math></b>	<b><math>b_1</math></b>	<b><math>b_2</math></b>
1.79	$1.79 \times 10^{-11}$	0.0013	0.00055

Infine si riportano anche i valori della tensione ultima a trazione e di quella limite per  $\bar{\sigma} = 0$ , cioè per sollecitazione alternata simmetrica con  $R = -1$ .

Tabella 7.5: Tensione ultima a trazione e tensione limite per  $R=-1$  del Ti-6Al-4V

<b><math>\sigma_u</math> [MPa]</b>	<b><math>\sigma_{10}</math> [MPa]</b>
1040	358

Le prove sperimentali realizzate da Marmi presso l'Università di Liegi sono state condotte in regime HCF [37]. Tra di esse sono stati scelti due campioni come confronto per testare il codice scritto:

- campione senza intaglio: provino a clessidra;
- campione con intaglio: provino a lastra con foro centrale.

Il primo viene analizzato dal paragrafo 7.3.2 al paragrafo 7.3.6 ricavando il numero di cicli a rottura in diverse condizioni di carico, conducendo un confronto con i dati teorici e sperimentali a disposizione e studiando l'evoluzione del danneggiamento; i risultati per il secondo provino sono riportati invece al paragrafo 7.3.7 e approfondiscono il tema della redistribuzione delle tensioni, che il modello implementato è in grado di rappresentare.

### 7.3.2 Valori teorici

Avendo a disposizione i parametri per la lega di titanio, è stato possibile studiare il comportamento a fatica del materiale: le formule del metodo di Lamaitre e Chaboche per il caso monoassiale sono state implementate in un foglio di calcolo per ottenere le curve S-N.

Il grafico in Figura 7.7 riproduce l'andamento del numero di cicli a fatica in funzione dell'ampiezza di tensione  $\sigma_a$ , al variare della tensione media di ciclo; per avere un termine di confronto, si sono scelti gli stessi valori delle corrispondenti curve ottenute da Zhang [51] e rappresentate in Figura 7.6.

Si osserva che esse riproducono correttamente il comportamento del materiale, mostrando una progressiva riduzione del limite e della vita a fatica, rappresentata dallo spostamento verso il basso delle curve, man mano che la tensione media diventa di trazione.

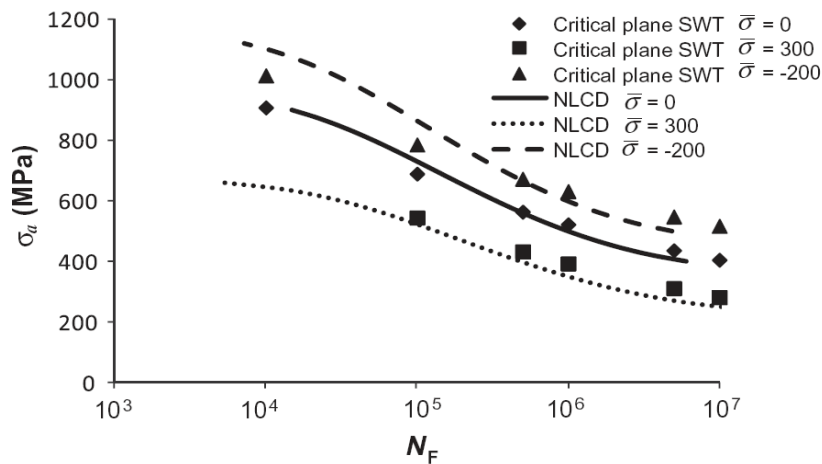


Figura 7.6: Curve S-N del Ti-6Al-4V al variare della tensione media di ciclo [51]

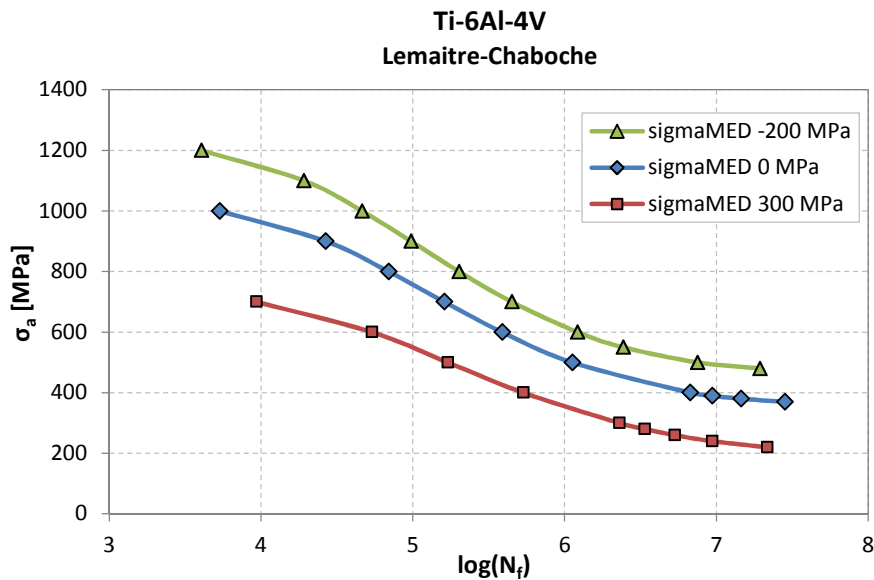


Figura 7.7: Curve S-N del Ti-6Al-4V al variare della tensione media di ciclo

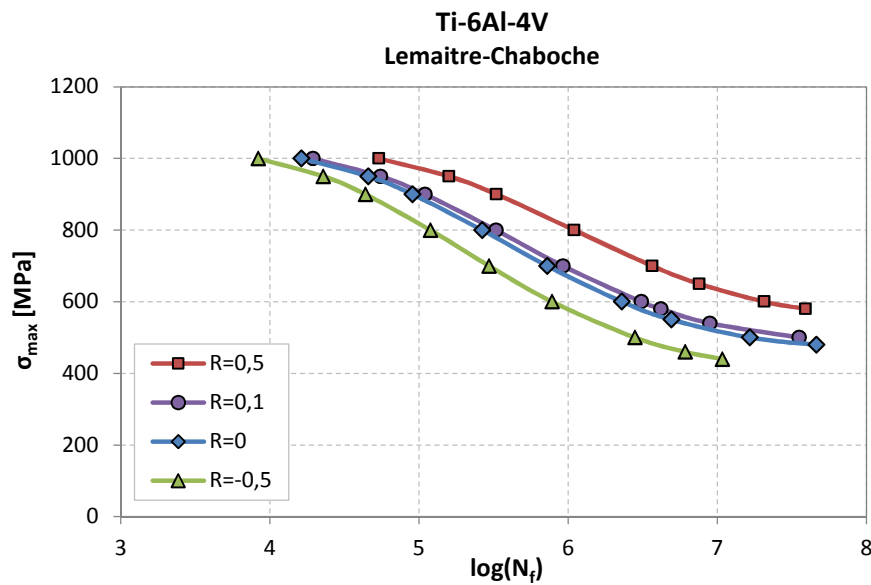


Figura 7.8: Curve S-N del Ti-6Al-4V al variare del rapporto di tensione

Sempre usando le equazioni del metodo NLCD, per lo stesso materiale si sono costruite le curve S-N che mettono in relazione il numero di cicli a rottura e la tensione massima  $\sigma_{max}$ , facendo variare il valore del rapporto di tensione  $R$ .

Il grafico in Figura 7.8 mostra come, correttamente, le curve si abbassino al diminuire del rapporto di tensione: a parità di tensione massima, infatti, la vita a fatica si riduce per valori decrescenti di  $R$ .

### 7.3.3 Valori sperimentali

Per lo stesso materiale si possono osservare i risultati delle prove sperimentali condotte su provini di dimensioni standardizzate, contenuti nel Military Handbook 5J [40].

Nonostante la dispersione dei dati, il testo fornisce le equazioni di curve approssimanti i valori ottenuti, che cercano di rappresentarne al meglio l'andamento in funzione della tensione massima. Anche in questo caso sono rappresentate più curve al variare del rapporto di tensione  $R$ .

I valori ottenuti dai test del Military Handbook 5J sono gli stessi dati sperimentali ripresi da Marmi [37] e utilizzati come termine di confronto nelle analisi; l'autore ha inoltre integrato questi dati con quelli ottenuti dalle prove condotte presso l'Università di Liegi.

Si sottolinea che nei provini privi di intagli non viene creato artificialmente alcun punto di concentrazione delle tensioni in cui avere l'innesco della cricca, pertanto il comportamento a fatica è fortemente influenzato dai difetti del materiale, generati ad esempio durante la fase di produzione del pezzo, differenti tra un campione e l'altro.

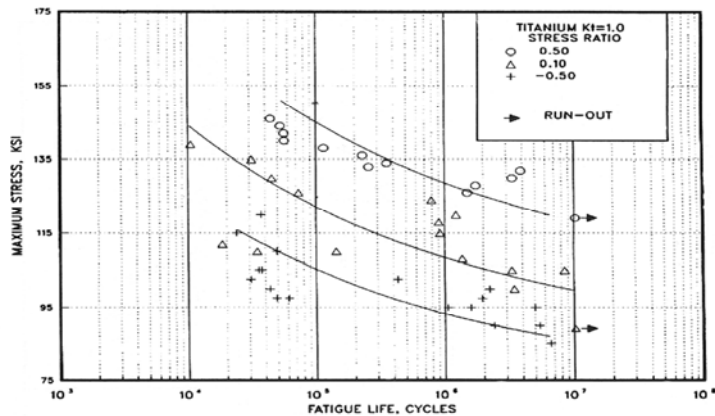


Figura 7.9: Curve S-N del Ti-6Al-4V che approssimano i dati sperimentali, per provino senza intagli [40]

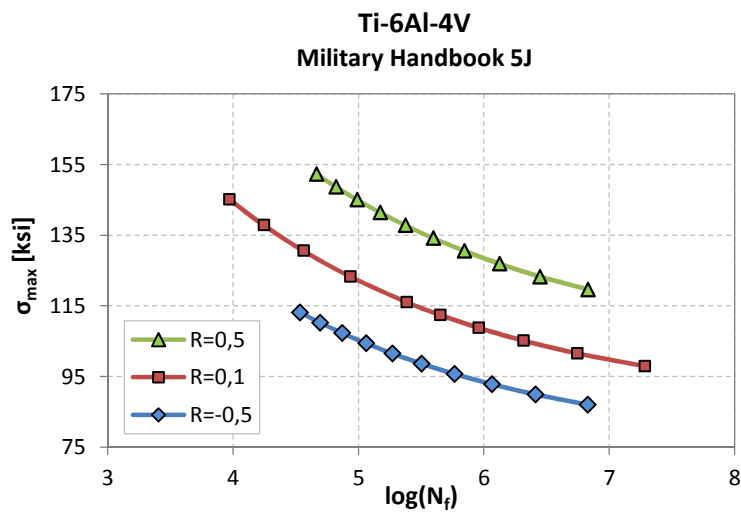


Figura 7.10: Curve S-N sperimentali del Ti-6Al-4V in ksi

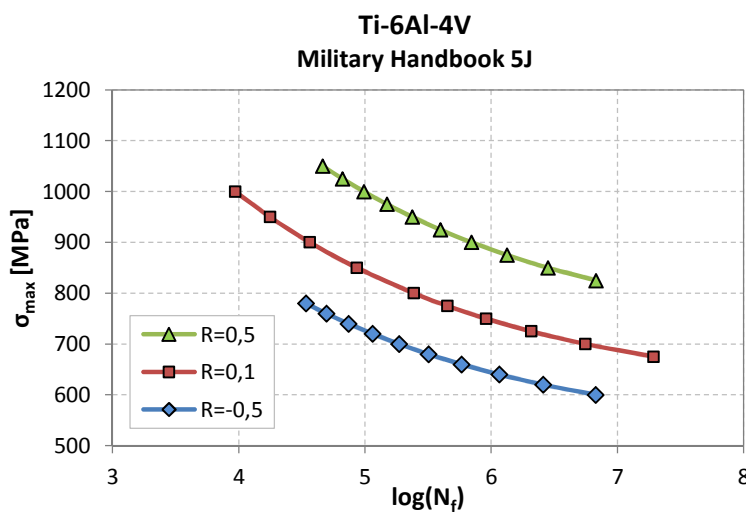


Figura 7.11: Curve S-N sperimentali del Ti-6Al-4V in MPa

Inoltre, i dati raccolti in [40] fanno riferimento a provini prodotti da due diverse aziende, che differiscono inevitabilmente per caratteristiche chimiche e trattamenti termici subiti, aumentando quindi la dispersione dei dati.

Al fine di rendere confrontabili questi risultati con i precedenti teorici, una volta riprodotto in Figura 7.10 il grafico del testo americano utilizzando le equazioni delle curve approssimanti fornite, si effettua la trasformazione dell'unità di misura dell'asse delle ordinate da ksi a MPa, ottenendo il grafico in Figura 7.11.

### 7.3.4 Modellazione

Si fa riferimento ad un provino a clessidra avente le stesse caratteristiche geometriche specificate in [37] e le cui dimensioni sono indicate in Figura 7.12.

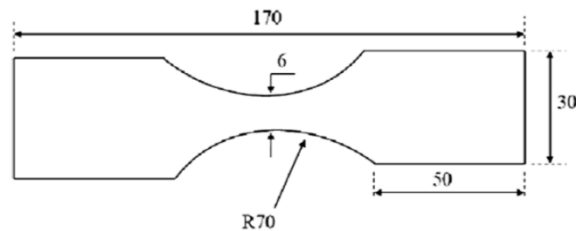


Figura 7.12: Geometria del provino a clessidra in mm

Il provino è stato sottoposto a sollecitazioni alternate di trazione e compressione, dovute all'applicazione di un'azione distribuita alle due estremità del pezzo.

Sfruttando la simmetria della geometria e del carico, per ridurre l'onere computazionale, si è modellato solamente un ottavo del provino, introducendo opportuni vincoli di simmetria lungo le tre direzioni principali.

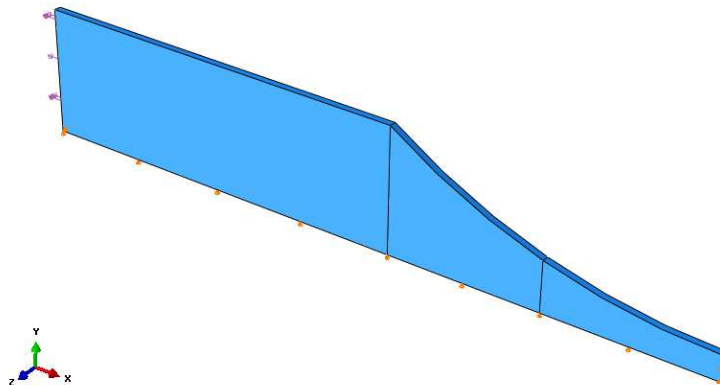


Figura 7.13: Modellazione di un ottavo del provino in Abaqus 6.12

La mesh è stata infittita in corrispondenza della sezione centrale del provino, critica per quanto riguarda il danneggiamento.

Gli elementi finiti utilizzati nella modellazione in Abaqus sono indicati come C3D20R, elementi solidi tridimensionali a 20 nodi, aventi tre gradi di libertà per ciascun nodo; gli elementi sono ad integrazione ridotta, ossia fanno uso, per ciascuna direzione, di un punto di appoggio in meno per l'integrazione numerica di Gauss.



Figura 7.14: Elemento solido a 20 nodi, che utilizza un'interpolazione quadratica

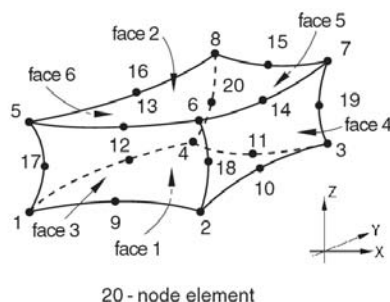


Figura 7.15: Convenzioni relative alla numerazione di nodi e facce

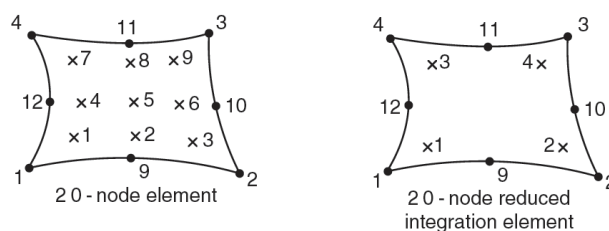


Figura 7.16: Numerazione dei punti di integrazione

Prima di procedere al confronto dei risultati si è effettuato uno studio sul passo di integrazione  $\Delta N$  da utilizzare nella subroutine, tale da non rendere eccessivamente onerose le analisi e contemporaneamente garantire la buona qualità dei risultati.

Per il caso  $R = 0,1$  e  $\sigma_{max} = 800$  MPa sono state svolte le analisi fino al ciclo  $N$ , corrispondente al raggiungimento del valore unitario della variabile di danno nell'elemento critico, per diversi valori del rapporto  $\Delta N/N_f$  tra il passo di integrazione e il numero di cicli a rottura.

Si riassumono in Tabella 7.6 i risultati ottenuti.

Tabella 7.6: Vita a fatica per diversi valori del passo di integrazione

$\Delta N/N_f$	$\Delta N$	$N_f$	$N$	errore [%]
0,005	1879	375868	385195	2,48
0,01	3759	375868	390936	4,01
0,02	7517	375868	405918	7,99
0,03	11276	375868	428488	14,00
0,05	18793	375868	451032	20,00
0,10	37587	375868	526218	40,00

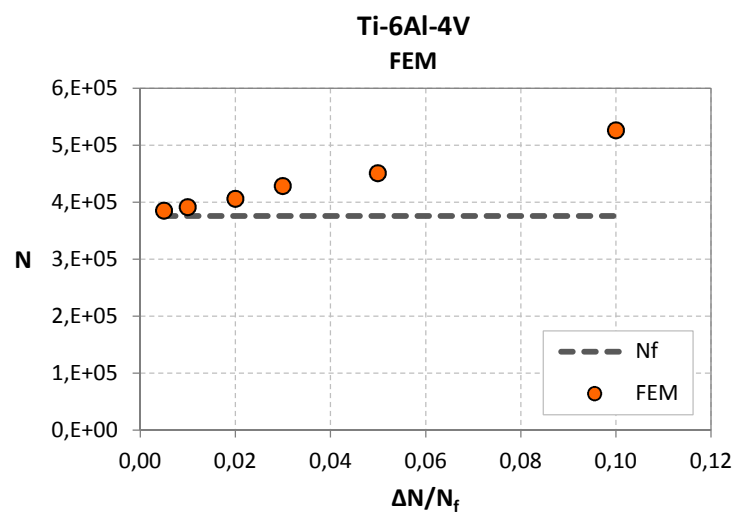
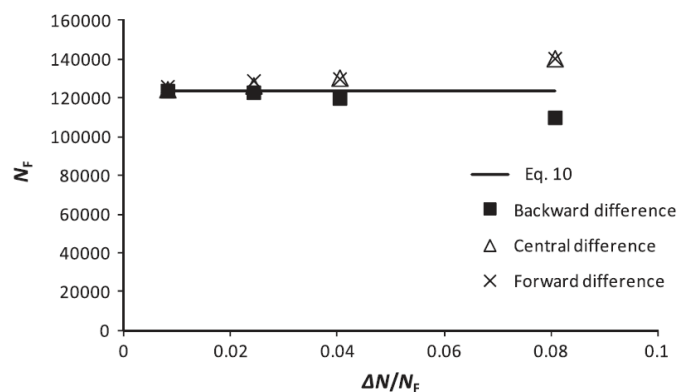
Figura 7.17: Confronto tra il valore teorico  $N_f$  e le soluzioni numeriche

Figura 7.18: Studio della convergenza del numero di cicli equivalenti  $\Delta N$  usando diversi schemi di integrazione, per un provino senza intagli, con  $R = -0,5$  e  $\sigma_{\max} = 800$  MPa, da [51] (la linea continua orizzontale rappresenta la soluzione teorica della formula integrata)

Si osserva che i risultati numerici convergono alla soluzione teorica al diminuire del passo di integrazione, con errori percentuali via via più ridotti. In particolare i valori ottenuti dal modello agli elementi finiti risultano superiori rispetto alla vita a fatica teorica, a causa dello schema alle differenze finite adottato nella scrittura dell'incremento di danno nel codice: Zhang dimostra infatti che lo schema implicito o all'indietro è più conservativo rispetto al valore di  $N_f$  stimato, mentre gli altri due metodi alle differenze centrali e quello esplicito, adottato nella presente trattazione, tendono a superare tale valore [51].

Nonostante i dati forniti dall'analisi avente  $\Delta N = 0,005 N_f$  siano molto accurati, si sceglie un numero di cicli equivalenti pari ad un centesimo della vita a fatica stimata, che fornisce comunque un errore accettabile.

### 7.3.5 Confronto dei risultati

Per ciascun valore del rapporto di tensione  $R$  si mettono a confronto i risultati teorici, quelli sperimentali e quelli ottenuti dall'analisi degli elementi finiti.

Tabella 7.7: Confronto tra i valori teorici, sperimentali e numerici per  $R = 0,5$

$\sigma_{\max}$ [MPa]	L-C	MIL-HDBK	FEM
	$N_f$	$N_f$	$N_f$
700	3659018	-	5227456
800	1096570	19721966	1524206

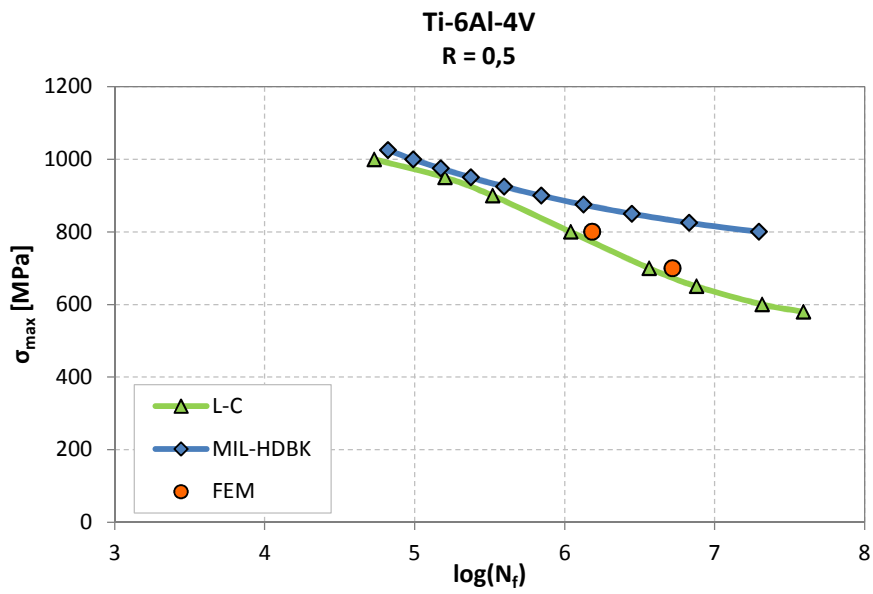
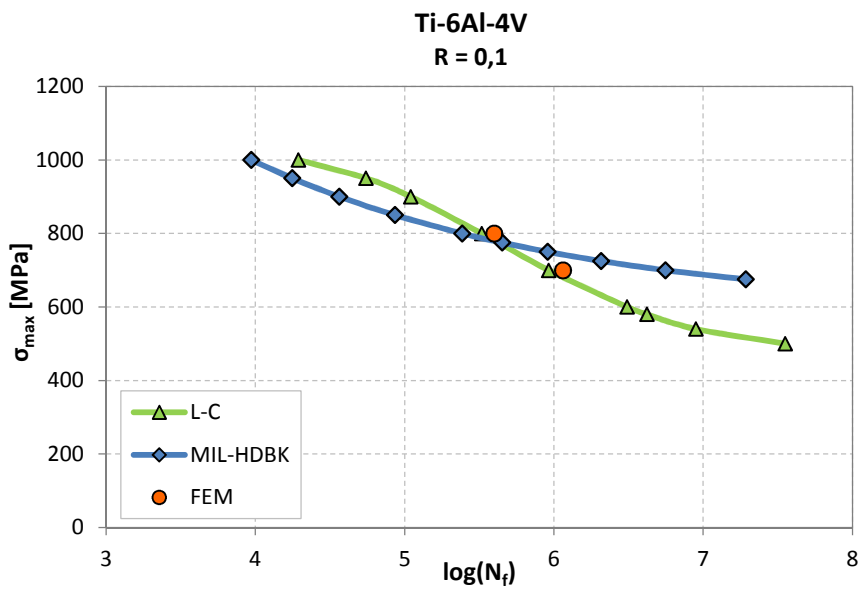
Tabella 7.8: Confronto tra i valori teorici, sperimentali e numerici per  $R = 0,1$

$\sigma_{\max}$ [MPa]	L-C	MIL-HDBK	FEM
	$N_f$	$N_f$	$N_f$
700	921221	5571199	1152228
800	327659	242923	397306

Tabella 7.9: Confronto tra i valori teorici, sperimentali e numerici per  $R = -0,5$

$\sigma_{\max}$ [MPa]	L-C	MIL-HDBK	FEM
	$N_f$	$N_f$	$N_f$
600	781272	6721552	871530
700	294689	186373	332514
800	119000	24082	131625



Figura 7.19: Vita a fatica del provino a clessidra in Ti-6Al-4V per  $R = 0,5$ Figura 7.20: Vita a fatica del provino a clessidra in Ti-6Al-4V per  $R = 0,1$

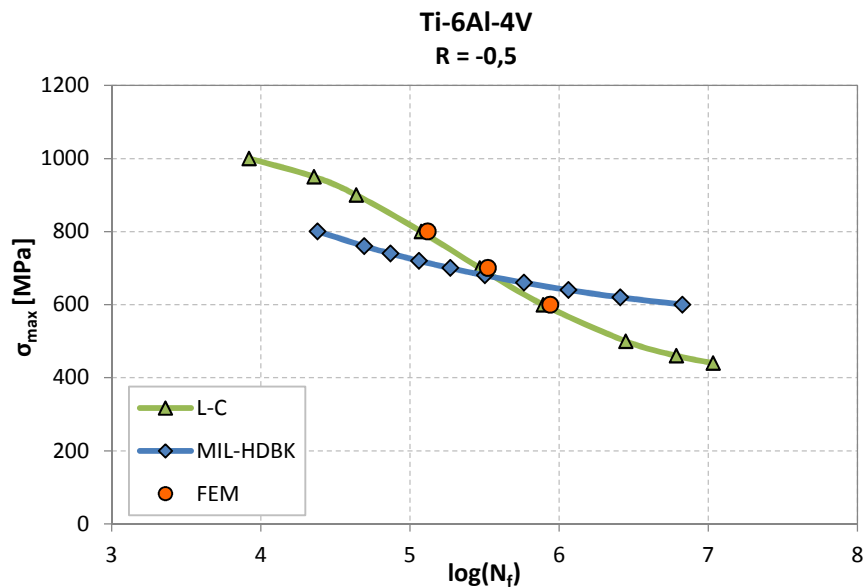


Figura 7.21: Vita a fatica del provino a clessidra in Ti-6Al-4V per  $R = -0,5$

La subroutine UMAT è stata scritta per tenere conto del più generale caso di stato di tensione multiassiale; il provino a clessidra sollecitato da forze di trazione e compressione cicliche, riprodotto nel modello, realizza di fatto uno stato di tensione monoassiale pertanto i valori ottenuti dall'analisi agli elementi finiti seguono l'andamento della curva teorica, che implementa il metodo di Lamaitre e Chaboche per il caso uniassiale.

Si riscontra, in generale, un buon accordo tra i dati a disposizione e quelli ottenuti dal FEM.

L'accoppiamento del modello NLCD con la legge elastica del materiale consente di legare il modulo elastico all'andamento del danneggiamento, secondo la formula già vista:

$$E^{(i+1)} = (1 - D^{(i+1)})E^{(i)}$$

L'incremento della variabile di danno al procedere dei cicli di carico genera una riduzione via via più severa di  $E$ , dando origine ad un comportamento softening del materiale nella zona interessata da gradienti di tensione più elevati. In questo modo il modello implementato realizza un rilassamento delle tensioni in corrispondenza dei punti *hot spot* e una redistribuzione delle tensioni nelle zone adiacenti. Per questo motivo il FEM fornisce valori di vita a fatica superiori rispetto alle previsioni della formula integrata, la quale risulta troppo cautelativa, soprattutto se confrontata con i risultati ottenuti dalle prove sperimentali.

In Figura 7.22, Figura 7.23 e Figura 7.24 sono riportati tre diversi contour dell'ampiezza di tensione multiassiale per il caso  $R = -0,5$  e  $\sigma_{max} = 600$  MPa.

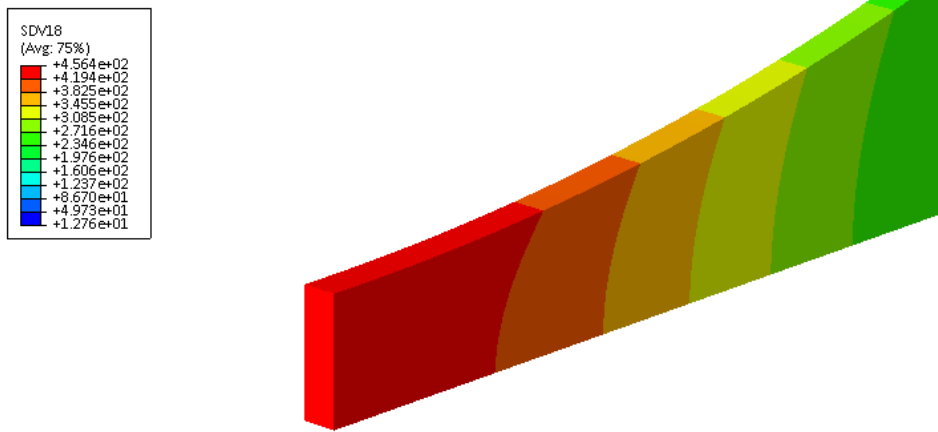


Figura 7.22: Contour di  $A_{II}$  all'inizio del danneggiamento

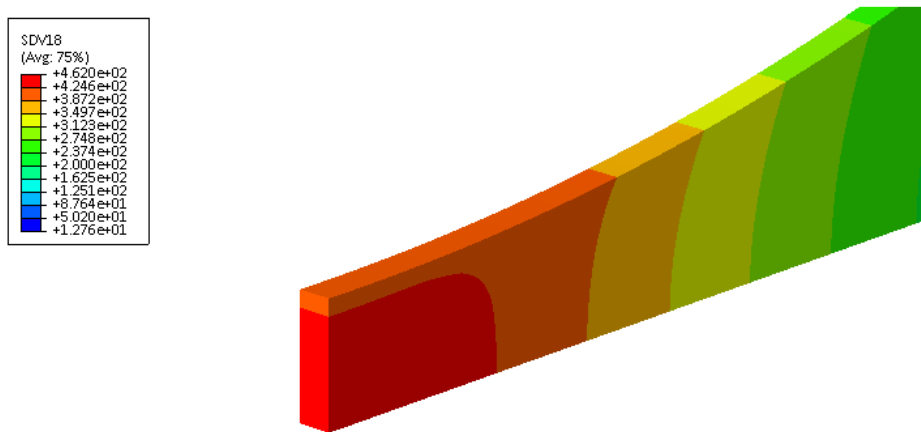


Figura 7.23: Contour di  $A_{II}$  in un ciclo intermedio

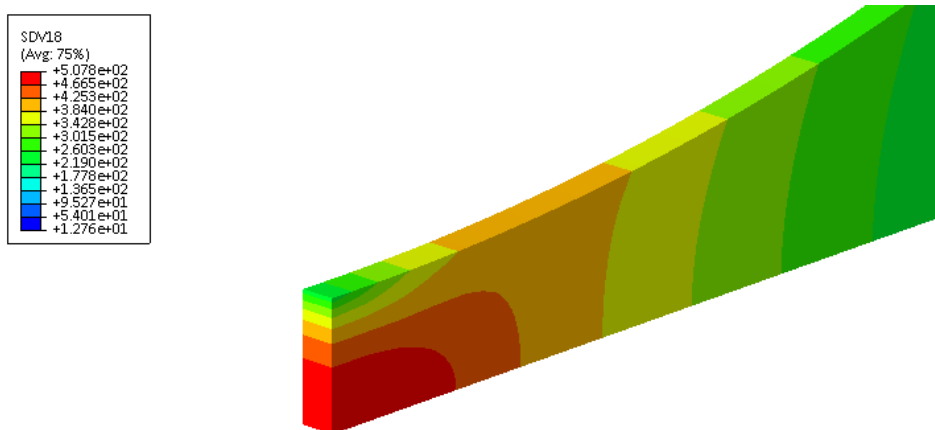


Figura 7.24: Contour di  $A_{II}$  al termine della vita a fatica

La ridistribuzione delle tensioni appare evidente dal confronto dei contour dell'ampiezza di tensione  $A_{II}$  in momenti diversi dell'analisi: le tensioni iniziali sono maggiori sulla superficie esterna perciò il danneggiamento si concentra in questa zona, come mostrato dalla Figura 7.26 al paragrafo 7.3.6; come conseguenza dell'effetto softening, i valori di  $A_{II}$  negli elementi critici diminuiscono al progredire dell'analisi e si assiste ad una ridistribuzione delle tensioni, le quali migrano verso gli elementi più interni e meno danneggiati del provino.

Per quanto riguarda i risultati sperimentali, essi si discostano sia dalla soluzione teorica che da quella numerica poiché vengono rappresentati nei grafici utilizzando le equazioni che meglio approssimano i valori ottenuti dalle prove in laboratorio, i quali sono caratterizzati purtroppo da una forte dispersione.

È importante ricordare che essi comunque si riferiscono alla formazione di una macrofrattura, mentre il metodo di Lamaitre e Chaboche, su cui si basano sia la stima teorica di  $N_f$  che l'implementazione del danno incrementale come post-processor del modello agli elementi finiti, ha come presupposto teorico che il valore unitario del danno, per cui si arresta l'analisi, corrisponda alla formazione di una microcricca. Di conseguenza i risultati dei test mostrano una vita a fatica che comprende anche la successiva fase di propagazione della cricca, non considerata dal modello NLCD.

### 7.3.6 Evoluzione del danno

Per il caso  $R = -0,5$  e  $\sigma_{max} = 800$  MPa, attraverso la lettura dei dati di output al termine di ciascun ciclo di carico, si ricostruisce l'andamento del danneggiamento all'aumentare del numero di cicli, dal valore nullo iniziale fino alla formazione della macrocricca, corrispondente a  $D = 1$ .

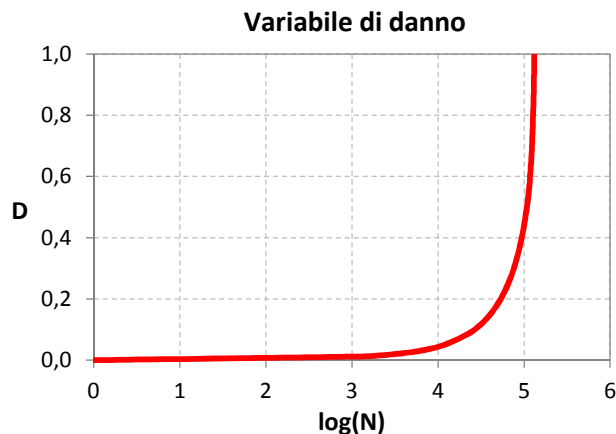


Figura 7.25: Crescita della variabile di danno in funzione del numero di cicli di carico

La rappresentazione grafica di Figura 7.25 mette in evidenza la non linearità della legge che descrive l'evoluzione del danno, mostrando un lento incremento iniziale, seguito da una sempre più rapida accumulazione all'avvicinarsi di  $N$  a  $N_f$ .

Al raggiungimento del valore unitario di  $D$  in corrispondenza di un punto di integrazione l'analisi viene arrestata dalla subroutine UMAT.

In Figura 7.26, per il caso  $R = -0,5$  e  $\sigma_{max} = 600$  MPa, si riporta il contour della variabile di danno all'ultimo ciclo.

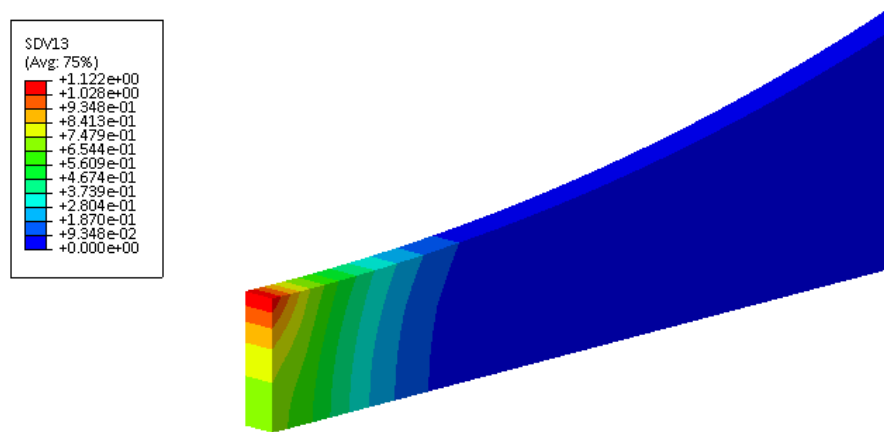


Figura 7.26: Contour della variabile di danno  $D$  all'ultimo ciclo

Dal momento che il metodo NLCD prevede l'accoppiamento della legge di danneggiamento con il legame costitutivo del materiale, è possibile rappresentare la progressiva diminuzione del modulo elastico, dovuta all'incremento di danno, al procedere della sollecitazione ciclica. Il grafico in Figura 7.27 rappresenta l'evoluzione di  $E$ , sempre per il caso  $R = -0,5$  e  $\sigma_{max} = 800$  MPa.

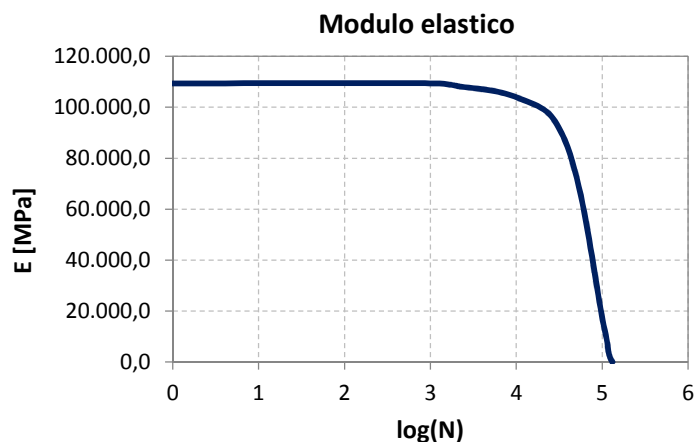


Figura 7.27: Degradamento del modulo elastico al crescere del numero di cicli di carico

Come sottolineato, i risultati ottenuti fanno riferimento ad un'implementazione che tiene conto dell'accoppiamento del modello NLCD con la legge elastica del materiale; modificando opportunamente la subroutine è possibile far sì che il modulo di Young non venga ridotto all'aumentare del danneggiamento, ma rimanga costante per tutta l'analisi, ottenendo quindi un'accumulazione del danno per il caso disaccoppiato. In queste condizioni il modulo elastico rimane costante e, con esso, anche lo stato tensionale, perciò il numero di cicli a fatica  $N$ , svolti prima di terminare l'analisi, coincide effettivamente con quello stimato al primo ciclo  $N_f$  attraverso la formula integrata, che è ricavata proprio nell'ipotesi di tensione massima e media costanti. Si ricorda che nel caso accoppiato, invece,  $N$  risulta superiore a  $N_f$  per effetto del fenomeno di softening e redistribuzione delle tensioni in corrispondenza dei punti *hot spot*, che riduce la velocità di evoluzione del danneggiamento.

Ovviamente la soluzione disaccoppiata è meno onerosa dal punto di vista computazionale, ma si allontana da quanto avviene realmente all'interno del materiale.

Sempre per il caso  $R = -0,5$  e  $\sigma_{max} = 600$  MPa, il grafico in Figura 7.28 mette a confronto le due situazioni mostrando come il modello accoppiato con la legge costitutiva fornisca una vita a fatica maggiore.

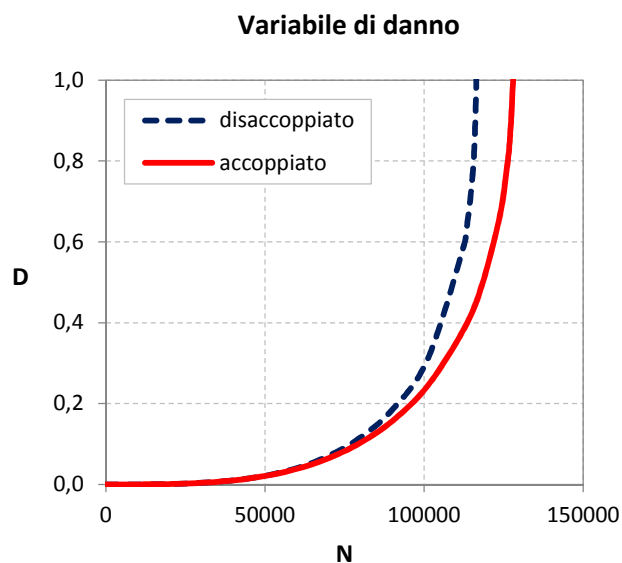


Figura 7.28: Confronto del danneggiamento tra il caso accoppiato e quello non accoppiato

### 7.3.7 Ridistribuzione delle tensioni

Si approfondiscono gli aspetti messi in evidenza modellando un provino a lastra con foro centrale.

Il materiale rimane la stessa lega di titanio, la quale però subisce un trattamento di invecchiamento; le proprietà meccaniche del Ti-6Al-4V trattato sono leggermente variate:

Tabella 7.10: Proprietà meccaniche del Ti-6Al-4V

$E$ [MPa]	$\nu$	$f_y$ [MPa]	$f_u$ [MPa]
109400	0.37	1080	1180

Le caratteristiche geometriche del provino sono rappresentate in Figura 7.29.

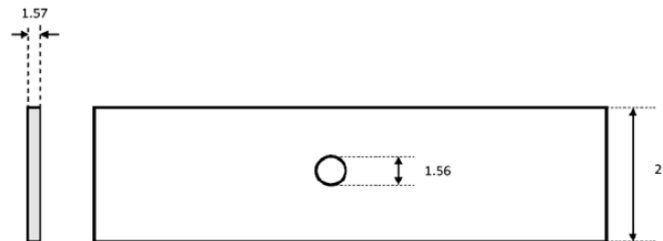


Figura 7.29: Geometria del provino a lastra con foro centrale in mm

Il provino è stato sottoposto a sollecitazioni alternate di trazione e compressione, dovute all'applicazione di un'azione distribuita alle due estremità del pezzo.

La geometria del provino presenta un intaglio, con conseguente concentrazione delle tensioni attorno al foro della lastra. La soluzione teorica da [52] fornisce:

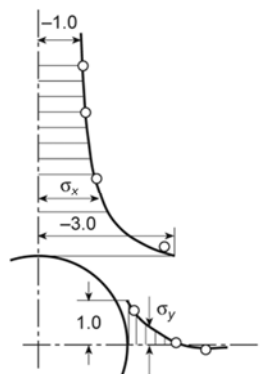


Figura 7.30: Andamento delle tensioni in prossimità del foro della lastra [52]

Il fattore di concentrazione, come suggerito in [37], è assunto pari a  $K_t = 2,8$ .

La mesh è stata dunque infittita in corrispondenza del foro, zona critica per quanto riguarda il danneggiamento, fino ad ottenere un fattore di concentrazione delle tensioni pari a quello scelto.

Gli elementi finiti utilizzati nella modellazione in Abaqus sono i C3D20R.

Anche in questo caso la simmetria della geometria e del carico consentono di ridurre l'onere computazionale modellando solamente un ottavo del provino e introducendo opportuni vincoli di simmetria lungo le tre direzioni principali.

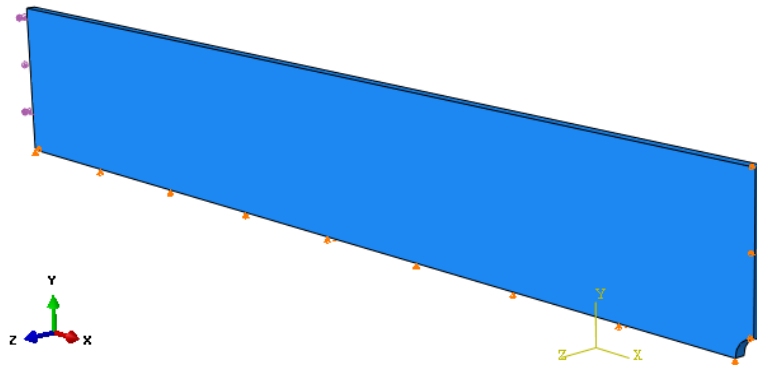


Figura 7.31: Modellazione di un ottavo del provino in Abaqus 6.12

Data la distribuzione delle tensioni in corrispondenza del foro centrale, la trattazione di Lamaitre e Chaboche nella sua formulazione monodimensionale perde di significato. I confronti vengono pertanto fatti solamente tra i risultati sperimentali forniti dal Military Handbook 5J [40] e quelli prodotti dall'analisi agli elementi finiti.

Le curve sperimentali riprodotte sono illustrate in Figura 7.33.

Come in precedenza, è stata effettuata la trasformazione dell'unità di misura dell'asse delle ordinate da ksi a MPa, per consentire i successivi confronti, ottenendo il grafico rappresentato in Figura 7.34.



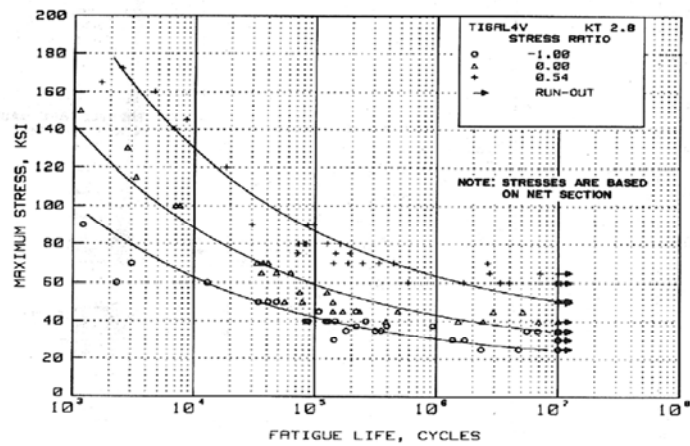


Figura 7.32: Curve S-N per la lega di titanio invecchiata, per provino con intaglio e  $K_t = 2,8$  [40]

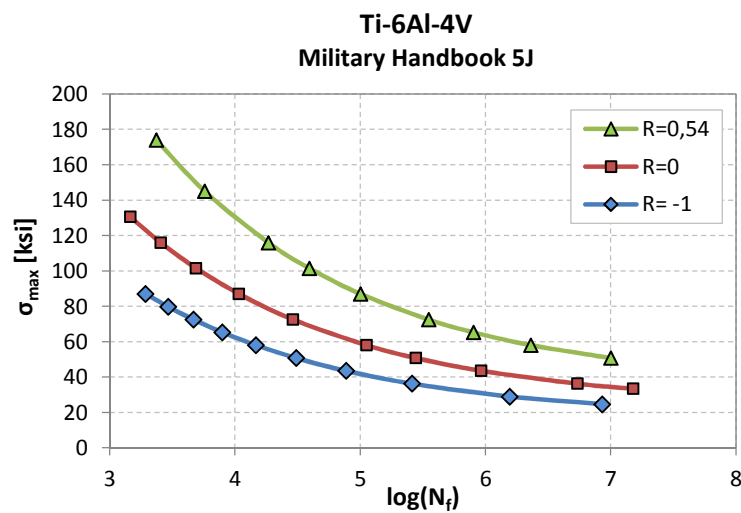


Figura 7.33: Curve S-N sperimentali del Ti-6Al-4V in ksi

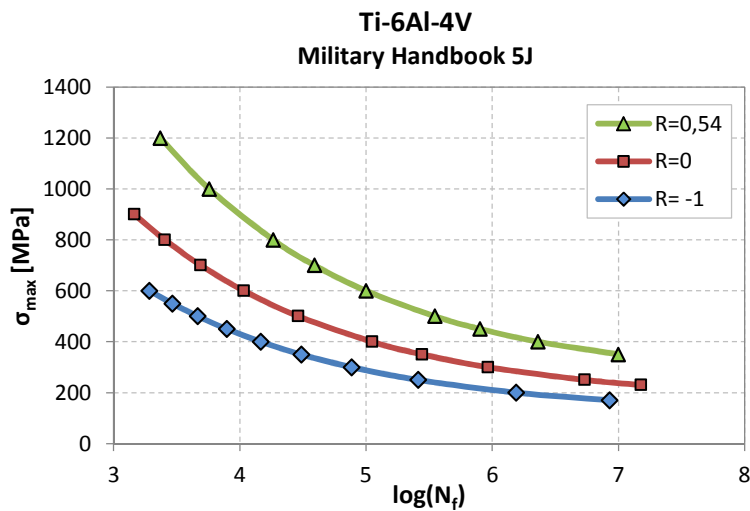


Figura 7.34: Curve S-N sperimentali del Ti-6Al-4V in MPa

Come per il provino a clessidra, si valutano le differenze tra i risultati sperimentali e quelli ottenuti dall'analisi degli elementi finiti; in questo caso si riporta il grafico di confronto per un solo valore del rapporto di tensione, pari a  $R = -1$ .

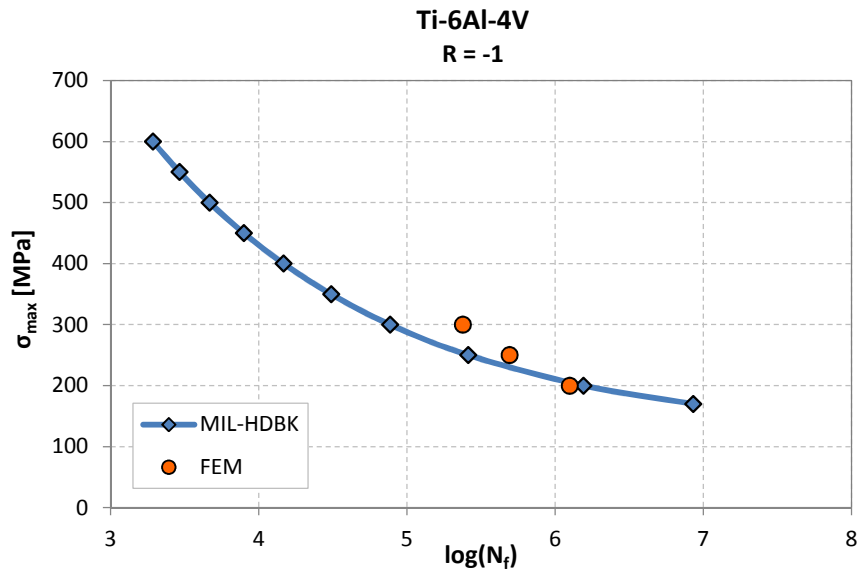


Figura 7.35: Vita a fatica della lastra forata in Ti-6Al-4V per  $R = -1$

Risultati analoghi si ritrovano anche nelle analisi e nei test di laboratorio condotti da Marmi e riportati in [37].

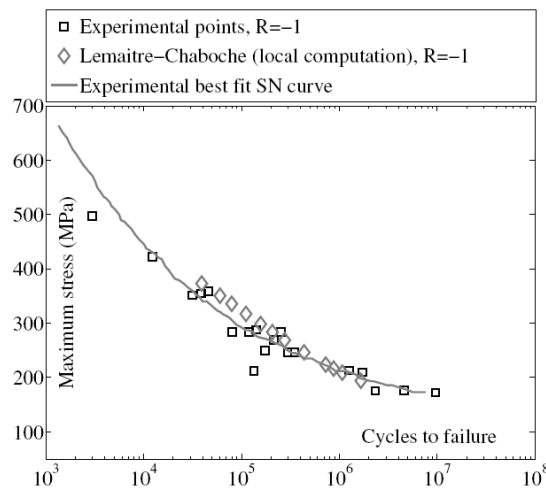


Figura 7.36: Dati sperimentali e previsioni con il modello NLCD implementato agli elementi finiti, disaccoppiato dalla legge costitutiva del materiale [37]

Per il caso  $R = 0$  e tensione applicata  $\sigma = 200$  MPa si riporta il contour della variabile di danno al raggiungimento del valore unitario: il danneggiamento si localizza in corrispondenza del bordo superiore del foro, dove le tensioni raggiungono valori massimi.

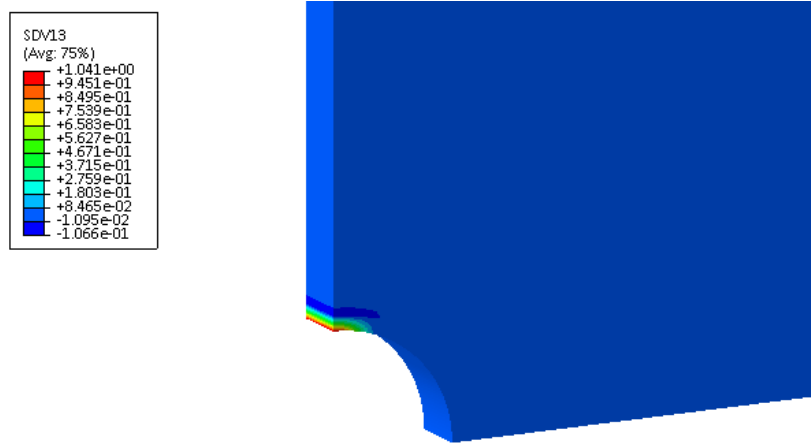


Figura 7.37: Contour della variabile di danno  $D$

L'effetto dell'accoppiamento danno-elasticità si riflette nella redistribuzione delle tensioni, che migrano dagli elementi critici a quelli vicini meno danneggiati.

In Figura 7.38, Figura 7.39 e Figura 7.40 sono riportati i contour dell'ampiezza di tensione multiassiale  $A_{II}$  in momenti diversi dell'analisi, per il caso  $R = 0$  e tensione applicata  $\sigma = 200$  MPa.

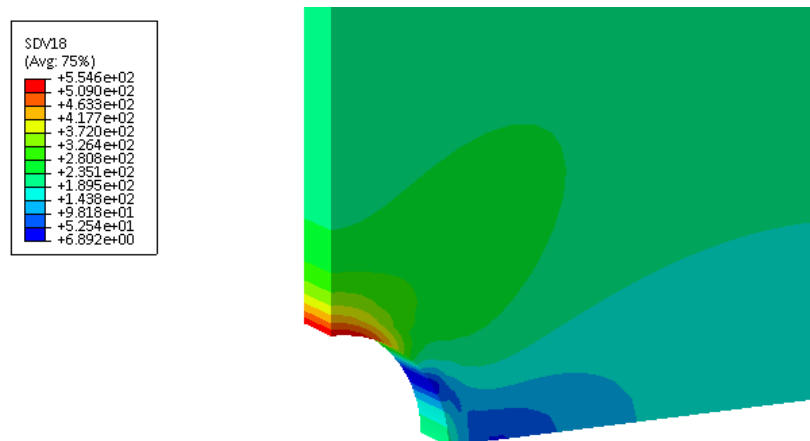


Figura 7.38: Contour di  $A_{II}$  all'inizio del danneggiamento

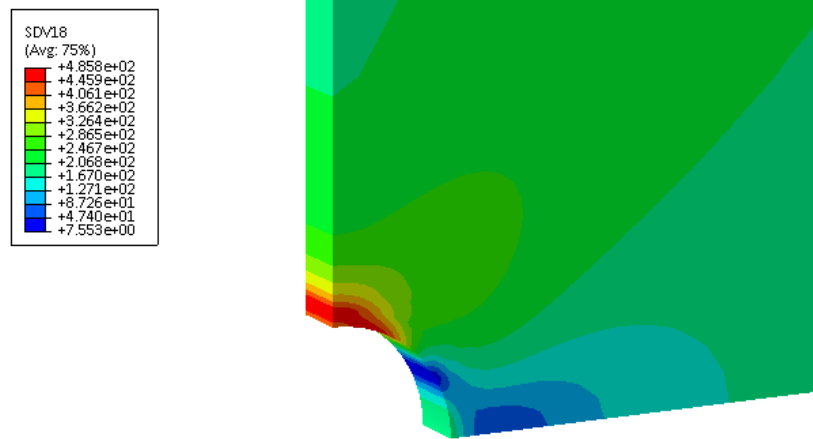


Figura 7.39: Contour di  $A_{II}$  in un ciclo intermedio

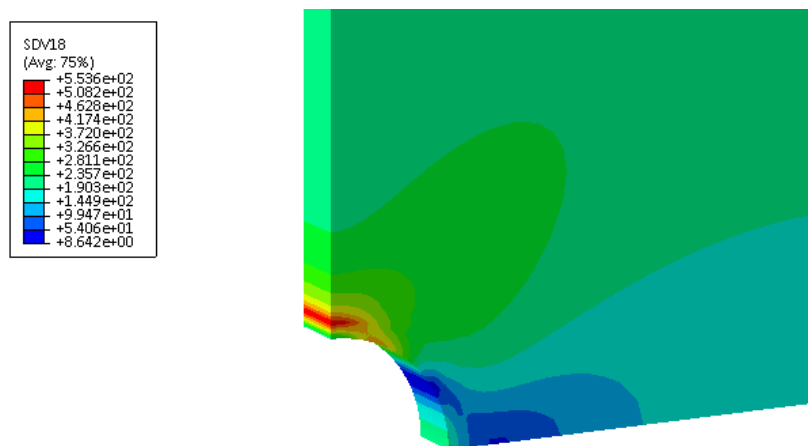


Figura 7.40: Contour di  $A_{II}$  al termine della vita a fatica

L'effetto di softening del materiale nei punti *hot spot* può essere messo in evidenza anche rappresentando in momenti diversi dell'analisi l'andamento delle tensioni, in direzione trasversale rispetto all'applicazione del carico, nella zona critica a partire dal bordo del foro.

Si riportano il grafico dell'evoluzione del danneggiamento, in Figura 7.41, e quello relativo alla contemporanea variazione dell'ampiezza di tensione, in Figura 7.42, indicando con  $y$  la distanza dal foro.

Il picco e il successivo decadimento delle tensioni rappresentano il forte gradiente tensionale che caratterizza la zona in prossimità del foro. In particolare si osserva come le tensioni in corrispondenza del foro diminuiscano progressivamente dagli iniziali valori massimi all'avanzare dell'analisi, mentre contemporaneamente il picco di tensione si allontana dal bordo del foro, spostandosi sugli elementi vicini.

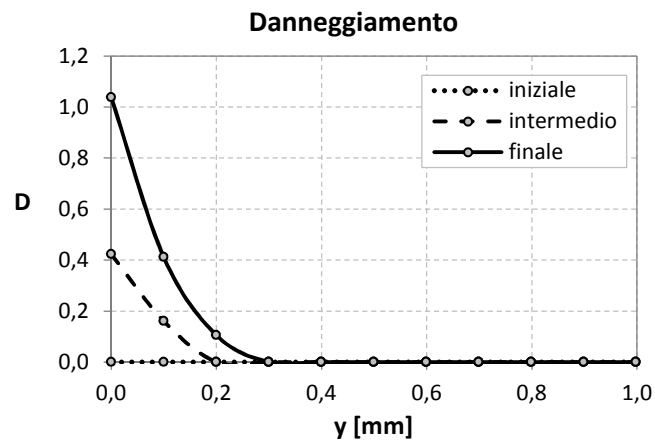


Figura 7.41: Variabile di danno durante l'analisi nell'intorno del foro

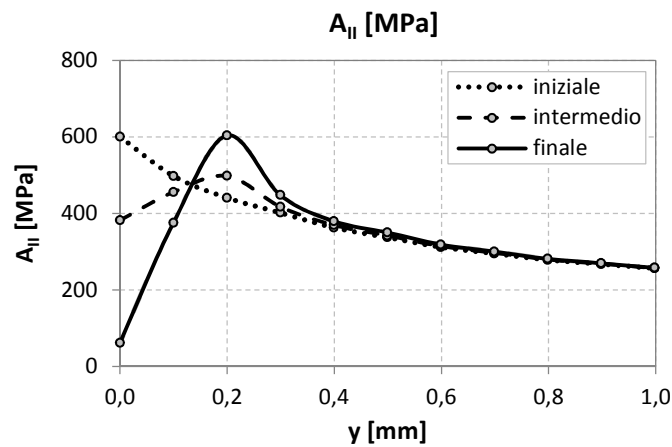


Figura 7.42: Ampiezza di tensione durante l'analisi nell'intorno del foro



## *Capitolo 8*

# ***LA FATICA NELLE SALDATURE***

### **8.1 I GIUNTI SALDATI**

I giunti hanno il compito di trasmettere i carichi tra gli elementi strutturali e si differenziano per le modalità con cui avviene tale trasferimento.

Le unioni saldate presentano caratteristiche specifiche che le distinguono dai giunti meccanici, realizzati con bulloni, rivetti e perni: si considera che esse realizzino una connessione integrale piuttosto che un collegamento tra diversi elementi di una struttura. La saldatura è, infatti, un processo di giunzione che consente di unire elementi metallici in modo permanente, realizzando la continuità del materiale mediante fusione.

Il processo prevede la presenza del materiale base dei pezzi da collegare e quello di apporto, se presente, ossia il materiale introdotto allo stato fuso tra gli elementi da unire. La realizzazione della saldatura si differenzia a seconda della tecnica realizzativa utilizzata per ottenere la sorgente termica e delle modalità di protezione del bagno fuso.

Con riferimento al procedimento di saldatura adottato si distinguono:

- processi autogeni, in cui il metallo dei pezzi da collegare partecipa per fusione, con l'eventuale materiale di apporto, alla realizzazione dell'unione;
- processi eterogeni, nei quali si ha fusione del solo materiale di apporto ad una temperatura di fusione inferiore a quella del metallo base.

In generale, come conseguenza dei fenomeni metallurgici che avvengono durante la realizzazione, come la solidificazione del materiale fuso e la sollecitazione termica del materiale di

base che circonda la saldatura, possono essere introdotti difetti che pregiudicano il funzionamento statico delle saldature, la cui eventuale presenza deve essere accertata attraverso opportune indagini, solitamente di tipo non distruttivo allo scopo di non alterare il funzionamento statico dell'unione in esercizio. Si distinguono in particolare:

- cricche a caldo;
- cricche a freddo;
- strappi lamellari;
- inclusioni;
- eccesso di sovrametallo;
- disassamento dei lembi.

### 8.1.1 Geometria e terminologia

La nomenclatura delle parti che caratterizzano una saldatura sono riportate in Figura 8.1, in cui si distinguono il metallo base, il metallo della saldatura e la zona soggetta al calore durante l'operazione.

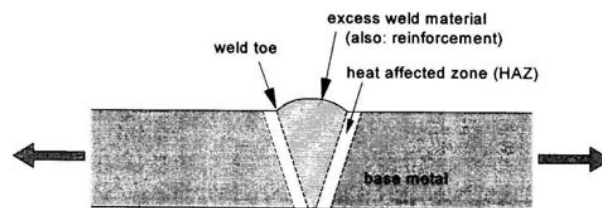


Figura 8.1: Termini che individuano le parti di un'unioni saldata di testa

Nei giunti testa a testa, in assenza di difetti interni e con la sollecitazione di trazione perpendicolare all'asse dell'elemento, lo stato tensionale può considerarsi quello di un pezzo continuo di lunghezza pari a quella del cordone di saldatura e larghezza uguale al minore dei due spessori collegati in prossimità della saldatura stessa, come mostrato in Figura 8.2.

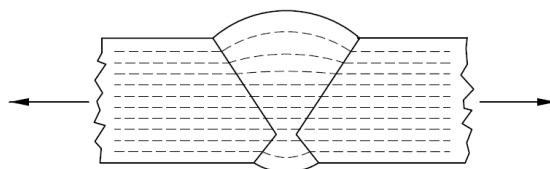


Figura 8.2: Giunto testa a testa e distribuzione delle tensioni



Nei giunti a cordone d'angolo la sezione resistente, indicata come sezione di gola, viene identificata dalla lunghezza del cordone di saldatura e dall'altezza di gola, individuata tracciando l'altezza del triangolo inscritto nella sezione trasversale del cordone.

Le tensioni agenti in tale sezione, visibili in Figura 8.3, sono indicate con la seguente simbologia:

- $\sigma_{\perp}$  tensione che agisce in direzione normale alla sezione di gola;
- $\tau_{\perp}$  tensione che agisce nella sezione di gola, in direzione perpendicolare all'asse del cordone;
- $\tau_{\parallel}$  tensione che agisce nella sezione di gola, in direzione parallela all'asse del cordone;
- $\sigma_{\parallel}$  tensione che in direzione parallela all'asse del cordone, sulla sua sezione trasversale.

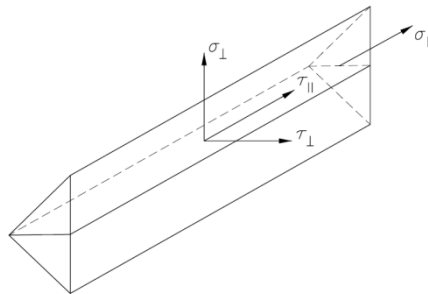


Figura 8.3: Stato tensionale nella sezione di gola

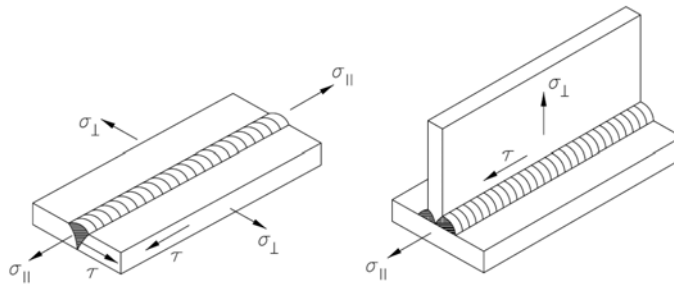


Figura 8.4: Tensioni nei cordoni di saldatura

### 8.1.2 Classificazione

In funzione della posizione reciproca dei pezzi da collegare si possono avere diverse tipologie di giunto, rappresentate in Figura 8.5.

Con riferimento alla posizione del cordoni di saldatura, che costituiscono gli elementi resistenti dell'unione saldata, si distinguono inoltre cordoni laterali, frontali e obliqui, come mostrato in Figura 8.6.

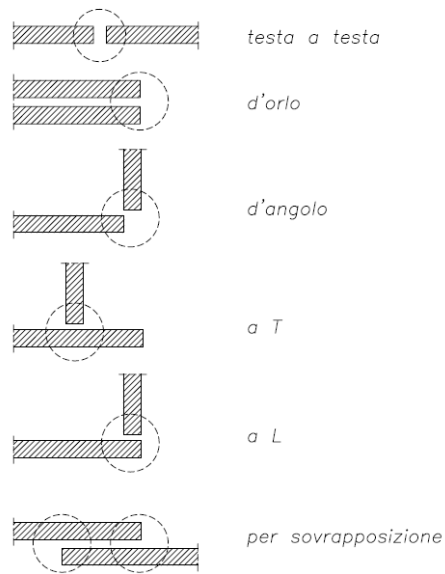


Figura 8.5: Classificazione in funzione della posizione dei pezzi da saldare

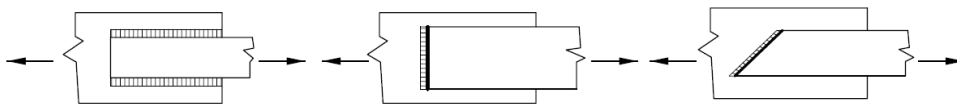


Figura 8.6: Classificazione in funzione della posizione dei cordoni rispetto alla sollecitazione agente

In base alla geometria della saldatura si distinguono inoltre saldature a cordone d'angolo e saldature di testa, quest'ultime ulteriormente classificabili in saldature a completa e parziale penetrazione.

## 8.2 COMPORTAMENTO A FATICA

Nel caso di azioni cicliche assume particolare importanza la progettazione a fatica sia nel caso di elevato numero di cicli che nel caso di fatica oligociclica, in quanto le zone di saldatura, a causa della concentrazione degli sforzi, risultano sedi preferenziali per l'innesco e la propagazione di cricche.

La concentrazione di tensione si localizza in corrispondenza del piede e della radice: il valore del fattore di concentrazione  $K_t$  dipende dalla geometria, assumendo in generale valori maggiori per le saldature a cordone rispetto a quelle di testa.

I dati sperimentali mostrano sostanzialmente l'indipendenza della resistenza a fatica dal tipo di materiale, producendo valori simili per diversi metalli di saldatura [25].

I due fattori che influenzano maggiormente il comportamento delle unioni saldate sono la concentrazione degli sforzi dovuta alla geometria e le tensioni residue.

### 8.2.1 Rinforzo

Nelle saldature di testa, il profilo assunto dal materiale saldato, detto rinforzo, influenza la resistenza a fatica del giunto in funzione dell'angolo formato con il piatto di materiale base in corrispondenza del piede della saldatura, come dimostrato dai dati sperimentali riportati nel grafico in Figura 8.7. L'effetto prodotto dal rinforzo è negativo, costituendo di fatto un eccesso di materiale, e la sua completa rimozione consente di ottenere un comportamento prossimo a quello del metallo base.

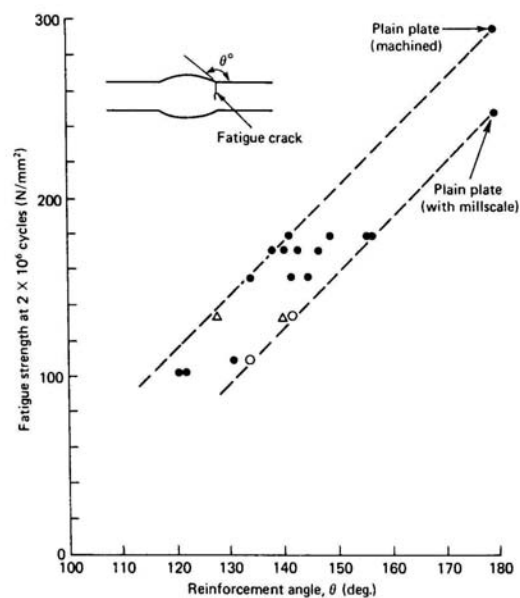


Figura 8.7: Effetto dell'angolo di rinforzo sulla resistenza a fatica di un'unione saldata di testa

### 8.2.2 Difetti

È importante ricordare che la presenza o meno di difetti nelle saldature determina la qualità della saldatura stessa e ne influenza il comportamento nei confronti del fenomeno della fatica. I difetti più frequenti nelle saldature, come l'erosione in corrispondenza del piede, le inclusioni, la mancata fusione e l'assenza di penetrazione, sono rappresentate in Figura 8.8.

A questi problemi si aggiungono l'insufficienza della sezione di gola e la possibilità di fessurazione durante la solidificazione.

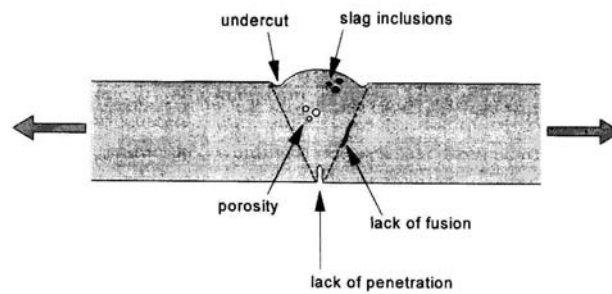


Figura 8.8: Difetti in un'unioni saldata di testa

### 8.2.3 Sollecitazioni termiche

Altro aspetto tipico delle saldature è l'influenza delle sollecitazioni termiche: durante il processo il materiale con cui viene realizzata l'unioni passa dalla temperatura di fusione a quella ambiente, tendendo a contrarsi durante il raffreddamento, ma è contemporaneamente vincolato dal materiale circostante a temperatura inferiore. Ciò comporta la nascita di tensioni residue, dipendenti dalla tecnica di realizzazione e dalla geometria del pezzo, ed in particolare di tensioni di trazione sia nella direzione della saldatura che perpendicolarmente ad essa, come mostrato in Figura 8.9.

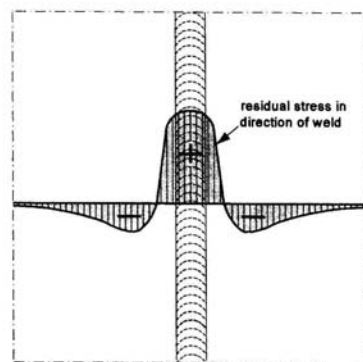


Figura 8.9: Distribuzione delle tensioni residue in un'unioni saldata di testa

### 8.2.4 Miglioramento della resistenza

I metodi per migliorare la resistenza a fatica delle saldature sono:

- perfezionamento della procedura di saldatura;
- alterazione della microstruttura del materiale;
- riduzione delle discontinuità geometriche;
- induzione di autotensioni superficiali di compressione.

Dal momento che, come detto in precedenza, i cambiamenti nel comportamento dell'unione saldata sono minimi al variare del metallo impiegato, assumono maggior peso gli ultimi due punti.

Il primo intervento è relativo alla rimozione del rinforzo nelle saldature di testa: l'operazione può essere svolta rapidamente tramite mola. In generale lo stesso trattamento deve essere effettuato in tutti i punti di inizio e fine saldatura o di possibili irregolarità, evitando di creare saldature che si intersecano, con forti variazioni di rigidità o con superfici non lisce. Infine è da evitare la mancata penetrazione che costituisce un sito preferenziale per l'innescò della cricca.

Per quanto riguarda la realizzazione di tensioni residue superficiali di compressione, si utilizzano tecniche come la pallinatura e la rullatura, tuttavia gli effetti ottenuti non sono sempre garantiti a causa del possibile rilassamento delle tensioni nei metalli a bassa resistenza, sotto carico ciclico.

### 8.3 METODI DI CALCOLO

Lo studio del comportamento a fatica delle unioni saldate può essere effettuato con diversi metodi per la valutazione delle tensioni agenti e del numero di cicli a rottura.

Secondo l'approccio di similitudine [46], livelli di tensione simili nella struttura e nel provino saldato determinano analoghe vita a fatica. Questo concetto può essere utilizzato nel caso in cui la vita a fatica sia per la maggior parte interessata dalla fase di formazione della cricca, che comprende la nucleazione delle microcricche e la loro crescita fino a che tale processo può essere considerato un fenomeno superficiale. A tale periodo segue la fase di sviluppo della cricca che riguarda invece l'accrescimento e la propagazione della macrocricca così formata.

Sfortunatamente, le cricche in un giunto saldato spesso si formano da qualche difetto nelle fasi iniziali della vita a fatica: in questi casi si considera trascurabile la fase iniziale di formazione della cricca e si fa coincidere la vita a fatica con la sola fase di accrescimento della cricca. Tale assunzione è valida se la nucleazione della cricca avviene in corrispondenza di un difetto del materiale o nella geometria della saldatura.

La previsione dello stato di tensione nelle saldature assume primaria importanza al fine di evitare pericolose sottostime dello stato di sollecitazione dell'unione.

La valutazione delle tensioni può avvenire con uno dei metodi di calcolo di seguito elencati, avendo l'accortezza di individuare caso per caso la metodologia più adatta all'oggetto di studio e allo scopo dell'analisi.

I metodi più diffusi sono:

- metodo delle tensioni nominali o *nominal stress approach*;
- metodo delle tensioni strutturali o *hot spot stress approach*;

- metodo delle tensioni di picco o *effective notch stress approach*;
- metodo della meccanica della frattura o *crack propagation approach*.

Il primo metodo è di tipo globale e si basa sulle tensioni nominali ricavate nella sezione critica in esame, sotto l'ipotesi di una distribuzione di tensione costante. Sulla base di prove sperimentali, ai dettagli saldati è assegnata una resistenza a fatica ed essi sono poi raggruppati in classi caratterizzate da valori simili di resistenza. A seconda delle sollecitazioni a cui è sottoposto il pezzo, si ricava la vita a fatica attraverso le curve S-N dello specifico dettaglio. Tale approccio è quindi quello utilizzato nella normativa di riferimento [49] e già discusso al Capitolo 5.

Da un punto di vista applicativo risulta il più semplice, tuttavia la sua incapacità di considerare gli effetti locali e la geometria della saldatura lo rende spesso inapplicabile ai casi reali che si incontrano nella pratica costruttiva, limitandolo ai soli dettagli classificati e alle saldature di qualità uniforme.

Il metodo delle tensioni strutturali è un metodo di tipo locale e consente di considerare gli effetti legati alla macro-geometria dell'unione e l'incremento tensionale ad essa dovuto, nel punto di potenziale inizio della cricca, escludendo il picco locale di tensione non lineare causato dall'intaglio al piede della saldatura. Anche questo approccio è ripreso dalla normativa [49] attraverso apposite curve S-N, che tengono conto dell'effetto di intaglio dovuto alla geometria della saldatura, solitamente non nota in fase di progetto, attribuendo ai dettagli una classe di resistenza inferiore.

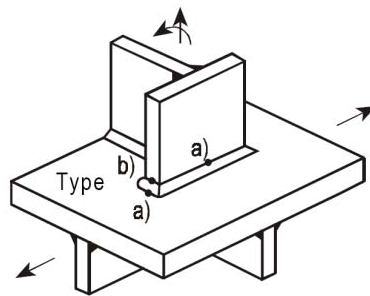


Figura 8.10: Punti di concentrazione delle tensioni

Il metodo ha come obiettivo la determinazione di una distribuzione di tensione lineare nella sezione trasversale del piano di frattura: la tensione *hot spot* è determinata a partire dalle tensioni nominali includendo gli effetti di concentrazione delle tensioni dovuti alla geometria del dettaglio; ciò avviene moltiplicando le tensioni nominali per un coefficiente, indicato come SCF, *Stress Concentration Factor*, dipendente appunto dalla macro-geometria. In alternativa la tensione può essere ricavata da misurazione in test sperimentali oppure dall'analisi agli elementi finiti e dalla

successiva estrapolazione lineare delle tensioni sulla superficie o con una linearizzazione nello spessore.

Una descrizione estesa del metodo delle tensioni di picco e di quello della meccanica della frattura è contenuta in [26], [30],[31].

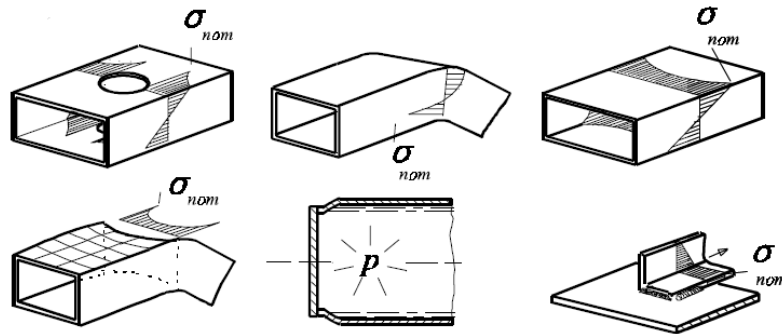


Figura 8.11: Esempi di effetti macro-geometrici





# *Capitolo 9*

## ***APPLICAZIONE DEL MODELLO NLCD***

### **9.1 ESEMPI APPLICATIVI**

Una volta conclusa la validazione, esposta al Capitolo 7, si applica il codice scritto, che implementa il modello NLCD, a casi reali di dettagli saldati, per ricavare previsioni sulla vita a fatica dei pezzi.

In particolare, si sceglie di modellare un dettaglio ripreso dalla normativa [15], osservando che rapporto sussiste tra la curva di resistenza proposta dalla norma per la specifica classe e i risultati ottenuti dall'analisi agli elementi finiti con il metodo sviluppato.

Successivamente si riproduce il comportamento di un dettaglio saldato, avente caratteristiche tali da non rientrare tra le categorie individuate nell'Eurocodice 3 [49]: in questo caso i risultati del FEM risultano un valido mezzo per poter fare previsioni relative al numero di cicli a rottura dell'unione, non trovando alcun riscontro nella normativa di riferimento.

In entrambi i casi il materiale ipotizzato per la realizzazione dei pezzi è un acciaio da carpenteria; tale scelta è dettata dalla volontà di avvicinarsi il più possibile a riprodurre elementi che rispecchino la pratica costruttiva e contemporaneamente dalla necessità di effettuare il confronto con le curve S-N della normativa, le quali, come riportato al Capitolo 5, sono valide per gli acciai strutturali.

## 9.2 CARATTERIZZAZIONE DEL MATERIALE

Si è scelto di adottare l'acciaio strutturale S275JR.

Le proprietà meccaniche di questo materiale sono note e riassunte in Tabella 9.1.

Tabella 9.1: Proprietà meccaniche dell'acciaio S275JR

<b>E [MPa]</b>	<b><math>\nu</math></b>	<b><math>f_y</math> [MPa]</b>	<b><math>f_u</math> [MPa]</b>
200000	0.3	275	415

Per l'implementazione del modello NLCD queste informazioni non sono sufficienti: il metodo richiede infatti dei parametri specifici relativi al comportamento a fatica, non noti per questo tipo di acciaio. La determinazione di tali valori, di cui si è già discusso al paragrafo 6.3.2, è basata sul confronto tra le curve di Wöhler per il materiale in esame, ricavate a partire da test di laboratorio.

Mentre per la lega in titanio Ti-6Al-4V, utilizzata nella validazione del codice, i parametri sono noti, grazie all'esistenza di studi precedenti e di estese indagini sperimentali [37], [40], per gli acciai da carpenteria non sono presenti dati utilizzabili in tal senso. La carenza di informazioni è giustificabile considerando che il fenomeno della fatica è stato a lungo indagato nell'ambito dell'ingegneria meccanica e aerospaziale, mentre la scoperta dell'importanza di questo tipo di rottura anche per le strutture civili è relativamente recente.

Non potendo disporre dei risultati di test a fatica per provini in S275JR, si ricorre ai dati contenuti in letteratura [7], per il corrispondente acciaio nella classificazione americana dell'ASTM, *American Society for Testing and Materials*.

Il materiale a cui si fa riferimento è dunque l'ASTM A36, la cui composizione chimica esatta è riportata nella Tabella 9.2.

Tabella 9.2: Composizione chimica dell'acciaio ASTM A36 in percentuali del peso totale [7]

<b>Simbolo</b>	<b>Elemento</b>	<b>Peso %</b>
C	carbonio	0.21
Mn	manganese	1.10
P	fosforo	0.12
Cu	rame	0.10
S	zolfo	0.021
Si	silicio	<0.10
Ni	nicel	<0.10
Mo	molibdeno	<0.10
Cr	cromo	<0.08

Questo materiale presenta buona compatibilità con l'acciaio S275JR sia per quanto riguarda il comportamento meccanico che per le modalità di impiego: esso viene comunemente utilizzato come acciaio strutturale per la realizzazione di piatti, barre e lamine ed è caratterizzato da una buona saldabilità.

I test sull'ASTM A36 sono stati condotti nell'ambito dell'attività di sperimentazione dell'Università dell'Illinois, nell'interno del Fracture Control Program, programma di ricerca istituito nel 1971 allo scopo di sviluppare modelli di fatica e frattura, basati su un'affidabile definizione del comportamento dei materiali da utilizzare nella progettazione e per la costruzione di componenti richiesti nella pratica ingegneristica. In particolare le prove relative all'acciaio utilizzato nella presente trattazione sono contenute nel Report 29 [7], in cui viene caratterizzato il materiale base delle saldature per indagare gli effetti delle tensioni residue su di esse.

I grafici prodotti dall'Università dell'Illinois legano le deformazioni misurate con il numero di cicli a fatica; necessitando delle curve di Wöhler corrispondenti, si è provveduto alla conversione dei dati in termini di tensione, con l'ausilio del database gratuito [www.efatigue.com](http://www.efatigue.com).

In questo modo si è potuto ottenere il comportamento a fatica dell'ASTM A36, descritto dai valori della tensione ultima a trazione e di quella limite per  $\bar{\sigma} = 0$ , cioè per sollecitazione alternata simmetrica con  $R = -1$ . I risultati sono riportati in Tabella 9.3.

Tabella 9.3: Tensione ultima e tensione limite per  $R=-1$  dell'acciaio ASTM A36

$\sigma_u$ [MPa]	$\sigma_{10}$ [MPa]
415	149

L'equazione della curva S-N, sempre nel caso  $R = -1$ , ricavata dai dati che legano le tensioni e il numero di cicli a rottura, è la seguente:

$$N_f = 925\sigma_a^{-0,132}$$

La rappresentazione grafica della curva in un diagramma semilogaritmico è riportata in Figura 9.1.

Si sottolinea che il limite di fatica indicato è la tensione associata ad un numero di cicli pari a  $2 \cdot 10^6$ , valore tradizionalmente assunto per i materiali metallici. L'espressione della curva S-N fornita rappresenta, quindi, il comportamento dell'acciaio limitatamente al regime HCF: per una completa caratterizzazione del materiale sarebbe necessario estendere la sperimentazione al campo VHCF e ricavare l'andamento della curva anche per questo tratto.

Attualmente i dati a disposizione non consentono di effettuare alcuna considerazione sul comportamento del materiale oltre il limite  $N = 2 \cdot 10^6$  cicli.

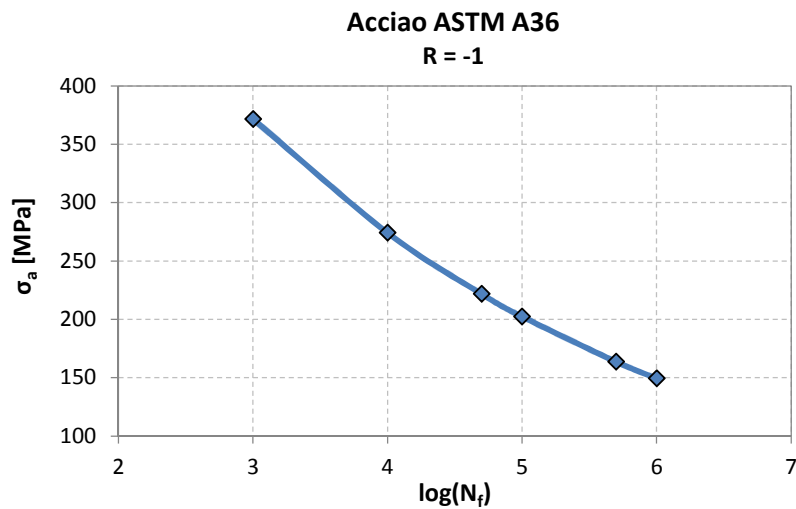


Figura 9.1: Curva S-N per R = -1 dell'acciaio ASTM A36

### 9.2.1 Determinazione dei parametri

Per la determinazione dei parametri NLCD si applica il procedimento descritto al paragrafo 6.3.2, ricavando singolarmente ciascun coefficiente.

Si considera la soluzione teorica di Lamaitre e Chaboche, che fornisce l'espressione della formula integrata, riscritta nel caso di carico completamente invertito con  $R = -1$  e  $\bar{\sigma} = 0$ :

$$N_f = \frac{1}{\beta + 1} \frac{1}{aM_0^{-\beta}} \frac{\langle \sigma_u - \sigma_{max} \rangle}{\langle \sigma_a - \sigma_{l_0} \rangle} (\sigma_a)^{-\beta}$$

Questa scrittura, avendo tensione media nulla, risulta semplificata e funzione solamente di  $\beta$  e  $aM_0^{-\beta}$ . Si procede quindi al confronto dell'equazione teorica, che lega  $\sigma_a$  e  $N_f$ , riscritta in forma logaritmica, con la curva S-N sperimentale del materiale per  $\bar{\sigma} = 0$  ricavata dal Report 29 [7]. Facendo variare i valori di  $\beta$  e  $aM_0^{-\beta}$  si modificano la pendenza e l'intercetta della linea di tendenza fino a far coincidere le due curve, come mostrato in Figura 9.2.

I valori dei parametri così ottenuti sono riassunti in Tabella 9.4.

Tabella 9.4: Parametri dell'acciaio ASTM A36 per il modello NLCD

$\beta$	$aM_0^{-\beta}$
2.25	$9.61 \times 10^{-11}$

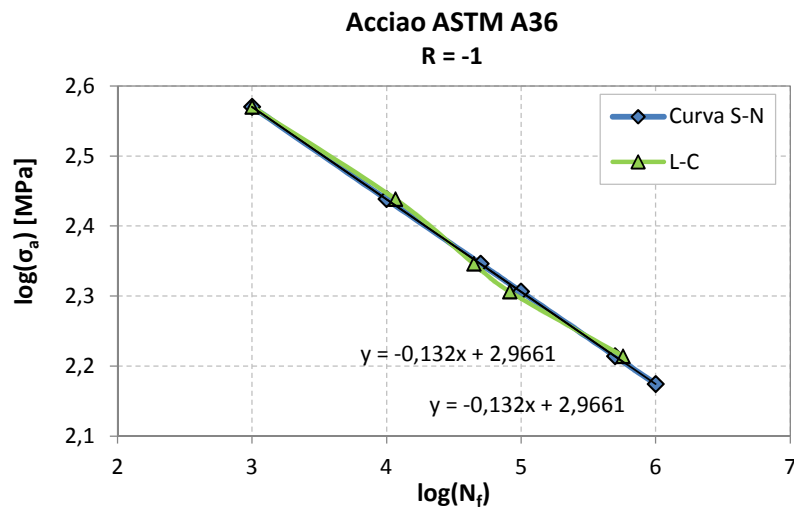


Figura 9.2: Curva S-N teorica dal modello di Lemaitre e Chaboche e curva sperimentale da [7]

I dati delle prove sperimentali a disposizione si riferiscono al solo caso di carico completamente invertito, non sufficiente per la determinazione dei parametri  $b_1$  e  $b_2$ , i quali derivano dal confronto con un'altra curva S-N avente tensione media non nulla. Per assumere dei valori ragionevoli per tali coefficienti si fanno quindi alcune considerazioni basate su quanto reperito in letteratura [13].

Il parametro  $b_1$  deriva dalla scrittura della relazione lineare di Goodman:

$$\sigma_l(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} + \sigma_{l_0} \left(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_u}\right)$$

$$\sigma_l(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} + \sigma_{l_0}(1 - b_1)$$

Dal confronto delle due espressioni si vede come  $b_1$  rappresenti l'effetto della tensione media sul limite di fatica, tenendo conto sia della sua riduzione a causa di una tensione media di trazione sia dell'influenza positiva di una  $\bar{\sigma}$  di compressione. Il coefficiente è quindi esprimibile come:

$$b_1 = \frac{1}{\sigma_u}$$

Per il parametro  $b_2$  non sono presenti espressioni derivanti dalla teoria, ma esso viene ricavato esclusivamente dal confronto tra le curve sperimentali; in assenza di esse si adotta un valore verosimile, relativo ad un acciaio avente caratteristiche meccaniche vicine a quelle dell'ASTM A36 e riportato in letteratura [13].

Analogamente il coefficiente  $a$ , per la cui misurazione Lemaitre e Chaboche propongono alcuni metodi sperimentali [12], viene assunto in base alle indicazioni contenute in [13] per un acciaio simile a quello utilizzato nella presente trattazione.

I valori ottenuti sono riassunti in Tabella 9.5.

Tabella 9.5: Parametri dell'acciaio ASTM A36 per il modello NLCD

$b_1$	$b_2$	$a$
0.0023	0.0029	0.138

### 9.2.2 Limiti di validità

Si sottolinea che, data la mancanza di dati sperimentali per il materiale metallico scelto, la determinazione dei parametri del modello NLCD, pur basata su assunzioni ragionevoli, si fonda su ipotesi semplificative che si appoggiano su formule teoriche, supportate da dati disponibili per altri acciai.

Per proseguire negli studi e nell'impiego del metodo di Lemaitre e Chaboche applicato alla modellazione agli elementi finiti, risulta necessario effettuare una caratterizzazione completa del materiale basata su test di laboratorio, che consentano di identificare le effettive curve S-N per l'acciaio S275JR e quindi di confermare, ed eventualmente correggere, i parametri ricavati nella presente trattazione. Una campagna sperimentale condotta in tal senso consentirebbe di fornire dati caratterizzati da minore incertezza come supporto alla simulazione numerica.

Si ricorda comunque che, ai fini del lavoro svolto, avendo come obiettivo principale l'implementazione del metodo proposto e non la caratterizzazione di uno specifico materiale metallico, la determinazione approssimata delle proprietà dell'acciaio e dei coefficienti associati al suo comportamento a fatica risulta una semplificazione più che accettabile.

## 9.3 DETTAGLIO SALDATO

La prima applicazione del modello è effettuata su un dettaglio presente in normativa, per poter disporre della curva di resistenza in essa proposta come termine di paragone per i risultati ottenuti dall'analisi FEM.

Il caso scelto è quello di una sezione a doppio T, costituita da tre piatti saldati, in cui le saldature longitudinali sono a cordone d'angolo o a piena penetrazione e sono sollecitate parallelamente allo sviluppo della saldatura stessa. A questo tipo di unione corrispondono tre diverse classi di dettaglio a seconda della modalità di esecuzione della saldatura e della presenza o meno di interruzioni e riprese nella sua realizzazione: FAT 125, FAT 112 e FAT 100.

La Figura 9.3: Classificazione del dettaglio saldato [15] Figura 9.3 riporta l'estratto della norma [15] contenente la tabella per la classificazione del dettaglio in esame.

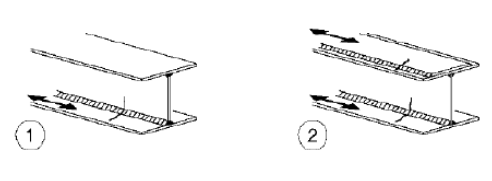
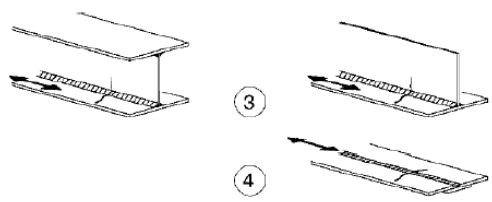

Classe del dettaglio	Dettaglio costruttivo	Descrizione	Requisiti
125		Saldatura longitudinali continue  1) Saldatura automatica a piena penetrazione effettuata da entrambi i lati  2) Saldatura automatica a cordoni d'angolo. Le parti terminali dei piattoli di rinforzo devono essere verificate considerando i dettagli 5) e 6) della tabella C4.2.XXI	1) e 2) Non sono consentite interruzioni/riprese, a meno che la riparazione sia eseguita da un tecnico qualificato e siano eseguiti controlli atti a verificare la corretta esecuzione della riparazione
112		3) Saldatura automatica a cordoni d'angolo o a piena penetrazione effettuata da entrambi i lati, ma contenente punti di interruzione/ripresa.  4) Saldatura automatica a piena penetrazione su piattolo di sostegno, non contenente punti di interruzione/ripresa	4) Se il dettaglio contiene punti di interruzione/ripresa, si deve far riferimento alla classe 100
100		5) Saldatura manuale a cordoni d'angolo o a piena penetrazione  6) Saldatura a piena penetrazione manuale o automatica eseguita da un solo lato, in particolare per travi a cassone	5) e 6) Deve essere assicurato un corretto contatto tra anima e piattabanda. Il bordo dell'anima deve essere preparato in modo da garantire una penetrazione regolare alla radice, senza interruzioni

Figura 9.3: Classificazione del dettaglio saldato [15]

Utilizzando le formule indicate al paragrafo 5.1.2, si sono ricostruite le curve S-N fornite dalla normativa e impiegate nelle verifiche a fatica: in Figura 9.4 sono visibili tali curve per alcune classi di dettaglio.

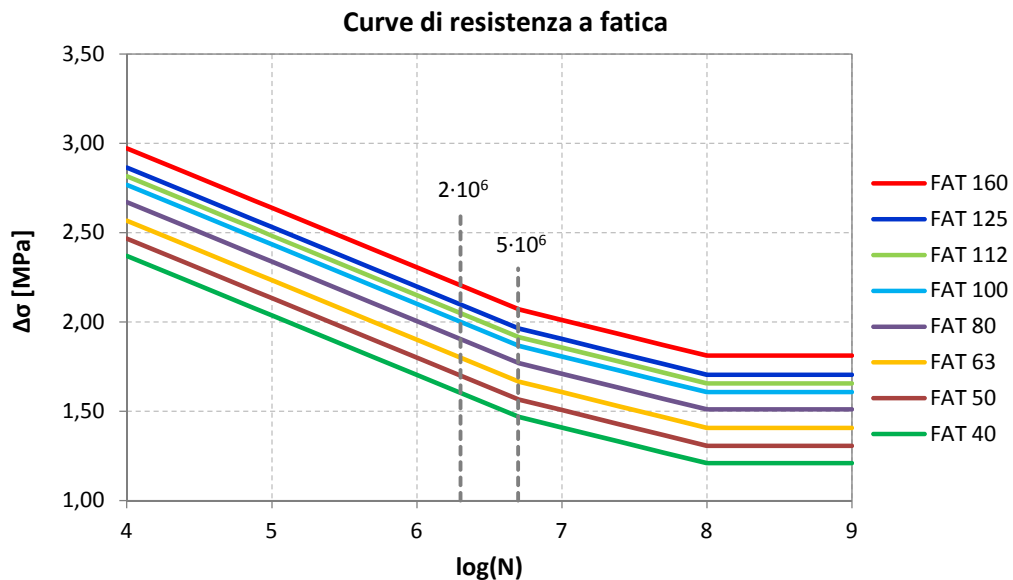


Figura 9.4: Curve S-N per le classi di resistenza della normativa [15]

### 9.3.1 Modellazione

La sezione trasversale del dettaglio riprodotto è rappresentata in Figura 9.5.

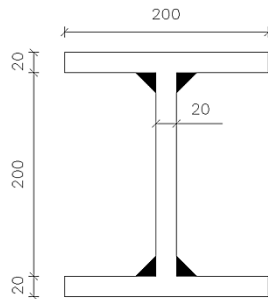


Figura 9.5: Geometria della sezione in mm

Per ricreare nella saldatura lo stato di sollecitazione suggerito dalla norma e indicato dalle frecce nella rappresentazione del dettaglio in Figura 9.3, si vincolano le facce laterali delle ali nei confronti dello scorrimento lungo l'asse longitudinale e si esercita ad un'estremità uno sforzo ciclico di trazione e compressione, applicato alla sola anima della trave.

La mesh viene infittita in corrispondenza delle saldature dove vi è variazione delle condizioni geometriche e conseguente concentrazione delle tensioni.

Gli elementi finiti utilizzati sono i C3D20R, già impiegati per la modellazione del provino a clessidra e della lastra forata al paragrafo 7.3.

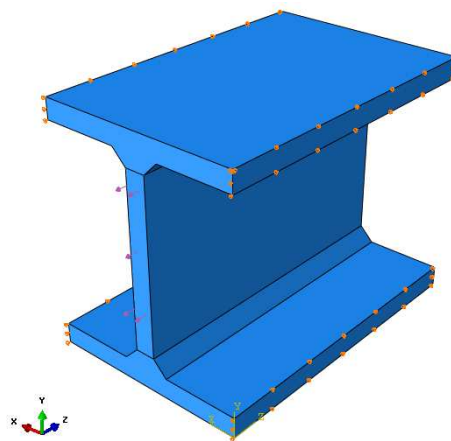


Figura 9.6: Modellazione del dettaglio in Abaqus 6.12



### 9.3.2 Confronto dei risultati

Si è scelto di applicare tre diverse sollecitazioni al modello, tenendo costante il rapporto di inversione  $R = -1$ , ossia assumendo una tensione media nulla, e facendo variare l'ampiezza del carico.

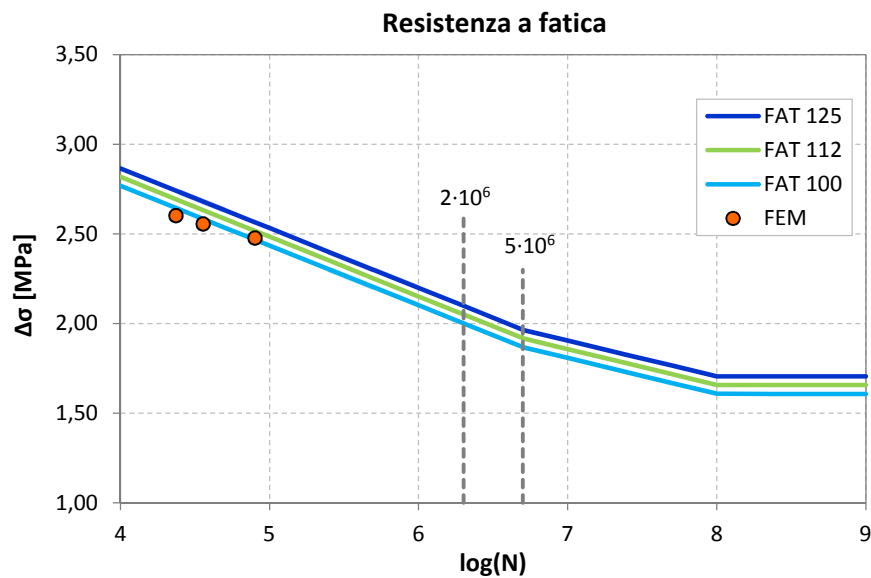


Figura 9.7: Vita a fatica del dettaglio per  $R = -1$

Nel grafico in Figura 9.7 si mettono a confronto tutte e tre le curve della normativa per il dettaglio in esame e i valori ottenuti dall'analisi: i risultati numerici approssimano bene l'andamento delle curve, posizionandosi in prossimità di quella corrispondente alla classe di resistenza inferiore, indicata come FAT 100. Solamente per quest'ultima si riportano i valori esatti del numero di cicli a rottura nella Tabella 9.6.

Tabella 9.6: Confronto tra i valori da normativa e quelli numerici per  $R = -1$

$\Delta\sigma$ [MPa]	EC3	FEM
	$N_f$	$N_f$
300	74074	79938
360	42867	36003
400	31250	23580

L'analisi dei dati sembra suggerire che l'implementazione del metodo di Chaboche fornisce risultati in linea con le curve costruite su base sperimentale della normativa, in particolare fornendo

valori leggermente conservativi. Si ricorda comunque che il modello stima la vita a fatica a meno della fase di propagazione della cricca, inclusa invece nella costruzione delle curve di resistenza.

Si riportano i contour delle variabili più significative: l'inizializzazione della variabile di danno, rappresentata in Figura 9.8, avviene in corrispondenza delle saldature dove è massima la concentrazione di tensione; la Figura 9.9, che mostra i valori di ampiezza di tensione multiassiale durante la vita a fatica, conferma questa osservazione.

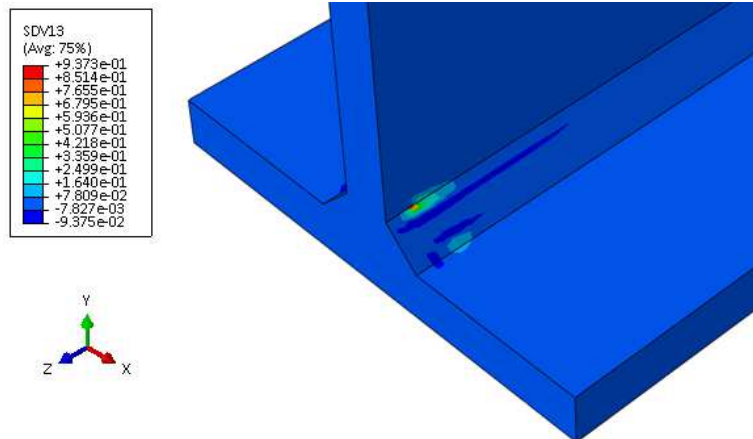


Figura 9.8: Contour della variabile di danno  $D$

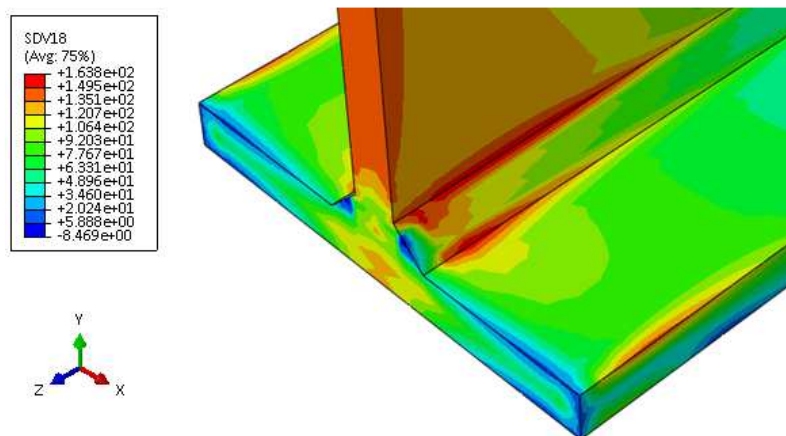


Figura 9.9: Contour di  $A_{II}$  al termine della vita a fatica per  $\sigma = 150$  MPa

## **9.4 DETTAGLIO DEL PORTALE**

Il secondo dettaglio studiato riproduce la geometria di una parte del portale per prove a fatica che dovrà essere realizzato all'interno del Laboratorio per le Prove sui Materiali Strutturali del Dipartimento di Ingegneria Civile Edile ed Ambientale dell'Università di Padova, avente sede in via Marzolo 9.

### **9.4.1 Portale per prove a fatica**

All'interno del laboratorio è presente un attuatore oleodinamico da 1500 kN, di lunghezza 3,09 m in condizioni estese, in grado di imprimere carichi ciclici sui pezzi testati, che può essere utilizzato per condurre verifiche a fatica su componenti strutturali.

Per la realizzazione delle prove e la valutazione della vita residua, l'attuatore deve essere montato su un portale di riscontro, tuttora in fase di progettazione, la cui costruzione consentirà di condurre i test su elementi strutturali completi e di notevoli dimensioni, come travi da ponte, traversi e longherine.

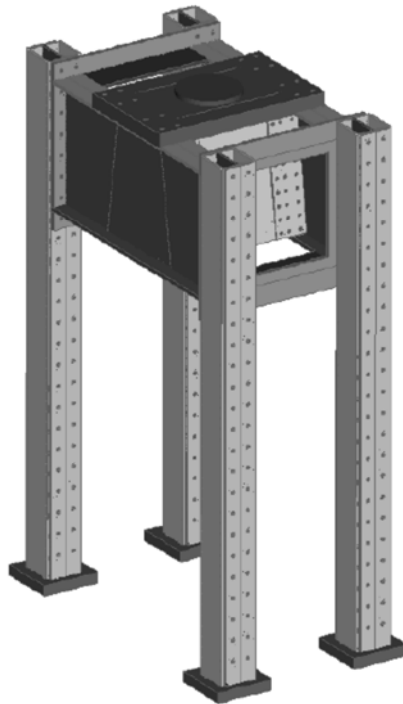


Figura 9.10: Immagine rappresentativa del portale di riscontro



Figura 9.11: Attuatore oleodinamico da 1500 kN

La possibilità di effettuare prove su grandi modelli e parti di strutture reali è molto importante ai fini della previsione della vita a fatica delle strutture progettate e della valutazione di quelle esistenti.

Il report del 2008 del Joint Research Centre della Commissione Europea sulla valutazione delle strutture in acciaio esistenti [35] ha raccolto ed elaborato una grande quantità di informazioni relativa al danneggiamento delle strutture metalliche: secondo i dati, suddivisi a seconda della causa e riassunti nella Tabella 9.7, il motivo primo di danneggiamento per i ponti risulta essere il fenomeno della fatica. In aggiunta a queste valutazioni, uno studio del Comitato ASCE (*American Society of Civil Engineering*) sull'affidabilità delle costruzioni [19], ha sottolineato che circa tra l'80% e il 90% delle rotture nelle strutture metalliche di questo tipo può essere ricondotto a fenomeni di fatica e frattura.

Tabella 9.7: Principali cause di danneggiamento delle strutture metalliche

Damage cause (Multiple denomination possible)	Totality		Buildings		Bridges		Conveyors	
	No	%	No	%	No	%	No	%
Static strength	161	29.7	102	33.6	19	14.8	40	36.0
Stability (local or global)	87	16.0	62	20.4	11	8.6	14	12.6
Fatigue	92	16.9	8	2.6	49	38.3	35	31.5
Rigid body movement	44	8.1	25	8.2	2	1.6	17	15.3
Elastic deformation	15	2.8	14	4.6	1	0.8	0	0
Brittle fracture	15	2.8	9	3.0	5	3.9	1	0.9
Environment	101	18.6	59	19.4	41	32.0	1	0.9
Thermal loads	23	4.2	23	7.6	0	0	0	0
Others	5	0.9	2	0.7	0	0	3	2.7
Sum	543	100	304	100	128	100	111	100

Il dimensionamento e la verifica delle parti che costituiscono la struttura del portale, già oggetto di diverse tesi precedenti [39], [50], sono stati orientati al fine di garantire con la progettazione una resistenza ad un elevato numero di cicli di carico, stimati come  $10^7$  cicli con il carico massimo

consentito dalla strumentazione. Lo scopo del portale è contemporaneamente quello di sostenere l'attuatore, fungendo da supporto stabile, e di contrastare la forza esercitata dall'attuatore stesso, evitando interazioni tra la struttura e gli elementi da testare; quest'ultimo obiettivo è stato raggiunto limitando al decimo di millimetro le deformazioni delle parti strutturali maggiormente sollecitate.

## 9.4.2 Struttura del portale

Il portale presenta una doppia simmetria in pianta della geometria e dei carichi applicati, visibile in Figura 9.10. Si descrivono brevemente i principali elementi che compongono la struttura, indicandone le dimensioni previste nell'ultima revisione del progetto [39].

### 9.4.2.1 Colonne

Il portale è costituito da quattro colonne realizzate con profili commerciali HEM 360, aventi due piastre saldate esternamente, che trasformano la sezione aperta in una chiusa, per ragioni di deformabilità. Il lato delle saldature è di 20 mm.

La sezione trasversale dell'elemento con le relative quote è riportata in Figura 9.12.

Il profilo, con riferimento alle prescrizioni contenute nella normativa vigente, è di classe 1. Le saldature sono a completa penetrazione: secondo quanto riportato nel DM 14-01-2008 al § 4.2.8.2.1 [22], esse sono caratterizzate dalla piena fusione del metallo di base attraverso tutto lo spessore dell'elemento da unire con il materiale di apporto, sono generalmente realizzate con materiale d'apporto avente resistenza uguale o maggiore di quella degli elementi collegati e pertanto la resistenza di calcolo dei collegamenti di questo tipo si assume uguale alla resistenza di progetto del più debole tra gli elementi connessi.

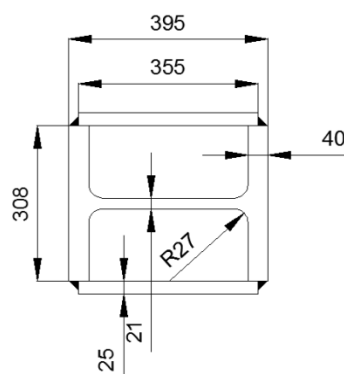


Figura 9.12: Sezione del profilo HEM 360 che costituisce la colonna

### 9.4.2.2 Travi

Le colonne sono collegate da travi principali nella direzione maggiore del portale, coprendo una luce di 2,80 m. Data l'assenza di profili commerciali in grado di fornire la resistenza e le prestazioni richieste a tali elementi strutturali, le travi sono composte da piastre metalliche saldate, dimensionate appositamente per il portale. Le saldature tra ali e anima sono a completa penetrazione.

La sezione trasversale dell'elemento con le relative quote è riportata in Figura 9.13.

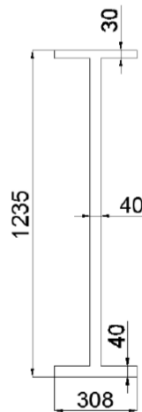


Figura 9.13: Sezione della trave

Il collegamento tra le ali delle travi e la piastra superiore è anch'esso costituito da saldature a completa penetrazione, mentre il collegamento con le colonne è bullonato.

Il comportamento dell'elemento strutturale, dal punto di vista statico, può essere considerato intermedio tra quello di una trave in semplice appoggio e una doppiamente incastrata, dal momento che essa risulta saldamente ancorata alle colonne, ma il nodo trave-colonna, a causa della deformabilità degli elementi, può essere soggetto a rotazione.

### 9.4.2.3 Altri elementi

Trasversalmente il collegamento tra le colonne è realizzato attraverso una flangia dotata internamente di irrigidimenti.

Il camino centrale è realizzato da piastre metalliche che costituiscono delle costole e che sono collegate alle travi principali attraverso piastre coprigiunto bullonate; superiormente viene disposto un piastrone di contrasto.

### 9.4.3 Modellazione

Si sceglie di riprodurre un elemento di colonna del portale, facendo riferimento alla geometria di Figura 9.12. La configurazione del dettaglio non rientra in nessuna delle classi individuate dalla normativa: non avendo a disposizione la corrispondente curva di resistenza, si procede quindi con la modellazione agli elementi finiti.

La sezione trasversale del dettaglio viene costruita realizzando la continuità tra gli elementi metallici attraverso le sole saldature; il contatto tra i piatti saldati negli altri punti viene eliminato allontanandoli leggermente l'uno dall'altro. In questo modo di fatto si introduce un intaglio nella geometria della sezione, in corrispondenza della radice della saldatura, che determina una concentrazione delle tensioni e costituisce un punto preferenziale per l'innesco della cricca.

La colonna è dotata di una doppia fila di fori di diametro 30 mm lungo tutta la sua altezza, disposti ad interasse di 155 mm e passo nella direzione dell'asse della colonna pari a 200 mm; nella costruzione del modello si è pertanto tenuto conto della presenza di queste aperture.

Per indurre nella saldatura una sollecitazione nella direzione longitudinale del dettaglio, si vincola una sezione d'estremità nei confronti dello scorrimento in tale direzione e si esercita una sollecitazione di trazione e compressione all'altra estremità, applicata solamente alle due piastre saldate.

La mesh viene infittita in corrispondenza delle saldature dove vi è variazione delle condizioni geometriche e conseguente concentrazione delle tensioni. Gli elementi finiti utilizzati sono nuovamente i C3D20R.

La Figura 9.14 mostra la geometria del pezzo, i vincoli e le forze applicate.

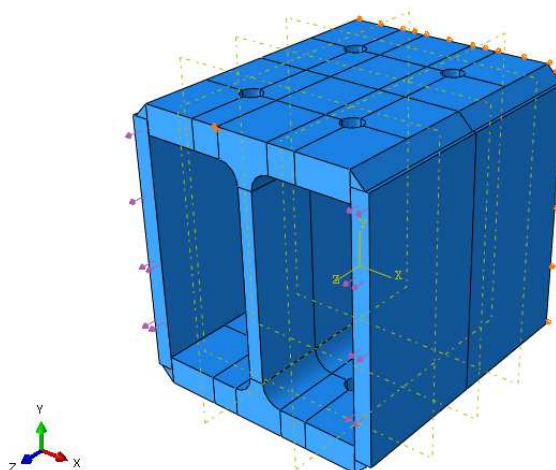


Figura 9.14: Modellazione dell'elemento in Abaqus 6.12

#### 9.4.4 Risultati ottenuti

Il modello è sollecitato con un carico ciclico avente rapporto di inversione  $R = -1$  costante; assunta quindi la tensione media nulla, si fa variare l'ampiezza, conducendo le analisi per tre diversi valori di  $\sigma_a$ .

Prima di riprodurre la sollecitazione nel caso di fatica, si effettua un'analisi statica con carico di 10 MPa per verificare lo stato tensionale. Poiché la subroutine UMAT considera, per il calcolo dell'ampiezza di tensione  $A_{II}$ , una tensione equivalente multiassiale, si è interessati a vedere come risponde il dettaglio nel caso di applicazione del singolo carico in termini di tensioni equivalenti di Von Mises. Il rapporto tra la massima tensione equivalente misurata e quella applicata all'estremità fornisce un fattore di concentrazione circa pari a 4, come si vede in Figura 9.15.

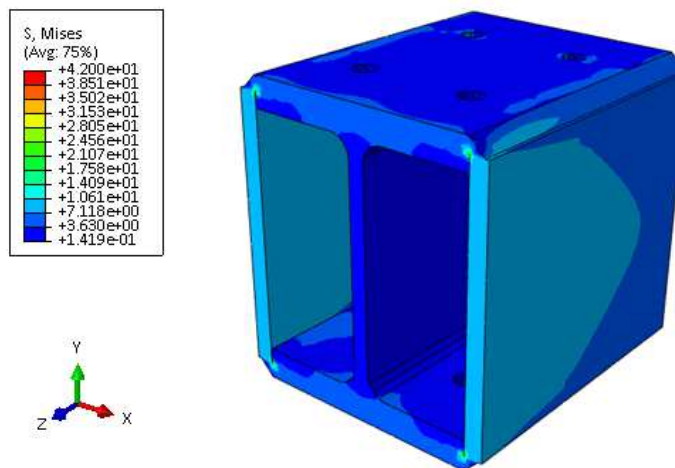


Figura 9.15: Contour delle tensioni equivalenti di Von Mises

I valori ottenuti dalle analisi vengono riportati in un diagramma bilogarithmico, che mette in relazione l'intervallo di tensione, pari al doppio dell'ampiezza, in funzione del numero di cicli di carico, individuando la vita a fatica nei tre casi.

I dati ottenuti mostrano un aumento di  $N$  al diminuire dell'escursione di tensione e si dispongono lungo una linea retta; nello stesso grafico si decide pertanto di costruire anche una curva di resistenza a fatica, con le stesse equazioni fornite dalla normativa [15]: i risultati numerici si dispongono lungo la curva, come per il caso precedente, e la classe di riferimento che può essere ricavata per il dettaglio in esame è con buona approssimazione la FAT 25.

La Figura 9.16 mostra quanto esposto; i valori ottenuti dalle analisi sono confrontati in Tabella 9.8 con quelli dati dalla curva S-N per classe 25, riportando anche la curva FAT 100 come riferimento.



Tabella 9.8: Confronto tra i valori da normativa e quelli numerici per  $R = -1$

$\Delta\sigma$ [MPa]	EC3	FEM
	$N_f$	$N_f$
40	61035	68541
45	42867	36990
50	31250	23903

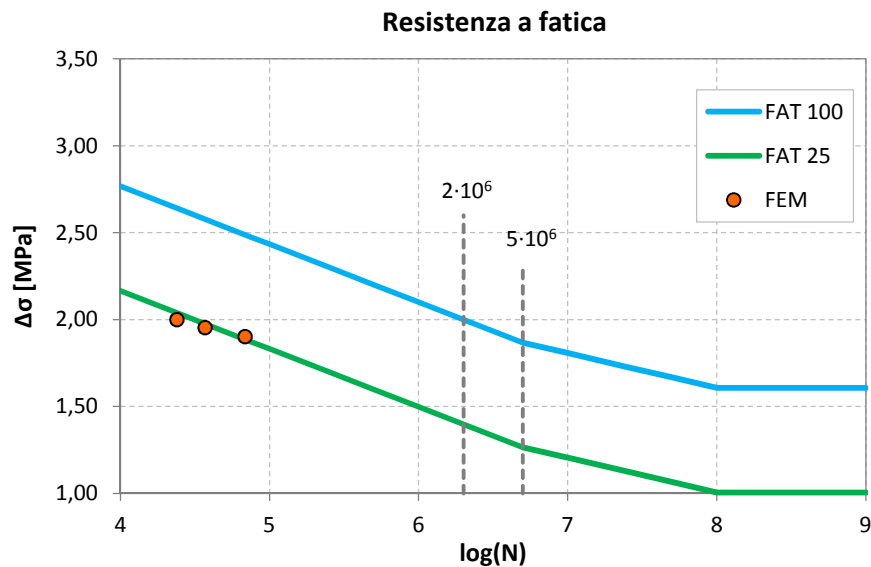


Figura 9.16: Vita a fatica del dettaglio per  $R = -1$

La classe di resistenza ricavata risulta piuttosto bassa. Il risultato è comunque ragionevole considerando che il collegamento tra il piatto di rinforzo e la trave HEM è modellato attraverso la sola presenza della saldatura, determinando una concentrazione di tensione fortemente localizzata in corrispondenza di essa e penalizzandone il comportamento.

Una modellazione dell'unione che, invece che scollegare le parti, tenga conto dell'effettivo contatto che si realizza tra il piatto saldato e l'ala dell'elemento fornirebbe una resistenza superiore, corrispondente ad una curva analoga a quella di Figura 9.16, ma spostata verso l'alto.

In Figura 9.17 e in Figura 9.18 si riportano le immagini dei contour della variabile  $D$  all'inizio del danneggiamento e dell'ampiezza di tensione multiassiale  $A_{II}$  durante la vita a fatica, entrambe concentrate in corrispondenza dell'intaglio alla radice della saldatura.

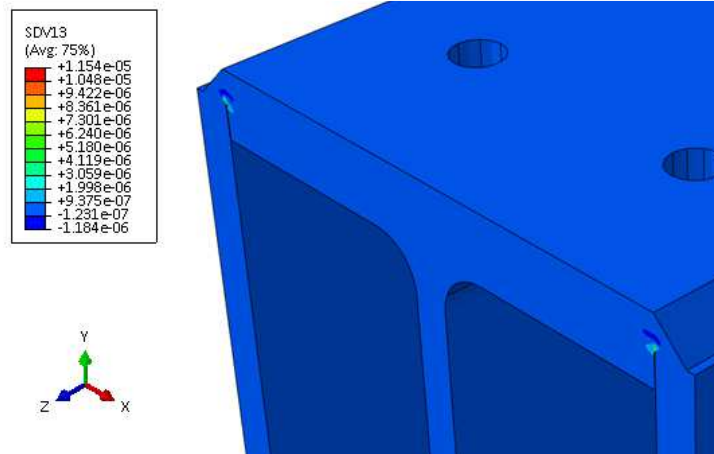


Figura 9.17: Contour della variabile di danno  $D$

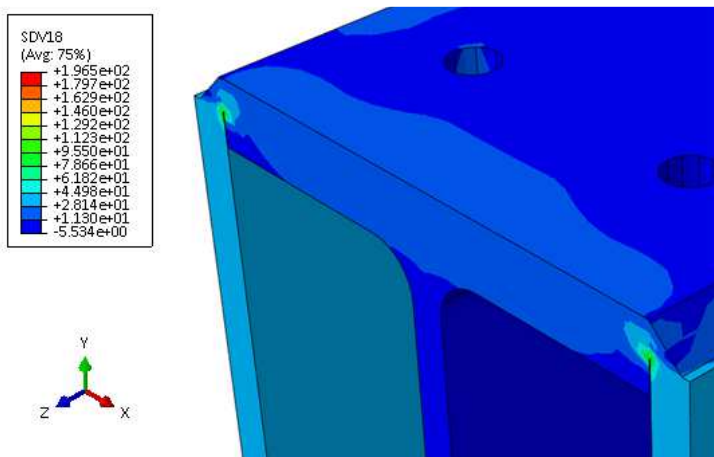


Figura 9.18: Contour di  $A_{II}$  al termine della vita a fatica per  $\sigma = 40$  MPa

*Capitolo 10*

**CONCLUSIONI**

***E POSSIBILI SVILUPPI***

Il lavoro svolto analizza la fatica nei materiali metallici, in regime HCF.

Lo sviluppo della trattazione è stato preceduto da una ricerca bibliografica, volta alla comprensione del fenomeno ed estesa alle diverse modalità di approccio al problema, sviluppate nel corso degli anni. Messi in luce i vantaggi e i difetti di ciascuna di esse, l'attenzione è stata focalizzata sul modello NLCD di Lemaitre e Chaboche, fondato sulla meccanica del danno del continuo, che supera i limiti di altri metodi, tra i quali quello delle tensioni nominali su cui si basa la normativa vigente.

Il modello considera il tensore di danno del continuo, applicandolo al campo della fatica: ricorrendo ad una espressione incrementale, esso è in grado di rappresentare l'evoluzione non lineare del danneggiamento al procedere dei cicli di carico durante le fasi di micronucleazione e micropropagazione delle cricche, fino alla formazione della cricca vera e propria e la conseguente perdita di continuità del materiale.

La scrittura di un codice di calcolo, che implementi il metodo nella sua formulazione multiassiale, ha permesso il suo impiego come post-processore in analisi condotte con il programma agli elementi finiti Abaqus 6.12, ottenendo, a partire dai risultati in termini tensionali, lo stato di danno dell'elemento a seguito della sollecitazione applicata.

Gli esempi utilizzati nella fase di validazione hanno consentito di individuare un passo di integrazione adeguato e hanno messo in evidenza le potenzialità del metodo, che è in grado di

cogliere il degrado delle proprietà meccaniche del materiale durante la vita a fatica e produrre una ridistribuzione delle tensioni nell'intorno della zona maggiormente sollecitata, grazie all'accoppiamento tra la formulazione incrementale del danno e la legge costitutiva del metallo, realizzato attraverso la scrittura delle subroutine in linguaggio Fortran 77. Tali analisi hanno mostrato un buon accordo sia con la trattazione teorica che con i risultati sperimentali reperiti in letteratura.

Le successive simulazioni hanno utilizzato il modello NLCD per il calcolo della vita a fatica di unioni saldate, mostrando un buon accordo con le curve di resistenza, contenute nell'Eurocodice 3 e riprese nelle Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni.

Per un ulteriore sviluppo del lavoro presentato in questa trattazione si suggerisce un approfondimento dell'analisi del materiale metallico adottato, per ottenere la sua precisa caratterizzazione. La definizione esatta delle proprietà meccaniche e del comportamento a fatica dell'acciaio, attraverso prove di laboratorio, permette di ottenere le curve S-N per il caso allo studio e di definire in modo sperimentale i parametri necessari all'uso del modello di Lemaitre e Chaboche, con maggiore esattezza rispetto alla stima fatta nella presente trattazione, consentendo la corretta introduzione nel codice dei valori di calcolo.

Il legame costitutivo che è stato adottato è elastico lineare isotropo. Interessanti risultati potrebbero ottenersi estendendo il comportamento del materiale oltre il limite elastico, accoppiando il modello con un legame costitutivo di tipo elasto-plastico [6], [37]: in questo modo l'implementazione fornirebbe dati validi anche nel campo della fatica a basso numero di cicli (LCF) nella quale la plasticità si manifesta non solo a livello locale, ma anche macroscopico.

È possibile inoltre arricchire l'implementazione in modo tale che essa sia utile per l'analisi di casi più complessi, come ad esempio:

- valutazione dell'effetto combinato della fatica con altri fenomeni di danneggiamento;
- introduzione dell'anisotropia del danneggiamento, che richiede la sostituzione dello scalare  $D$  con il corrispondente tensore di danno;
- calcolo del danno anche nel caso di sollecitazioni molto basse, modificando opportunamente la subroutine UAMP, relativa alla definizione del carico, in modo da produrre un primo ciclo di carico al di sopra del limite di fatica per innescare il fenomeno e i successivi al di sotto di tale valore;
- rappresentare anche la successiva fase di propagazione della cricca fino a frattura, includendo nella procedura tecniche di eliminazione degli elementi e *re-meshing* [6].

Infine per rendere più efficiente la procedura proposta si può ricorrere ad un passo di integrazione variabile [51], anziché costante come quello utilizzato nella presente trattazione. In questo modo si riesce a seguire in maniera ottimale l'andamento della curva di danno, adottando un

passo più ampio per la prima parte, in cui la crescita è lenta, e un intervallo ristretto per il tratto finale in cui  $N$  tende rapidamente a  $N_f$ , come mostrato in Figura 10.1.

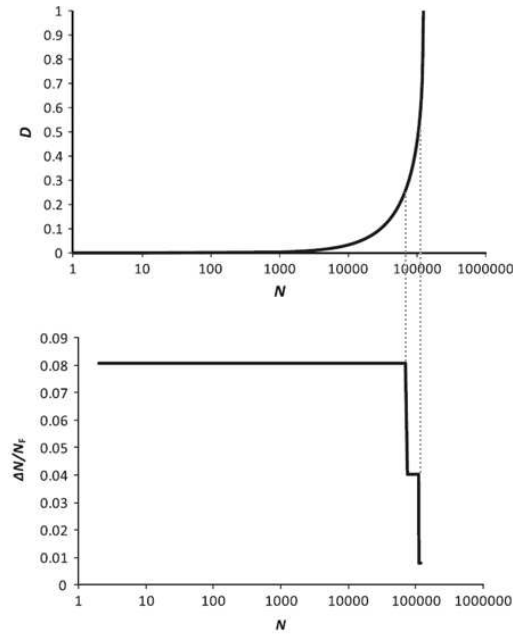


Figura 10.1: Evoluzione del danno e conseguente scelta di un passo di integrazione  $\Delta N$  variabile, per un provino senza intagli con  $R = -0,5$  e  $\sigma_{max} = 800$  MPa [51]



*Appendice A*

***INVARIANTI DI SFORZO***  
***E INVARIANTI INGEGNERISTICI***

**A.1 INVARIANTI DI SFORZO**

Si ricorda che, assegnato un tensore di tensione  $\boldsymbol{\sigma}$ , i tre invarianti di sforzo, rispettivamente lineare, quadratico e cubico, sono espressi da:

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}\tau_{yx} - \tau_{yz}\tau_{zy} - \tau_{zx}\tau_{xz}$$

$$I_3(\boldsymbol{\sigma}) = \det(\boldsymbol{\sigma})$$

Con riferimento alle direzioni principali essi diventano:

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$I_3(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Il tensore di tensione può essere espresso come somma di due parti:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_H \mathbf{I} + \mathbf{S}$$

dove

$\sigma_H$  pressione idrostatica;

$\mathbf{S}$  tensore deviatorico di tensione.

## A.2 INVARIANTI INGEGNERISTICI

Gli invarianti ingegneristici di tensione derivano dagli invarianti di sforzo appena definiti, opportunamente modificati in modo tale da assegnare loro un significato fisico. Essi sono definiti nel modo seguente:

$$J_1(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_H$$

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sigma_{eq}$$

dove

$:$  operazione di prodotto scalare;

$\sigma_{eq}$  tensione equivalente di Von Mises.



# *Appendice B*

## ***CODICE IMPLEMENTATO***

### **B.1 SUBROUTINE UAMP**

```

SUBROUTINE UAMP (ampName, time, ampValueOld, dt,
1 nProps, props, nSvars, svars, lFlagsInfo,
2 nSensor, sensorValues, sensorNames, jSensorLookUpTable,
3 AmpValueNew,
4 lFlagsDefine,
5 AmpDerivative, AmpSecDerivative,
6 AmpIncIntegral, AmpDoubleIntegral)

C -----
C Subroutine UAMP per definire l'ampiezza del carico agente in
C funzione del tempo.
C -----

C Precisione delle varibili
C Include 'aba_param.inc'

C Indici di tempo
C parameter (iStepTime = 1,
1          iTotalTime = 2,
2          nTime = 2)

C Flags passate alla subroutine
C parameter (iInitialization = 1,
1          iRegularInc = 2,
2          iCuts = 3,
3          ikStep = 4,
4          nFlagsInfo = 4)

C Flags opzionali da definire
```

```

parameter (iComputeDeriv      = 1,
1         iComputeSecDeriv    = 2,
2         iComputeInteg       = 3,
3         iComputeDoubleInteg = 4,
4         iStopAnalysis       = 5,
5         iConcludeStep       = 6,
6         nFlagsDefine        = 6)

```

```

C   Dimensionamento degli arrays
dimension time(nTime),
1     lFlagsInfo(nFlagsInfo),
2     lFlagsDefine(nFlagsDefine)

```

```

dimension jsensorLookUpTable(*)

```

```

dimension sensorValues(nSensor),
1     svars(nSvars),
2     props(nProps)

```

```

C   Spazio riservato per i nomi
character*80 sensorNames(nSensor)
character*80 ampName

```

```

C   Ampiezza del carico avente andamento sinusoidale in funzione
C   del tempo dello step, compreso tra 0 e 1.
C   Data l'approssimazione del valore di pi greco, per analisi
C   lunghe, caratterizzate da molti cicli di carico, si amplificano
C   le imprecisioni sul valore dell'ampiezza, che portano a valori
C   non nulli per multipli del periodo e del semiperiodo.
C   Per evitare ciò si adotta l'accorgimento di sottrarre al tempo
C   la sua parte intera.

```

```

omega = 2.d0*3.141592654d0
med = 0.d01
amp = 100.d02
fun = sin(omega*(time(iStepTime)-int(time(iStepTime))))
AmpValueNew = med+amp*fun

return
end

```

## B.2 SUBROUTINE SDIVINI

```

SUBROUTINE SDIVINI (STATEV, COORDS, NSTATV, NCRDS,
1 NOEL, NPT, LAYER, KSPT)

```

```

C -----
C   Soubroutine SDIVINI per definire i valori iniziali delle
C   solution-dependent state variables (variabili dipendenti dalla
C   soluzione).
C -----

```

---

<sup>1</sup> Valore medio del carico ciclico, dipendente dalla sollecitazione applicata

<sup>2</sup> Ampiezza del carico ciclico, dipendente dalla sollecitazione applicata

```

C   Precisione delle variabili
C   include 'aba_param.inc'

C   Dimensionamento degli arrays
C   dimension STATEV(NSTATV), COORDS(NCRDS)

C   Inizializzazione del vettore contenente le variabili dipendenti
C   dalla soluzione STATEV, assumendo valori iniziali nulli per
C   tutte le variabili.

C   do k1=1,NSTATV
C       STATEV(k1)=0.0d0
C   end do

C   return
C   end

```

### B.3 SUBROUTINE UMAT

```

SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
1 RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,STRAN,DSTRAN,
2 TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,CMNAME,
3 NDI,NSHR,NTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,
4 COORDS,DROT,PNEWDT,CELENT,DFGRD0,DFGRD1,
5 NOEL,NPT,KSLAY,KSPT,KSTEP,KINC)

C -----
C   Subroutine UMAT per definire il comportamento meccanico del
C   materiale per materiale elastico isotropo, con calcolo dello
C   stato di danno al termine di ogni incremento.
C -----

C   Precisione delle variabili
C   include 'aba_param.inc'

C   Spazio riservato per il nome del materiale
C   character*80 CMNAME

C   Dimensionamento degli arrays
C   dimension STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
1 DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
2 STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
3 PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),
4 DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)

C   dimension STRESSTENS(NTENS),STRESSCOMP(NTENS),STRESSDIFF(NTENS)

C   Definizione delle costanti
C   parameter (zero=0.0d0, one=1.0d0, two=2.0d0, three=3.0d0)
C   parameter (pi=3.141592654d0, toll=1.0d-6, deltaN=1.0d03)

```

---

<sup>3</sup> Passo di integrazione corrispondente al numero di cicli equivalenti, variabile a seconda dell'analisi svolta

```

C -----
C   Costanti del materiale
C   PROPS(1) = E
C   PROPS(2) = nu
C   PROPS(3) = beta
C   PROPS(4) = b1
C   PROPS(5) = b2
C   PROPS(6) = sigmau
C   PROPS(7) = sigmal0
C   PROPS(8) = a
C -----
C   Solution-dependent state variables
C   STATEV(1-6) = componenti di tensione
C   STATEV(7-12) = componenti di tensione
C   STATEV(13) = D
C   STATEV(14) = N
C   STATEV(15) = flag di danneggiamento
C   STATEV(16) = Nf
C   STATEV(17) = sigmaMED
C   STATEV(18) = AII
C   STATEV(19) = AIIstar
C   STATEV(20) = sigmaeqMAX
C -----

C   Interruzione dell'analisi nel caso in cui la variabile di danno
C   raggiunga o superi il valore unitario oppure venga raggiunto
C   il valore limite di cicli di carico, attraverso il richiamo
C   della utility routine XIT di Abaqus, che viene utilizzata al
C   posto di STOP per terminare l'analisi, assicurando che tutti i
C   file associati all'analisi stessa vengano chiusi correttamente

      if((STATEV(13).ge.one).or.(STATEV(14).ge.2.0d7)) then
        call XIT
      end if

C   Calcolo del modulo di elasticità modificato per tenere conto
C   dello stato di danno corrente

      Emod=PROPS(1)*(one-STATEV(13))

C   Calcolo delle proprietà elastiche

      nu=PROPS(2)
      G=Emod/(two*(one+nu))
      lambda=(nu*Emod)/((one+nu)*(one-two*nu))

C   Costruzione della matrice jacobiana

      do k1=1,NDI
        do k2=1,NDI
          DDSDE(k1,k2)=lambda
        end do
      end do

      do k1=1,NDI
        DDSDE(k1,k1)=lambda+G
      end do

```

```

end do

do k1=NDI+1,NTENS
  DDSDE(k1,k1)=G
end do

C   Calcolo della tensione aggiornata

do k1=1,NTENS
  do k2=1,NTENS
    STRESS(k1)=STRESS(k1)+DDSDE(k1,k2)*DSTRAN(k2)
  end do
end do

C   Identificazione dei valori di tensione in corrispondenza dei
C   valori massimi di trazione e di compressione del ciclo di
C   carico, avente andamento sinusoidale.
C   Data l'approssimazione del valore di pi greco, per individuare
C   correttamente i punti in cui eseguire la memorizzazione, si
C   ricorre alla variabile CYCL1, avente andamento sinusoidale con
C   stesso periodo di quella che descrive l'andamento del carico:
C   si fa riferimento al tempo dello step e la funzione è
C   costruita in modo analogo a quella della subroutine UAMP.
C   Quando la variabile assume valore unitario, pari a +1 o -1, si
C   memorizzano i valori di tensione corrispondenti.
C   Si costruiscono quindi due vettori STRESSTENS e STRESSCOMP,
C   aventi come componenti tali valori.

CYCL1=sin(two*pi*((TIME(1)+DTIME)-int(TIME(1)+DTIME)))
DIFF1=abs(CYCL1-one)
DIFF2=abs(CYCL1+one)

if(DIFF1.le.toll) then
  do k1=1,NTENS
    STATEV(k1)=STRESS(k1)
  end do
end if

if(DIFF2.le.toll) then
  do k1=1,NTENS
    STATEV(k1+6)=STRESS(k1)
  end do
end if

do k1=1,NTENS
  STRESSTENS(k1)=STATEV(k1)
end do

do k1=1,NTENS
  STRESSCOMP(k1)=STATEV(k1+6)
end do

C -----
C   Implementazione del modello Non Linear Continuum Damage
C -----

```

C Identificazione della fine del ciclo e calcolo del danno.  
 C Data l'approssimazione del valore di  $\pi$  greco, per individuare  
 C correttamente la fine del ciclo di carico, si ricorre alla  
 C variabile CYCL2, avente andamento sinusoidale e periodo doppio  
 C rispetto a quella che descrive l'andamento del carico:  
 C si fa riferimento al tempo dello step e la funzione è  
 C costruita in modo analogo a quella della subroutine UAMP.  
 C Quando la variabile assume valore nullo si è in corrispondenza  
 C della fine del ciclo e si procede con il calcolo dello stato di  
 C danno.

```
CYCL2=sin(pi*((TIME(1)+DTIME)-int(TIME(1)+DTIME)))
```

```
if(CYCL2.le.toll) then
```

C Inizializzazione parametri del materiale per il modello NLCD

```
beta=PROPS(3)
b1=PROPS(4)
b2=PROPS(5)
sigmau=PROPS(6)
sigma10=PROPS(7)
a=PROPS(8)
C0=11477.8366d04
```

C Calcolo della tensione idrostatica media durante il ciclo.  
 C Il valore della tensione idrostatica è pari al primo invariante  
 C del tensore di tensione, calcolato attraverso la utility  
 C routine SINV di Abaqus.

```
call SINV(STRESSTENS,SINV1,SINV2,NDI,NSHR)
sigmahTENS=SINV1
```

```
call SINV(STRESSCOMP,SINV1,SINV2,NDI,NSHR)
sigmahCOMP=SINV1
```

```
sigmahMED=(sigmahTENS+sigmahCOMP)/two
STATEV(17)=sigmahMED
```

C Controllo del valore di sigmahMED per evitare problemi nella  
 C scrittura delle formule successive e segnalazione dell'uscita  
 C dal range di valori considerato, per superamento del valore  
 C limite

```
lim1=one/(three*b2)
if(sigmahMED.ge.lim1) then
  write(7,*) 'sigmahMED troppo GRANDE'
  sigmahMED=lim1
end if
```

C Calcolo dell'ampiezza di tensione equivalente AII.  
 C Il valore dell'ampiezza di tensione è pari a metà del secondo  
 C invariante del tensore differenza di tensione, calcolato  
 C attraverso la utility routine SINV di Abaqus.

---

<sup>4</sup> Parametro del modello NLCD, variabile a seconda del materiale scelto per l'analisi

---

```

do k1=1,NTENS
  STRESSDIFF(k1)=STRESSTENS(k1)-STRESSCOMP(k1)
end do

call SINV(STRESSDIFF,SINV1,SINV2,NDI,NSHR)
AII=SINV2/two
STATEV(18)=AII

C   Calcolo del limite di fatica AIIstar.
C   Si adotta il criterio limite di Sines.

  AIIstar=PROPS(7)*(one-three*PROPS(4)*sigmahMED)
  STATEV(19)=AIIstar

C   Calcolo del valore massimo della tensione equivalente di
C   Von Mises, pari al secondo invariante del tensore di tensione.

  call SINV(STRESSTENS,SINV1,SINV2,NDI,NSHR)
  sigmaeq1=SINV2

  call SINV(STRESSCOMP,SINV1,SINV2,NDI,NSHR)
  sigmaeq2=SINV2

  if(sigmaeq1.gt.sigmaeq2) then
    sigmaeqMAX=sigmaeq1
  else
    sigmaeqMAX=sigmaeq2
  end if

  STATEV(20)=sigmaeqMAX

C   Calcolo dell'esponente alpha

  rapp1=(AII-AIIstar)/(PROPS(6)-sigmaeqMAX)
  if(rapp1.gt.zero) then
    alpha=one-PROPS(8)*rapp1
  else
    alpha=one
  end if

C   Calcolo del parametro C

  C=C0*(one-three*PROPS(5)*sigmahMED)

C   Calcolo dell'incremento di danno secondo il modello NLCD.
C   Se nell'elemento non vi è stato precedentemente danneggiamento,
C   il flag di danneggiamento STATEV(15) è nullo: in questo caso,
C   se l'ampiezza di tensione equivalente AII supera il valore
C   limite AIIstar, il flag assume valore unitario e si calcola
C   l'incremento di danno, a partire da un danno iniziale di valore
C   1/Nf; in caso contrario non si ha danneggiamento.
C   Se invece all'incremento precedente l'elemento ha già subito un
C   danno, il flag di danneggiamento STATEV(15) è pari a uno: sia
C   che AII superi il valore limite AIIstar sia che sia inferiore,
C   si ha danneggiamento, calcolato a partire dal valore di danno
C   STATEV(13) alla fine dell'incremento precedente.

```

---

```

        if(STATEV(15).eq.zero) then
            if(AII.gt.AIIstar) then
                STATEV(15)=one
                if(sigmau.gt.sigmaeqMAX) then
                    diff1=sigmau-sigmaeqMAX
                else
                    diff1=zero
            end if

C      Segnalazione dell'annullamento di Nf a causa del valore assunto
C      dalla differenza sigmau-sigmaeqMAX al numeratore
C      dell'espressione.

                write(7,*) 'Nf si ANNULLA perchè'
                write(7,*) 'sigmau-sigmaeqMAX=',diff1
            end if

                coeff1=one/(beta+one)
                coeff2=one/(a*((C0)**(-beta)))
                diff2=AII-AIIstar

C      Limitazione del valore inferiore della differenza posta al
C      denominatore dell'espressione di Nf, per evitare valori troppo
C      piccoli del denominatore stesso e conseguenti
C      malcondizionamenti del calcolo.

                if(diff2.le.0.001d0) then
                    diff2=0.001d0
                end if

                rapp2=diff1/diff2
                rapp3=AII/(one-three*b2*sigmaMED)
                Nf=coeff1*coeff2*rapp2*((rapp3)**(-beta))
                C1=Nf

                if(NOEL.eq.10005) then
                    write(7,*) ' '
                    write(7,111)'Punto di integrazione=',NPT,' -----'
                    write(7,112)'a=',a,'M0=',C0
                    write(7,113)'coeff1=',coeff1,'coeff2=',coeff2
                    write(7,114)'rapp2=',rapp2,'rapp3=',rapp3
                    write(7,115)'Nf=',C1
                    write(7,*) ' '
111                format(a22,i2,a12)
112                format(4x,a2,f6.3,19x,a5,e16.10)
113                format(4x,a7,e15.8,7x,a7,e15.8)
114                format(4x,a6,e15.8,8x,a6,e15.8)
115                format(4x,a3,e15.8)
                end if

C      Controllo del valore di Nf e segnalazione dell'uscita dal range
C      di valori considerato, per superamento del limite inferiore o
C      di quello superiore

                if(Nf.le.0.0d0) then

```

---

<sup>5</sup> Numero dell'elemento di controllo, variabile a seconda del modello



```

        write(7,*) 'Nf NEGATIVO o NULLO'
        Nf=1.0d3
    end if
    if(Nf.gt.1.0d8) then
        write(7,*) 'Nf MOLTO GRANDE'
        Nf=1.0d8
    end if

    STATEV(16)=Nf
    write(7,116)'label elemento=',NOEL,',','ip=',NPT
    write(7,117) 'Nf=',STATEV(16)
116   format(4x,a15,i7,a1,2x,a3,i2)
117   format(4x,a3,e15.8)
    STATEV(13)=one/Nf
    else
    deltaD=zero
    end if
end if

C   Applicazione della procedura esplicita (differenze in avanti)
C   come schema di integrazione dell'equazione di danno

    STATEV(14)=STATEV(14)+deltaN

    if(STATEV(15).eq.one) then
        coeff3=(one-(one-STATEV(13))**(beta+one))**alpha
        coeff4=AII/(C*(one-STATEV(13)))
        coeff5=((AII/(C*(one-STATEV(13))))**beta)
C       if(NOEL.eq.10006) then
C           write(7,*)' '
C           write(7,117)'coeff3=',coeff3
C           write(7,117)'coeff4=',coeff4
C           write(7,117)'coeff5=',coeff5
C   117   format(4x,a7,e15.8)
C       end if
        deltaD=coeff3*((AII/(C*(one-STATEV(13))))**beta)*deltaN
        STATEV(13)=STATEV(13)+deltaD
    end if

C -----
C   Scrittura nel message file (.msg) degli output per un singolo
C   elemento, ai fini della validazione dell'algoritmo implementato
C   nella subroutine UMAT.

    if(NOEL.eq.10007) then
        write(7,*) ' '
        write(7,100)'beta=',beta
        write(7,101)'b1=',b1,'b2=',b2
        write(7,102)'sigmau=',sigmau,'sigma10=',sigma10
        write(7,103)'a=',a,'alpha=',alpha
        write(7,104)'M0=',C0,'M=',C
        write(7,105)'sigmahMED=',sigmahMED,'sigmaeqMAX=',sigmaeqMAX
        write(7,106)'sigmaeq1=',sigmaeq1,'sigmaeq2=',sigmaeq2

```

<sup>6</sup> Numero dell'elemento di controllo, variabile a seconda del modello

<sup>7</sup> Numero dell'elemento di controllo, variabile a seconda del modello

```
write(7,107)'AII=',AII,'AIIstar=',AIIstar
write(7,108)'deltaN=',deltaN,'N=',STATEV(14)
write(7,109)'deltaD=',deltaD,'D=',STATEV(13)
write(7,*)' '
100  format(4x,a5,f6.3,9x)
101  format(4x,a3,f8.5,18x,a3,f8.5)
102  format(4x,a7,f8.2,14x,a8,f8.2)
103  format(4x,a2,f6.3,18x,a9,e15.8)
104  format(2x,a5,e16.10,7x,a5,e16.10)
105  format(4x,a10,e15.8,4x,a11,e15.8)
106  format(4x,a9,e15.8,5x,a9,e15.8)
107  format(4x,a4,e15.8,10x,a8,e15.8)
108  format(4x,a7,e15.8,7x,a2,e15.8)
109  format(4x,a7,e15.8,7x,a2,e15.8)
      end if
C -----
      end if

      return
      end
```

## ***BIBLIOGRAFIA***

- [1] Abaqus 6.12 Finite Element Analysis System, *Documentation*, Simulia, Dassault Systèmes.
- [2] Aguzzi G., Gasparo M. G., Macconi M., *Fortran77*, Pitagora Editrice Bologna, 1987.
- [3] Anderson T. L., *Fracture mechanics. Fundamentals and applications*, CRC Press, 1991.
- [4] Ballio G., Bernuzzi C., *Progettare costruzioni in acciaio*, Hoepli, 2004.
- [5] Bannantine J. A., Comer J. J., Handrock J. L., *Fundamentals of metal fatigue analysis*, Prentice Hall, 1990.
- [6] Bogard F., Lestriez, Guo Y. Q., *Numerical modeling of fatigue damage and fissure propagation under cyclic loadings*, in “International Journal of Damage Mechanics, vol. 2, n. 17, pp. 173-187, marzo 2008.
- [7] Burk J. D., Lawrence F. V. Jr., *The effect of residual stresses on weld fatigue life*, Report n. 29, Fracture Control Program, Department of Metallurgical Engineering, University of Illinois, gennaio 1978.
- [8] Calabrò A. et al., *Analisi sperimentale e numerica del danneggiamento plastico nei metalli e ricerca del danno critico attraverso la tecnica dell’emissione acustica*, atti del XIII Convegno Nazionale del Gruppo Italiano Frattura, Cassino, 27-28 maggio 1997.
- [9] Cavallini M., Di Cocco V., Iacoviello F., *Rotture per fatica: due secoli di studi*, atti del XIV Convegno AIPnD Associazione Italiana Prove non Distruttive, Firenze 26-28 ottobre 2011.
- [10] Chaboche J. L., *Continuum damage mechanics. Part I – General concepts*, in “Journal of

- Applied Mechanics”, vol. 55, n. 1, pp. 59-64, marzo 1988.
- [11] Chaboche J. L., *Continuum damage mechanics. Part II – Damage growth, crack initiation and crack growth*, in “Journal of Applied Mechanics”, vol. 55, n. 1, pp. 65-72, marzo 1988.
- [12] Chaboche J.L., Lesne P.M., *A non-linear continuous fatigue damage model*, in “Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures”, vol. 11, n. 1, pp. 1-17, 1988.
- [13] Chaboche J. L., Lemaitre J., *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, 1990.
- [14] Chaudonneret M., *A simple and efficient multiaxial fatigue damage model for engineering applications of macro-crack initiation*, in “Journal of Engineering Materials & Technology”, vol. 115, n. 4, pp. 373-379, ottobre 1993.
- [15] Circolare 2 febbraio 2009, n. 617, *Istruzioni per l'applicazione delle Nuove Norme Tecniche*, 2009.
- [16] CNR 10011/88, *Costruzioni di acciaio. Istruzioni per il calcolo, l'esecuzione, il collaudo e la manutenzione*, 1988.
- [17] Colangelo V. J., Heiser F. A., *Analysis of metallurgical failures*, John Wiley & Sons, 1987.
- [18] Colombo P., Festa D., *Materiali per l'Ingegneria Civile*, Edizioni Libreria Progetto Padova, 2010.
- [19] Committee on fatigue and fracture reliability of the Committee on structural safety and reliability of the Structural Division, *Fatigue reliability*, in “Journal of the Structural Division”, ASCE, vol. 108, n. ST1, pp.3-88, gennaio 1982.
- [20] Dattoma V., Giancane S., Nobile R., Panella F. W., *Fatigue life prediction under variable loading based on a new non-linear continuum damage mechanics model*, in “International Journal of Fatigue”, vol. 28, n. 2, pp. 89-95, febbraio 2006.
- [21] Dattoma V., Giancane S., Nobile R., Panella F. W., *Fatigue life prediction of notched components based on a new nonlinear Continuum Damage Mechanics model*, in “Procedia Engineering”, vol. 2, n. 1, pp. 1317-1325, aprile 2010.
- [22] DM 14 gennaio 2008, *Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni*, 2008.
- [23] Ellyin F., *Fatigue damage, crack growth and life prediction*, Chapman & Hall, 1997.
- [24] Fatemi A., Yang L., *Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials*, in “International Journal of Fatigue”, vol. 20, n. 1, pp. 9-34, 1998.
- [25] Fatemi A., Fuchs H. O., Stephens R. I., Stephens R. R., *Metal fatigue in engineering*, John Wiley & Sons, 2000.
- [26] Fricke W., *Fatigue analysis of welded joints: state of development*, in “Marine Structure”, vol. 16, n. 1, pp. 185-200.

- 
- [27] Frost N. E., Marsh K. J., Pook L. P., *Metal fatigue*, Clarendon press, 1974.
- [28] Fuchs H. O., Stephens R. I., *Metal fatigue in engineering*, John Wiley & Sons, 1980.
- [29] Galvan G., *Modellazione numerica del danno per fatica nelle strutture metalliche*, tesi di laurea magistrale in Ingegneria Civile, Università degli Studi di Padova, a.a. 2012-2013.
- [30] Hobbacher A., *Recommendation for fatigue design of welded joints and components*, International Institute of Welding, dicembre 2008.
- [31] Hobbacher A.F., *The new IIW recommendations for fatigue assessment of welded joints and components. A comprehensive code recently updated*, in “International Journal of Fatigue”, vol. 31, n. 1, pp. 50-58, gennaio 2009.
- [32] Huang H. Z., Li H., Yuan R. et al., *A new fatigue damage accumulation model based on non-linear continuum damage mechanics*, atti di “2012 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance and Safety Engineering”, pp. 875-878, 15-18 giugno 2012.
- [33] Huang H. Z., Li H., Yuan R. et al., *A new non-linear continuum damage mechanics model for fatigue life prediction under variable loading*, in “Mechanika”, vol. 19, n. 5, pp. 506-511, 2013.
- [34] Irwin G. R., *The historical development of our understanding of fracture*, in “JOM”, vol. 49, n. 7, pp. 38-40, 83, luglio 1997.
- [35] Kühn B. et al., *Assessment of existing steel structures: recommendations for estimation of remaining fatigue life*, European Commission, Joint Research Centre scientific and technical report, febbraio 2008.
- [36] Marchesini F. P., *Ponti metallici ferroviari rivettati. Valutazione del danno a fatica e corrosione*, tesi di laurea magistrale in Ingegneria Civile, Università degli Studi di Padova, a.a. 2011-2012.
- [37] Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L., *Multiaxial fatigue damage modelling at macro scale of Ti-6Al-4V alloy*, in “International Journal of Fatigue”, vol. 31, n. 11-12, pp. 2031-2040, novembre-dicembre 2009.
- [38] Mazzia A., *Fortran, Gnuplot e foglio elettronico. Appunti in breve*, università degli Studi di Padova, a.a. 2012-2013.
- [39] Michielutti L., *Studio dell’attrezzatura per l’esecuzione di prove sperimentali su elementi soggetti a fatica e a carichi dinamici*, tesi di laurea magistrale in Ingegneria Civile, Università degli Studi di Padova, a.a. 2013-2014.
- [40] Military Handbook, *Metallic materials and elements for aerospace vehicle structure: MIL-HDBK-5J*, Department of Defence, USA, 2003.
- [41] Papadopoulos I.V., Panoskaltsis V.P., *Invariant formulation of a gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion*, in “Engineering Fracture Mechanics”, vol.55, n. 4, pp. 513-528, novembre 1996.

- [42] Pook L., *Metal fatigue. What it is, why it matters*, Springer, 2009.
- [43] Sartoretto F., Putti M., *Introduzione alla programmazione per elaborazioni numeriche*, Edizioni Libreria Progetto Padova, 2002.
- [44] Scarinci G., *Materiali per Ingegneria Civile ed Edile*, Edizioni Libreria Progetto Padova, 2007.
- [45] Shang D. G., Yao W. X., *Nonlinear damage cumulative model for uniaxial fatigue*, in "International Journal of Fatigue", vol. 21, n. 2, pp. 187-194, febbraio 1999.
- [46] Shijve J., *Fatigue of structures and materials*, Springer, 2009.
- [47] Schütz W., *A history of fatigue*, in "Engineering Fracture Mechanics", vol.54, pp. 263-300, 1996.
- [48] Timoshenko S. P., *Strength of materials*, International student editions, 1970, cap. IX *Mechanical properties of materials*, pp. 396-462.
- [49] UNI EN 1993-1-9, *Eurocode 3. Design of steel structure. Part 1-9: Fatigue*, 2005.
- [50] Zanin F., *Analisi non lineare di dispositivi meccanici per prove sperimentali a fatica su elementi inflessi*, tesi di laurea magistrale in Ingegneria Civile, Università degli Studi di Padova, a.a. 2012-2013.
- [51] Zhang T., McHugh P.E., Leen S.B., *Finite element implementation of multiaxial continuum damage mechanics for plain and fretting fatigue*, in "International Journal of Fatigue", vol. 44, pp. 260-272, novembre 2012.
- [52] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The finite element method*, Butterworth-Heinemann, 2000.