

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA G. GALILEI
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN FISICA



TESI DI LAUREA MAGISTRALE

*Comunicazione quantistica
tramite fasci ottici con
momento angolare orbitale*

Relatore:
Prof. P. VILLORESI
Co-relatore:
Dott. G. VALLONE
Controrelatore:
Prof. L.SALASNICH

Laureando: GIORGIO ZARANTONELLO
Matricola N: 1057508

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

Sommario

Il lavoro di questa tesi prevede la verifica della fattibilità di un protocollo di distribuzione di chiave quantistica di tipo BB84 [1] indipendente dall'esistenza di un sistema di riferimento condiviso [2]. Questo é possibile tramite l'uso di fasci laser dotati di momento angolare orbitale che consentono di generare degli stati ibridi di polarizzazione e modo che siano invarianti per rotazioni. Stati con tali proprietà sono estremamente utili nel caso che trasmettitore e ricevitore siano in condizioni di moto rotazionale relativo (i.e. i sistemi di riferimento ruotano tra di loro in modo non prevedibile). Lo studio ha previsto un'analisi della propagazione in spazio libero dei modi del tipo Ipergeometrico-Gaussiano [3], generati con l'uso di una q-plate [4] [5] [6] [7] [8]. Per aumentare il controllo del sistema si é inoltre cercato di implementare un esperimento del tipo photonic gear [9] al fine di effettuare una misura angolare della rotazione tra i due sistemi di riferimento in tempo reale durante la distribuzione di chiave.

Indice

1	Crittografia quantistica	7
1.1	qubit	8
1.1.1	No cloning theorem	9
1.1.2	Entanglement	9
1.2	BB84	10
1.3	E91	12
1.4	B92	13
1.5	Alingment-free	14
2	Momento angolare Orbitale	17
2.1	Q-plate	18
2.1.1	Efficienza di conversione	20
2.2	Modo Ipergeometrico-Gaussiano	21
2.3	Modo di Laguerre-Gauss	22
2.3.1	Sviluppo in serie di modi di Laguerre-Gauss	23
2.4	Semplificazione dell'ipergeometrica	28
2.5	Profilo di intensit�	31
2.6	Stati indipendenti dalla rotazione	33
2.7	Stato dell'arte	34
3	Propagazione	35
3.1	Teoria della propagazione	35
3.2	Deviazione standard del profilo spaziale	37
3.3	Propagazione in mezzi turbolenti	41
3.4	Setup sperimentale di trasmissione	42
3.4.1	Sorgente	43
3.5	Ottica del telescopio	44
3.6	Setup sperimentale di ricezione	46
3.7	Propagazione su corta distanza	48
3.8	Propagazione su lunga distanza	49
3.8.1	Argine del Piovego	49

3.8.2	Link cittadino	50
3.9	Analisi Propagazione	52
3.9.1	Fascio gaussiano	52
3.9.2	Fascio Ipergeometrico	54
3.9.3	Modi Alterni	57
3.10	Conclusioni sulla propagazione	58
4	Iniezione in Fibra	59
4.1	Setup di ricezione	59
4.2	Allineamento	60
4.3	Analisi e conclusioni	61
5	Misura angolare tramite photonic gear	63
5.1	Photonic gear	63
5.2	Propagazione di fasci con m elevato	65
5.2.1	Stima del fattore M^2 per la divergenza	65
5.2.2	Ricezione del fascio	66
5.3	Conclusioni sulla propagazione del fascio ad m elevato	70
6	Conclusioni	73
6.1	Distribuzione di chiave quantistica	73
6.2	Photonic gear	75
A	Codice MATLAB	77

Capitolo 1

Crittografia quantistica

La crittografia nel mondo odierno é di estrema importanza. Permette lo svolgersi in sicurezza di transazioni finanziarie su internet, di cifrare informazioni per assicurarsene la confidenzialit . Banche, istituzioni private e pubbliche, forze dell'ordine o militari, e chiunque lo necessiti, pu  comunicare in maniera sicura.

Tra i vari sistemi per la protezione di dati, la crittografia é uno dei pi  antichi in assoluto: usando regole prestabilite, un messaggio viene cifrato tramite una chiave, composta generalmente da numeri o lettere, che viene condivisa da pochi. Tale operazione di condivisione é chiamata distribuzione della chiave e rappresenta una delle operazioni a pi  alto rischio di sicurezza. Gli attuali sistemi per la protezione di dati sensibili sfruttano algoritmi di crittografia che si basano su una chiave generata casualmente e distribuita solo tra coloro che sono abilitati alla lettura dei dati. Tali sistemi per  presentano dei problemi di sicurezza intrinseci.

Un primo problema viene dalla generazione della chiave, che non é davvero casuale ma bens  pseudo casuale. Infatti, gli attuali generatori di numeri casuali si basano su algoritmi e dunque presentano sempre, per quanto lunga, una certa periodicit  o una natura prevedibile. Questo pu  portare a problemi di sicurezza pi  o meno gravi [10] [11]. Un altro problema é dovuto alla possibilit  che qualcuno intercetti la comunicazione della chiave crittografica durante l'operazione di distribuzione, in tal modo anche questa terza parte ha la possibilit  di leggere la conversazione cifrata. Si ha quindi la necessit  di generare una chiave che sia davvero casuale e di comunicarla in modo sicuro.

A queste necessit  viene incontro la teoria dell'informazione quantistica: trasmettendo la chiave di crittografia, classica, tramite stati quantistici in apposite basi é possibile comunicare in maniera sicura. Per soddisfare la necessit  di utilizzare una chiave casuale, si possono sfruttare generatori di numeri ca-

suali basati sulla meccanica quantistica in cui il concetto di casualità risulta essere intrinseco al concetto stesso di stato quantistico.

1.1 qubit

Classicamente l'unità di base dell'informazione è data dal bit, che può assumere come valori gli stati classici 0 e 1. Il corrispettivo del bit nella teoria dell'informazione quantistica è il qubit che è descritto da stati quantistici. Un generico qubit può essere scritto come:

$$|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.1)$$

dove α e β sono numeri complessi che per normalizzazione devono essere tali che $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Mentre $|0\rangle$ ed $|1\rangle$ sono due stati ortogonali tra loro. I qubit sono dotati di un'ulteriore proprietà utile ai fini della sicurezza espressa dal no-cloning theorem. Questo teorema ci assicura che un qubit non possa essere clonato e dunque, nel leggerlo, un origliatore farà inevitabilmente collassare lo stato.

Per quanto riguarda la realizzazione sperimentale, un qubit può essere ottenuto da qualunque sistema a due livelli (energetici, di polarizzazione, di momento angolare, di spin, etc). Per gli scopi della comunicazione quantistica è utile avere degli stati che possano essere trasmessi facilmente e alla più lunga distanza possibile. La polarizzazione dei fotoni risulta essere adatta a questo scopo.

Per ottenere un sistema a due livelli con la polarizzazione della luce basta prendere due stati qualunque ortogonali tra loro con cui si possono, quindi, definire numerose basi. Solitamente, se ne definiscono due: la base + e la base \times .

$$\text{Base } + : \begin{cases} |H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = 0 \\ |V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) = 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\text{Base } \times : \begin{cases} |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) = 0 \\ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle) = 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

Come convenzione la base + (formula 1.2) è costituita dagli stati di polarizzazione orizzontale (H) e verticale (V), la base \times (formula 1.3) dagli stati di polarizzazione a $+45^\circ$ e -45° . Ad ogni stato quantistico della base si associa un valore del bit classico ed, inoltre, è possibile esprimere ogni stato di una base come combinazione lineare di un'altra base.

1.1.1 No cloning theorem

Ogni qubit, indipendentemente dal mezzo fisico con cui viene creato, il cui stato sia sconosciuto, non può essere duplicato [12]. Per stato sconosciuto si intende che i coefficienti α e β della formula 1.1 non siano noti. La proprietà di non clonazione viene dalla linearità della meccanica quantistica. Si supponga, per assurdo, che esista un operatore unitario U che agisca su un qubit duplicandolo, ovvero:

$$\begin{aligned} U|1\rangle &= |1\rangle|1\rangle \\ U|0\rangle &= |0\rangle|0\rangle \end{aligned}$$

Un operatore unitario può essere rappresentato da una matrice che agisce linearmente sugli stati. Facendolo dunque agire su un generico stato sconosciuto $|\varphi\rangle$ si ottiene per la linearità :

$$U|\varphi\rangle = \alpha U|0\rangle + \beta U|1\rangle = \alpha|0\rangle|0\rangle + \beta|1\rangle|1\rangle \quad (1.4)$$

ma si è supposto che l'operatore U duplichi lo stato quindi:

$$U|\varphi\rangle = |\varphi\rangle|\varphi\rangle = \alpha^2|0\rangle|0\rangle + \alpha\beta|0\rangle|1\rangle + \beta\alpha|1\rangle|0\rangle + \beta^2|1\rangle|1\rangle \quad (1.5)$$

Per essere consistente la supposizione che l'operatore U possa clonare un generico stato sconosciuto bisogna poter egualare i risultati ottenuti in 1.5 e 1.4, ma ciò non è possibile se non per α e β uguali a zero. Se, ad esempio, si vuole duplicare un qubit bisogna che prima venga letto lo stato, il quale collasserà inevitabilmente o in $|0\rangle$ o in $|1\rangle$ e dunque una copia vera e propria del qubit originale è impossibile in quanto si perde totalmente l'informazione sullo stato in cui non è collassato. Dunque è possibile affermare che l'unico modo per duplicare un qubit è conoscere a priori il suo stato e preparare un nuovo qubit nel medesimo stato. Questa è una proprietà fondamentale nella teoria dell'informazione quantistica. Ci assicura che nel caso uno stato sia sconosciuto questo non possa essere clonato, proprietà molto interessante ai fini di una comunicazione sicura.

1.1.2 Entanglement

Un'altra proprietà estremamente importante è l'entanglement che presenta numerosi utilizzi nel campo dell'informazione quantistica consentendo di ideare numerosi protocolli, il più famoso dei quali è sicuramente il teletrasporto quantistico [13] [14]. L'entanglement è una proprietà di due o più

sistemi quantistici che mostrano correlazioni che non possono essere spiegate tramite la fisica classica ma solamente tramite la meccanica quantistica. Due sistemi quantistici possono essere considerati come un unico sistema facendo il prodotto tensore dei loro stati [12]. Ad esempio, due qubit possono essere scritti come $|0\rangle|0\rangle = |00\rangle$. Alcuni esempi di stati entanglati sono gli stati di Bell, definiti come:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Questi stati, ortogonali fra loro, sono caratterizzati dal fatto che quando la misura viene fatta, separatamente, sui due sistemi quantistici si otterrà lo stesso risultato per entrambi (ovvero ciascuno darà come risultato lo stato $|0\rangle$ o lo stato $|1\rangle$ con una probabilità di $1/2$, ma entrambi i sistemi collaseranno nello stesso stato). Quando due o più sistemi sono entanglati il loro stato non può essere scritto separatamente. Si considerino due generici qubit:

$$\begin{aligned} \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle \end{aligned}$$

e la loro combinazione:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\delta|11\rangle$$

É facile notare come non sia possibile trovare dei coefficienti $\alpha\beta\gamma\delta$ per cui si possa ottenere uno dei due stati di Bell. Questa proprietà, l'entanglement, si mantiene anche quando i due sistemi sono separati fisicamente da una grande distanza. Questo permette di utilizzarla in molti processi di informazione quantistica. Per verificare sperimentalmente se due sistemi sono entanglati si usa la disuguaglianza CHSH [15] che discende dalla disuguaglianza di Bell [16] che empiricamente permette di verificare l'esistenza di una teoria a variabili nascoste oltre la meccanica quantistica.

1.2 BB84

Il primo protocollo ad essere ideato per la distribuzione di chiave quantistica é chiamato BB84 [1] dal nome dei suoi inventori, C. Bennett e G. Brassard,

e dall'anno di ideazione (1984). Tale protocollo permette di generare e condividere una chiave di crittografia, sotto forma di sequenza di zeri e uno, tra due individui, Alice e Bob, impedendo che una terza persona, Eve, possa entrare in possesso della chiave [17].

Il protocollo si basa sulla generazione di numeri casuali ma, non essendo obiettivo di questa tesi trattare quest'argomento, si supponga di essere in possesso di una sorgente di numeri casuali perfettamente sicura. Per la comunicazione vengono usati due canali: uno quantistico e uno classico. Il canale quantistico può essere un link ottico, mentre, ad esempio, il canale classico un ponte radio.

Per generare la chiave da condividere con Bob, Alice sceglierà casualmente il bit da mandare e la base con cui mandarlo in modo da avere quattro possibili combinazioni. Bob, in seguito, sceglierà casualmente la base in cui leggere il segnale ottico in arrivo dal canale quantistico. Una volta che Bob ha ricevuto un numero elevato di segnali, Alice e Bob comunicano sul canale classico quale base hanno utilizzato per mandare/ricevere ogni segnale. La chiave che verrà utilizzata sarà quindi data dai bit ottenuti quando le due basi sono uguali, in questo modo Alice e Bob hanno la certezza di avere la stessa chiave.

Alice manda	$ H\rangle$	$ +\rangle$	$ -\rangle$	$ V\rangle$	$ +\rangle$	$ H\rangle$
Base Alice	+	\times	\times	+	\times	+
Base Bob	+	+	\times	+	\times	\times
Bob riceve	$ H\rangle$	$ V\rangle$	$ -\rangle$	$ V\rangle$	$ +\rangle$	$ -\rangle$
chiave	0		1	1	0	

Si suppone che Eve possa intercettare sia il canale classico che quello quantistico. Nel canale quantistico Eve non sa in che base deve misurare e si suppone che il segnale sia costituito da un singolo fotone per impedirle di separarlo e misurarlo in entrambe le basi. Se anche il segnale estratto da Eve fosse forte si registrerebbe una altrettanto forte variazione nel segnale di Bob. Inoltre per il no-cloning theorem Eve è impossibilitata a copiare il segnale del singolo fotone senza alterarlo. Si suppone, dunque, che Eve possa in qualche modo aggirare questi problemi e prelevare solo una minima parte del segnale e fare una sola misura in una delle due basi: in questo modo Eve ha il 50% di probabilità di scegliere la stessa base di Alice, ma affinché la creazione del bit abbia successo anche la base di Bob deve coincidere. Complessivamente, dunque, la probabilità che Eve possa intercettare il singolo bit è del 25%. Aumentando la lunghezza della chiave si può dunque avere la certezza matematica che Eve non intercetterà più del 25% della chiave.

I protocolli di tipo BB84 sono stati implementati sperimentalmente da lungo tempo. Attualmente la distanza massima a cui si è riusciti ad effettuare

questo protocollo in spazio libero é di 144 km [18] tra le isole di La Palma e Tenerife. Il canale era situato ad un'altitudine media di 2400 m.

1.3 E91

Un protocollo successivo che sfrutta la propriet  di entanglement   l'E91, ideato da A. Ekert nel 1991 [19]. In questo protocollo si utilizza una sorgente di fotoni entanglati in polarizzazione che verr  sfruttata per verificare la sicurezza del canale quantistico. Usando la trattazione dell'articolo originale, viene usata come sorgente una fonte di particelle di spin $1/2$ in stato di singoletto, ovvero spin totale pari a 0, dunque il risultato atteso   codificato con $+1$ per spin up e -1 per spin down. La sorgente viene posta tra Alice e Bob ed entrambi usano 3 assi per la misurazione prendendo l'asse x come verticale. In figura 1.1 sono mostrati i vettori unitari che formano con l'asse x angoli pari ad $a_1 = 0$, $a_2 = \pi/4$, $a_3 = \pi/2$ ed $b_1 = \pi/4$, $b_2 = \pi/2$, $b_3 = \pi 3/4$.

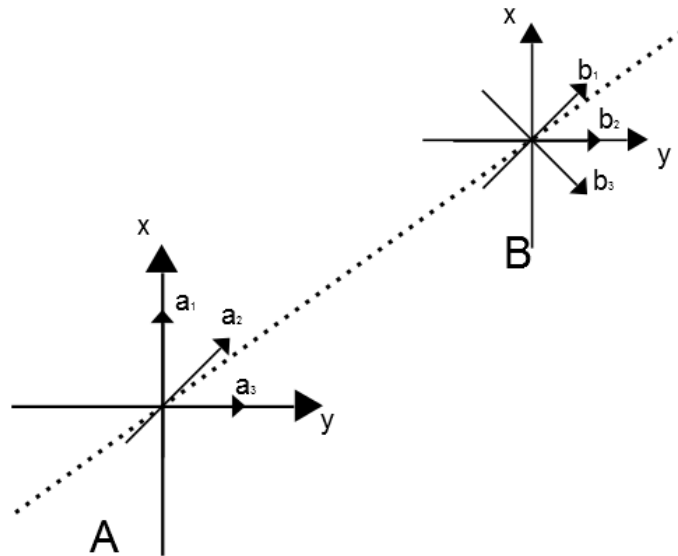


Figura 1.1: Sistemi di riferimento utilizzati nel protocollo E91.

Alice e Bob al momento della misura effettueranno una scelta casuale dell'asse su cui misurare, rispettivamente a_i e b_j . Il protocollo   semplice: facendo le misure con assi casuali si andr  a generare la chiave quando gli assi coincidono, L'entanglement ci assicura di ottenere risultati identici (o opposti, a seconda dello stato entangled). Quando gli assi sono diversi, i dati vengono

usati per controllare la disuguaglianza di Bell e verificare che non ci sia una terza parte ad intromettersi nel canale quantistico, la cui azione distruggerebbe così l'entanglement. Per stabilire quando gli assi coincidono e quando no si comunica tramite un canale classico, esattamente come per il protocollo BB84.

La quantità $E(a_i, b_j)$ é il coefficiente di correlazione delle misure di Alice e Bob lungo gli assi a_i e b_j ed é così definita:

$$E(a_i, b_j) = P_{++}(a_i, b_j) + P_{--}(a_i, b_j) - P_{+-}(a_i, b_j) - P_{-+}(a_i, b_j) \quad (1.7)$$

dove $P_{\pm\pm}(a_i, b_j)$ é la probabilità di ottenere il risultato ± 1 lungo l'asse a_i e ± 1 lungo l'asse b_j . Dalla meccanica quantistica si ricava che:

$$E(a_i, b_j) = -a_i \cdot b_j \quad (1.8)$$

Seguendo lo stesso lavoro fatto in [15] si definisce una quantità S composta dai coefficienti di correlazione con assi di misura ad angoli diversi.

$$S = E(a_1, b_1) - E(a_1, b_3) + E(a_3, b_1) + E(a_3, b_3) \quad (1.9)$$

La disuguaglianza CHSH permette di verificare se i valori degli spin siano anticorrelati. Il valore S é compreso tra $-2 < S < 2$ se un origliatore altera lo stato di entanglement effettuando una misura prima di Alice e Bob. Mentre nel caso non vi sia un origliatore il valore di S dovrebbe essere pari a $S = -2\sqrt{2}$. Tale protocollo é stato ideato usando particelle a spin $1/2$ ma puó essere facilmente adattato alla polarizzazione della luce sostituendo gli stati up e down con la polarizzazione verticale e orizzontale ed utilizzando sempre gli stessi tre sistemi di riferimento sfasati per ogni analizzatore.

1.4 B92

Il protocollo B92, ideato sempre da C.Bennet [20], é una versione modificata del protocollo BB84 che permette di usare qualunque coppia di stati di polarizzazione non ortogonali. Si denotino per semplicitá questi due stati come $|1\rangle$ e $|0\rangle$ ma va sottolineato che in questo caso gli stati non sono ortogonali. Sperimentalmente questi stati si possono implementare con qualunque coppia di fotoni in polarizzazione lineare che non abbia un angolo di 90° tra i piani di oscillazione del campo elettrico. Il protocollo si svolge con Alice che manda casualmente uno dei due qubit, a cui viene assegnato corrispettivamente il bit classico 1 o 0. Bob misurerá casualmente gli operatori di

proiezione

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 - |1\rangle\langle 1| \\ P_1 &= 1 - |0\rangle\langle 0| \end{aligned} \quad (1.10)$$

che proiettano su sottospazi ortogonali ai due qubit. Dunque P_0 dà segnale negativo quando riceve $|1\rangle$ mentre darà un risultato positivo con probabilità $1 - |\langle 1|0\rangle|^2$ quando riceve $|0\rangle$. Analogamente per la misura di P_1 invertendo i qubit. Come sempre ci sarà oltre al canale quantistico quello classico, dove questa volta Bob dichiarerà quali risultati positivi ha avuto, e non che operatore ha misurato, scartando tutti gli altri. Se non ci fossero origliatori nella canale quantistico il numero di conteggi positivi dovrebbe essere circa $1 - |\langle 1|0\rangle|^2$ del totale. Inoltre si usa sacrificare qualche bit di chiave comunicandolo nel canale classico per essere sicuri di avere gli stessi valori senza falsi positivi.

1.5 Alingment-free

Un requisito fondamentale per la riuscita della distribuzione della chiave quantistica nei diversi protocolli è il fatto che Alice e Bob condividano un sistema di assi di riferimento. In tale modo è possibile attribuire ad ogni polarizzazione (lineare) lo stesso significato in bit classici. Questo è ovvio, in quanto se i sistemi di riferimento non fossero condivisi ma ruotati, senza esserne a conoscenza, i qubit che verrebbero inviati da Alice verrebbero male interpretati da Bob a causa della rotazione nell'altro sistema di riferimento. In figura 1.2 viene mostrato un esempio in cui Alice manda nella base $+$ lo stato $|V\rangle$. A causa della rotazione di 45° , ignota agli sperimentatori, avviene una trasformazione dovuta al diverso sistema di riferimento. Dunque per Bob lo stato in arrivo nel suo sistema di riferimento è $|+\rangle$, nel caso in cui decida di misurare in base $+$ lo stato collasserà al 50% in $|H\rangle$ e al 50% in $|V\rangle$. Nel canale classico poi le basi saranno dichiarate uguali e dunque c'è una probabilità del 50% che il bit venga generato sbagliato.

Quindi se questa rotazione tra i singoli sistemi di riferimento non fosse nota non potremmo risalire alla polarizzazione esatta, conseguentemente la distribuzione di chiave quantistica risulterebbe impossibile. In un esperimento di laboratorio questo non è generalmente un problema, ma lo diventa quando si considera, ad esempio, la comunicazione quantistica tramite fasci ottici tra due sistemi di riferimento in continuo moto relativo, come possono esserlo due satelliti nello spazio. Sperimentalmente si può ricorrere ad una serie di tecniche per compensare questo problema nel caso di rotazioni lente o prevedibili [21] [22] [23] [24].

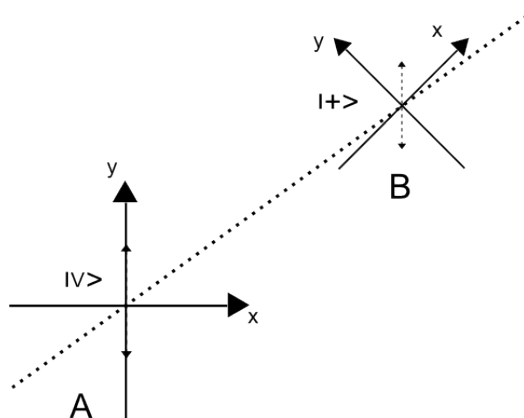


Figura 1.2: Sistemi di riferimento ruotati di 45° , Alice e Bob sono convinti di misurare in base $+$ ma Bob misura un valore diverso da Alice, in questo caso le due basi vengono invertite.

Per non essere soggetti a questo problema si devono utilizzare stati indipendenti dalla rotazione relativa tra i due sistemi di riferimento [25] [2]. In meccanica quantistica il generatore delle rotazioni é l'operatore del momento angolare totale, dunque se il momento angolare totale fosse nullo gli stati sarebbero insensibili alla rotazione attorno all'asse di propagazione del fascio. Sfruttando le potenzialitá di sistemi ottici come le q-plate, le cui proprietá verranno discusse piú estensivamente nel capitolo successivo, é possibile creare facilmente tali stati e usarli in protocolli di informazione quantistica [26] [27]. É stata da poco dimostrata sperimentalmente, tramite propagazione in spazio libero su una distanza di 210 m, la distribuzione di chiave quantistica indipendente dal sistema di riferimento grazie all'uso di stati con momento angolare orbitale generati tramite una q-plate [28].

Capitolo 2

Momento angolare Orbitale

La teoria ondulatoria della luce afferma che un'onda monocromatica parassiale, che può sempre essere espressa come $U(r) = A(r) \exp(-ikz)$, deve soddisfare l'equazione di Helmholtz che, in questo caso, si scrive:

$$\nabla_T^2 A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

dove A è l'ampiezza complessa dell'onda, k il numero d'onda e $\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Ci si vuole, ora, restringere al caso di particolari soluzioni dotate di momento angolare orbitale. La soluzione tipicamente dotata di questa proprietà è data dal fascio di Laguerre-Gauss, dove la modulazione spaziale dei modi trasversi è data dai polinomi di Laguerre. Un fascio di luce monocromatica che si propaga in una direzione può trasportare momento angolare in due modi. Il primo è associato alla polarizzazione circolare del fotone, nel qual caso ogni fotone trasporta momento angolare pari a $\pm\hbar$ a seconda del segno della polarizzazione. L'altro modo è nella forma orbitale, associato al profilo di fase. Usando la notazione in fasori un fascio che trasporta del momento angolare orbitale può essere scritto come $E_0(r, \phi) = E(r) \exp(im\phi)$, per campi di questo tipo è stato mostrato che trasportano momento angolare orbitale [29].

I fronti d'onda di modi trasversali dotati di momento angolare orbitale presentano questa caratteristica forma elicoidale, figura 2.1. Il fronte d'onda di un fascio è definito come la varietà bidimensionale costituita da tutti i punti dell'onda aventi la stessa fase. Dato il formalismo usato in coordinate cilindriche si trova facilmente la varietà $m\phi + kz = 2\pi$, con k costante ed m intero si trova la varietà elicoidale di interesse.

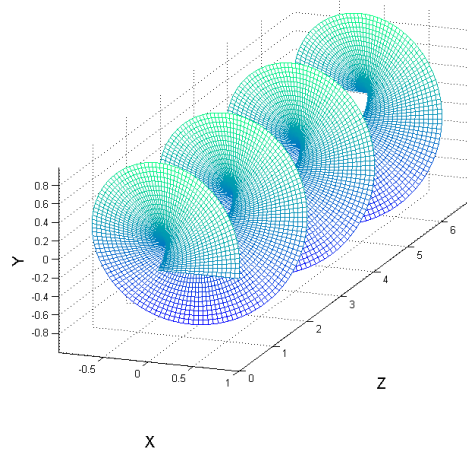


Figura 2.1: Fronte d'onda elicoidale tipico dei modi che trasportano momento angolare orbitale

2.1 Q-plate

Al fine di generare un fascio ottico dotato di momento angolare orbitale é stata usata una q-plate [4] [5] [6] [7] [8]. La q-plate per questo studio é particolarmente indicata in quanto ci permette di accoppiare tra loro le due forme di momento angolare ottenendo dunque il totale controllo dello stato del sistema. Il trasferimento del solo momento angolare legato allo spin alla materia si ottiene tramite mezzi ottici anisotropi. Il trasferimento del solo momento angolare orbitale alla materia si ottiene invece con mezzi isotropici trasparenti ma inomogenei. Per ottenere indipendentemente l'accoppiamento di entrambe le forme di momento angolare serve un mezzo che sia disomogeneo e anisotropo, caratteristiche della q-plate. Esistono persino delle specifiche geometrie in cui le variazioni dei due momenti angolari sono sempre in opposizione tra loro, in tale modo il momento angolare totale trasferito alla materia é nullo.

Una lamina birifrangente ha la proprietá di avere un indice di rifrazione variabile a seconda della direzione in cui viene attraversata dalla luce. La direzione in cui l'indice di rifrazione non varia é definita asse ottico e viene posta perpendicolarmente rispetto alla direzione di propagazione del fascio. Quando la luce incide su una lamina birifrangente le componenti della polarizzazione, ortogonali tra loro, sono soggette a indici di rifrazione differenti e dunque avranno un ritardo di fase relativo di $k\Delta nD$. Δn é la differenza

di indice di rifrazione per le due polarizzazioni, D lo spessore della lamina. Sfruttando tali proprietà é possibile costruire, ad esempio, lamine a mezz'onda o a quarto d'onda che permettono di alterare in maniera controllata la polarizzazione della luce.

Per comprendere la natura della q-plate si prenda come esempio una lastra di materiale birifrangente con un ritardo di fase omogeneo attraverso la lastra e con una orientazione disomogenea dell'asse ottico, il quale é parallelo alle facce della lastra. La luce dovrà incidere perpendicolarmente alle facce della lastra. Sul piano della lastra il fascio troverá l'asse ottico con un angolo $\alpha(r, \phi)$ rispetto all'asse x , dove:

$$\alpha(r, \phi) = q\phi + \alpha_0 \quad (2.2)$$

con q ed α_0 costanti. Chiaramente il punto $r = 0$ costituisce una singolaritá e implica quindi un difetto del mezzo ottico, tale singolaritá si verifica spontaneamente in alcuni cristallo liquidi nematici. Si puo' anche notare che nel caso q assuma valore intero o semintero non vi sono discontinuitá di linea. I mezzi con tali geometrie sono chiamati q-plate, si possono vedere in figura 2.2 alcune geometrie realizzabili, la geometria a) é quella a cui si é interessati per via della sua particolaritá.

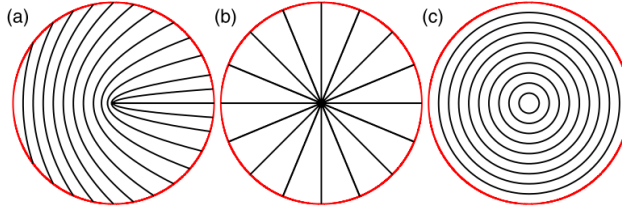


Figura 2.2: La tangente alle linee in figura é la direzione dell'asse ottico. a) $q = 1/2$ $\alpha_0 = 0$, b) $q = 1$ $\alpha_0 = 0$, c) $q = 1$ $\alpha_0 = \pi/2$ [4]

Per analizzare l'effetto della q-plate é pratico utilizzare il formalismo delle matrici di Jones. L'effetto della q-plate puo' essere descritto dalla matrice:

$$\begin{aligned} M &= R(-\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot R(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove $R(\alpha)$ é la matrice di rotazione di angolo α . Tale matrice rappresenta l'azione di un lamina a mezz'onda con un angolo α tra l'asse ottico e l'asse delle x . Un'onda piana con polarizzazione circolare sinistra é descritta nel formalismo di Jones dal vettore $E_{\text{in}} = E_0 \cdot (1, i)$. Si effettua quindi il calcolo per tale fascio passante attraverso la q-plate.

$$\begin{aligned} E_{\text{out}} &= M \cdot E_{\text{in}} = E_0 \begin{pmatrix} \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha - i \cos 2\alpha \end{pmatrix} \\ &= E_0 e^{i2\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = E_0 e^{i2q\phi} e^{i2\alpha_0} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Il campo uscente ha quindi polarizzazione circolare destra ed é dotato di momento angolare orbitale pari a $2q$. Avendo come obiettivo il momento angolare totale nullo, la scelta cade sulla q-plate con $q = 1/2$. In questo modo il fascio in uscita dalla q-plate avrá sempre segni opposti per i due tipi di momento angolare ed $m = \pm 1$, garantendoci la nullitá del momento angolare totale. La realizzazione sperimentale della q-plate [6] prevede la lavorazione di una lastra di vetro con un laser, in tal modo quando vi viene versato sopra il cristallo liquido nematico questo si allinea con la lavorazione effettuata dando l'orientamento interessato. Infine si chiude il tutto poggiando sopra un'altra lastra di vetro lavorata, a seconda di diversi parametri impiegati nella lavorazione si ottengono le varie q-plate. Attualmente sono state realizzate q-plate con un parametro q fino a 50 [9].

2.1.1 Efficienza di conversione

L'efficienza di conversione della q-plate si puó controllare tramite tensione esterna [8] [7]. Il fascio in uscita avrá una componente con polarizzazione invertita e $m \neq 0$ e una componente imperturbata che attraversa la lamina. Ovvero in caso di polarizzazione circolare sinistra entrante ($|L \rangle$) si avrá:

$$|out \rangle = \cos(\delta/2) |HyGG \rangle_{00} |L \rangle + e^{i\alpha} \sin(\delta/2) |HyGG \rangle_{-mm} |R \rangle \quad (2.5)$$

dove α é una fase generica tra i due stati e δ é una differenza di fase data dalla q-plate che é pilotabile tramite la tensione controllando in questo modo la probabilitá di ottenere uno stato o l'altro, ovvero l'efficienza della conversione. Il modo $|HyGG \rangle_{pm}$ é chiamato modo Ipergeometrico-Gaussiano (per semplicitá da qui in avanti solo Ipergeometrico) e verrá spiegato nella sezione successiva, in questo caso con coefficienti 0 e 0 si identifica il modo

fondamentale ovvero Gaussiano, con coefficienti $-m$ e m si identifica un modo dotato di momento angolare orbitale pari ad m . Sperimentalmente sono state ottenute efficienze di conversione del 85% [30], tale valore é calcolato sulla quantità di luce incidente sulla q-plate, quindi tiene conto anche di effetti di riflessione e diffrazione. Se non si considerassero le perdite spurie la sola efficienza di conversione da polarizzazione a momento angolare orbitale é superiore al 99%.

2.2 Modo Ipergeometrico-Gaussiano

Nel nostro studio é stato usato un fascio dotato di momento angolare orbitale per rendere la comunicazione quantistica indipendente dal sistema di riferimento. Generalmente viene utilizzato un fascio laser con modo trasversale di Laguerre-Gauss [29], in questo studio invece viene utilizzato il fascio ipergeometrico [3]. Il Fascio ipergeometrico presenta la seguente ampiezza complessa:

$$\begin{aligned}
 |\text{HyGG}\rangle_{\text{pm}} = u(\rho, \phi, z) &= \\
 &= CC_{pm} i^{|m|+1} z^{p/2} (z+i)^{-i(1+|m|+p/2)} \\
 &\rho^{|m|} e^{-\left(\frac{\rho^2}{z+i}\right)} e^{im\phi} {}_1F_1\left(-\frac{p}{2}, |m|+1; \frac{\rho^2}{z(z+i)}\right)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dove ρ e z sono quantità adimensionali, $\rho = r/W_0$ e $z = d/z_0$, dove d ed r sono rispettivamente la distanza dal waist minimo a cui viene visto il campo elettrico e r il raggio nelle coordinate cilindriche, tali quantità sono dimensionali. W_0 é chiamato waist minimo del fascio ed é definito come il raggio della circonferenza centrata sul centro del fascio attraverso cui passa $1 - 1/e^2$ della potenza totale del fascio sul piano focale, ovvero dove lo spot ha le dimensioni minime. Tale definizione vale per tutti i tipi di fascio e non soltanto per quello ipergeometrico. z_0 é detto parametro confocale o distanza di Rayleigh ed é definita come:

$$z_0 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \tag{2.7}$$

dove λ é la lunghezza d'onda del fascio. Nella formula 2.6 CC_{pm} é un coefficiente numerico definito come:

$$CC_{pm} = \left(\frac{2^{p+|m|+1}}{\pi \Gamma(p+|m|+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + |m| + 1\right)}{\Gamma(|m| + 1)} \quad (2.8)$$

tale valore si ottiene dalla condizione di normalizzazione, ovvero il coefficiente CC_{pm} é tale per cui ${}_{pm} \langle \text{HyGG} | \text{HyGG} \rangle_{pm} = 1$.

La funzione ${}_1F_1\left(-\frac{p}{2}, |m| + 1; \frac{\rho^2}{z(z+i)}\right)$ é la funzione ipergeometrica confluyente

[31], da qui in avanti verrà chiamata semplicemente ipergeometrica. Per il fascio utilizzato in questo lavoro di tesi si hanno come parametri $m = 1$ e $p = -1$, questo caratterizza un fascio con momento angolare orbitale, trasportato dal fronte d'onda, pari a 1. La funzione ipergeometrica in questo specifico caso si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 2; x\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(k+2)} \frac{x^k}{k!} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)}{(k+1)!} \frac{x^k}{k!} \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.3 Modo di Laguerre-Gauss

Il modo di Laguerre-Gauss é dotato di momento angolare orbitale. Esistono numerosi metodi per ottenerlo sperimentalmente, ad esempio facendo incidere un fascio Gaussiano su un ologramma a forchetta, tale metodo é estremamente flessibile dunque questo modo trasversale é largamente impiegato a livello sperimentale. La sua ampiezza complessa, che come per il modo ipergeometrico é soluzione dell'equazione di Helmholtz, é:

$$\begin{aligned} U_{q,m}(r, \phi, d) &= A_{q,m} \left(\frac{W_0}{W(d)} \right) \left(\frac{r}{W(d)} \right)^m L_q^{(m)} \left(\frac{2r^2}{W(d)^2} \right) e^{-\frac{r^2}{W(d)^2}} \\ &\cdot \exp\left(-ikd - ik\frac{r^2}{2R(d)} - im\phi + i(m+2q+1)\zeta(d)\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

in questa formula $A_{q,m}$ sono i coefficienti di normalizzazione, $W(d)$ é il waist del fascio gaussiano (per la definizione vedi sez 3.1), $L_q^{(m)}$ sono i polinomi di Laguerre generalizzati, $R(d) = d(1 + (z_0/d)^2)$ e $\zeta(d)$ é la fase di Gouy, é definita come $\arctg(d/z_0)$

2.3.1 Sviluppo in serie di modi di Laguerre-Gauss

Vi sono due interessanti rapporti matematici tra la funzione ipergeometrica e i polinomi di Laguerre generalizzati, il primo:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1 + n)}{\Gamma(\alpha + 1)n!} {}_1F_1(-n, \alpha + 1, x) \quad (2.11)$$

Per i polinomi di Laguerre n é un intero positivo, o zero, α invece ha la condizione di appartenere ai reali. Ponendo l'uguaglianza tra questi indici e quelli usati nella formula 2.6 si nota come la relazione precedente valga per tutti gli m e solo per determinati valori di p .

$$\begin{aligned} n &= \frac{p}{2} \\ \alpha &= |m| \end{aligned}$$

É dunque possibile sostituire la funzione ipergeometrica con un polinomio di Laguerre generalizzato solamente nel caso in cui p sia pari e maggiore o uguale a zero. Quando si verifica questo caso il modo ipergeometrico é un modo di Laguerre-Gauss modificato [3].

La seconda relazione permette di esprimere la funzione ipergeometrica tramite lo sviluppo in serie di polinomi di Laguerre generalizzati:

$${}_1F_1\left(a, b, \frac{xy}{x-1}\right) = (1-x)^a \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+q)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+q)} L_q^{(b-1)}(y)x^q \quad (2.12)$$

Andando a sostituire $y = \rho^2/(1+z^2)$ ed $x = 1+iz$, usando le unità adimensionali, e sostituendo anche $a = -p/2$, $b = |m| + 1$, si riesce a ritrovare la funzione ipergeometrica come espressa nella formula 2.6. Effettuata la sostituzione quello che si può ottenere é l'espansione in serie di modi di Laguerre-Gauss del modo Ipergeometrico [3]:

$$|\text{HyGG}\rangle_{\text{pm}} = \sum_{q=0}^{\infty} A_{pq} |\text{LG}\rangle_{\text{qm}} \quad (2.13)$$

$$A_{pq} = \sqrt{\frac{(q+|m|)!}{q!\Gamma(p+|m|+1)} \frac{\Gamma(q-p/2)\Gamma(p/2+|m|+1)}{\Gamma(-p/2)\Gamma(q+|m|+1)}} \quad (2.14)$$

Pensando di esprimere l'ipergeometrica tramite questa serie si cerca di vedere a che livello di confidenza si riesce a riprodurre il modo originario troncando la sommatoria. Essendo ogni termine della serie un modo trasversale di Laguerre-Gauss del campo elettromagnetico e sapendo che questi modi sono tutti ortogonali tra di loro é possibile esprimere con una certa imprecisione l'ipergeometrica avanzando con la serie fino ad un certo numero. I coefficienti, come sono espressi nella formula 2.14, sono già normalizzati e dunque basta sommarli in quadratura, in quanto il modulo quadro di ciascuno di essi rappresenta la probabilità di trovare il relativo modo di Laguerre-Gauss all'interno del modo Ipergeometrico effettuando una misura.

Nella figura 2.3 si può notare come per $m = 1$ si ha una confidenza maggiore di 2σ per $q \geq 5$, $m = 2$ per $q \geq 21$ e $m = 3$ per $q \geq 46$. Dunque all'aumentare di m aumentano molto rapidamente il numero di modi di Laguerre-Gauss necessari per raggiungere una confidenza almeno del 95,45%, ovvero 2σ . Come controllo é sufficiente verificare la similarità tra i profili del modo Ipergeometrico ed la serie dei Laguerre-Gauss.

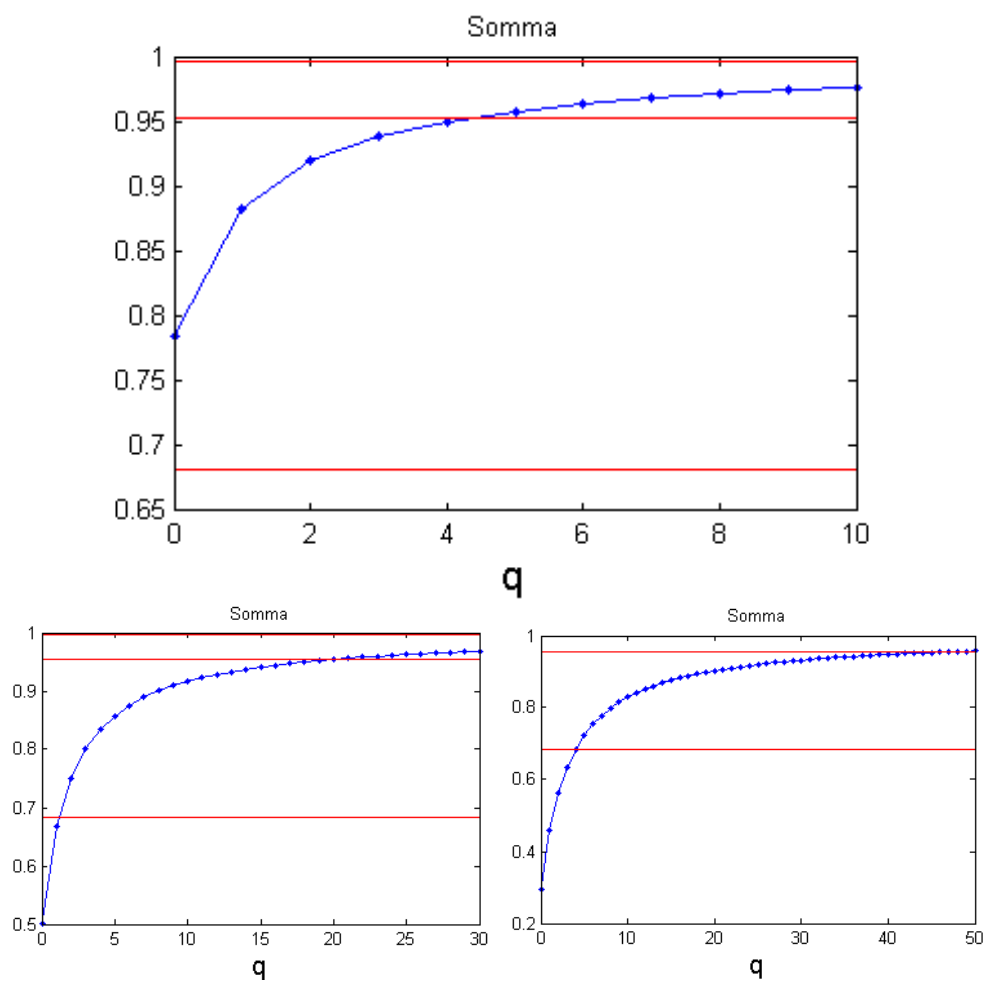


Figura 2.3: In alto la somma in quadratura dei termini della serie fino al termine in ascissa per $m = 1$, in basso a sinistra per $m = 2$ in basso a destra per $m = 3$. Le linee rosse orrizzontali corrispondono ad una confidenza di 1, 2 e 3 σ

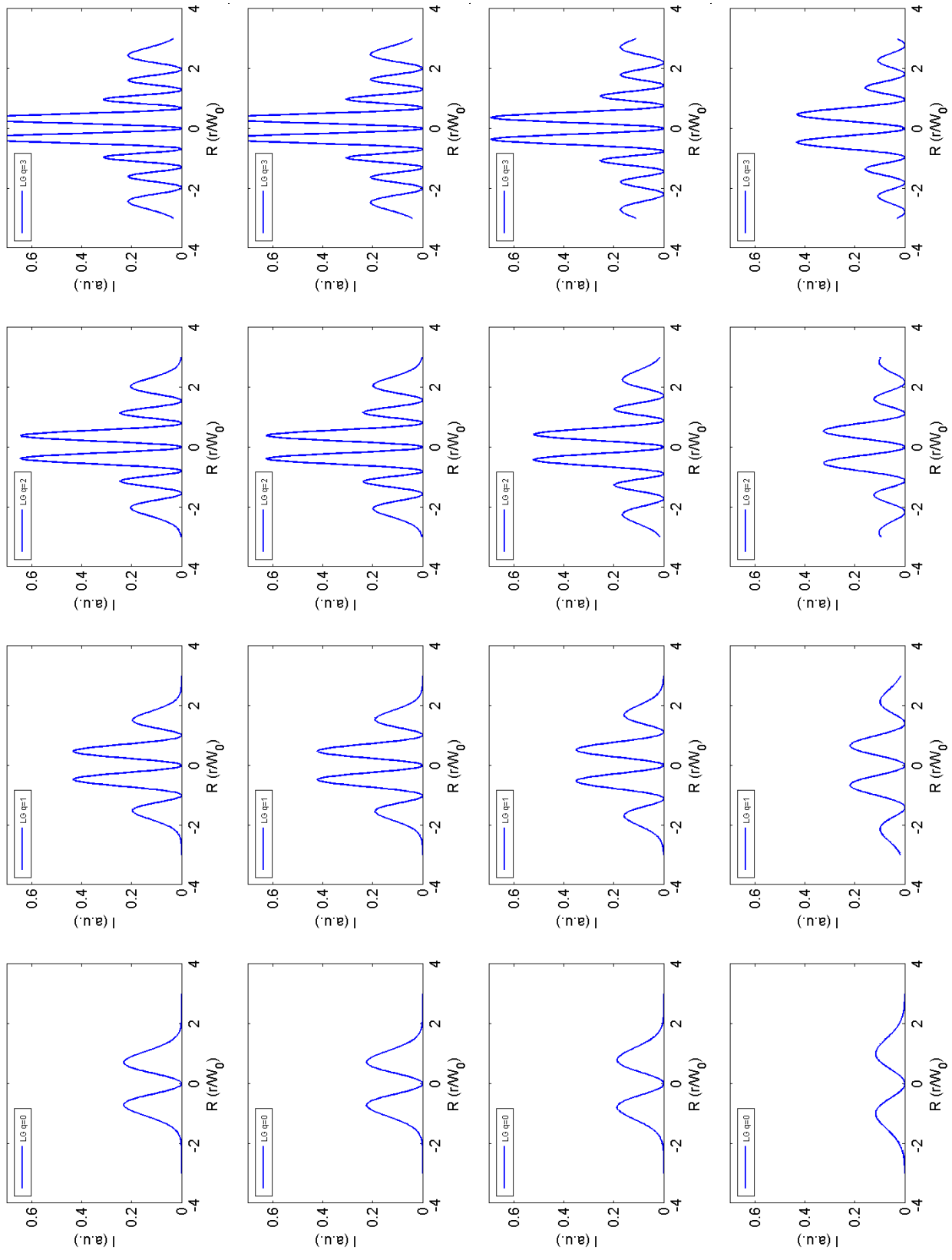


Figura 2.4: In figura sono rappresentati i modi di Laguerre-Gauss. Da sinistra verso destra cambia il parametro q del modo ($q=0,1,2,3$). Dall'alto verso il basso cambia la posizione z a cui viene misurato tale profilo ($z=0.1, 0.2, 0.5, 1$).

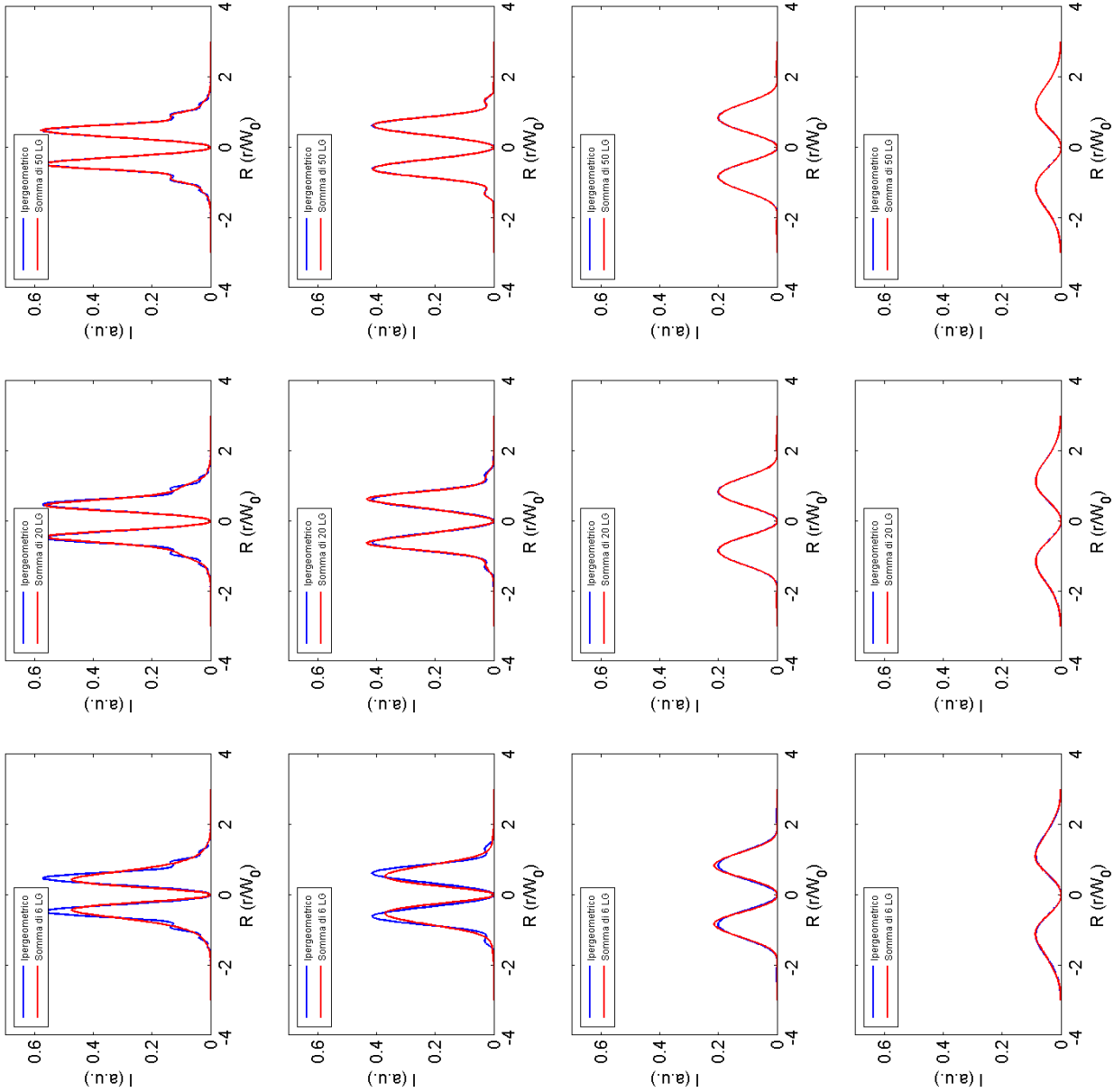


Figura 2.5: In figura sono rappresentati il modo Ipergeometrico in Blu, in rosso, la somma in serie dei modi di Laguerre-Gauss fino ad un certo ordine, da sinistra verso destra gli ordini a cui la serie é troncata sono 6, 20, 50. Dall'alto verso il basso cambia la posizione z a cui viene misurato tale profilo ($z=0.1, 0.2, 0.5, 1$).

In figura 2.5 si osservano vari sviluppi in serie di modi di Laguerre-Gauss come descritto dalla formula 2.14, alla distanza minima rappresentata ($z = 0.1$) si può osservare come anche sommando 20 e 50 modi l'accordo non sia in realtà perfetto in prossimità dei massimi e minimi locali del modo Ipergeometrico. Questo porta alla conclusione che più si è vicini alla posizione $z = 0$ più modi è necessario sommare per avere un buon accordo con l'ipergeometrico.

Si è osservato che per effettuare fare i calcoli sfruttando lo sviluppo in serie fino ad un ordine adeguato il tempo richiesto è maggiore di quello del modo ipergeometrico che si vuole rappresentare. Questo ha portato alla scelta di usare nei calcoli computazionali, per analisi e per la teoria, la funzione ipergeometrica stessa, e dunque il modo ipergeometrico in sé senza esprimerlo come lo sviluppo in modi di Laguerre-Gauss. Si è dunque cercato di implementare, inizialmente per $m = 1$ e successivamente anche per $m > 1$, un algoritmo più veloce di quello insito nel programma usato per le analisi.

2.4 Semplificazione dell'ipergeometrica

La funzione Ipergeometrica prefornta nel programma di analisi utilizzato è computazionalmente pesante da calcolare. Dovendo calcolarla ripetute volte nel corso degli studi si è pensato di trovare un metodo per semplificarlo e ridurre il tempo di calcolo. Come primo metodo si è pensato di effettuare una mappatura. Questo procedimento consiste nel calcolare precedentemente il valore della funzione ipergeometrica, espressa all'interno della formula 2.6 per $m = 1$ e $p = -1$, in funzione di z ed r . Dunque osservando la funzione si nota che l'ipergeometrica per $-z$ è uguale a quella per z ad un dato r , questo permette di dimezzare i valori di z andando quindi a calcolare la funzione con lo scopo di mapparla solamente nella regione $z > 0$ e $r > 0$.

Ma come si può vedere dalla figura 2.6 tale metodo presenta notevoli limitazioni, prima di tutto la regione in cui avviene la mappatura, essendo memorizzata, è limitata, dunque potrebbe succedere (anche se si potrebbe aggirare aumentando la regione memorizzata) che sia richiesto di calcolarla al di fuori della regione mappata. Il problema principale, che si nota osservando l'origine degli assi nella figura 2.6, è la sensibilità della mappatura. Prendendo solo alcuni valori di r e di z si nota che per valori molto piccoli la sensibilità scelta per la mappatura è sempre insufficiente a causa di variazioni molto rapide della funzione Ipergeometrica vicino all'origine. Dunque esistono sempre delle condizioni all'interno della regione mappata in cui la sensibilità scelta per la memorizzazione risulta insufficiente. A causa di que-

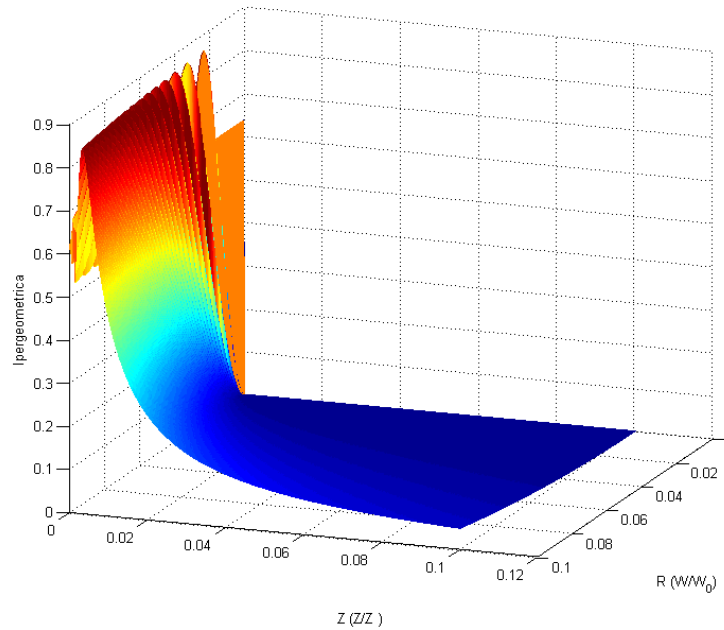


Figura 2.6: Mappatura della funzione Ipergeometrica per r tra 0 ed 0.1 con risoluzione di 0.0005 e per z tra 0 ed 0.1 con risoluzione 0.0002

sta problematica é stato scelto di abbandonare la tecnica della mappatura per semplificare computazionalmente il calcolo della funzione Ipergeometrica.

Come altro metodo, seppur si sia osservato essere solo di poco piú lento e dunque un'ottima alternativa, si é pensato di ottimizzare il calcolo della funzione ipergeometrica stessa. Dunque questa é stata rielaborata per consentire di essere rapida al calcolo e per operare con numeri piccoli.

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 2; \frac{\rho^2}{z(z+i)}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{160} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(k + 1/2) \left(\frac{\frac{r^2}{z\sqrt{(z^2+1)}}}{k!^{\frac{1}{k}} \Gamma(k+2)^{\frac{1}{k}}} \right)^k e^{ik \arctg\left(-\frac{1}{z}\right)} \quad (2.15)$$

Il limite di 160 sulla sommatoria é dato dalla dimensione massima delle variabili utilizzabili. Il fattoriale di 170 restituisce come valore $7.2574 \cdot 10^{306}$, mentre il fattoriale di 171 restituisce infinito, si é quindi costretti a limitare la dimensione della serie (il programma usato per l'analisi ha come massimo valore prima dell'infinito $vmax = 1.7977 \cdot 10^{308}$). Ma tale limite si estende a

tutti i valori, ed é particolarmente importante per il termine che é funzione del raggio e di z . Avendo giá troncato la sommatoria a 160 per i fattoriali si ha che il problema di calcolo é situato nel termine $\frac{r^2}{z\sqrt{(z^2+1)}}$, ponendolo uguale al valore massimo raggiungibile si trova il raggio limite in funzione di z a cui é possibile calcolare la funzione ipergeometrica:

$$R_{limite} = \sqrt{vmax^{\frac{1}{160}} z \sqrt{z^2 + 1}} \quad (2.16)$$

In figura 2.7 si osserva un grafico di tale limite. La regione sottostante alla curva rappresenta quella in cui il calcolo della funzione Ipergeometrica riesce, al di sopra la funzione implementata diverge e da risultati scorretti. Ad esempio per $z = 1$ la funzione diverge non appena si arriva verso $r = 11$. In realtá questo calcolo é molto semplificato, in quanto calcola il raggio e la posizione massimi per l'ultimo termine della sommatoria, mentre affinché il risultato sia corretto servirebbe che tale termine sia trascurabile rispetto ai precedenti in modo che la serie sia troncata nel modo corretto. Se invece ci si trovasse ad un termine significativo in cui la serie varia fortemente si avrebbe un risultato diverso da quello della reale funzione ipergeometrica. Dunque la reale regione di validitá é ridotta rispetto a quella mostrata in figura.

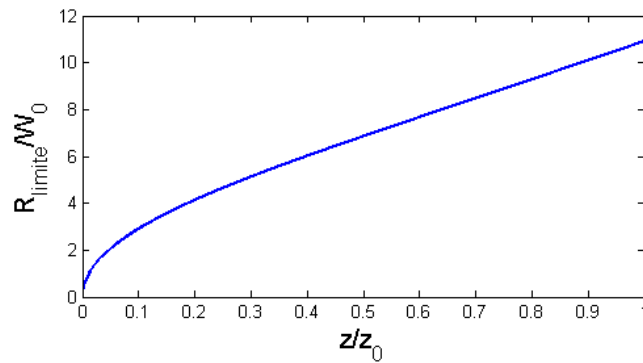


Figura 2.7: Raggio limite al cui la funzione ipergeometrica puó essere calcolata in funzione di z

Tutto questo limita la capacitá della nostra sommatoria, in quanto porta la serie a divergere nelle condizioni appena descritte.

Come si osserva dalla figura 2.8, la zona in cui la funzione Ipergeometrica calcolata con l'algoritmo usato nella formula 2.15 é limitata e presenta un

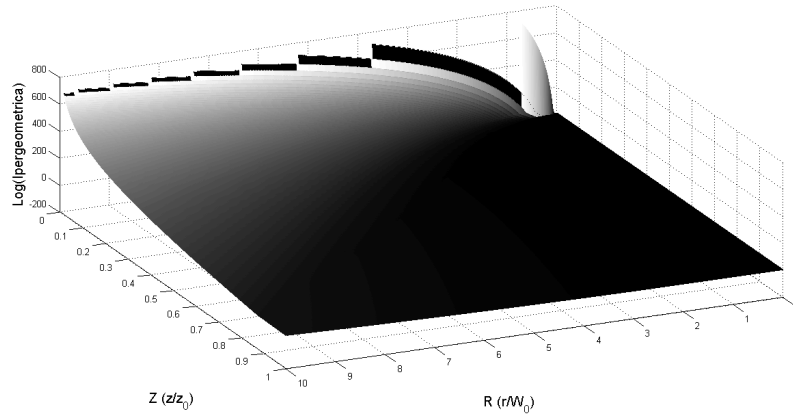


Figura 2.8: Logaritmo della funzione Ipergeometrica come definita all'interno della formula 2.6. La zona nera piatta sul fondo rappresenta l'unica accettabile, il rimanente rappresenta la divergenza dalla serie

andamento analogo a quello previsto dalla formula 2.16 . Nonostante il grafico renda bene la situazione non é perfettamente fedele in quanto non mostra piccole variazioni comunque deleterie per la funzione.

Si é dunque scelto di adoperare come condizione d'uso per la formula semplificata $z \geq 0.5$, all'interno di questo limite, nella regione di validitá, si é verificato che l'uso della serie implementata é circa 400 volte piú rapido (verificato tramite il calcolo di 3000 punti diversi) della funzione ipergeometrica preformata dal programma di analisi.

2.5 Profilo di intensitá

Il profilo di intensitá di un fascio ipergeometrico é fundamentalmente differente da un fascio di Laguerre-Gauss. Tale differenza é facilmente osservabile in prossimitá del waist minimo. Nella figura 2.9 si osserva il confronto tra il profilo di intensitá del fascio ipergeometrico, con parametri $m = 1$ $p = -1$, e il fascio di Laguerre-Gauss, con parametri $m = 1$ $q = 0, 1$.

Nella figura 2.9 in alto si é situati in $z = 0$ come si osserva il fascio ipergeometrico tende ad una gaussiana con un buco al centro, la singolaritá di fase, di dimensione infinitesimale. Nelle immagini seguenti si mostrano valori di z di 0.05 e 0.1, si osserva molto bene come sia forte la variazione del profilo del fascio ipergeometrico mentre complessivamente il profilo dei fasci di Laguerre-Gauss varia poco con z , come si puo' vedere bene dalla figura 2.4.

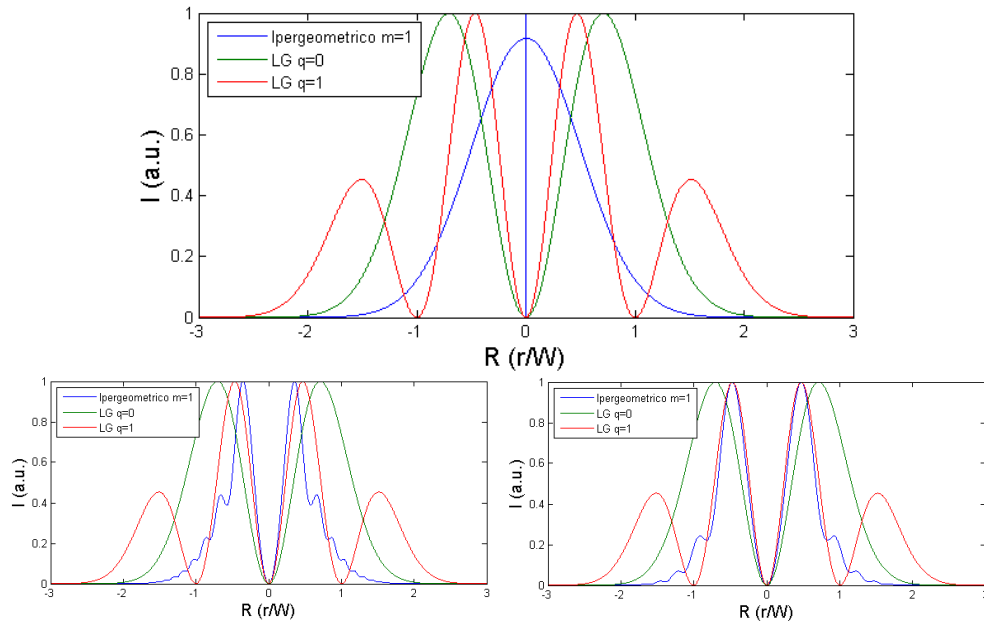


Figura 2.9: Profili di intensità per $z=0, 0.05$ ed 0.1 , in blu l'Ipergeometrica, in verde Laguerre-Gauss con $q=0$ e in rosso Laguerre-Gauss con $q=1$

Spostandoci fuori dalla regione di Rayleigh, nella figura 2.10 si osserva $z = 1$ e 2 , il profilo di intensità dell'ipergeometrica tende a stabilizzarsi, ma resta comunque marcatamente differente dal profilo dei fasci di Laguerre-Gauss anche se in alcune posizioni è possibile osservare una profonda somiglianza con uno dei due modi di LG (posizione $z = 0.1$ ed 1)

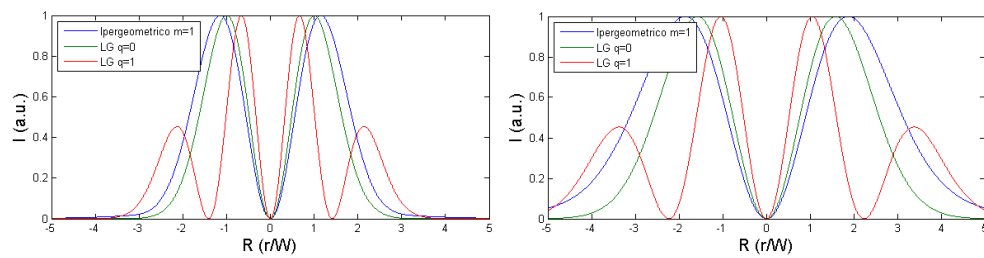


Figura 2.10: Profili di intensità per $z=1$ ed 2 , in blu l'Ipergeometrica, in verde Laguerre-Gauss con $q=0$ e in rosso Laguerre-Gauss con $q=1$

Questa variazione del profilo di intensità permette di discriminare con estrema facilità se un fascio è del tipo Laguerre-Gauss o Ipergeometrico, in base alla forma dello spot nel waist minimo e lontano da esso.

2.6 Stati indipendenti dalla rotazione

L'uso del momento angolare orbitale permette di avere degli stati indipendenti dalla rotazione che come é stato spiegato nella sezione 1.5 é una caratteristica estremamente interessante ai fini della distribuzione di chiave quantistica. Si definisca come $|R/L \rangle_p$ gli stati di polarizzazione circolare destra e sinistra del fotone, e $|r/l \rangle_o$ gli stati dotati di momento angolare orbitale con $m = -1/+1$, che corrispondono al modo Ipergeometrico (Formula 2.6). Come già accennato lo scopo é rendere indipendenti dalla rotazione gli stati usati nella distribuzione di chiave quantistica. Per questo si vuole che il momento angolare totale, costituito dalla somma di momento angolare di spin e momento angolare totale, sia nullo. Per ottenere ciò bisogna utilizzare stati ibridi di polarizzazione circolare e modi ipergeometrici con il verso della rotazione in opposizione in modo da avere una variazione di fase pari a zero nella rotazione degli stati. Applicando una trasformazione di rotazione di angolo θ si ha:

$$|R/L \rangle_p \longrightarrow_{\theta} e^{\pm i\theta} |R/L \rangle_p \quad (2.17)$$

$$|r/l \rangle_o \longrightarrow_{\theta} e^{\pm im\theta} |r/l \rangle_o \quad (2.18)$$

La q-plate presenta dunque le caratteristiche ideali a generare gli stati ibridi di interesse, si vede sfruttando le matrici di Jones, in quanto assicura che polarizzazione circolare e momento angolare orbitale abbiano siano sempre in opposizione. Dunque l'azione della q-plate con $q = 1/2$ può venire riassunta come:

$$|R \rangle_p |0 \rangle_o \longrightarrow_{q\text{-plate}} |L \rangle_p |r \rangle_o \quad (2.19)$$

$$|L \rangle_p |0 \rangle_o \longrightarrow_{q\text{-plate}} |R \rangle_p |l \rangle_o \quad (2.20)$$

dove $|0 \rangle_o$ é definito come il modo Gaussiano, ovvero privo di momento angolare orbitale. Dalle trasformazioni precedenti (formule 2.17 e 2.18) si osserva come questi stati, e conseguentemente loro combinazioni lineari, siano indipendenti dalle rotazioni, in quanto prodotto tensore di due stati la fase acquisita da uno andrà a sommarsi a quella acquisita dall'altro stato che avrà segno opposto portando così la variazione di fase ad essere nulla.

$$|L \rangle_p |r \rangle_o \longrightarrow_{\theta} |L \rangle_p |r \rangle_o \quad (2.21)$$

$$|R \rangle_p |l \rangle_o \longrightarrow_{\theta} |R \rangle_p |l \rangle_o \quad (2.22)$$

Dunque qualunque protocollo di distribuzione di chiave quantistica che usi tali stati, e per le proprietà della meccanica quantistica anche le loro sovrapposizioni, risulta essere indipendente dall'esistenza di un sistema di riferimento condiviso tra Alice e Bob. Recentemente sono stati implementati protocolli che impiegano tali stati per la propagazione [28] [2].

2.7 Stato dell'arte

Per quanto riguarda la comunicazione tramite l'uso di fasci ottici con momento angolare orbitale, sono stati effettuati vari esperimenti.

La maggior parte sono su breve distanza tramite propagazione libera di fascio laser. Ad esempio nel lavoro di Gibson et al. [32] con una distanza di 15 m, in questo caso l'informazione è stata trasmessa tramite bit classici codificati in base al diverso momento angolare orbitale del fascio. Il record per la velocità di trasferimento dati usando fasci con momento angolare orbitale [33], sempre tramite propagazione in spazio libero (di 1 m in questo caso), è di 2.56 Tbit/s. Tale velocità è stata raggiungibile tramite un multiplexing del momento angolare orbitale per aumentare la capacità del canale, tale comunicazione è comunque ancora di tipo classico e non quantistico. Sono stati effettuati esperimenti [34] di distribuzione di chiave quantistica sfruttando l'ortogonalità dei vari modi dotati di momento angolare orbitale (in tali studi sono modi di Laguerre-Gauss).

Infine vi sono recenti lavori sulla distribuzione di chiave quantistica indipendente dal sistema di riferimento grazie all'uso di fasci con momento angolare orbitale, fatti in laboratorio su brevi distanze [2] e in spazio libero controllato (210 m) [28].

Capitolo 3

Propagazione

3.1 Teoria della propagazione

La propagazione del fascio é caratterizzata dall'andamento del waist in funzione della distanza percorsa $W(z)$, che é definito come il raggio della circonferenza, con origine sul centro del fascio, attraverso cui la potenza trasmessa é pari ad $1 - e^{-2}$ della potenza totale (corrisponde a circa l'86%). Per un fascio gaussiano ideale l'andamento é già conosciuto:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (3.1)$$

Si utilizza questa definizione di waist, in quanto, sia il fascio ipergeometrico che il Laguerre-Gauss (per gli ordini superiori di q) sono dotati di massimi e minimi locali che renderebbero il calcolo con altri tipi di waist non univoco. Ad esempio, il calcolo non sarebbe univoco se definissimo il waist come la distanza dal centro del fascio a cui l'intensità si riduce ad $1/e^2$ dell'intensità massima. Per analizzare la propagazione del modo ipergeometrico si é calcolato numericamente il waist (figura 3.1) con il metodo della potenza all'86%.

Un altro parametro utile é la divergenza che, per un fascio gaussiano, é definita come:

$$\alpha = 2M^2 \frac{\lambda}{\pi W_0} \quad (3.2)$$

con $M^2 = 1$ solamente nel caso di un fascio gaussiano ideale. Nel caso di campo lontano, la divergenza lega in una relazione lineare la dimensione del waist con la distanza:

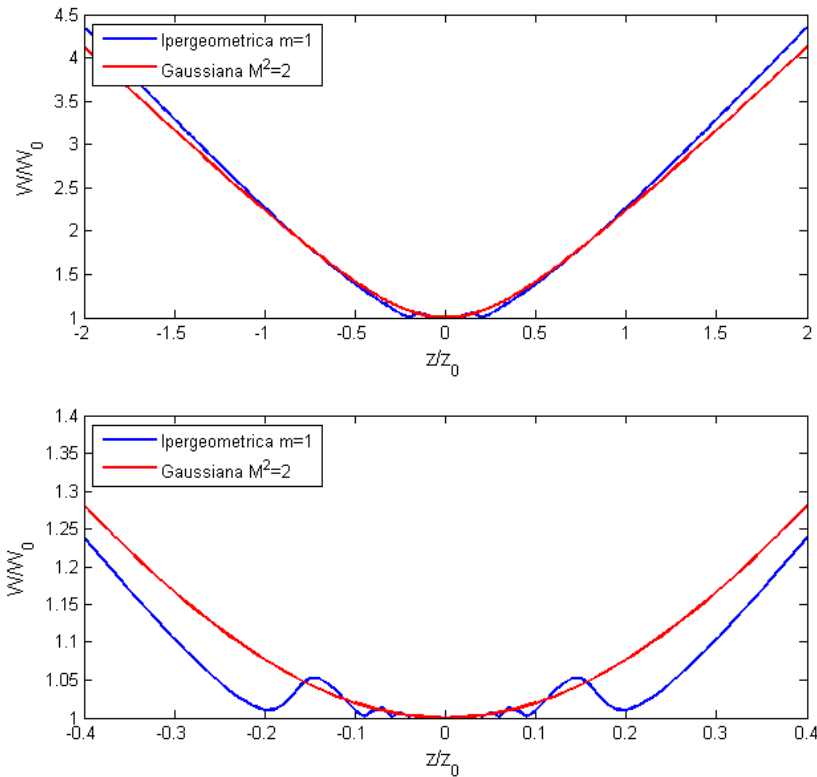


Figura 3.1: Propagazione del fascio Ipergeometrico e Gaussiano con $M^2 = 2$, in basso particolare dell'intorno del waist minimo.

$$W(z) \simeq \frac{\alpha}{2}z \quad (3.3)$$

Come si può vedere in figura 3.1 il fascio Ipergeometrico presenta una divergenza nettamente maggiore rispetto al fascio gaussiano ideale, addirittura maggiore del doppio. Tramite un rapido calcolo si trova che la divergenza è la stessa di un fascio gaussiano con $M^2 \simeq 2.16$. Per m più elevati si sono trovati valori più grandi di M^2 .

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M^2	2.16	3.84	5.65	7.48	9.32	11.17	13.02	14.87	16.72	18.56

Nella regione vicino al waist, figura 3.1 in basso, si osserva una fluttuazione del raggio dello spot per $z < 0.2$. Tale variazione è da attribuirsi alla rapida variazione del profilo tra un Gaussiano con singolarità presente nel waist minimo e l'ipergeometrico nel campo lontano.

3.2 Deviazione standard del profilo spaziale

La stima del coefficiente M^2 puó non essere ottimale per analizzare la propagazione di un fascio diverso dal Gaussiano. La sua utilità si limita a dare un'idea della dimensione del fascio stesso paragonandolo ad uno Gaussiano. Esistono altri metodi per lo studio della propagazione, ad esempio, analizzando la deviazione standard del profilo spaziale che é definita come:

$$r_{rms}(z) = \sqrt{2\pi \int_0^\infty r^2 I(r, z) r dr} \quad (3.4)$$

dove $I(r, z)$ é il modulo quadro dell'ampiezza complessa del campo elettrico del modo, ovvero l'intensità. Infatti, la $r_{rms}(z)$ viene anche chiamata radice quadrata della varianza del profilo di intensità. Come chiaro dalla definizione 3.4, é funzione della sola posizione z , in questo caso non intesa come z/z_0 , e permette di caratterizzare meglio del solo coefficiente M^2 la divergenza angolare del fascio [35] dato che:

$$\alpha_m(z) = \text{arctg} \left(\frac{\partial r_{rms}(z)}{\partial z} \right) \quad (3.5)$$

Per il modo di Laguerre-Gauss con $p=0$, dopo aver esplicitato l'intensità e svolto il calcolo dell'integrale, si trova una formulazione piú semplice. Per la deviazione standard del profilo spaziale si ha :

$$r_{rms}(z) = \sqrt{\frac{|m|+1}{2}} W(z) \quad (3.6)$$

mentre per la divergenza angolare:

$$\alpha_m(z) = \text{arctg} \left(\sqrt{\frac{|m|+1}{2}} \frac{W_0^2 z}{z_0^2 W(z)} \right) \quad (3.7)$$

con $W(z)$ definito come nella formula 3.1. Per avere un confronto tra i diversi modi, si possono ricavare gli stessi parametri anche per il modo ipergeometrico, ma, in questo caso, il problema é stato risolto numericamente data la sua complessità.

In figura 3.2 e 3.3 si mostra il calcolo di $r_{rms}(z/z_0)$ per $m = 1$. Il modo di Laguerre-Gauss mostra il chiaro andamento di $W(z)$ in comune con il modo gaussiano, dato dal caso $m = 0$, mentre il modo ipergeometrico parte da valori identici al gaussiano, ma aumenta piú rapidamente. Dato che la divergenza dipende direttamente dalla derivata di $r_{rms}(z)$ si nota facilmente

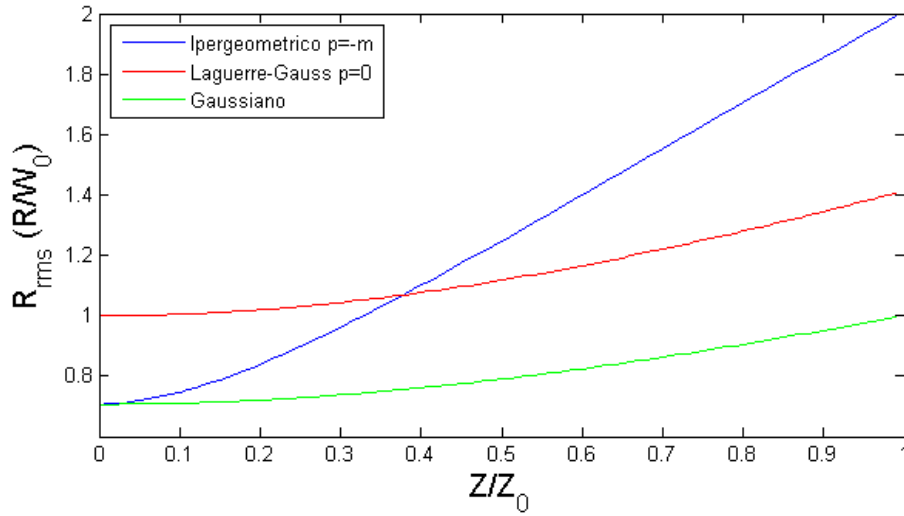


Figura 3.2: Calcolo numerico di r_{rms} per diversi z a $m = 1$, in blu il modo ipergeometrico, in rosso il modo di Laguerre-Gauss, in verde il modo Gaussiano, il confronto avviene a $W_0 = 1$

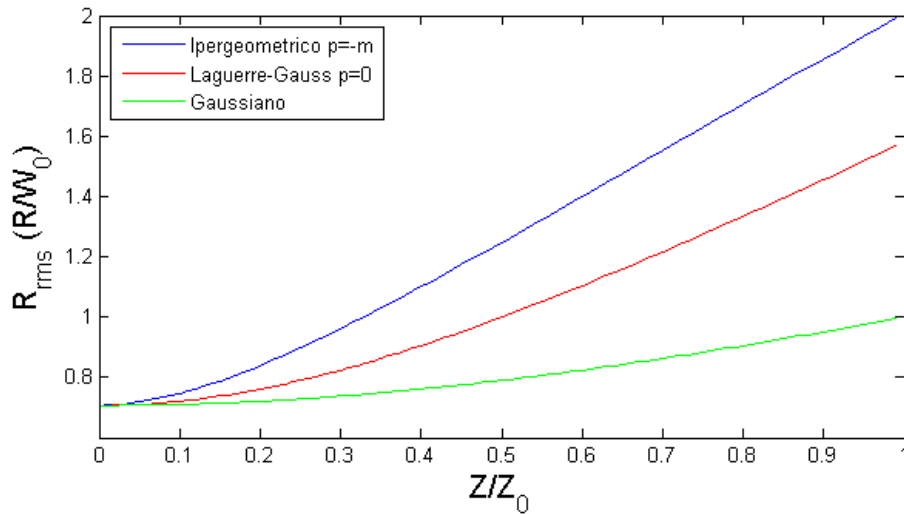


Figura 3.3: Calcolo numerico di r_{rms} per diversi z a $m = 1$, in blu il modo ipergeometrico, in rosso il modo di Laguerre-Gauss, in verde il modo Gaussiano, il confronto avviene a $rms(0) = const$

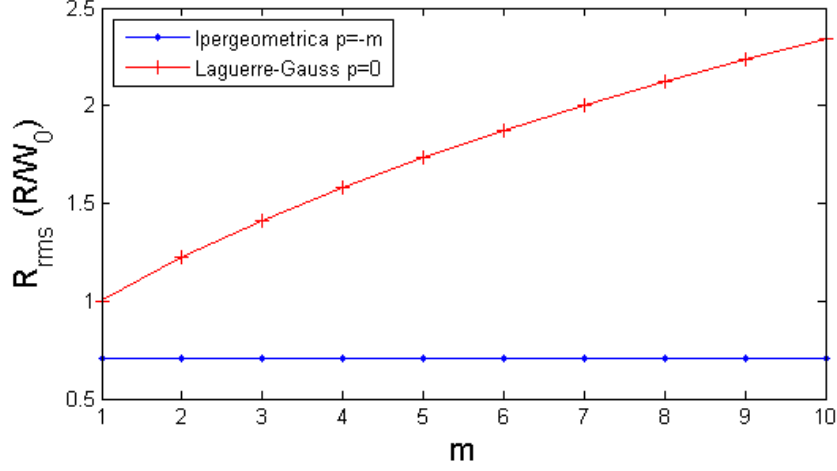


Figura 3.4: Calcolo numerico di r_{rms} per diversi m a $z = 0.001$, in rosso il modo di Laguerre-Gauss in blu il modo ipergeometrico

come la divergenza del modo ipergeometrico sia superiore a quella del modo di Laguerre-Gauss, altra caratteristica distintiva tra i due.

In figura 3.4 si mostra il calcolo di $r_{rms}(z/z_0 = 0.001)$ per alcuni valori di m . Come controllo si é verificato che l'andamento teorico calcolato analiticamente per il modo di Laguerre-Gauss [35] coincida con quello che si trova numericamente. Per il modo ipergeometrico, invece, nel campo vicino si osserva una particolarità: per tutti gli m si ottiene la stessa deviazione standard del profilo spaziale. Questo é facilmente attribuibile al fatto che vicino a $z/z_0 = 0$ i modi, indipendentemente dal valore di m e p , presentano il medesimo profilo gaussiano con una singolarità di fase al centro.

In figura 3.5 si mostra il calcolo di $r_{rms}(z/z_0 = 1)$ per denotare la marcata differenza con il grafico in figura 3.4. Dal grafico per il campo lontano, figura 3.5, é facile intuire come la divergenza, e dunque la dimensione del fascio, aumenti all'aumentare di m .

Sperimentalmente però vi sono molti metodi per implementare un fascio con modo di Laguerre-Gauss. Ad esempio, un convertitore di modo a lente cilindrica permette di ottenere il modo mantenendo il waist minimo, W_0 , costante al variare di m . Un altro metodo é di far incidere un fascio Gaussiano su un ologramma a forchetta. Si ottiene un modo di Laguerre-Gauss con $r_{rms}(0)$ costante al variare di m e la divergenza presenta un andamento in funzione di m diverso, dovuto al fatto che W_0 viene riscalato in funzione di $r_{rms}(0)$.

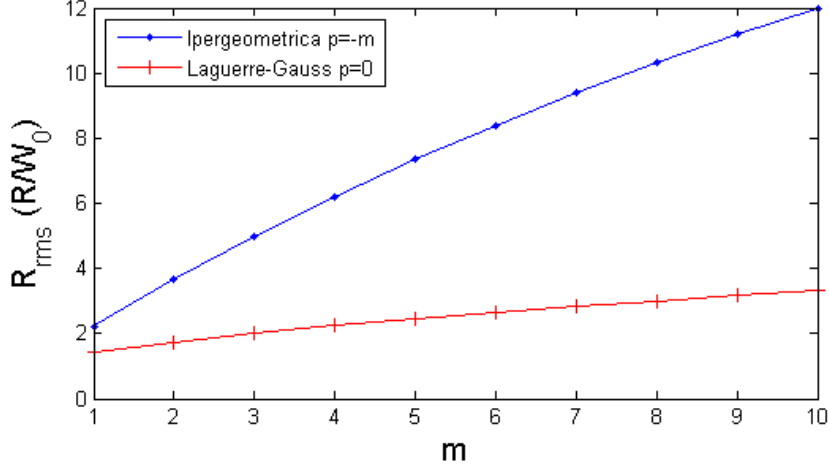


Figura 3.5: Calcolo numerico di r_{rms} per diversi m a $z = 1$, in rosso il modo di Laguerre-Gauss in blu il modo ipergeometrico

$$\alpha_m = \arctg \left(\frac{|m| + 1}{k_0 r_{rms}(0)} \right) \quad (3.8)$$

La formula 3.8 si ottiene dalla formula 3.7 sostituendo W_0 dalla 3.6 calcolata ad $z = 0$. Si effettua quindi un confronto con la divergenza angolare nei vari casi. Generalmente l'ologramma a forchetta viene creato utilizzando un modulatore di luce spaziale, in tale modo é possibile variare la conformazione dell'ologramma generando cosí stati con valori di m diversi.

In figura 3.6 si mostrano le varie divergenze angolari. Si noti che é stata usata l'approssimazione $\arctg(x) \sim x$ e si é posto $\lambda/\pi = 1$. Nel caso del waist minimo costante si é posto $W_0 = 1$ espresso in unitá di waist, dunque adimensionale, per il caso a deviazione standard del profilo spaziale costante si é posto $r_{rms}(0) = \sqrt{1/2}$, tale valore é stato scelto perché si tratta del $r_{rms}(0)$ del modo Gaussiano e dunque anche del modo ipergeometrico.

Dalla figura 3.4 come é già stato osservato si puó pensare che la divergenza del modo ipergeometrico sia stata calcolata ad $r_{rms}(0)$ costante, ma i calcoli sono stati effettuati in condizioni di adimensionalitá e dunque con W_0 costante ed unitario, dunque si puó affermare che la divergenza del modo ipergeometrico sia calcolata con entrambe le proprietá e che queste non siano casi diversi come invece accade per il modo di Laguerre-Gauss.

In figura 3.6 si puó osservare come sia chiaramente maggiore la divergenza del modo ipergeometrico, generato dalla q-plate, rispetto a quella di un fascio

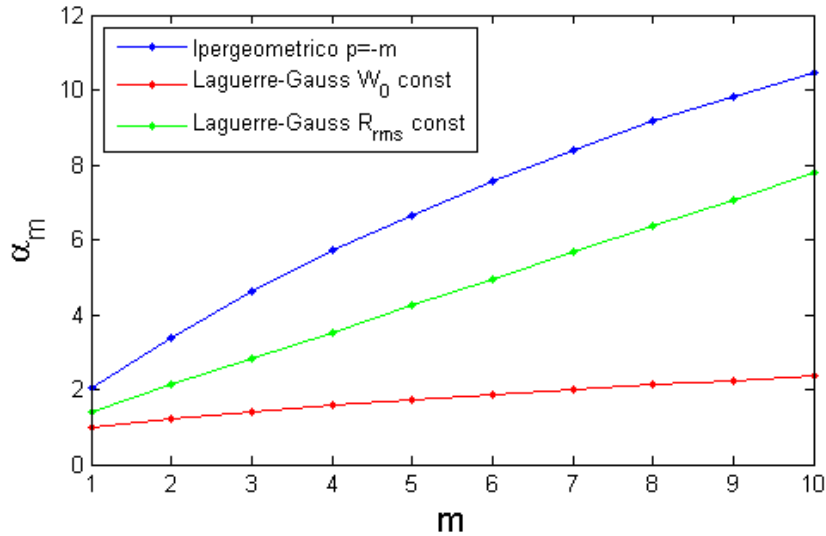


Figura 3.6: Calcolo numerico di α_m . In Blu modo ipergeometrico, in verde modo di Laguerre-Gauss a r_{rms} costante ed in rosso il modo di Laguerre-Gauss a W_0 costante.

di Laguerre-Gauss generato tramite l'uso di ologrammi, dunque a $r_{rms}(0)$ costante. Tale osservazione si può notare anche matematicamente, in quanto il modo ipergeometrico è sviluppabile in serie di modi di Laguerre-Gauss con differenti valori di q . I modi di Laguerre-Gauss considerati in questa sezione hanno $q = 0$, i modi a $q > 0$ presentano una divergenza maggiore a causa della maggiore estensione spaziale (osservabile in figura 2.4). Dunque essendo il modo ipergeometrico una combinazione lineare di modi con divergenza maggiore o uguale a quella del modo di Laguerre-Gauss fondamentale è naturale che la sua divergenza sia maggiore.

3.3 Propagazione in mezzi turbolenti

La distribuzione di chiave quantistica che si vorrebbe andare a realizzare sfrutta un canale in spazio libero, ovvero non controllato e soggetto agli agenti atmosferici. Tutto questo si può ricondurre ad una variazione casuale dell'indice di rifrazione che si manifesta negli effetti di turbolenza del mezzo. La propagazione in mezzi turbolenti può portare a vari effetti, il più significativo dei quali, alle brevi distanze che si adopereranno negli esperimenti, è il wandering. Tale fenomeno consiste nella fluttuazione del centro dello

spot in seguito a vari fenomeni perturbativi durante la propagazione. Dalla fluttuazione dei centri, o meglio dalla loro deviazione standard, si possono ricavare informazioni sulla lunghezza di coerenza di Fried r_0 . Nella relazione data da Fante [36] [37] si ha un'equazione molto chiara:

$$r_0 = \frac{2L}{k\sigma_m} \quad (3.9)$$

Dove k é il numero d'onda, L la distanza di propagazione, e σ_m la deviazione standard delle fluttuazioni. Nel caso in cui il waist del fascio sia minore della lunghezza di coerenza di Fried é possibile affermare che le aberrazioni di fase sono ridotte e il fronte d'onda si conserva. Il parametro di Fried puó essere, inoltre, collegato alla forza della turbolenza atmosferica, data dai coefficienti C_n^2 [38], tramite la formula:

$$r_0 = (0.423k^2 \int C_n^2(z)dz)^{-3/5} \quad (3.10)$$

Supponendo i coefficienti C_n^2 indipendenti da z e dunque costanti lungo tutto il percorso si puó ottenere:

$$C_n^2 = \frac{r_0^{-5/3}}{0.423k^2L} \quad (3.11)$$

Ad esempio, propagando un fascio in spazio chiuso per circa 210 m [28] si é ottenuto un $C_n^2 = 4 \cdot 10^{-15} m^{-2/3}$, corrispondente dunque ad una turbolenza debole. Un esempio di turbolenza forte é $C_n^2 = 7.7 \cdot 10^{-15} m^{-2/3}$ [39] osservato su una distanza di circa 3 km. Vi sono inoltre recenti studi sulla propagazione di fasci con momento angolare orbitale con turbolenza prodotta in laboratorio [40].

3.4 Setup sperimentale di trasmissione

Il laser usato per la trasmissione nell'esperimento é un laser a diodo con emissione in fibra ottica. Tale fibra viene iniettata dentro delle orecchiette per il controllo della polarizzazione. Queste non sono altro che dei manipolatori legati attorno ad una fibra privata della guaina di plastica per proteggerla, tali per cui spostando queste orecchie la fibra viene ruotata in maniera controllata permettendo cosí di avere il controllo della rotazione del piano di polarizzazione. Successivamente il segnale viene raccolto da una fibra a singolo modo e immessa in una serie di componenti ottici montati su un blocco. Nel blocco sono presenti in sequenza: un polarizing beamsplitter, una lamina a quarto d'onda e la q-plate. Il polarizing beamsplitter viene usato come

polarizzatore lineare della luce, viene posto all'inizio del blocco per avere un controllo della luce nel percorso. La sua posizione é fissata, questo permette di regolare l'intensità del fascio tramite le orecchiette riducendo al minimo le perdite dovute ad un posizionamento casuale della fibra.

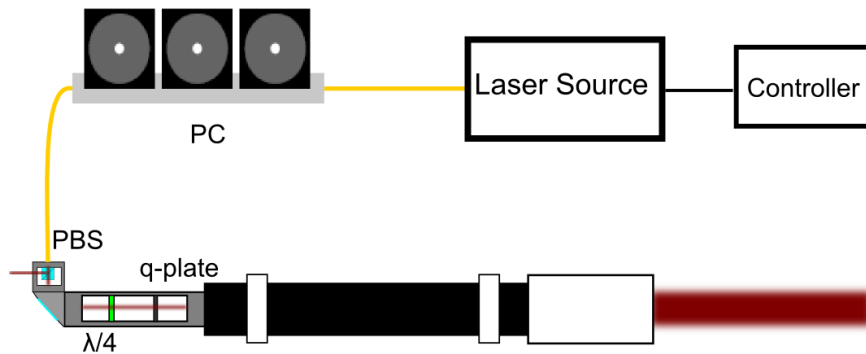


Figura 3.7: Schema dell'ottica usata in trasmissione

Come si vede in figura 3.7, l'ottica é studiata per ottenere una polarizzazione lineare e trasformarla in polarizzazione circolare tramite la lamina a quarto d'onda. Infine, il fascio incide sulla q-plate ottenendo in questa maniera il modo ipergeometrico. I fotoni emessi da questo apparato sono in uno stato indipendente dalla rotazione come descritto nella sezione 2.6. Il blocco viene montato su di un telescopio, che viene usato come beam expander. Il telescopio é costituito da una lente divergente all'oculare ($f = -30$ mm) e una lente convergente all'obiettivo ($f = 900$ mm). La distanza tra le lenti é regolabile (nell'uso normale del telescopio questo costituisce il meccanismo di messa a fuoco dell'immagine).

3.4.1 Sorgente

Come sorgente laser per l'esperimento é stato usato un laser a diodo che emette alla lunghezza d'onda di 808 nm. Tale luce é immessa direttamente in una fibra a singolo modo per renderne facile l'utilizzo. La potenza di questo laser é variabile, con un massimo di 30 mW. Per tutti gli esperimenti é stata usata una potenza costante di 28 mW. Una sorgente laser emette fotoni in stato coerente, ovvero uno stato particolare che é autostato per l'operatore di distruzione di uno stato di Fock, dove la statistica del numero di fotoni é data dalla distribuzione Poissoniana:

$$P(x) = \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^x}{x!} \quad (3.12)$$

$P(x)$ é la probabilità di trovare x fotoni ed \bar{n} é il numero medio di fotoni emessi. Durante la distribuzione di chiave quantistica é inviato un singolo qubit, ovvero un singolo fotone. Essendo molto difficile realizzare uno stato di Fock ad un fotone é consuetudine utilizzare uno stato coerente dove la probabilità di trovare piú di un fotone sia estremamente bassa. Per ottenere tale risultato é sufficiente attenuare il fascio riducendone adeguatamente la potenza. L'attenuazione deve essere tale per cui la potenza del fascio sia tale che

$$\frac{P_{\text{fascio}}}{\frac{hc}{\lambda}} \ll 1 \quad (3.13)$$

dove λ é la lunghezza d'onda, h la costante di Planck e c la velocità della luce nel vuoto. Se si usasse una condizione di uguaglianza si troverebbe il coefficiente di attenuazione tale per cui il numero medio di fotoni emessi al secondo sia esattamente 1.

3.5 Ottica del telescopio

Dato che per i fasci laser la dimensione del waist minimo é correlata con la divergenza del fascio secondo la formula 3.2, per effettuare previsioni sull'esperimento si é analizzato il funzionamento dell'ottica del telescopio.

Per avere una distanza di Rayleigh (z_0) elevata e contenere la divergenza del fascio, é necessario espandere il diametro del fascio stesso. A tale scopo viene usato un telescopio dotato di una lente divergente ($f_1 = -30\text{mm}$) come oculare e una lente convergente ($f_2 = 900\text{mm}$) come obiettivo. Le due lenti sono poste ad una distanza $d = 870\text{mm}$ tra loro. Tale configurazione ci permette di ottenere una magnificazione di 30 per il fascio. Inoltre é possibile controllare la distanza tra le lenti e conseguentemente la posizione del waist minimo. In questo caso é possibile applicare le tecniche di imaging, e, dunque, l'equazione delle lenti per calcolare la distanza q_2 dall'obiettivo in cui troveremo magnificato lo stesso campo elettrico che si ha alla posizione della q-plate:

$$q_2 = \frac{f_2}{1 - \frac{f_2}{d - \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}}} \quad (3.14)$$

Nella formula appena descritta p_1 é la distanza tra la q-plate e la prima lente e q_2 la distanza del waist minimo dalla seconda lente. Inserendo le distanze e

le focali note si trova quindi facilmente la posizione teorica del waist minimo dopo la lente.

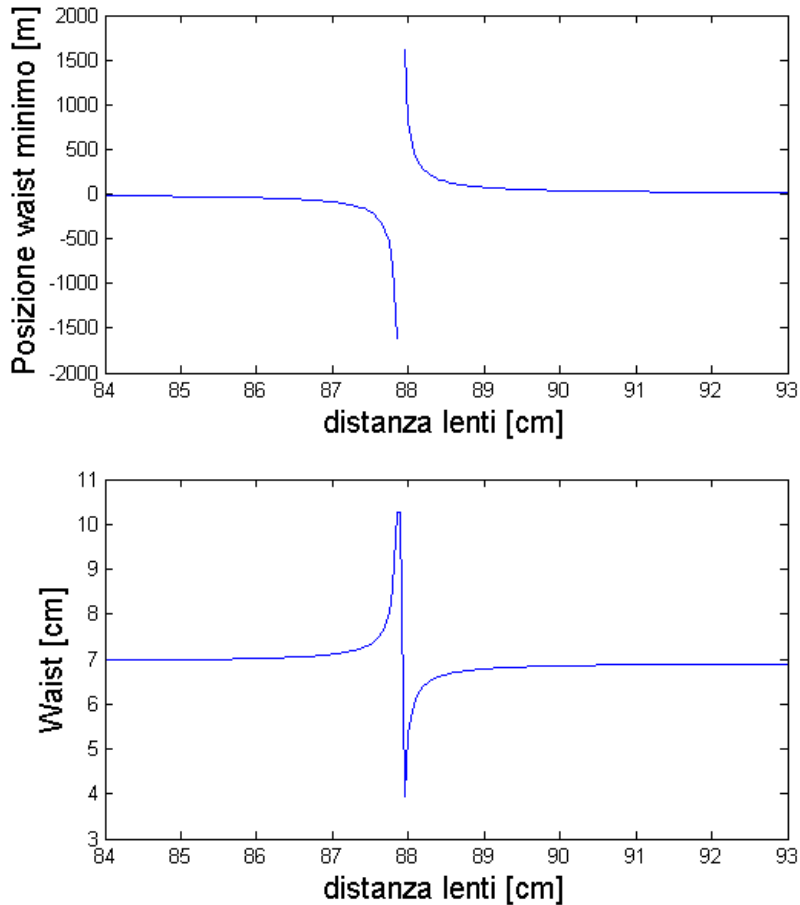


Figura 3.8: In alto: posizione del waist minimo rispetto all'obiettivo del telescopio in funzione della distanza tra le lenti. In basso: dimensione del waist del fascio Ipergeometrico osservato a 3.15 km di distanza dal telescopio.

Tramite la vite micrometrica del telescopio si potrebbe teoricamente riuscire a portare il waist minimo del fascio abbastanza lontano dal telescopio da ottenerlo ad una distanza di 3.15 km, distanza usata per la stima in figura 3.8 e scelta perché usata nell'esperimento di propagazione a lunga distanza (sezione 3.8). Questo significherebbe riuscire ad ottenere in ricezione un fascio che è nelle condizioni di waist minimo. Purtroppo tale idealità è lontano dalle condizioni sperimentali.

3.6 Setup sperimentale di ricezione

Per ricevere il segnale dal telescopio si é adoperata una telecamera ad infrarossi (modello Thorlabs DCC1645M). Tale camera é stata usata in coppia con un obiettivo per consentire di mettere a fuoco le immagini. La telecamera é stata posta su di un supporto rigido di lunghezza circa 55 cm, tale supporto é stato collegato ad un perno su cui a sua volta é stato posto uno schermo rigido. In questo modo la telecamera fissa costantemente lo schermo ed é libera di ruotarvi attorno. Tutto questo sistema é posto su di un piedistallo: in questo modo lo schermo é posto a circa un metro e mezzo di altezza dalla base del supporto. Sullo schermo sono stati posti dei fogli di carta molto liscia ma non riflettente al fine di evitare effetti di diffusione su grana troppo grossa, perdendo cosí risoluzione sull'immagine del fascio laser che si vuole vedere, e effetti di riflessione del fascio. Essendo la telecamera inclinata rispetto allo schermo per consentire il passaggio del fascio, l'immagine frontale deve venire necessariamente ricostruita tramite algoritmi per la processazione di immagini sfruttando un sistema di riferimenti le cui distanze sono note. In questo modo si é in grado di ottenere un'immagine come se fosse stata presa frontalmente e di ottenere al tempo stesso una scala spaziale con una precisione dell'ordine di qualche millimetro.

Il sistema di riferimento é una griglia di punti 4x4, per un totale di 16 punti, equispaziati da distanze di 10 cm. La conversione tra pixel e centimetri viene effettuata tramite un polinomio di terzo grado con un termine misto tra le due coordinate. I coefficienti vengono trovati tramite best fit delle distanze note. Per effettuare una verifica sperimentale di tale sistema si é proceduto effettuando varie acquisizioni di figure geometriche di dimensioni note sopra il sistema di riferimento.

Dopo una serie di prove si é osservato che l'errore massimo della ricostruzione di distanze note in alcuni casi arrivava all'ordine dei 3 mm. Per ridurre questo problema si é aumentata la risoluzione della griglia, ovvero ai punti piú esterni della griglia sono stati posti quattro punti, due per asse, a ± 2 mm di distanza dal punto originale. Essendo i punti posti ai bordi della griglia questo ci permette di effettuare un fine-tuning della ricostruzione delle distanze riducendo di molto l'errore della ricostruzione. Quello che si ottiene infine é una ricostruzione delle distanze con un errore massimo di circa 1 mm, che corrisponde a circa il diametro dei punti usati per realizzare la griglia (nelle immagini tali diametri sono di circa 4-5 pixel).

In seguito, per l'analisi, ad alcune trasformazioni é stato necessario applicare un filtro gaussiano all'immagine. Tale filtro cambia il valore di ogni pixel rispetto al valore dei pixel circostanti attribuendogli un peso tramite una



Figura 3.9: In alto: immagine acquisita originariamente dello schermo ruotando la telecamera. In basso a sinistra: immagine dello schermo presa senza ruotare la telecamera. In basso a destra: Immagine dello schermo ruotato in seguito alla trasformazione.

gaussiana. Questo filtro si è rivelato necessario in certe condizioni a causa del fatto che la sensibilità sperimentale di vari pixel può variare, o possono manifestarsi effetti di cross-talking. Tale fenomeno consiste nel fatto che due pixel limitrofi scambino tra di loro parte della loro carica andando così a modificare il valore originario dei pixel coinvolti. Il filtro è stato impostato per considerare un intorno di 5 pixel ed usare una gaussiana con una sigma di 3 pixel.

3.7 Propagazione su corta distanza

Come prova su corta distanza si é effettuata una propagazione su una distanza limitata, 25 m, in ambiente controllato. L'acquisizione si é svolta nelle ore diurne, dunque, per evitare rumore dovuto all'ambiente, si é posto un filtro in lunghezza d'onda di tipo interferenziale con banda passante di 10 nm centrato su 810 nm. Il filtro é stato posto sulla telecamera ad infrarossi. Nonostante tale precauzione si é rivelata necessaria una rimozione del rumore di fondo nei casi in cui non fosse trascurabile. Il fascio viene fatto incidere perpendicolarmente rispetto allo schermo. Il posizionamento dello schermo viene effettuato manualmente osservando che l'ombra di una lunga sbarra di metallo con una base piatta appoggiata sulla superficie dei fogli non venga proiettata, questo ci assicura che la sbarra sia parallela al fascio e la sua base, solidale con lo schermo, perpendicolare. Si é presa un'acquisizione ogni cinque metri di distanza dall'uscita del telescopio.

Data la vicinanza al telescopio e il fatto che la misura avvenga in un ambiente controllato si puó essere sicuri della stabilitá di ogni singolo frame acquisito. É quindi possibile eseguire una media di tutti i frame acquisiti alla stessa distanza, in quanto qualunque fluttuazione dell'intensitá registrata dai pixel deve essere dovuta a fluttuazioni casuali prive di interesse fisico per l'esperimento in atto. Ad ogni distanza il tempo di acquisizione é differente a causa della differenza di illuminazione all'interno dell'ambiente di sperimentazione. L'analisi delle immagini si é svolta calcolando il waist del fascio lungo i due assi.

	5 m	10 m	15 m	20 m	25 m
Asse X	$3.2 \pm 0.1 \text{ cm}$	$3.5 \pm 0.1 \text{ cm}$	$4.1 \pm 0.1 \text{ cm}$	$4.4 \pm 0.1 \text{ cm}$	$4.8 \pm 0.1 \text{ cm}$
Asse Y	$2.6 \pm 0.1 \text{ cm}$	$2.8 \pm 0.1 \text{ cm}$	$3.1 \pm 0.1 \text{ cm}$	$3.3 \pm 0.1 \text{ cm}$	$4.0 \pm 0.1 \text{ cm}$

Da questa analisi é evidente che esiste una asimmetria tra i due assi nel fascio Ipergeometrico. Tale asimmetria successivamente a verifiche non é imputabile alla ricostruzione delle distanze. Tali valori sono stati calcolati tramite la tecnica di potenza all'86%, come spiegato in 3.1. Per differenziare i due assi si é svolta la stima dei waist lungo i profili orizzontale e verticale ottenuti selezionando la riga e la colonna di pixel passanti per il centro dello spot. Successivamente si é supposto che tale profilo si estendesse a tutto lo spot per rotazione. In questo modo si é riusciti a calcolare per la stessa immagine un waist per ogni asse riuscendo a mettere in evidenza l'asimmetria.

Il Waist minimo del fascio é stato stimato tramite misure ripetute del fascio gaussiano in uscita dal telescopio, lo schermo é stato posto a 3.3m di distanza dalla lente obiettivo. Per queste acquisizioni la distanza tra le lenti era tale per cui il waist minimo si trovasse vicino all'uscita del telescopio. Tra queste misure non sono state osservabili differenze significative, é stato dunque effettuato un fit gaussiano bidimensionale sullo spot osservato. Dal fit si ottiene un valore di $W_0 = 2.6 \pm 0.1$ cm. Per la proprietá del fascio ipergeometrico di riprodurre una gaussiana nel suo waist minimo é possibile affermare che i due waist minimi coincidono.

3.8 Propagazione su lunga distanza

Sperimentalmente é stata verificata la possibilitá di effettuare un link ottico in spazio libero tramite fasci dotati di momento angolare orbitale. Krenn et al. [39] hanno sfruttato il profilo di intensitá del fascio per trasmettere un'immagine tramite bit classici facendolo propagare in spazio libero per circa 3 km. L'informazione é stata codificata in base alla forma dei profili di intensitá per diversi valori di m .

Al fine di realizzare un canale di comunicazione quantistico si devono indagare gli effetti della turbolenza atmosferica sulla propagazione a lunga distanza del fascio ipergeometrico. Questo lo si realizza facendo un confronto tra il fascio di interesse e quello Gaussiano.

3.8.1 Argine del Piovego

Il primo tentativo di propagazione del fascio in spazio libero svoltosi in questo lavoro di tesi é avvenuto lungo un argine del canale Piovego. Tale canale é artificiale e dunque prosegue dritto per una distanza sufficientemente grande, la distanza tra trasmettitore e ricevitore é di circa 1.7 km, da permettere una propagazione per un fascio espanso. Data la vicinanza ad edifici di varia tipologia posti ai lati del canale é stato necessario adoperare nuovamente il filtro interferenziale per ridurre il rumore del segnale nonostante l'acquisizione si svolgesse nelle ore notturne.

Data la vicinanza del canale quantistico al terreno si presuppone che le variazioni di indice di rifrazione dell'aria, causate dalle variazioni di temperatura in seguito al rilascio notturno del calore accumulato durante il giorno dal suolo, causino la degradazione del fronte d'onda sia del fascio gaussiano che del fascio ipergeometrico. Il modello di Eidlén per l'indice di rifrazione dell'aria [41] ci dice che l'indice di rifrazione va come:

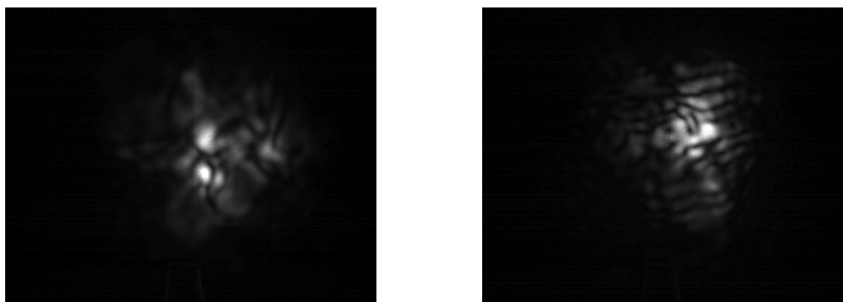


Figura 3.10: Fascio Gaussiano (sx) ed ipergeometrico (dx) misurati a 1.7 km dal telescopio, i due profili di intensità sono completamente indistinguibili

$$(n - 1)_{tp} = (n - 1)_s \frac{0.00138823P}{1 + 0.003671T} \quad (3.15)$$

$$(n - 1)_s \times 10^8 = 8342.13 + 2406030(130 - \sigma^2)^{-1} + 15997(38.9 - \sigma^2)^{-1} \quad (3.16)$$

con $\sigma = 1/\lambda$ in μm , T é espressa in gradi Celsius e P in torr. Questa formulazione vale nelle condizioni di laboratorio, quindi di un ambiente controllato e con minime variazioni di pressione e temperatura, mentre l'esperienza si é svolta all'aria aperta conseguentemente in condizioni non controllate. Si trova che con pressione atmosferica (760 torr) e una differenza di temperatura di $0.1\text{ }^\circ\text{C}$ all'interno del volume dove si propaga il fascio, approssimazione semplicistica in quanto vicino al canale vi é anche una forte componente di umidità che va ad influire sull'indice di rifrazione, sono sufficienti pochi metri di propagazione per indurre uno sfasamento di π . Dunque data la sensibilità si pensa che per ovviare al problema sia necessario alzarsi in quota in modo da mediare tra loro le varie perturbazioni termiche (suolo, presenza di edifici o quant'altro) e ottenere quindi una minore variazione di temperatura alle scale di interesse in modo da rendere piú uniforme l'indice di rifrazione dell'aria all'interno del volume di propagazione.

3.8.2 Link cittadino

Successivamente é stato cercato un punto sopraelevato rispetto ad eventuali perturbazioni termiche. La scelta é caduta sulla Specola, la cui terrazza superiore si trova ad un'altezza di circa 50 m dal suolo, e una torre della

telecom, di circa 80 m. Tra le due torri c'è una distanza di 3.15 km, quasi doppia rispetto al precedente tentativo. La trasmittente è stata posta sulla cima della torre telecom e la ricevente sulla cima della Specola. Data l'altitudine dal suolo il rumore di fondo rilevato dalla camera ad infrarossi risultava essere nullo. Non è stato, quindi, adoperato in questo caso il filtro interferenziale. Per mirare alla ricevente sulla torre della Specola a tale distanza è stato utilizzato un cornercube dal diametro di circa 2 cm. Un cornercube è costituito da tre specchi posizionati perpendicolarmente tra loro in modo da formare lo spigolo di un cubo con la parte riflettente rivolta verso l'interno. Tale oggetto ha la proprietà di riflettere la luce sempre nella direzione da cui questa arriva, sfruttando questa sua proprietà e un fascio laser di bassa potenza che emette nello spettro visibile nel verde ($\lambda = 532$ nm), lunghezza d'onda a cui l'occhio umano è particolarmente sensibile, è stato effettuato l'allineamento. La procedura per l'allineamento consiste nell'effettuare scansioni con il fascio visibile nella regione dove dovrebbe trovarsi il cornercube fino a quando non si osserva il fascio di ritorno. Una volta stabilito il link ottico è stato inserito lo stesso laser ad infrarossi precedentemente usato e quindi sono state effettuate le acquisizioni dati. Dato il piccolo angolo rispetto al terreno (< 10 mrad), dovuto alla differenza di altezza tra le due torri, non è stato necessario compensare l'inclinazione dello schermo per ricevere perpendicolarmente il fascio oltre la normale procedura già utilizzata.

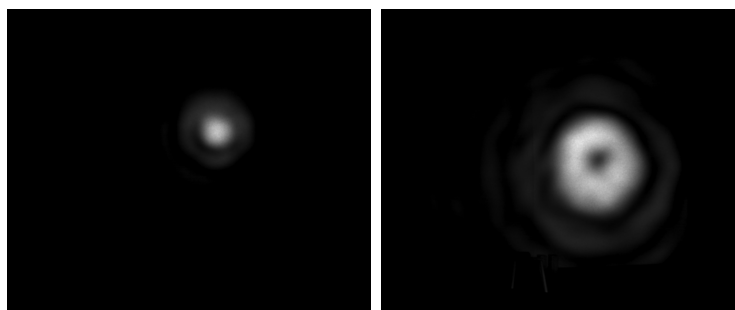


Figura 3.11: Fascio gaussiano(sx) ed ipergeometrico(dx) misurati a 3.15 km dal telescopio, i due profili di intensità sono perfettamente distinguibili, inoltre si possono notare gli anelli di diffrazione attorno agli spot

Data l'altitudine a cui si è svolta la propagazione si suppone che l'aria al di sopra degli edifici fosse più omogenea in temperatura rispetto alla precedente prova e, quindi, più stabile nell'indice di rifrazione permettendo così una propagazione del fronte d'onda con poche alterazioni. In fig 3.11 si osservano le figure degli spot dopo la trasformazione dell'immagine per l'analisi. In

figura si possono notare gli anelli di diffrazione attorno ai due spot sia per il fascio gaussiano che per il fascio ipergeometrico.

3.9 Analisi Propagazione

Per poter effettuare un innesto in fibra del segnale, al fine di sfruttarlo per la comunicazione quantistica, bisogna prima assicurarsi della sua stabilità e che gli effetti di wandering del fascio non siano preponderanti rispetto alla dimensione dello stesso.

3.9.1 Fascio gaussiano

Per quanto riguarda il fascio gaussiano, si é acquisita l'immagine dello spot nell'arco di 5 minuti. Il centro del fascio é stato individuato tramite la posizione dei pixel con l'intensitá piú elevata. Nel caso di piú pixel con la medesima intensitá viene calcolata la posizione media tra di essi.

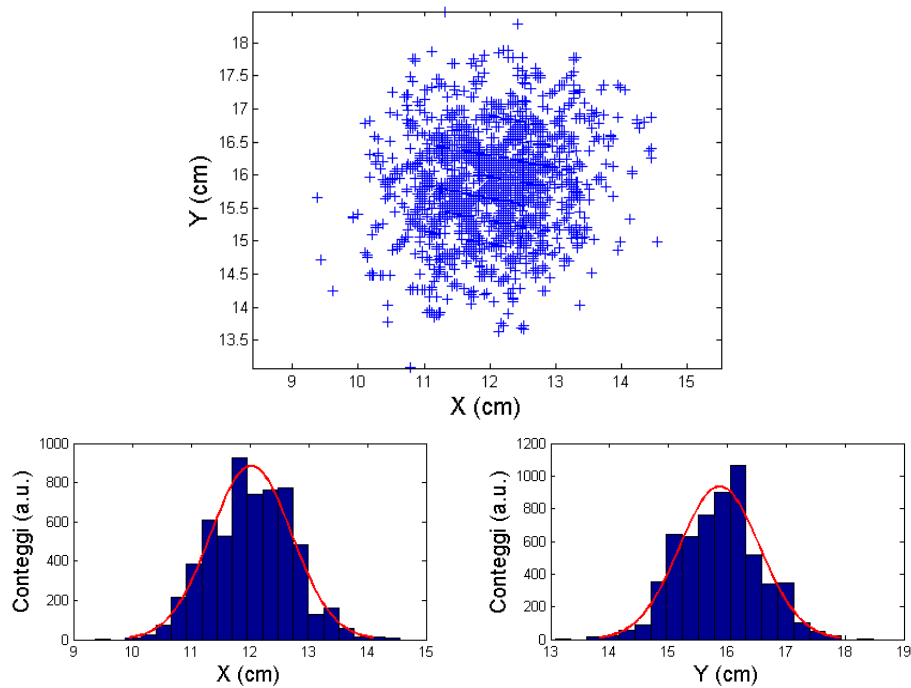


Figura 3.12: Wandering del fascio gaussiano, in alto fluttuazione dello spot sullo schermo, in basso istogrammi della fluttuazione sui due assi, $X(sx)$ ed $Y(dx)$.

Come si può vedere in figura 3.12 le fluttuazioni sono molto contenute: i bordi della variazione sono all'incirca di 2 cm di raggio, dunque la maggior parte dei centroidi sta in un disco di tale raggio. Effettuando un fit gaussiano delle fluttuazioni si trova che le σ delle fluttuazioni lungo gli assi x ed y sono rispettivamente pari a: 0.69 ± 0.01 cm ed 0.68 ± 0.01 cm. Questo permette di affermare che per il fascio gaussiano le fluttuazioni lungo i due assi sono uguali e quindi non esiste una direzione preferenziale per le fluttuazioni. Una volta identificato il centro della gaussiana questa viene interpolata per ogni frame al fine di capire come le perturbazioni atmosferiche la modificano.

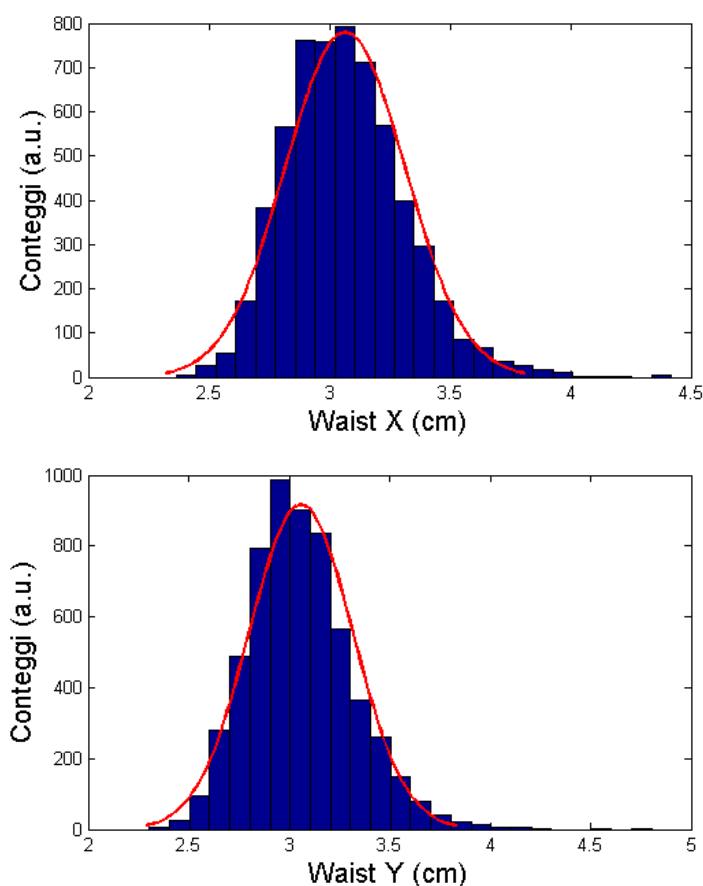


Figura 3.13: In alto: istogramma del waist del fascio gaussiano misurato lungo l'asse x in ogni frame. In basso: istogramma del waist del fascio gaussiano misurato lungo l'asse y in ogni frame

Il fit della gaussiana viene fatto lungo gli assi x ed y e non su tutta la super-

ficie. In questo modo si riesce a rilevare la presenza di eventuali asimmetrie lungo i due assi. In figura 3.13 si osservano gli istogrammi ottenuti dalle misure dei waist, i risultati per l'asse x e l'asse y sono :

	Asse X	Asse Y
Waist	$3.065 \pm 0.006 \text{ cm}$	$3.059 \pm 0.007 \text{ cm}$
σ	$0.249 \pm 0.005 \text{ cm}$	$0.258 \pm 0.005 \text{ cm}$

Dai risultati posti in tabella si capisce immediatamente come il modo gaussiano non venga penalizzato nella sua simmetria, in quanto i due waist misurati lungo gli assi sono perfettamente compatibili.

3.9.2 Fascio Ipergeometrico

Per il fascio Ipergeometrico é stata effettuata un'analisi analoga, sempre per un periodo di 5 minuti circa. Identificare il centro del fascio ipergeometrico non é semplice come per il Gaussiano, in quanto al suo centro é presente un minimo. La ricerca del minimo locale a volte puó non funzionare in quanto l'algoritmo utilizzato per la sua ricerca potrebbe fare cadere il minimo all'esterno della forma a 'ciambella', nel caso succeda il risultato e il frame del video vengono scartati.

L'analisi delle fluttuazioni per il fascio ipergeometrico presenta le medesime fluttuazioni del gaussiano: si trova che il centro si sposta come prima all'interno di un raggio di circa 2 cm sempre a distribuzione gaussiana. Da un fit degli istogrammi si vede che le σ delle fluttuazioni lungo l'asse x ed y sono rispettivamente pari a: $0.790 \pm 0.014 \text{ cm}$ ed $0.789 \pm 0.014 \text{ cm}$ Questo ci permette di dire che le perturbazioni atmosferiche influenzano quasi allo stesso modo i due tipi di fascio e che non si presentano alterazioni particolari nel caso di fascio con momento angolare orbitale ma solamente delle fluttuazioni appena piú accennate. Tale aumento é molto probabilmente dovuto al fatto che il modo ipergeometrico presenta una divergenza maggiore e dunque interagisce con un volume di aria maggiore rispetto al modo Gaussiano.

Analogamente a quanto fatto per il fascio Gaussiano, per il fascio ipergeometrico viene effettuato un fit lungo le direzioni dei due assi. Per motivi computazionali si é deciso di effettuare il fit con il primo modo di Laguerre-Gauss. Tale scelta risulta giustificata in quanto il primo modo di Laguerre-Gauss costituisce quello con la maggior probabilitá di essere trovato all'interno del modo ipergeometrico, inoltre svolgendo la misura a grande distanza dal waist

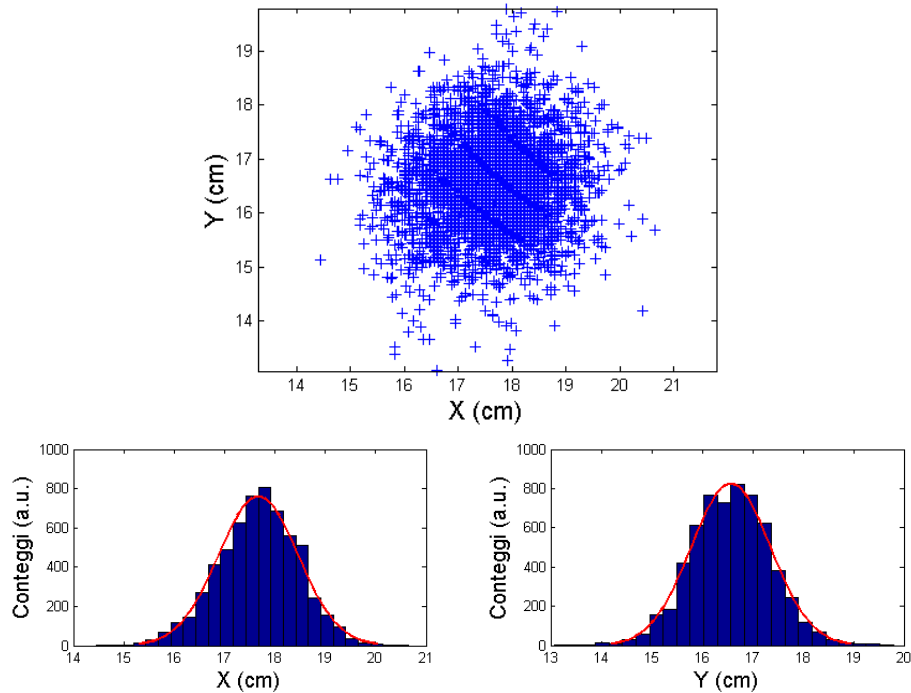


Figura 3.14: Wandering del fascio ipergeometrico, in alto fluttuazione dello spot sullo schermo, in basso istogrammi della fluttuazione sui due assi, X(sx) ed Y(dx).

minimo il primo modo di Laguerre-Gauss rappresenta una buona approssimazione, come si è visto nella sezione 2.5. Essendo la distanza nota non ci interessano considerazioni sulla distanza e sulla divergenza ma solamente sulla dimensione dello spot del fascio. Infine, si svolge l'interpolazione con una Gaussiana degli istogrammi ottenuti dai risultati del fit.

	Asse X	Asse Y
Waist	$4.84 \pm 0.01 \text{ cm}$	$5.03 \pm 0.01 \text{ cm}$
σ	$0.265 \pm 0.005 \text{ cm}$	$0.291 \pm 0.005 \text{ cm}$

In primo luogo si nota come, diversamente da quanto osservato per il modo gaussiano, il modo ipergeometrico presenti una lieve asimmetria tra i due assi. Lungo l'asse x il diametro dello spot è maggiore di circa 1 cm rispetto all'asse y . Tale asimmetria non è dovuta ad errori di ricostruzione delle distanze, in quanto tali errori si manifesterebbero anche all'interno dell'analisi del fascio gaussiano. Un dato che ci suggerisce che la misura sia corretta è

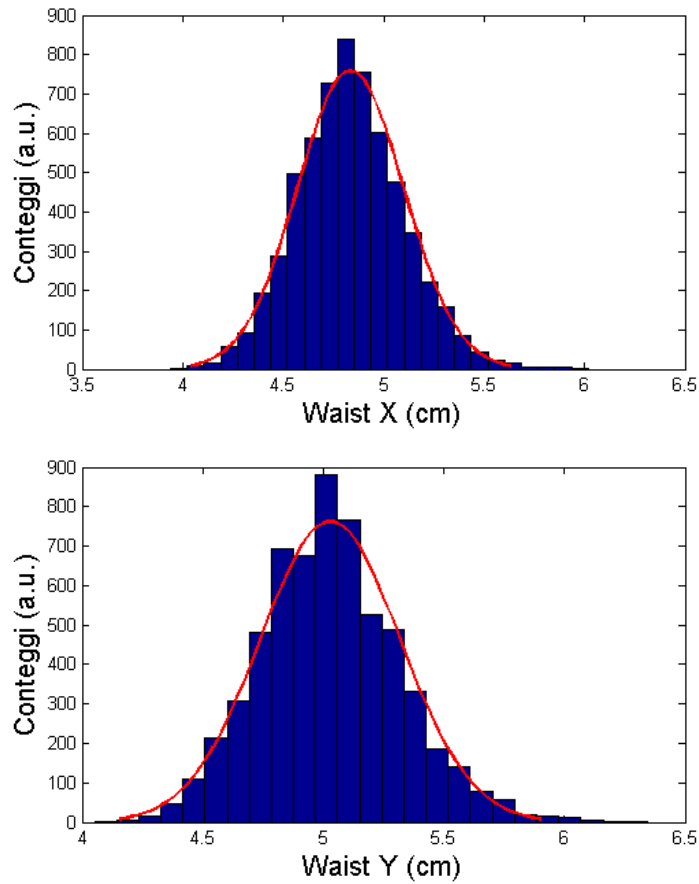


Figura 3.15: In alto: istogramma del waist del fascio ipergeometrico misurato lungo l'asse x in ogni frame. In basso: istogramma del waist del fascio ipergeometrico misurato lungo l'asse y in ogni frame

che il waist ottenuto rientra in quanto stimato dallo studio dell'ottica del telescopio (vedere figura 3.8). Era stato previsto che nel caso il waist fosse stato posto successivamente all'obiettivo del telescopio si sarebbe ottenuta, ottimizzando, la condizione di minimo waist sullo schermo in un intervallo tra i 4 e 6 cm circa. Le misure effettuate ricadono perfettamente all'interno di questo intervallo.

Analisi turbolenza

Effettuando una media tra le sigma dei due assi ottenuti per ogni modo si ottiene un singolo valore della deviazione standard per caratterizzare le fluttua-

zioni del centroide. Questo consente di effettuare un'analisi della turbolenza atmosferica che permetterebbe di evidenziare differenze nella propagazione tra i due modi:

	r_0	C_n^2
Gaussiano	$11.7 \pm 0.2 \text{ cm}$	$(4.4 \pm 0.1) \cdot 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$
Ipergeometrico	$10.3 \pm 0.2 \text{ cm}$	$(5.5 \pm 0.2) \cdot 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$

La lunghezza di coerenza di Fried r_0 sembra essere leggermente minore per il modo ipergeometrico, il quale, al tempo stesso, sembra essere soggetto ad una turbolenza maggiore.

3.9.3 Modi Alterni

Le due acquisizioni precedenti (modo Gaussiano e ipergeometrico) si sono svolte in tempi separati, tale fatto può portare alla semplice conclusione che i fasci sono stati soggetti a perturbazioni differenti. Al fine di escludere questa possibilità si è effettuata un'ulteriore acquisizione dove i due modi sono stati alternati ogni dieci secondi circa. In questa maniera si può assumere che i due modi siano soggetti alle stesse turbolenze.

Per l'analisi si sono innanzitutto identificati i frame con modi differenti, poi si è analizzato ogni singolo modo separatamente in maniera analoga a quella descritta precedentemente per le acquisizioni singole. Tuttavia questa volta ci si limita alla determinazione dei centroidi al fine di stabilire l'entità della perturbazione atmosferica.

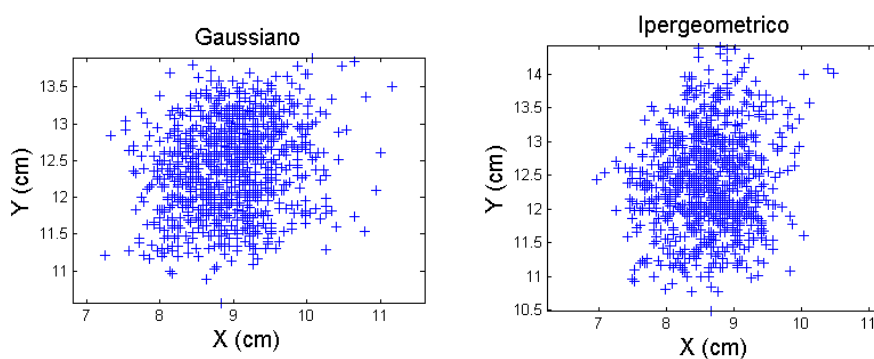


Figura 3.16: A sx posizione dei centroidi per il modo Gaussiano, a dx posizione dei centroidi per il modo Ipergeometrico

Dagli istogrammi della posizione sui due assi separati si ottengono le seguenti deviazioni standard della fluttuazione:

	Asse X	Asse Y
Gaussiano	$0.60 \pm 0.03 \text{ cm}$	$0.61 \pm 0.03 \text{ cm}$
Ipergeometrico	$0.53 \pm 0.02 \text{ cm}$	$0.71 \pm 0.03 \text{ cm}$

Tali valori sono in prima approssimazione molto simili tra di loro e a quanto ottenuto precedentemente. Si effettua la media tra le deviazioni ottenute sui due assi per ogni modo in maniera da avere un singolo valore delle fluttuazioni, da tali valori si ottiene la lunghezza di coerenza di Fried e la forza della turbolenza atmosferica che sono rispettivamente:

	r_0	C_n^2
Gaussiano	$13.5 \pm 0.7 \text{ cm}$	$(3.5 \pm 0.3) \cdot 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$
Ipergeometrico	$13.3 \pm 0.7 \text{ cm}$	$(3.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$

La differenza delle deviazioni standard delle fluttuazioni tra i due assi per il modo ipergeometrico é probabilmente dovuta alla breve durata dell'acquisizione, durata all'incirca un minuto per ognuno dei due modi, che forse non é sufficiente a ottenere un buon campionamento. Il risultato ottenuto é comunque compatibile con i precedenti.

3.10 Conclusioni sulla propagazione

In seguito a quanto é stato osservato si puó affermare che il modo ipergeometrico si conserva nella sua propagazione: i disturbi sono minimi grazie all'altezza rispetto al livello del suolo, le condizioni sono sufficientemente buone da permettere l'osservazione degli anelli di diffrazione.

Si puó osservare che il fronte d'onda é sempre poco perturbato, in quanto il parametro di Fried r_0 é sempre maggiore del raggio dello spot, dunque il modo ipergeometrico riesce a propagarsi senza una degradazione significativa.

Dal valore di C_n^2 si puó affermare di aver effettuato l'esperimento in condizioni atmosferiche favorevoli a bassa turbolenza.

Il modo ipergeometrico non presenta alterazioni particolari rispetto alle fluttuazioni che si manifestino nel modo Gaussiano, dunque i meccanismi che sottendono tali fluttuazioni restano inalterati tra i due modi.

Capitolo 4

Iniezione in Fibra

In seguito alla verifica della propagazione del modo ipergeometrico si può passare al controllo l'acquisizione del segnale in fibra per potere essere certi di avere la possibilità di eseguire la distribuzione di chiave quantistica. Per dimostrare il successo dell'iniezione in fibra è sufficiente controllare di raccogliere il segnale e verificare il contrasto in polarizzazione (rapporto tra l'intensità massima e minima variando l'asse di polarizzazione del beam splitter) successivamente alla q-plate. L'esperimento si è svolto nelle stesse postazioni dell'esperimento di propagazione a lunga distanza, ma trasmissione e ricezione sono state invertite. Il telescopio e l'apparato di trasmissione sono posti sulla cima della Specola, l'apparato per la ricezione del fascio ed iniezione in fibra sono posti sulla torre della Telecom.

4.1 Setup di ricezione

Avendo già caratterizzato le fluttuazioni non viene più utilizzato uno schermo in ricezione ma direttamente un apparato per l'iniezione in fibra.

Come si vede in figura 4.1 il fascio viene raccolto da una lente convergente di focale $f_1 = 2000$ mm. Tale lente viene scelta principalmente per il suo diametro (c.a. 20 cm), abbastanza grande da raccogliere il fascio espanso e propagato che viene trasmesso dal telescopio. Successivamente il fascio convergente viene collimato da un'altra lente di focale $f_2 = 25$ mm. Tale lente è montata su una slitta con vite micrometrica utilizzata per spostare il piano focale. Dopo questi elementi è stato inserito un polarizing beam-splitter, adoperato come filtro in polarizzazione, posto su una ghiera rotante per effettuare le misure in contrasto di polarizzazione. Infine, è posto l'accoppiatore in fibra (modello THORLABS PAF-X-11-PC-B). La q-plate può

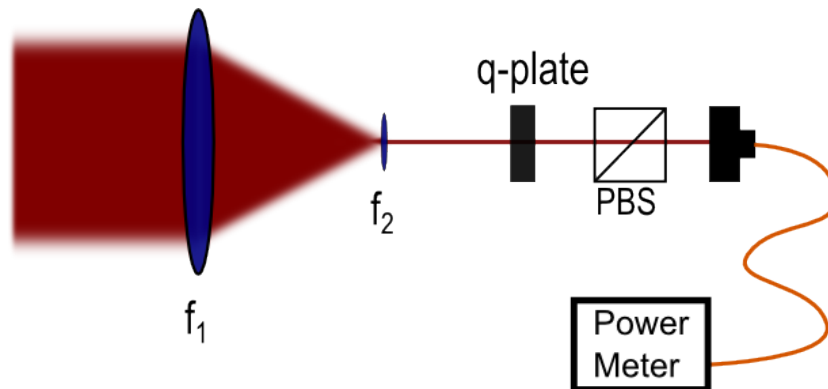


Figura 4.1: Profili di intensità per $z=1$ ed 2 , in blu l'Ipergeometrica, in verde Laguerre-Gauss con $q=0$ e in rosso Laguerre-Gauss con $q=1$

essere inserita tra la seconda lente convergente e il polarizing beamsplitter. Il suo inserimento inverte il processo che avviene in trasmissione, come descritto nella sezione 2.6, ritrasformando il modo ipergeometrico nel modo Gaussiano ed invertendo la polarizzazione circolare.

4.2 Allineamento

È stata eseguita la stessa procedura utilizzata per l'allineamento con il corner-cube del fascio laser tra trasmettitore e ricevitore usata nella propagazione. L'intero blocco è stato, dunque, allineato per l'iniezione in fibra con la direzione di propagazione del fascio. Infine, la focale del fascio è stata regolata tramite vite micrometrica in maniera da ottimizzare l'iniezione in fibra.

Tramite il power meter si legge la potenza del fascio senza una q-plate nell'apparato per avere una misura in contrasto di polarizzazione prima della fibra (fascio libero). Il contrasto di polarizzazione è il rapporto tra le misure delle intensità di un fascio dopo un filtro polarizzatore ponendo quest'ultimo nelle due configurazioni di polarizzazione ortogonali tra loro. In tale modo le due intensità registrate danno informazioni sullo stato di polarizzazione precedente il filtro. Nel caso specifico in cui il segnale prima del filtro sia a polarizzazione ben definita il contrasto consente di rilevare deviazioni da tale idealità, nel caso della crittografia quantistica, in cui l'informazione è trasportata dalla polarizzazione, il contrasto è il rapporto segnale/rumore che si ha sulla ricezione del segnale.

minimo	$110 \mu W$
massimo	$3.4 mW$
contrasto	3.5%

Il contrasto in polarizzazione misurato senza la presenza della q-plate non dà l'effettivo rapporto segnale/rumore che interessa ai fini della distribuzione di chiave quantistica. Infatti, non avendo inserito la q-plate non si sta considerando la sua interazione con il fascio che porta ad una inversione della polarizzazione. L'effetto della q-plate non sarà, inoltre, ideale ma soggetto ad una certa efficienza come già descritto.

4.3 Analisi e conclusioni

Una volta inserita la q-plate nell'apparato di ricezione vengono effettuate due misure di contrasto di polarizzazione utilizzando fibre ottiche differenti: monomodale e multimodale. La fibra a singolo modo è dotata di un core interno più ristretto rispetto a quella multimodale, la differenza è dell'ordine della lunghezza d'onda usata, dunque la prima permette la trasmissione, grazie a fenomeni di riflessione totale al suo interno, solamente del modo fondamentale dei fasci, il Gaussiano. Una fibra a multimodo con il suo core di diametro maggiore permette la trasmissione anche di modi superiori al Gaussiano, come ad esempio i modi di Hermite-Gauss.

Inserendo una fibra a singolo modo nell'accoppiatore si nota immediatamente come il segnale venga ridotto, mentre con la fibra multimodale il segnale risulta molto più forte:

	minimo	massimo
multimodo	$110 \mu W$	$2.3 mW$
singolo modo	$1 \mu W$	$60 \mu W$

Per quanto riguarda la fibra monomodale il segnale si riduce molto: il massimo del segnale registrato è $60 \mu W$.

Al contrario, per la fibra multimodo si può affermare di aver accoppiato circa il 68% della potenza in uscita dalla ricevente con un contrasto in polarizzazione del 4.2%.

Questo risultato assicura di poter avere una buona efficienza di rivelazione per la distribuzione di chiave quantistica.

La discrepanza rilevata nell'iniezione tra le due fibre è da imputarsi ad un allargamento dello spettro spaziale durante la propagazione che rende la fibra a singolo modo inadatta a raccogliere e trasmettere il segnale.

Capitolo 5

Misura angolare tramite photonic gear

5.1 Photonic gear

La tecnica del photonic gear sfrutta alti valori del momento angolare orbitale per ottenere una misura molto precisa dell'angolo di una rotazione tra due sistemi di riferimento [9]. La struttura di base di questa tecnica, senza momento angolare orbitale, si ottiene mandando da Alice a Bob la luce di un fascio gaussiano in polarizzazione orizzontale che arriverá a destinazione ruotata di un angolo θ , pari a quello tra i due sistemi di riferimento. Sfruttando filtri polarizzatori e rivelatori si osserva che l'intensitá segue una legge di tipo Malus che dipende, appunto, dall'angolo di rotazione tra i due sistemi. Per verificarlo, basta osservare come agisce la trasformazione di rotazione sullo stato di polarizzazione orizzontale. Come si sá quest'ultimo puó essere espresso tramite una combinazione delle polarizzazioni circolari:

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle + |R\rangle) \quad (5.1)$$

Usando la trasformazione di rotazione, che rappresenta il cambio di sistema di riferimento, dalla formula 2.17 si ottiene lo stato:

$$|H_\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta}|L\rangle + e^{-i\theta}|R\rangle) \quad (5.2)$$

dunque, effettuando la proiezione sullo stato di polarizzazione orizzontale, il cui modulo quadro é rappresentativo della misura su tale polarizzazione in ricezione, si trova:

$$| \langle H | H_\theta \rangle |^2 = \cos^2(\theta) \quad (5.3)$$

Osservando la variazione di intensit  luminosa si pu  risalire all'angolo tra i due sistemi di riferimento. Sfruttando tecniche in cui il fascio   composto solo da pochi fotoni si pu  arrivare a stabilire come limite per la risoluzione:

$$\Delta\theta^Q \geq (2\sqrt{\nu N})^{-1} \quad (5.4)$$

dove ν   il numero di volte che l'esperimento viene ripetuto ed N il numero di fotoni inviati, che in questo caso   molto limitato.   possibile spingere ulteriormente i limiti di tale misura, sfruttando tecniche che prevedono l'uso di fotoni entangled in stati non ortogonali.

Se si utilizza un fascio con momento angolare orbitale i passaggi precedenti vengono modificati consentendo un aumento di risoluzione. Tramite la q-plate si possono ottenere stati con momento angolare orbitale pari a $2q$ che sono influenzati dalla trasformazione di rotazione nel modo descritto dalla formula 2.18. Dunque sfruttando una q-plate ed una lamina a mezz'onda si ottiene:

$$|H \rangle \xrightarrow{q\text{-plate}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|L \rangle |r \rangle_o + |R \rangle |l \rangle_o) \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|L \rangle |r \rangle_o + |R \rangle |l \rangle_o) \xrightarrow{HWP} \frac{1}{\sqrt{2}}(|R \rangle |r \rangle_o + |L \rangle |l \rangle_o) \quad (5.6)$$

dove gli stati $|r/l \rangle_o$ hanno momento angolare orbitale pari a $2q$ definito dalla q-plate. L'utilizzo della lamina a mezz'onda ci permette di invertire gli stati di polarizzazione, ottenendo quindi un momento angolare totale pari a $m = 2q + 1$ dato che ora i segni sono concordi, e quindi il momento angolare di spin della polarizzazione si aggiunge al momento angolare orbitale dato dal fronte d'onda, e non discordi come nella sezione 2.6.

Tramite l'applicazione della rotazione si trova:

$$|H_\theta^{OAM} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-im\theta}|R \rangle |r \rangle_o + e^{im\theta}|L \rangle |l \rangle_o) \quad (5.7)$$

Dopo la rotazione il fascio viene fatto passare, nuovamente, per la lamina a mezz'onda e per la q-plate.

In questo modo si ottiene una legge di malus modificata:

$$|\langle H | \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-im\theta}|L\rangle + e^{im\theta}|R\rangle) \right) |^2 = \cos^2(m\theta) \quad (5.8)$$

La periodicit  di questa legge ci permette di ottenere una risoluzione notevolmente migliorata. Dunque, tramite l'invio di singoli fotoni si pu  arrivare ad ottenere un limite inferiore di:

$$\Delta\theta^Q \geq (2m\sqrt{\nu N})^{-1} \quad (5.9)$$

Sperimentalmente la q-plate con il fattore q pi  elevato prodotta finora   di 50. Questo permette di adoperare fasci con un momento angolare orbitale pari a 100 e, conseguentemente, un momento angolare totale di 101. In questo modo la risoluzione angolare si alza di almeno due ordini di grandezza rispetto all'uso della semplice polarizzazione lineare.

Se in parallelo alla distribuzione di chiave quantistica si avesse la possibilit  di implementare un protocollo per la misura della rotazione angolare come qui descritta sarebbe possibile effettuare un allineamento dei sistemi di riferimento anche in assenza di stati invarianti per rotazioni.

5.2 Propagazione di fasci con m elevato

Vi sono recenti studi fatti per analizzare la propagazione di un fascio con momento angolare orbitale [35]. In tale studio   stato, per , analizzato il comportamento di un fascio di Laguerre-Gauss. Non essendo banale fare calcoli analoghi in maniera analitica per la funzione ipergeometrica, per via della complessit  della sua funzione analitica, si   costretti a metodi numerici. Per motivi legati alla dimensione massima delle variabili utilizzabili non   stato possibile effettuare una stima diretta del fattore M^2 del caso $m = 100$ dunque si   costretti a metodi alternativi per effettuare una stima.

5.2.1 Stima del fattore M^2 per la divergenza

Si   pensato di sfruttare la tecnica del photonic gear per stabilire l'angolo di rotazione in ogni istante tra i sistemi di riferimento di Alice e Bob. Con il setup sperimentale in uso per riuscire ad effettuare tale misura bisogna riuscire a far propagare e raccogliere il segnale a 3 km di distanza, dunque bisogna indagare la propagazione di fasci ipergeometrici ad alto momento angolare orbitale. Come si   visto nella sezione 3.1, il fattore M^2 di un fascio gaussiano, con divergenza analoga al fascio ipergeometrico, aumenta

all'aumentare di m . Supponendo che il fattore M^2 aumenti costantemente in modo pressoché lineare senza diventare mai costante (ovvero senza saturazione) si ottiene, per un momento angolare orbitale pari a $m = 100$, un fattore $M^2 \simeq 185$. L'approssimazione di linearità é in realtà una sottostima in quanto la differenza tra due valori di M^2 aumenta all'aumentare di m . Si suppone, quindi, che la variazione della differenza per alti M^2 sia piccola: si osserva che $M^2(m = 9) - M^2(m = 8) = 1,8507$ mentre $M^2(m = 10) - M^2(m = 9) = 1,8514$ e andando avanti questo piccolo aumento tende a ridursi ulteriormente. Nel caso l'approssimazione di linearità si rivelasse sbagliata darebbe un errore su $M^2(m = 100)$ minore del 1%. Si sottolinea che tali valori di M^2 sono calcolati tramite simulazione numerica e il waist considerato é del tipo raggio in cui la circonferenza include l'86% della potenza totale del fascio. In figura 5.1 si osservano gli M^2 calcolati numericamente e quelli stimati con la tecnica appena descritta.

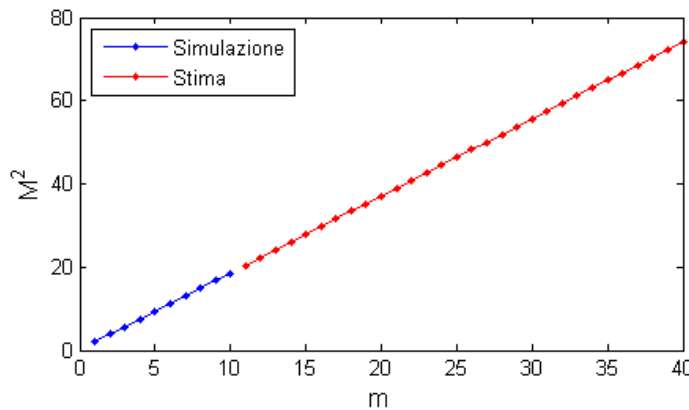


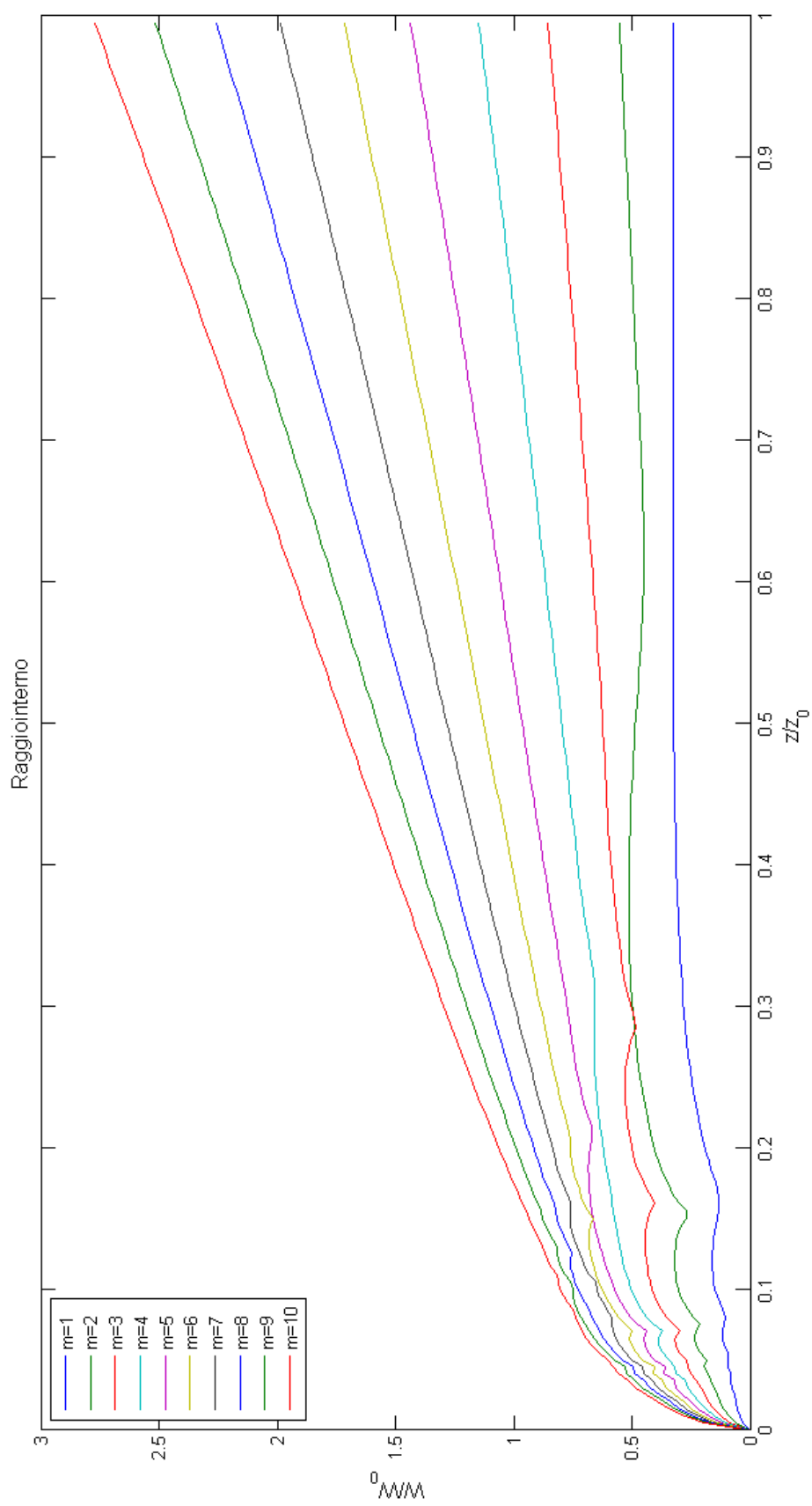
Figura 5.1: Fattore M^2 di un fascio gaussiano corrispondente al fascio ipergeometrico con m diverso da zero. In blu simulazione numerica, in rosso stima teorica

Un fattore M^2 di 185 é estremamente elevato, nel caso lo si volesse usare bisognerebbe fare molta attenzione alla propagazione di un tale modo attraverso le ottiche utilizzate in quanto si potrebbero manifestare con facilitá effetti di diffrazione.

5.2.2 Ricezione del fascio

Con una divergenza del fascio elevata quanto quella stimata si troverebbe, nelle condizioni sperimentali considerate fin'ora, una divergenza del fascio di

circa 4 mrad. La misura angolare non é, dunque, fattibile: a 3 km di distanza si troverebbe uno spot talmente largo da essere difficilmente analizzabile. Per raccogliere il segnale si dispone di un telescopio con specchio primario dal diametro di 320 mm e uno secondario con diametro di 110 mm. Dunque, lo spot con la caratteristica forma a ciambella, per essere raccolto, deve avere diametro esterno minore di quello dello specchio primario e diametro interno maggiore dello specchio secondario che ostruisce il percorso diretto del fascio verso lo specchio principale. In tal modo si riuscirebbe a recuperare la maggior parte del segnale ed analizzarlo. Tramite simulazione numerica si sono cercate queste condizioni.



AR

Figura 5.2: Raggio interno del fascio Ipergeometrico calcolato a diversi valori di m , le quantità sugli assi sono adimensionali.

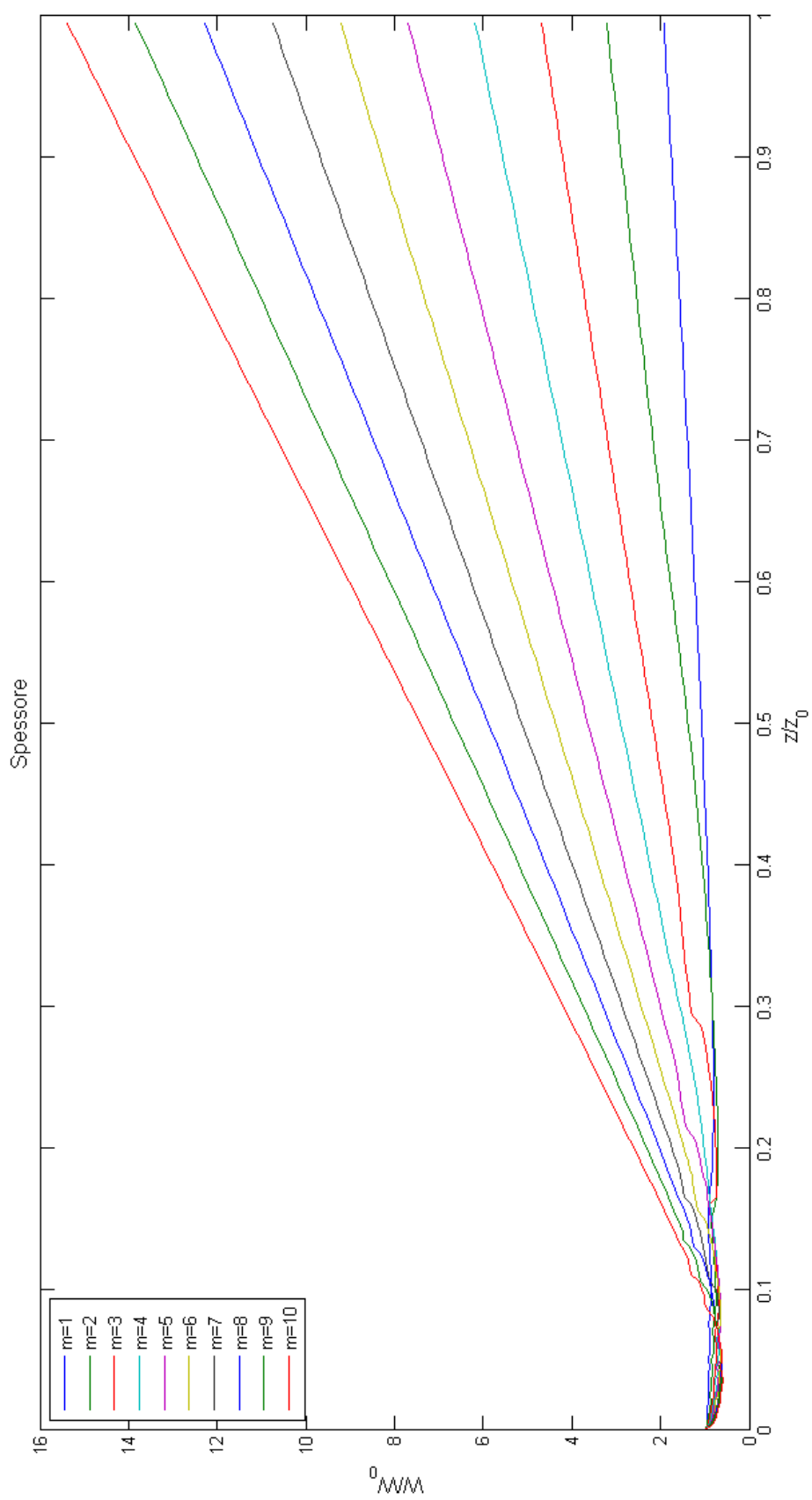


Figura 5.3: Spessore del facio Ipergeometrico calcolato a diversi valori di m come differenza tra raggio esterno ed raggio interno, le quantità sugli assi sono adimensionali.

In figura 5.2 si osserva la variazione del raggio interno del fascio ipergeometrico a diversi valori di m , fino a 10 dato che oltre questo valore il calcolo computazionale risulta difficile. Per calcolare il raggio interno non é possibile usare la definizione di raggio attraverso cui passa l'86% della potenza totale, in quanto all'interno della ciambella l'intensitá tende a 0. Si e', in ogni caso, interessati ad avere una definizione che ci permetta di sapere la quantitá di potenza raccolta. Si sono dunque calcolati il raggio interno e raggio esterno come la distanza dal centro del fascio alla stessa intensitá, ovvero $I(R_{interno}) = I(R_{esterno})$, che formano un anello attraverso cui passa una potenza pari ad $1 - e^{-2}$ del fascio totale ($86\% \pm 0.5\%$). In questo modo si riesce ad avere un'informazione sia sulla potenza raccolta, sia sull'effettiva dimensione del fascio. In figura 5.3 si mostra lo spessore della ciambella per diversi valori del momento angolare. Le fluttuazioni che si osservano nello spessore, e in misura ridotta anche nel raggio interno, sono dovute alla rapida variazione del profilo dell'ipergeometrica che si osserva vicino alla posizione $z = 0$ (osservabile in figura 2.10). Il profilo varia da una Gaussiana con singolaritá di fase in $z = 0$ alla caratteristica forma a ciambella che si osserva nel campo lontano. Tali fluttuazioni sono giá stato esaminate quando si é andati a vedere come si propaga il waist del fascio ipergeometrico, per $m = 1$ le fluttuazioni cessano circa a $z = 0.2$ (figura 3.1)

Si é riusciti ad effettuare il calcolo del raggio interno ed esterno con un momento angolare orbitale pari ad $m = 100$. Per motivi computazionali la regione in cui é stato possibile fare il calcolo é ristretta, $0 < z < 0.1$, ma fortunatamente include esattamente la regione di interesse. Per motivi numerici, inoltre, non é stato possibile utilizzare la funzione ipergeometrica approssimata, ma si e' usata la definizione piú semplice, di raggio interno ed esterno, come distanza dal centro dei punti ad intensitá $1/e^2$ rispetto al massimo assoluto di intensitá.

5.3 Conclusioni sulla propagazione del fascio ad m elevato

Considerando i risultati in figura 5.4 se si assume un $W_0 = 2.6$ cm, come osservato sperimentalmente, é possibile stabilire i limiti del telescopio e stimare la regione in cui sarebbe possibile raccogliere il segnale. Dunque, osservando la figura si nota che i valori dei raggi che sono compresi tra le due linee rosse, che caratterizzano il limite del telescopio, corrispondono all'intervallo sulla posizione $0.048 < z < 0.056$. Effettuando l'integrale sul profilo di intensitá per risalire alla potenza raccolta, si trova che in tale intervallo si raccoglie una

5.3. CONCLUSIONI SULLA PROPAGAZIONE DEL FASCIO AD M ELEVATO71

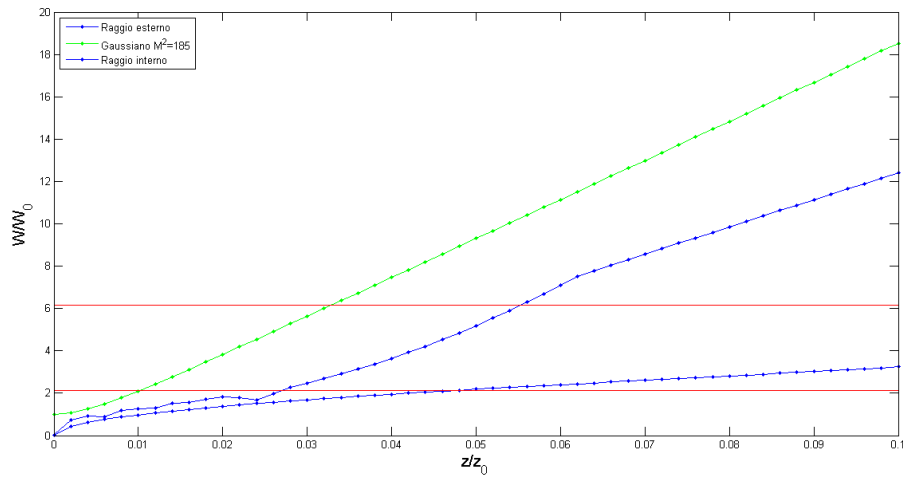


Figura 5.4: Raggio interno ed esterno calcolati per un momento angolare orbitale $m = 100$. Le linee rosse rappresentano il bordo interno ed esterno del telescopio, la linea verde rappresenta il comportamento teorico del fascio per un $M^2 = 185$

quantità di potenza totale variabile dal 60% al 70%. Considerando il setup e le condizioni sperimentali usate fin'ora, si ottiene che ad una distanza pari a circa $126\text{ m} < z < 147\text{ m}$ dal waist minimo si può raccogliere il fascio con momento angolare totale pari a $m = 101$ per effettuare la misura angolare ad alta precisione tramite la tecnica del photonic gear.

Capitolo 6

Conclusioni

6.1 Distribuzione di chiave quantistica

In seguito ai risultati ottenuti si può affermare che è possibile svolgere un protocollo di distribuzione di chiave quantistica indipendente dall'esistenza di un sistema di riferimento condiviso tra trasmettitore e ricevitore. Si è riusciti ad effettuare la propagazione del fascio per una distanza di 3.14 km.

È stato creato un sistema di ricezione che permettesse di osservare il fascio con una camera ad infrarossi e ricostruire l'immagine con una scala spaziale della precisione del millimetro. È stata trovata una formulazione computazionalmente semplificata del modo ipergeometrico al fine di consentire lo studio teorico del modo ed effettuare previsioni teoriche sulla propagazione.

Dall'analisi della fluttuazione dei centroidi si è in grado di affermare che la turbolenza osservata durante l'esperimento, caratterizzata da $C_n^2 = (3 - 5) \cdot 10^{-16} m^{-2/3}$, è di lieve entità dunque favorevole alla propagazione.

Il fronte d'onda del modo ipergeometrico subisce lievi alterazioni dato che la lunghezza di coerenza di Fried è sempre maggiore del raggio dello spot.

L'iniezione in fibra è possibile per un fascio espanso utilizzando una lente a grande diametro, dunque, è ancora tecnicamente possibile raccogliere un fascio di tali dimensioni con una trasmittività di circa il 10%.

Il contrasto in polarizzazione ottenuto dopo la q-plate, che ritrasforma il fascio nel modo Gaussiano, è elevato, 4.2%. Questo ci consente di affermare che è possibile effettuare la condivisione di chiave sfruttando la polarizzazio-

ne dei fotoni come mezzo fisico per i qubit.

Il naturale sviluppo di questo lavoro sarebbe l'implementazione della distribuzione di chiave quantistica. Per questo scopo bisogna creare dei nuovi setup sperimentali per implementare le postazioni di Alice e Bob. La strumentazione di Alice deve essere in grado di generare gli stati ibridi indipendenti dalla rotazione e trasmetterli. La strumentazione di Bob deve essere in grado di ricevere correttamente tali stati e analizzarli. Il setup sperimentale cambia in base al tipo di protocollo che si vuole andare ad implementare, per un protocollo di tipo BB84 si può osservare un setup utilizzabile in [28].

Nelle condizioni sperimentali usate in questa tesi potrebbe essere necessario aggiungere un segnale di sincronizzazione. Tale necessità sorge dal fatto che mandando pacchetti di singoli, o comunque pochi, fotoni potrebbe non giungere il segnale e dunque l'intera sequenza di bit arrivati a Bob potrebbe traslare, a causa del bit mancante, compromettendo tutti i dati. Il segnale di sincronia permetterebbe di distinguere tali eventi ed eliminarli dalla sequenza della chiave. Una possibile implementazione per la sincronizzazione sarebbe utilizzare un laser impulsato, con la stessa frequenza del laser di trasmissione, con una lunghezza d'onda diversa da quella con cui si effettua la distribuzione di chiave. Tale applicazione risulta però complicata in alcuni casi, la soluzione meno problematica, e molto precisa, risulta essere effettuare la sincronizzazione tra trasmettitore e ricevitore tramite segnale GPS.

Data la fluttuazione osservata si può pensare di estendere la distanza di propagazione di alcuni km. Considerando una perturbazione di $C_n^2 = 5 \cdot 10^{-16} m^{-2/3}$ per una distanza di 6 km si ottiene una lunghezza di coerenza di Fried di $r_0 = 7.4$ cm. Studiando l'ottica del telescopio si può trovare il waist che ci si aspetta sullo schermo ad una tale distanza, il quale risulta essere compreso tra i 4 ed i 10 cm quando viene minimizzato il diametro. Dal confronto tra il parametro di Fried e il raggio dello spot atteso è possibile affermare che teoricamente una tale propagazione sarebbe possibile.

Allo stato attuale non si conosce la precisa interazione tra un fascio dotato di momento angolare orbitale e l'atmosfera, sono stati fatti alcuni studi [40] ma nessuna sperimentazione diretta. Sarebbe inoltre interessante analizzare sperimentalmente le differenze previste nella propagazione tra i modi ipergeometrici e i modi di Laguerre-Gauss con le loro differenti tecniche di generazione.

6.2 Photonic gear

Per quanto riguarda l'implementazione di una misura dell'angolo di rotazione tra ricevitore e trasmettitore tramite la tecnica del photonic gear si può affermare che su lunga distanza, con la strumentazione considerata, non é possibile effettuare tale misura. Sono state altresí trovate delle condizioni stringenti ($126 \text{ m} < z/z_0 < 147 \text{ m}$ dal waist minimo) che permetterebbero di effettuare la misura su scala ridotta.

Si sottolinea inoltre che non si conoscono gli effetti della propagazione in spazio libero di un fascio a cosí alto momento angolare come quello studiato. In letteratura fin'ora risulta che il modo a piú alto momento angolare orbitale propagato in spazio libero sia di Laguerre-Gauss con $m = 16$ [39]. Per effettuare un esperimento di misura angolare é necessario prima indagare l'interazione di un tale modo con la turbolenza atmosferica.

Appendice A

Codice MATLAB

Codice utilizzato per la trasformazione dell'immagine

```
1 %program to tranform images that are affected by projective
2 %transformations
3 %unregistered is the affected image
4 %reference is a nonaffected image
5 %object is the image to transform that doesn't have the ...
   reference point
6 % at least 4 corresponding points need to be taken in the ...
   two images
7 %we use 6 to better define the transformation
8 %these are saved in file base_points - for the refer - and ...
   input_points -
9 %for the affected
10 %in the end show and save the image
11 %PV 31/10/13
12 %GZ 15/5/14
13
14 side = imread('proiett.bmp');
15 figure, imshow(side);
16
17 %the 6 reference point on the rotated image
18 input_points=ginput2(6); %left click zoom right click select
19 save('input_points.dat','input_points','-ASCII');
20
21 % Read in the reference image - with regulare squares.
22 figure, imshow('diretta.bmp')
23
24 %6 referece point of the base image
25 base_points=ginput2(6);
26 save('base_points.dat','base_points','-ASCII');
27
```

```

28 % Create a transformation structure for a projective
29 % transformation.
30 t_concord = cp2tform(input_points,base_points,'projective');
31
32 transformed = imtransform(side,t_concord);
33 figure, imshow(transformed)
34 nam=['proiett','_tx.bmp'];
35 imwrite(transformed,nam);
36
37 %using the same transformation now transform the object image
38 beam = imread('oam1860mv11ms_average.bmp');
39 figure, imshow(beam);
40 title('Originale')
41
42 beam2 = imtransform(beam,t_concord);
43 figure, imshow(beam2)
44 nam=['oam1860mv11ms','_tx.bmp'];
45 imwrite(beam2,nam);
46 title('Trasformed')
47
48 %gaussian filter to reduce noise
49 H = fspecial('gaussian', 5,3);
50 MotionBlur = imfilter(beam2,H,'replicate');
51 nam=['oam1860mv11ms','_filt.bmp'];
52 imwrite(MotionBlur,nam);
53 figure, imshow(MotionBlur);
54 title('gauss filter')

```

Codice utilizzato per calcolare i parametri di conversione pixel/cm

```

1 %program to calculate the distance by parametrization
2 %of position using reference points
3
4 %16 reference point of the image already transformed
5
6 %clear all
7 figure(11), imshow('proiett123_tx.bmp')
8 r=ginput2(12);
9
10 R5=r(1,:);R6=r(2,:);R7=r(3,:);R8=r(4,:);
11 R9=r(5,:);R10=r(6,:);R11=r(7,:);R12=r(8,:);
12 R13=r(9,:);R14=r(10,:);R15=r(11,:);R16=r(12,:);
13
14 R1=[329,183];R2=[864,164];R3=[1408,145];R4=[1952,133];

```

```

15
16 cross5=ginput2(4);
17 i5=cross5(1,:);
18 j5=cross5(2,:); k5=cross5(3,:);
19 l5=cross5(4,:);
20
21 cross8=ginput2(4);
22 i8=cross8(1,:);
23 j8=cross8(2,:); k8=cross8(3,:);
24 l8=cross8(4,:);
25
26
27 cross13=ginput2(4);
28 i13=cross13(1,:);
29 j13=cross13(2,:); k13=cross13(3,:);
30 l13=cross13(4,:);
31
32
33 cross16=ginput2(4);
34 i16=cross16(1,:);
35 j16=cross16(2,:); k16=cross16(3,:);
36 l16=cross16(4,:);
37
38
39 par(1)=0.031;%linear
40 par(2)=1e-5;%quadratic
41 par(3)=0;%mixed
42
43
44 par(4)=0.031;%linear
45 par(5)=1e-5;%quadratic
46 par(6)=0;%mixed
47
48 par(7)=1e-8;%cubic
49 par(8)=1e-8;%cubic
50
51
52
53 %vector of pair of points, which distance is known
54 X=[[i5,R5];[j5,R5];[k5,R5];[l5,R5];
55     [i8,R8];[j8,R8];[k8,R8];[l8,R8];
56     [i13,R13];[j13,R13];[k13,R13];[l13,R13];
57     [i16,R16];[j16,R16];[k16,R16];[l16,R16];
58     [i5,l5];[k5,j5];[i8,l8];[k8,j8]; ...
59     [i13,l13];[k13,j13];[i16,l16];[k16,j16];
60     [R5,R10];[R6,R11];[R7,R12];[R10,R7];
61     [R6,R12];[R8,R10];[R7,R16];
62     [R16,R12];[R10,R6];[R13,R14];[R5,R6];
63     [R9,R12];[R16,R13];[R5,R8];

```

```

63     [i8,i16];[j8,j16];[k8,k16];[l8,l16];
64     [i13,i16];[j13,j16];[k13,k16];[l13,l16]];
65
66     %vector of known distances
67     Y=[0.2; 0.2; 0.2; 0.2;
68        0.2; 0.2; 0.2; 0.2;
69        0.2; 0.2; 0.2; 0.2;
70        0.2; 0.2; 0.2; 0.2;
71        0.4; 0.4; 0.4; 0.4; 0.4; 0.4; 0.4; 0.4;
72        14.14; 14.14; 14.14; 14.14;
73        22.4; 22.4; 22.4;
74        10; 10; 10; 10;
75        30; 29.9; 30;
76        20; 20; 20; 20;
77        30; 30; 30; 30];
78
79     options=optimset('TolFun',1e-30,'TolX',1e-20)
80     [x,Res,Jacob,CovB,errormodelinfo]= ...
        nlinfit(X,Y,@dis3,par,options);
81
82     disp(' test: dovrebbero essere 30 cm')
83     disp(dis3(x,[R9,R12]));
84     disp(dis3(x,[R5,R8]));
85     disp(dis3(x,[R16,R13]));
86
87     figure(1),plot(Y,Res,'.');
88
89     disp(sum(Res.^2)/length(Y));
90
91     save('distance.dat','x','-ASCII');
92
93     %check in the figure if you get the right order
94     figure(12),plot(r(:,1), r(:,2), '.', cross5(:,1), ...
        cross5(:,2), 'r-', cross8(:,1), cross8(:,2), 'r-', ...
        cross13(:,1), cross13(:,2), 'r-', cross16(:,1), ...
        cross16(:,2), 'r-')

```

Codice utilizzato per l'analisi della propagazione a lungo raggio del fascio ipergeometrico

```

1  %programma per seguire il percorso del centro dell'oam ...
    nella sua evoluzione
2
3

```

```

4 clear all; %toglierlo per mantenere i dati quando si ...
   blocca il programma,
5 mov=mmreader('infrarosso_nofiltro_20ms_20fps_centrato2.avi');
6 frames=mov.NumberOfFrames;
7
8 %trovo la trasformazione
9 base_points=textread('base_points.dat');
10 input_points=textread('input_points.dat');
11 t_concord = cp2tform(input_points,base_points,'projective');
12
13 %filtro per smoothing
14 H = fspecial('gaussian', 5,3);
15
16
17 %taglio dell'immagine, le posizioni sono state scelte per ...
   mantenere centrato il piu
18 %possibile l'oam in tutta la sua evoluzione
19 taglioyinf=150; taglioyup=1050;
20 taglioxinf=400; taglioxup=1300;
21
22
23 x=textread('distance.dat');
24
25
26 %preparazione dei vettori delle coord spaziali dell'immagine
27 posx(1,1)=0;
28 posy(1,1)=0;
29 for(j=0:1:(taglioxup - taglioxinf))
30 for(i=0:1:(taglioyup - taglioyinf))
31 posy(i+1,j+1)=dis3(x,[taglioxinf+j, taglioyinf, ...
   taglioxinf+j, taglioyinf+i]);
32 posx(i+1,j+1)=dis3(x,[taglioxinf, taglioyinf+i, ...
   taglioxinf+j, taglioyinf+i]);
33 end;
34 end;
35
36 startposA=450; %posizione di partenza l'immagine e' circa ...
   centrata
37 startposB=450;
38
39 global minimo;
40 global ran;
41
42 ran=180;% regione in cui tagliare per fit
43
44 %trasformo ogni immagine e cerco il min al centro dell'OAM
45 k=1
46 for i=1:1:frames
47     img=read(mov,i); % leggo l'immagine

```

```

48  img = imtransform(img,t_concord); %la trasformo
49  img=img(taglioyinf:taglioyup, taglioxinf:taglioxup); ...
    %la taglio
50  img = imfilter(img,H,'replicate'); %la filtro
51
52
53  minprec=0;
54  minimo=1;
55  ran=180;% regione in cui tagliare per fit
56  posminA(1)=startposA;
57  posminB(1)=startposB;
58  xtep=1;
59  range=40; %valore settabile, decide la regione in cui ...
    cercare il minimo, trovo che 40 sia un valore ottimale
60  failed=false;
61  while minimo ~= minprec
62      minprec=minimo;%setto il minimo dal giro precedente
63
64      %il programma puo' bloccarsi in questo punto ...
        quando la regione
65      %limitata esce da quella di taglio precedente per ...
        ripartire
66      %togliere il clear all e far ripartire con i che ...
        va dall'ultimo
67      %valore raggiunto +2, in questo modo parte dal ...
        frame successivo
68
69      minimo=min(min( ...
        img(posminA(xtep)-range:posminA(xtep)+range, ...
        posminB(xtep)-range:posminB(xtep)+range) )); ...
        %trovo il minimo in una regione limitata
70      tempimg=img(posminA(xtep)-range:posminA(xtep)+range, ...
        posminB(xtep)-range:posminB(xtep)+range);%taglio ...
        nella regione limitata
71      [tempA tempB]= find(tempimg==minimo); %cerco il ...
        minimo nella regione limitata
72
73      if minimo <40
74          disp('La ricerca del minimo centrale interno ...
        dell OAM e fallita, e andato verso l esterno ...
        , il punto non verra registrato ');
75          failed=true;
76      end;
77
78
79      xtep=xtep+1;
80      posminA(xtep)=round(mean(tempA))+posminA(xtep-1)-range; ...
        %mi riporto ai pixel nella regione totale non ...
        limitata

```

```

81     posminB(xtep)=round(mean(tempB))+posminB(xtep-1)-range;
82
83 end;
84
85     if failed~= true
86
87         I(k)=mean(posminA(xtep));
88         J(k)=mean(posminB(xtep));
89         startposA=mean(posminA(xtep)); %posizione di partenza ...
            per trovare il centro visto che tra frame vicini ...
            dovrebbe essere vicino
90         startposB=mean(posminB(xtep));
91
92
93         %inizio sezione per il fit
94         par=0;
95         par=[875, double(180)];
96         par=double(par);
97
98         temporaryimgx=double((img(round(I(k)), ...
            round(J(k))-ran:round(J(k))+ran)'));
99         temporaryimgy=double(...
            img(round(I(k))-ran:round(I(k))+ran, round(J(k))) );
100        ran=double(ran);
101        minimo=double(minimo);
102        %fitassex
103
104        options=optimset('TolFun', 1e-20, 'MaxFunEvals', 200, ...
            'MaxIter', 500, 'Tolx', 1e-10);
105        [xoam, residual, Jacob, CovB, errormodelinfo]= ...
            nlinfit((0:1:2*ran)', double(temporaryimgx), ...
            @INTLGfitprofile, par, options);
106
107
108
109
110        %fitassey
111        [yoam, residual, Jacob, CovB, errormodelinfo]= ...
            nlinfit((0:1:2*ran)', double(temporaryimgy), ...
            @INTLGfitprofile, par, options);
112
113        %fine sezione per il fit
114
115        waistx(k)=posx(round(I(k)), round(J(k))) - ...
            posx(round(I(k)), -round(xoam(2)) + round(J(k)));
116        waisty(k)=posy(round(I(k)), round(J(k))) - ...
            posy(-round(yoam(2)) + round(I(k)), round(J(k))) ;
117
118

```

```
119     k=k+1;
120     end;
121 end;
122 %%
123 %per visualizzare i dati in caso si blocchi il programma ...
124     eseguire questa
125 %sezione del codice
126 figure(1)
127 imagesc(img);
128 colorbar
129 axis equal
130
131 for i=1:1:k-1
132     coordinatex(i)=posx(round(I(i)),round(J(i)));
133     coordinatey(i)=posy(round(I(i)),round(J(i)));
134 end;
135
136
137 figure(2),plot(coordinatex,coordinatey,'+')
138 xlabel('X (cm)', 'FontSize',15)
139 ylabel('Y (cm)', 'FontSize',15)
140 axis equal
141
142
143 figure(3),hist(coordinatex,25)
144 xlabel('X (cm)', 'FontSize',15)
145 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)
146
147 figure(4),hist(coordinatey,25)
148 xlabel('Y (cm)', 'FontSize',15)
149 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)
150
151 figure(5),plot(1:1:k-1,waistx,'b.-',1:1:k-1,waisty,'r.-')
152 xlabel('Waist (cm)', 'FontSize',15)
153 xlabel('Frame', 'FontSize',15)
154 hleg1 = legend('Asse X', 'Asse Y');
155 set(hleg1, 'Location', 'NorthWest');
156
157 figure(6),hist(waistx,25)
158 xlabel('Waist X (cm)', 'FontSize',15)
159 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)
160
161 figure(7),hist(waisty,25)
162 xlabel('Waist Y (cm)', 'FontSize',15)
163 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)
164
165 data=0;
166
```

```

167 [data(1) sigma(1) errdata1 errs sigma1]=normfit(coordinatex)
168 [data(2) sigma(2) errdata2 errs sigma2]=normfit(coordinatey)
169 [data(3) sigma(3) errdata3 errs sigma3]=normfit(waistx)
170 [data(4) sigma(4) errdata4 errs sigma4]=normfit(waisty)
171
172 figure(8),histfit(coordinatex,25,'normal')
173 xlabel('X (cm)', 'FontSize',15)
174 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)
175
176 figure(9),histfit(coordinatey,25,'normal')
177 xlabel('Y (cm)', 'FontSize',15)
178 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)
179
180 figure(10),histfit(waistx,25,'normal')
181 xlabel('Waist X (cm)', 'FontSize',15)
182 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)
183
184 figure(11),histfit(waisty,25,'normal')
185 xlabel('Waist Y (cm)', 'FontSize',15)
186 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)

```

Codice utilizzato per l'analisi della propagazione a lungo raggio del fascio gaussiano

```

1  %programma per seguire il percorso del centro del ...
   gaussiano nella sua evoluzione
2
3  clear all;
4  x=textread('distance.dat');
5  mov=mmreader('gaussiano_3ms.avi');
6  frames=mov.NumberOfFrames;
7
8  %trovo la trasformazione
9  base_points=textread('base_points.dat');
10 input_points=textread('input_points.dat');
11 t_concord = cp2tform(input_points,base_points,'projective');
12
13 %filtro per smoothing
14 H = fspecial('gaussian', 5,3);
15
16
17 %taglio dell'immagine
18 taglioyinf=50; taglioyup=800;
19 taglioxinf=500; taglioxup=1300;
20

```

```

21 %preparazione dei vettori delle coord spaziali dell'immagine
22 posx(1,1)=0;
23 posy(1,1)=0;
24 for(j=0:1:(taglioxsup - taglioxinf))
25 for(i=0:1:(taglioyssup - taglioyinf))
26 posy(i+1,j+1)=dis3(x,[taglioxinf+j, taglioyinf, ...
    taglioxinf+j, taglioyinf+i]);
27 posx(i+1,j+1)=dis3(x,[taglioxinf, taglioyinf+i, ...
    taglioxinf+j, taglioyinf+i]);
28 end;
29 end;
30
31
32 ran=40; %distanza dal massimo a cui vengono presi i dati ...
    per fare fit gaussiano
33
34 %trasformo ogni immagine e cerco il max della gaussiana
35 k=1
36 for i=1:1:frames
37 img=read(mov,i); % leggo l'immagine
38 img = imtransform(img,t_concord); %la trasformo
39 img=img(taglioyinf:taglioyssup,taglioxinf:taglioxsup); ...
    %la taglio
40 img = imfilter(img,H,'replicate'); %la filtro
41
42 %cerco il massimo della gaussiana
43 zmax=max(max(img));
44 [A B]= find(img==zmax);
45 I(k)=mean(A);%coord della riga
46 J(k)=mean(B);%coord della colonna
47
48
49
50 funcx=fit((0:1:2*ran)', (img(round(I(k)), ...
    round(J(k))-ran:round(J(k))+ran))', 'gauss1');
51
52
53 waistx(k)=posx(round(I(k)), round(funcx.b1) + ...
    round(J(k))-ran) - posx(round(I(k)), ...
    -round(sqrt(2)*funcx.c1) + round(funcx.b1) + ...
    round(J(k))-ran);
54
55
56 funcy=fit((0:1:2*ran)', img(round(I(k)) - ...
    ran:round(I(k)) + ran, round(J(k))), 'gauss1');
57
58 waisty(k)=posy(round(funcy.b1) + round(I(k))-ran, ...
    round(J(k))) - posy(-round(sqrt(2)*funcy.c1) + ...
    round(funcy.b1) + round(I(k)) - ran, round(J(k))) ;

```

```

59
60     k=k+1;
61 end;
62
63
64 figure(1)
65 imagesc(img);
66 colorbar
67 axis equal
68
69 for i=1:1:k-1
70     coordinatex(i)=posx(round(I(i)),round(J(i)));
71     coordinatey(i)=posy(round(I(i)),round(J(i)));
72
73 end;
74 %%
75 figure(2),plot(coordinatex,coordinatey,'+')
76 xlabel('X (cm)', 'FontSize',15)
77 ylabel('Y (cm)', 'FontSize',15)
78 axis equal
79
80 figure(3),hist(coordinatex,20)
81 xlabel('X (cm)', 'FontSize',15)
82 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)
83
84 figure(4),hist(coordinatey,20)
85 xlabel('Y (cm)', 'FontSize',15)
86 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)
87
88 figure(5),plot(1:1:frames,waistx,'b.-',1:1:frames,waisty,'r.-')
89 ylabel('Waist (cm)', 'FontSize',15)
90 xlabel('Frame', 'FontSize',15)
91 hleg1 = legend('Asse X', 'Asse Y');
92 set(hleg1, 'Location', 'NorthWest');
93
94 figure(6),hist(waistx,20)
95 xlabel('Waist X (cm)', 'FontSize',15)
96 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)
97
98 figure(7),hist(waisty,20)
99 xlabel('Waist Y (cm)', 'FontSize',15)
100 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize',15)
101
102 [data(1) sigma(1) errdata1 errs1sigma1]=normfit(coordinatex)
103 [data(2) sigma(2) errdata2 errs2sigma2]=normfit(coordinatey)
104 [data(3) sigma(3) errdata3 errs3sigma3]=normfit(waistx)
105 [data(4) sigma(4) errdata4 errs4sigma4]=normfit(waisty)
106
107 figure(8),histfit(coordinatex,20, 'normal')

```

```

108 xlabel('X (cm)', 'FontSize', 15)
109 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize', 15)
110
111 figure(9), histfit(coordinatey, 20, 'normal')
112 xlabel('Y (cm)', 'FontSize', 15)
113 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize', 15)
114
115 figure(10), histfit(waistx, 25, 'normal')
116 xlabel('Waist X (cm)', 'FontSize', 15)
117 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize', 15)
118
119 figure(11), histfit(waisty, 25, 'normal')
120 xlabel('Waist Y (cm)', 'FontSize', 15)
121 ylabel('Conteggi (a.u.)', 'FontSize', 15)

```

Codice usato per il calcolo del raggio interno ed esterno

```

1  % macro per calcolare il raggio interno ed esterno con ...
   tecnica stessa intensita' e P86
2  clear all;
3  m=10
4  z=[1e-7:0.005:0.2 , 0.205:0.01:1];
5  Wg=0;
6  Winterno=0;
7  posmax=200
8
9  for k=1:1:length(z)
10 %trovo raggio massimo di interesse
11 options=optimset('TolFun', 1e-6, 'Tolx', 1e-4);
12 Rmax=fminsearch(@ (r) ...
   (integral(@ (t) t.*2.*pi.*INTIPERB(m, t, z(k)) ...
   , 1e-7, r, 'AbsTol', 1e-6)-0.95).^2, 1, options);
13 %separati per problemi di precisione
14 if z(k) <= 0.2
15 rcalc=linspace(1e-7, Rmax, round(Rmax/0.00005));
16 Icycle=[logspace(log10(1), log10(1e-4), 5000), 0.4:-0.0005:0,];
17
18 else
19 rcalc=linspace(1e-7, Rmax, round(Rmax/0.0005));
20 Icycle=[logspace(log10(1), log10(1e-4), 5000), 0.4:-0.0005:0];
21 end;
22 %cerca massimo della funzione
23 [posmax Imax]=fminsearch(@ (r) -1.*INTIPERB(m, r, z(k)), 0);
24 Imax=Imax*-1;
25

```

```

26 Icalc=INTIPERB(m,rcalc,z(k));%calcolo la regione totale e ...
    la normalizzo al max
27
28 [maxvalue(k) posmax]=max(Icalc); %posizione del max per ...
    tagliare prima e dopo
29 Icalc=Icalc./Imax;
30 %ciclo dove vario l'intensita' per fare il calcolo
31 for I=Icycle
32     [useless rint]=min((I-Icalc(1:posmax)).^2);
33     [useless rest]=min((I-Icalc(posmax:length(Icalc) )).^2 );
34     rest=rest + posmax - 1; %-1 perche' rest al punto ...
        precedente da 1 se e' uguale a rest
35     Pincluded= integral(@(t)t.*2.*pi.*INTIPERB(m, t, z(k)), ...
        rcalc(rint) ,rcalc(rest));
36
37     if( abs(Pincluded-(1-exp(-2))) <= 0.005)
38         Wg(k)=rcalc(rest);
39         Winterno(k)=rcalc(rint);
40         P86(k)=Pincluded;
41         Icheck(k)=I;
42
43         break;
44
45     else
46         Wg(k)=nan;
47         Winterno(k)=nan;
48         P86(k)=nan;
49         Icheck(k)=nan;
50
51     end;
52 end;
53 disp(z(k));
54 end;
55 %%
56 %plot
57 M2=2.1593;
58 gauss=sqrt(1+(M2.*z).^2);
59 %plot
60 figure(6),plot(z,Wg,'b.-',z,Winterno,'b.-',z,gauss,'r-');
61 xlabel('z/z_0','FontSize',15);
62 ylabel('W/W_0','FontSize',15);
63 hleg1 = legend('Raggio esterno','Raggio ...
    interno','Gaussiano con m^2');
64 set(hleg1,'Location','NorthWest');
65
66 figure(7),plot(z,P86-(1-exp(-2)),'b.-');
67 xlabel('z/z_0','FontSize',15);
68 ylabel('differenza da p86','FontSize',15);
69 title('Errore sulla potenza','FontSize',15);

```

```

70
71 figure(8),plot(z,Icheck,'b.-');
72 xlabel('z/z_0','FontSize',15);
73 ylabel('Intensita relativa al max','FontSize',15);
74 title('Confronto Intensita','FontSize',15);

```

Codice per il calcolo del waist

```

1  %Waist calcolato come potenza 86%
2  clear all;
3
4  m=1;
5  p=-m;
6
7  zmin=1e-7;
8  jumpz=0.005;
9  zmax=1+zmin;
10
11 options=optimset('TolFun',1e-7,'Tolx',1e-3);
12
13 M=5.6509  %mqadro
14 k=1;
15 Wz=1;
16 rez=0;
17 z(k)=zmin;
18 [Wg(k)]=1;
19 disp('0');
20 res(1)=0;
21 k=k+1;
22
23 for(z1=zmin+jumpz:jumpz:zmax)
24
25     [Wz(k), res(k)]=fminsearch(@(r) ...
        (integral(@(t)(2.*pi.*t).*INTOAM(p, m, t, z1), ...
        1e-10, r) - (1-exp(-2))).^2, Wz(k-1), options);
26     [Wg(k), useless]=fminsearch(@(r)(integral(@(t)(4.*t).* ...
        ((1./(1+(M.*z1).^2)) * ...
        exp(-2.*t.^2./(1+(M.*z1).^2))), 1e-10, r) - ...
        (1-exp(-2))).^2, Wg(k-1), options);
27     z(k)=z1;
28     disp(z(k))
29     k=k+1;
30 end;
31
32 %%
33

```

```

34 figure(6),plot([fliplr(-z), z], [fliplr(Wz), Wz], 'b.-', ...
    [fliplr(-z),z], [fliplr(Wg), Wg], 'r-');
35 xlabel('z/z_0','FontSize',15);
36 ylabel('W/W_0','FontSize',15);
37 hleg1 = legend('Hypergeom m=3','Gaussian M^2=5.6509');
38 set(hleg1,'Location','NorthWest');

```

Codice per il calcolo della varianza del profilo spaziale

```

1 %macro for the calculation of the r_rms
2 clear all
3 %in the article the figure 1 is at z=0
4
5 z=0.001;%1;
6 zlong=100;
7
8 intto=37.2;%52.2
9
10 %in the article it goes from 1 to 10
11
12 m=1
13 w0=0.7071/sqrt((m+1)./2);
14 options=optimset('TolFun',1e-6,'Tolx',1e-4);
15 Rmax(m)=fminsearch(@(r) (integral(@(t)t.*2.*pi ...
    .*INTIPERB(m,t,z),1e-7,r, ...
    'AbsTol',1e-6)-0.9999).^2,1,options);
16
17 RMSIPER(m)=sqrt(2*pi*integral(@(t)t.^2 .* ...
    INTIPERB(m,t,z).*t,1e-7,intto));
18 %in the article they analyze the p=0 LG mode
19
20 normaliz=integral(@(t)(2.*pi.*t).* ...
    INTLG(0,m,t,0.1),1e-10,1000);
21
22 RMSLG(m)=w0.*sqrt((1./normaliz).*2*pi* integra ...
    l(@(t)(t./w0).^2 .*INTLG(0,m, t./w0, ...
    z./w0.^2).*t./w0.^2,0,1000));
23
24 checknorm(m)=(1./normaliz).*integral(@(t)2.*pi.* ...
    INTIPERB(m,t,z).*t,1e-7,Rmax(m));
25
26 alpha(m)=((sqrt(2*pi* integral(@(t)t.^2 ...
    .*INTIPERB(m,t,zlong+0.001).*t,1e-7, 3700)) -sqrt ...
    (2*pi *integral(@(t)t.^2. *INTIPERB(m,t,zlong).*t,1e-7 ...
    ,3700)))./0.001)

```

```

27 alphaLG(m)=(sqrt((1./normaliz).*2*pi* integral(@ (t)t.^2 ...
    .*INTLG(0,m,t,zlong+0.001).*t,1e-7,1000))-sqrt( ...
    (1./normaliz).*2*pi* integral(@ (t)t.^2 ...
    .*INTLG(0,m,t,zlong).*t,1e-7,1000)))./0.001)
28
29 normaliz=integral(@ (t) (2.*pi.*t./w0.^2).* ...
    INTLG(0,m,t./w0,0.1./w0.^2),1e-10,1000);
30 alphaLGconst(m)=(w0.*sqrt( (1./normaliz).*2*pi* integral ...
    @ (t) (t./w0).^2 .* INTLG(0,m, t./w0, (zlong+0.001) ...
    ./w0.^2).*t./w0.^2, 0,1000))-w0.*sqrt((1./normaliz) ...
    .*2*pi*integral( @ (t) (t./w0) .^2.* INTLG(0, ...
    m,t./w0, (zlong)./w0.^2).*t./w0.^2, 0,1000))) ./ (0.001))
31
32 for m=2:1:10
33 w0=0.7071/sqrt((m+1)./2);
34
35 Rmax(m)=fminsearch(@ (r) ( ...
    integral(@ (t)t.*2.*pi.*INTIPERB(m,t,z), ...
    1e-7,r, 'AbsTol',1e-6)-0.999).^2, Rmax(m-1)+1,options);
36
37 RMSIPER(m)=sqrt(2*pi* integral(@ (t)t.^2 ...
    .*INTIPERB(m,t,z).*t,1e-7,intto));
38 %in the article they analyze the p=0 LG mode
39 normaliz=integral(@ (t) (2.*pi.*t).* INTLG(0,m ,t,0.1), ...
    1e-10,1000);
40
41 RMSLG(m)=w0.*sqrt((1./normaliz).*2*pi* ...
    integral(@ (t) (t./w0).^2 .*INTLG(0,m,t./w0,z./w0.^2) ...
    .*t./w0.^2 ,0,1000));
42
43 checknorm(m)=(1./normaliz). *integral(@ (t)2.*pi.* ...
    INTIPERB(m,t,z).*t,1e-7,Rmax(m));
44
45 alpha(m)=(sqrt(2*pi* integral(@ (t)t.^2 ...
    .*INTIPERB(m,t,zlong+0.001).*t,1e-7,3700))- sqrt( 2*pi ...
    *integral(@ (t) t.^2.* INTIPERB(m,t, zlong) .*t ...
    ,1e-7,3700) ))./0.001)
46
47 alphaLG(m)=(sqrt((1./normaliz).*2*pi *integral( @ (t)t.^2 ...
    .* INTLG(0,m,t,zlong+0.001) .*t,1e-7,1000 ) ) ...
    -sqrt((1./normaliz).*2*pi *integral( ...
    @ (t)t.^2.*INTLG(0,m,t,zlong) .*t, 1e-7,1000))) ./ 0.001)
48 normaliz=integral(@ (t) (2.*pi.*t./w0.^2).* ...
    INTLG(0,m,t./w0,0.1./w0.^2),1e-10,1000);
49 alphaLGconst(m)=(w0.*sqrt((1./normaliz).*2*pi ...
    *integral(@ (t) (t./w0).^2.* ...
    INTLG(0,m,t./w0, (zlong+0.001) ...
    ./w0.^2).*t./w0.^2,0,2000) )-w0 .*sqrt( (1./normaliz) ...
    .*2*pi .*integral( @ (t) (t./w0).^2.* ...

```

```

        INTLG(0,m,t./w0,(zlong)./w0.^2).*t./w0.^2,0,2000)))/(0.001))
50
51 end
52
53 m=1:1:10
54
55 LGtheo=sqrt((m+1)./2) .*sqrt(1+z.^2);
56
57 alphaLGtheo=((1./0.7071) .* (m+1)./2);
58 alphaLGtheo2=sqrt((m+1)/2);
59
60 figure(1),plot(m,RMSIPER,'b.-', m,RMSLG , 'r+-', ...
        m,LGtheo,'g.-');
61 xlabel('m','FontSize',15);
62 ylabel('R_{rms} (R/W_0)','FontSize',15);
63 hleg1 = legend('Ipergeometrica p=-m' , 'Laguerre-Gauss ...
        p=0', 'Theoretical LG');
64 set(hleg1,'Location','NorthWest');
65
66 figure(3),plot(m,alpha,'b.-' ,m,alphaLG ...
        , 'r.-',m,alphaLGconst,'g.-');
67 xlabel('m','FontSize',15);
68 ylabel('alpha_m','FontSize',15);
69 hleg1 = legend('Ipergeometrico p=-m', 'Laguerre-Gauss W_0 ...
        const', 'Laguerre-Gauss R_{rms} const');
70 set(hleg1,'Location','NorthWest');
71 %% This code is used to create a rms(z) graph but not the ...
        one showed
72 m=1;
73 z=1e-7:0.01:1;
74 w0=0.7071/sqrt((m+1)./2);
75
76 for k=1:1:length(z)
77 coeff=1./0.7071.^2;
78
79 RMSIPERZ(k)=sqrt(2*pi*integral(@(t)t.^2.* ...
        INTIPERB(m,t,z(k)).*t, 0, 15));
80 %in the article they analyze the p=0 LG mode
81 normaliz=integral(@(t)(2.*pi.*t./w0.^2) .*INTLG(0, ...
        m,t./w0, 0.1./w0.^2),1e-10, 1000);
82 RMSLGZ(k)=w0.*sqrt((1./normaliz).*2*pi* ...
        integral(@(t)(t./w0).^2.* INTLG(0,m, ...
        t./w0,z(k)./w0.^2) .*t./w0.^2,0,1000));
83
84 RMSgaussZ(k)=sqrt(2*pi*integral(@(t)t.^2 .*INTGAUSS(t, ...
        z(k)).*t,0, 1000));
85
86 checknormz(k)=(1./normaliz) .*integral(@(t)2.*pi ...
        .*INTLG(0,m,t./w0, z(k)./w0.^2).*t./w0.^2, 0,1000);

```

```
87
88 end
89
90
91 rmstheolg=sqrt((m+1)./2).*w0.*sqrt(1+(z./w0.^2).^2);
92 figure(2),plot(z,RMSIPERZ,'b.-',z,RMSLGZ,'r+-' ...
    ,z,RMSgaussZ,'g+-',z,rmstheolg,'y-');
93 xlabel('Z/Z_0','FontSize',15);
94 ylabel('R_{rms} (R/W_0)','FontSize',15);
95 hleg1 = legend('Ipergeometrico p=-m','Laguerre-Gauss ...
    p=0','Gaussiano','LG m=2');
96 set(hleg1,'Location','NorthWest');
```

Bibliografia

- [1] CH Bennett and G Brassard. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. *Proceedings of IEEE International ...*, pages 175–179, 1984.
- [2] Vincenzo D’Ambrosio, Eleonora Nagali, Stephen P Walborn, Leandro Aolita, Sergei Slussarenko, Lorenzo Marrucci, and Fabio Sciarrino. Complete experimental toolbox for alignment-free quantum communication. *Nature communications*, 3:961, January 2012.
- [3] Ebrahim Karimi, Gianluigi Zito, Bruno Piccirillo, Lorenzo Marrucci, and Enrico Santamato. Hypergeometric-Gaussian modes. *Optics letters*, 32(21):3053–3055, 2007.
- [4] L Marrucci, C Manzo, and D Paparo. Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media. *Physical review letters*, 96(16):163905, April 2006.
- [5] Ebrahim Karimi, Bruno Piccirillo, Lorenzo Marrucci, and Enrico Santamato. Light propagation in a birefringent plate with topological charge. 34(8):1225–1227, 2009.
- [6] Sergei Slussarenko, Murauski Anatoli, Du Tao, Chigrinov Vladimir, Marrucci Lorenzo, and Santamato Enrico. Tunable liquid crystal q-plates with arbitrary topological charge. *Optics Express*, 19(5):4085, October 2011.
- [7] Filippo Cardano, Ebrahim Karimi, Lorenzo Marrucci, Corrado de Lisio, and Enrico Santamato. Generation and dynamics of optical beams with polarization singularities. *Optics Express*, 21:8815–8820, 2013.
- [8] Bruno Piccirillo, Vincenzo D’Ambrosio, Sergei Slussarenko, Lorenzo Marrucci, and Enrico Santamato. Photon spin-to-orbital angular momentum conversion via an electrically tunable q-plate. *Applied Physics Letters*, 97(24):241104, October 2010.

- [9] Vincenzo D'Ambrosio, Nicolò Spagnolo, Lorenzo Del Re, Sergei Slusarenko, Ying Li, Leong Chuan Kwek, Lorenzo Marrucci, Stephen P. Walborn, Leandro Aolita, and Fabio Sciarrino. Photonic polarization gears for ultra-sensitive angular measurements. *Nature communications*, 4:2432, January 2013.
- [10] Z. Gutterman, B. Pinkas, and T. Reinman. Analysis of the Linux random number generator. *2006 IEEE Symposium on Security and Privacy (S&P'06)*, pages 15 pp.–385, 2006.
- [11] Soo Hyeon Kim, Daewan Han, and Dong Hoon Lee. Predictability of Android OpenSSL's pseudo random number generator. In *Proceedings of the 2013 ACM SIGSAC conference on Computer & communications security - CCS '13*, pages 659–668, New York, New York, USA, 2013. ACM Press.
- [12] Vlatko Vedral. *Introduction to quantum information science*, volume 13. Oxford University Press, 2006.
- [13] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, 70:1895–1899, 1993.
- [14] Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle, Manfred Eibl, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390:575–579, 1997.
- [15] John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony, and Richard Holt. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. *Physical Review Letters*, 23(15):880–884, October 1969.
- [16] J S Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1:195–200, 1964.
- [17] PW Shor and John Preskill. Simple proof of security of the BB84 quantum key distribution protocol. *Physical Review Letters*, (1):5, March 2000.
- [18] Tobias Schmitt-Manderbach, Henning Weier, Martin Fürst, Rupert Ursin, Felix Tiefenbacher, Thomas Scheidl, Josep Perdigues, Zoran Sodnik, Christian Kurtsiefer, John Rarity, Anton Zeilinger, and Harald Weinfurter. Experimental Demonstration of Free-Space Decoy-State Quantum

- Key Distribution over 144 km. *Physical Review Letters*, 98(1):010504, January 2007.
- [19] AK Ekert. Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Physical review letters*, pages 661–663, 1991.
- [20] Charles Bennett. Quantum cryptography using any two nonorthogonal states. *Physical Review Letters*, 68(21):3121–3124, May 1992.
- [21] Teng-Yun Chen, Jun Zhang, J.-C. Boileau, Xian-Min Jin, Bin Yang, Qiang Zhang, Tao Yang, R. Laflamme, and Jian-Wei Pan. Experimental Quantum Communication without a Shared Reference Frame. *Physical Review Letters*, 96(15):150504, April 2006.
- [22] Tanvirul Islam, Loïck Magnin, Brandon Sorg, and Stephanie Wehner. Reference frame agreement in quantum networks. *arXiv preprint arXiv:1306.5295*, page 10, June 2013.
- [23] Federico M. Spedalieri. Quantum key distribution without reference frame alignment: Exploiting photon orbital angular momentum. *Optics Communications*, 260(1):340–346, April 2006.
- [24] P Zhang, K Aungskunsiri, E. Martín-López, J Wabnig, M Lobino, R W Nock, J Munns, D Bonneau, P Jiang, H W Li, A Laing, J G Rarity, A O Niskanen, M G Thompson, and J. L. O'Brien. Reference frame independent quantum key distribution server with telecom tether for on-chip client. pages 1–5, August 2013.
- [25] FM Spedalieri. Quantum key distribution without reference frame alignment: Exploiting photon orbital angular momentum. *Optics communications*, page 4, September 2006.
- [26] E Nagali, F Sciarrino, F De Martini, L Marrucci, B Piccirillo, E Karimi, and E Santamato. Quantum Information Transfer from Spin to Orbital Angular Momentum of Photons. *Physical Review Letters*, 103(1):013601/1–031601/4, June 2009.
- [27] E Nagali, F Sciarrino, F De Martini, B Piccirillo, E Karimi, L Marrucci, and E Santamato. Polarization control of single photon quantum orbital angular momentum states. *Optics express*, 17(21):18745–59, October 2009.

- [28] Giuseppe Vallone, Vincenzo D'Ambrosio, Anna Sponselli, Sergei Slussarenko, Lorenzo Marrucci, Fabio Sciarrino, and Paolo Villoresi. Free-space quantum key distribution by rotation-invariant twisted photons. *arXiv preprint arXiv:1402.2932*, pages 1–11, February 2014.
- [29] L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw, and J. Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Physical Review A*, 45(11):8185–8189, June 1992.
- [30] Lorenzo Marrucci, Ebrahim Karimi, Sergei Slussarenko, Bruno Piccirillo, Enrico Santamato, Eleonora Nagali, and Fabio Sciarrino. Spin-to-orbital conversion of the angular momentum of light and its classical and quantum applications. *Journal of Optics*, 13(6):064001, June 2011.
- [31] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun, and David Miller. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series No. 55). *Journal of Applied Mechanics*, 32(1):239, 1965.
- [32] Graham Gibson, Johannes Courtial, Miles J Padgett, Stephen M Barnett, and Sonja Franke-arnold. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. 12(22):5448–5456, 2004.
- [33] Jian Wang, Jeng-Yuan Yang, Irfan M. Fazal, Nisar Ahmed, Yan Yan, Hao Huang, Yongxiong Ren, Yang Yue, Samuel Dolinar, Moshe Tur, and Alan E. Willner. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing. *Nature Photonics*, 6(7):488–496, June 2012.
- [34] Mhlambululi Mafu, Angela Dudley, Sandeep Goyal, Daniel Giovannini, Melanie McLaren, Miles J. Padgett, Thomas Konrad, Francesco Petruccione, Norbert Lütkenhaus, and Andrew Forbes. Higher-dimensional orbital-angular-momentum-based quantum key distribution with mutually unbiased bases. *Physical Review A*, 88(3):032305, September 2013.
- [35] Miles J. Padgett, Filippo M Miatto, Martin Lavery, Anton Zeilinger, and Robert W Boyd. Divergence of an orbital-angular-momentum-carrying beam upon propagation. page 4, October 2014.
- [36] R. L. Fante. Electromagnetic beam propagation in turbulent media. *IEEE Proceedings*, 63:1669, 1975.

- [37] R.L. Fante. Electromagnetic beam propagation in turbulent media: An update. *Proceedings of the IEEE*, 68(11):1424–1443, 1980.
- [38] A N Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Doklady Akademii Nauk Sssr*, 30:301–305, 1941.
- [39] Mario Krenn, Robert Fickler, and Matthias Fink. Twisted light communication through turbulent air across Vienna. *arXiv preprint arXiv:1402.2602*, pages 1–9, 2014.
- [40] Brandon Rodenburg, Mohammad Mirhosseini, Mehul Malik, Omar S. Magaña Loaiza, Michael Yanakas, Laura Maher, Nicholas K. Steinhoff, Glenn A. Tyler, and Robert W. Boyd. Simulating thick atmospheric turbulence in the lab with application to orbital angular momentum communication. *New Journal of Physics*, 16, 2014.
- [41] Bengt Edlén. The Refractive Index of Air. *Metrologia*, 2(2):71–80, April 1966.