Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di laurea triennale

Cariche conservate non-standard nell'elettromagnetismo classico libero

Candidato:
Giovanni Francesco Bertacco
Matricola 1029375

Relatore:
Stefano Giusto

Anno Accademico 2014–2015

SOMMARIO

L' ambito di studio della presente tesi è la teoria classica del campo elettromagnetico libero nella sua formulazione covariante. L'intera fisica delle onde elettromagnetiche in assenza di sorgenti è racchiusa nella nota Lagrangiana di campo libero : $L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Il teorema di Noether per una generica teoria di campo afferma che ad ogni simmetria continua ad un parametro dell'azione è associata una quadricorrente conservata. Ad esempio la conservazione del quadrimpulso e del momento angolare discendono dall'invarianza del campo elettromagnetico per l'azione del gruppo di Poincarè. Il campo elettromagnetico libero presenta diverse altre simmetrie con conseguenti correnti conservate. La tesi si occcupa di una particolare legge di conservazione scoperta nel 1964 da Daniel M. Lipkin [1]. L'esistenza di un tensore di rango 3 simmetico a quadridivergenza nulla fa supporre l'esistenza di una simmetria a dieci parametri del campo elettromagnetico libero che generi queste 10 correnti, chiamate nell'articolo orginale "Zilch". In un altro articolo del 2013 T.G. Philbin [3] dimostra l'esistenza di una trasformazione del potenziale vettore, simmetria dell'azione, la quale attraverso il teorema di Noether genera la legge di conservazione per solo una delle componenti del tensore di Lipkin. Lo scopo principale della tesi è stato quello di trovare la generalizzazione covariante della trasformazione dell' articolo di Philbin, verificare l'invarianza dell'azione del campo libero sotto l'azione di questa trasformazione e dedurre,tramite il teorema di Noether, il tensore di rango 3 scoperto nell'articolo originale. La seconda parte della tesi si occupa dell'interpretazione fisica di tale carica. In anni recenti la "Zilch"è stata usata come misura della chiralità ottica, legata al fenomeno del dicroismo circolare della luce: luce polarizzata circolarmente che investe un materiale chirale presenta un' asimmetria nell'assorbimento delle due componenti, destra e sinistra, della radizione incidente. Definito un fattore di asimmetria g viene infine mostrata l'esistenza di soluzioni chiamate "superichirali", ovvero che presentano asimmetrie più elevate di quelle trovate per onde piane monocromatiche polarizzate circolarmente.

INTRODUZIONE

La presente tesi riguarda la teoria classica del campo elettromagnetico in formalismo covariante in assenza di sorgenti. In assenza di distribuzioni di carica le equazioni di Maxwell sono $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0$. Le soluzioni del campo eletttromangetico sono onde non dispersive, infatti ponendosi in gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ le equazioni del moto assumono la forma $\Box A^\mu = 0$, ovvero l'equazione di d'Alambert per i quadripotenziali. Di fondamentale importanza sono le leggi di conservazione. Per una teoria relativistica tali leggi sono espresse come quadridivergenza nulla di un qualche tensore. Ad esempio la conservazione del quadrimpulso viene espressa come $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, dove $T^{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso. Prendendo una componente, ad esempio $\nu = 0$, si ottiene l'equazione $\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{i0}$, la quale, integrata nei due membri su di un volume chiuso e limitato e usando il teorema di Gauss, data la presenza di una divergenza spaziale, fornisce in modo ovvio la conservazione locale della quantità, in questo caso, l'energia.

Nella tesi consideriamo e analizziamo la conservazione di correnti non standard dell'elettromagnetismo libero. In particolare facciamo riferimento ad una legge di conservazione, scoperta da D.M. Lipkin in un articolo del 1964 [1], di uno pseudotensore $Z^{\mu\nu\rho}$ simmetrico nei primi due indici, il quale derivato nella sua componente ρ si annulla. Si dimostra che queste 10 correnti non hanno alcuna connessione con le famose conservazioni del quadrimpulso e del quadrimomento angolare; la dimostrazione della conservazione di queste nuove correnti, chiamate nell'articolo originale "Zilch", è riportata nell'appendice. Sempre nell'appendice viene riportata la dimostrazione, presente nell'articolo [2] di T.W.B. Kibble, di come il tensore della "Zilch" può essere riscritto in una forma particolare, più semplice e per la quale risultano più immediate alcune particolarità, come ad esempio l'annullarsi della sua traccia per quanto riguarda i primi due indici.

A seguito della pubblicazione di Lipkin sono state fatte numerose ricerche sulla"Zilch", in particolare diverse pubblicazioni (ad esempio [5]) hanno cercato possibili relazioni con il teorema di Noether. Questo importante teorema afferma che ad ogni simmetria continua ad un parametro dell'azione è associata una legge di conservazione. Quindi, come l'invarianza di Poincarè dell' elettromagnetismo classico genera, attraverso tale teorema, la conservazione del quadrimpulso e del quadrimomento angolare, così è naturale supporre l'esistenza di un qualche gruppo a 10 parametri che generi la conservazione della Zilch. Nell'articolo [3] T.G.Philbin deduce tramite il teorema di Noether la prima componente della "Zilch", trovando una simmetria del campo libero per una ben determinata trasformazione dei potenziali ϕ e $\vec{A}$. L'approccio usato in quest'ultimo articolo è non covariante.

L'obbiettivo principale della tesi è stato cercare una generalizzazione covariante della simmetria di Philbin, in modo che l'intero tensore di Lipkin potesse essere dedotto in modo naturale, tramite il teorema di Noether, da una trasformazione del quadripotenziale δA^{μ}. Dopo aver dimostrato che la trasformazione proposta è effettivamente una simmetria e dopo aver calcolato la corrente associata, apparentemente diversa da quella trovata da Lipkin, abbiamo dimostrato l'equivalenza con il tensore dell'articolo originale. Tale equivalenza è stata trovata sommando al tensore dedotto dal teorema di Noether un altro tensore, che è costruito in modo tale da avere quadridivergenza nulla e che non contribuisce alla carica trasportata, analogamente alla procedura per la simmetrizzazione del tensore energia-impulso in elettromagnetismo classico [6]. Il fatto che esista una nuova legge di conservazione non è così sorprendente, dato che stiamo considerando la teoria del campo non interagente. Anche nell'articolo [5] viene dedotta la "Zilch" tramite il teorema di Noether, ma in modo diverso dal lavoro di questa tesi, usando una procedura particolare ponendosi on-shell fin dall'inizio, introducendo un nuovo quadripotenziale C^{μ} sull'identità di Bianchi. Sempre in questo articolo Cameron mostra l'esistenza di una generalizzazione di questa simmetria, quindi una serie infinita di quantità conservate.

L'ultima parte si focalizza sull'interpretazione fisica dela quantità trovata. Già Lipkin aveva mostrato come la componente Z^{000}, chiamata "chiralità ottica", venga trasportata da onde piane monocromatiche polarizzate circolarmente (CPL), mentre per polarizzazioni lineari la chiralità è nulla. Dopo aver mostrato che le onde piane polarizzate circolarmente sono proprio gli autostati del generatore infinitesimo della simmetria, abbiamo mostrato, facendo riferimento all'articolo [4], che la chiralità ottica ha un ruolo fondamentale nello studio del fenomeno del Dicroismo Circolare. Luce polarizzata che investe un materiale chirale presenta assorbimento diverso da parte delle molecole chirali a seconda che la luce impiegata sia polarizzata in un verso o nell'altro. La chiralità ottica si mostra essere ciò che quantifica il grado di asimmetria tra l'assorbimento di radiazione da parte del mezzo chirale di un'onda elettromagnetica e della sua onda speculare. La parte conclusiva mostra come le equazioni di Maxwell permettano soluzioni che possiedono asimmetria chirale più grande di quella trovata per le onde piane polarizzate circolararmente, soluzioni chiamate superchirali. E' stata quindi studiata un tipo di soluzione stazionaria costruita da due CPL che si propagano in direzione opposta, aventi stessa frequenza, parità diversa e intensità leggermente diversa. Tale onda stazionaria presenta ai nodi un' alta asimmetria chirale. Molecole localizzate in tali punti presentano quindi differenze nel grado di assorbimento 'destro' e 'sinistro' maggiori che in una semplice CPL.

1 IL CAMPO ELETTROMAGNETICO LIBERO

1.1 LAGRANGIANA E SIMMETRIE

Un' onda elettromagnetica che non interagisce con la materia è soluzione delle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti, in notazione covariante abbiamo

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{1}$$

e l'identità di Bianchi

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0. \tag{2}$$

Quest'ultima equazione è equivalente all'introduzione del quadripotenziale A^μ tale che soddisfi $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Il lemma di Poincarè infatti garantisce che se è soddisfatta la (2) e se lo spazio tempo considerato soddisfa particolari condizioni topologiche (non restrittive nel nostro caso), allora $F^{\mu\nu}$ può sempre essere scritto in termini del quadripotenziale A^μ.
L'azione del campo è

$$I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right). \tag{3}$$

Dal calcolo variazionale sappiamo che minimizzare l'azione, $\delta I = 0$, equivale ad imporre le equazioni del moto $\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0$, ovvero la (1). Diciamo che l'azione è invariante sotto una generica trasformazione del campo e delle coordinate spazio temporali, $x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu$ e $A^{\mu'} = A^\mu + \delta A^\mu$, se l'azione espressa nei nuovi campi e nelle nuove coordinate è equivalente all'originale.
Il teorema di Noether stabilisce che ad ogni simmetria continua ad n parametri dell'azione, se sono soddisfatte le equazioni di Eulero-Lagrange, corrispondono n correnti conservate.

1.2 TEOREMA DI NOETHER

Si ricorda qui il teorema di Noether nel caso speciale in cui la trasformazione non lasci invariata solo l'azione, ma anche la Lagrangiana. Tale richiesta è meno generale e più restrittiva. Assumeremo inoltre che la trasformazione considerata lasci inalterata la misura $d^4x' = d^4x$. La simmetria studiata e spiegata nel capitolo 2 rientra in questo caso, dato che si tratta di una simmetria interna, quindi che non coinvolge trasformazioni dellle coordinate spazio-temporali.

$$\delta L = 0 \tag{4}$$

Quindi, esplicitando la variazione:

$$\delta L = \delta x^{\mu}\partial_{\mu}L + \delta A_{\nu}\frac{\partial L}{\partial A_{\nu}} + \partial_{\mu}\delta A_{\nu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} = 0$$

$$\partial_{\mu}(\delta x^{\mu}L) + \delta A_{\nu}(\frac{\partial L}{\partial A_{\nu}} - \partial_{\mu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}) + \partial_{\mu}(\delta A_{\nu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}) = 0$$

$$\partial_{\mu}(\delta x^{\mu}L + \delta A_{\nu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu}}) + \delta A_{\nu}(\frac{\partial L}{\partial A_{\nu}} - \partial_{\mu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}) = 0. \tag{5}$$

Se imponiamo che i campi A_{ν} soddisfino le equazioni di Eulero-Lagrange, il secondo termine tra parentesi deve annullarsi e abbiamo perciò la conservazione della quadricorrente di Noether.

$$J^{\mu} = \delta x^{\mu}L + \delta A_{\nu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} \tag{6}$$

tale che

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = 0.$$

A questo punto mostriamo come non sia necessario richiedere che la variazione della Lagrangiana sia nulla, ma richiedere che sia uguale alla quadridivergenza di un qualche quadrivettore X^{μ}. Il fatto che la Lagrangiana a seguito della trasformazione non rimanga invariata, ma invariata a meno di una quadridivergenza, non fa cadere la validità del teorema.
Quindi ponendo

$$\delta L = \partial_{\mu}X^{\mu}$$

la (5) viene riscritta come

$$\partial_{\mu}(\delta x^{\mu}L) + \delta A_{\nu}(\frac{\partial L}{\partial A_{\nu}} - \partial_{\mu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}) + \partial_{\mu}(\delta A_{\nu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}) = \partial_{\mu}X^{\mu}.$$

Quindi portando il termine $\partial_{\mu}X^{\mu}$ a primo membro e imponendo le equazioni di Eulero-Lagrange otteniamo la conservazione della corrente:

$$J^{\mu} = \delta x^{\mu}L + \delta A_{\nu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu}} - X^{\mu} \tag{7}$$

.

Elenchiamo ora le più importanti simmetrie della teoria libera dell'elettromagnetismo.
La simmetria fondamentale è quella per il gruppo di Poincarè, la trasformazione infinitesima è:

$$\bar{\delta}A_r = A'_r(x') - A_r(x) = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}{}_{r}{}^{s}A_s \qquad \delta x^{\mu} = a^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$$

dove la matrice antisimmetrica $\omega_{\alpha\beta}$ e il quadrivettore a^{μ} rappresentano i 10 parametri infinitesimi della trasformazione e $\Sigma^{\alpha\beta}{}_{r}{}^{s} = \delta^{\alpha}_{r}\eta^{\beta s} - \delta^{\beta}_{r}\eta^{\alpha s}$. Sostituendo le trasformazioni nell'espressione della corrente di Noether otteniamo la conservazione del tensore energia-impulso canonico:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_r)}\partial^\nu A_r - \eta^{\mu\nu} L$$

e del tensore densità di momento angolare canonico:

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_r)}\Sigma^{\alpha\beta}{}_r{}^s A_s.$$

Un'altra simmetria particolare del campo libero è la trasformazione di scala, ovvero:

$$x'^\mu(x') = \lambda x^\mu \quad A^\mu = \lambda^{-1} A^\mu(x)$$

dove il parametro infinitesimo è λ e la corrente conservata è:

$$j^\mu = T^{\mu\nu} x_\nu + A_\nu \partial^\mu A^\nu.$$

Oltre alle simmetrie considerate ne esiste un'altra, a 4 parametri, chiamata simmetria conforme speciale, la quale, assieme alle dilatazioni e alle trasformazioni del gruppo di Poincarè, forma un gruppo a 15 parametri chiamato gruppo conforme.

2 ZILCH

2.1 CONSERVAZIONE DELLA ZILCH

Nell'articolo [1] D. M. Lipkin dimostra l'esistenza di un tensore $Z^{\mu\nu\rho}$ simmetrico negli indici μ e ν per il quale vale la legge di conservazione $\partial_\rho Z^{\mu\nu\rho} = 0$.

$$\begin{aligned} Z^{\mu\nu\rho} = & \frac{1}{4} F_\sigma{}^\rho \partial^\mu F_{\alpha\beta} \varepsilon^{\nu\alpha\sigma\beta} + \frac{1}{4} F_\sigma{}^\rho \partial^\nu F_{\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\alpha\sigma\beta} \\ & + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} \partial^\mu F_\sigma{}^\nu \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F_\sigma{}^\mu \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} \\ & - \frac{1}{2} F^{\mu\beta} \partial_\sigma F_{\alpha\beta} \varepsilon^{\nu\rho\sigma\alpha} - \frac{1}{2} F^{\nu\beta} \partial_\sigma F_{\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\rho\sigma\alpha} \\ & - \frac{1}{2} F_\alpha{}^\beta \partial_\sigma F^\mu{}_\beta \varepsilon^{\nu\rho\sigma\alpha} - \frac{1}{2} F_\alpha{}^\beta \partial_\sigma F^\nu{}_\beta \varepsilon^{\mu\rho\sigma\alpha}. \end{aligned} \tag{8}$$

La dimostrazione della conservazione della corrente è riportata nell'appendice. Nonostante tale conservazione discenda direttamente dalle equazioni di Maxwell, Lipkin [1] non fornisce nessuna spiegazione in merito all'origine di questa legge. Inoltre si astiene dal fornire una interpretazione fisica della carica conservata e si limita a notare come la componente Z^{000} venga trasportata da onde piane monocromatiche polarizzate circolarmente, mentre per polarizzazioni lineari la carica risulta nulla.

Usando le equazioni di Maxwell e dalle definizioni:

$$F^{00} = 0 \quad F^{i0} = E^i \quad F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k \tag{9}$$

la componente 000 del tensore vale:

$$Z^{000} = E \cdot (\nabla \times E) + B \cdot (\nabla \times B). \tag{10}$$

Questa quantità, chiamata chiralità ottica, verrà spiegata nel capitolo 3. Facciamo notare come le 10 quantità $Z^{ij} = \int Z^{ij0} dx dy dz$ abbiano le dimensioni di una forza, o alternativamente quelle di un' energia per secondo.

2.2 SIMMETRIA

T.G. Philbin [3] nel suo articolo mostra come la trasformazione

$$\delta \vec{A} = \eta \bigtriangledown \times \partial_t \vec{A} \qquad \delta\phi = 0, \tag{11}$$

simmetria della Lagrangiana di campo libero, generi attraverso il teorema di Noether la prima componente della Zilch. η rappresenta il parametro infinitesimo della trasformazione. Notiamo che la trasformazione è una simmetria interna poichè non abbiamo variazione nelle coordinate spazio-temporali. Dato che la trasformazione non è espressa in forma covariante, il primo obbiettivo di questa tesi è stato cercare una sua generalizzazione di carattere tensoriale. Consideriamo la trasformazione del campo:

$$\delta A_{\alpha} = \omega^{\mu\nu} \partial_{\mu} G_{\nu\alpha} \tag{12}$$

dove $G_{\nu\alpha} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\alpha\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ e $\omega^{\mu\nu}$ è la matrice dei parametri infinitesimi. Poichè le correnti della Zilch sono 10 ci si potrebbe aspettare che tale matrice ω sia simmetrica. Non facciamo tale ipotesi e mostreremo più avanti una spiegazione del perchè il tensore di Lipkin è simmetrico. Mostreremo infatti come la (12) è una simmetria anche se $\omega^{\mu\nu}$ non è simmetrica.
Ponendo $\omega^{00} = -\eta$ in (12) si ottiene

$$\delta A^{\alpha} = -\frac{\eta}{2} \partial_0 \varepsilon^{0\alpha\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

e dunque se $\alpha = 0$, dato che il tensore di Levi-Civita si annulla per antisimmetria, abbiamo $\delta A^0 = \delta\phi = 0$ e se $\alpha = k$ allora, dato che $(\bigtriangledown \times A)^k = \varepsilon^{klm}\partial_l A_m$, otteniamo $(\delta A)^k = \eta(\bigtriangledown \times \partial_t A)^k$, in accordo con la (11).
Dimostriamo ora che la (12) è una simmetria dell'azione elettromagnetica nel vuoto. Precisamente vogliamo mostrare che δL si può scrivere come una quadridivergenza di un genrico quadrivettore: $\delta L = \partial_{\mu} X^{\mu}$.
La variazione del tensore elettromagnetico è:

$$\delta F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\delta A_{\beta} - \partial_{\beta}\delta A_{\alpha} = \omega^{\mu\nu}(\partial_{\alpha}\partial_{\mu}G_{\nu\beta} - \partial_{\beta}\partial_{\mu}G_{\nu\alpha}).$$

Prendendo la variazione della Lagrangiana e inserendo l'ultima espressione:

$$\delta L = -\frac{1}{4}\delta(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{2}\delta(F_{\alpha\beta})F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(\omega^{\mu\nu}\partial_{\alpha}\partial_{\mu}G_{\nu\beta} - \omega^{\mu\nu}\partial_{\beta}\partial_{\mu}G_{\nu\alpha}).$$

Dal fatto che $G_{\alpha\beta} = -G_{\beta\alpha}$ e sruttando le due identità

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \quad F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\rho\sigma}$$

segue

$$\delta L = -\omega^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\mu}G_{\nu\beta} = \frac{1}{4}\omega^{\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\varepsilon_{\nu\beta\rho\sigma}G_{\gamma\lambda}\partial_{\alpha}\partial_{\mu}F^{\rho\sigma}$$

$$= -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(\delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\gamma}_{\rho}\delta^{\lambda}_{\sigma} + \delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\gamma}_{\sigma}\delta^{\lambda}_{nu} + \delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\gamma}_{\nu}\delta^{\lambda}_{\rho})G_{\gamma\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\alpha}F^{\rho\sigma}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}G_{\gamma\lambda}\partial_\nu\partial_\mu F^{\gamma\lambda}}_{(A)}\underbrace{-\omega^{\mu\nu}G_{\gamma\nu}\partial_\lambda\partial_\mu F^{\lambda\gamma}}_{(B)}. \tag{13}$$

Consideriamo ora il secondo termine della (13):

$$(B) = -\omega^{\mu\nu}G_{\gamma\nu}\partial_\lambda\partial_\mu F^{\lambda\gamma} = -\omega^{\mu\nu}\partial_\mu(G_{\gamma\nu}\partial_\lambda F^{\lambda\gamma}) + \omega^{\mu\nu}\partial_\mu G_{\gamma\nu}\partial_\lambda F^{\lambda\gamma}$$

$$= -\omega^{\mu\nu}\partial_\mu(G_{\gamma\nu}\partial_\lambda F^{\lambda\gamma}) + \omega^{\mu\nu}\partial_\lambda(\partial_\mu G_{\gamma\nu}F^{\lambda\gamma}) - \omega^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\mu G_{\gamma\nu}F^{\lambda\gamma}$$

$$= -\omega^{\mu\nu}\partial_\mu(G_{\gamma\nu}\partial_\lambda F^{\lambda\gamma}) + \omega^{\mu\nu}\partial_\lambda(\partial_\mu G_{\gamma\nu}F^{\lambda\gamma}) + \frac{1}{4}\omega^{\mu\nu}\varepsilon_{\gamma\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\lambda\gamma\rho\sigma}\partial_\lambda\partial_\mu F^{\alpha\beta}G_{\rho\sigma}$$

$$= -\omega^{\mu\nu}\partial_\mu(G_{\gamma\nu}\partial_\lambda F^{\lambda\gamma}) + \omega^{\mu\nu}\partial_\lambda(\partial_\mu G_{\gamma\nu}F^{\lambda\gamma})$$

$$+\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(\delta^\lambda_\nu\delta^\rho_\alpha\delta^\sigma_\beta + \delta^\lambda_\alpha\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\nu + \delta^\lambda_\beta\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\alpha)\partial_\lambda\partial_\mu F^{\alpha\beta}G_{\rho\sigma}$$

$$= -\omega^{\mu\nu}\partial_\mu(G_{\gamma\nu}\partial_\lambda F^{\lambda\gamma}) + \omega^{\mu\nu}\partial_\lambda(\partial_\mu G_{\gamma\nu}F^{\lambda\gamma})$$

$$+\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu F^{\gamma\lambda}G_{\gamma\lambda} + \underbrace{\omega^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\mu F^{\lambda\gamma}G_{\gamma\nu}}_{-(B)}.$$

Quindi in definitiva abbiamo:

$$(B) = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\partial_\mu(G_{\gamma\nu}\partial_\lambda F^{\lambda\gamma}) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\partial_\lambda(\partial_\mu G_{\gamma\nu}F^{\lambda\gamma}) + \frac{1}{4}\omega^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu F^{\gamma\lambda}G_{\gamma\lambda}.$$

Sostituendo l'ultima espressione nella (13) otteniamo:

$$\delta L = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\partial_\mu(G_{\gamma\nu}\partial_\lambda F^{\lambda\gamma}) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\partial_\lambda(\partial_\mu G_{\gamma\nu}F^{\lambda\gamma}) - \frac{1}{4}\omega^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu F^{\gamma\lambda}G_{\gamma\lambda}.$$

Usando l'identità di Bianchi $\partial_\mu F^{\gamma\lambda} = -\partial^\lambda F_\mu{}^\gamma - \partial^\gamma F^\lambda{}_\mu$ nell'ultimo termine:

$$\delta L = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\partial_\mu(G_{\gamma\nu}\partial_\lambda F^{\lambda\gamma}) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\partial_\lambda(\partial_\mu G_{\gamma\nu}F^{\lambda\gamma})$$

$$+\frac{1}{4}\omega^{\mu\nu}\partial_\nu\partial^\lambda F_\mu{}^\gamma G_{\gamma\lambda} + \frac{1}{4}\omega^{\mu\nu}\partial_\nu\partial^\gamma F^\lambda{}_\mu G_{\gamma\lambda}.$$

Usando ancora l'identità di Bianchi $\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0$ possiamo riscrivere i primi due termini come una quadridivergenza, mentre gli ultimi due termini si eliminano per l'antisimmetria di $G^{\mu\nu}$.

$$\delta L = \frac{1}{2}\partial^\gamma(\omega^{\mu\nu}G_{\gamma\lambda}\partial_\nu F^\lambda{}_\mu) + \frac{1}{2}\partial^\gamma(\omega^{\mu\nu}\partial_\mu G_{\lambda\nu}F_\gamma{}^\lambda) - \frac{1}{2}\partial^\gamma(\omega_{\gamma\nu}G_\lambda{}^\nu\partial_\rho F^{\rho\lambda}).$$

Segue quindi che la variazione della Lagrangiana può essere eguagliata alla quadridivergenza di un quadrivettore X^μ, quadrivettore che contribuirà alla quadricorrente che cerchiamo ; riprendiamo il teorema di Noether (eq. 5), ricordando che per questa simmetria $\delta x^\mu = 0$, abbiamo quindi:

$$\delta L - \partial_\mu X^\mu = \delta A_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial A_\nu} - \partial_\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) + \partial_\mu\left(\delta A_\nu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - X^\mu\right) = 0.$$

Imponendo le equazioni del moto, riprendendo l'espressione della quadricorrente di Noether (eq. 6), otteniamo la conservazione della quadricorrente associata alla simmetria:

$$Z^{\mu\nu\gamma} = F^{\gamma\lambda}\partial^{\mu}G_{\lambda}{}^{\nu} - G^{\gamma\lambda}\partial^{\nu}F_{\lambda}{}^{\mu} \tag{14}$$

$$\partial_{\gamma}Z^{\mu\nu\gamma} = \partial_{\gamma}(F^{\gamma\lambda}\partial^{\mu}G_{\lambda}{}^{\nu} - G^{\gamma\lambda}\partial^{\nu}F_{\lambda}{}^{\mu}) = 0. \tag{15}$$

IL tensore di equazione (14) a prima vista sembra non assomigliare al tensore di Lipkin, infatti contiene solo due termini degli 8 presenti nella (8). Inoltre per dimostrare che la trasformazione proposta è effettivamente una simmetria del campo elettromagnetico non è stato necessario richiedere la simmetria della matrice dei parametri infinitesimi $\omega^{\mu\nu}$, e la quadricorrente non sembra affatto simmetrica rispetto a questi due indici.

2.2.1 Verifica esplicita della conservazione della quadricorrente

Nonostante sia garantito dal teorema di Noether verifichiamo, per consistenza, che la quadricorrente trovata è conservata se sono soddisfatte le equazioni di Eulero-Lagrange e l'identità di Bianchi ($\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0$ e $\partial_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$):

$$\partial^{\gamma}(F_{\gamma\lambda}\partial_{\mu}G^{\lambda}{}_{\nu} - G_{\gamma\lambda}\partial_{\nu}F^{\lambda}{}_{\mu}) = F_{\gamma\lambda}\partial_{\mu}\partial^{\gamma}G^{\lambda}{}_{\nu} - G_{\gamma\lambda}\partial^{\gamma}\partial_{\nu}F^{\lambda}{}_{\mu}.$$

Usando le identità $\partial_{\mu}F^{\gamma\lambda} = -\partial^{\lambda}F_{\mu}{}^{\gamma} - \partial^{\gamma}F^{\lambda}{}_{\mu}$ e $\partial_{\mu}G^{\gamma\lambda} = -\partial^{\lambda}G_{\mu}{}^{\gamma} - \partial^{\gamma}G^{\lambda}{}_{\mu}$, dove la seconda è valida on-shell, l'espressione precedente si può riscrivere come

$$\begin{aligned} -F_{\gamma\lambda}\partial_{\mu}\partial^{\lambda}G_{\nu}{}^{\gamma} - F_{\gamma\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\nu}G^{\gamma\lambda} + G_{\gamma\lambda}\partial_{\nu}\partial^{\lambda}F_{\mu}{}^{\gamma} + G_{\gamma\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\mu}F^{\gamma\lambda} \\ = -F_{\gamma\lambda}\partial_{\mu}\partial^{\lambda}G_{\nu}{}^{\gamma} + G_{\gamma\lambda}\partial_{\nu}\partial^{\lambda}F_{\mu}{}^{\gamma}. \end{aligned}$$

Rinominando gli indici e sfruttando di nuovo le proprietà di antisimmetria e le equazioni del moto conlcudiamo che:

$$\partial_{\gamma}Z^{\mu\nu\gamma} = -\partial^{\gamma}(F_{\gamma\lambda}\partial_{\mu}G^{\lambda}{}_{\nu} - G_{\gamma\lambda}\partial_{\nu}F^{\lambda}{}_{\mu}) = -\partial\gamma Z^{\mu\nu\gamma}.$$

Questo prova la conservazione della quadricorrente.

2.2.2 Dimostrazione dell'equivalenza tra il tensore trovato e quello di Lipkin

Per dimostrare l'equivalenza tra il tensore trovato tramite il teorema di Noether e il tensore di Lipkin [1] abbiamo aggiunto al tensore $Z^{\mu\nu\gamma}$, definito in (14) e per il quale vale la legge di conservazione $\partial_{\gamma}Z^{\mu\nu\gamma} = 0$, un termine, il quale si dimostra essere ininfluente, poichè l'equazione di continuità resta valida e le cariche trasportate rimangono le stesse.
E' quindi possibile ridefinire un altro tensore [6]:

$$\widetilde{Z^{\mu\nu\gamma}} = Z^{\mu\nu\gamma} + \partial_{\rho}\phi^{\rho\gamma\mu\nu},$$

dove $\phi^{\rho\gamma\mu\nu}$ è un arbitrario tensore antisimmetrico rispetto ai primi due indici $\phi^{\rho\gamma\mu\nu} = -\phi^{\gamma\rho\mu\nu}$. Questo nuovo tensore gode delle seguenti due proprietà:

$$1) \qquad \partial_\gamma \widetilde{Z^{\mu\nu\gamma}} = 0$$

quindi ridefinendo così il tensore, vale ancora la sua conservazione

$$2) \quad \widetilde{Z^{\mu\nu}} = \int Z^{\mu\nu 0} d^3x = Z^{\mu\nu},$$

dunque le cariche trasportate da $\widetilde{Z^{\mu\nu\gamma}}$ sono le stesse di $Z^{\mu\nu\gamma}$. Dimostriamo ora che con la scelta di un opportuno tensore $\phi^{\gamma\lambda\nu\mu}$, antisimmetrico rispetto ai primi due indici, il tensore (14) può essere simmetrizzato. Quindi la simmetria (12) da noi trovata è una simmetria anche senza imporre particolari restrizioni sulla matrice dei parametri $\omega^{\mu\nu}$, in questa sezione viene mostrato come la parte antisimmetrica di questa matrice non contribuisca alla corrente.
Ridefiniamo quindi:

$$\widetilde{Z^{\mu\nu\gamma}} = F^{\gamma\lambda}\partial^\mu G_\lambda{}^\nu - G^{\gamma\lambda}\partial^\nu F_\lambda{}^\mu + \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\lambda(F^{\gamma\lambda}G^{\nu\mu} + G^{\gamma\lambda}F^{\nu\mu})}_{\phi}, \qquad (16)$$

usando le equazioni del moto:

$$\widetilde{Z^{\mu\nu\gamma}} = Z^{\mu\nu\gamma} + \frac{1}{2}F^{\gamma\lambda}\partial_\lambda G^{\nu\mu} + \frac{1}{2}G^{\gamma\lambda}\partial_\lambda F^{\nu\mu}$$

e aggiungendo 4 termini, la somma dei quali è identicamente nulla

$$\widetilde{Z^{\mu\nu\gamma}} = Z^{\mu\nu\gamma} + \frac{1}{2}(\underline{F^{\gamma\lambda}\partial_\lambda G^{\nu\mu}} + \underbrace{G^{\gamma\lambda}\partial_\lambda F^{\nu\mu}}$$

$$+\underline{F^{\gamma\lambda}\partial^\nu G^\mu{}_\lambda} + F^{\gamma\lambda}\partial^\nu G_\lambda{}^\mu + \underbrace{G^{\gamma\lambda}\partial^\nu F^\mu{}_\lambda} + G^{\gamma\lambda}\partial^\nu F_\lambda{}^\mu).$$

Utilizzando ora l'identità di Bianchi tra i termini sottolineati otteniamo:

$$\widetilde{Z^{\mu\nu\gamma}} = Z^{\mu\nu\gamma} - \frac{1}{2}(F^{\gamma\lambda}\partial^\mu G_\lambda{}^\nu + G^{\gamma\lambda}\partial^\mu F_\lambda{}^\nu - F^{\gamma\lambda}\partial^\nu G_\lambda{}^\mu - G^{\gamma\lambda}\partial^\nu F_\lambda{}^\mu)$$

$$\widetilde{Z^{\mu\nu\gamma}} = Z^{\gamma\mu\nu} - Z^{\gamma[\mu\nu]} = Z^{\gamma(\mu\nu)}.$$

Notiamo quindi che tramite questa procedura il tensore definito in (16) riproduce (a meno di un segno arbitrario) i primi 4 termini degli 8 presenti nel tensore di Lipkin (8).
Sommiamo a quanto trovato fino ad ora un ultimo termine, chiaramente antisimmetrico rispetto a scambio di γ e λ

$$\partial_\lambda(\frac{1}{2}F^{\mu\rho}F_{\sigma\rho}\varepsilon^{\nu\gamma\lambda\sigma} + \frac{1}{2}F^{\nu\rho}F_{\sigma\rho}\varepsilon^{\mu\gamma\lambda\sigma}).$$

Modificando in questo modo il tensore ottenuto dal teorema di Noether abbiamo ritrovato, a meno di un segno, il tensore di Lipkin (8).

2.2.3 Lagrangiana massiva

Mostriamo ora che la simmetria trovata, sotto particolare condizioni, è simmetria anche per la Lagrangiana che descrive un campo vettoriale libero massivo:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A^{\mu}A_{\mu} \tag{17}$$

Come visto per il campo elettromagnetico, prendiamo la variazione di L e dimostratriamo che tale variazione è uguale alla quadridivergenza.

$$\delta L = \delta(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\delta(m^2A^{\mu}A_{\mu})$$

Dato che il primo termine è stato analizzato focalizziamo l'attenzione sul secondo e sotituendo la trasformazione definita in (12) otteniamo:

$$\delta(\frac{1}{2}m^2A^{\mu}A_{\mu}) = m^2\omega^{\mu\nu}\partial_{\mu}G_{j\alpha}A^{\alpha} = \frac{1}{2}m^2\omega^{\mu\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\lambda\gamma}\partial_{\mu}F^{\lambda\gamma}A^{\alpha}.$$

Applicando l'identità di Bianchi $\partial^{\mu}F^{\lambda\gamma} = -\partial^{\lambda}F^{\gamma\mu} - \partial^{\gamma}F^{\mu\lambda}$

$$\begin{aligned}\delta(\frac{1}{2}m^2A^{\mu}A_{\mu}) &= -\frac{1}{2}m^2\omega_{\mu}{}^{\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\lambda\gamma}\partial^{\lambda}F^{\gamma\mu}A^{\alpha} - \frac{1}{2}m^2\omega_{\mu}{}^{\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\lambda\gamma}\partial^{\gamma}F^{\mu\lambda}A^{\alpha}.\\ &= -m^2\omega_{\mu}{}^{\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\lambda\gamma}\partial^{\lambda}F^{\gamma\mu}A^{\alpha}\end{aligned}$$

usando la regole di derivazione del prodotto si trova quindi:

$$\delta(\frac{1}{2}m^2A^{\mu}A_{\mu}) = \partial^{\lambda}(-m^2\omega_{\mu}{}^{\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\lambda\gamma}F^{\gamma\mu}A^{\alpha}) + m^2\omega_{\mu}{}^{\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\lambda\gamma}F^{\gamma\mu}\partial^{\lambda}A^{\alpha} \tag{18}$$

Dimostriamo ora che l'ultimo termine dell'equazione trovata sopra è identicamente nullo, infatti sfruttando l'antisimmetria rispetto agli indici λ α abbiamo:

$$m^2\omega_{\mu}{}^{\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\lambda\gamma}F^{\gamma\mu}\partial^{\lambda}A^{\alpha} = m^2\omega_{\mu}{}^{\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\lambda\gamma}F^{\gamma\mu}F^{\lambda\alpha} = m^2\omega_{\mu}{}^{\nu}F^{\gamma\mu}G_{\nu\gamma}.$$

Usando l'identità $G^{\nu\gamma}F_{\gamma\mu} = \frac{1}{4}\delta^{\nu}_{\mu}G^{\lambda\gamma}F_{\gamma\lambda}$ e imponendo che la traccia della matrice ω si annulli otteniamo infine

$$m^2\omega_{\mu}{}^{\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\lambda\gamma}F^{\gamma\mu}\partial^{\lambda}A^{\alpha} = \frac{1}{4}m^2\omega_{\nu}{}^{\nu}F^{\gamma\mu}G_{\mu\gamma} = 0.$$

Abbiamo quindi dimostrato che:

$$\delta(\frac{1}{2}m^2A^{\mu}A_{\mu}) = \partial^{\lambda}(-m^2\omega_{\mu}{}^{\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\lambda\gamma}F^{\gamma\mu}A^{\alpha}). \tag{19}$$

Applicando il teorema di Noether, facendo riferimento alle equazione (5) e alla corrente conservata nell'elettromagnetismo libero (14) otteniamo il seguente tensore a quadridivergenza nulla:

$$W^{\mu\nu\gamma} = F^{\gamma\lambda}\partial^{\mu}G_{\lambda}{}^{\nu} - G^{\gamma\lambda}\partial^{\nu}F_{\lambda}{}^{\mu} + m^2\varepsilon^{\nu\alpha\lambda\gamma}F_{\gamma}{}^{\mu}A_{\alpha}. \tag{20}$$

2.2.4 Zilch di Kibble e generalizzazione

T.W.B Kibble [2] ha mostrato come la seguente espressione

$$H^{\mu\nu\rho} = G^{\mu\lambda}\partial^{\rho}F_{\lambda}{}^{\nu} - F^{\mu\lambda}\partial^{\rho}G_{\lambda}{}^{\nu} \tag{21}$$

sia equivalente alla definizione di Lipkin, dove $G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$. Usando l'identità $G^{\nu\lambda}F_{\lambda\mu} = \frac{1}{4}\delta^{\nu}_{\mu}G^{k\lambda}F_{\lambda k}$, della quale verrà data la dimostrazione nell'ultima parte dell'appendice, e abbassando un indice si ottiene:

$$H^{\mu\nu}{}_{\rho} = G^{\mu\lambda}\partial_{\rho}F_{\lambda}{}^{\nu} + G^{\nu}{}_{\lambda}\partial_{\rho}F^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}G^{k\lambda}\partial_{\rho}F_{\lambda k}$$

Dall'ultima espressione è evidente la simmetria nello scambio dei primi due indici e che:

$$H^{\mu}{}_{\mu\rho} = 0 \tag{22}$$

Dal fatto che la Zilch ha traccia nulla si deduce che delle 10 quantità conservate solo 9 sono indipendenti. Facendo uso della simmetria appena mostrata e abbassando due indici possiamo riscrivere la (21) come:

$$H^{\mu}{}_{\nu\rho} = G^{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_{\rho}F_{\lambda\nu} + G_{\nu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_{\rho}F^{\lambda\mu} \tag{23}$$

dove $N\overleftrightarrow{\partial}_{\rho}M = \frac{1}{2}(N\partial_{\rho}M - \partial_{\rho}NM)$. Scritta in questa forma è immediata la conservazione della Zilch per un generico campo libero massivo, ovvero un campo che soddisfa le equazioni:

$$\Box F^{\mu\nu} = -m^2F^{\mu\nu} \tag{24}$$

$$\Box G^{\mu\nu} = -m^2G^{\mu\nu} \tag{25}$$

Consideriamo solo il primo termine della (23) e dimostriamo che la sua quadridivergenza è nulla. Si ha

$$\partial^{\rho}H^{\mu}{}_{\nu\rho} = \partial^{\rho}(G^{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_{\rho}F_{\lambda\nu}) = \partial^{\rho}(-\frac{1}{2}\partial_{\rho}G^{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}G^{\mu\lambda}\partial_{\rho}F_{\lambda\nu})$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_{\rho}G^{\mu\lambda}\partial^{\rho}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\partial^{\rho}G^{\mu\lambda}\partial_{\rho}F_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\Box G^{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}G^{\mu\lambda}\Box F_{\lambda\nu} = 0$$

dove gli ultimi due termini si annullano applicando le (24) e (25) e ripetendo la dimostrazione scambiando gli indici liberi μ e ν si dimostra la conservazione della Zilch (23). Un generico campo libero ammette infinite quantità conservate. Nel suo articolo Kibble dimostra quali devono essere le condizioni affinchè una generica quadricorrente venga conservata nella teoria libera, e dà una generalizzazione della Zilch studiata in questa tesi.
Mostriamo ora brevemente questa generalizzazione:
consideriamo un generico campo reale ϕ che soddisfi l'equazione di Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\phi = 0. \tag{26}$$

Definiamo la quadricorrente:

$$J_\rho = \phi^\alpha P_{\rho\alpha\beta}(i\overrightarrow{\partial}, i\overleftarrow{\partial})\phi^\beta \tag{27}$$

dove $P(k, k')$ è polinomiale in k e k' e cerchiamo per quali condizioni su P la quadricorrente (27) è conservata. Dato che la (27) può sempre essere sempre simmetrizzata e dato che le due variabili sono derivate che agiscono a sinistra e a destra, abbiamo che:

$$P_\rho(k, k') = P_\rho(k', k). \tag{28}$$

Derivando la (27) imponendo $\partial_\rho J^\rho = 0$ otteniamo

$$\partial^\rho J_\rho = \partial^\rho \phi^\alpha P_{\rho\alpha\beta}(k, k')\phi^\beta + \phi^\alpha P_{\rho\alpha\beta}(k, k')\partial^\rho \phi^\beta = 0$$

quindi in notazione più compatta, dall'arbitrareità del campo ϕ si trova che:

$$(k^\rho + k'^\rho)P_{\rho\alpha\beta} = 0 \tag{29}$$

Dall'equazione (26) sappiamo che $k^2 = k'^2 = m^2$. Una condizione sufficiente, quindi, affinchè (29) risulti verificata è che $P_{\rho\alpha\beta}$ sia proporzionale a $k_\rho - k'_\rho$, ovvero $\overleftrightarrow{\partial}_\rho$. Introducendo un cambio di variabile:

$$p = \frac{1}{2}(k - k') \qquad q = \frac{1}{2}(k + k')$$

Possiamo scrivere le (28) e (29) come:

$$P_\rho(-p, q) = P_\rho(p, q)$$

$$q^\rho P_\rho(p, q) = 0$$

Per chiarire i concetti, mostriamo l'esempio di un campo scalare ϕ. In tal caso P è un polinomio pari nella variabile p:
si possono quindi avere correnti conservate nella forma:

$$J_{\rho\mu} = \phi \overleftrightarrow{\partial}_\rho \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi$$

$$J_{\rho\mu\nu\sigma} = \phi \overleftrightarrow{\partial}_\rho \overleftrightarrow{\partial}_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu \overleftrightarrow{\partial}_\sigma \phi$$

$$\dots \tag{30}$$

Senza seguire il ragionamento generale di Kibble mostriamo direttamente l'esistenza di una generalizzazione della (23) e ne dimostriamo la conservazione. Consideriamo quindi una generica quadricorrente del tipo:

$$J^\mu_{\rho\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n\nu} = G^{\mu\lambda} \overleftrightarrow{\partial}_\rho \overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_1} \overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_2} \dots \overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_n} F_{\lambda\nu} \tag{31}$$

ed esplicitando la derivata rispetto a ρ abbiamo

$$J^\mu_{\rho\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\rho G^{\mu\lambda} \overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_1} \overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_2} \dots \overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_n} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} G^{\mu\lambda} \overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_1} \overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_2} \dots \overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_n} \partial_\rho F_{\lambda\nu}.$$

Quindi, calcolando la quadridivergenza, dalle usuali regole di derivazione e poi applicando le relazioni (24) e (25) otteniamo:

$$\partial^\rho J^\mu_{\rho\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\nu} = -\frac{1}{2}\Box G^{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_1}\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_2}\ldots\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_n}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}G^{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_1}\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_2}\ldots\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_n}\Box F_{\lambda\nu}$$

$$-\frac{1}{2}\partial_\rho G^{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_1}\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_2}\ldots\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_n}\partial^\rho F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\partial^\rho G^{\mu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_1}\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_2}\ldots\overleftrightarrow{\partial}_{\gamma_n}\partial_\rho F_{\lambda\nu} = 0.$$

3 CHIRALITÀ OTTICA

3.1 APPLICAZIONE ALLE ONDE PIANE

Focalizziamo l'attenzione sul significato fisico delle quantità derivate nel capitolo 2. In particolare prendiamo in considerazione la prima componente della Zilch, che verrà chiamata Chiralità Ottica.
La Chiralità Ottica ha la forma:

$$C = Z^{000} = \frac{1}{2}E \cdot (\nabla \times E) + \frac{1}{2}B \cdot (\nabla \times B). \tag{32}$$

La chiralitá , a differenza delle altre quanitá conservate, é pari per inversione temporale e dispari sotto inversione degli assi.

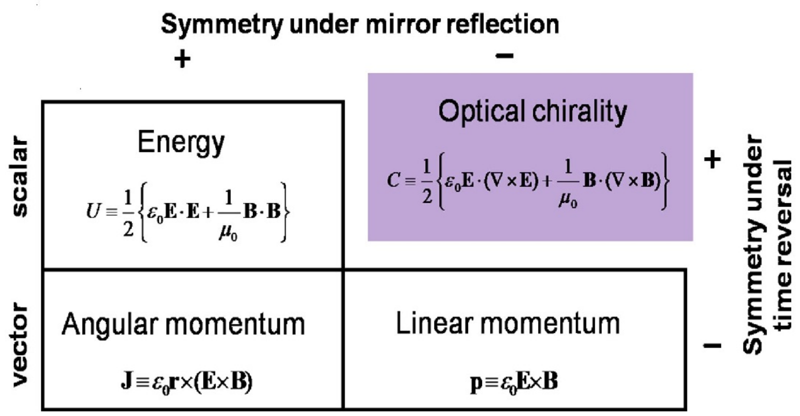

Figura 1: Paritá e inversione temporale. Proviene da Enhanced Enantioselectivity in Excitation of Chiral Molecules by Superchiral Light with Yiqiao Tang and Adam E. Cohen

Consideriamo un'onda piana monocromatica che si propaga lungo l'asse z.

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^0 e^{i(-\omega t + kz)} + \text{c.c.} \\ E_y &= E_y^0 e^{i(-\omega t + kz)} + \text{c.c} \end{aligned} \tag{33}$$

Il campo magnetico è fissato univocamente dalla relazione $c\vec{B} = \hat{z} \times \vec{E}$. Per una tale soluzione del campo elettromagnetico, la Chiralità Ottica mediata nel tempo vale

$$\langle C \rangle = 2i\omega E_x^0 E_y^{0*} - 2i\omega E_x^{0*} E_y^0. \tag{34}$$

Facciamo ora una considerazione importante. Considerando onde polarizzate linearmente, per cui quindi $\frac{E_x^0}{E_y^0}$ è reale, la chiralità è nulla, mentre per onde polarizzate circolarmente, quindi con $E_x^0 = i \pm E_y^0$, vale:

$$C^{\pm} = 2i\omega(\pm iE_x^0 E_x^{0*} \pm iE_y^0 E_y^{0*}) = \mp\omega U,$$

dove $U = 2((E_x^0)^2 + (E_y^0)^2)$ è la densità di energia dell'onda elettromagnetica.
La Chiralità Ottica, nulla per onde polarizzate linearmente, è proporzionale quindi all'energia trasportata dall'onda e assume valori opposti nel caso di onde polarizzate circolarmente in un senso e nell'altro.

3.1.1 Autostati della Zilch

Un approccio alternativo per studiare il significato della Chiralità (32) consiste nell'analizzare la simmetria ad essa associata. Questa è la trasformazione (11) trovata da Philbin per la prima componente della Zilch. Dato che questo è il generatore infinitesimo del gruppo associato alla quantità conservata, i suoi autostati hanno autovalori che rappresentano la quantità conservata trasportata dall'autostato. Il generatore della simmetria della Chiralità Ottica è $\partial_t \bigtriangledown \times$ agente sul potenziale vettore $\vec{A}$. Consideriamo quindi l'equazione agli autovalori in trasformata di Fourier

$$\bigtriangledown \times \widetilde{A}(r,\omega) = \frac{\chi}{\omega}\widetilde{A}(r,\omega) \tag{35}$$

dove χ è l'autostato.
Poniamoci nella Gauge in cui $\phi = 0$. I campi elettrici e magnetici sono:

$$\widetilde{E}(r,\omega) = i\omega\widetilde{A}(r,\omega) \qquad \bigtriangledown \times \widetilde{A}(r,\omega) = \widetilde{B}(r,\omega).$$

Prendendo il rotore a destra e sinistra della (35) e usando le relazioni appena riportate otteniamo:

$$\bigtriangledown \times \widetilde{B}(r,\omega) = -i\frac{\chi^2}{\omega^3}\widetilde{E}(r,\omega). \tag{36}$$

Confrontando la (36) con le equazioni di Mawell otteniamo che l'autovalore χ deve soddisfare la seguente relazione:

$$\chi = \pm\frac{\omega^2}{c} \tag{37}$$

e poichè dalla (35) segue immediatamente che $B(r,\omega) = -i\frac{\chi}{\omega^2}\widetilde{E}(r,\omega)$ otteniamo infine che gli autostati sono dati da

$$B(r,\omega) = \mp\frac{i}{c}\widetilde{E}(r,\omega). \tag{38}$$

La (38) è proprio la relazione che devono soddisfare le onde piane polarizzate circolarmente, e queste ultime sono proprio autostati di autovalori dati dall'eq. (37). Notiamo che gli autovalori sono degeneri, dato che solo la frequenza e non la direzione dell'onda determina l'autostato.

3.2 LEGAME TRA CHIRALITÀ OTTICA E DICROISMO CIRCOLARE

Un oggetto chirale è qualcosa di non sovrapponibile alla sua immagine speculare. Molte molecole in natura presentano questa caratteristica, come anche le stesse onde piane polarizzate circolarmente, che chiameremo in brevità CPL. Molecole chirali presentano diverse

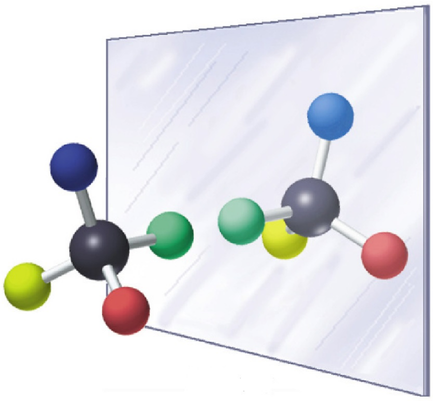

Figura 2: Molecola Chirale. Proviene da http://astrobiology.berkeley.edu/Mars101/definitions.htm/.

sezioni d'urto a seconda se illuminate con luce polarizzata antioraria o oraria. Questo fenomeno si chiama Dicrosimo Circolare (CD). Si dimostra che la Chiralità Ottica (32) controlla il grado di asimmetria chirale nell'eccitazione di una piccola molecola chirale.
Restringiamo la nostra analisi ad un materiale che presenta carattere chirale isotropo. Un' onda elettromagnetica monocromatica che investe una molecola chirale genera un momento di dipolo elettrico $\tilde{p}$ e un momento di dipolo magnetico $\tilde{m}$ dati da:

$$\tilde{p} = \tilde{\alpha}\tilde{E} - i\tilde{G}\tilde{B} \tag{39}$$

$$\tilde{m} = \tilde{\chi}\tilde{B} + i\tilde{G}\tilde{E} \tag{40}$$

Quantità che presentano la $\sim$ sono complesse. Chiaramente consideriamo dipoli complessi per generalità ma le quantità fisiche saranno la parte reale. Queste due relazioni sono caratteristiche del materiale in questione. $\tilde{\alpha}$ è la polarizzabilità elettrica, $\tilde{\chi}$ è la suscettibilità magnetica e $\tilde{G}$ è la polarizzabilità isotropica mista di dipolo elettromagnetico. Consideriamo ora campi elettromagnetici monocromatici generici, tenendo conto che sotto una trasformazione di parità il campo elettrico cambia segno, il campo magnetico no:

$$\widetilde{E(t)} = \pm\widetilde{E_0}e^{-i\omega t} \quad \widetilde{B(t)} = \widetilde{B_0}e^{-i\omega t} \tag{41}$$

Definiamo la grandezza :

$$A^{\pm} =< E \cdot \dot{p} + B \cdot \dot{m} > \tag{42}$$

ovvero l' eccitazione della molecola nell'unità di tempo della da parte di una generica onda (41). Sostituiamo nella (42) le espressioni dei momenti di dipolo elettrico e magnetico (39) e (40)

$$A^{\pm} = \frac{\omega}{2}(\widetilde{E}^2 \mathrm{Im}(\widetilde{\alpha}) + \widetilde{B}^2 \mathrm{Im}(\widetilde{\chi}) \pm \frac{\omega}{2i}\mathrm{Im}(\widetilde{G})(\widetilde{E^*}\cdot\widetilde{B} - \widetilde{B^*}\cdot\widetilde{E})). \tag{43}$$

Calcoliamo ora la Chiralità (32), la quale, usando le equazioni di Maxwell, diviene:

$$C = -\frac{\varepsilon_0}{2}E\cdot\dot{B} + \frac{\varepsilon_0}{2}B\cdot\dot{E}.$$

e usando le espressione dei campi (41) otteniamo:

$$C = -\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\mathrm{Im}(\widetilde{E^*}\cdot\widetilde{B}). \tag{44}$$

Sostituendo l'ultima espressione trovata nella (43), ricordando che la densità di energia,mediata in un periodo, associata al campo elettrico vale $U_E = \frac{\varepsilon_0}{4}\widetilde{E}^2$ e infine trascurando il termine relativo a χ (è trascurabile per la maggior parte delle molecole) si trova che

$$A^{\pm} = \frac{2}{\varepsilon_0}(\omega U_E \mathrm{Im}(\widetilde{\alpha}) \mp C\mathrm{Im}(\widetilde{G})).$$

A questo punto definiamo il fattore di asimmetria come

$$g = 2\frac{A^+ - A^-}{A^+ + A^-} \tag{45}$$

e usando l'espressione di $A^{\pm}$ trovata precedentemente otteniamo:

$$g = -\frac{\mathrm{Im}(\widetilde{G})}{\mathrm{Im}(\widetilde{\alpha})}\frac{2C}{\omega U_E}. \tag{46}$$

Questo fattore quantifica il grado di asimmetria che si crea nell'assorbimento di molecole chirali da parte di una generica onda monocromatica e la sua onda speculare. Tale fattore si è dimostrato dipendere direttamente da $\mathrm{Im}(\widetilde{G})$, grandezza legata in modo diretto al carattere chirale del materiale, e dalla chiralità della luce.
Per un'onda piana la chiralità vale, usando le convenzioni usate in questo capitolo, $C = \pm\frac{2U_E}{\omega c}$, dove c è la velocità della luce e il segno positivo è per onde polarizzate sinistre. Si trova che il fattore di asimmetria in questo caso speciale vale

$$g = -\frac{4\mathrm{Im}(\widetilde{G})}{\mathrm{Im}(\widetilde{\alpha})c}.$$

Mostriamo ora l'esistenza di soluzioni delle equazioni di Maxwell che presentano asimmetria chirale più grande di quella trovata per le onde piane monocromatiche, $\left|\frac{C}{U_E}\right| > \frac{2\omega}{c}$. Una soluzione con questa proprietà viene detta superchirale.

E' possibile costruire un'onda stazionaria, formata da due CPL propaganti in senso opposto lungo l'asse z, con stessa frequenza, parità opposta e ampiezza leggermente differente, che presenta ai nodi asimmetrie chirali elevate.
Esprimiamo l'onda piana incidente come

$$\vec{E} = \vec{\xi_1}\cos(\omega t - kz) + \vec{\xi_2}\sin(\omega t - kz)$$

e dato che è polarizzata circolarmente abbiamo che $\xi_1 \cdot \xi_2 = 0$ e $\left|\vec{\xi_1}\right| = \left|\vec{\xi_2}\right| = E$. Chiamiamo E_1 l'ampiezza del campo elettrico della prima onda ed E_2 l'ampiezza dell'altra. La densità di energia media vale:

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2}(E_1^2 + E_2^2 - 2\cos(2kz)) \tag{47}$$

mentre la chiralità in questo caso non presenta alcuna dipendenza dalla coordinata z:

$$C = \frac{\omega\varepsilon_0}{c}(E_1^2 - E_2^2). \tag{48}$$

Dato che crechiamo soluzioni per le quali $\left|\frac{C}{U_E}\right| > \frac{2\omega}{c}$, nei punti di minima energia abbiamo la massima asimmetria chirale, ovvero ai nodi. In questi punti l'energia vale $U_E = \frac{\varepsilon_0}{2}(E_1 - E_2)^2$ Il fattore di asimmetria in questi punti vale:

$$g_{max} = -\frac{4\mathrm{Im}(\widetilde{G})}{\mathrm{Im}(\widetilde{\alpha})c}\frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} \tag{49}$$

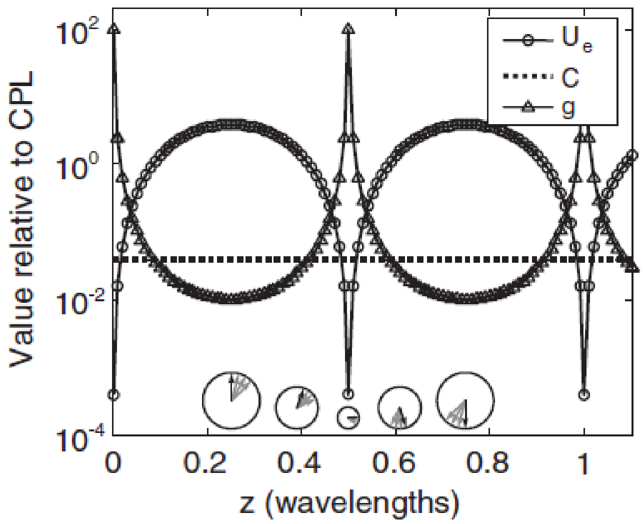

Figura 3: Asimmetria chirale per l'onda stazionaria. Proviene da "Optical Chirality and Its Interaction with Matter Yiqiao Tang and Adam E. Cohen"

Questa configurazione è piuttosto semplice da realizzare. Se utilizziamo come specchio un materiale riflettente imperfetto, facendo incidere su di esso una CPL polarizzata, l'onda riflessa è proprio un'altra

CPL con parità inversa, stessa frequenza e intensità leggermente inferiore. Le molecole, per misurare gli effetti superchirali, devono essere localizzate in uno strato molto sottile . Ad esempio per $E_2 = 0.98E_1$ e $\lambda = 355nm$ abbiamo che le regioni dove $\frac{g}{g_{CPL}} > 1$ hanno uno spessore di $11nm$. Misurare sperimentalmente l'assorbimento in campioni così fini non è realistico. Si preferisce infatti utilizzare la fluorescenza come misura molto più sensibile del rating di eccitazione.

Abbiamo quindi mostrato che la corrente da noi considerata in questa tesi ammette un'interpretazione fisica rilevante, sebbene essa sia solo una delle infinite quantità conservate ammesse nell'elettromagnetismo libero. La quantità conservata nel tempo è la chiralità ottica, ed è stato dimostrato come questa grandezza giochi un ruolo fondamentale nel valutare l'asimmetria di assorbimento che si crea se si considerano materiali e radiazione chirali nel fenomeno del dicroismo circolare.

A APPENDICE

A.1 DIMOSTRAZIONE DELLA CONSERVAZIONE DELLA ZILCH

$$\begin{aligned}\partial_\rho Z^{\mu\nu\rho} = \partial_\rho(&\frac{1}{4}F_\sigma{}^\rho \partial^\mu F_{\alpha\beta}\varepsilon^{\nu\alpha\sigma\beta} + \frac{1}{4}F_\sigma{}^\rho \partial^\nu F_{\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\alpha\sigma\beta}\\ &+\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}\partial^\mu F_\sigma{}^\nu \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}\partial^\nu F_\sigma{}^\mu \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}\\ &-\frac{1}{2}F^{\mu\beta}\partial_\sigma F_{\alpha\beta}\varepsilon^{\nu\rho\sigma\alpha} - \frac{1}{2}F^{\nu\beta}\partial_\sigma F_{\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\rho\sigma\alpha}\\ &-\frac{1}{2}F_\alpha{}^\beta \partial_\sigma F^\mu{}_\beta \varepsilon^{\nu\rho\sigma\alpha} - \frac{1}{2}F_\alpha{}^\beta \partial_\sigma F^\nu{}_\beta \varepsilon^{\mu\rho\sigma\alpha})\end{aligned}$$

Svolgendo la derivata del prodotto, usando le equazioni di Maxwell e l'identità di Bianchi per i primi 4 termini, e negli ultimi 4 sfruttando il fatto che coppie di indici simmetrici contratti con indici antisimmetrici si annullano otteniamo:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4}F_\sigma{}^\rho \partial_\rho \partial^\mu F_{\alpha\beta}\varepsilon^{\nu\alpha\sigma\beta} + \frac{1}{4}F_\sigma{}^\rho \partial^\nu \partial^\rho F_{\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\alpha\sigma\beta}\\ &+\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}\partial_\rho \partial^\mu F_\sigma{}^\nu \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}\partial_\rho \partial^\nu F_\sigma{}^\mu \varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}\\ &-\frac{1}{2}\partial_\rho F^{\mu\beta}\partial_\sigma F_{\alpha\beta}\varepsilon^{\nu\rho\sigma\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\rho F^{\nu\beta}\partial_\sigma F_{\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\rho\sigma\alpha}\\ &-\frac{1}{2}\partial_\rho F_\alpha{}^\beta \partial_\sigma F^\mu{}_\beta \varepsilon^{\nu\rho\sigma\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\rho F_\alpha{}^\beta \partial_\sigma F^\nu{}_\beta \varepsilon^{\mu\rho\sigma\alpha}\end{aligned}$$

Rinominando gli indici e sfruttando l'antisimmetria del tensore di Levi-Civita abbiamo che il quinto termine è l'opposto del settimo, e che il sesto è l'opposto dell'ottavo; rimangono quindi solo i primi quattro termini. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}4\partial_\rho Z^{\mu\nu\rho} = [&g^{\mu\sigma}(g^{\rho\gamma}\varepsilon^{\nu\alpha\lambda\beta} + g^{\nu\beta}\varepsilon^{\rho\alpha\lambda\gamma})\\ &+ g^{\nu\sigma}(g^{\rho\gamma}\varepsilon^{\mu\alpha\lambda\beta} + g^{\mu\beta}\varepsilon^{\rho\alpha\lambda\gamma})]F_{\lambda\gamma}\partial_\sigma\partial_\rho F_{\alpha\beta} \qquad (50)\end{aligned}$$

Ora facciamo uso della seguente identità:

$$g^{\rho\gamma}\varepsilon^{\nu\alpha\lambda\beta} - g^{\rho\lambda}\varepsilon^{\nu\alpha\gamma\beta} - g^{\nu\rho}\varepsilon^{\lambda\gamma\alpha\beta} + g^{\beta\rho}\varepsilon^{\lambda\gamma\alpha\nu} + g^{\alpha\rho}\varepsilon^{\lambda\gamma\nu\beta} = 0$$

Questa identità segue subito dal fatto che il membro di sinistra è completamente antisimmetrico in tutti e 5 gli indici, e quindi deve annullarsi dato che siamo in 4 dimensioni. Contraendo l'ultima espressione con $\partial_\rho F_{\alpha\beta}$, sfruttando le varie antisimmetrie e rinominando gli indici otteniamo

$$(g^{\rho\gamma}\varepsilon^{\nu\alpha\lambda\beta} - g^{\rho\lambda}\varepsilon^{\nu\alpha\gamma\beta})\partial_\rho F_{\alpha\beta} = g^{\nu\beta}\varepsilon^{\rho\alpha\lambda\gamma}\partial_\beta F_{\rho\alpha} - 2\varepsilon^{\lambda\gamma\alpha\nu}g^{\beta\rho}\partial_\rho F_{\alpha\beta}$$

Utilizzando le equazioni di Maxwell, derivando entrambi i membri per σ e contraendo a destra e a sinistra per $F_{\lambda\gamma}$ abbiamo

$$g^{\rho\gamma}\varepsilon^{\nu\alpha\lambda\beta}\partial_\sigma\partial_\rho F_{\alpha\beta}F_{\lambda\gamma} = \frac{1}{2}g^{\nu\beta}\varepsilon^{\rho\alpha\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma}\partial_\sigma\partial_\beta F_{\rho\alpha}$$

aggiungendo a destra e a sinistra il termine $g^{\nu\beta}\varepsilon^{\rho\alpha\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma}\partial_\beta\partial_\sigma F_{\rho\alpha}$ e manipolando il termine di destra otteniamo infine

$$g^{\rho\gamma}\varepsilon^{\nu\alpha\lambda\beta}\partial_\sigma\partial_\rho F_{\alpha\beta}F_{\lambda\gamma} + g^{\nu\beta}\varepsilon^{\rho\alpha\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma}\partial_\beta\partial_\sigma F_{\rho\alpha}$$
$$= \frac{1}{2}g^{\nu\beta}\varepsilon^{\rho\alpha\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma}[\partial_\rho F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\rho} + \partial_\beta F_{\rho\alpha}]$$

A questo punto la quantità tra parentesi quadre si annulla per l'identità di Bianchi e il termine di sinistra è quindi nullo e questa equazione (assieme alla stessa equazione ma scambiando gli indici liberi μ e ν) inserita nella (50) dà la conservazione della Zilch.

A.2 DIMOSTRAZIONE DELL'EQUIVALENZA TRA IL TENSORE DI KIBBLE E QUELLO DI LIPKIN

Ricordiamo il tensore definito in [2] da Kibble, già menzionato nel capitolo 2 (eq. 21) :

$$H^{\mu\nu\rho} = G^{\mu\lambda}\partial^\rho F_\lambda{}^\nu - F^{\mu\lambda}\partial^\rho G_\lambda{}^\nu.$$

Ora mostriamo l'equivalenza tra il tensore definito sopra e il tensore di Lipkin (8).
Dalla definizione del tensore di Kibble segue immediatamente che:

$$H^\mu_{\nu\rho} - Z^\mu_{\rho\nu} = G^{\mu\lambda}(\partial_\rho F_{\lambda\nu} - \partial_\nu F_{\lambda\rho}) - F^{\mu\lambda}(\partial_\rho G_{\lambda\nu} - \partial_\nu G_{\lambda\rho}),$$

utilizzando le equazioni di Maxwell nella loro forma ciclica, ovvero $\partial_\rho G_{\lambda\nu} + \partial_\lambda G_{\nu\rho} + \partial_\nu G_{\rho\lambda} = 0$ e $\partial_\rho F_{\lambda\nu} + \partial_\lambda F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\lambda} = 0$, otteniamo

$$H^\mu_{\nu\rho} - Z^\mu_{\rho\nu} = -G^{\mu\lambda}\partial_\lambda F_{\nu\rho} + F^{\mu\lambda}\partial_\lambda G_{\nu\rho}.$$

Usando ancora le equazioni di Maxwell e l'identità di Bianchi segue che

$$H^\mu_{\nu\rho} - Z^\mu_{\rho\nu} = \partial_\lambda(G^{\mu\lambda}F_{\nu\rho} - F^{\mu\lambda}G_{\nu\rho}).$$

Ora riscriviamo il membro di destra di quest'ultima equazione in termini del tensore energia-impulso

$$T^\mu_\nu = F^{\mu\lambda}F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^{\gamma\lambda}F_{\lambda\gamma}$$

Quindi, è possibile verificare che

$$G^{\mu\lambda}F^{\nu\rho} - F^{\mu\lambda}G\nu\rho = \frac{1}{2}(+\varepsilon^{\gamma\mu\nu\rho}T^{\lambda}{}_{\gamma} - \varepsilon^{\gamma\mu\nu\rho}T^{\lambda}{}_{\gamma} - \varepsilon^{\gamma\rho\lambda\mu}T^{\nu}{}_{\gamma} + \varepsilon^{\gamma\nu\lambda\mu}T^{\rho}{}_{\gamma}),$$

perciò

$$H^{\mu\nu\rho} - Z^{\mu\nu\rho} = \partial_{\lambda}[\frac{1}{2}(+\varepsilon^{\gamma\mu\nu\rho}T^{\lambda}{}_{\gamma} - \varepsilon^{\gamma\mu\nu\rho}T^{\lambda}{}_{\gamma} - \varepsilon^{\gamma\rho\lambda\mu}T^{\nu}{}_{\gamma} + \varepsilon^{\gamma\nu\lambda\mu}T^{\rho}{}_{\gamma})].$$

Simmetrizziamo ora i due membri di questa equazione negli indici μ eν, sfruttando la simmetria $H^{\mu\nu\rho} = H^{\nu\mu\rho}$ e risistemando i termini otteniamo:

$$H^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(Z^{\rho\mu\nu} + Z^{\rho\nu\mu}) + \frac{1}{2}\partial_{\lambda}(\varepsilon^{\gamma\lambda\rho\mu}T^{\nu}{}_{\gamma} + \varepsilon^{\gamma\lambda\rho\nu}T^{\mu}{}_{\gamma}) \qquad (51)$$

Sostituendo il tensore H di Kibble (21) ed esplicitando il tensore energia-impulso si trova che la (51) è proprio la definizione del tensore di Lipkin (8).

BIBLIOGRAFIA

[1] D. Lipkin, J. Math. Phys. (N.Y.) 5, 696 (1964).

[2] T.W. B. Kibble, J. Math. Phys. (N.Y.) 6, 1022 (1965).

[3] T. G. Philbin, Phys. Rev. A 87, 043843 (2013)

[4] Y. Tang and A. Cohen, Phys. Rev. Lett. 104, 163901 (2010).

[5] R. P. Cameron, S. M. Barnett, and A. M. Yao, New. J. Phys. 14, 053050 (2012).

[6] K. Lechner, Elettrodinamica Classica, Springer-Italia (2013).

[7] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations, CUP, Cambridge, UK (1995).

[8] Y. Tang and A. Cohen, Science 332, 333 (2011);.