

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE (ICEA)

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN

INGEGNERIA EDILE-ARCHITETTURA

METODI DINAMICI SPERIMENTALI E NUMERICI PER LA STIMA DELLO SFORZO ASSIALE IN CATENE ESISTENTI

RELATORE

PROF.SSA FRANCESCA DA PORTO

CORRELATORE

ING. ELVIS CESCATTI

LAUREANDA

LUCIA MOSCA

N° MATRICOLA: 612977

ANNO ACCADEMICO 2014 / 2015

SOMMARIO

Negli edifici in muratura storici i tiranti giocano un ruolo fondamentale nel garantire l'equilibrio strutturale, contrastando le spinte orizzontali e inibendo l'innesco di meccanismi cinematici. Il lavoro si è concentrato nel definire le caratteristiche peculiari di questi elementi e nella valutazione del loro comportamento dinamico, con il fine ultimo di stabilire quale metodo fosse il più efficace per la determinazione dello sforzo assiale.

Il primo obiettivo di determinare le tipologie più ricorrenti di tiranti antichi è stato raggiunto tramite un'approfondita analisi della letteratura storica e dello stato dell'arte e mediante la costruzione di un Database, nel quale sono stati raccolti dati di carattere geometrico, meccanico e dinamico, riguardanti 345 catene antiche. Questi modelli sono serviti nell'implementazione di analisi ad elementi finiti e per la progettazione di una prova di laboratorio. Il Database ha inoltre permesso l'avvio di considerazioni sull'influenza dei fattori (sforzo assiale, condizioni di vincolo, lunghezza, rigidezza, …) sulle frequenze e i modi di vibrare, in seguito completate e avvalorate da studi parametrici su modelli FE.

Il confronto tra i diversi metodi dinamici per la determinazione dello sforzo assiale studiati, condotto su 230 modelli FE e 50 casi studio, ha dimostrato l'inefficienza del metodo attualmente utilizzato, riconducibile alla teoria dei fili tesi, e ha portato all'individuazione di una metodologia maggiormente affidabile (Tullini & Laudiero, 2008). Il metodo Tullini si basa sull'individuazione delle forme modali relative alla prima frequenza di vibrazione e alla loro correlazione con il tiro e la rigidezza dei vincoli, riuscendo a stimare lo sforzo assiale reale con un errore medio minore al kN contro i 60 kN del precedente metodo. Infine, sono state riportate alcune raccomandazioni per una corretta esecuzione della prova *in situ* relative al numero e al posizionamento dei sensori e all'opportuna frequenza di campionamento da impostare.

INDICE

SOMMARIO III

1 INTRODUZIONE 1

1.1 INTRODUZIONE 1

1.2 OGGETTO E METODOLOGIA DI STUDIO 1

1.3 ORGANIZZAZIONE DELLA TESI 2

2 LO STATO DELL'ARTE 5

2.1 LA FUNZIONE DEI TIRANTI NELL'EDILIZIA STORICA 5

2.1.1 CONTENIMENTO DELLE SPINTE 5

2.1.2 PRESIDI SISMICI 6

2.2 I TIRANTI STORICI 7

2.2.1 EVOLUZIONE STORICA 7

2.2.2 CARATTERISTICHE DEI TIRANTI 17

2.3 METODI PER LA DETERMINAZIONE DEL TIRO 22

2.3.1 ACCENNI TEORICI 22

2.3.2 METODI PROPOSTI 26

2.3.3 CONCLUSIONI 30

3 SPERIMENTAZIONE 35

3.1 DATABASE 35

3.1.1 STUDIO PRELIMINARE 35

3.1.2 ANALISI ED ELABORAZIONE DEI DATI 37

3.2 ANALISI A ELEMENTI FINITI 41

3.2.1 INTRODUZIONE 41

3.2.2 ANALISI DI SENSITIVITÀ 42

3.2.3 RISULTATI DEI MODELLI NUMERICI 59

3.3 PROVA DI LABORATORIO 64

3.3.1 CONFIGURAZIONE DELLA PROVA SPERIMENTALE 64
3.3.2 ATTREZZATURA E CALIBRAZIONE 68

4 ELABORAZIONE E ANALISI DEI DATI 73

4.1 ANALISI DEI METODI PER LA DETERMINAZIONE DEL TIRO 73
4.1.1 TEORIA DEI FILI TESI 73
4.1.2 DARDANO, MIRANDA, PERSICHETTI & VALVO (2005) 76
4.1.3 LAGOMARSINO & CALDERINI (2005) 81
4.1.4 PARK ET AL. (2006) 83
4.1.5 TULLINI & LAUDIERO (2008) 84
4.1.6 AMABILI ET AL. (2010) 87
4.1.7 LUONG (2010) 87
4.1.8 REBECCHI, TULLINI & LAUDIERO (2013) 93
4.1.9 CONCLUSIONI 96
4.2 APPLICAZIONE E COMPARAZIONE DEI METODI 98
4.2.1 ANALISI FEM 98
4.2.2 CASI STUDIO 115

5 CONCLUSIONI E RACCOMANDAZIONI 123

5.1 CONCLUSIONI 123
5.2 RACCOMANDAZIONI 125
5.2.1 RACCOMANDAZIONI PER UNA CORRETTA ESECUZIONE DELLA PROVA IN SITU 125

6 BIBLIOGRAFIA 127

APPENDICE A TORRE DEGLI ANZIANI - PADOVA 131

A.1 INTRODUZIONE 131
A.2 ESECUZIONE DELLA PROVA 134

APPENDICE B SOVRINTENDENZA AI BENI CULTURALI - VERONA 138

B.1 INTRODUZIONE 138
B.2 ESECUZIONE DELLA PROVA 150

1 INTRODUZIONE

1.1 INTRODUZIONE

I tiranti metallici sono spesso utilizzati nelle strutture in muratura e nelle volte con la funzione di contrastare le spinte orizzontali altrimenti mal assorbite dagli elementi sollecitati, contribuendo in questo modo all'equilibrio strutturale. Tali presidi, di origine molto antica e tutt'oggi largamente utilizzati, sono stati oggetto di numerosi studi sia nel campo di nuove costruzioni che in quello del restauro e della conservazione del patrimonio storico-culturale.

L'efficacia di tali elementi risiede nella capacità di connettere tra loro e fare cooperare le diverse parti dell'edificio in muratura, oltre ad assorbire le spinte orizzontali trasmesse alla murature verticali da archi e volte o da forze generate da eventi particolari, quali terremoti e vento. L'importanza dello studio del funzionamento dei tiranti è quindi spiegata dal loro ruolo il quale migliora notevolmente lo schema strutturale contribuendo ad un funzionamento monolitico.

I tiranti ricoprono un ruolo fondamentale specialmente negli edifici antichi, è quindi necessario accertarsi del loro corretto funzionamento tramite prove non invasive in linea con i principi del restauro e della conservazione; da questa necessità si sono evolute numerose proposte di metodi per la stima del tiro tramite prove di tipo statico e dinamico.

1.2 OGGETTO E METODOLOGIA DI STUDIO

Il lavoro presenta un'analisi critica delle proposte metodologie di stima del tiro e si pone come obiettivo la loro validazione tramite l'applicazione *in situ* e su modelli FEM, con la progettazione di un test di laboratorio che possa consentire il successivo sviluppo della ricerca e una ulteriore convalida dei metodi.

Inizialmente è stato studiato lo stato dell'arte e lo sviluppo storico dei tiranti metallici; nella revisione della letteratura particolare attenzione è stata riservata ai metodi che nell'ultimo ventennio sono stati proposti per lo studio delle catene

metalliche. A seguire è stato creato un database contenente dati necessari allo studio e alla caratterizzazione morfologica e strutturale dei tiranti storici con l'obiettivo di crearne alcune tipologie ricorrenti sulla base dei dati disponibili riguardanti casi studio già analizzati. A partire da questi studi preliminari di letteratura e dati empirici è stato possibile determinare le caratteristiche più comuni delle catene, definendo così un modello per simulazioni numeriche e per la prova di laboratorio.

Infine le varie metodologie di stima del tiro dei tiranti antichi sono state sperimentate sui dati raccolti nel database e su casi studio particolari (Convento di San Fermo a Verona, Torre degli Anziani a Padova, …).

È qui presentato uno schema che riassume i contenuti della tesi e il processo logico che li lega (Figura 1.1).

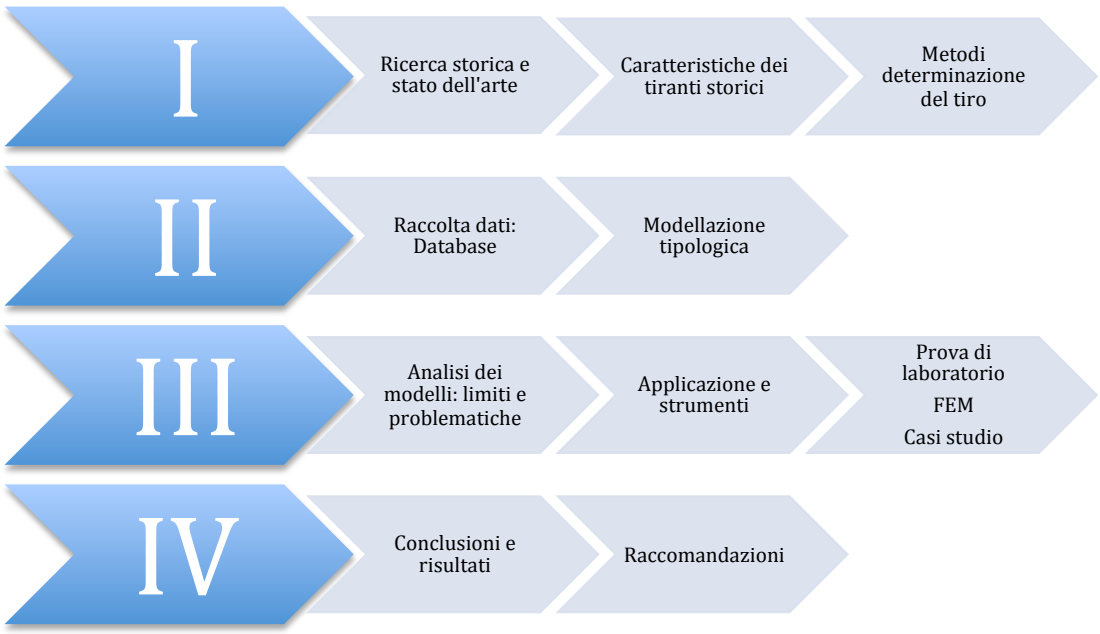


FIGURA 1.1 - SCHEMA DEI CONTENUTI DELLA TESI

1.3 ORGANIZZAZIONE DELLA TESI

La tesi è organizzata in cinque capitoli:

Capitolo 1. Introduzione: fornisce una introduzione al lavoro, le motivazioni e l'oggetto e la metodologia della tesi;

Capitolo 2. Lo stato dell'arte: esamina la funzione dei tiranti, lo stato dell'arte e l'evoluzione della tecnica, fornendo una sintesi delle proprietà dei tiranti storici in relazione al periodo di fabbricazione. Infine si esaminano i metodi per la determinazione del tiro definendone le caratteristiche e le riscontrate;

Capitolo 3. Sperimentazione: la sperimentazione si è svolta su tre livelli principali, descritti in questo capitolo: in primis con la costruzione di un Database, poi con analisi ad elementi finiti e infine progettando una prova di laboratorio.

Capitolo 4. Elaborazione e analisi dei dati: riporta l'analisi del metodi per la determinazione del tiro studiati nel capitolo 2 e l'applicazione di questi ai casi studio e ai modelli FE.

Capitolo 5. Conclusioni e raccomandazioni: presenta le conclusioni e le raccomandazioni della tesi, in particolare riguardanti la corretta esecuzione delle prove *in situ*.

2 LO STATO DELL'ARTE

2.1 LA FUNZIONE DEI TIRANTI NELL'EDILIZIA STORICA

I tiranti svolgono principalmente due funzioni, entrambe di importanza critica per le costruzioni in muratura: la prima, di tipo attivo, è l'assorbimento di forze orizzontali, dovute generalmente a spinte che possono essere di diversa natura (spinte generalmente statiche); la seconda, di tipo passivo, è quella di contribuire al comportamento scatolare dell'edificio, collegando e facendo cooperare tra loro diverse parti dell'edificio assorbendo sollecitazioni orizzontali occasionali o eccezionali (ammorsamento tra pareti, connessione solaio parete). Nonostante l'inserimento di tiranti sia uno dei più antichi metodi di consolidamento rimane ancor oggi uno dei migliori grazie alla sua bassa invasività (ingombro e massa limitate), alla sua economicità e alla facilità di realizzazione. Inoltre, la possibilità di aggiunta di tiranti in un momento successivo alla costruzione permette di realizzare interventi di restauro che non comportino una modifica sostanziale dell'aspetto dell'edificio (Astrua, 1995).

2.1.1 CONTENIMENTO DELLE SPINTE

I sistemi voltati o gli archi creano per loro natura una spinta che grava sui piedritti; per risolvere questo problema di stabilità, fin dall'antichità, si attuano interventi quali l'ampliamento della sezione muraria del piedritto, la costruzione di contrafforti localizzati oppure l'inserimento di tiranti, lignei e/o metallici.

Le catene, correttamente dimensionate e distribuite, vengono quindi ancorate alla muratura tramite capochiave, a paletto o a piastra, dispositivi che consentono di ripartire le forze assorbite sulle murature d'ambito. La posizione del tirante dovrebbe situarsi all'altezza delle reni degli archi, più o meno ad un terzo della freccia (Figura 2.1), dove si concentra la risultante (R) delle forze orizzontali (N) e verticali (P).

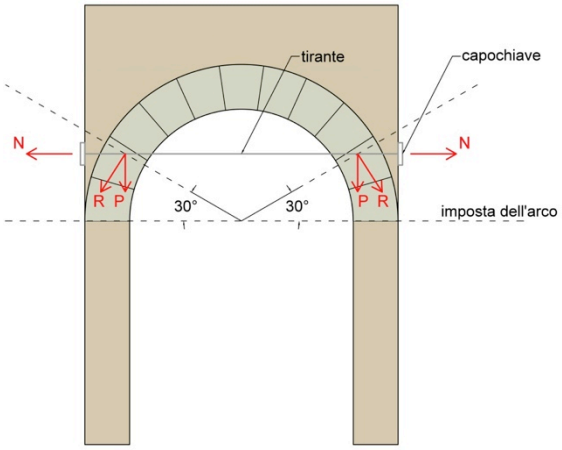


FIGURA 2.1 - SCHEMA STATICO DELL'ARCO CON TIRANTE

Talvolta i tiranti sono posizionati all'imposta o all'estradosso, tale scelta, dovuta principalmente a motivi estetici o funzionali, ha una minore efficacia nel contenimento delle spinte.

2.1.2 *PRESIDI SISMICI*

La muratura, come è noto, presenta una buona resistenza a compressione, ma una scarsa resistenza a trazione; proprio a causa di questa caratteristica spesso gli edifici in muratura, se mal concepiti, presentano problemi se sollecitati da forze orizzontali (vento, sisma). Un edificio in muratura deve essere concepito strutturalmente come un "sistema scatolare", ovvero una struttura tridimensionale nella quale gli elementi strutturali sono correttamente collegati tra loro in modo tale da permettere un comportamento d'insieme. Tutte le pareti, che devono essere tra loro ben ammorsate, svolgono funzione portante e di controvento, e ciò è possibile solo grazie alla ripartizione di orizzontamenti sufficientemente rigidi adeguatamente collegati alle murature.

Il buon ammorsamento tra i muri è necessario ad impedire l'innesco meccanismi locali di primo modo (fuori piano, es.: ribaltamento rigido) e si può assicurare tramite l'inserimento di tiranti metallici, che oltre ad assorbire le forze orizzontali permettono appunto il collegamento e la cooperazione tra le diverse parti del sistema strutturale. I tiranti devono quindi essere disposti nelle due direzioni principali del fabbricato, a livello dei solai ed in corrispondenza delle pareti portanti, ancorati alle murature mediante capochiave.

2.2 I TIRANTI STORICI

2.2.1 EVOLUZIONE STORICA

2.2.1.1 Le volte: evoluzione formale e costruttiva

Sebbene le strutture voltate siano state motivo architettonico caratteristico dell'architettura romana, possiamo riconoscere in culture più antiche il loro utilizzo e la loro diffusione. I primi esempi di strutture primitive voltate, le *pseudo-cupole* o *pseudo-volte,* risalgono al III millennio a.C. e sono state ritrovate in Egitto, in Mesopotamia e nel sud Italia (Tomasoni, 2008); l'innovazione costruttiva, che permette di distinguere queste opere rispetto a quelle che si basavano sul sistema costruttivo trilitico, consisteva nella sovrapposizione di blocchi progressivamente sfalsati tra loro e convergenti verso un vertice, con la creazione quindi di un sistema di forze non solo verticali ma anche orizzontali (Mirabella Roberti & Spina, 2001).

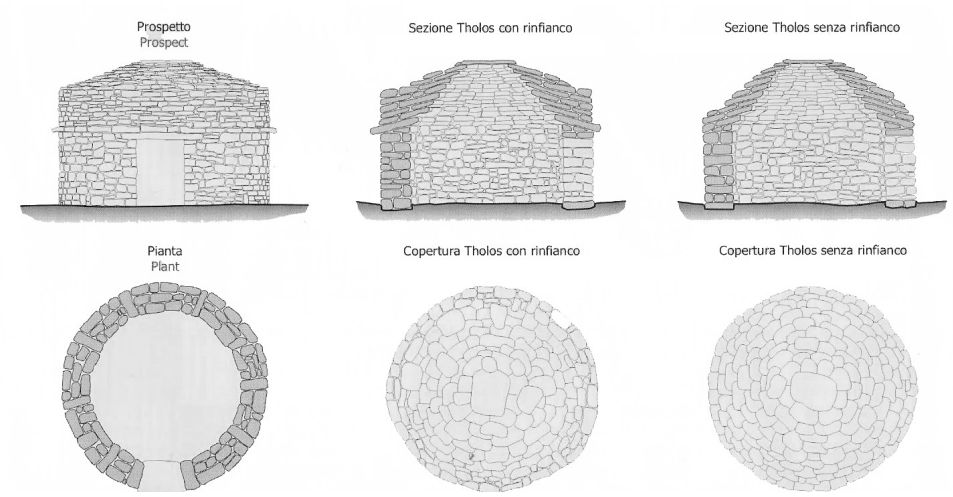


FIGURA 2.2 - RILIEVO DEI COBURRI DI MONTALBANO ELICONA (ME)

Lo sviluppo e il perfezionamento della tecnica costruttiva sono attribuiti ai romani, che per primi intuirono il comportamento statico delle strutture voltate, perfezionando quindi il processo costruttivo e l'impiego dei materiali. La tipologia più frequentemente utilizzata era quella degli archi a tutto sesto, nei quali i mattoni o i conci presentavano giunti convergenti verso il centro di curvatura.

Dal III secolo a.C. venne invece preferita la modellazione del concio a forma di cuneo per garantire un minore uso di malta e maggiore robustezza. Una successiva innovazione costruttiva è legata alla produzione delle più resistenti malte pozzolaniche (calce e sabbia vulcanica), che, miste ad inerti, permisero il diffondersi delle volte in *opus caementicium.*

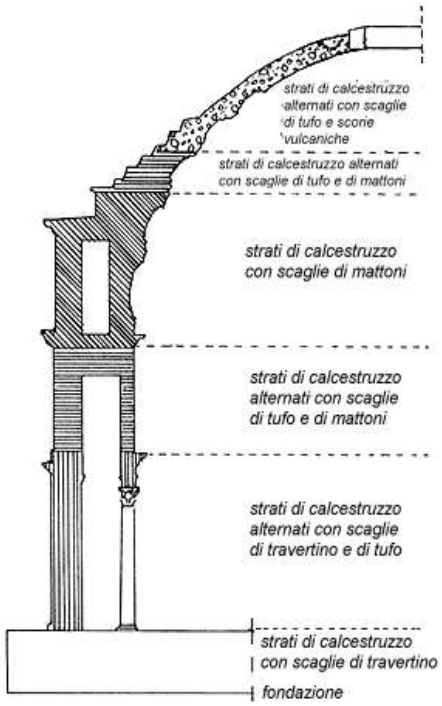


FIGURA 2.3 - CUPOLA DEL PANTHEON (ROMA, 126 D.C.)

L'ingegno e il pragmatismo dei romani è evidente nell'introduzioni di alcuni espedienti utilizzati a migliorare le varie carenze che le volte evidenziavano, come ad esempio, dal I secolo d.C., l'utilizzo di nervature in mattoni, che garantiva maggiore resistenza alle volte in *opus caementicium*. Le prime tecniche di alleggerimento delle volte, nate dall'esigenza di costruzione di strutture di maggiori dimensioni, si riscontrano nell'uso sapiente dei materiali: ad esempio nella cupola del Pantheon (126 d.C.) si possono riconoscere sei strati costruttivi caratterizzati da diversi tipi di inerti nella preparazione dell'*opus caementicium,* dalle scaglie di mattoni alla base alla pomice vulcanica in prossimità dell'oculo (Figura 2.3). Tra gli altri metodi escogitati dai romani per alleggerire le volte possono annoverarsi l'inserimento all'interno della gettata di *opus caementicium* di anfore in laterizio, *olle laterizie*, e l'utilizzo di tubi fittili, cilindri cavi in laterizio ad incastro, posizionati in serie circolari e concentriche. Uno dei più grandi limiti delle volte impiegate dai romani era la necessità di un muro continuo a sostegno della struttura, che non permetteva quindi un'articolazione aperta ed complessa dello spazio; tale vincolo fu superato solo in epoca bizantina con l'introduzione di piloni liberi e pennacchi a sostegno di cupole impostate su pianta quadrata. A favore di una maggiore leggerezza le cupole bizantine sono poi costitute da soli elementi laterizi, abbandonando le strutture in *opus caementicium*. La portata di tali innovazioni si può riscontrare nella chiesa di Santa Sofia a Costantinopoli (532 d.C.), dove la cupola centrale (31 metri di diametro) pare sospesa nell'aria, posata su pennacchi (triangoli

sferici) impostati su piloni quadrati. In tale esempio risulta inoltre essenziale la presenza di cupole ausiliarie, che contribuiscono a reggere la spinta della cupola centrale.

Dall'XI secolo alla prima metà del XII secolo l'Europa visse un periodo di grande modernizzazione durante il quale si registrò anche alla ripresa dell'attività edilizia. L'abbazia di Cluny (910 d.C.) è il primo esempio della nuova concezione architettonica strutturale che stava nascendo in questo periodo in tutta Europa. La ripresa formale degli elementi principali dell'architettura romana (arco, colonna, pilastro, volta) venne a compromessi con le soluzioni tecniche di quest'epoca, con la scarsità di manodopera specializzata e di materiale di buona qualità.

Alle volte monolitiche in *opus caementicium* romane si oppongono volte realizzate in laterizio o in conci di pietra sottili alle quali venivano affiancati degli *arcs-doubleaux*, definiti da Viollet le Duc nel suo *Dictionnaire raissonè de l'architecture francaise* (1814-1879), centine permanenti composte da conci di pietra a sostegno della muratura della volta. Tale interpretazione del ruolo strutturale dei costoloni fu successivamente messa in discussione da Pol Abraham (1935), che rileva il principale scopo decorativo di questi elementi architettonici (Figura 2.4).

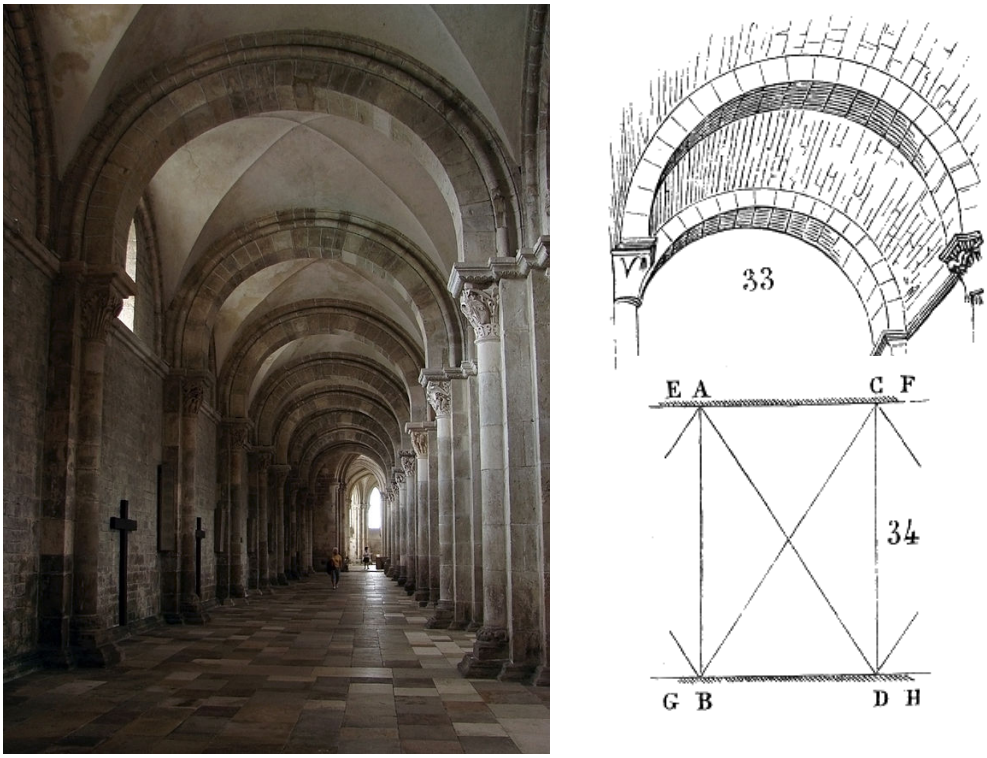


FIGURA 2.4 - DOUBLEAUX. A SINISTRA: ABBAZIA DI VÉZELAY, FRANCIA, XII SEC D.C.; A DESTRA: ILLUSTRAZIONI DI VIOLLET-LE-DUC

L'introduzione di volte a crociera permetteva una maggiore libertà di articolazione dello spazio: tale struttura, infatti, necessita di punti di appoggio puntuali per scaricare il peso, consentendo l'apertura di fori, anche di notevole estensione, nelle pareti murarie. Per neutralizzare le spinte delle sempre più slanciate curve gotiche furono utilizzati archi rampanti e pinnacoli, mentre le navate laterali delle grandi cattedrali gotiche avevano il significato statico di supporto per le volte centrali. A partire dal 1120-1130 fa la sua comparsa l'arco a sesto acuto, che cominciò ad essere preferito a quello a tutto sesto per i vantaggi statici e una maggiore libertà nel regolare l'altezza e la dimensione degli spazi.

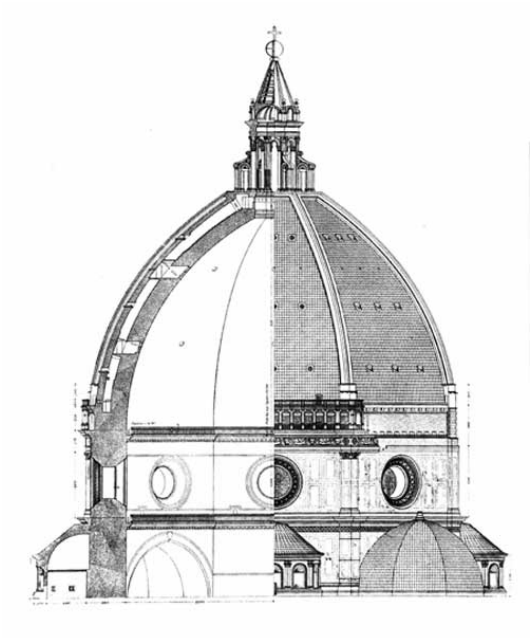


FIGURA 2.5 - CUPOLA DI S. MARIA DEL FIORE, FIRENZE

Sintesi della filosofia del XV secolo è la cupola di S. Maria del Fiore di Brunelleschi, nella quale il riferimento ed espedienti propri dell'architettura classica si sposta con la moderna tecnologia derivante dall'architettura gotica (Figura 2.5). La cupola si presenta, così come il Pantheon, come una successione di corsi orizzontali, alleggerita grazie all'espediente di una doppia calotta con intercapedine su uno scheletro di otto costoloni rampanti, inoltre, al profilo semicircolare classico, Brunelleschi preferì quello ogivale per ridurre le spinte laterali. Nel Rinascimento la riscoperta delle forme classiche si concilia quindi con le tecniche costruttive moderne; volte a vela, cupole e volte a padiglione vengono reimpiegate in opere a carattere civile e religioso. Il carattere rinascimentale per la ricerca di equilibrio compositivo è chiaro nei manuali e nei trattati, che proprio in questo periodo iniziano a svilupparsi e a diffondersi.

2.2.1.2 Evoluzione della tecnologia metallurgica

L'utilizzo in edilizia del ferro è strettamente legato all'evoluzione dei processi metallo-tecnici, quelle operazioni che portano alla produzione del metallo (riduzione del minerale) e alla sua messa in forma (forgiatura). In natura non si rinviene ferro puro, il quale si trova infatti in minerali costituiti da ossidi, come la magnetite,

l'ematite e la siderite. Per estrarre il ferro è quindi necessario rimuovere le impurità tramite un processo che prende il nome di *riduzione con carbonio* in una fornace di riduzione a temperatura di circa 2000 °C. L'ossidoriduzione permette la distruzione della struttura cristallina e la liberazione degli atomi di ferro che, liberi di muoversi, sono in grado di aggregarsi e di formare il metallo.

Il ferro fa la sua prima comparsa nel X secolo a.C., sostituendosi ben presto all'uso di rame e bronzo sia nella produzione di armi per la guerra che di attrezzi per l'agricoltura. Le temperatura ancora insufficiente dei forni alimentati a legna (circa 800 °C), non permetteva l'espulsione delle impurità dai minerali ricavati principalmente da meteoriti. Con l'introduzione di mantici, prima a mano e poi, nel Medioevo, azionati dalla forza idraulica, si riuscirono ad ottenere temperature notevolmente più alte, fino a 1150°C. Il risultato di tale procedimento "a riduzione diretta" dei minerali era una massa spugnosa di ferro e scorie, detta *bluma*, che tramite un primo processo di raffinazione, veniva lavorata in lingotti o barre, che fornivano la materia prima, un metallo il più puro possibile, per il processo di *forgiatura* (o *fucinatura*). La *fucinatura* del prodotto, che consisteva in cicli di deformazione plastica a caldo fino ad ottenimento del prodotto finito, fu meccanizzata tramite l'uso di magli ad energia idraulica.



FIGURA 2.6 - ILLUSTRAZIONE DI SIDNEY E. KING. RICOSTRUZIONE DI UN SITO ARCHEOLOGICO DI PRODUZIONE DI FERRO.

Menicali (1992) descrive le principali lavorazioni a cui venivano soggetti i masselli di metallo grezzo nel processo di forgiatura a mano: la *stilatura* consisteva nella battitura del pezzo finalizzata al allungarne la dimensione assottigliandoli; la *spianatura* succedeva e affinava il processo di stilatura e veniva effettuata con una predella piana su cui si batteva con una mazza; la *rincalcatura* serviva a formare un ingrossamento sul pezzo di metallo, al contrario la *strozzatura*, provocava un assottigliamento; il processo di *piegatura* veniva condotto facendo piegare il metallo intorno all'incudine tramite martellate; la *foratura* e il *taglio* venivano eseguiti con speciali attrezzi, rispettivamente con punzoni e "taglioli, piccoli scalpelli che venivano battuti con la mazza. Tra le tecniche di assemblaggio più comuni troviamo la *saldatura* e la *rivettatura*: la prima si effettuava per martellatura a

caldo utilizzando alcune sostanze come argilla, sabbia e borace, con la finalità di eliminare gli ossidi di ferro che si formavano in superficie; la seconda tecnica prevedeva l'utilizzo di un rivetto, una barretta di metallo che univa ad incastro le due parti metalliche, poi battute per fissare l'unione (Menicali, 1992). Il processo di forgiatura era essenziale per garantire la qualità del prodotto finale, il principio che lo guidava è ben sintetizzato dal Milizia (1781): "Il ferro vuole poco fuoco e molto martello: il martello coll'avvicinare le parti ferree lo rende più compatto; e quando ha acquistato sotto al martello la forza di cui è capace, il fuoco non fa che diminuirla".



FIGURA 2.7 – RAFFIGURAZIONE DI BOTTEGA ARTIGIANA DAL TRATTATO DI GIORGIO AGRICOLA," L'ARTE DE' METALLI" TRADOTTO IN LINGUA TOSCANA DA MICHELANGELO FLORIO, FIORENTINO, (RIST. ANAST. CON PREFAZIONE DI L. FIRPO), TORINO, 1969

Oltre ai suddetti trattamenti meccanici erano utilizzati numerosi trattamenti termochimica per aumentare le caratteristiche di resistenza meccanica del prodotto, come ad esempio *tempra, ricottura*, *rinvenimento* e *cementazione*. Il metallo *temprato* veniva raffreddato molto rapidamente, immergendolo in acqua od olio, in modo da imprigionare il carbonio nella ferrite, fissandosi in una lega ferro-carbonio denominata *martensite;* il prodotto finale era quindi un metallo duro e rigido, ma talvolta troppo fragile. Il *rinvenimento* di un metallo temprato prevedeva che questo fosse nuovamente riscaldato a circa 350-400 °C e poi lasciato raffreddare lentamente, garantendo una maggiore elasticità al prodotto finale (Belli, Guideri, & La Salvia, 1996).

Solo nel XII secolo con lo sviluppo degli *alti forni*, si riuscirà a superare la temperatura di fusione del ferro (1535 °C) permettendo la liquefazione del metallo (processo di "riduzione indiretta") e la produzione della *ghisa*, un prodotto non fucinabile ad alto contenuto di carbonio. Tale conglomerato doveva essere affinato in masselli in ferro, sottoposti poi a forgiatura per ottenere l'oggetto finito.

In letteratura (Cavalieri, 1832; Curioni, 1860) troviamo riportata una classificazione della ghisa in *bianca, bigia* e *nera*, distinte a seconda della quantità di

carbonio presente, rispettivamente da un tenore minore ad una maggiore, che ne condiziona anche l'aspetto cromatico. In ugual modo viene classificato il ferro di fucina distinguendo due classi principali: *ferro dolce*, duttile e malleabile, ma facilmente ossidabile, e *ferro agro*, poco tenace e dotato scarsa duttilità, non adatto all'uso in edilizia.

Uno dei primi documenti in cui la produzione dell'acciaio è trattata sistematicamente è *De la Pirotechmia* del Biringuccio (1540), nel quale si percepisce come la lavorazione di elementi metallici fosse considerata un'arte più che un mero processo meccanico; la forgiatura a mano aveva infatti un costo molto alto e la qualità dei manufatti, nonostante la limitata tecnologia disponibile, è ad oggi tangibile (Collini & al., 2014).

Con l'avvento, nei primi del Settecento, del carbon fossile (*coke*) a sostituzione di quello a legna, si verifica una trasformazione radicale del sistema siderurgico. La possibilità di ottenere maggiori temperature permisero la produzione di vera e propria ghisa e la sua diffusione in edilizia, che rispetto all'acciaio dolce (C<1,5%) presenta una maggiore durezza e resistenza alla corrosione. Successivamente, l'ideazione del *forno a riverbero* (1784) da parte di Henry Cort consentì la produzione di un metallo nettamente migliore, il cosiddetto *ferro pudellato* (*to puddle*: rimestare), una lega tre volte più resistente a trazione della ghisa. In questi forni la materia prima, ghisa e ossidi di ferro, veniva introdotto in un crogiolo, il *puddle*, scaldato per riverbero dalla fornace fino ad una temperatura di 1400°C. Ad ossidazione ultimata la massa fusa veniva lasciata raffreddare e ancora incandescente veniva avviata alla forgiatura.

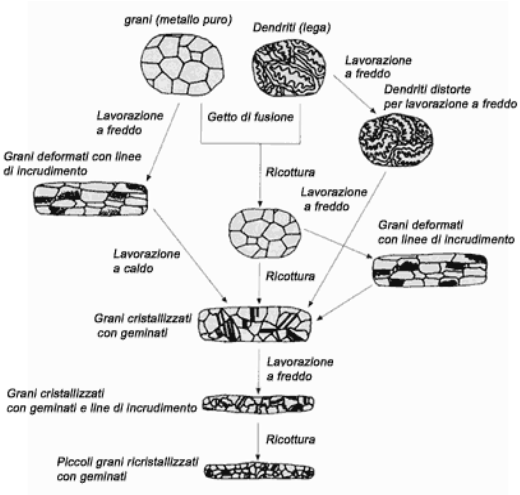


FIGURA 2.8 - SCHEMA DELLE MODIFICHE MICROSTRUTTURALI DI UN METALLO (APPARTENENTE AL SISTEMA CUBICO A FACCE CENTRATE, ESAGONALE O OTTAEDRICO) SOTTOPOSTO A TRATTAMENTI MECCANICI E TERMICI. SCOTT D. A., METALLOGRAPHY AND MICROSTRUCTURE OF ANCIENT AND HISTORIC METALS, MALIBU, 1991

Nello stesso periodo Benjamin Hutsman, a Sheffield, sperimentava una nuova tecnica, una lavorazione che, grazie all'uso di crogioli in argilla e al raggiungimento di

temperature superiori (1600°C), permise di ottenere un materiale più puro, a basso contenuto di carbonio, l'*acciaio* (C=0,1-1,2%). La produzione fu successivamente migliorata con l'avvento del *convertitore Bessemer* (1856) e con i forni Martin e Siemens (1865), che permisero di ridurre i costi di produzione mantenendo il livello di qualità del nuovo prodotto. La fortuna di questa nuova lega e il conseguente uso in edilizia è dovuta alle sue proprietà chimico-fisico-meccaniche nettamente superiori a quelle del ferro dolce e della ghisa, garantite da una omogenea distribuzione del carbonio nell'acciaio, presente sotto forma di cementite. Cavalieri nelle sue *istruzioni di architettura statica e idraulica* dedica una intera seziona alle qualità e agli usi architettonici del ferro, che valuta "fra tutti i metalli il più utile nell'arte di fabbricare". Secondo tale Autore, il ferro risulta utilissimo nella carpenteria lignea come anche nelle costruzioni in muratura, sia per assicurare le congiunzione e incatenare le diverse parti dell'edificio, oltre ad essere estremamente funzionale in riferimento al suo aspetto strutturale quanto decorativo. Non tutti i trattasti italiani manifestano una idea così positiva, facendo anzi trasparire una sorta di diffidenza nei confronti di questo materiale nel suo uso strutturale, richiamando il Vignola nel suo motto "le fabbriche non si hanno da reggere colle stringhe".

La resistenza meccanica delle catene antiche è legata alle caratteristiche del metallo di cui sono costituite, in Tabella 2.1 sono riportate le diverse tensioni di snervamento associate alla produzione nei diversi periodi (Pipinato, 2010).

TABELLA 2.1 - TENSIONE DI SNERVAMENTO RISPETTO ALL'EPOCA (PIPINATO, 2010)

Epoca	Metallo	Tensione di snervamento (MPa)
-	Ferro	80 - 100
-	Ferro battuto	159 - 221
-	Ghisa	137
Prima 1905	Acciaio	172
1905-1932	Acciaio	206
1933-1963	Acciaio	227
dopo il 1963	Acciaio	248 e superiori

2.2.1.3 Sintesi cronologica

X sec. a.C.: primo utilizzo del ferro meteoritico, cotto in forni a legna e battuto a mano

XII sec.: introduzione degli alti forni, sviluppo di procedimenti meccanici per l'aumento delle temperature e nella lavorazione

è produzione di *ghisa;*

XVIII sec.: utilizzo del *coke* (carbon fossile) e dei forni a riverbero (1784, H. Cord)

è produzione di ferro pudellato;

XIX sec.: avvento del convertitore Bessemer (1856) e con i forni Martin e Siemens (1865)

è produzione di *acciaio.*

2.2.1.4 I tiranti nella letteratura tecnica tra il XV e il XIX secolo

La manualistica italiana tra il XV e il XIX secolo concentrò la propria sulla classificazione tipologica delle strutture voltate mediante una adatta nomenclatura e sulla loro costruzione geometrica. A questa articolata materia si associano anche primi principi di statica, ancora empirici e per lo più legati all'utilizzo di un adeguato spessore murario o all'affiancamento di piedritti. Nonostante la tecnica maggiormente diffusa per contrastare le spinte dell'arco fosse la costruzione di piedritti e rinforzi murari, già nel XV secolo Leon Battista Alberti, nel suo trattato *De re Aedificatoria*, consiglia l'impiego di catene metalliche abbinate ad archi a sesto ribassato.

Per ragioni puramente estetiche le catene venivano normalmente evitate o nascoste, nonostante fosse noto che le catene intradossali, poste alle reni dell'arco, risultassero maggiormente efficaci. Francesco di Giorgio Martini fa una prima classificazione delle catene in chiavi "vive" e in chiavi "morte"; le prime si riferiscono alle catene intradossali, che rimanevano a vista, le seconde alle catene estradossali, poste "infra la grossezza d'essa volta e il pavimento, acciò che nascose e non apparenti sieno".

Sebbene le catene fossero diventate d'uso consolidato a partire dal XV secolo, continue erano le discussioni sull'estetica di questi elementi, e talvolta ne era anche contestata l'efficacia nel prevenire crolli o dissesti statici (Cornaro, Vignola, Gallacini), Teofilo Gallinacci (1564-1641) nel suo *Trattato sopra gli errori degli architetti* scrive, in relazione alle volte a sesto ribassato, che "contro la violenza loro non si può fare altra resistenza, che colla grossezza della muraglia; mentre è grandissimo errore il fidarsi delle catene, che spesse volte si son vedute rotte". Considerazioni riprese, in un'ottima maggiormente critica, anche dal Caleca nel suo *Tecnologie di consolidamento delle strutture murarie* dove le critiche più incisive riguardano le azioni localizzate dei ritegni terminali, di cui si contestava l'indebolimento della massa muraria e quindi il venir meno della funzione del tirante, e il fatto che funzionasse da contrasto ma non eliminasse le cause dell'instabilità delle murature (Caleca & De Vecchi, 1987).

Una seconda categorizzazione delle catene, oltre a quelle "vive" e "morte", dipende dal materiale di cui erano costituite. I tiranti lignei, i più antichi, sfruttano le proprietà di grande resistenza a trazione del legno, tipicamente il rovere o il larice, e sono dall'antichità utilizzati come accorgimento tecnico costruttivo nelle zone a pericolosità sismica elevata; possiamo ritrovare dei primi utilizzi negli archi del matroneo di Santa Sofia a Costantinopoli, queste originali catene in legno di cedro incise e decorate sono poi state sostituite (forse nel XVIII sec) da tiranti metallici (Tampone, 1983). Catene lignee compaiono con grande frequenza, con scopi sia strutturali che decorativi, in numerosi edifici in tutta Italia; a Venezia, per esempio, nella cattedrale di Torcello (XI secolo d.C.), a Santa Maria dei Miracoli di Piero Lombardo e nella Chiesa dei Frari; a Roma in San Giovanni e Paolo; a Firenze tra le calotte della cupola di Santa Maria del Fiore. Secondo Venditti nel suo trattato sull'*Architettura bizantina nell'Italia meridionale*, i tiranti lignei, imponendosi come elementi orizzontali, avevano anche lo scopo di ridurre la verticalità dello spazio. Il legno è però molto sensibile a variazioni di temperatura e umidità, che provocano variazioni dimensionali talvolta notevoli, soprattutto nelle connessioni, motivo per cui le teste venivano ancorate tramite zanche metalliche al capochiave in ferro inserito nella muratura.

Grazie all'evoluzione delle tecniche costruttive e al continuo miglioramento delle qualità del ferro, i tiranti metallici sostituirono quasi totalmente l'impiego di quelli lignei. Come riporta Giuseppe Astrua nel suo *Manuale completo del capomastro assistente edile* (1995) le catene erano "fatte d'ordinario con lame di ferro o sbarre a sezione rettangolare compresa tra un minimo di mm 40x8 ed un massimo comune di mm 60x12". Alle estremità un occhiello era ottenuto girando a caldo la catena per almeno tre giri, in questa asola si faceva entrare il paletto o bolzone, che si incastrava nella parete per un altezza di circa 0,80-1,20 chiamando alla contro-azione della spinta una corrispondente massa di muro. I capochiave, anticamente a forma di paletto, erano ottenuti mediante battitura a caldo per ottenere una buona resistenza all'ossidazione, mostravano una sezione pseudo-rettangolare, sagomati a cuneo, per evitare scivolamenti verso il basso e per poter eserciate una forza di trazione nella catena (pretensionamento). In alternativa, per motivi estetici, le catene, dette estradossali, erano poste "sopra l'aggraziatura al filo dell'intradosso; in questo caso però si aumenta l'efficacia della catena con una controchiave, collegata alla catena, scendente verso il piano utile e fissata al bolzone allungato internamente". Tali elementi obliqui, che prendono anche il nome di "braghettoni", partivano da circa un terzo della catena e si

estendevano fino all'imposta della volta, ricongiungendosi con il capochiave allungato.

In presenza di catene formate da più elementi (la lunghezza era intatti limitata dalla tecnologia metallurgica) si realizzavano nodi intermedi provvisti di perni a cuneo che consentivano di porre in pre-trazione il tirante; Carbonara cita tra i vari dispositivi di tesatura anelli e caviglie, saldature (giudicate però poco efficaci) e manicotti, posti in posizione centrale tra le due barre, in grado di avvicinare le due teste tra loro.

Nel caso la catena fosse unica, il pre-tensionamento si otteneva riscaldando opportunamente la barra, provocando quindi un allungamento che al raffreddarsi del ferro sarebbe stato recuperato; inserendo dei cunei nella fase di massimo allungamento, si otteneva, col successivo accorciamento, una forza contraria alla spinta. I cunei potevano essere inseriti negli anelli agli estremi della barra, all'interno degli occhielli preposti all'inserimento del paletto (Carbonara, 1942). Era pratica comune ripetere l'operazione di tesatura periodicamente per ripristinare il tiro nel tirante.

2.2.2 CARATTERISTICHE DEI TIRANTI

"**Catena**: lunga e grossa versa di detto la quale si mette da una muraglia all'altra per tenerle collegate insieme e render saldi e freni i lori recinti, e specialmente le fiancate delle volte. Si congegnano fortemente tali catene con alcuni pezzi di simigliante verga di ferro chiamati *paletti* che si fanno passare per un occhio posto alle loro testate, il che si dice *incatenare*. Quel pezzo poi di rame o ferro con cui negli edifizj si tendono unite insieme con pietre si chiama *Arpese."* (Cherubini, 1814)

Nella definizione dataci dal Cherubini ritroviamo gli elementi più importanti costituenti i tiranti:

- Il **tirante**: un'asta di ferro a sezione circolare o rettangolare, di varia lunghezza;
- Gli **organi di ritegno**: elementi che hanno il compito di ancorare il tirante alla muratura, per esempio capochiave a paletto o imbracature di paletti e traverse;
- **Giunti di connessione a forchetta** che servono per il collegamento di più tiranti nel caso la luce da coprire fosse maggiore della lunghezza del singolo pezzo; possono essere a spinotto o a manicotto a vite;
- **Giunti di tensione a vite:** elementi posti in mezzeria (a gabbia o a manicotto) o nelle regioni terminali del tirante (a dado e vite).

2.2.2.1 Il tirante

La funzione del tirante è quella di contrastare forze orizzontali, che, in sua assenza, sarebbero assorbite dall'apparato murario. Tali presidi sono quindi utili in presenza di elementi spingenti (archi, volte, …) o in zone a pericolosità sismica rilevante, per assicurare un comportamento scatolare dell'edificio in muratura. Le dimensioni e la distribuzione di questi elementi dipendeva dalla tipologia e dall'entità delle messa in gioco nonché dalla possibilità di riaprire sulla muratura la forza assorbita dalla catena (Carbonara, 1942).

I tiranti sono normalmente realizzati con elementi mono-dimensionali in acciaio, mentre un tempo era frequente anche l'uso del legno e poi del ferro. In tempi moderni viene preferita la sezione circolare, ma la sezione più diffusa nei tiranti storici è quella rettangolare (Astrua, 1995). La sezione delle catene antiche non si può considerare uniforme su tutta la lunghezza a causa delle tecniche di produzione (forgiatura a mano) e delle alterazioni conseguenti a processi chimici-fisici nel tempo (corrosione, maneggiamenti, urti) (Lagomarsino & Calderini, 2005). Innovativo il "Metodo Morandi" che prevede l'utilizzo di trefoli di acciaio armonico per il ripristino e consolidamento dell'apparato murario (Morandi, 1970).

La posizione meccanicamente più opportuna del tirante si trova all'altezza delle reni dell'arco, misura dipendente dalla geometria curva, dalla qualità dei materiali e dalla tecnologia utilizzata, ma empiricamente stimata sulla sezione inclinata di circa 30/35 gradi dall'orizzontale, più o meno ad un terzo della freccia. Il posizionamento della catena in diversa posizione ne inficia l'efficacia ed è subordinata a necessità di ordine estetico o funzionale (eccessivo abbassamento dell'altezza utile de vano per esempio); è possibile quindi rinvenire tiranti nello spessore della volta o sopra di essa. I tiranti nella loro funzione di presidio sismico trovano maggior significato se posizionati a ridosso di pareti murarie, ortogonali a quelle da presidiare, a livello dei solai; è comunque possibile allontanarsi dalle pareti trasversali se il solaio ha caratteristiche tali da garantire da solo l'assorbimento del tiro delle catene, così come si possono applicare tiranti in adiacenza alle pareti trasversali anche in posizioni intermedie nell'interpiano.

2.2.2.2 Organi di ritegno o Capichiave

Gli organi di ritegno, o capichiave, svolgono la duplice funzione di ancorare il tirante alla muratura e di trasmettere nel modo più diffuso possibile le sollecitazione di

compressione; i capichiave vengono dimensionati a flessione e la regola dell'arte prevede che prima del loro inserimento vengano migliorate, localmente e se necessario, le caratteristiche della muratura.

Tradizionalmente (Mastrodicasa, 1993) vengono distinti a seconda della forma in:

- **Capochiave a paletto (o bolzone)**: i più antichi, venivano ottenuti mediante battitura a caldo per migliorare la resistenza all'ossidazione. Di sezione pseudo-rettangolare presentavano una sagoma a cuneo per migliorare l'attrito sulla muratura; venivano poi inclinati di circa 45° sull'orizzontale per eserciate l'azione di contrasto sia sul solaio che sul muro. La lunghezza di questi elementi è di circa 80÷120 cm (Figura 2.10);

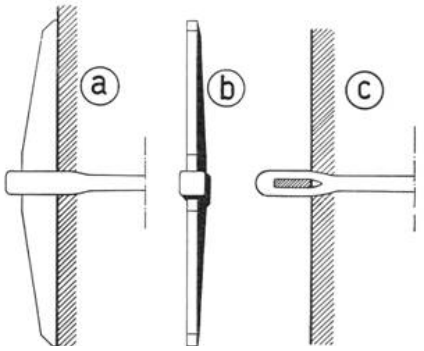


FIGURA 2.10 - CAPOCHIAVE A PALETTO: A) VISTA LATERALE B) VISTA FRONTALE C) VISTA ZENITALE.(MASTRODICASA, 1993)

- **Capochiave a piastra nervata**: tipicamente a forma circolare o quadrata (con diametro/lato di circa 30÷50 cm) sono successivi all'uso del paletto. Le nervature hanno la funzione di irrigidire la piastra migliorando il sistema di contrasto. I capochiave a piastra sono i migliori in caso di curative con scarse caratteristiche meccaniche, in quanto, rispetto ai c. a paletto, hanno una maggiore area di influenza. Talvolta i capichiave, se a vista, potevano svolgere anche una funzione decorativa assumendo forme araldiche (Figura 2.9);

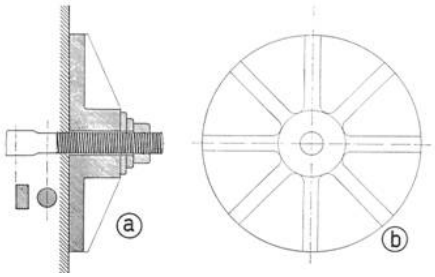


FIGURA 2.9 - CAPOCHIAVE A PIASTRA: A) SEZIONE B) VISTA FRONTALE. (MASTRODICASA, 1993)

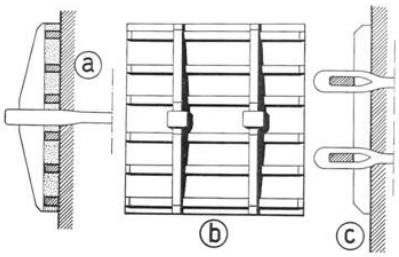


FIGURA 2.11 – CAPOCHIAVE AD IMBRACATURA DI TRAVERSI E PALETTI (MASTRODICASA, 1993)

- **Capochiave ad imbracatura di traversi e paletti**: questa configurazione è un ibrido delle prime due soluzioni, maggiormente elaborata, permette una diffusione delle forza su una zona di muratura più estesa (Figura 2.11);

- Ad oggi i capichiave si trovano in diverse forme, per esempio ad X con piattine di distribuzione, circolari con cunei o ad angolo.

Il vincolo imposto da questo sistema nel tempo può allentarsi e deteriorarsi, dipendentemente dagli avvenimenti e dalle sollecitazioni a cui viene sottoposto nel tempo, dalla qualità del materiale e della muratura, risulta per questo motivo molto difficile definire il grado di incastro della catena (Lagomarsino & Calderini, 2005).

2.2.2.3 Giunti di connessione e di tensione

Questi elementi hanno il compito di collegare due elementi differenti nel caso in cui, per motivi pratici e tecnologici, non sia possibile realizzare un unico tirante. La semplice saldatura dei pezzi, conseguita sovrapponendo e battendo a valor bianco le estremità delle barre, non era sufficiente a resiste alle tensioni dovute a variazioni dimensionali in relazioni alla temperatura, vennero perciò ideati dispositivi di unione e tensionamento, disposti in posizione centrale (Caleca & De Vecchi, 1987). Le tipologie sono le più varie (Mastrodicasa, 1993; Menicali, 1992):

- **Giunti a forchetta con spinotto**: il più utilizzato in antichità per collegare tiranti a sezione rettangolare, mantenendo in asse la sollecitazione di trazione. La bietta è completamente aderente agli occhielli della forchetta per ridurre al minimo il rischio di rifollamento. Gli occhielli sono dimensionati a trazione, taglio e rifollamento, mentre la bietta a flessione e taglio. Successivamente per dare tensione alla catena le due estremità venivano scaldate con il fuoco e veniva inserito, una volta incastrate, uno spinotto metallico nei tre occhielli sovrapposti in modo che, raffreddandosi il metallo si sarebbe accorciato trasmettendo la tensione determinata alla struttura;

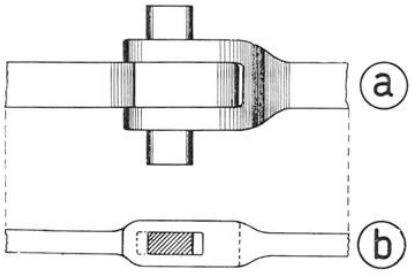


FIGURA 2.12 - GIUNTO A FORCHETTA CON SPINOTTO A) VISTA LATERALE B) VISTA ZENITALE. (MASTRODICASA, 1993)

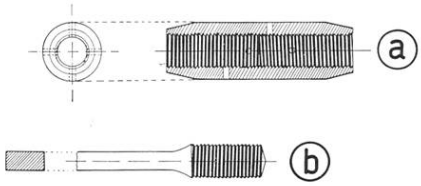


FIGURA 2.13 – GIUNTO A VITE E MANICOTTO. (MASTRODICASA, 1993)

- **Giunti a vite e manicotto** e **a vite e gabbia:** oltre alla funzione di unione assolvono anche quello di organo di tensione intermedio permettendo l'avvicinamento o l'allontanamento controllato dei due tronchi di catena. La filettatura è ottenuta previa ricalcatura a caldo. Il nucleo della vita è dimensionato a trazione, mentre la filettatura a taglio;

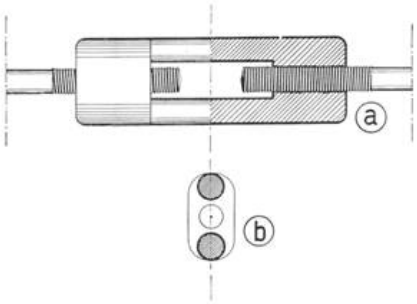


FIGURA 2.14 - GIUNTO A VITE E GABBIA. (MASTRODICASA, 1993)

- **Giunti di tensione terminale**: questi elementi sono preposti al tensionamento della catena e sono posti in prossimità dei capochiave a piastra e si compongono un dado a vite. Anche in questo caso la filettatura è ottenuta previa ricalcatura a caldo, in modo da non ridurre la sezione resistente a trazione.

2.3 METODI PER LA DETERMINAZIONE DEL TIRO

2.3.1 ACCENNI TEORICI

Ad oggi sono state proposte numerose tecniche per la determinazione dello sforzo assiale di tiranti in edifici antichi. Sono stati elaborati metodi statici e dinamici basati, rispettivamente, sulla misurazione degli spostamenti verticali a seguito dell'imposizione di carichi concentrati e delle accelerazioni legate alle frequenze fondamentali di vibrazione. La ricerca, ancora attuale e dibattuta, di nuove metodologie non distruttive si basano sulla ricerca di un modello analitico sempre più realistico, che allo stesso tempo permetta una esecuzione rapida della prova ed una elaborazione semplice dei dati.

2.3.1.1 Metodo Statico

Il metodo statico per la determinazione del tiro di un tirante prevede la valutazione del rapporto esistente tra la traccia teorica della trave non soggetta a sforzo di trazione e caricata con un generico peso P e la freccia rilevata corrispondente alla presenza contemporanea di uno sforzo di trazione H incognito e del carico P applicato (Pozzati, 1977). Il problema, condiviso anche dal metodo dinamico, sorge nella valutazione dei vincoli della trave, le soluzioni si trovano comprese, infatti, tra i due estremi teorici corrispondenti al caso di trave perfettamente incastrate e a quello di trave in semplice appoggio.

2.3.1.2 Metodo Dinamico

Il metodo dinamico si base sulla teoria della *corda vibrante* (Belluzzi, 1941), che permette di calcolare la forza assiale *H* presente in un'asta tramite la valutazione delle frequenze di vibrazione causate dall'applicazione di un impulso.

Tradizionalmente, il metodo trova la sua formulazione più semplice per tiranti che presentano una snellezza elevata, dove la rigidezza flessionale risulta trascurabile, riconducendosi alla teoria dei fili tesi (Mastrodicasa, 1993); tale ipotesi non è però sempre accettabile nella valutazione di catene antiche, spesso poco snelle. Risulta perciò necessario fare affidamento alla teoria delle vibrazioni trasversali di corde dotate di rigidezza flessionale o alla teoria delle travi prismatiche (Timoshenko, 1955). Come

per il metodo statico, la definizione delle condizioni di vincolo influiscono sulla bontà dei risultati nel calcolo del tiro a cui è sottoposta la catena.

Principi di dinamica dei sistemi lineari ad 1 GLD

Al fine di studiare gli aspetti fondamentali delle dinamica di una struttura si fa riferimento ad un sistema ad un grado di libertà. Le forze intrinseche al sistema rappresentate nel modello sono quella d'inerzia, concentrate nelle massa ***m*****,** la forza statica, legata alla rigidezza del sistema ***k*****,** e infine la forza dinamica, in rapporto al coefficiente di smorzamento viscoso ***c*** equivalente del sistema; le forze attive agenti sulla massa sono invece la generica forzate ***f(t)*** applicata al corpo. L'equazione di equilibrio dinamico di un sistema a un grado di libertà si può dunque scrivere come:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Le ipotesi formulate sono:

- *m, k, c* rimangono costanti durante le vibrazioni del sistema
- la forza *f(t)* dipende esclusivamente dal tempo
- la funzione *x(t)* rappresenta la soluzione del problema in termini di risposta della struttura.

Risposta dinamica di un tirante storico

Nel caso di una trave prismatica a sezione uniforme soggetta a sforzo normale costante e con vincoli elastici alle estremità, il suo moto di vibrazione libera è governato dell'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$-EJ\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (2.1)$$

Dove:

- *EJ* è la rigidezza flessionale della trave
- ρ è la densità lineare
- *y* è lo spostamento trasversale (funzione dell'ascissa *x* e del tempo *t*)
- *T* è la forza assiale

Le condizioni al contorno, di tipo statico e cinematico, integrano l'equazione differenziale:

$$y(0,t) = 0 \qquad y(l,t) = 0 \qquad (2.2\ \text{A,B})$$

$$EJ\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial^2 x} - k\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0 \quad EJ\frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial^2 x} - k\frac{\partial y(l,t)}{\partial x} = 0 \qquad (2.3\ \text{A,B})$$

Accenni di analisi di segnali

Un *segnale analogico* è una funzione *v* di una variabile *t*, chiamata tempo, appartenente all'insieme dei numeri reali **R**, o ad un suo intervallo. Un segnale può essere *di durata finita* o *periodico*. Il carico periodico più semplice è quello di tipo sinusoidale, nota anche come sollecitazione armonica. I carichi non periodici possono essere di breve durata o impulsivi, oppure di lunga durata o generici.

Si opera nel dominio del tempo ogni volta che i segnali vengono rappresentati come funzioni reali di una variabile realtà, detta tempo. É possibile altresì rappresentare lo stesso segnale nel dominio delle frequenze attraverso una *trasformazione* dei segnali stessi: da funzioni del tempo a funzioni complesse di una variabile complessa, la frequenza. Esistono vari tipi di trasformazioni, tra le più note: *trasformazione di Laplace,* la *trasformazione di Fourier,* e la *trasformazione di Fourier discreta* (per segnali a tempo continuo).

Lo *sviluppo in serie di Fourier* sottintende un principio molto importante per cui i segnali periodici, per ogni istante di tempo *t*, possono essere scritti come somma di funzioni armoniche con frequenze ω_n diverse tra loro, ma multipli interi di quella della forzante periodica f(t), con $\omega_n = n\omega_1$. *Formula di anti-trasformazione* o s*viluppo in serie di Fourier*, in ogni punto di continuità:

$$v(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} V^{\#}(h) \cdot e^{jh\Omega t}$$

Per i sistemi lineari, essendo applicabile il principio di *sovrapposizione degli effetti*, sarà quindi possibile determinare la risposta del sistema alla forzante periodica *f(t),* come somma delle risposte ai singoli contributi armonici di cui la forzante è composta.

La *trasformata di Fourier discreta (DFT)* $V^{\#}(\cdot)$ di un segnale v(·) periodico di periodo T, a volte indicata come $F_D[v(\cdot)]$ è una funzione complessa di variabile intera definita come:

$$V^{\#}(h) = \frac{1}{T}\int_0^T v(t) \cdot e^{-jh\Omega t}\, dt$$

$$\Omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

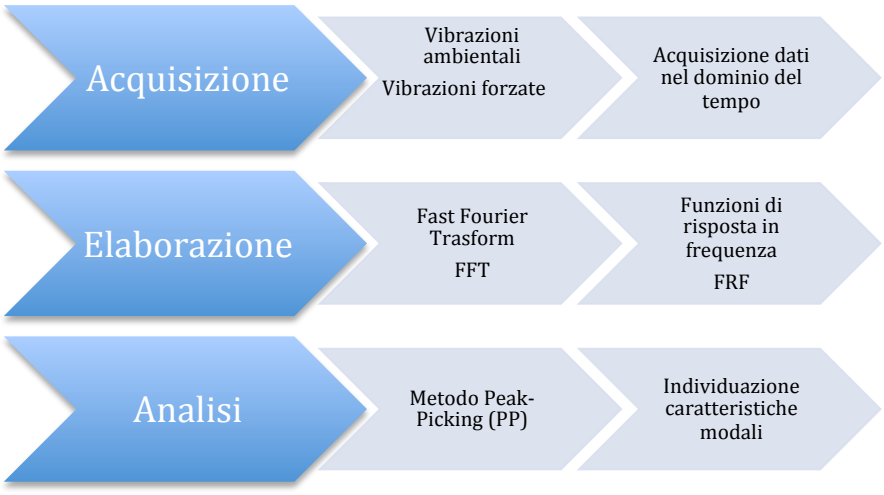
La principale ragione che rende importante la DFT è l'esistenza di algoritmi

veloci per il suo calcolo, che consistono nella decomposizione ricorsiva della DFT in trasformate di dimensioni ridotte ogni volta della metà. Tali algoritmi, proposti tra gli altri da Runge e Konig (1924) e da Cooley e Tukey (1965), sono chiamati *FFT* (*Fast Fourier Transform).*

Elaborazione del segnale

Dall'analisi delle acquisizioni accelerometriche è possibile determinare le caratteristiche dinamiche del sistema (frequenze proprie, smorzamenti modali e forme modali) mediante elaborazioni nel dominio delle frequenze o nel dominio del tempo (Vincenzi, 2007).

Gli algoritmi nel dominio delle frequenze possono essere ottenuti da acquisizioni in condizioni "ambientali" o "forzate", a seconda se l'elemento in analisi viene sollecitato meccanicamente. Le *funzioni di risposta in frequenza (FRF),* tipicamente ottenute per mezzo di analisi mediante la *Fast Fourier Trasform (FFT)*, consentono di determinare i periodi propri, gli smorzamenti (in caso di eccitazione forzata) e le deformate modali della struttura. Per individuare le caratteristiche modali della struttura nel dominio delle frequenze si utilizza il metodo *Peak-Picking (PP)*, ovvero andando ad esaminare i picchi del modulo della *FRF* che corrispondono alle frequenze proprie. Il metodo risulta efficace se lo smorzamento è modesto e se i modi sono ben separata tra di loro, in quanto il metodo, in realtà, identifica gli *operating deflection shape.* Il processo viene sintetizzato in figura:



2.3.2 METODI PROPOSTI

2.3.2.1 Briccoli Bati & Tonietti (1993)

Briccoli Bati e Tonietti (1993) propongono un approccio esclusivamente statico, con l'applicazione di tre estensimetri e la valutazione degli stati di tensione conseguenti all'applicazione di un carico P indipendentemente dalla stima del tipo di vincoli. Il modello proposto si riconduce al caso di un'asta soggetta a peso proprio e a forza normale di trazione costante. Il metodo, testato in laboratorio, permette di ottenere un buon compromesso tra la velocità di attuazione e di calcolo e l'errore di approssimazione dovuto al modello analitico e alle ipotesi considerate. Un'applicazione diretta della metodologia proposta è stata impiegata nel consolidamento strutturale (1992) del Duomo di San Leo .

Il metodo è stato successivamente criticato per essere estremamente sensibile dagli errori sperimentali e quindi inaffidabile (Beconcini, 1996).

2.3.2.2 Beconcini (1996)

La metodologia proposta per la determinazione sperimentale del tiro nelle catene degli archi e delle volte si basa sulla misurazione dell'inflessione per carichi statici trasversali (Beconcini, 1996). Il modello strutturale di riferimento prevede una riduzione degli errori di approssimazione grazie all'applicazione della tecnica di identificazione strutturale, basata sulla minimizzazione degli scarti fra le risposte sperimentali e le corrispondenti ottenute da un modello matematico. L'elaborazione dei dati delle prove consente di determinare i parametri incogniti: il tiro nella catena e le costanti di rigidezza dei vincoli. Test eseguiti in laboratorio hanno mostrato l'affidabilità del metodo, di contro è da evidenziare la laboriosità della prova *in situ* propria dei metodo statici, infatti, come riporta lo stesso Autore: "gli errori sperimentali, legati all'impreciso posizionamento dei carichi e degli strumenti di misura, possono influire in modo determinante sull'affidabilità dei risultati".

2.3.2.3 Briccoli Bati & Tonietti (2001)

Briccoli Bati e Tonietti (2001) propongono una procedura sperimentale che si

basa su una singola prova statica. Il modello strutturale considerato consiste in una trave dotata di rigidezza flessionale; i parametri incogniti rimangono il tiro H e la rigidezza dei vincoli alle estremità. Il metodo prevede la misurazione di tre spostamenti verticali sotto carichi statici concentrati e la misura della variazione di deformazione della sezione della trave sotto tali carichi. L'affidabilità della procedura proposta è stata testata in laboratorio, dimostrando una buona convergenza tra i dati sperimentali e quelli teorici. Il metodo è stato applicato con successo durante le operazioni di consolidamento strutturale del Duomo di San Leo (XII secolo) a Pesaro. La procedura è stata però criticata in quanto l'applicazione pratica di questo metodo non è computazionalmente semplice (Park, Choi, Oh, Stubbs, & Song, 2006).

2.3.2.4 Facchini, Galano & Vignoli (2003)

Facchini et alt. (2003) hanno portato a termine una serie di 48 test di laboratorio con la finalità di determinare l'affidabilità di due metodi per la determinazione della forza assiale ne tiranti metallici. Il primo metodo, detto "misto", consiste in una elaborazione della procedura ideata da Sorace (1996), ovvero un'identificazione numerica che si basa sulla misurazione di spostamenti verticali causati da un carico verticale (metodo statico) e delle frequenze di vibrazione fondamentali (metodo dinamico). Il secondo metodo indagato è di tipo statico, mediante la procedura descritta da Beconcini (1996). Le 48 prove sperimentali sono state condotte variando il tipo di vincolo, il livello di tensione e la snellezza della catena; i risultati dimostrano come il metodo statico fosse generalmente più attendibile di quello misto, specialmente nella determinazione della rigidezza dei vincoli. In particolare, il metodo misto presentava errori maggiori (maggiori del 20% rispetto al valore reale) per catene poco tese e per vincoli quasi fissi.

2.3.2.5 Dardano, Miranda, Persichetti & Valvo (2005)

Il metodo per la determinazione del tiro nelle catene proposto (Dardano, Miranda, Persichetti, & Valvo, 2005) si basa su prove sperimentali di tipo dinamico. Il tirante viene modellato come una trave tenso-inflessa, di geometria e massa note, dotata di incastri elastici ad entrambe le estremità. Attraverso un'unica acquisizione dinamica, eseguita con un accelerometro appositamente collocato, si determina lo spettro di risposta in frequenza tramite la trasformata rapida di Fourier. A partire dai valori delle prime frequenze proprie si identificano, per via numerica, i parametri strutturali

incogniti, cioè il tiro *N* e il grado di incastro *G*. Il metodo è stato testato tramite sperimentazioni *in situ* (torre campanaria della Cattedrale di Ruvo in Puglia) ed in laboratorio dimostrandone l'efficacia.

2.3.2.6 Lagomarsino & Calderini (2005)

Lagomarsini e Calderini (2005) propongono un metodo di identificazione dinamica utilizzando le prime tre frequenze proprie della catena, misurate tramite prova dinamica. Il modello strutturale prevede una trave a sezione uniforme dotata di incastri elastici soggetta a sforzo assiale. Le incognite (il tiro, la rigidezza flessionale della sezione e la rigidezza dei vincoli) sono calcolate tramite l'applicazione di metodi numerici, basati sulla minimizzazione dell'errore. La validità del metodo è stata testata su un certo numero di catene tramite modelli FEM. Gli autori hanno infine calcolato l'influenza di disomogeneità della rigidezza lungo l'asse e delle condizioni di vincolo sulla stima del tiro.

2.3.2.7 Park et al. (2006)

L'identificazione dinamica proposta da Park et al. (2006) su barre ad alta tensione si basa su analisi di sensitività sulle frequenze e sulle forme modali. Tale metodo si propone di identificare non solo la forza di trazione, ma anche altri parametri quali la rigidezza dei vincoli. Il metodo è stato validato da una buona congruenza tra i dati sperimentali e numerici. Nonostante da buona attendibilità del metodo è da evidenziare l'onerosità di calcolo che l'implementazione di modelli FE richiede, in particolare nella definizione della matrice di sensitività del modello.

2.3.2.8 Tullini & Laudiero (2008)

Tullini e Laudiero (2008) propongono un metodo di identificazione dinamica che si basa sulla determinazione del tiro e della rigidezza dei vincoli a partire dalla prima frequenza propria della catena e su tre delle componenti della corrispondente forma modale (*v1, v2, v3*). Il modello meccanico si basa su ipotesi di caratteristiche meccaniche e geometriche (μ, A, E, J) costanti su tutta la lunghezza della catena. Test condotti in laboratorio e *in situ* (Palazzo di Federico il Moro a Ferrara, Monastero di S. Gregorio Armeno a Napoli) hanno confermato la bontà del metodo.

2.3.2.9 Garziera & Collini (2008)

Garziera e Collini (2008) presentano una tecnica non-distruttiva per l'identificazione *in situ* dello stato di sollecitazione di catene in edifici storici basata su prove dinamiche tramite la misurazione dalle prime quattro frequenze naturali. Un modello numerico basato sul metodo di Rayleight-Ritz è adottato per riprodurre il comportamento dinamico della catena. Il modello analitico sviluppato dalla teoria della trave di Timoshenko, tiene in considerazione una sezione trasversale non-uniforme e la cedevolezza dei vincoli alle estremità, modellando gli ancoraggi come letti elastici la cui rigidezza è un parametro incognito. La tecnica è stata applicata alle catene della navata centrale del Duomo di Parma.

2.3.2.10 Amabili, Carra, Collini, Garziera & Panno (2010)

Amabili, Carra, Collini, Garziera, and Panno (2010) sviluppano il metodo ideato da Garziera e Collini (2008). Le prime frequenze naturali della catena sono identificate sperimentalmente misurando la funzione di risposta in frequenza (FRF). Il vantaggio di tale metodo risiede nella semplicità di esecuzione e nell'acquisizione di dati sovrabbondanti rispetto ai parametri incogniti riduce gli errori di modellazione garantendo risultati più precisi. A sfavore di tale metodo viene evidenziato l'elaborato processo di minimizzazione degli errori.

2.3.2.11 Luong (2010)

Luong a seguito di un'analisi parametrica sull'influenza delle proprietà geometriche e meccaniche dei tiranti sulle caratteristiche dinamiche del sistema presenta dei grafici di riferimento per la stima del tiro. I tre grafici di riferimento presentati rappresentano le tre situazioni di vincolo teoriche: cerniera-cerniera, incastro-cerniera e incastro-incastro e il modello utilizzato è quello di trave di geometria e massa note, con sezione trasversale costante. Il metodo proposto è stato successivamente testato in laboratorio riportando una buona attendibilità dei risultati.

2.3.2.12 Tullini, Rebecchi & Laudiero (2011)

Tullini, Rebecchi e Laudiero (2011) propongono un metodo statico per l'identificazione del carico assiale di un elemento strutturale prismatico, note la geometria e le proprietà elastiche, modellato come una trave ad incastri elastici. Gli

autori dimostrano come il metodo risulti molto accurato se il carico verticale viene applicato in mezzeria, mentre sia più fallace se posizionato in prossimità delle estremità. Il metodo analitico è stato convalidato da test sia numerici che sperimentali.

2.3.2.13 Rebecchi, Tullini & Laudiero (2013)

Rebecchi, Tullini e Laudiero (2013) propongono un metodo di identificazione dinamica che si basa sulla determinazione del tiro e della rigidezza dei vincoli a partire dalla prima frequenza propria della catena e su cinque delle componenti della corrispondente forma modale (*v0, v1, v2, v3, v4*). Tale metodo non richiede che sia nota l'effettiva lunghezza della catena in esame, ma solamente la sua rigidezza flessionale e la sua densità lineare. L'algoritmo proposto è stato validato da numerosi test numerici e sperimentali su catene aventi differenti condizioni di vincolo, ottenendo un'ottima stima del tiro. In ultimo è stata analizzata l'influenza della posizione degli strumenti di misura sulla determinazione dello sforzo assiale.

2.3.3 CONCLUSIONI

Si propone qui una sintesi delle metodologie sopracitate in uno schema (Tabella 2.2) che tiene conto del metodo di studio utilizzato (statico/dinamico), del modello meccanico proposto, dei parametri incogniti scelti (es.: forza assiale, rigidezze dei vincoli di estremità, …), degli strumenti necessari a svolgere la prova e infine delle prove attuate per convalidare il metodo (in situ / di laboratorio).

TABELLA 2.2 - SINTESI DELLE METODOLOGIE ANALIZZATE

Medoto	Tipologia metodo	Modello	Incognite	Strumenti	Prove
Briccoli Bati & Tonietti (1993)	Statico	Asta soggetta a peso proprio e a forza normale di trazione	Sforzo assiale	3 estensimetri	✕ in situ ✓ in laboratorio
Beconcini (1996)	Statico	Asta soggetta a peso proprio e a forza normale di trazione, con vincoli a risposta lineare	Sforzo assiale Costanti di rigidezza dei vincoli	3 estensimetri, applicati ai quarti e in mezzeria	✓in situ ✓in laboratorio

Briccoli Bati & Tonietti (2001)	Statico	Asta soggetta a peso proprio e a forza normale di trazione	Sforzo assiale Costanti di rigidezza dei vincoli	3 estensimetri, applicati ai quarti e in mezzeria	✓in situ ✓in laboratorio
Dardano, Miranda, Persichetti & Valvo (2005)	Dinamico	Trave tenso-inflessa, di geometria e massa note, dotata di incastri elastici ad entrambe le estremità	Sforzo assiale Costanti di rigidezza dei vincoli	1 accelerometro	✓in situ ✓in laboratorio
Lagomarsino & Calderini (2005)	Dinamico	Trave tenso-inflessa, di geometria e massa note, dotata di incastri elastici ad entrambe le estremità	Sforzo assiale Costanti di rigidezza dei vincoli Rigidezza flessionale	1 accelerometro, martelletto strumentato	✓in situ ✓in laboratorio
Park et al. (2006)	Dinamico	Barre ad alta tensione	Sforzo assiale Costanti di rigidezza dei vincoli	1 accelerometro, martelletto strumentato	✓in situ ✓in laboratorio
Tullini & Laudiero (2008)	Dinamico	Trave tenso-inflessa, di geometria e massa note, dotata di incastri elastici ad entrambe le estremità	Sforzo assiale Costanti di rigidezza dei vincoli	3 accelerometri, martelletto strumentato	✓in situ ✓in laboratorio
Garziera & Collini (2008)	Dinamico	Trave semplicemente appoggiata a sezione prismatica non uniforme, i vincoli sono assunti come letti elastici di Winkler	Sforzo assiale Costanti di rigidezza dei vincoli Lunghezza libera di vibrazione	1 / 2 accelerometri, martelletto strumentato	✓ in situ ✗ in laboratorio
Amabili, Carra, Collini, Garziera & Panno (2010)	Dinamico	Trave semplicemente appoggiata a sezione prismatica non uniforme, i vincoli sono assunti come letti elastici di Winkler	Sforzo assiale Costanti di rigidezza dei vincoli Lunghezza libera di vibrazione	1 / 2 accelerometri, martelletto strumentato	✓ in situ ✗ in laboratorio

Luong (2010)	Dinamico	Trave tenso-inflessa, di geometria e massa note. Si considerano tre condizioni di vincolo teoriche.	Sforzo assiale	3 / 5 accelerometri	✕ in situ ✓in laboratorio
Tullini, Rebecchi & Laudiero (2011)	Statico	Trave tenso-inflessa, di geometria e massa note, dotata di incastri elastici ad entrambe le estremità	Sforzo assiale Costanti di rigidezza dei vincoli	3 estensimetri	✕ in situ ✓in laboratorio
Rebecchi, Tullini & Laudiero (2013)	Dinamico	Trave tenso-inflessa, di geometria di sezione e massa note.	Sforzo assiale Costanti di rigidezza dei vincoli	5 accelerometri, martelletto strumentato	✕ in situ ✓in laboratorio

A partire dallo studio della letteratura tecnica, tra tutti, sono stati scelti tre metodi da convalidare, scartando quelli già superati o migliorati da successivi studi e considerando le sole metodologie riferite all'approccio dinamico.

I metodi analizzati nel capitolo 4 sono:

- **Teoria dei fili tesi**
- **Dardano, Miranda, Persichetti & Valvo (2005);**
- **Lagomarsino & Calderini (2005)**
- **Park et al. (2006)**
- **Tullini & Laudiero (2008);**
- **Garziera & Collini (2008) + Amabili et al. (2010)**
- **Luong (2010);**
- **Rebecchi, Tullini & Laudiero (2013)**

Di seguito sono riportate le prime problematiche riscontrate nei metodi in esame:

Metodo	Problematiche evidenziate
Teoria dei fili tesi	Non tiene conto della rigidezza flessionale **EJ** della catena, considerate come funi; modello analitico non coerente con le caratteristiche dei tiranti storici

Dardano, Miranda, Persichetti & Valvo (2005)	Il **metodo non è applicabile** ai casi in esame, nonostante i risultati coincidano per i casi proposti nell'articolo di riferimento dando quindi la sicurezza di una corretta applicazione del metodo
Lagomarsino & Calderini (2005)	Il metodo computazionale è particolarmente oneroso, inoltre utilizzando i dati presentati nella pubblicazione scientifica in esame i risultati non convergono.
Tullini & Laudiero (2008)	Applicabile, non presenta particolari problematiche
Garziera & Collini (2008) **Amabili, Carra, Collini, Garziera & Panno (2010)**	Il metodo, per quanto appaia corretto e in linea con quanto definito dagli studi svolti, necessita di un'elaborazione di calcolo particolarmente onerosa, con la modellazione FE degli elementi e la minimizzazione, tramite cicli iterativi con variazione dei parametri incogniti (**T** e ***k***), della differenza degli autovalori (5-8 frequenze). L'acquisizione delle prime otto frequenze necessita l'installazione in situ di un numero elevato di sensori, determinando quindi un aumento delle tempistiche delle prove.
Luong (2010)	Il metodo semplificato proposto da Luong suggerisce un **range di valori**, è infatti una correzione della stima proposta dalla teoria dei fili tesi tenendo conto dei parametri che influenzano il comportamento dinamico dei tiranti.
Rebecchi, Tullini & Laudiero (2013)	Applicabile, non presenta particolari problematiche

3 SPERIMENTAZIONE

3.1 DATABASE

3.1.1 STUDIO PRELIMINARE

Al fine di poter elaborare e confrontare una grande quantità di dati è stato necessario capire quali parametri potessero influire sul comportamento strutturale e dinamico del tirante. Per migliorare l'ampliamento del database è stata predisposta una scheda di valutazione dell'elemento catena in fase di primo sopralluogo dell'edificio oggetto di studio. La scheda, elaborata con Excel di Windows, è composta da due sezioni:

- **Sezione 1: informazioni generali**
    i. Riguardanti l'operatore, la data di rilevamento e il numero di scheda
    ii. Riguardanti l'edificio e la sua contestualizzazione spazio-temporale (denominazione/datazione)
- **Sezione 2: raccolta dati**
    i. **Tabella A. VOLTA:** si richiede di specificare la tipologia di volta (*botte, crociera, padiglione...*) e i dati geometrici ad essa riferiti (spessore, freccia, luce, larghezza). E' utile riportare a lato una schematizzazione in pianta e in sezione della volta con l'indicazione delle catene presenti, numerate in riferimento alla tabella B.CATENE. Viene anche richiesto di fornire informazioni sulla finitura estradossale (impalcato/copertura; presenza di riempimento; accessibilità)
    ii. **Tabella B. CATENE**: Si richiede di specificare il numero totale di catene presenti, il tipo di sezione (*rettangolare/circolare*) e il materiale. In riferimento allo schema grafico rappresentato si specifichi per ogni catena le dimensioni della sezione (*base e altezza /*

diametro), la lunghezza e la presenza di manicotti o elementi lungo la luce (nelle *note*). Il calcolo dell'area e della media delle dimensioni sarà determinabile con foglio di calcolo

La scheda è stato utilizzata con profitto nei sopralluoghi e verifiche di alcuni dei Musei nazionali.

Il database è composto da più di 350 casi appartenenti a 22 differenti edifici di diverse epoche fornisce un buon inizio per una modellazione tipologica dei tiranti storici.

3.1.1.1 Scopo

Nello studio proposto, il database è stato utilizzato in tre momenti fondamentali:

- Immagazzinamento metodico e amministrazione dei dati provenienti da diverse fonti
- Fonte primaria di casi per l'analisi delle differenti tecniche di identificazione dinamica proposte, per poter quindi valutarne l'efficacia e la validità
- Caratterizzazione di un modello tipologico di tirante storico, utilizzato nella progettazione di prove in laboratorio

3.1.1.2 Architettura del database

Il database si articola in 4 sezioni principali:

- *Sezione 1: Edificio*. In questa sezione vengono riportate la denominazione dell'edificio e la sua datazione indicativa (in secoli)
- *Sezione 2: Volta*. I dati da inserire concernano la tipologia della volta e le sue caratteristiche geometriche (spessore, freccia, luce e larghezza)
- *Sezione 3: Catena*. Le informazioni presenti riguardano la geometria (sezione, lunghezza) e le caratteristiche materiche (materiale, densità, modulo di Young)
- *Sezione 4: Identificazione dinamica*. Sono qui riportate le frequenze principali.

3.1.1.3 Problematiche

Tra le difficoltà collegate allo sviluppo di un modello di validità generale una

complicazione deriva dall'insufficienza o dalla scarsa attendibilità dei dati. Infatti numerosi casi riportati non sono completi in ogni loro parte, specialmente nella definizione delle caratteristiche geometriche morfologiche di luoghi in cui sono poste. Le informazioni concernenti le volte presenti sono di carattere tipologico e geometrico, con la misurazione di freccia, luce e larghezza. Le tipologie maggiormente presenti sono quelle di volta a crociera, padiglione e a botte.

Anche in questo caso, per l'assenza di numerosi dati, non è stato possibile elaborare gli stessi per giungere a questioni di relazioni tipologiche o dimensionali tra la catena e la volta presidiata.

Un'ulteriore complicazione è legata alla scarsità dei dati, specialmente riguardanti la caratterizzazione degli edifici e la loro datazione. La tipologia maggiormente presente è quella di palazzo e di chiesa, non sono stati studiati esempi di edilizia minore. La datazione è varia: dal V-VII secolo (Chiesa di Santa Maria Assunta di Vobarno, BS) al XVII secolo (Seminario del Patriarcato di Venezia); sfortunatamente questo dato non da alcuna informazione riguardo alla datazione dei tiranti in esso contenuti, ignota la maggior parte delle volte. Il ridotto numero di edifici studiati non ha quindi permesso un'analisi a livello regionale e/o temporale.

3.1.2 ANALISI ED ELABORAZIONE DEI DATI

L'elaborazione dei dati raccolti nel database si propone di studiare in primo luogo le caratteristiche fisiche delle catene storiche e, in un secondo momento, le correlazioni tra le caratteristiche geometriche e dinamiche.

3.1.2.1 Caratteristiche geometriche

Le caratteristiche geometriche concernono principalmente la sezione e la lunghezza della catena.

Una prima essenziale divisione è relativa al tipo di sezione:

- **Sezione circolare**: questa sezione è ripida delle catene di recente impiego, per questo non sono state valutate nell'elaborazione del modello di tirante antico, presente nel 14% dei casi;
- **Sezione rettangolare**: appartenente alle catene più antiche, presente nel 86% dei casi.

Una seconda suddivisione può quindi operata per lunghezza, distinguendo:

- **Catene lunghe**: con una lunghezza maggiore dei 5 metri, rappresentative dei tiranti presenti nelle navate delle chiese. Dai dati raccolti la media di questo primo gruppo è **6,9 metri**.
- **Catene corte**: con una lunghezza minore dei 5 metri, rappresentative delle catene che si trovano nelle logge o negli archi. Dai dati raccolti la media di questo primo gruppo è **3,7 metri**.

Nello studio particolare della sezione rettangolare si è fatto riferimento sia alle dimensioni assolute e ai rapporti tra i lati della sezione sia al valore del momento di inerzia. Dai grafici riportanti in Figura 3.1 e in Figura 3.2, si mette a confronto la rigidezza *EJ* della sezione e l'area *A* della stessa, possiamo vedere come:

- Per le catene "corte" si possano individuare due gruppi, uno coincidente con il range delle catene lunghe, l'altro in un intervallo di valori minori (500-1000 mm^2)
- Considerando le sole catene "lunghe" ci sia una maggiore concentrazione di casi nell'intervallo di valori dell'area della sezione tra i 1500 e i 2500 mm^2 , mentre l'intervallo di rigidezza varia da $2*10^{10}$ a circa $6*10^{10}$

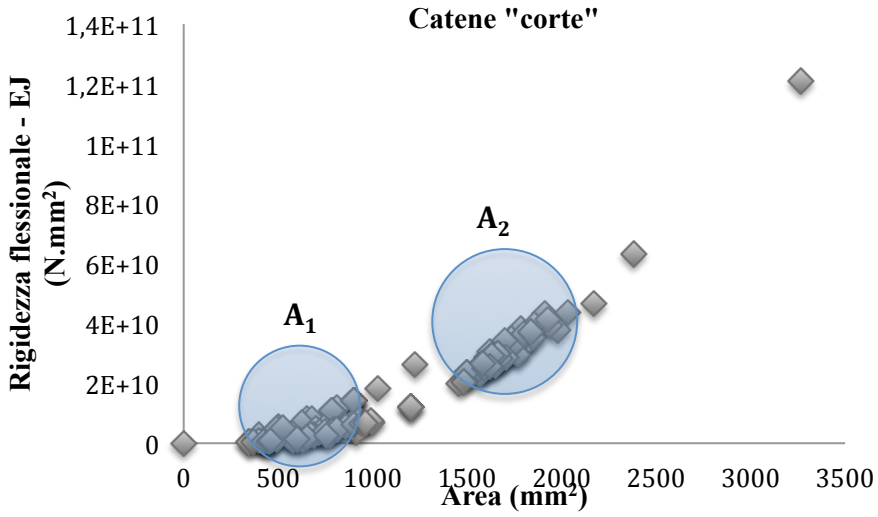


FIGURA 3.1 – GRAFICO CATENE "CORTE" A SEZIONE RETTANGOLARE, RAPPORTO TRA AREA E RIGIDEZZA FLESSIONALE.

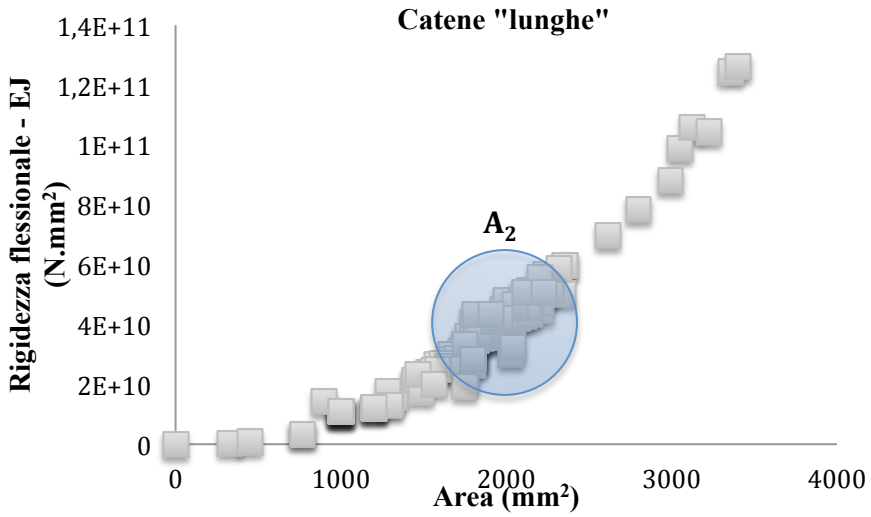


FIGURA 3.2 - GRAFICO CATENE "LUNGHE" A SEZIONE RETTANGOLARE, RAPPORTO TRA AREA E RIGIDEZZA FLESSIONALE.

Riassumendo:

TABELLA 3.1. MASSIMI E MINIMI – AREA E MOMENTO DI INERZIA

	"corte"		"corte" e "lunghe"	
	A_1 (mm^2)	J_1 (mm^4)	A_2 (mm^2)	J_2 (mm^4)
Min	344	1800	1456	95000
Max	1000	67000	2000	200000
Media	672	34400	1728	147500

Un successivo studio ha riguardato il rapporto tra la frequenza e la forma e le dimensioni della sezione trasversale. I risultati, riportati in Figura 3.3, mostrano come ci sia effettivamente una correlazione. Quando la forma della sezione è la stessa (circolare o rettangolare), la risposta in frequenza è simile; tali considerazioni sono supportate dallo studio parametrico sui tiranti storici svolto da Luong (2010).

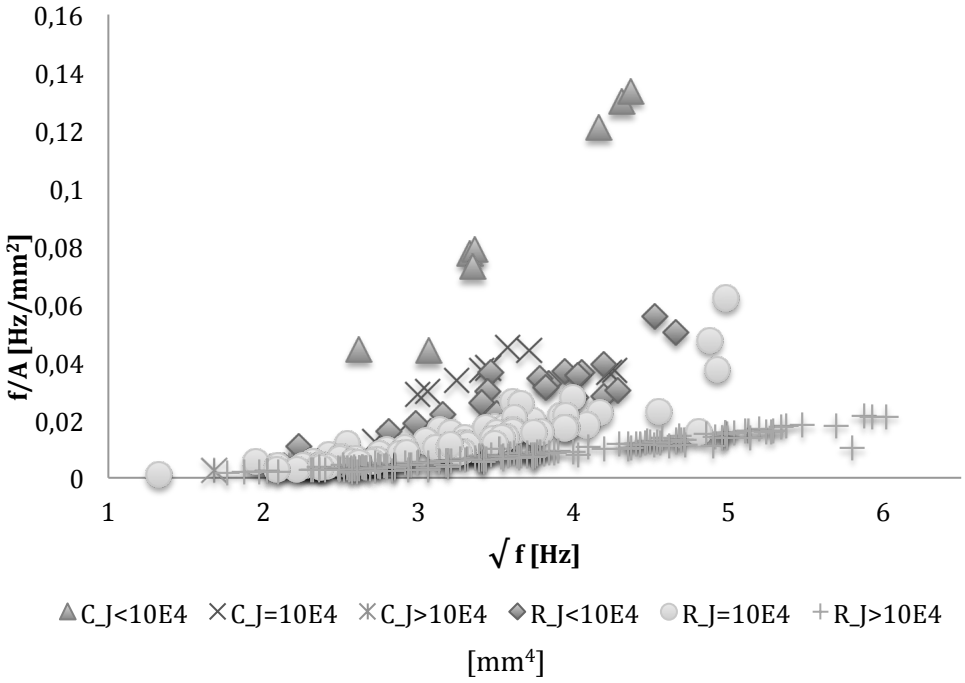


FIGURA 3.3 - RAPPORTO TRA LA FREQUENZA E LE CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLA SEZIONE TRASVESALE DELLE CATENE

Per quanto riguarda le dimensioni della sezione, sono riassunti in Tabella 3.2 e nei grafici della Figura 3.4 i massimi e i minimi riscontrati; tramite il rapporto *b/h* si sono poi classificate le sezioni in:

- Rettangolare allungata: b/h < 0,5
- Rettangolare: 0,5 < b/h < 0,7
- Quasi quadrata: 0,7 < b/h < 1

TABELLA 3.2. SINTESI CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DEI TIRANTI

		b (mm)	h (mm)	Tipologia
A_1	min	7	20	Rettangolare allungata: **67%**
	max	30	63	Rettangolare: 13% Quasi quadrata: 20%
A_2	min	24	32	Rettangolare allungata: 9%
	max	44	73	Rettangolare: **89%** Quasi quadrata: 2%

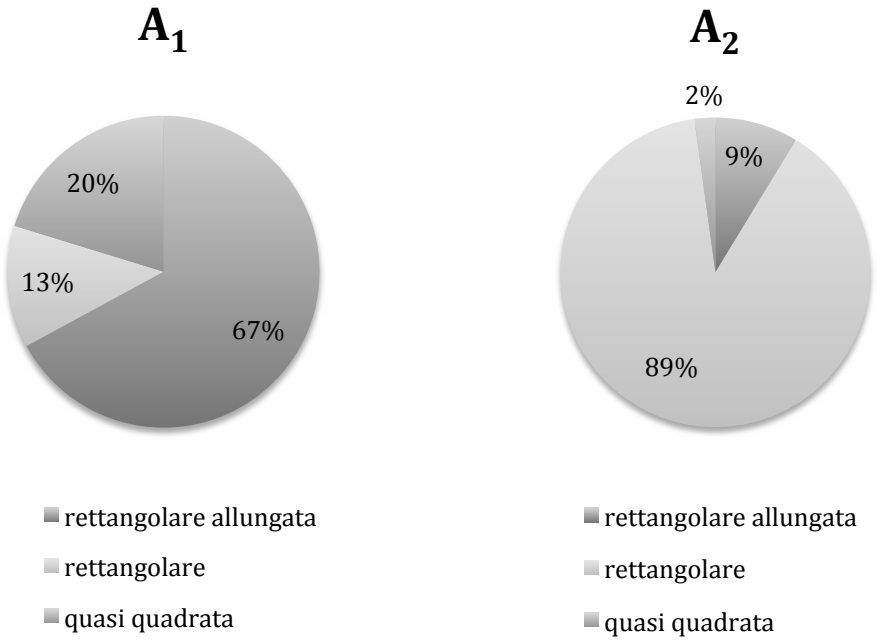


FIGURA 3.4 - GRAFICI RELATIVI ALLA DISTRIBUZIONE DELLA TIPOLOGIA DI FORMA DI SEZIONE RETTANGOLARE NELLO STUDIO DELLE CATENE DE DATABASE

3.2 ANALISI A ELEMENTI FINITI

3.2.1 INTRODUZIONE

Lo studio dei tiranti storici può essere condotto tramite analisi agli elementi finiti; gli aspetti analizzati in questo paragrafo sono la scelta del modello fisico e l'analisi operata. La possibilità di avvalersi di questa analisi è vista come un'opportunità per accreditare i metodi proposti per la determinazione del tiro.

Lo studio qui riportato prende spunto da quello proposto da Thi Mai Hoa Luong (2010), che ha comparato l'utilizzo di due programmi: un software ad Elementi Finiti, DIANA (2008), e SAP2000, un software di calcolo strutturale.

Nello studio Luong, il tirante è modellato come un elemento BEAM, con una sezione trasversale uniforme, soggetto a un carico assiale costante. Alle estremità si suppongono vincoli elastici, il cui valore di rigidezza è scelto tra i due estremi: incernierata (rigidità = 0) o vincoli fissi (rigidità=∞).

Le proprietà del materiale sono una densità di 7850 kg/m^3, un modulo elastico di 210 GPa e il modulo di Poisson pari a 0,3 (Eurocodice 3, 2003). A parte il carico assiale applicato, le variabili considerate per le catene includono la rigidezza

flessionale (tipologia e misura della sezione trasversale), la lunghezza e le condizioni di vincolo.

3.2.2 ANALISI DI SENSITIVITÀ

3.2.2.1 Comparazione dei risultati FEM con l'approccio teorico e lineare

Per comparare i risultati di Straus con DIANA e SAP2000, si è preso ad esempio la catena con le seguenti caratteristiche: 5 m di lunghezza, 0,04x0,04 m di sezione trasversale e condizioni di vincolo cerniera-cerniera. Il modello, composto da 20 elementi e 21 nodi, è sottoposto a 8 valori diversi di stato tensionale (0, 5, 10, 25, 100, 150 e 200 MPa).

I valori di riferimento teorici per una catena con condizioni di vincolo cerniera-cerniera si rifanno alla formulazione:

$$f_n = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{n^2\pi^2 EJ}{\mu L^4} + \frac{T}{\mu L^2}} \tag{3.1}$$

Dove f_n è la frequenza all'n-esimo modo (Hz); ω_n è la velocità angolare dell' n-esimo modo (rad); n è il numero del modo; L è la lunghezza della catena (m); EJ è la rigidezza flessionale, T è la forza assiale (N) e μ è la massa per unità di lunghezza (kg/m).

I RISULTATI DELLA COMPARAZIONE SONO RIASSUNTI IN TABELLA 3.3 E IN Tabella 3.4.

TABELLA 3.3 – FEM. FREQUENZE DEI PRIMI SETTE MODI: STRAUS - DIANA - SAP2000 – TEORIA

Modo	***f* [Hz] / σ = 0 MPa**			
	STRAUS	*DIANA*	*SAP200*	*Teoria*
1	3,75	3,75	3,75	3,75
2	15,01	15,01	15,01	15,01
3	33,77	33,81	33,75	33,77
4	60,03	60,32	59,96	60,04
5	93,78	94,97	93,59	93,81
6	135,0	138,61	134,58	135,09
7	183,63	192,74	182,83	183,87

TABELLA 3.4 - FEM. FREQUENZE DEI PRIMI SETTE MODI: STRAUS - DIANA - SAP2000 – TEORIA

Modo	***f* [Hz] / σ = 25 MPa**			
	STRAUS	*DIANA*	*SAP200*	*Teoria*
1	6,78	6,78	6,78	6,78
2	18,78	18,78	18,78	18,78
3	37,78	37,82	37,76	37,78
4	64,13	64,43	64,06	64,14
5	97,93	99,13	97,47	97,97
6	139,17	142,80	138,76	139,27
7	-	196,96	187,02	188,07

È evidente che il grado di congruenza tra i risultati ottenuti con i diversi programmi e la teoria per i primi sei modi è molto alto. Questo dato conferma della bontà dello strumento nell'analisi di convalidazione delle varie metodologie proposte per la stima del tiro dei tiranti nelle condizioni di vincolo cerniera-cerniera. Successivi studi di Luong dimostrano, inoltre, che il risultato non è affetto da cambiamento di lunghezze o di tensioni del modello.

3.2.2.2 Sensitività sulla suddivisione del modello FE

E' stata condotta un'analisi di sensitività sul modello per vedere l'incidenza della scelta del numero di suddivisioni dell'elemento BEAM sulla prima, la terza e la quinta frequenza propria di vibrazione: nelle Tabella 3.5, 3.7, 3.8 sono presentati i dati relativi al modello BEAM con vincoli a cerniera, nelle Tabella 3.8, 3.10, 3.11 quelli relativi al modello in condizione di incastro perfetto.

TABELLA 3.5 - ANALISI DI SENSITIVITÀ SUL MODELLO FEM. PRIMA FREQUENZA. K = 0

Subdivisio n	**σ =0 MPa**		**σ =25 MPa**		**σ=100 MPa**		**σ=150 MPa**		**σ=200 MPa**	
	f_1 **[Hz]**	Δf_1 **[%]**	f_1 **[Hz]**	Δf_1 **[%]**	f_1 **[Hz]**	Δf_1 **[%]**	f_1 **[Hz]**	Δf_1 **[%]**	f_1 **[Hz]**	Δf_1 **[%]**
2	3,73		6,67		11,59		13,91		15,87	
4	3,75	0,70	6,77	1,47	11,88	2,47	14,30	2,83	16,36	3,08
8	3,75	0,03	6,78	0,05	11,89	0,06	14,31	0,10	16,38	0,11
12	3,75	<0,01	6,78	<0,01	11,89	0,03	14,31	<0,01	16,38	<0,01
16	3,75	<0,01	6,78	-0,03	11,89	0,00	14,31	<0,01	16,38	<0,01
20	3,73		6,67		11,59		13,91		15,87	
25	3,75	0,70	6,77	1,47	11,88	2,47	14,30	2,83	16,36	3,08

TABELLA 3.6 - ANALISI DI SENSITIVITÀ SUL MODELLO FEM. TERZA FREQUENZA. κ = 0

Subdivision	σ =0 MPa		σ =25 MPa		σ=100 MPa		σ=150 MPa		σ=200 MPa	
	f_3 [Hz]	Δf_3 [%]	f_3 [Hz]	Δf_3 [%]	f_3 [Hz]	Δf_3 [%]	f_3 [Hz]	Δf_3 [%]	f_3 [Hz]	Δf_3 [%]
4	31,64		35,08		43,61		48,37		52,66	
8	33,71	6,55	37,69	7,46	47,67	9,32	53,28	10,15	58,35	10,80
12	33,76	0,15	37,76	0,18	47,79	0,25	53,43	0,28	58,53	0,30
16	33,77	0,02	37,77	0,03	47,81	0,03	53,45	0,04	58,55	0,04
20	33,77	0,01	37,78	0,01	47,81	0,01	53,46	0,01	58,56	0,01
25	33,77	0,00	37,78	0,00	47,81	0,00	53,46	0,00	58,56	0,00

TABELLA 3.7 - ANALISI DI SENSITIVITÀ SUL MODELLO FEM. QUINTA FREQUENZA. κ = 0

Subdivision	σ =0 MPa		σ =25 MPa		σ=100 MPa		σ=150 MPa		σ=200 MPa	
	f_5 [Hz]	Δf_5 [%]	f_5 [Hz]	Δf_5 [%]	f_5 [Hz]	Δf_5 [%]	f_5 [Hz]	Δf_5 [%]	f_5 [Hz]	Δf_5 [%]
8	91,65		95,55		106,3		112,9		119,1	
12	93,53	2,06	97,65	2,20	109,0	2,55	116,0	2,75	122,6	2,94
16	93,74	0,22	97,88	0,24	109,4	0,28	116,4	0,30	123,0	0,33
20	93,78	0,05	97,93	0,05	109,4	0,06	116,4	0,07	123,1	0,07
25	93,80	0,02	97,95	0,02	109,4	0,02	116,5	0,02	123,1	0,03

TABELLA 3.8 - ANALISI DI SENSITIVITÀ SUL MODELLO FEM. PRIMA FREQEUNZA, κ = ∞

Subdivision	σ =0 MPa		σ =25 MPa		σ=100 MPa		σ=150 MPa		σ=200 MPa	
	f_1 [Hz]	Δf_1 [%]	f_1 [Hz]	Δf_1 [%]	f_1 [Hz]	Δf_1 [%]	f_1 [Hz]	Δf_1 [%]	f_1 [Hz]	Δf_1 [%]
2	7,45		9,30		13,39		15,53		17,40	
4	8,48	13,81	10,52	13,12	14,94	11,56	17,21	10,84	19,19	10,28
8	8,51	0,31	10,56	0,40	15,00	0,41	17,28	0,37	19,25	0,33
12	8,51	0,01	10,56	<0,01	15,00	<0,01	17,28	<0,01	19,25	<0,01
16	8,51	<0,01	10,56	<0,01	15,00	<0,01	17,28	<0,01	19,26	<0,01
20	8,51	<0,01	10,56	<0,01	15,00	<0,01	17,28	<0,01	19,26	<0,01
25	8,51	<0,01	10,56	<0,01	15,00	<0,01	17,28	<0,01	19,26	<0,01

TABELLA 3.9 - ANALISI DI SENSITIVITÀ SUL MODELLO FEM. TERZA FREQUENZA. κ =∞

Subdivision	σ =0 MPa		σ =25 MPa		σ=100 MPa		σ=150 MPa		σ=200 MPa	
	f_3 [Hz]	Δf_3 [%]	f_3 [Hz]	Δf_3 [%]	f_3 [Hz]	Δf_3 [%]	f_3 [Hz]	Δf_3 [%]	f_3 [Hz]	Δf_3 [%]
4	37,03		39,75		46,99		51,25		55,19	
8	45,73	23,48	49,03	23,33	57,75	22,90	62,85	22,63	67,54	22,40
12	45,94	0,45	49,27	0,50	58,11	0,62	63,28	0,68	68,04	0,73
16	45,96	0,05	49,30	0,06	58,15	0,07	63,33	0,08	68,09	0,08
20	45,97	0,01	49,31	0,01	58,16	0,02	63,34	0,02	68,10	0,02
25	45,97	0,00	49,31	0,01	58,16	0,01	63,34	0,01	68,11	0,01

TABELLA 3.10 - ANALISI DI SENSITIVITÀ SUL MODELLO FEM. QUINTA FREQUENZA. K =∞

Subdivision	σ =0 MPa		σ =25 MPa		σ=100 MPa		σ=150 MPa		σ=200 MPa	
	f_5 [Hz]	Δf_5 [%]	f_5 [Hz]	Δf_5 [%]	f_5 [Hz]	Δf_5 [%]	f_5 [Hz]	Δf_5 [%]	f_5 [Hz]	Δf_5 [%]
8	107,7		111,0		120,3		126,0		131,5	
12	112,8	4,82	116,5	4,98	126,7	5,38	133,1	5,60	139,2	5,79
16	113,4	0,45	117,0	0,48	127,4	0,54	133,9	0,57	140,0	0,61
20	113,5	0,09	117,1	0,10	127,5	0,11	134,0	0,12	140,2	0,13
25	113,5	0,03	117,2	0,03	127,6	0,04	134,1	0,04	140,2	0,04

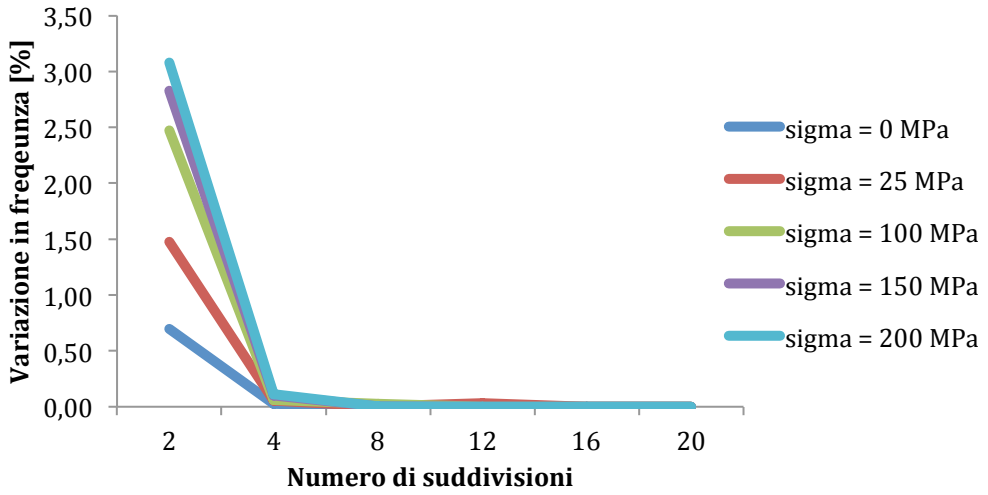


FIGURA 3.5 - ELABORAZIONE GRAFICA DEI DATI RIPORTATI IN TABELLA 3.5, K = 0

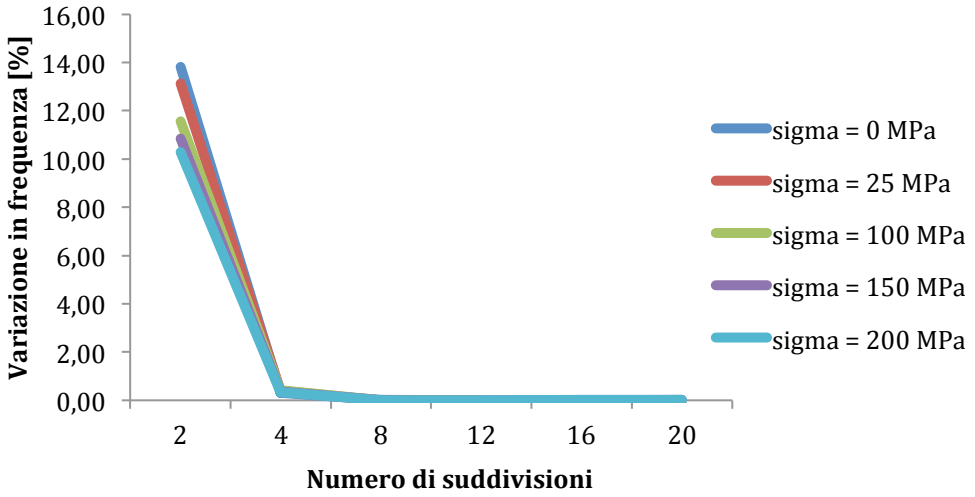


FIGURA 3.6 - ELABORAZIONE GRAFICA DEI DATI RIPORTATI IN TABELLA 3.8, K = ∞

Dall'analisi traspare che la suddivisione dell'elemento BEAM deve essere fatta a

seconda del modo di vibrare che si voglia studiare, per la stabilizzazione della prima frequenza è sufficiente una suddivisione in 8 parti, per la terza frequenza in 12 e per la quinta frequenza in 20 elementi (avendo scelto un *cut-off* dello 0,1% di variazione in frequenza). È interessante notare come mentre nel caso di vincolo a cerniera le differenze percentuali maggiori interessano i modelli più tesi, nel caso di vincolo ad incastro si verifica l'opposto.

3.2.2.3 Sensitività rigidezze vincolari del modello FE

Una seconda analisi è stata svolta per determinare l'incidenza dei valori di rigidezza elastica dei vincoli, considerando diversi stati tensionali e tre diverse sezioni, con lunghezza pari a 5 metri:

- Caso A: sezione rettangolare 40x40 mm, EJ = $7{,}55*10^{10}$ N mm/rad
- Caso B: sezione rettangolare 40x10 mm, EJ = $2{,}37*10^{9}$ N mm/rad
- Caso C: sezione circolare d=20 mm, EJ = $3{,}3*10^{9}$ N mm/rad

Nelle tabelle seguenti (3.11-12-13) sono riportati i dati relativi alla variazione della prima frequenza nelle diverse condizioni di rigidezza vincolare. Sono state poi evidenziate con colori differenti le zone corrispondenti al caso di condizioni vincolari assimilabili a cerniera perfetta (in bianco), a condizioni vincolari intermedie (grigio chiaro) e vincoli ad incastro (grigio scuro), prendendo un valore di *cut-off* per la differenza di frequenza dell'1%.

TABELLA 3.11 – ANALISI DI SENSITIVITÀ RIGIDEZZA DEI VINCOLI CASO A:SEZIONE RETTANGOLARE 40X40 MM^2

$k_{1,2}$ [N mm/ rad]	σ =0 MPa		σ =25 MPa		σ=100 MPa		σ=150 MPa		σ=200 MPa		Vincolo
	f_1 [Hz]	Δf_1 [%]	f_1 [Hz]	Δf_1 [%]	f_1 [Hz]	Δf_1 [%]	f_1 [Hz]	Δf_1 [%]	f_1 [Hz]	Δf_1 [%]	
0	3,75		6,78		11,89		14,31		16,38		PtP
10	3,75	0,00	6,78	-0,03	11,89	0,00	14,31	0,00	16,38	0,00	
10^3	3,75	0,00	6,78	0,00	11,89	0,00	14,31	0,00	16,38	0,00	
10^5	3,76	0,22	6,78	0,07	11,89	0,02	14,32	0,02	16,38	0,01	
10^7	4,45	18,42	7,19	6,07	12,14	2,05	14,52	1,43	16,56	1,10	intermedio
10^8	6,69	50,15	8,86	23,13	13,33	9,83	15,58	7,33	17,60	6,22	
10^9	8,22	22,93	10,27	16,00	14,68	10,12	16,93	8,62	18,89	7,33	

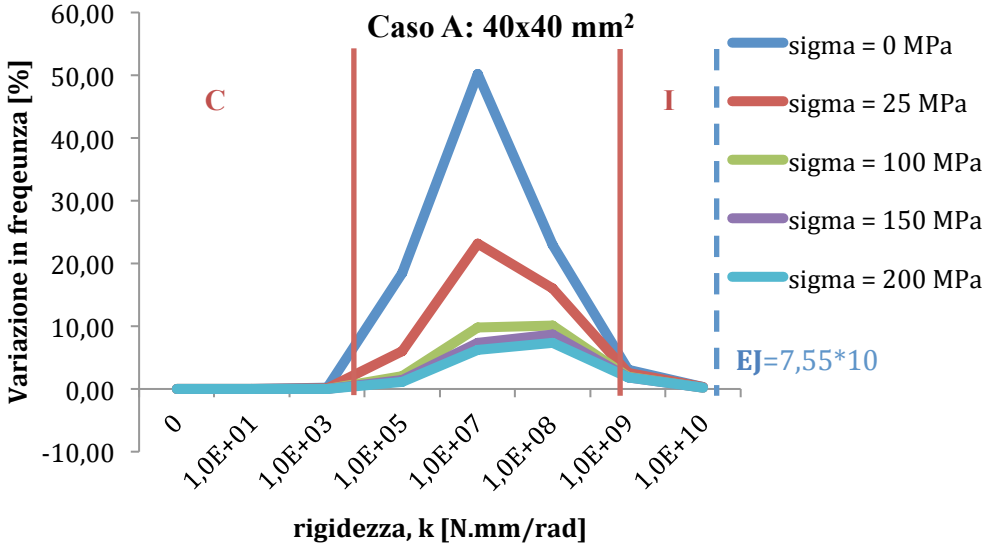
10^{10}	8,48	3,10	10,53	2,51	14,96	1,96	17,24	1,82	19,23	1,80	FF
∞	8,51	0,36	10,56	0,30	15,00	0,24	17,28	0,23	19,26	0,16	

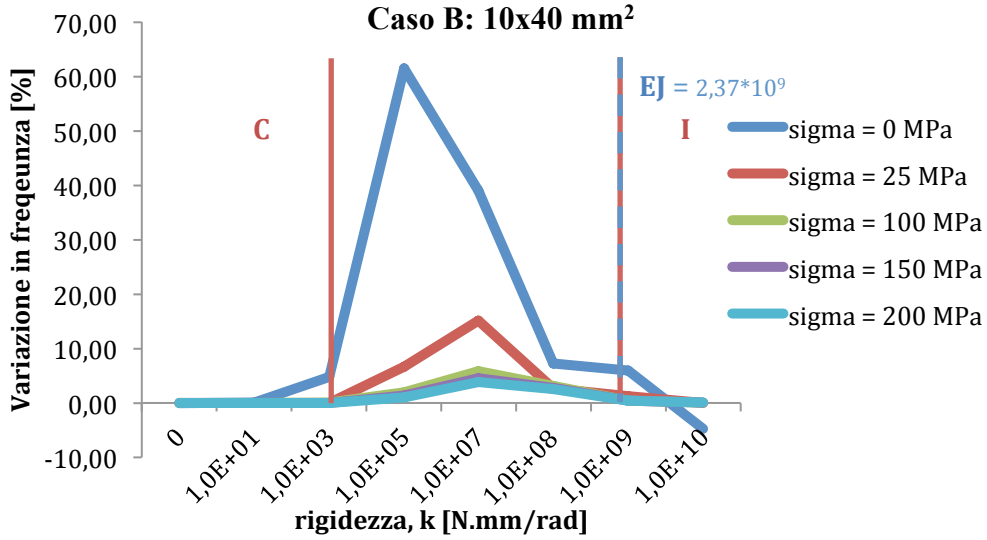
TABELLA 3.12 - ANALISI DI SENSITIVITÀ RIGIDEZZA DEI VINCOLI. CASO B:SEZIONE RETTANGOLARE 10X40 MM^2

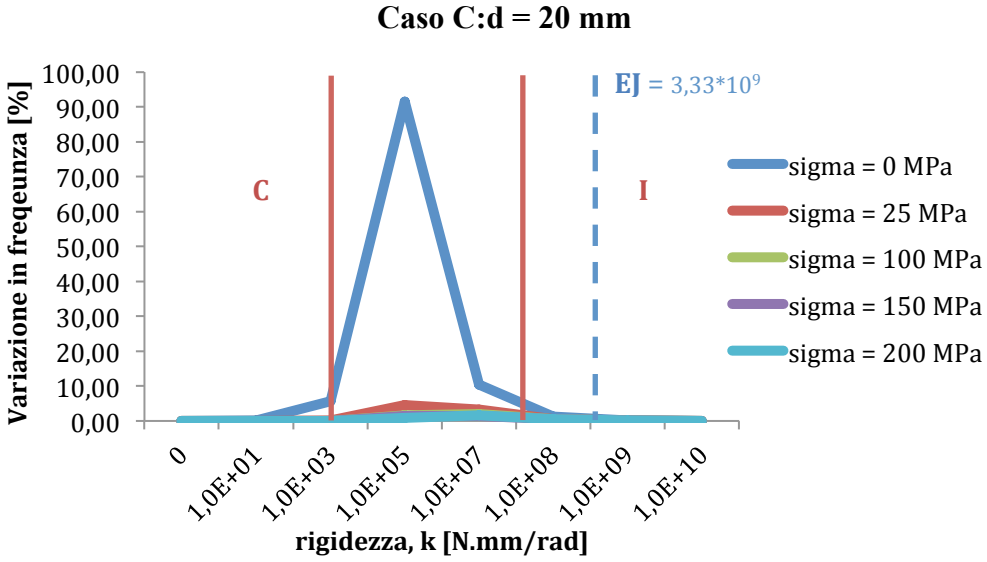
$k_{1,2}$ [N mm/ rad]	**σ =0 MPa**		**σ =25 MPa**		**σ=100 MPa**		**σ=150 MPa**		**σ=200 MPa**		**Vincolo**
	f_1 [Hz]	**Δf_1 [%]**	**f_1 [Hz]**	**Δf_1 [%]**	**f_1 [Hz]**	**Δf_1 [%]**	**f_1 [Hz]**	**Δf_1 [%]**	**f_1 [Hz]**	**Δf_1 [%]**	
0	3,31		11,89		22,84		27,82		32,02		PtP
10	3,31	0,00	11,89	0,00	22,84	0,00	27,82	0,00	32,02	0,00	
10^3	3,31	0,06	11,89	0,00	22,84	0,00	27,82	0,00	32,02	0,00	
10^5	3,47	4,82	11,89	0,01	22,85	0,02	27,83	0,02	32,03	0,01	intermedio
10^7	5,60	61,43	12,69	6,69	23,30	2,00	28,21	1,38	32,37	1,06	
10^8	7,78	39,00	14,60	15,10	24,67	5,85	29,50	4,56	33,60	3,80	
10^9	8,35	7,27	14,98	2,62	25,43	3,09	30,31	2,76	34,47	2,60	
10^{10}	8,84	5,93	15,17	1,24	25,54	0,44	30,45	0,46	34,62	0,42	FF
∞	8,42	-4,76	15,17	0,00	25,55	0,05	30,47	0,05	34,63	0,05	

TABELLA 3.13 – ANALISI DI SENSITIVITÀ RIGIDEZZA DEI VINCOLI. CASO C:SEZIONE CIRCOLARE, D = 20MM

$k_{1,2}$ [N mm/ rad]	**σ =0 MPa**		**σ =25 MPa**		**σ=100 MPa**		**σ=150 MPa**		**σ=200 MPa**		**Vincolo**
	f_1 [Hz]	**Δf_1 [%]**	**f_1 [Hz]**	**Δf_1 [%]**	**f_1 [Hz]**	**Δf_1 [%]**	**f_1 [Hz]**	**Δf_1 [%]**	**f_1 [Hz]**	**Δf_1 [%]**	
0	1,63		12,83		25,46		31,13		35,88		PtP
10	1,63	0,00	12,83	0,00	25,46	0,00	31,13	0,00	35,88	0,00	
10^3	1,63	0,06	12,83	0,00	25,46	0,00	31,13	0,00	35,89	0,00	
10^5	1,72	5,71	12,84	0,10	25,47	0,02	31,13	0,02	35,89	0,01	intermedio
10^7	3,30	91,57	13,43	4,57	25,86	1,55	31,58	1,44	36,20	0,88	
10^8	3,64	10,35	13,88	3,31	26,40	2,07	32,04	1,45	36,78	1,58	
10^9	3,68	1,17	13,96	0,60	26,54	0,54	32,21	0,53	36,97	0,53	FF
10^{10}	3,68	0,12	13,97	0,07	26,56	0,06	32,23	0,06	37,00	0,07	
∞	3,68	0,01	13,97	0,01	26,56	0,01	32,23	0,01	37,00	0,01	


Caso A: 40x40 mm²
Variazione in freqeunza [%]
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
-10,00
C
I
EJ=7,55*10
sigma = 0 MPa
sigma = 25 MPa
sigma = 100 MPa
sigma = 150 MPa
sigma = 200 MPa
0
1,0E+01
1,0E+03
1,0E+05
1,0E+07
1,0E+08
1,0E+09
1,0E+10
rigidezza, k [N.mm/rad]


Caso B: 10x40 mm²
Variazione in freqeunza [%]
70,00
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
-10,00
C
I
EJ = 2,37*10⁹
sigma = 0 MPa
sigma = 25 MPa
sigma = 100 MPa
sigma = 150 MPa
sigma = 200 MPa
0
1,0E+01
1,0E+03
1,0E+05
1,0E+07
1,0E+08
1,0E+09
1,0E+10
rigidezza, k [N.mm/rad]


Caso C:d = 20 mm
Variazione in freqeunza [%]
100,00
90,00
80,00
70,00
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
C
I
EJ = 3,33*10⁹
sigma = 0 MPa
sigma = 25 MPa
sigma = 100 MPa
sigma = 150 MPa
sigma = 200 MPa
0
1,0E+01
1,0E+03
1,0E+05
1,0E+07
1,0E+08
1,0E+09
1,0E+10
rigidezza, k [N.mm/rad]

La condizione di vincolo in relazione alla rigidezza dei vincoli è legata alla rigidezza flessionale della catena e alla sua lunghezza; in particolare dal confronto tra i dati di variazione in frequenza e quelli riportati in Tabella 3.14 si può cercare la relazione tra le grandezza in gioco. I risultati sperimentali sono stati quindi confrontati con due diversi indicatori di grado di vincolo:

- Indice **L** (Facchini et al., 2003), definito come:

$$L = \frac{EJ}{lk} \tag{3.2}$$

  dove EJ è la rigidezza flessionale, l la lunghezza della catena e k la rigidezza dei vincoli di estremità. Secondo l'Autore, L < 0,015 corrisponde ad vincolo ad incastro, mentre L > 1,0 ad vincolo a cerniera;
- Il grado di incastro **G**, proposto da Dardano et al. (2005), che assume valori compresi tra 0 (cerniera) e 1 (incastro) e dipende dalle caratteristiche geometriche e meccaniche del tirante.

Dalla Tabella 3.14 si evince che G sia un migliore parametro di confronto per le rigidezza vincolari, in quanto i suoi risultati sono concordanti con le evidenze sperimentali (indicati dalla linea di separazione). L'intervallo suggerito da Facchinetti è maggiormente rispettato nel caso di catene tese (sigma > 0 MPa) mentre il comportamento delle catene scariche risulta più imprevedibile, con variazioni di frequenza relative al variare di k molto maggiori rispetto agli altri casi. Si può affermare che maggiore è il tiro a cui è sottoposta la catena minore è l'influenza della rigidezza dei vincoli sulla prima di vibrazione.

TABELLA 3.14 - ANALISI DI SENSITIVITÀ RIGIDEZZA DEI VINCOLI. VALUTAZIONE DI L PER I CASI A,B,C

$k_{1,2}$ [N	$L = EJ/lk$			G		
mm/rad]	**caso A**	**caso B**	**caso C**	**caso A**	**caso B**	**caso C**
10	1510000	47400	66600	0,00	0,00	0,00
10^3	15100	474	666	0,00	0,00	0,00
10^5	151	4,74*	6,66 *	0,00	0,10	0,07
10^7	1,51 *	0,0474	0,0666	0,25	0,91	0,88
10^8	0,151	0,00474 *	0,00666*	0,77	0,99	0,99
10^9	0,0151*	0,000474	0,000666	0,97	1,00	1,00
10^{10}	0,00151	0,0000474	0,0000666	1,00	1,00	1,00

Note alla Tabella 3.14: I valori segnati da asterisco * segnano le differenze tra il *range* proposto da Facchinetti e i risultati delle prove di sensitività (definite dalle linee di separazione)

3.2.2.4 Sensitività della matrice di MAC del modello FE

Per valutare la bontà del modello FE rispetto al caso reale si è scelto di utilizzare una tecnica utile al confronto tra le forme modali: il *Modal Assurance Criteria* (MAC).

L'ottimizzazione del modello FE passa attraverso la corretta calibrazione di tre variabili ignote: il tiro (T) e le rigidezze dei due vincoli (k). Come si apprende dai capitoli precedenti, entrambe queste variabili influiscono sulle frequenze (auto-valori) e sui modi di vibrare (auto-vettori).

La matrice di MAC, ideata da Allernang and Brown (1983), permette un singolo valore numerico che indica la correlazione tra i modi di vibrare. Quando i modi di vibrare di due strutture (ϕ_{iA}, ϕ_{iB}) sono completamente correlati, il valore di MAC (3.3) è 1, quando invece sono tra di loro non c'è nessuna corrispondenza il valore è 0.

$$MAC(\phi_{iA}, \phi_{iB}) = \frac{\left|\{\phi_A\}_i^T \{\phi_B\}_j\right|^2}{\{\phi_A\}_i^T \{\phi_A\}_j \{\phi_B\}_i^T \{\phi_B\}_j} \tag{3.3}$$

La comparazione tramite la matrice di MAC è stata svolta su una stessa catena, di sezione circolare di raggio 20 mm e lunghezza 5 m sottoposta ad un tiro di 40 kN, variando solo le condizioni di vincolo; si è quindi scelto di considerare condizioni vincolari opposte: nel primo caso a cerniera e nel secondo ad incastro, valutando la MAC sui primi tre e cinque modi agli estremi (1-5), ai quarti (2-4) e in mezzeria (3).

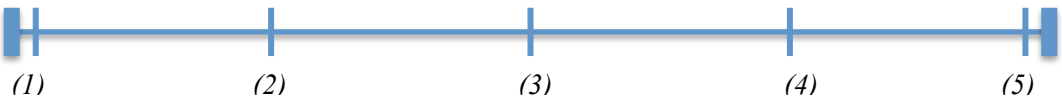


FIGURA 3.7 - SCHEMA DELLA DISPOSIZIONE DEI PUNTI DI ACQUISIZIONI DEI DATI

Di seguito vengono riportate le acquisizioni e le matrici di MAC risultanti:

TABELLA 3.15- AUTOVETTORI DEI PRIMI TRE MODI DEL MODELLO 1. PINNED-TO-PINNED (PTP)

	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)
I modo	3,9902	5,6430	3,9902
II modo	-5,6430	0,0000	5,6430
III modo	3,9902	-5,6430	3,9902

TABELLA 3.16 – AUTOVETTORI DEI PRIMI TRE MODI DEL MODELLO 2. FIXED-FIXED (FF)

	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)
I modo	3,3390	5,9590	3,3390
II modo	-3,7092	0,0000	3,7092
III modo	3,4571	-3,6255	3,4571

TABELLA 3.17 – MATRICE DI MAC SUI PRIMI TRE MODI DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *K*

	I modo (FF)	II modo (FF)	III modo (FF)
I modo (PtP)	**0,9868**	0,0000	0,0215
II modo (PtP)	0,0000	**1,0000**	0,0000
III modo (PtP)	0,0132	0,0000	**0,9785**

Leggendo la Tabella 3.17 – Matrice di MAC sui primi tre modi di vibrare pare esserci una congruenza quasi perfetta tra i due modelli; in questo caso quindi la matrice risulta essere troppo poco sensibile alla variazione tra i modelli, rendendo più difficile differenziarli e fare una stima corretta.

TABELLA 3.18 - AUTOVETTORI DEI PRIMI CINQUE MODI DEL MODELLO 1. PINNED-TO-PINNED

	nodo (1)	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)	nodo (5)
I modo	0,8820	3,9902	5,6430	3,9902	0,8820
II modo	-1,7498	-5,6430	0,0000	5,6430	1,7498
III modo	2,5619	3,9902	-5,6430	3,9902	2,5619
IV modo	3,3168	0,0000	0,0000	0,0000	3,3168
V modo	3,9900	-3,9900	5,6430	-3,9900	3,9900

TABELLA 3.19- AUTOVETTORI DEI PRIMI CINQUE MODI DEL MODELLO 2. FIXED-FIXED

	nodo (1)	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)	nodo (5)
I modo	0,2150	3,3390	5,9590	3,3390	0,2150
II modo	-0,9493	-3,7092	0,0000	3,7092	0,9493
III modo	0,6455	3,4571	-3,6255	3,4571	0,6455
IV modo	0,8267	0,9480	0,0000	0,9480	0,8267
V modo	1,1095	-1,1223	-2,9293	-1,1223	1,1095

TABELLA 3.20 - MATRICE DI MAC SUI PRIMI CINQUE MODI DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *K*

	I modo (FF)	II modo (FF)	III modo (FF)	IV modo (FF)	V modo (FF)
I modo (PtP)	**0,9738**	0,0000	0,0277	0,3944	0,6257
II modo (PtP)	0,0000	**0,9975**	0,0000	0,0000	0,0000
III modo (PtP)	0,0078	0,0000	**0,9064**	0,5730	0,1687
IV modo (PtP)	0,0016	0,0000	0,0220	**0,4320**	0,1815
V modo (PtP)	0,0137	0,0000	0,5085	0,0031	**0,0013**

La Tabella 3.20 - Matrice di MAC sui primi cinque modi di vibrare fornisce un'interpretazione maggiormente corretta, infatti i valori relativi al IV e al V modo (0,4320 e 0,0013) indicano una sostanziale differenza tra i due modelli (Figura 3.8 e Figura 3.9)

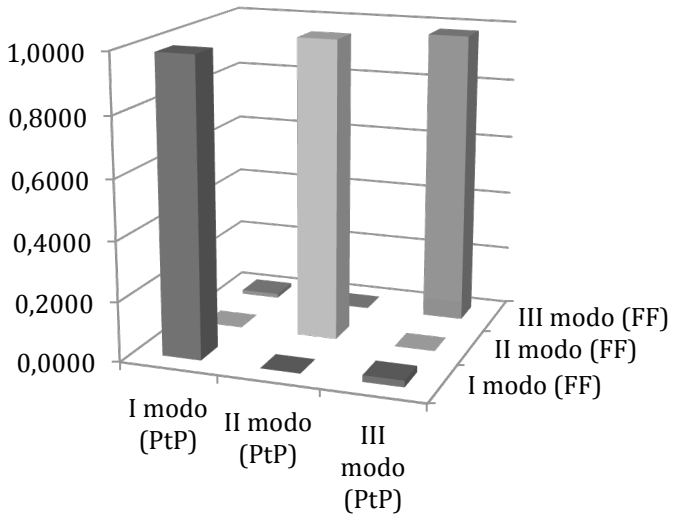


FIGURA 3.8 – MATRICE DI MAC SUI PRIMI TRE MODI DI VIBRARE. NONOSTANTE LA VARIAZIONI DI *K* LA MATRICE DI MAC PRESENTA UNA CONGRUENZA PERFETTA TRA I DUE MODELLI

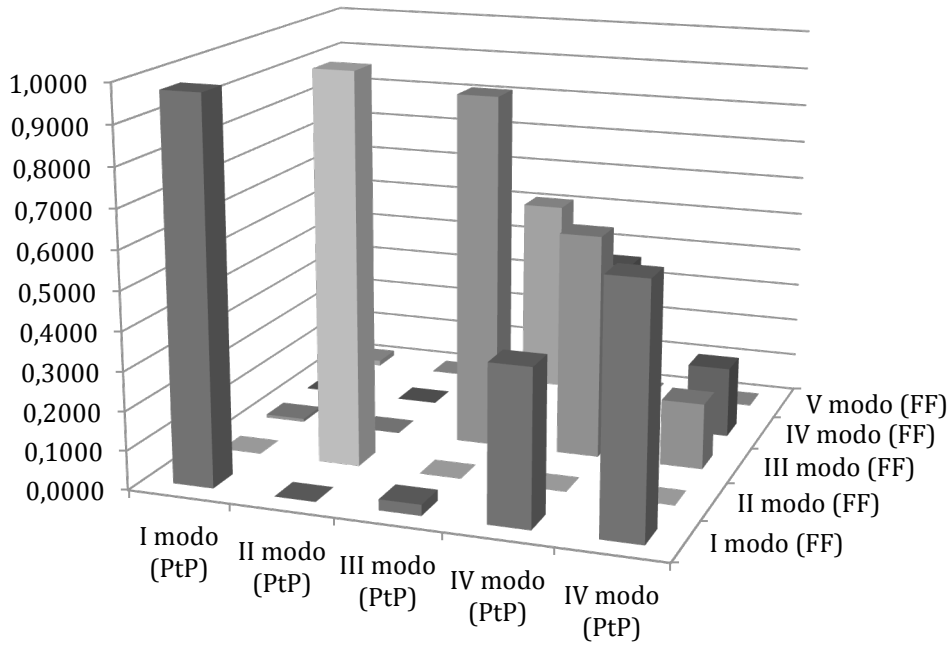


FIGURA 3.9 - MATRICE DI MAC SUI PRIMI CINQUE MODI DI VIBRARE. LA VARIAZIONE DI *K* VIENE RILEVATA DAI MODI DI VIBRARE SUPERIORI AL TERZO, VALUTANDO QUINDI CORRETTAMENTE LA NON CONGRUENZA TRA I MODLLI IN ANALISI.

Dall'analisi di valutazione della sensitività della MAC nei confronti di variazione della rigidezza *k* risulta che:

- Se il confronto è operato solo su i primi tre modi di vibrare con lettura degli spostamenti ai quarti e in mezzeria la matrice di MAC fornisce variazioni troppo limitate tra i modelli per una valutazione accurata della congruenza tra i modi;
- Solo dai modi superiori al terzo possiamo notare una migliore risposta della MAC alla variazione della rigidezza vincolare;

Si valuta poi la sensitività della matrice di MAC al variare della forza assiale imposta al modello, si considera quindi la medesima catena prima scarica e poi sottoposta ad una forza pari a 100 kN in condizioni di vincolo ad incastro (FF) e a cerniera (PtP)

TABELLA 3.21- AUTOVETTORI DEI PRIMI TRE MODI DEL MODELLO 1. T= 0 KN (FF)

	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)
I modo	3,442	6,3373	3,442
II modo	-5,7655	0,0000	5,7655
III modo	5,4701	-5,6103	5,4701

TABELLA 3.22 – AUTOVETTORI DEI PRIMI TRE MODI DEL MODELLO 2. T = 100 KN (FF)

	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)
I modo	3,5869	6,1915	3,5869
II modo	-5,7893	0,0000	5,7893
III modo	5,3153	-5,7169	5,3153

TABELLA 3.23 – MATRICE DI MAC SUI PRIMI TRE MODI DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *T*. (FF)

	I modo (FF)	II modo (FF)	III modo (FF)
I modo (PtP)	**0,9990**	0,0000	0,0000
II modo (PtP)	0,0000	**1,0000**	0,0000
III modo (PtP)	0,0000	0,0000	**0,9995**

TABELLA 3.24 - AUTOVETTORI DEI PRIMI CINQUE MODI DEL MODELLO 1. T= 0 KN (FF)

	nodo (1)	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)	nodo (5)
I modo	0,2059	3,442	6,3373	3,442	0, 2059
II modo	-0,5347	-5,7655	0,0000	5,7655	0,5347
III modo	0,9854	5,4701	-5,6103	5,4701	0,9854
IV modo	1,5255	0,0000	0,0000	0,0000	1,5255
V modo	2,1255	-2,1070	3,6670	-2,1070	2,1255

TABELLA 3.25- AUTOVETTORI DEI PRIMI CINQUE MODI DEL MODELLO 2. T = 100 KN (FF)

	nodo (1)	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)	nodo (5)
I modo	0,2516	3,5869	6,1915	3,5869	0,2516
II modo	-0,5932	-5,7893	0,0000	5,7893	0,5932
III modo	1,0409	5,3153	-5,7169	5,3153	1,0409
IV modo	1,5739	0,0000	0,0000	0,0000	1,5739
V modo	2,1658	-2,2470	5,6687	-2,2470	2,1658

TABELLA 3.26 - MATRICE DI MAC SUI PRIMI CINQUE MODI DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *T*. (FF)

	I modo (FF)	II modo (FF)	III modo (FF)	IV modo (FF)	V modo (FF)
I modo (PtP)	**0,9980**	0,0000	0,0001	0,0003	0,1325
II modo (PtP)	0,0000	**0,9999**	0,0000	0,0000	0,0000
III modo (PtP)	0,0042	0,0000	**0,9994**	0,0208	0,5643
IV modo (PtP)	0,0020	0,0000	0,0237	**1,0000**	0,1818
V modo (PtP)	0,0372	0,0000	0,5292	0,2881	**0,9621**

Dai risultati sopra riportati si può notare come, in condizioni vincolari di incastro perfetto, la differenza di tiro influisca in modo minimo sui modi di vibrare.

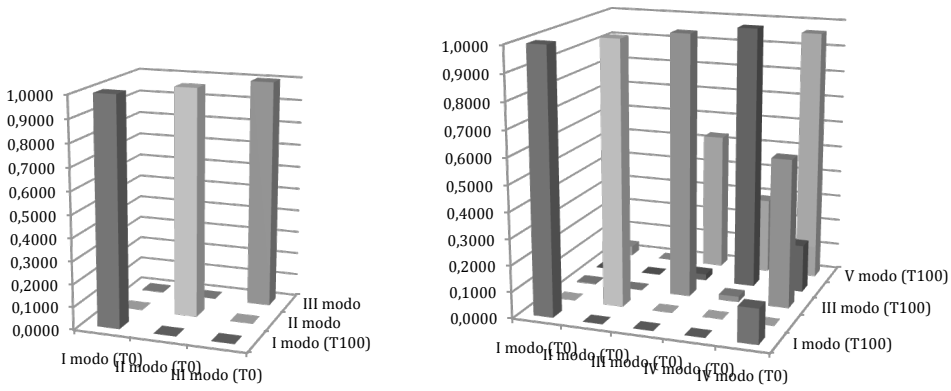


FIGURA 3.10 – MATRICE DI MAC SUI PRIMI TRE MODI (SX) E CINQUE (DX) DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *T*. (FF). DAI GRAFICI SI NOTA COME IL TIRO ABBIA UNA MINIMA INFLUENZA SUI MODI DI VIBRARE.

Variando i vincoli da condizione di incastro (FF) a cerniera perfetta (PtP) otteniamo i segenti risultati:

TABELLA 3.27- AUTOVETTORI DEI PRIMI TRE MODI DEL MODELLO 1. T= 0 KN (PTP)

	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)
I modo	3,9899	5,6426	3,9899
II modo	-5,6418	0,0000	5,64318
III modo	3,9904	-5,6427	3,9904

TABELLA 3.28 – AUTOVETTORI DEI PRIMI TRE MODI DEL MODELLO 2. T = 100 KN (PTP)

	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)
I modo	3,9899	5,6425	3,9899
II modo	-5,6424	0,0000	5,6424
III modo	3,9898	-5,6425	3,9898

TABELLA 3.29 – MATRICE DI MAC SUI PRIMI TRE MODI DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *T*. (PTP)

	I modo (FF)	II modo (FF)	III modo (FF)
I modo (PtP)	**1,0000**	0,0000	0,0000
II modo (PtP)	0,0000	**1,0000**	0,0000
III modo (PtP)	0,0000	0,0000	**1,0000**

TABELLA 3.30 - AUTOVETTORI DEI PRIMI CINQUE MODI DEL MODELLO 1. T= 0 KN (PTP)

	nodo (1)	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)	nodo (5)
I modo	0,8827	3,9899	5,6426	3,9899	0,8827
II modo	-1,7434	-5,6418	0,0000	5,64318	1,7438
III modo	2,5618	3,9904	-5,6427	3,9904	2,5618
IV modo	3,3166	0,0000	0,0000	0,0000	3,3166
V modo	3,9901	-3,9900	5,6430	-3,9900	3,9901

TABELLA 3.31- AUTOVETTORI DEI PRIMI CINQUE MODI DEL MODELLO 2. T = 100 KN (PTP)

	nodo (1)	nodo (2)	nodo (3)	nodo (4)	nodo (5)
I modo	0,8827	3,9898	5,6425	3,9898	0,8827
II modo	-1,7436	-5,6424	0,0000	5,6424	1,7436
III modo	2,5616	3,9898	-5,6425	3,9898	2,5616
IV modo	3,3166	0,0000	0,0000	0,0000	3,3166
V modo	3,9898	-3,9898	5,6425	-3,9898	3,9898

TABELLA 3.32 - MATRICE DI MAC SUI PRIMI CINQUE MODI DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *T*. (PTP)

	I modo (FF)	II modo (FF)	III modo (FF)	IV modo (FF)	V modo (FF)
I modo (PtP)	**1,0000**	0,0000	0,0041	0,0239	0,0080
II modo (PtP)	0,0000	**1,0000**	0,0000	0,0000	0,0000
III modo (PtP)	0,0041	0,0000	**1,0000**	0,1709	0,2548
IV modo (PtP)	0,0239	0,0000	0,1709	**1,0000**	0,3333
V modo (PtP)	0,0080	0,0000	0,2548	0,3333	**1,0000**

Dai risultati sopra riportati si può notare come, in condizioni vincolari di cerniera perfetta, la differenza di tiro influisca in modo minimo sui modi di vibrare. Si può quindi concludere che i valori dei modi di vibrare dipendono in maniera sostanziale dalla condizione di vincolo e che il tiro influisce invece maggiormente sul valore della frequenza.

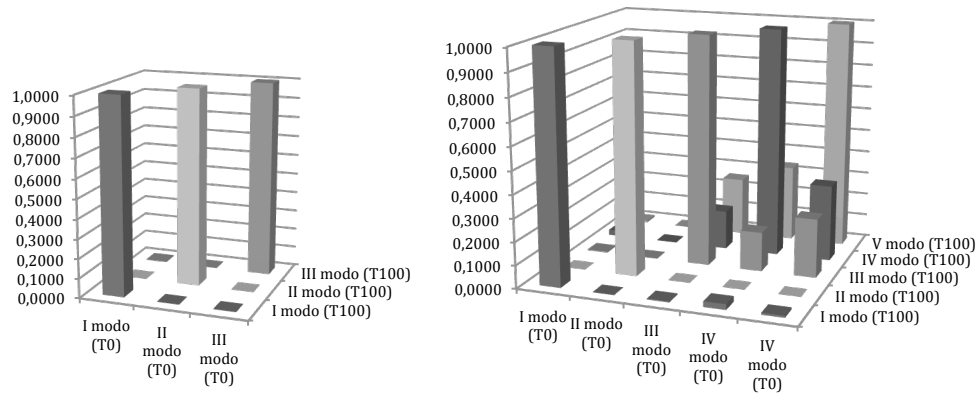
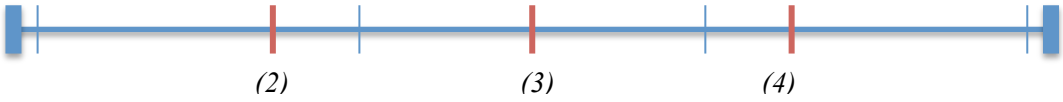


FIGURA 3.11 - MATRICE DI MAC SUI PRIMI TRE MODI (SX) E CINQUE (DX) DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *T*. (PTP).

In ultimo si è studiata la disposizione migliore degli accelerometri (quindi dei punti di rilevazione degli spostamenti nei diversi modi di vibrare).

1. Tre accelerometri: ai quarti e in mezzeria



Il posizionamento di tre accelerometri ai quarti e in mezzeria permette il confronto tra i soli primi tre modi (il quarto modo presenta i nodi nei punti di rilevazione) e quindi la matrice di MAC che se ne può rilevare risulta essere poco attendibile come illustrato dalla Figura 3.8.

2. Tre accelerometri: ai terzi e in mezzeria

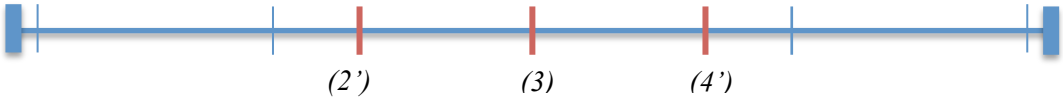


TABELLA 3.33- AUTOVETTORI DEI I,II,III MODI DEL MODELLO 1. PINNED-TO-PINNED

	nodo (2')	nodo (3)	nodo (4')
I modo	0,3487	5,6430	0,3487
II modo	-0,3487	0,0000	0,3487
III modo	0,0000	-5,6430	0,0000

TABELLA 3.34 – AUTOVETTORI DEI I,II,III MODI DEL MODELLO 2. FIXED-FIXED

	nodo (2')	nodo (3)	nodo (4')
I modo	0,3531	5,9590	0,3531
II modo	-0,3779	0,0000	0,3779
III modo	0,0502	-3,6255	0,0502

TABELLA 3.35 – MATRICE DI MAC SUI III,IV,V MODI DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *K*

	I modo (FF)	II modo (FF)	III modo (FF)
I modo (PtP)	1,0000	0,0000	0,9886
II modo (PtP)	0,0000	1,0000	0,0000
III modo (PtP)	0,9930	0,0000	0,9996

La comparazione dei primi tre modi presenta le stesse problematiche evidenziate nella disposizione degli accelerometri ai quarti: la matrice di MAC non è sufficientemente sensibile. La disposizione dei tre accelerometri ai terzi e in mezzeria permette il rilevamento dei modi superiori al terzo permettendo così la costruzione di una matrice di MAC sufficientemente sensibile alle variazioni di rigidezza tra due modelli e quindi attendibile ai fini delle nostre indagini (Figura 3.12).

TABELLA 3.36- AUTOVETTORI DEI III,IV,V MODI DEL MODELLO 1. PINNED-TO-PINNED

	nodo (2')	nodo (3)	nodo (4')
III modo	-2,4484	5,5015	-2,4484
IV modo	-2,4484	-1,6633	2,4484
V modo	5,5015	-5,2529	5,5015

TABELLA 3.37 – AUTOVETTORI DEI III,IV,V MODI DEL MODELLO 2. FIXED-FIXED

	nodo (2')	nodo (3)	nodo (4')
III modo	-4,0741	5,4724	-4,0741
IV modo	-0,6426	-1,8620	0,6426
V modo	4,7871	-5,1854	4,7871

TABELLA 3.38 – MATRICE DI MAC SUI III,IV,V MODI DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *K*

	III modo (FF)	IV modo (FF)	V modo (FF)
III modo (PtP)	**0,9391**	0,5785	0,8789
IV modo (PtP)	0,0889	**0,6154**	0,0693
V modo (PtP)	0,9728	0,2529	**0,9964**

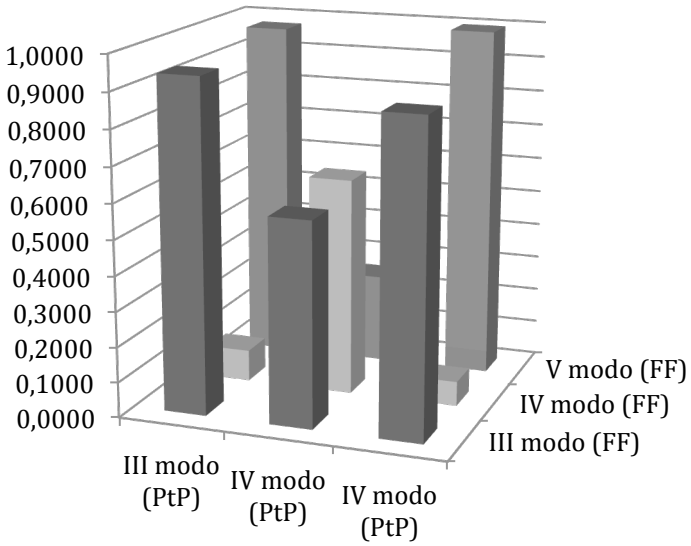
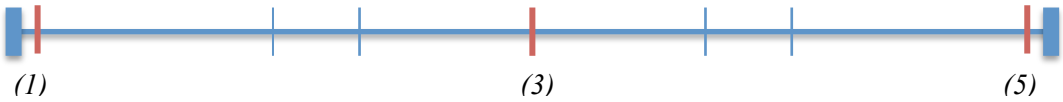


FIGURA 3.12 - MATRICE DI MAC SUI III,IV,V MODI DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *K*. LA MATRICE RISPECCHIA CORRETTAMENTE LA NON CONGRUENZA DEI DUE MODELLI.

3. Tre accelerometri: alle estremità e in mezzeria



Come nel caso precedente, anche il posizionamento degli accelerometri alle estremità e in mezzeria garantisce la costruzione di una matrice di MAC sufficientemente precisa, in grado di valutare la differenza tra due modelli (Figura 3.13).

TABELLA 3.39- AUTOVALORI DEI I, II, III MODI DEL MODELLO 1. PINNED-TO-PINNED

	nodo (1)	nodo (3)	nodo (5)
I modo	0,8820	5,6430	0,8820
II modo	-1,7498	0,0000	1,7498
III modo	2,5619	-5,6430	2,5619

TABELLA 3.40 – AUTOVALORI DEI I, II, III MODI DEL MODELLO 2. FIXED-FIXED

	nodo (1)	nodo (3)	nodo (5)
I modo	0,2150	5,9590	0,2150
II modo	-0,9493	0,0000	0,9493
III modo	0,6455	-3,6255	0,6455

TABELLA 3.41 – MATRICE DI MAC SUI III,IV,V MODI DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *K*

	I modo (FF)	II modo (FF)	III modo (FF)
I modo (PtP)	**0,9725**	0,0000	0,7996
II modo (PtP)	0,0000	**1,0000**	0,0000
III modo (PtP)	0,6607	0,0000	**0,8986**

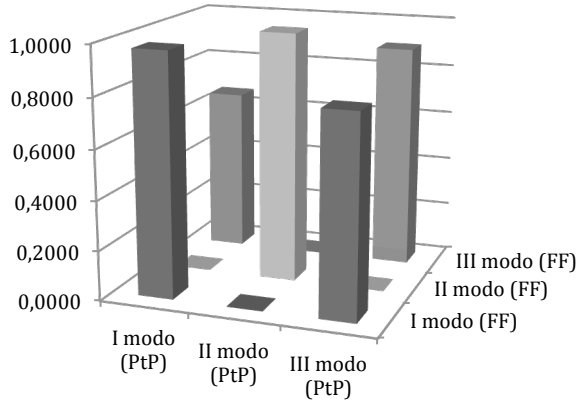


FIGURA 3.13 - MATRICE DI MAC SUI I, II, III MODI DI VIBRARE. VARIAZIONE DI *K*

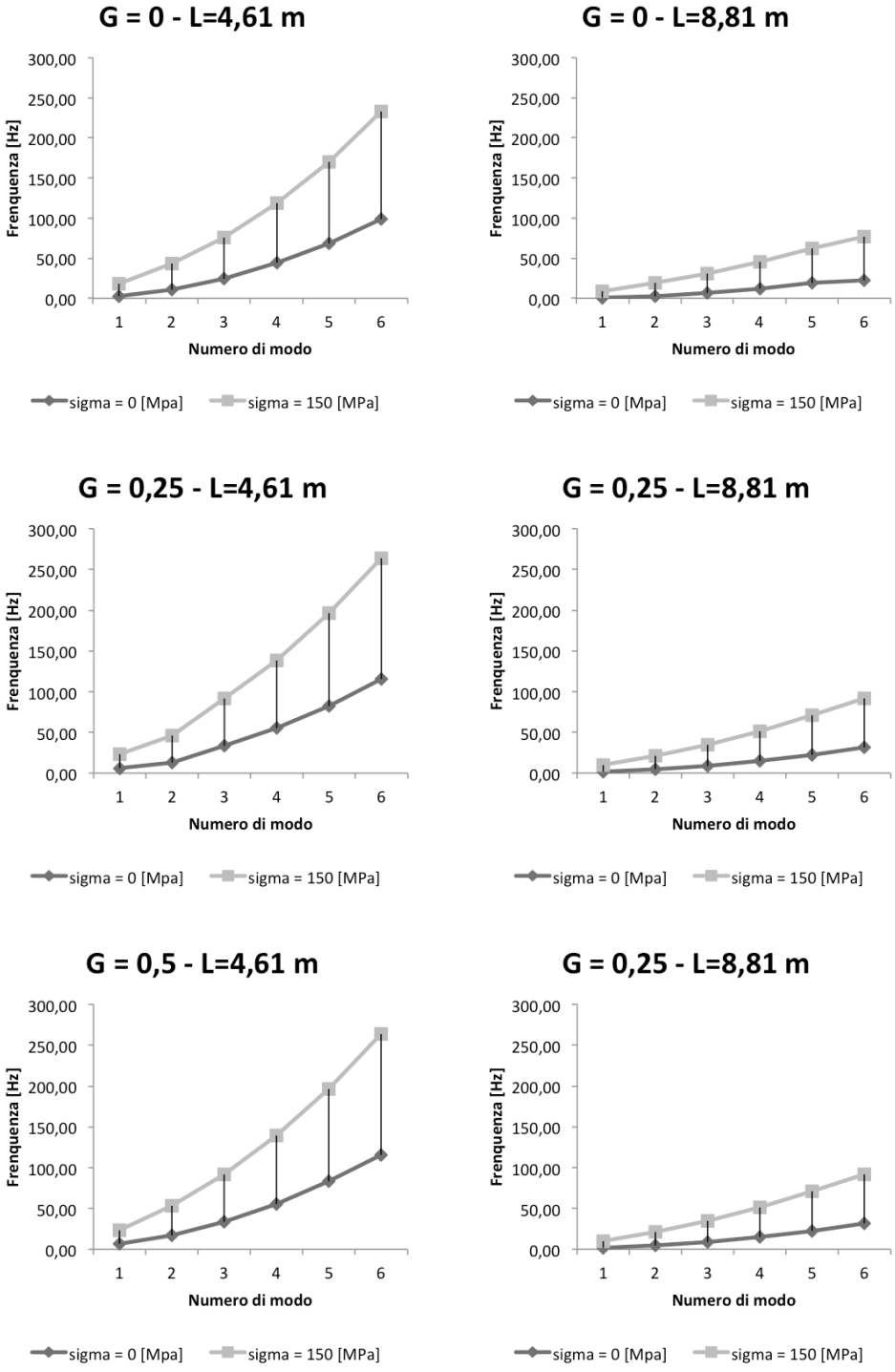
Nella valutazione della matrice di MAC con disposizione agli estremi e in mezzeria delle frequenze superiori alla terza non si rileva un miglioramento sostanziale, quindi in caso di soli tre accelerometri pare quindi più opportuno il posizionamento ai terzi e in mezzeria così da poter rilevare con accuratezza anche i modi superiori al terzo. La disposizione migliore risulta essere invece quella che posiziona 5 accelerometri collocati alle estremità, ai terzi e in mezzeria. In Tabella 3.38 si può notare come i valori segnalino la differenza dei due casi presi in esame, in particolare l'auto-vettore relativo al quarto modo di vibrare pare essere il più sensibile alla variazione delle rigidezza vincolari.

3.2.3 RISULTATI DEI MODELLI NUMERICI

3.2.3.1 Effetto dello sforzo assiale

In Figura 3.14 sono riportate le frequenze relative ai primi sei modi di vibrare di una catena di sezione 25x60 mm^2 di lunghezza 4,61 metri (modello 3) e 8,81 m (modello 5) sottoposte a sforzo normale 0 e 150 MPa. Si può notare come lo sforzo normale incrementi la frequenza di vibrazione per ogni modo e come l'effetto di tale

aumento sia comunque condizionato dalla condizione di vincolo e dalla lunghezza del tirante.



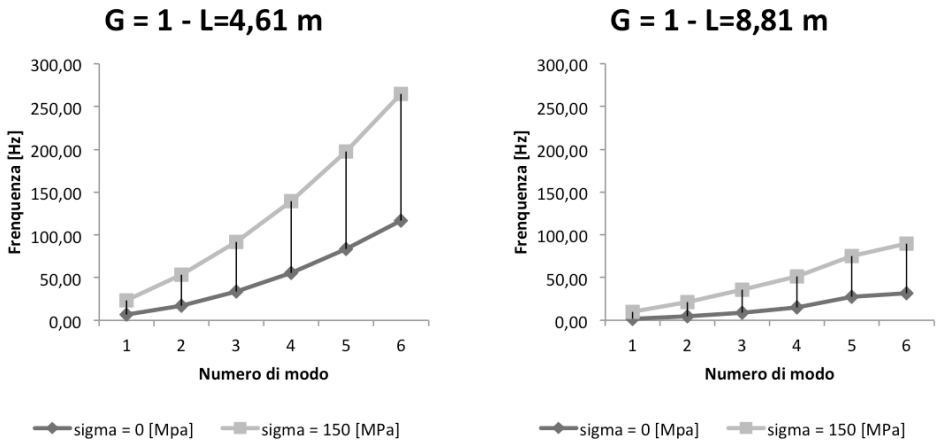


FIGURA 3.14 - EFFETTO DELLO SFORZO NORMALE SULLA FREQUENZA DEI PRIMI TRE MODI DI VIBRARE (TIRANTE 25X60 MM^2)

In particolare si può notare come l'effetto dello sforzo normale sulle frequenze sia più evidente nei casi di catene "corte" e crescente con il numero di modo.

3.2.3.2 Effetto della condizione di vincolo

La frequenza aumenta in condizioni vincolari di incastro rispetto a cerniera perfetta. L'effetto dipende dalla lunghezza, dalla sezione trasversale e dallo sforzo normale cui è sottoposta la catena.

In Figura 3.15 possiamo notare come, minore è lo sforzo normale cui è sottoposta la medesima catena, maggiore è l'influenza del grado di vincolo. La stessa tende a diminuire per lunghezze maggiori.

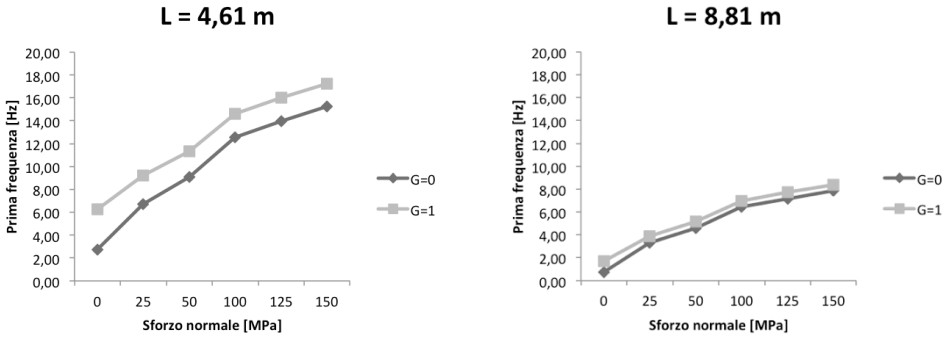


FIGURA 3.15 – EFFETTO DELLA LUNGHEZZA SULLA PRIMA FREQUENZA DI VIBRAZIONE

L'effetto lunghezza è riscontrabile anche nell'elaborazione dei dati contenuti all'interno del Database dove si nota che per le catene lunghe (> 5 m) c'è una maggiore

concentrazione dei valori delle prime frequenze inferiori ai 15 Hz, mentre le catene corte arrivano a valori di prima frequenza pari a 35 Hz.

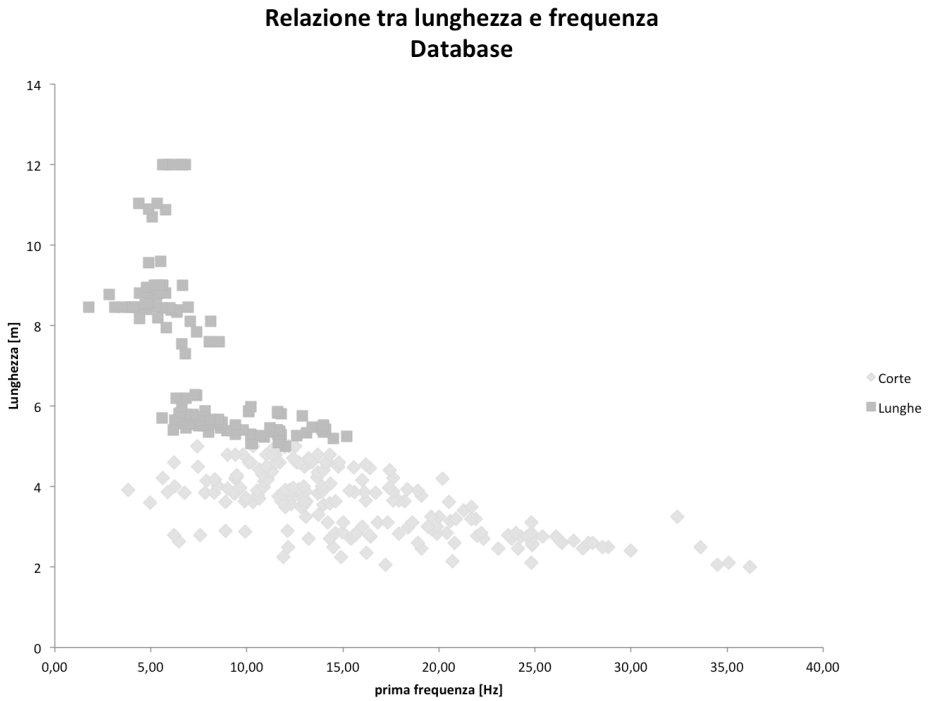


FIGURA 3.16 - EFFETTO DELLA LUNGHEZZA SULLA PRIMA FREQUENZA DI VIBRAZIONE NEI CASI CONTENUTI NEL DATABASE

3.2.3.3 Effetto della rigidezza flessionale

Dalla Figura 3.17 si può notare come l'effetto di un aumento della rigidezza flessionale, a parità di area e lunghezza non comporti una notabile variazione della frequenza in caso di vincolo a cerniera, mentre, nel caso di vincolo ad incastro, si vede come una rigidezza maggiore provochi un aumento della frequenza, in particolare nel caso di catene poco tese.

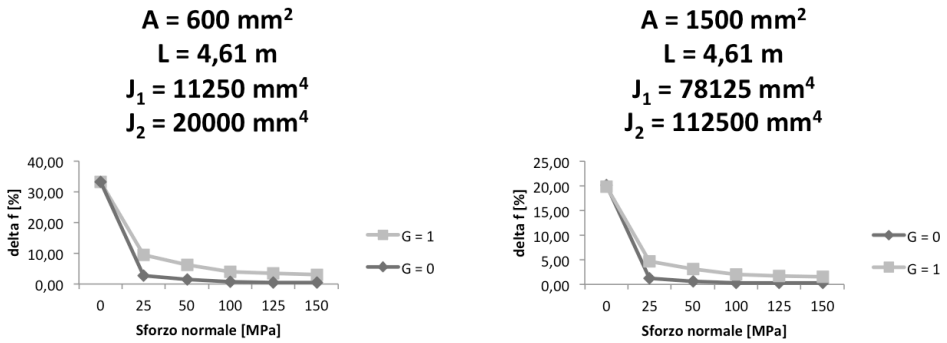


FIGURA 3.17 – EFFETTO DELLA RIGIDEZZA FLESSIONALE SULLA PRIMA FREQUENZA

3.2.3.4 Conclusioni

Dallo studio condotto emerge che:

- **L'effetto dello sforzo di tensione nei modi di vibrare della catena** è più significativo nelle condizioni di vincolo incastro-incastro e incastro-cerniera rispetto al caso cerniera-cerniera; inoltre è maggiormente evidente nei primi modi (specialmente nei primi tre modi) e per lunghezze minori.
- Maggiore è la tensione a cui la catena è sottoposta maggiore sarà la frequenza rilevata (*fattore di tensione*);
- La prima frequenza aumenta nel caso d'incastro-incastro rispetto al caso cerniera-cerniera. L'aumento è maggiormente avvertito in caso di catene poco sollecitate (*fattore di vincolo*);
- La variazione in lunghezza ha valenza solo se combinato con altri fattori, quali ad esempio la rigidezza flessionale o le condizioni di vincolo. In generale, maggiore è la lunghezza minore è la frequenza rilevata (*fattore lunghezza*);

3.3 PROVA DI LABORATORIO

3.3.1 CONFIGURAZIONE DELLA PROVA SPERIMENTALE

Per verificare la correttezza dei metodi proposti per la determinazione del tiro e dei risultati numerici conseguiti è stata progettata una prova di laboratorio che si propone di testare dei tiranti, diversi tra loro per caratteristiche geometriche di sezione e lunghezza, sotto diverso sforzo tensionale. I modelli di tiranti sono stati determinati tramite l'utilizzo dei dati forniti dal Database e le loro caratteristiche sono riassunte in Tabella 3.42.

TABELLA 3.42 – PROVA DI LABORATORIO. CARATTERISTICHE DEI TIRANTI

Catena	Lunghezza, *L* [m]	Sezione rettangolare		E [GPa]	ρ [kg/m^3]
		b [mm]	h [mm]		
CAT 1	4,61	15	40	210	7850
CAT 2	4,61	20	30	210	7850
CAT 3	4,61	25	60	210	7850
CAT 4	4,61	30	50	210	7850
CAT 5	8,81	25	60	210	7850
CAT 6	8,81	30	50	210	7850

Le catene 1, 2, 3, 4 hanno una lunghezza minore a modello delle catene "corte", rappresentative dei tiranti presenti nelle logge o negli archi (Figura 3.18).

Le catene "lunghe" 5 e 6 sono invece rappresentative dei tiranti presenti ad esempio nelle navate delle chieste. Per l'esecuzione del test si prevedono di utilizzare alcune stanze dell'interrato del laboratorio. La prova richiede l'utilizzo di uno o due locali del laboratorio rispettivamente per le catene "corte" (Figura 3.18) e "lunghe" (Figura 3.19).

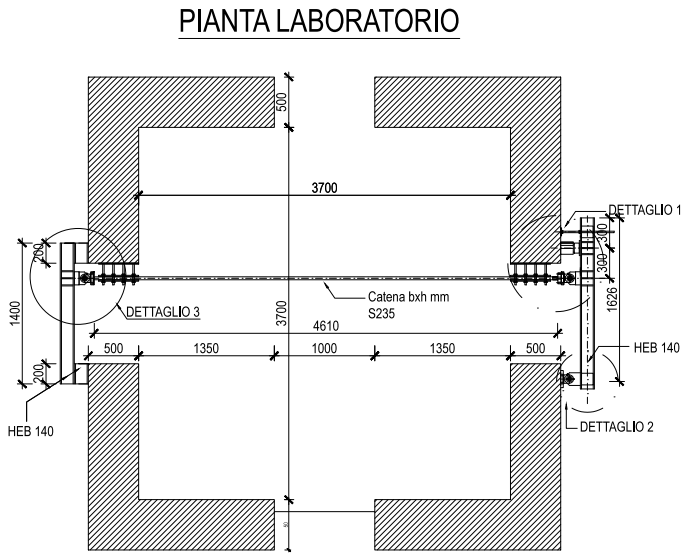


FIGURA 3.18 – PROVA DI LABORATORIO. SET UP DI PROVA PER LE CATENE "CORTE"

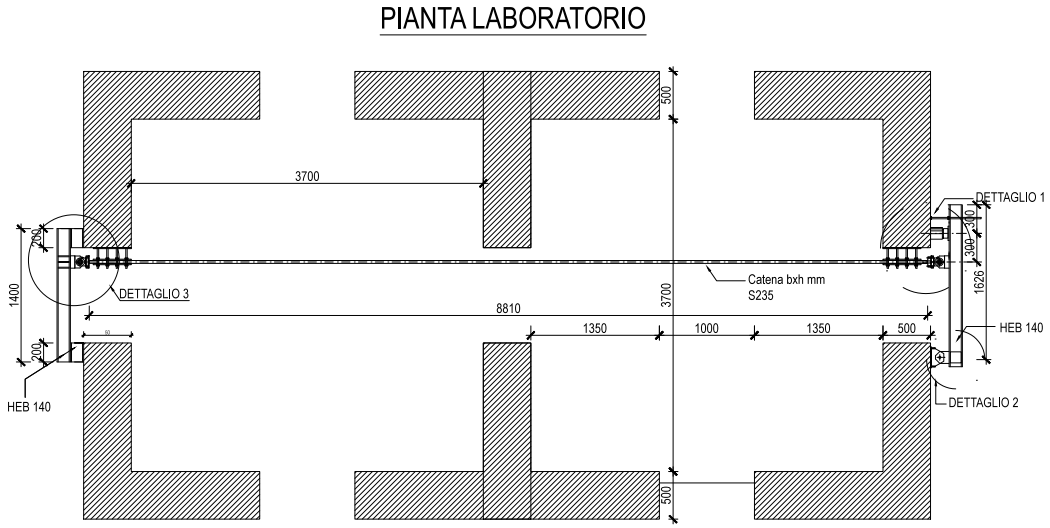


FIGURA 3.19 – PROVA DI LABORATORIO. SET UP DI PROVA PER LE CATENE "LUNGHE"

Per ogni catena il test è pensato per essere svolto simulando diverse condizioni di vincolo: dal caso di incastro perfetto a quello di cerniera perfetta, grazie alla regolazione del meccanismo di vincolo, composto da due piastre ed un sistema di barre filettate regolabili con l'interposizione di fogli di Teflon (Figura 3.20 e Figura 3.21).

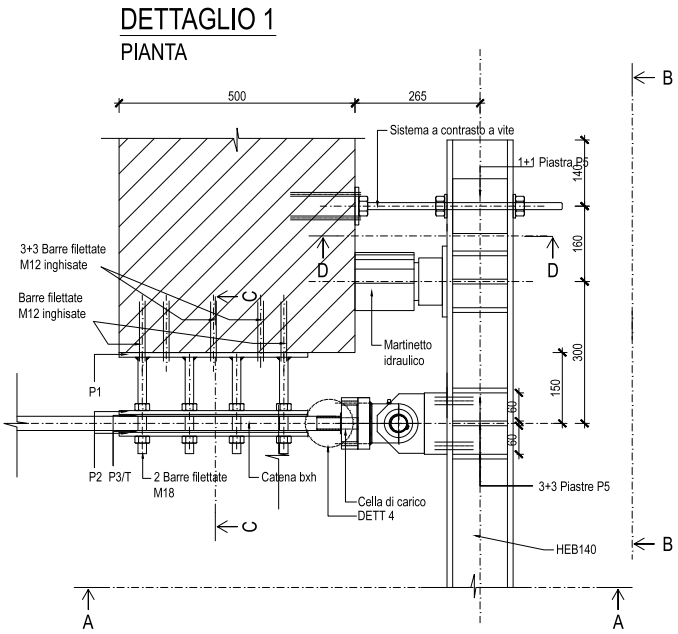


FIGURA 3.20 - PROVA DI LABORATORIO, DETTAGLIO 1. SISTEMA DI VINCOLO E FISSAGGIO DELLA CATENA

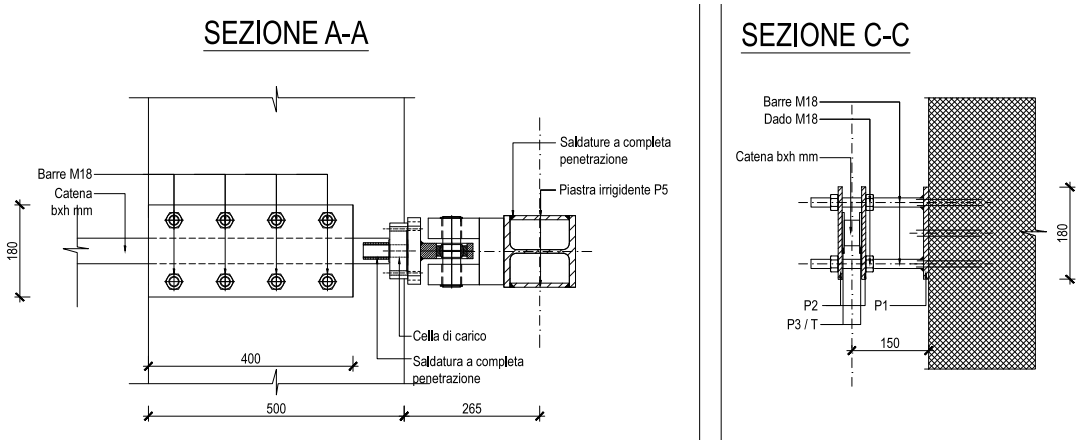


FIGURA 3.21 - PROVA DI LABORATORIO. SISTEMA DI VINCOLO. SEZIONE AA E CC.

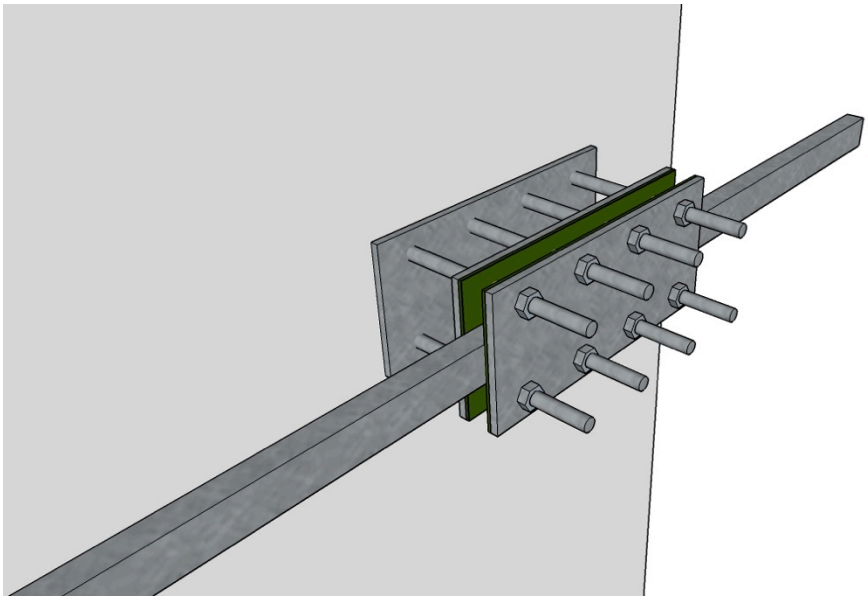


FIGURA 3.22 - PROVA DI LABORATORIO. MODELLO 3D DEL SISTEMA DI VINCOLO

Un'estremità della catena è fissata tramite un apposito sistema a cerniera garantito da uno snodo bidirezionale ad una trave HEB 140 Quest'ultima è ancorata da una parte al muro con un vincolo a cerniera dall'altro lato (Figura 3.23) è spinta da martinetto. La cella di carico si trova nella stessa estremità della catena legata al meccanismo di spinta con la funzione di controllo dello sforzo esercitato dal martinetto sulla trave.

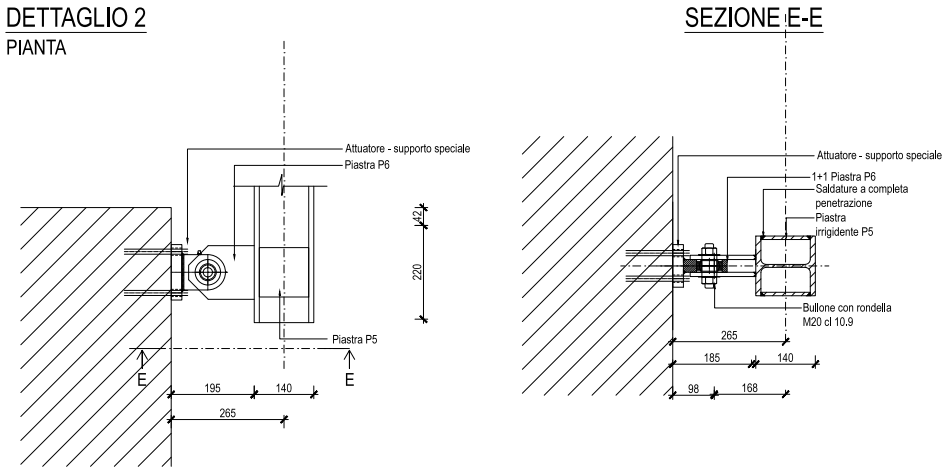


FIGURA 3.23 - PROVA DI LABORATORIO. DETTAGLIO 2. SISTEMA DI VINCOLO A CERNIERA DELLA TRAVE HEB 140

3.3.2 ATTREZZATURA E CALIBRAZIONE

La tipologia di analisi impiegata è basata sullo studio della risposta del sistema considerato ad una forzante ignota (Output Only Technique). Il test di laboratorio consiste nell'applicazione di sensori (accelerometri) e la registrazione della risposta del sistema ad una forzante.

Gli accelerometri sono strumenti di misura in grado di rilevare e misurare le accelerazioni del sistema sulla rilevazione dell'inerzia di una massa in esso contenuta (Figura 3.24).

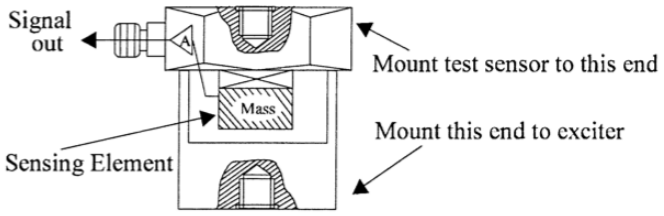


FIGURA 3.24 – PROVA DI LABORATORIO. MECCANISMO DI FUNZIONAMENTO DEGLI ACCELEROMETRI

Il test prevede il posizionamento di 7 accelerometri piezoelettrici (PCB Piezotronics 393 B12) come riportato in Figura 3.25.

Scopo della prova è anche verificare quanto il posizionamento dei dispositivi influisca sull'efficacia dell'identificazione dinamica delle catene e se risulta maggiormente efficace quanto più distanti risultano essere tra loro (Rebecchi et al., 2013). La disposizione proposta da Luong, anche se appare migliore, in quanto evita il posizionamento degli accelerometri nei nodi dei modi di vibrare, non si presta alle successive elaborazioni dei risultati in quanto non presenta un accelerometro centrale.

Il test prevede anche il posizionamento di tre trasduttori di movimento (LVDT) posti in mezzeria e ai quarti per consentire l'applicazione dei metodi di tipo statico, per la valutazione del valore di sforzo normale interno alla catena ed eventualmente leggere le flessioni tramite l'uso di strain-gauge.

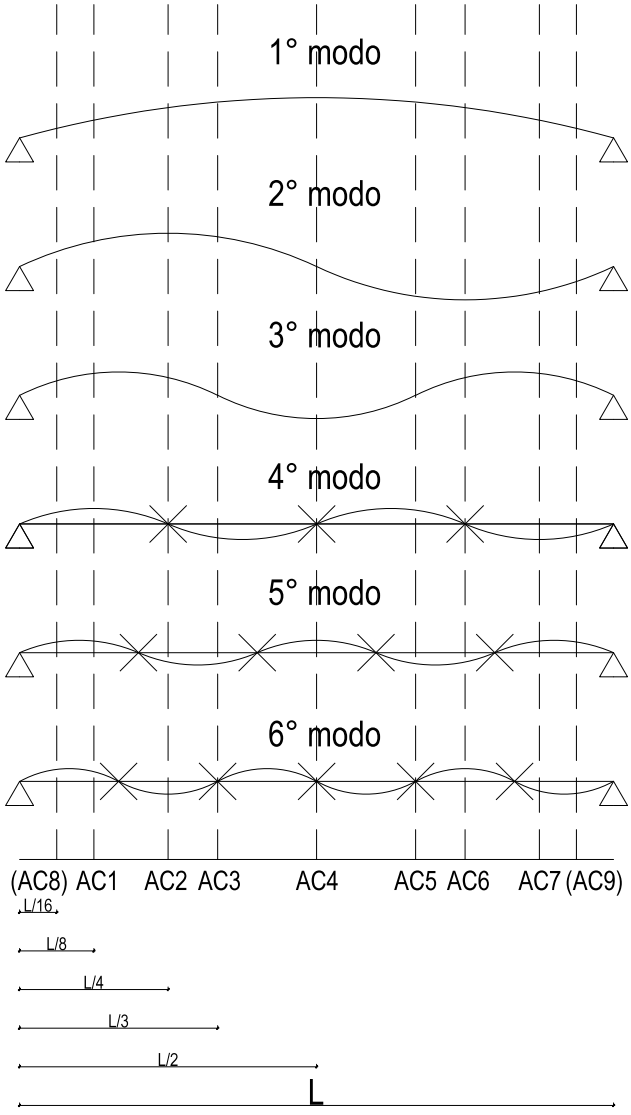


FIGURA 3.25 - PROVA DI LABORATORIO. POSIZIONAMENTO DEGLI ACCELEROMETRI

3.3.2.1 Controllo del valore di sforzo normale

La procedura da utilizzare per il controllo della forza di tensione applicata alla catena è la seguente:

- Prima di procedere all'applicazione della forza, misurare i valori di due trasduttori, a_1 e b_1;
- Calcolare lo sforzo normale desiderato σ_1;
- Calcolare la corrispondente deformazione elastica, $\varepsilon_1 = \sigma_1 / E$, e la corrispondente variazione di posizione, $\Delta L_1 = \varepsilon_1 L_0$;
- Calcolare il desiderato valore dei due trasduttori sommando o sottraendo i

valori reali con la desidera variazione di spostamento, $a_2 = a_1 \pm \Delta L_1$ e $b_2 = b_1 \pm \Delta L_1$ ("+" quando la forza viene applicata, "-" quando viene rilasciata);

- Applicare la forza e osservare le misure dei due trasduttori, utilizzando i valori di riferimento a_2 e b_2;
- Durante il procedimento, controllare il valore di sforzo normale e fermare l'applicazione di forza quando si è raggiunto il valore desiderato di sforzo normale.

3.3.2.2 Procedura sperimentale

Dopo il montaggio, la modalità di acquisizione dei dati sarà del tutto simile a quella tipicamente svolta *in situ*:

1. Prima di tendere la catena bisogna procedere con la misurazione delle grandezze geometriche (lunghezza e sezione) e il controllo della condizione di vincolo scelta tramite l'allentamento o il restringimento del sistema di vincolo;
2. Segnare la posizione degli accelerometri e montarli tramite morsetti in alluminio.
3. Collegare gli accelerometri, tramite cavi, al sistema di acquisizione, facendo attenzione che essi non siano tesi affinché non compromettano l'acquisizione del segnale;
4. Iniziare il test da una condizione iniziale di sforzo normale $\sigma_0 = 0$ MPa (senza applicare nessuna forza). Si raccomanda di acquisire due registrazioni ambientali e due con forzante per ogni step di carico. Prendere nota delle accelerazioni registrate dai sensori e ripetere la procedura aumentando lo sforzo assiale.



1. Applicazione del morsetto e accelerometro nei punti in precedenza segnati



2. Collegamento tramite cavo all'unità di acquisizione

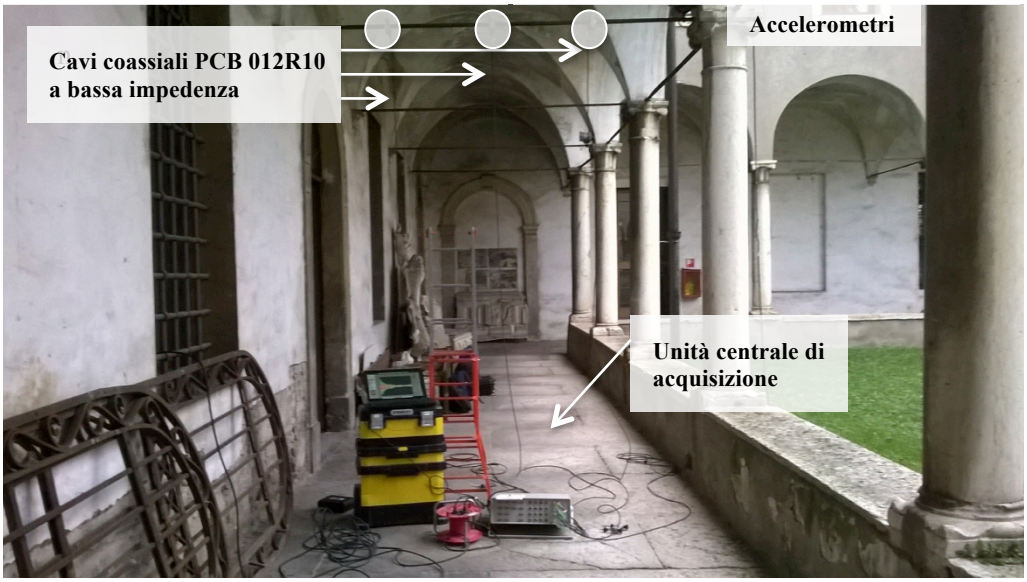


FIGURA 3.26 – PROVA DI LABORATORIO. ESEMPLIFICAZIONE DELLE FASI DI PREPARAZIONE E SETTAGGIO PER L'ACQUISIZIONE DEI DATI (FOTO: SBAP, VR).

Figura 3.27 mostra un esempio di 4 differenti stati di tensione applicati alla catena. La prima misurazione corrisponde allo stato di tensione della catene scarica, le altre tre misurazioni corrispondono all'applicazione successiva di una maggiore forza tensionale.

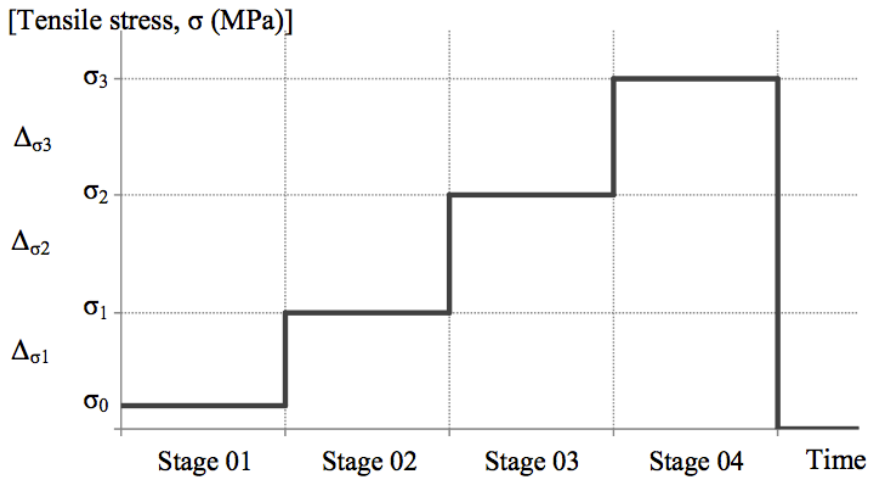


FIGURA 3.27 – PROVA DI LABORATORIO. SCHEMA GENERALE DI ACQUISIZIONE SECONDO DIVERSI STEP DI CARICO (LUONG, 2010)

Supponendo un $\Delta\sigma = 20$ MPa, per ogni catena andranno acquisite le registrazioni per le diverse condizioni di vincolo nei diversi stati tensionali: $\sigma = 0 – 25 – 50 – 100 – 150$ MPa. Il totale di registrazioni per catena sarà dunque il prodotto del numero di condizioni di vincolo sperimentate per il numero di step di carico per il numero di acquisizioni effettuato per ogni prova (4).

4 ELABORAZIONE E ANALISI DEI DATI

4.1 ANALISI DEI METODI PER LA DETERMINAZIONE DEL TIRO

4.1.1 TEORIA DEI FILI TESI

L'elaborazione, tramite il metodo derivante dalla teoria dei fili tesi, viene eseguita mediante l'impiego della sola prima frequenza propria di vibrazione utilizzando l'equazione:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{4.1}$$

Sapendo che la pulsazione è ω= 2πf, si passa a considerare i due casi limite possibili per la definizione del grado d'incastro. Si avrà dunque il primo caso in cui ipotizzando un incastro perfetto e dunque una lunghezza libera d'inflessione pari a l/2 si perviene, tramite alcuni passaggi omessi per brevità, alla:

$$T = f^2 l^2 \mu \tag{4.2}$$

Nella seconda ipotesi invece si schematizzano i vincoli come cerniere perfette e dunque la lunghezza libera d'inflessione in questo caso sarà pari a *l*; tramite alcuni passaggi si perviene alla:

$$T = 4f^2 l^2 \mu \tag{4.3}$$

Le due equazioni, la (4.1) e la (4.2), si presentano come soluzione ai due casi limite entro il cui intervallo si porrà il caso reale e definiscono il tiro di una catena considerata perfettamente incastrata e perfettamente incernierata alle due estremità.

I termini espressi nelle formule sono i seguenti:

- $\boldsymbol{T}$ = forza di tiro della fune espressa in [N]
- $\boldsymbol{f}$ = prima frequenza propria di vibrazione ricavata tramite la FFT espressa in [Hz]
- $\boldsymbol{l}$ = lunghezza della fune in esame espressa in [m]
- $\boldsymbol{\mu}$ = densità lineare pari a 7850*S misurata in [kg/m]
- $\boldsymbol{S}$ = sezione della fune misurata in [m^2]

4.1.1.1 Esempi di risoluzione numerica

Per l'applicazione del metodo si è scelto di considerare quattro catene, modellate ad elementi finiti, che a parità di area (A) e lunghezza (l) hanno una diversa rigidezza flessionale (EJ):

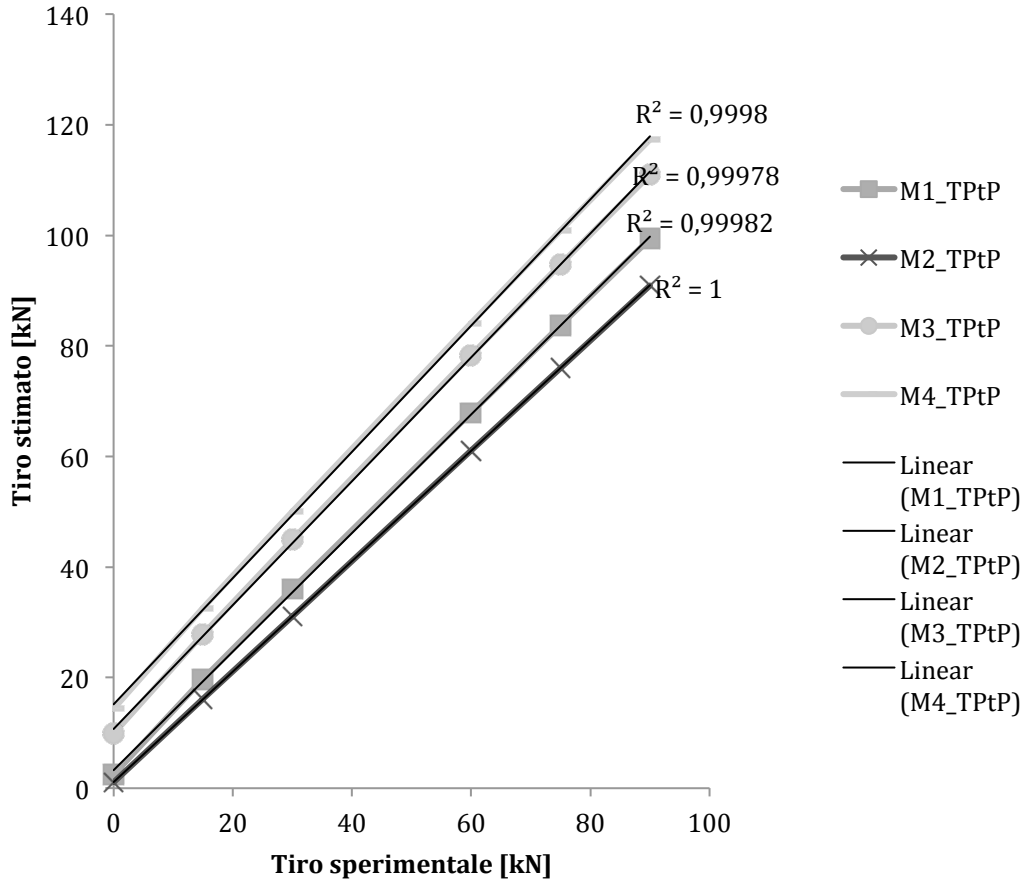
ID	b [mm]	h [mm]	A [mm^2]	J [mm^4]	l [m]	b/h
M1	10	60	600	5000	4610	0,167
M2	15	40	600	11250	4610	0,375
M3	20	30	600	20000	4610	0,667
M4	24	25	600	28800	4610	0,96

Nelle seguenti tabelle sono riportati i tiri cui sono state sottoposte in condizione di vincolo generiche (G=0,5) e le prime frequenze rilevate:

T sperimentale [kN]	*M1* [Hz]			*M4* [Hz]			*M3* [Hz]			*M4* [Hz]		
	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
0	2,49	6,88	13,49	3,74	10,30	20,19	4,97	13,69	26,84	5,99	16,52	32,38
15	7,02	14,67	23,48	7,63	16,63	27,91	8,33	18,94	33,04	9,02	21,11	37,71
30	9,48	19,42	30,21	10,01	21,02	33,84	10,60	22,94	38,21	11,18	23,8	42,35
60	13,02	26,36	40,31	13,48	17,68	43,23	13,99	29,24	46,78	14,49	30,81	50,3
75	14,46	29,19	44,47	14,90	30,43	47,19	15,38	31,89	50,50	15,87	33,38	53,81
90	15,75	31,76	48,26	16,18	32,94	50,82	16,65	34,33	53,94	17,12	35,75	57,09

T sperimentale [kN]	M1		M2		M3		M4	
	T_{FF} [kN]	T_{PtP} [kN]	T_{FF} [kN]	T_{PtP} [kN]	T_{FF} [kN]	T_{PtP} [kN]	T_{FF} [kN]	T_{PtP} [kN]
0	0,62	2,48	0,27	1,10	2,47	9,88	3,59	14,37

15	4,93	19,73	4,02	16,09	6,95	27,81	8,14	32,58
30	9,00	35,98	7,77	31,08	11,25	45,00	12,51	50,05
60	16,97	67,87	15,26	61,04	19,59	78,35	21,02	84,07
75	20,93	83,72	19,00	76,01	23,68	94,72	25,21	100,84
90	24,83	99,32	22,74	90,97	27,75	111,00	29,34	117,35



4.1.1.2 Conclusioni

Il metodo non è attendibile considerando che la stima del tiro è del tutto indipendente dalla rigidezza flessionale della catena, che invece ne influenza le proprietà dinamiche (Luong, 2010); il modello, infatti, è quello di fune con rigidezza flessionale trascurabile, tale semplificazione della realtà non è adatta a rappresentare i casi di tiranti storici, che spesso presentano rigidezze non trascurabili. Inoltre la teoria suggerisce un *range* di valori compresi tra due casi limite: vincoli ad incastro perfetto o a cerniera perfetta, tale intervallo di valori può risultare di un ordine di grandezza importante e quindi non può fornire una stima, anche approssimata, del tiro.

4.1.2 DARDANO, MIRANDA, PERSICHETTI & VALVO (2005)

Nel paragrafo si espone il metodo proposto da Dardano & al. per la stima del tiro dei tiranti storici.

Il tirante viene modellato come una trave tenso-inflessa, di geometria e massa note, dotata di incastri elastici ad entrambe le estremità. I tre parametri incogniti da determinare sono: il tiro della catena, N, e le rigidezze delle molle rotazionali, k_A e k_B (Figura 4.1).

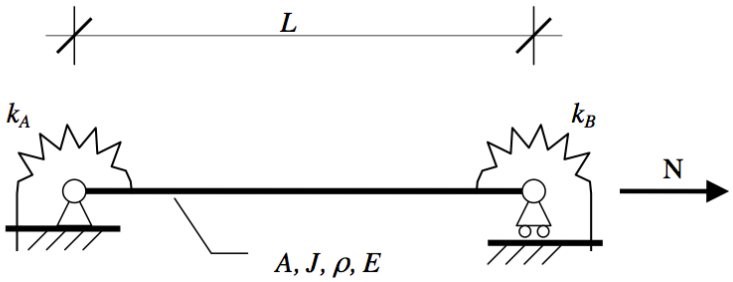


FIGURA 4.1 - DARDANO. SCHEMA STATICO DEL MODELLO DI CATENA

L'equazione differenziale del moto viene così scritta:

$$EJ\,\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - N\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.4)$$

dove:

- L: lunghezza della trave
- A: area della sezione
- J: momento di inerzia della sezione
- ρ: densità
- E: modulo di Young del materiale della catena
- $w(x,t)$: spostamento in direzione trasversale della sezione di ascissa x al tempo t.

Le condizioni al contorno si scrivono imponendo, ad ogni istante del moto, l'annullarsi degli spostamenti trasversali alle estremità:

$$w(x,t)|_{x=0} = 0 \qquad w(x,t)|_{x=L} = 0, \forall t \geq 0 \qquad (4.5\ \text{A,B})$$

e la presenza di momenti di incastro proporzionali alle rotazioni nelle medesime

sezioni:

$$-EJ\left.\frac{\partial w^2(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = -k_A\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$$
$$-EJ\left.\frac{\partial w^2(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=L} = -k_B\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}, \forall t \geq 0 \quad (4.6\ \text{A,B})$$

Posti i parametri α e β:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4(\lambda\omega/c)^2}-1}{2\lambda^2}}$$
$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4(\lambda\omega/c)^2}+1}{2\lambda^2}} \quad (4.7\ \text{A,B})$$

Con

$$\lambda^2 = \frac{EJ}{N}$$
$$c^2 = \frac{N}{\rho A} \quad (4.8\ \text{A,B})$$

Omettendo per semplicità i passaggi intermedi, la soluzione si ricava risolvendo per via numerica l'equazione:

$$DET = 2\left(\frac{EJ}{L}\right)^2 (d_1 sinh\beta L + d_2 cosh\beta L - 2\mu_A\mu_B\alpha\beta) = 0 \quad (4.9)$$

dove:

$$d_1 = (\mu_A+\mu_B)\alpha(\alpha^2+\beta^2)Lcos(\alpha L) + [\mu_A\mu_B(\alpha^2-\beta^2) - (\alpha^2+\beta^2)^2L^2]\sin(\alpha L)$$
$$d_2 = 2\mu_A\mu_B\alpha\beta cos(\alpha L) - (\mu_A+\mu_B)\beta(\alpha^2+\beta^2)Lsin(\alpha L) \quad (4.10\ \text{A,B})$$

E si sono introdotte le rigidezze adimensionali delle molle rotazionali,

$$\mu_A = \frac{k_A L}{EJ}$$
$$\mu_B = \frac{k_B L}{EJ} \quad (4.11\ \text{A,B})$$

Nello studio presentato ci si limita a considerare il caso, peraltro non infrequente nella pratica, in cui i vincoli di estremità sono uguali tra loro, per cui $k_A = k_B = k$ e $\mu_A = \mu_B = \mu$.

Si definisce, inoltre, il "grado di incastro" G il rapporto tra il momento di incastro della trave con incastri elastici e quello della trave con incastri perfetti, entrambe soggette al medesimo carico uniformemente distribuito.

$$G = \frac{\mu(\mu + 6)}{\mu^2 + 8\mu + 12} \tag{4.12}$$

Supponendo note le prime due frequenze proprie della struttura, f_1 e f_2, attraverso l'equazione (4.9) è possibile calcolare i corrispondenti valori del tiro, N_1 e N_2, in funzione del grado di incastro G. Riportando le curve in un grafico, la loro intersezione fornisce la soluzione del problema, permettendo anche di ricavare, utilizzando le relazioni (4.11 a,b) e (4.12), il valore della rigidezza delle molle *k*.

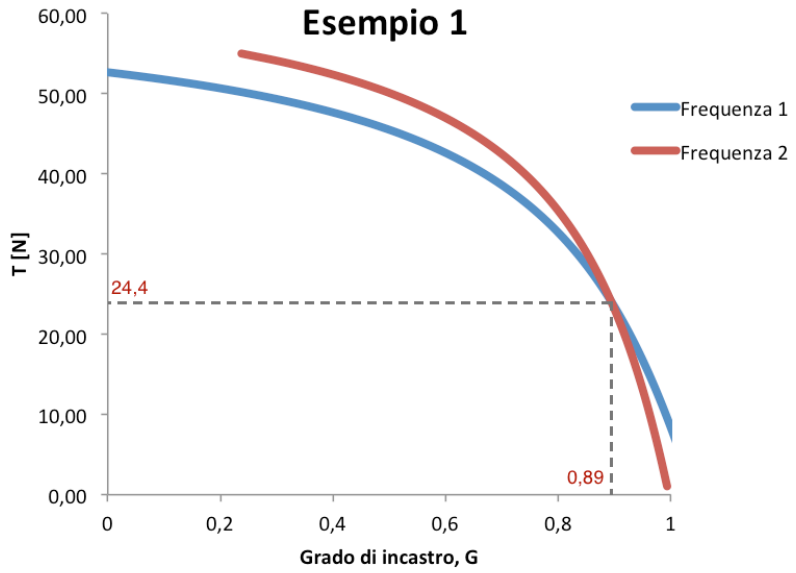
4.1.2.1 Esempi di risoluzione numerica

L'esempio riportato è tratto direttamente dalla pubblicazione scientifica in analisi, per avere un confronto dell'utilizzo corretto del metodo. I calcoli sono stati condotti tramite utilizzo di foglio di calcolo Microsoft Excel.

Dati noti:

- Il diametro *d*, la lunghezza *L*
- Densità ρ
- Modulo di Young *E*
- Prima e seconda frequenza fondamentale f_1 e f_2

d [mm]	**L [m]**	**E [MPa]**	**ρ [kg/m^3]**	**f_1 [Hz]**	**f_2 [Hz]**
40	5,0	206000	7830	8,0	20,0



Risultato:

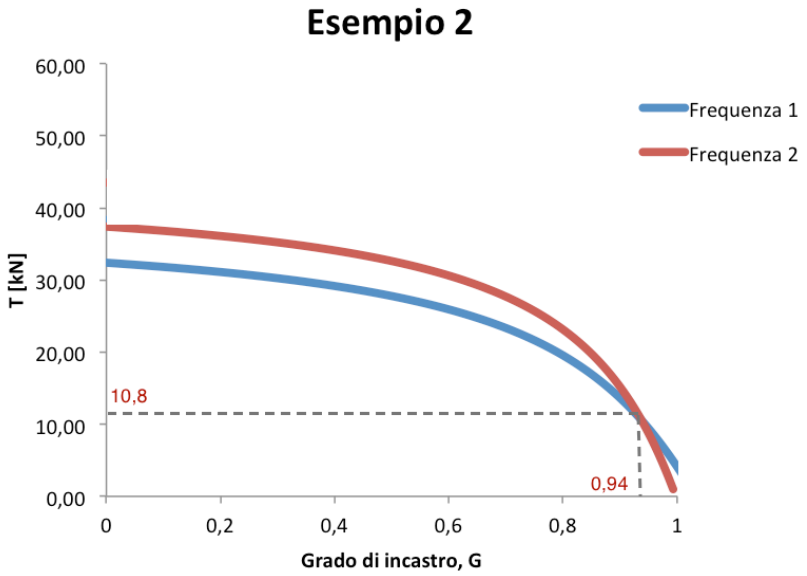
N [kN]	**G**	**k [Nmm/rad]**
24,4	0,89	85697

Il caso fornisce gli stessi risultati ottenuti nella documentazione del metodo. La correttezza del procedimento utilizzato è confermata anche da un successivo esempio applicativo presente nell'articolo, relativo alla torre campanaria della Cattedrale di Ruvo in Puglia.

Dati noti:

- Il diametro d, la lunghezza L
- Densità ρ
- Modulo di Young E
- Prima e seconda frequenza fondamentale f_1 e f_2

d [mm]	**L [m]**	**E [MPa]**	**ρ [kg/m^3]**	**f_1 [Hz]**	**f_2 [Hz]**
30	3,5	206000	7830	12,1	30,68



Risultato:

N [kN]	G	k [Nmm/rad]
10,8	0,94	68157

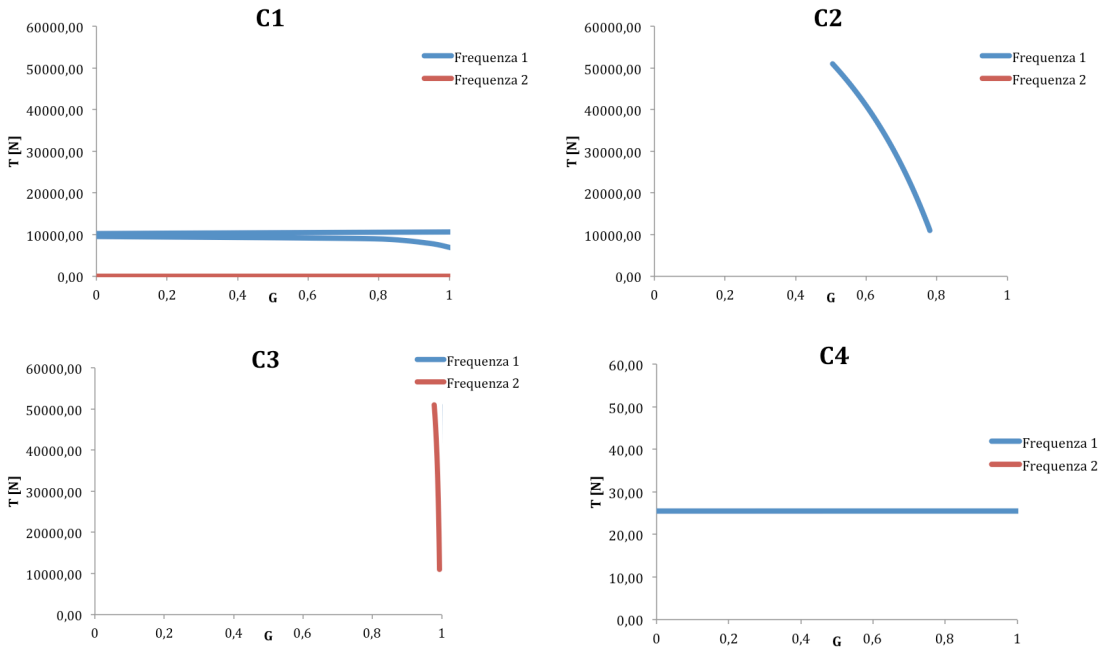


FIGURA 4.2 - TORRE DEGLI ANZIANI (PD): ELABORAZIONE SECONDO METODO DARDANO, CATENE C1, C2, C3, C4

Il metodo è stato successivamente provato per la determinazione del tiro delle catene testate nel caso di Torre degli Anziani a Padova, senza portare a nessun risultato numerico (Figura 4.2).

4.1.2.2 Conclusioni

Il metodo Dardano pare essere maggiormente efficace nello studio di catene tozze e poco sollecitate con condizioni di vincolo prossimo all'incastro, ma risulta essere molto sensibile alla variazione di misure geometriche. Le verifiche numeriche suggeriscono però la non attendibilità del metodo, in quanto non presenta risultati per casi diversi da quelli proposti nella pubblicazione scientifica analizzata.

4.1.3 LAGOMARSINO & CALDERINI (2005)

Nel paragrafo si espone il metodo proposto da Lagomarsiono e Calderini per la stima del tiro dei tiranti storici. Il tirante viene modellato come una trave prismatica soggetta a una forza assiale costante, di geometria e massa note, dotata di incastri elastici ad entrambe le estremità (Figura 4.3).

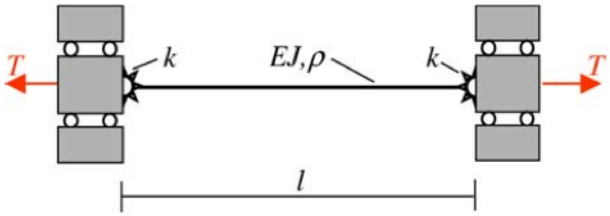


FIGURA 4.3 - LAGOMARSINO E CALDERINI . SCHEMA STATICO DEL MODELLO UTILIZZATO

I tre parametri incogniti da determinare sono: il tiro della catena *T*, le rigidezze delle molle rotazionali *k*, e la rigidezza flessionale della sezione *EJ*. A partire dalle equazioni (4.4) - (4.7 a,b) gli autori propongono una soluzione numerica.

Si assume come valore di riferimento la prima frequenza modale della catena in caso di vincolo cerniera-cerniera:

$$\overline{\omega} = \pi^2 \sqrt{\frac{EJ_s}{\rho l^4}} \tag{4.13}$$

Dove EJ_S rappresenta il valore di riferimento empirico della rigidezza flessionale *EJ,* e introducendo i tre parametri:

$$\varphi = 2\pi^2 \frac{EJ_s}{Tl^2}, \quad \gamma = \frac{kl}{EJ_s}, \quad \delta = \frac{EJ}{EJ_s} \tag{4.14 A,B,C}$$

È possibile riscrivere l'equazione caratteristica del sistema in forma adimensionale, come:

$$\begin{aligned} g\left(\varphi,\gamma,\delta,\frac{\omega_n}{\overline{\omega}}\right) = \sin\alpha \sinh\beta * \left[(\alpha^2+\beta^2)^2 - \frac{\gamma^2}{\delta^2}\,(\alpha^2-\beta^2)\right] \\ + \; 2\frac{\gamma}{\delta}(\alpha^2+\beta^2)(\beta\sin\alpha\cosh\beta - \alpha\cos\alpha\sinh\beta) \\ - \; 2\frac{\gamma^2}{\delta^2}\alpha\beta(\cos\alpha\cosh\beta - 1) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dove:

$$\alpha = \pi\sqrt{\frac{1}{\delta\varphi}\left(\sqrt{1+\delta\varphi^2\left(\frac{\omega_n}{\overline{\omega}}\right)^2} - 1\right)}$$

$$\beta = \pi\sqrt{\frac{1}{\delta\varphi}\left(\sqrt{1+\delta\varphi^2\left(\frac{\omega_n}{\overline{\omega}}\right)^2} + 1\right)} \tag{4.16 A,B}$$

In generale, per determinare i parametri φ, γ e δ è necessario conoscere almeno le prime tre frequenze naturali di vibrazione della catena e la soluzione al sistema a tre equazioni non lineari:

$$\begin{cases} g_1 = g\left(\varphi,\gamma,\delta,\frac{\omega_1}{\overline{\omega}}\right) = 0 \\ g_2 = g\left(\varphi,\gamma,\delta,\frac{\omega_2}{\overline{\omega}}\right) = 0 \\ g_3 = g\left(\varphi,\gamma,\delta,\frac{\omega_3}{\overline{\omega}}\right) = 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

Al posto di cercare una soluzione numerica al sistema (4.17) Lagomarsiono e Calderini propongono di fare affidamento sulla minimizzazione di una funzione *G*:

$$G\left(\varphi,\gamma,\delta,\frac{\omega_1}{\overline{\omega}}\right) = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \tag{4.18}$$

La minimizzazione di *G* è condotta tramite una *IMSL routine.*

4.1.3.1 Esempi di risoluzione numerica

L'esempio riportato è tratto direttamente dalla pubblicazione scientifica in analisi, per avere un confronto dell'utilizzo corretto del metodo. I calcoli sono stati condotti

tramite utilizzo di foglio di calcolo Excel.

Dati noti:

- Il diametro *d*, la lunghezza *L*
- Densità ρ
- Modulo di Young *E*
- Prime tre frequenze fondamentali f_1, f_2, f_3.

ID	d/2 [m]	L [m]	E [MPa]	ρ [kg/m^3]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
san vito - 1	0,0135	3,77	210000	7850	17,33	40,82	72,80
san vito - 2	0,0135	3,77	210000	7850	18,60	42,29	73,61
san vito - 3	0,0135	3,77	210000	7850	19,19	40,70	66,40

Risoluzione numerica:

TABELLA 4.1

ID	T [N]	φ	ϒ	δ	G
San Vito - 1	31984,00	0,349558958	11,28	1,07	**6,63E+15**
San Vito - 2	36904,00	0,304913857	21,85	0,87	**1,71E+18**
San Vito - 3	74059,00	0,102733822	22,28	0,97	**2,22E+21**

Nonostante si siano inseriti nella (4.15) i valori corretti dei tre parametri adimensionali φ, γ e δ riportati nella pubblicazione al fine di calcolare g_1, g_2, g_3 e quindi *G* con la (4.18) i risultati non sono concordi con quelli registrati dagli autori.

4.1.3.2 Conclusioni

Non è stato possibile utilizzare il metodo in quanto i risultati non sono concordi con quelli della pubblicazione scientifica analizzata. Inoltre non è stato possibile implementare il calcolo di minimizzazione della funzione *G*.

4.1.4 PARK ET AL. (2006)

Nel paragrafo si espone il metodo proposto da Park & al. per la stima del tiro dei tiranti. La procedura di identificazione dinamica utilizzata si può riassumere nei seguenti passaggi:

1. Creazione di un modello FE del tirante analizzato;

2. Calcolo della matrice di sensitività A del modello FE;
3. Calcolo della variazione degli autovalori, Z, tra il modello FE e della struttura reale
4. Variazione dei parametri di rigidezza dei vincoli e di forza assiale del modello FE utilizzando le relazioni: $k^*_j = k_j(1+\alpha_j)$ e $P^* = P(1+\psi)$;
5. Ripetere i passaggi (2)-(5) fino a convergenza ($\alpha_j \approx 0$ e $\psi \approx 0$)

Si considera un modello di tirante soggetto a sforzo assiale P. Si supponga che il modello sia composto da r elementi e da q masse discrete. Siano λ_i ($i=1,...,n$) gli auto-valori identificabili della struttura; e m_n ($n=1,...,q$) rappresenta l'*n-sima* massa discreta del modello; k_j ($j=1,...,r$) rappresenta la rigidezza del *j-esimo* elemento strutturale. Se si assume che la massa della barra rimanga costante, allora:

$\lambda_i = \lambda_i (k_1, ..., k_r; m_1, \ldots, m_q; P)$

Al fine di creare la massa di sensitività A per un limitato numero di frequenze, si utilizza la seguente procedura:

1. Si costruisce un modello FE di partenza e si calcolano gli auto-valori λ_i ($i=1,...,n$) del modello;
2. Si impone $\gamma_k = \gamma$ mentre gli altri $\gamma_j = 0$ ($j \neq k$);
3. Si calcolano λ^*_i ($i=1,...,n$) della struttura da identificare;
4. Si calcolano le sensitività degli auto-valori $Z_i = \delta\lambda_i / \lambda_i$ ($i=1,...,n$) dove $\delta\lambda_i = \lambda^*_i - \lambda_i$;
5. Si calcola l'elemento *i-k* della matrice di sensitività A utilizzando il risultato di $A_{ik} = K_i / \gamma$;
6. Ripetere 2-5 per $k = 1, \ldots, r$.

4.1.4.1 Conclusioni

Non è stato possibile utilizzare il metodo in quanto non è stato possibile calcolare la suddetta matrice di sensibilità del modello FE.

4.1.5 TULLINI & LAUDIERO (2008)

Nel paragrafo si espone il metodo proposto da Tullini & al. per la stima del tiro dei tiranti storici.

Il tirante viene modellato come una trave prismatica soggetta a una forza assiale costante, di geometria e massa note, dotata di incastri elastici ad entrambe le estremità.

I tre parametri incogniti da determinare sono: il tiro della catena, N, e le rigidezze delle molle rotazionali, k_A e k_B.

Utilizzando la coordinata adimensionale x=X/L e non considerando l'inerzia rotazionale e le deformazioni a taglio, le frequenze circolari ω e le vibrazioni modali *v(x)* sono governate dall'equazione:

$$v'''(x) - nv''(x) + \lambda^4 v(x) = 0, 0 < x < 1 \quad (4.19)$$

$$v(0) = 0, v''(0) - \beta_0 v'(0) = 0, per\ x = 0 \quad (4.20\ A,B)$$

$$v(1) = 0, v''(1) + \beta_1 v'(1) = 0, per\ x = 1 \quad (4.21\ A,B)$$

Definiamo:

$$n = \frac{NL^2}{EJ},\ \ \lambda^4 = \omega^2 \frac{\mu L^4}{EJ},\ \ \beta_0 = \frac{k_0 L}{EJ},\ \ \beta_1 = \frac{k_1 L}{EJ}, \quad (4.22\ A,B,C,D)$$

La soluzione dell'equazione (2.1) è quindi:

$$v(x) = C_1 cosq_1 x + C_2 sinq_1 x + C_3 coshq_2 x + C_4 sinhq_2 x \quad (4.23)$$

Dove

$$q_1^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2 + 4\lambda^4} - n\right),\ \ q_2^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2 + 4\lambda^4} + n\right) = q_1^2 + n \quad (4.24\ A,B)$$

Al fine di stimare il carico assiale N e le rigidezze k_0 e k_1, è necessario conosce la prima frequenza fondamentale del sistema e le corrispondenti ampiezze modali nei tre punti di coordinate X_1, X_2, X_3, nel caso in esame in mezzeria e ai quarti. Per questo caso particolare vale:

$$\frac{v_1 + v_3}{v_2} = \frac{1 + 2\cos(q_1/4)\cos(q_2/4)}{\cos(q_1/4) + \cosh(q_2/4)} \quad (4.25)$$

Con

$$\beta_0 = (q_1^2 + q_2^2)\frac{a(v_1/v_2) - b}{c(v_1/v_2) - d},\ \ \beta_1 = (q_1^2 + q_2^2)\frac{a(v_3/v_2) - b}{c(v_3/v_2) - d} \quad (4.26\ A,B)$$

Dove le costanti *a,b,c,d* sono definite dalle seguenti relazioni:

$$a = sinq_1 sinh\frac{q_2}{2} - sin\frac{q_2}{2} sinhq_2,\ \ b = \sin q_1 \sinh\frac{q_2}{4} - \sin\frac{q_1}{4} sinhq_2 \quad (4.27\ A,B)$$

$$c = 2(cos\frac{q_1}{2} - cosh\frac{q_2}{2})(q_1 \cos\frac{q_1}{2}\sinh\frac{q_2}{2} - q_2 \sin\frac{q_1}{2}\cosh\frac{q_2}{2}) \quad (4.21\ C)$$

$$d = q_1\left(\cos q_1 \sinh\frac{q_2}{4} + \sinh\frac{3q_2}{4} - \cos\frac{q_1}{4}\sinh q_2\right) + q_2(\cosh q_2 \sinh\tfrac{q_1}{4} + \sin\tfrac{3q_1}{4} - \cosh\tfrac{q_2}{4}\sin q_1) \quad (4.21\ \text{D})$$

L'equazione trascendente (4.25) consente di ricavare i valori di *n* (funzione del tiro *N*) corrispondenti a qualsiasi valore (sperimentale) di λ.

4.1.5.1 Esempi di risoluzione numerica

L'esempio riportato è tratto direttamente dalla pubblicazione scientifica in analisi, per avere un confronto dell'utilizzo corretto del metodo. I calcoli sono stati condotti tramite utilizzo del software di calcolo MATLAB®.

Dati noti:

- Il diametro *d*, la lunghezza *L*
- Densità *ρ*
- Modulo di Young *E*
- Prima frequenza fondamentale f_1 e forme modali v_1, v_2, v_3.

d [mm]	**L [mm]**	**E [MPa]**	**ρ [kg/m^3]**	**v_1/v_2**	**v_3/v_2**	**f_1 [Hz]**
20	3625	196000	7850	0,624	0,611	6,66

Dati sperimentali:

λ^4 [rad^2]	**n**	**q_1^2**	**q_2^2**	**N [kN]**	**k_0**	**k_1**
4,84E+02	1,39E+01	1,61E+01	3,01E+01	**1,632**	5,73E+06	6,70E+06

4.1.5.2 Esempi di risoluzione numerica

I risultati sono concordi a quelli riportati nell'articolo di riferimento, confermando la correttezza del procedimento utilizzato. Il calcolo è stato svolto per tutti gli esempi proposti nella pubblicazione dando sempre risultati positivi. Il metodo pare quindi essere attendibile.

4.1.6 AMABILI ET AL. (2010)

Nel paragrafo si espone il metodo proposto da Amabili & al. per la stima del tiro dei tiranti storici.

Il tirante viene modellato come una trave prismatica di Timoshenko; alle estremità si ipotizzano appoggi elastici di Winkler per simulare le interazioni tra la catena la muratura in cui è inserita (Figura 4.4). La lunghezza *L* e la sezione *A* sono note.

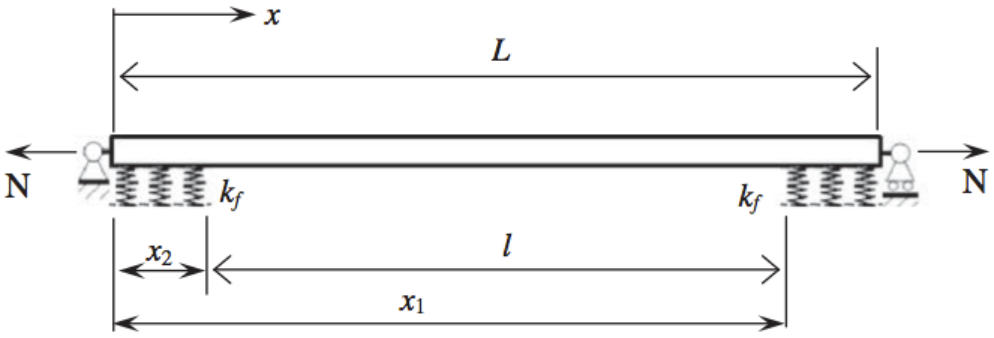


FIGURA 4.4 – AMABILI. SCHEMA STATICO DEL MODELLO UTILIZZATO.

Viene introdotta la differenza pesata tra le frequenze naturali calcolate da modello FE e quelle registrate:

$$err_{RMS}(F, k_f) = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\delta_i^2} \tag{4.28}$$

dove M è il numero dei modi naturali inclusi nel processo di identificazione e δ la differenza tra il modo i-esimo calcolato e stimato. La funzione data dall'equazione (4.28) viene minimizzata per un set di valori delle due incognite, la forza assiale e la rigidezza vincolare (F, k_f), portando quindi alla identificazione della forza assiale F.

Per l'onerosità dei calcoli è stato necessario sviluppare un apposito codice, confrontato poi con l'utilizzo di un software commerciale ABAQUS.

4.1.7 LUONG (2010)

Luong, a seguito di un'analisi parametrica sulle caratteristiche che influenzano la risposta dinamica dei tiranti storici, propone dei grafici per le tre condizioni limite di vincolo che si possono trovare: cerniera-cerniera (pinned-pinned end condition),

incastro-cerniera (fixed-pinned end condition) e incastro-incastro (fixed fixed end condition).

Il grafico proposto I-a (Figura 4.5) per il caso di vincolo cerniera-cerniera si basa sull'utilizzo dell'equazione (3.1) con i valori di h/L che variano da 0,0004 a 0,04 e gli altri parametri: n = 1, L = 1 m, σ = 0 – 200 MPa, E = 210 GPa, ρ = 7850 kg/m^3. I grafici I-b e I-c per i casi incastro-cerniera e incastro-incastro (Figura 4.6 e Figura 4.7) sono calcolati moltiplicando le frequenze del caso a cerniere perfette per il fattore della prima forma modale (caso peggiore).

I fattori di correzione utilizzati nei grafici per il rapporto h/L e la frequenza f sono:

Sezione rettangolare	**Sezione circolare**
$\begin{cases} \left(\frac{h}{L}\right)_{corrected} = [n_1]\left(\frac{h_1}{L_1}\right) \\ f_{n_{corrected}} = \left[\left(\frac{1}{n_1}\right)L_1\right]f_1 \end{cases}$	$\left(\frac{h}{L}\right)_{corrected} = [0{,}8660(n_1)]\left(\frac{h_1}{L_1}\right)$ $f_{n_{corrected}} = \left[0{,}9098\left(\frac{1}{n_1}\right)L_1\right]f_1$

Dove h_1, L_1, n_1, f_1 sono i parametri di una qualsiasi catena; $(h_1/L_1)_{\text{corrected}}$ e $f_{1\ corrected}$ sono i valori da utilizzare con i grafici.

Per verificare il valore dello sforzo normale presente utilizzando i grafici di Luong è necessario:

- Calcolare il rapporto h/L
- Calcolare il valore $(h_1/L_1)_{\text{corrected}}$
- Calcolare il valore $f_{1\ corrected}$
- Utilizzare i grafici

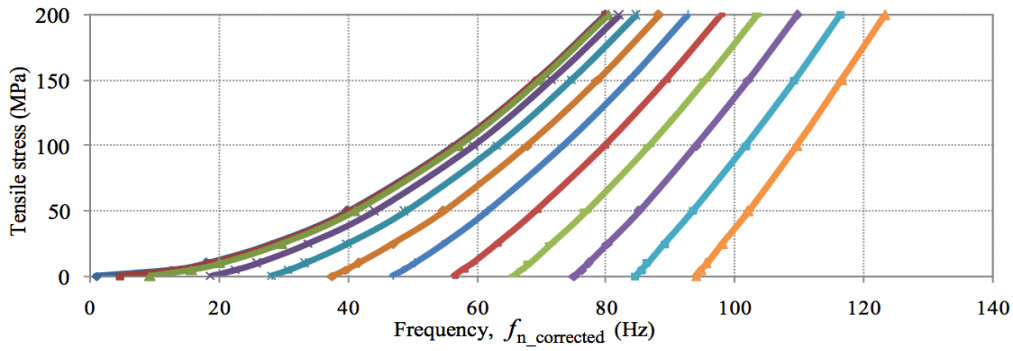


FIGURA 4.5 - LUONG, STANDARD CHART, I-A (PINNED-PINNED END CONDITION)

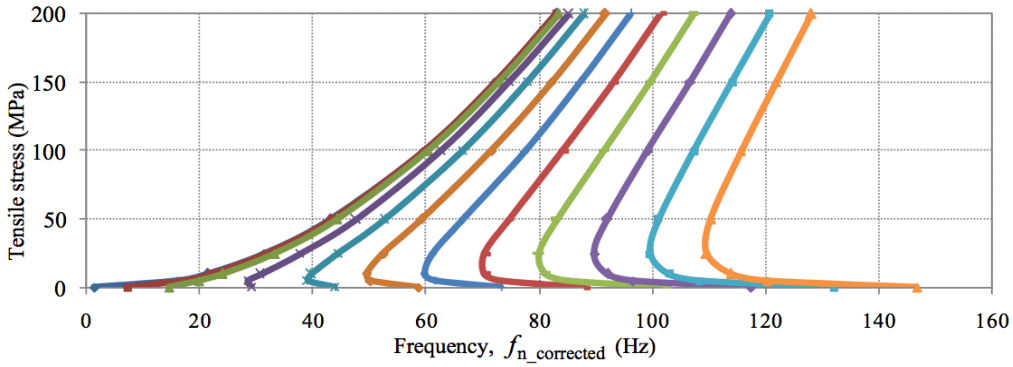


FIGURA 4.6 - LUONG, STANDARD CHART, I-B (PINNED-FIXED END CONDITION)

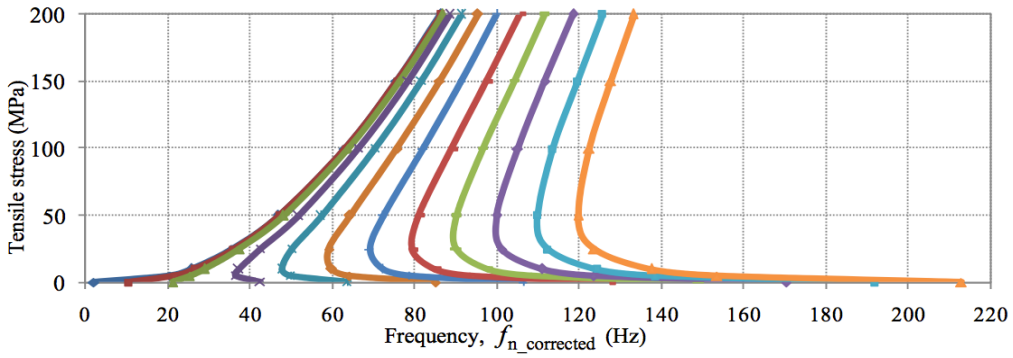


FIGURA 4.7 - LUONG, STANDARD CHART, I-C (FIXED-FIXED END CONDITION)

(h/L)corrected = 0.0004
(h/L)corrected = 0.002
(h/L)corrected = 0.004
(h/L)corrected = 0.008
(h/L)corrected = 0.012
(h/L)corrected = 0.016
(h/L)corrected = 0.02
(h/L)corrected = 0.024
(h/L)corrected = 0.028
(h/L)corrected = 0.032
(h/L)corrected = 0.036
(h/L)corrected = 0.04

4.1.7.1 Esempi di risoluzione numerica

L'elaborazione, tramite il metodo Luong, viene eseguita mediante l'impiego della sola prima frequenza propria di vibrazione e il rapporto tra l'altezza della sezione e la lunghezza della catena. Si è scelto di applicare il metodo ad un campione generico di catene (progetto ARCUS) per poterne confrontare i risultati con i tiri stimati tramite la teoria dei fili tesi:

- Arezzo – museo Archeologico (**AAr**)
- Arezzo – museo Medievale (**MAr**)
- Ascoli – museo Archeologico (**AAs**)

- Gradara – Rocca Gradara (**RG**)
- Urbino – Palazzo Ducale (**MU**)

Le caratteristiche fisiche sono descritte dei tiranti in esame sono riportati in Tabella 4.2:

TABELLA 4.2 - CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLE CATENE (PROGETTO ARCUS)

ID	b [mm]	h [mm]	A [mm^2]	J [mm^4]	L [mm]	f_1 [Hz]
AAr_C1	25	20	500	1,67E+04	2830	18,76
AAr_C2	27	24	648	3,94E+04	2750	24,26
AAr_C3	25	20	500	2,60E+04	2700	23,78
AAr _C4	20	20	400	1,33E+04	2550	24,83
MAr_C1	25	40	1000	5,21E+04	5080	10,22
MAr_C2	30	30	900	6,75E+04	4080	14,36
MAr_C3	30	30	900	6,75E+04	5080	10,28
AAs_C1	20	45	900	3,00E+04	2150	20,71
AAs_C2	20	45	900	3,00E+04	2800	15,65
AAs_C3	20	45	900	3,00E+04	2800	15,56
AAs _C4	20	45	900	3,00E+04	2800	7,55
AAs _C5	20	45	900	3,00E+04	2800	6,2
AAs _C6	16	48	768	1,64E+04	5000	11,64
AAs _C7	16	48	768	1,64E+04	5000	12,19
RG_C1	24	50	1200	5,76E+04	4300	10,7815
RG_C2	24	50	1200	5,76E+04	4430	10,658
RG_C3	24	50	1200	5,76E+04	4500	7,4665
MU_C1	30	55	1650	1,24E+05	9570	4,8825
MU_C2	30	55	1650	1,24E+05	9600	5,49
MU_C3	33	33	1089	9,88E+04	4960	11,42
MU _C4	33	33	1089	9,88E+04	4980	11,97
MU _C5	25,5	25,5	650,25	3,52E+04	4180	8,32
MU_C6	25,5	25,5	650,25	3,52E+04	4240	9,4575
MU_C7	25,5	25,5	650,25	3,52E+04	4220	9,4325
MU_C8	17	42	714	1,72E+04	3700	10,645
MU_C9	17	42	714	1,72E+04	3800	10,58

In Tabella 4.3 e in Tabella 4.4 vengono riportati i parametri calcolati secondo il metodo Luong (*h/L* e *f* corrette) e i valori di sforzo normale ricavati graficamente.

TABELLA 4.3 –STIMA DELLO SFORZO ASSIALE SECONDO IL METODO LUONG PER LE CATENE A SEZIONE RETTANGOLARE (PROGETTO ARCUS)

ID	h_1/L_1 corretto [m/m]	$f_{1corretta}$ [Hz]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_{III} [MPa]
AAr_C1	0,0071	53,0908	81,36	69,20	55,97

AAr_C2	0,0087	66,715	81,82	72,00	96,59
AAr_C3	0,0074	64,206	120,45	108,00	93,75
AAr _C4	0,0078	63,3165	114,55	100,00	88,07
MAr_C1	0,0079	51,9176	74,55	64,00	51,14
MAr_C2	0,0074	58,5888	88,64	76,00	63,92
MAr_C3	0,0059	52,2224	79,09	68,00	53,98
AAs_C1	0,0071	53,0908	-	-	-
AAs_C2	0,0209	44,5265	16,82	-	-
AAs_C3	0,0161	43,82	16,36	-	-
AAs _C4	0,0161	43,568	-	-	-
AAs _C5	0,0161	21,14	-	-	-
AAs _C6	0,0161	17,36	88,18	76,80	62,50
AAs _C7	0,0096	58,2	100,00	88,00	71,02
RG_C1	0,0116	46,36045	44,09	32,00	11,36
RG_C2	0,0113	47,21494	45,45	36,00	11,36
RG_C3	0,0111	33,59925	12,27	-	-
MU_C1	0,0057	46,725525	63,18	53,20	42,61
MU_C2	0,0057	52,704	81,82	72,00	56,82
MU_C3	0,0067	56,6432	95,45	84,00	71,02
MU _C4	0,0066	59,6106	106,36	94,00	82,39
MU _C5	0,0061	34,7776	31,82	24,00	14,20
MU_C6	0,0060	40,0998	43,64	34,80	24,15
MU_C7	0,0060	39,80515	43,64	34,80	24,15
MU_C8	0,0114	39,3865	27,27	14,00	0,00
MU_C9	0,0111	40,204	27,27	14,00	0,00

TABELLA 4.4 - STIMA DEL TIRO SECONDO IL METODO LUONG E LA TEORIA DEI FILI TESI (PROGETTO ARCUS)

ID	**Teoria dei fili tesi**		**Metodo Luong**	
	FF	**PtP**	**FF**	**PtP**
AAr_C1	11,03	44,11	27,983	40,682
AAr_C2	22,65	90,59	62,591	53,018
AAr_C3	16,18	64,72	46,875	60,227
AAr _C4	12,59	50,35	35,227	45,818
MAr_C1	21,17	84,66	51,136	74,545
MAr_C2	24,25	97,01	57,528	79,773
MAr_C3	15,14	60,55	48,58	71,182
AAs_C1	14	56	-	-
AAs_C2	13,56	54,25	-	15,136
AAs_C3	13,41	53,64	-	14,727
AAs _C4	8,59	34,37	-	-
AAs _C5	5,48	21,91	-	-
AAs _C6	3,52	14,06	48	67,724
AAs _C7	6,01	24,02	54,545	76,8

RG_C1	20,25	80,99	13,636	52,909
RG_C2	21	84	13,636	54,545
RG_C3	10,63	42,54	0	14,727
MU_C1	28,28	113,12	70,313	104,25
MU_C2	101,78	407,13	93,75	135
MU_C3	40,7	162,82	77,344	103,95
MU _C4	55,91	223,66	89,719	115,83
MU _C5	6,17	24,7	9,237	20,69
MU_C6	8,21	32,83	15,702	28,375
MU_C7	8,09	32,35	15,702	28,375
MU_C8	8,69	34,78	-	19,473
MU_C9	9,06	36,24	-	19,473

Note alla Tabella 4.4: FF=Fixed-Fixed end conditions (incastro perfetto), PtP=Pin-to-pin end conditions (cerniera perfetta).

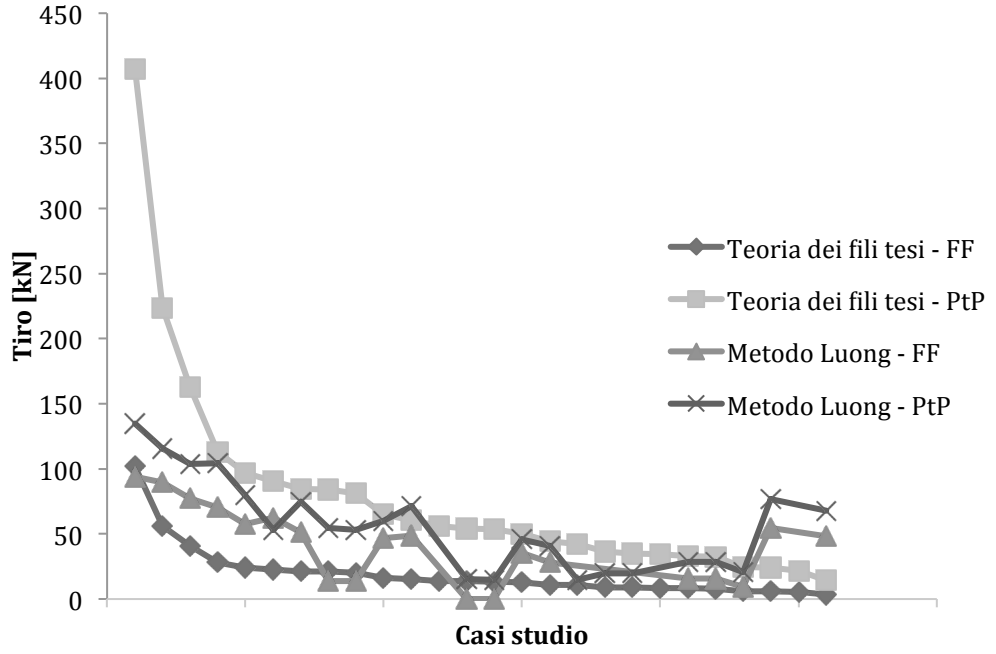


FIGURA 4.8 - COMPARAZIONE TRA I TIRI STIMATI CON LA TEORIA DEI FILI TESI E CON IL METODO LUONG (PROGETTO ARCUS).

Dalla comparazione dei risultati dei due metodi (Figura 4.8) si evince che i *range* di valori suggerito da Luong è inferiore di quello suggerito dalla teoria dei fili tesi, anche se il primo metodo non sempre è efficace e spesso non è possibile trovare graficamente il risultato.

4.1.7.2 Conclusioni

Il metodo di Luong appare più preciso rispetto ai tiri stimati dalla teoria dei fili tesi, ma si dimostra lacunoso nella stima di alcuni tiranti (AAs_C1-5, MU_C8-9). Non

pare quindi totalmente affidabile nella determinazione dello sforzo assiale, presentando altresì il problema di incertezza del vincolo e la stima di un *range* con variazione massime di 40 kN.

4.1.8 REBECCHI, TULLINI & LAUDIERO (2013)

Nel paragrafo si espone il metodo proposto da Rebecchi & al. per la stima del tiro dei tiranti storici.

Il tirante viene modellato come una trave prismatica soggetta a una forza assiale costante, di geometria e massa note, dotata di incastri elastici ad entrambe le estremità. I tre parametri incogniti da determinare sono: il tiro della catena, N, e le rigidezze delle molle rotazionali, k_A e k_B. Il metodo procede in modo analogo a quello proposto da Tullini & al. (§4.1.3) infatti si propone essere una sua generalizzazione nel caso la lunghezza degli ancoraggi, e quindi dell'elemento tirante, fosse ignota.

Utilizzando la coordinata adimensionale x=X/L e non considerando l'inerzia rotazionale e le deformazioni a taglio, le frequenze circolari ω e le vibrazioni modali *v(x)* sono governate dall'equazione:

$$v'''(x) - nv''(x) + \lambda^4 v(x) = 0, 0 < x < 1 \tag{4.29}$$

$$v(0) = 0, v''(0) - \beta_0 v'(0) = 0, per\ x = 0 \tag{4.30 A,B}$$

$$v(1) = 0, v''(1) + \beta_1 v'(1) = 0, per\ x = 1 \tag{4.31 A,B}$$

Definiamo:

$$n = \frac{NL^2}{EJ},\ \ \lambda^4 = \omega^2 \frac{\mu L^4}{EJ} \tag{4.32 A,B}$$

La soluzione dell'equazione (4.29) è quindi:

$$v(x) = C_1 cosq_1 x + C_2 sinq_1 x + C_3 coshq_2 x + C_4 sinhq_2 x \tag{4.33}$$

Dove

$$q_1^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2 + 4\lambda^4} - n\right),\ \ q_2^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2 + 4\lambda^4} + n\right) = q_1^2 + n \tag{4.34 A,B}$$

Assumendo come punti di controllo x_0=0, x_1=1/4, x_2=1/2, x_3=3/4, x_4=1 è possibile risolvere il problema verificando che:

$$\frac{v_1 + v_3}{v_2} = \frac{(v_0 + v_4)/2v_2 + 1 + 2\cos(q_1/4)\cosh(q_2/4)}{\cos(q_1/4) + \cosh(q_2/4)} \tag{4.35}$$

Facendo riferimento alle equazioni (4.26 a,b) e (4.27 a,b)

4.1.8.1 Esempi di risoluzione numerica

TEST 2, caso 1

L'esempio riportato è tratto direttamente dalla pubblicazione scientifica in analisi (TEST 2, caso 1), per avere un confronto dell'utilizzo corretto del metodo. I calcoli sono stati condotti tramite utilizzo del software di calcolo MATLAB®.

Dati noti:

- Il diametro *d*, la lunghezza *L*
- Densità ρ
- Modulo di Young *E*
- Prima frequenza fondamentale f_1 e forme modali v_0, v_1, v_2, v_3, v_4.

d [mm]	**L [mm]**	**E [MPa]**	**ρ [kg/m^3]**
20	2400	206000	7850

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	f_1 [Hz]
0,2138	0,7371	1,00	0,7684	0,2268	10,834

Dati sperimentali:

λ	**n**	**N [kN]**	**k_0**	**k_1**
6,58	215,77	**7,576**	4,74E+05	5,91E+05

I risultati sono non sono concordi a quelli riportati nell'articolo di riferimento, a partire dal valore di λ (3,913), e, di conseguenza, risulta diverso anche il valore del tiro N (4,162 kN).

Riproducendo l'esempio tramite modello FEM, quindi mantenendo invariate le caratteristiche fisiche e meccaniche:

d [mm]	**L [mm]**	**E [MPa]**	**ρ [kg/m^3]**	**N_a [kN]**	**k_0 [Nmm/rad]**	**k_1 [Nmm/rad]**
20	2400	206000	7850	4,508	3,03E10	1,80E10

Dall'analisi non lineare e da quella dinamica si ottengono i seguenti parametri:

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	f_1 [Hz]
2,2071	12,7474	18,4535	12,7480	2,2076	10,2460

Dall'applicazione del metodo Rebecchi otteniamo:

λ	n	N_x [kN]	k_0	k_1	ΔN [%]
6,399	145,14	**5,096**	3,39E5	3,38E4	+11,45

TEST 2, caso 2

L'esempio riportato è tratto direttamente dalla pubblicazione scientifica in analisi (TEST 2, caso 2). I calcoli sono stati condotti tramite utilizzo del software di calcolo MATLAB®.

Dati noti:

- Il diametro *d*, la lunghezza *L*
- Densità ρ
- Modulo di Young *E*
- Prima frequenza fondamentale f_1 e forme modali v_0, v_1, v_2, v_3, v_4.

d [mm]	L [mm]	E [MPa]	ρ [kg/m^3]
20	2400	206000	7850

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	f_1 [Hz]
0,2216	0,7496	1,00	0,7730	0,2310	14,049

Dati sperimentali:

λ	n	N [kN]	k_0	k_1
7,4931	385,72	**13,54**	8,52E+05	9,51E+05

I risultati sono non sono concordi a quelli riportati nell'articolo di riferimento, a partire dal valore di λ (4,455), e, di conseguenza, risulta diverso anche il valore del tiro N (10,576 kN). Riproducendo l'esempio tramite modello FEM, quindi mantenendo invariate le caratteristiche fisiche e meccaniche:

d	L	E	ρ	N_a	k_0	k_1

[mm]	[mm]	[MPa]	[kg/m^3]	[kN]	[Nmm/rad]	[Nmm/rad]
20	2400	206000	7850	10,945	2,77E10	1,59E10

Dall'analisi non lineare e da quella dinamica si ottengono i seguenti parametri:

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	f_1 [Hz]
2,5809	12,9758	18,0103	12,9765	2,5815	15,87

Dall'applicazione del metodo Rebecchi otteniamo:

λ	n	N_x [kN]	k_0	k_1	ΔN [%]
7,96	416,56	**14,626**	3,50E5	3,51E5	+33,6

Confrontando il tiro reale N_a con il tiro calcolato N_x: $\Delta N = +33,6\%$

4.1.9 CONCLUSIONI

Concludendo, per le successive analisi, si sono potuti utilizzare i seguenti metodi:

- **Teoria dei fili tesi**: teoria ancora oggi utilizzata per la stima del tiro dei tiranti antichi, ma basata su ipotesi non coerenti con le caratteristiche reali delle catene esistenti;
- **Luong**: elaborazione del metodo basato sulla teoria dei fili tesi frutto di uno studio dell'influenza di diversi parametri sulle forme modali; di facile applicazione, ne è consigliato l'utilizzo con frequenze superiori alla prima (fortemente condizionata dal peso proprio della trave)
- **Tullini & Laudiero**: il metodo è facilmente applicabile e permette l'elaborazione di un grande numero di dati. Si segnala che è necessario conoscere le forme modali relative alla prima frequenza;
- **Rebecchi, Tullini & Laudiero**: questo metodo è un'evoluzione di quello proposto da Tullini e Laudiero;

Dardano presenta un metodo, anch'esso di determinazione grafica, che però non ha portato a risultati corretti nella sua analisi, viene quindi in questa sede ignorato nell'elaborazione dei dati futuri. Anche il metodo proposto da **Lagomarsino** non è stato potuto utilizzare in quanto non è stato possibile implementare il calcolo di minimizzazione della funzione *G,* necessaria alla risoluzione numerica di stima del tiro e delle rigidezze vincolari.

Un discorso a parte va fatto per i metodi proposti da **Park** e **Amabili et al.** che utilizzano l'elaborazione di modelli FE dei casi reali per la determinazione dei parametri incogniti tramite la convergenza delle prime frequenze e dei modi di vibrare. Anche se i metodi sono attendibili, non è stato possibile confermare la loro validità per assenza di competenze nell'utilizzo di software necessari all'implementazione dei metodi (ABAQUS o DIANA).

4.2 APPLICAZIONE E COMPARAZIONE DEI METODI

4.2.1 ANALISI FEM

Per la convalida dei metodi trattati si è scelto di applicare le tecniche ai dati rilevati da modelli dedotti dallo studio della letteratura e dall'elaborazione del database. Ai sei modelli descritti in Tabella 4.5 si sono applicati diverse forze assiali variando lo sforzo normale 0-25-50-100-125-150 MPa in tre differenti condizioni di vincolo pari a G = 0 (cerniera perfetta), G = 1 (incastro perfetto), G=0,25 e G = 0,5 (condizioni indefinite) per un totale di 230 casi differenti.

TABELLA 4.5 – CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DEI MODELLI FE ANALIZZATI

ID	b [mm]	h / d [mm]	A [mm^2]	J [mm^4]	L [mm]
M1	15	40	600	11250	4610
M2	20	30	600	20000	4610
M3	25	60	1500	78125	4610
M4	30	50	1500	112500	4610
M5	25	60	1500	78125	8810
M6	30	50	1500	112500	8810
M7	18	33	600	16200	4610
M8	24	25	600	28800	4610
M9	35	42,9	1500	153135	4610
M10	37,5	40	1500	175781	4610
M11	32	47	1500	127142	4610
M12	27,3	55	1500	93254	4610
M13	20	75	1500	50000	4610

Note alla Tabella 4.5: i modelli 1-6 sono risultato delle analisi di tipo parametrico sul Database; i modelli 7-13 sono serviti a considerazione sull'influenza della forma della sezione e sulla rigidezza flessionale e sono stati analizzati i soli casi limite di incastro perfetto (G=1) e cerniera (G=0)

Le singole catene sono identificate come:

M*mg_s*

dove *m* è il numero del modello, *g* il caso di incastro (0=cerniera, 1=incastro, 2= G pari a 0,5, 3= G pari a 0,25) e *s* lo sforzo assiale a cui è sottoposta (0, 25, 50, 100, 125, 150). Ad esempio: F12_50 si riferisce ad una catena che ha le caratteristiche geometriche del modello 1, ha un grado di incastro parti a G=0,5 ed è sottoposto a sforzo assiale pari a 50 MPa.

TABELLA 4.6 – CARATTERISTICHE DINAMICHE DEI MODELLI FE ANALIZZATI

ID	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	Ampiezze relative al primo modo di vibrare				
				v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
M10_0	1,66	6,62	14,90	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M10_25	6,34	13,92	23,64	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M10_50	8,81	18,53	29,93	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M10_100	12,35	25,35	39,61	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M10_125	13,78	28,15	43,65	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M10_150	15,07	30,69	47,35	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M11_0	3,75	10,34	20,28	0,0111	0,1952	0,3408	0,1952	0,0110
M11_25	7,65	16,67	27,99	0,0160	0,1987	0,3269	0,1987	0,0160
M11_50	10,03	21,08	33,94	0,0189	0,2034	0,3215	0,2034	0,0189
M11_110	13,51	27,75	43,33	0,0225	0,2072	0,3166	0,2072	0,0225
M11_125	14,93	30,50	47,30	0,0238	0,2081	0,3153	0,2081	0,0238
M11_150	16,22	33,02	50,94	0,0249	0,2088	0,3143	0,2088	0,0249
M12_0	3,74	10,30	20,24	0,0115	0,1856	0,3405	0,1856	0,0115
M12_25	7,63	16,63	27,95	0,0165	0,1990	0,3265	0,1990	0,0165
M12_50	10,01	21,02	33,89	0,0195	0,2036	0,3211	0,2036	0,0195
M12_120	13,48	17,68	43,28	0,0232	0,2074	0,3163	0,2074	0,0232
M12_125	14,90	30,43	47,24	0,0245	0,2083	0,3150	0,2083	0,0245
M12_150	16,18	32,94	50,87	0,0257	0,2090	0,3139	0,2090	0,0257
M13_0	3,73	10,28	20,16	0,0116	0,1857	0,3403	0,1857	0,0116
M13_25	7,62	16,61	27,88	0,0167	0,1991	0,3264	0,1991	0,0167
M13_50	10,00	21,00	33,80	0,0197	0,2037	0,3210	0,2037	0,0197
M13_120	13,47	27,65	43,18	0,0235	0,2075	0,3162	0,2075	0,0235
M13_125	14,88	30,40	47,14	0,0248	0,2084	0,3148	0,2084	0,0248
M13_150	16,17	32,91	50,77	0,0260	0,2091	0,3138	0,2091	0,0260
M20_0	2,21	8,83	19,86	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M20_25	6,51	15,09	27,05	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M20_50	8,93	19,43	32,69	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M20_100	12,43	26,02	41,74	0,0475	0,2146	0,3034	0,2146	0,0475
M20_125	13,86	28,76	45,59	0,0475	0,2146	0,3034	0,2146	0,0475
M20_150	15,14	31,24	49,14	0,0475	0,2146	0,3034	0,2146	0,0475
M21_0	5,00	13,79	27,04	0,0110	0,1952	0,3408	0,1952	0,0110
M21_25	8,38	19,04	33,24	0,0142	0,1948	0,3311	0,1948	0,0142
M21_50	10,65	23,05	38,41	0,0164	0,1995	0,3260	0,1995	0,0164
M21_110	14,05	29,37	47,01	0,0194	0,2041	0,3206	0,2041	0,0194
M21_125	15,44	32,03	50,73	0,0206	0,2054	0,3189	0,2054	0,0206
M21_150	16,71	34,47	54,18	0,0212	0,2063	0,3177	0,2063	0,0212
M22_0	4,97	13,76	26,98	0,0117	0,1858	0,3402	0,1858	0,0117
M22_25	8,33	19,01	33,18	0,1510	0,1953	0,3304	0,1953	0,1510
M22_50	10,60	23,02	38,36	0,0173	0,2000	0,3253	0,2000	0,0173
M22_120	13,99	29,33	46,94	0,0205	0,2045	0,3200	0,2045	0,0205
M22_125	15,38	31,99	50,66	0,0217	0,2056	0,3183	0,2056	0,0217

M22_150	16,65	34,43	54,11	0,0227	0,2067	0,3171	0,2067	0,0227
M23_0	4,97	13,72	26,89	0,0116	0,1857	0,3404	0,1857	0,0116
M23_25	8,34	18,96	33,09	0,0149	0,1952	0,3306	0,1952	0,0149
M23_50	10,61	22,96	38,26	0,0471	0,1999	0,3255	0,1999	0,0471
M23_120	14,00	29,27	46,83	0,0203	0,2044	0,3201	0,2044	0,0203
M23_125	15,39	31,92	50,55	214,00	0,2057	0,3185	0,2057	214,00
M23_150	16,66	34,36	54,00	0,0224	0,2066	0,3172	0,2066	0,0224
M30_0	2,76	11,04	24,83	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300
M30_25	6,71	16,48	30,88	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300
M30_50	9,08	20,53	35,92	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300
M30_100	12,54	26,84	44,31	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300
M30_125	13,95	29,5	47,96	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300
M30_150	12,23	31,93	51,35	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300
M31_0	6,25	17,2396	33,79	0,0070	0,1172	0,2156	0,1172	0,0070
M31_25	9,20	21,6868	38,94	0,0084	0,1215	0,2110	0,1215	0,0084
M31_50	11,35	25,213	43,46	0,0094	0,1242	0,2083	0,1242	0,0094
M31_110	14,64	31,24	51,26	0,0110	0,1272	0,2049	0,1272	0,0110
M31_125	16,01	33,7873	54,72	0,0116	0,1282	0,2038	0,1282	0,0116
M31_150	17,26	36,14	57,97	0,0122	0,1289	0,2029	0,1289	0,0122
M32_0	6,24	17,2048	33,73	0,0071	0,1173	0,2154	0,1173	0,0071
M32_25	9,19	21,651	38,87	0,0085	0,1216	0,2110	0,1216	0,0085
M32_50	11,33	25,2753	43,39	0,0096	0,1243	0,2082	0,1243	0,0096
M32_120	14,62	31,1995	51,19	0,0112	0,1273	0,2048	0,1273	0,0112
M32_125	15,99	33,7439	54,65	0,0118	0,1283	0,2037	0,1283	0,0118
M32_150	17,24	36,095	57,89	0,0123	0,1001	0,2028	0,1001	0,0123
M33_0	6,22	13,243	33,60	0,0073	0,1175	0,2151	0,1175	0,0073
M33_25	9,16	18,03	38,74	0,0088	0,1218	0,2108	0,1218	0,0088
M33_50	11,30	21,793	43,26	0,0099	0,1245	0,2080	0,1245	0,0099
M33_120	14,56	27,82	51,05	0,0115	0,1275	0,2046	0,1275	0,0115
M33_125	15,95	30,39	54,50	0,0121	0,1284	0,2035	0,1284	0,0121
M33_150	17,19	32,76	57,74	0,0127	0,1291	0,2026	0,1291	0,0127
M40_0	3,31	20,687	29,80	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300
M40_25	6,96	24,53	35,00	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300
M40_50	9,27	27,8	39,52	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300
M40_100	12,68	33,34	47,28	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300
M40_125	4,07	35,76	50,71	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300
M40_150	15,34	38,01	53,92	0,0300	0,1128	0,1919	0,1128	0,0300

M41_0	7,51	20,6454	40,55	0,0070	0,1172	0,2156	0,1172	0,0070
M41_25	10,11	24,48	44,94	0,0080	0,1204	0,2122	0,1204	0,0080
M41_50	12,12	27,76	48,91	0,0088	0,1227	0,2099	0,1227	0,0088
M41_110	15,29	33,29	55,99	0,0101	0,1256	0,2067	0,1256	0,0101
M41_125	16,62	35,708	59,19	0,0106	0,1266	0,2056	0,1266	0,0106
M41_150	17,85	37,96	62,22	0,0111	0,1274	0,2047	0,1274	0,0111
M42_0	7,49	20,57	40,47	0,0071	0,1173	0,2154	0,1173	0,0071
M42_25	10,09	24,41	44,85	0,0081	0,1205	0,2121	0,1205	0,0081
M42_50	12,10	27,68	48,83	0,0090	0,1228	0,2098	0,1228	0,0090
M42_120	15,27	33,2	55,90	0,0103	0,1257	0,2066	0,1257	0,0103
M42_125	16,60	35,62	59,10	0,0108	0,1267	0,2055	0,1267	0,0108
M42_150	17,83	37,87	62,13	0,0113	0,1275	0,2046	0,1275	0,0113
M43_0	7,46	20,57	40,32	0,0073	0,1175	0,2152	0,1175	0,0073
M43_25	10,06	24,41	44,70	0,0084	0,1207	0,2129	0,1207	0,0084
M43_50	12,07	27,68	48,68	0,0092	0,1230	0,2095	0,1230	0,0092
M43_120	15,23	33,2	55,74	0,0106	0,1259	0,2064	0,1259	0,0106
M43_125	16,56	35,62	58,94	0,0110	0,1269	0,2053	0,1269	0,0110
M43_150	17,79	37,87	61,96	0,0116	0,1276	0,2044	0,1276	0,0116
M50_0	0,76	3,02	6,79	0,0217	0,0982	0,1389	0,0982	0,0217
M50_25	3,29	7,08	11,77	0,0217	0,0982	0,1388	0,0982	0,0217
M50_50	4,59	9,55	15,19	0,0217	0,0982	0,1388	0,0982	0,0217
M50_100	6,45	13,16	20,37	0,0217	0,0982	0,1389	0,0982	0,0217
M50_125	7,19	14,63	22,52	0,0217	0,0982	0,1388	0,0982	0,0217
M50_150	7,87	15,97	24,48	0,0217	0,0982	0,1388	0,0982	0,0217
M51_0	1,71	4,72	9,25	0,0051	0,0847	0,1559	0,0847	0,0051
M51_25	3,87	8,3	13,69	0,0078	0,0916	0,1486	0,0916	0,0078
M51_50	5,14	10,68	16,96	0,0093	0,0938	0,1462	0,0938	0,0093
M51_110	6,97	14,23	22,03	0,0110	0,0953	0,1441	0,0953	0,0110
M51_125	7,72	15,69	24,15	0,0117	0,0957	0,1436	0,0957	0,0117
M51_150	8,39	17,01	26,10	0,0122	0,9590	0,1432	0,9590	0,0122
M52_0	1,71	4,71	9,23	0,0052	0,0846	0,1558	0,0846	0,0052
M52_25	3,86	8,28	13,67	0,0079	0,0918	0,1485	0,0918	0,0079
M52_50	5,13	10,66	16,94	0,0094	0,0939	0,1461	0,0939	0,0094
M52_120	6,96	14,21	22,00	0,0112	0,0954	0,1440	0,0954	0,0112
M52_125	7,71	15,67	24,12	0,0118	0,0957	0,1435	0,0957	0,0118
M52_150	8,38	16,99	26,06	0,0124	0,0960	0,1431	0,0960	0,0124
M53_0	1,70	4,69	9,20	0,0053	0,0850	0,1557	0,0850	0,0053
M53_25	3,86	8,27	13,63	0,0081	0,0920	0,1483	0,0920	0,0081
M53_50	5,12	10,64	16,90	0,0097	0,0940	0,1459	0,0940	0,0097
M53_120	6,95	14,18	21,96	0,0115	0,0955	0,1439	0,0955	0,0115
M53_125	7,69	15,64	24,07	0,0121	0,0956	0,1234	0,0956	0,0121
M53_150	8,37	16,96	26,00	0,0127	0,0961	0,1429	0,0961	0,0127
M60_0	0,91	3,62	8,16	0,0217	0,0982	0,1389	0,0982	0,0217

M60_25	3,33	7,36	12,60	0,0217	0,0982	0,1388	0,0982	0,0217
M60_50	4,62	9,756	15,85	0,0217	0,0982	0,1388	0,0982	0,0217
M60_100	6,47	13,31	20,87	0,0217	0,0982	0,1389	0,0982	0,0217
M60_125	7,22	14,77	22,97	0,0217	0,0982	0,1388	0,0982	0,0217
M60_150	7,89	16,8	27,35	0,0217	0,0982	0,1388	0,0982	0,0217
M61_0	2,05	5,66	11,10	0,0051	0,0847	0,1559	0,0847	0,0051
M61_25	4,05	8,886	15,01	0,0072	0,0906	0,1499	0,0906	0,0072
M61_50	5,30	11,16	18,06	0,0084	0,0926	0,1474	0,0926	0,0084
M61_110	7,11	14,63	22,92	0,0101	0,0946	0,1451	0,0946	0,0101
M61_125	7,85	16,07	24,98	0,0107	0,0950	0,1445	0,0950	0,0107
M61_150	8,52	17,37	26,87	0,0112	0,0954	0,1440	0,0954	0,0112
M62_0	2,05	5,65	11,08	0,0052	0,0846	0,1559	0,0846	0,0052
M62_25	4,05	8,874	14,99	0,0073	0,0907	0,1498	0,0907	0,0073
M62_50	5,29	11,15	18,04	0,0086	0,0926	0,1473	0,0926	0,0086
M62_120	7,10	14,61	18,32	0,0102	0,0946	0,1450	0,0946	0,0102
M62_125	7,84	16,05	24,95	0,0108	0,0951	0,1444	0,0951	0,0108
M62_150	8,51	17,36	26,84	0,0113	0,0954	0,1439	0,0954	0,0113
M63_0	2,04	5,63	11,03	0,0053	0,0850	0,1557	0,0850	0,0053
M63_25	4,03	8,85	14,95	0,0075	0,0908	0,1496	0,0908	0,0075
M63_50	5,27	11,12	17,99	0,0088	0,0930	0,1472	0,0930	0,0088
M63_120	7,09	14,58	22,84	0,0105	0,0947	0,1449	0,0947	0,0105
M63_125	7,82	16,01	24,89	0,0111	0,0952	0,1443	0,0952	0,0111
M63_150	8,49	17,32	26,78	0,0116	0,0955	0,1438	0,0955	0,0116
M70_0	1,98	7,94	17,87	0,0477	0,2157	0,3050	0,2157	0,0477
M70_25	6,46	14,64	25,69	0,0477	0,2157	0,3050	0,2157	0,0477
M70_50	8,92	19,12	31,63	0,0477	0,2157	0,3050	0,2157	0,0477
M70_100	12,46	25,85	40,99	0,0477	0,2157	0,3050	0,2157	0,0477
M70_125	13,89	28,62	44,95	0,0477	0,2157	0,3050	0,2157	0,0477
M70_150	15,19	31,14	48,57	0,0477	0,2157	0,3050	0,2157	0,0477
M71_0	4,50	12,41	24,32	0,0110	0,1862	0,3425	0,1862	0,0110
M71_25	8,10	18,10	31,13	0,0149	0,1972	0,3312	0,1972	0,0149
M71_50	10,43	22,29	36,64	0,0174	0,2020	0,3258	0,2020	0,0174
M71_110	13,88	28,80	45,61	0,0207	0,2064	0,3206	0,2064	0,0207
M71_125	15,19	31,52	49,46	0,0219	0,2076	0,3190	0,2076	0,0219
M71_150	16,58	34,00	53,01	0,0230	0,2084	0,2179	0,2084	0,0230
M80_0	2,65	10,59	23,83	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M80_25	6,67	16,19	30,08	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M80_50	9,05	20,29	35,24	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M80_100	12,52	26,67	43,76	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M80_125	13,93	29,34	47,45	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M80_150	15,21	31,78	50,87	0,0475	0,2146	0,3035	0,2146	0,0475
M81_0	6,00	16,54	32,42	0,0111	0,1852	0,3408	0,1852	0,0111
M81_25	9,03	21,13	37,75	0,0134	0,1926	0,3333	0,1926	0,0134
M81_50	11,19	24,83	42,39	0,0152	0,1969	0,3287	0,1969	0,0152

M81_110	14,51	30,84	50,35	0,0178	0,2017	0,3233	0,2017	0,0178
M81_125	15,89	33,41	53,86	0,0188	0,2031	0,3216	0,2031	0,0188
M81_150	17,14	35,78	57,15	0,0197	0,2043	0,3202	0,2043	0,0197
M90_0	3,86	15,46	34,74	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M90_25	7,24	19,71	39,29	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M90_50	9,48	23,20	43,37	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M90_100	12,83	28,94	50,54	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M90_125	14,21	31,41	53,76	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M90_150	15,47	33,71	56,80	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M91_0	8,75	24,12	47,25	0,0070	0,1172	0,2155	0,1172	0,0070
M91_25	11,07	27,48	51,06	0,0078	0,1197	0,2130	0,1197	0,0078
M91_50	12,95	30,45	54,59	0,0084	0,1216	0,2110	0,1216	0,0084
M91_110	15,98	35,60	61,02	0,0095	0,1243	0,2081	0,1243	0,0095
M91_125	17,28	37,89	63,98	0,0100	0,1253	0,2071	0,1253	0,0100
M91_150	18,48	40,05	66,80	0,0104	0,1261	0,2060	0,1261	0,0104
M100_0	4,14	16,55	37,22	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M100_25	7,39	20,58	41,49	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M100_50	9,59	23,95	45,37	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M100_100	12,92	29,54	52,27	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M100_125	14,29	31,97	55,39	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M100_150	15,54	34,23	58,34	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M101_0	9,38	25,84	50,61	0,0070	0,1172	0,2155	0,1172	0,0070
M101_25	11,58	29,01	54,18	0,0077	0,1194	0,2133	0,1194	0,0077
M101_50	13,39	31,84	57,53	0,0083	0,1212	0,2115	0,1212	0,0083
M101_110	16,36	36,81	63,67	0,0093	0,1237	0,2088	0,1237	0,0093
M101_125	17,63	39,04	66,51	0,0097	0,1247	0,2077	0,1247	0,0097
M101_150	18,82	41,13	69,24	0,0101	0,1254	0,2069	0,1254	0,0101
M110_0	3,52	14,07	31,66	0,0300	0,1358	0,1920	0,1358	0,0300
M110_25	5,06	18,66	36,60	0,0300	0,1358	0,1920	0,1358	0,0300
M110_50	9,34	22,31	40,95	0,0300	0,1358	0,1920	0,1358	0,0300
M110_100	12,73	28,24	48,48	0,0300	0,1358	0,1920	0,1358	0,0300
M110_125	14,13	30,77	51,84	0,0300	0,1358	0,1920	0,1358	0,0300
M110_150	15,39	33,11	54,98	0,0300	0,1358	0,1920	0,1358	0,0300
M111_0	7,98	21,98	43,97	0,0070	0,1172	0,2156	0,1172	0,0070
M111_25	10,47	25,63	47,22	0,0079	0,1202	0,2126	0,1202	0,0079
M111_50	12,43	28,79	51,02	0,0087	0,1223	0,2104	0,1223	0,0087
M111_110	15,55	34,17	57,84	0,0099	0,1251	0,2073	0,1251	0,0099
M111_125	16,87	36,55	60,95	0,0104	0,1261	0,2061	0,1261	0,0104
M111_150	18,08	38,76	63,90	0,1080	0,1269	0,2053	0,1269	0,1080
M120_0	3,01	12,05	27,10	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M120_25	6,81	17,17	32,73	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M120_50	9,16	21,08	37,52	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M120_100	12,59	27,27	45,61	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M120_125	13,99	29,88	49,16	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300

M120_150	15,27	32,28	52,46	0,0300	0,1357	0,1919	0,1357	0,0300
M121_0	6,83	18,81	36,87	0,0070	0,1171	0,2154	0,1171	0,0070
M121_25	9,61	22,96	41,64	0,0082	0,1209	0,2116	0,1209	0,0082
M121_50	11,68	26,42	45,89	0,0091	0,1234	0,2090	0,1234	0,0091
M121_110	14,92	32,16	53,34	0,0106	0,1264	0,2057	0,1264	0,0106
M121_125	16,27	34,64	56,68	0,0112	0,1274	0,2045	0,1274	0,0112
M121_150	17,51	36,95	59,82	0,0117	0,1281	0,2036	0,1281	0,0117
M130_0	0,22	8,83	19,86	0,0300	0,1357	0,1920	0,1357	0,0300
M130_25	6,50	15,09	27,04	0,0300	0,1357	0,1920	0,1357	0,0300
M130_50	8,93	19,43	32,68	0,0300	0,1357	0,1920	0,1357	0,0300
M130_100	12,43	26,01	41,73	0,0300	0,1357	0,1920	0,1357	0,0300
M130_125	13,86	28,75	45,58	0,0300	0,1357	0,1920	0,1357	0,0300
M130_150	15,14	31,23	49,13	0,0300	0,1357	0,1920	0,1357	0,0300
M131_0	5,00	13,79	27,02	0,0070	0,1172	0,2156	0,1172	0,0070
M131_25	8,37	19,04	33,23	0,0090	0,1232	0,2094	0,1232	0,0090
M131_50	10,65	23,05	38,40	0,0104	0,1262	0,2061	0,1262	0,0104
M131_110	14,04	29,36	46,99	0,0123	0,1291	0,2027	0,1291	0,0123
M131_125	15,44	32,02	50,72	0,0130	0,1299	0,2017	0,1299	0,0130
M131_150	16,71	34,47	54,17	0,0137	0,1305	0,2009	0,1305	0,0137

Dall'elaborazione dei dati, utilizzando la prima frequenza, sono stat stimati i tiri secondo:

- Il metodo Tullini (T_T);
- Il metodo Rebecchi (T_R);
- La teoria dei fili tesi: in condizione di incastro (T_{FF}) e cerniera (T_{PtP});
- Il metodo Luong in condizione di incastro a cerniera (T_L).

TABELLA 4.7

ID	**Tiro reale [kN]**	**T_T [kN]**	**T_R [kN]**	**Teoria dei fili tesi**		**T_L [kN]**
				T_{FF} [kN]	**T_{PtP} [kN]**	
M10_0	0	0	-1,054	0,27	1,10	0,00
M10_25	15	14,995	14,47	4,02	16,09	14,99
M10_50	30	29,983	29,697	7,77	31,08	29,98
M10_100	60	59,938	59,837	15,26	61,04	59,93
M10_125	75	74,905	74,842	19,00	76,01	74,90
M10_150	90	89,865	89,824	22,74	90,97	89,86
M11_0	0	0,619	0,464	1,41	5,64	8,42
M11_25	15	15,002	14,876	5,85	23,40	24,98
M11_50	30	29,989	29,902	10,07	40,29	41,37
M11_110	60	59,972	59,933	18,28	73,11	73,65
M11_125	75	74,886	74,86	22,32	89,26	89,65
M11_150	90	89,853	89,834	26,33	105,30	105,57

M12_0	0	0,001	-0,158	1,40	5,59	8,35
M12_25	15	15,007	14,877	5,82	23,28	24,88
M12_50	30	29,98	29,89	10,03	40,10	41,22
M12_120	60	59,942	59,902	18,20	72,79	73,46
M12_125	75	74,855	74,828	22,22	88,87	89,41
M12_150	90	89,893	89,874	26,21	104,85	105,25
M13_0	0	-0,001	-0,161	1,39	5,57	8,21
M13_25	15	15,011	14,878	5,81	23,25	24,71
M13_50	30	29,967	29,876	10,01	40,02	40,95
M13_120	60	59,927	59,886	18,16	72,65	73,07
M13_125	75	74,902	74,874	22,18	88,71	88,99
M13_150	90	89,912	89,893	26,17	104,69	104,81
M20_0	0	-0,001	-1,875	0,49	1,95	0,00
M20_25	15	14,996	13,748	4,24	16,95	15,00
M20_50	30	29,983	29,122	7,98	31,94	29,98
M20_100	60	59,992	59,549	15,47	61,89	59,93
M20_125	75	74,97	74,644	19,21	76,86	74,90
M20_150	90	89,948	89,704	22,96	91,83	89,86
M21_0	0	1,099	0,825	2,51	10,02	14,97
M21_25	15	15,001	14,748	7,02	28,09	31,60
M21_50	30	29,985	29,77	11,35	45,40	48,09
M21_110	60	59,94	59,8	19,75	78,99	80,74
M21_125	75	74,956	74,844	23,87	95,49	96,93
M21_150	90	89,84	89,753	27,96	111,84	113,04
M22_0	0	-0,003	-0,291	2,47	9,88	14,83
M22_25	15	14,998	12,084	6,95	27,81	31,42
M22_50	30	29,998	29,77	11,25	45,00	47,91
M22_120	60	59,908	59,759	19,59	78,35	80,47
M22_125	75	74,782	74,663	23,68	94,72	96,62
M22_150	90	89,867	89,772	27,75	111,00	112,70
M23_0	0	-0,017	-0,302	2,47	9,89	14,61
M23_25	15	14,997	14,729	6,97	27,88	31,16
M23_50	30	29,974	29,348	11,27	45,07	47,57
M23_120	60	59,917	59,77	19,62	78,49	80,01
M23_125	75	74,85	-	23,71	94,83	96,13
M23_150	90	89,825	89,732	27,78	111,13	112,15
M30_0	0	-	-	1,90	7,61	0,00
M30_25	37,5	11,091	5,888	11,28	45,11	37,48
M30_50	75	38,639	34,407	20,63	82,53	74,93
M30_100	150	92,936	90,023	39,37	157,48	149,79
M30_125	187,5	119,742	117,287	48,73	194,90	187,25
M30_150	225	87,426	84,405	37,45	149,82	224,69
M31_0	0	-0,019	-1,076	9,78	39,10	58,41
M31_25	37,5	37,482	36,443	21,18	84,72	100,09

M31_50	75	75,035	74,086	32,24	128,95	141,50
M31_110	150	149,849	149,1	53,63	214,54	223,67
M31_125	187,5	187,352	186,699	64,11	256,44	264,49
M31_150	225	224,718	224,149	74,52	298,08	305,18
M32_0	0	0,044	-1,03	9,75	38,99	57,96
M32_25	37,5	37,443	36,391	21,13	84,52	99,47
M32_50	75	74,945	73,973	32,12	128,49	140,82
M32_120	150	149,812	149,047	53,49	213,95	222,87
M32_125	187,5	187,456	186,791	63,98	255,93	263,60
M32_150	225	134,377	133,031	74,34	297,38	304,15
M33_0	0	-	-	9,68	38,73	56,99
M33_25	37,5	0,921	-2,025	21,00	83,99	98,38
M33_50	75	16,863	13,747	31,95	127,81	139,57
M33_120	150	31,935	29,563	53,05	212,20	221,25
M33_125	187,5	-	-	63,66	254,65	261,78
M33_150	225	-	-	73,95	295,78	272,05
M40_0	0	-	-	2,74	10,97	0,00
M40_25	37,5	3,732	-4,279	12,12	48,49	37,48
M40_50	75	31,472	24,572	21,48	85,92	74,96
M40_100	150	86,233	80,992	40,21	160,84	149,88
M40_125	187,5	-	-	4,15	16,61	187,26
M40_150	225	140,204	136,127	58,91	235,65	224,61
M41_0	0	0,074	-1,447	14,11	56,46	84,13
M41_25	37,5	37,478	35,965	25,58	102,31	125,87
M41_50	75	74,981	73,534	36,76	147,04	167,35
M41_110	150	149,819	148,56	58,47	233,89	249,91
M41_125	187,5	187,216	186,064	69,12	276,49	290,91
M41_150	225	224,75	223,696	79,73	318,93	331,82
M42_0	0	0,065	-1,481	14,04	56,15	83,41
M42_25	37,5	37,448	35,912	25,49	101,97	124,98
M42_50	75	74,879	73,396	36,63	146,50	166,44
M42_120	150	149,81	148,524	58,32	233,29	248,79
M42_125	187,5	187,264	186,087	68,97	275,86	289,72
M42_150	225	224,682	223,607	79,51	318,05	330,58
M43_0	0	0,049	-1,547	13,93	55,71	82,07
M43_25	37,5	36,64	35,049	25,33	101,30	123,48
M43_50	75	75,017	73,494	36,44	145,76	164,78
M43_120	150	149,878	148,548	58,05	232,19	246,81
M43_125	187,5	187,369	186,166	68,65	274,61	287,64
M43_150	225	224,442	223,332	79,16	316,63	328,23
M50_0	0	-0,008	-2,008	0,52	2,08	-0,05
M50_25	37,5	37,548	36,731	9,89	39,57	37,49
M50_50	75	75,046	74,662	19,25	77,02	74,95
M50_100	150	149,933	149,826	38,02	152,09	149,77

M50_125	187,5	187,167	187,106	47,25	188,99	187,22
M50_150	225	224,656	224,621	56,61	226,42	224,64
M51_0	0	-0,028	-0,319	2,67	10,69	15,98
M51_25	37,5	37,353	37,138	13,69	54,75	57,35
M51_50	75	75,012	74,883	24,15	96,58	98,06
M51_110	150	149,771	149,726	44,40	177,60	178,36
M51_125	187,5	187,415	187,387	54,47	217,87	218,12
M51_150	225	-	-	64,33	257,33	257,93
M52_0	0	-0,039	-0,336	2,67	10,69	15,83
M52_25	37,5	37,371	37,152	13,62	54,47	57,13
M52_50	75	74,984	74,853	24,05	96,21	97,79
M52_120	150	149,898	149,851	44,27	177,09	177,82
M52_125	187,5	187,208	187,179	54,33	217,31	217,54
M52_150	225	224,513	224,495	64,18	256,72	257,08
M53_0	0	-0,012	-0,317	2,64	10,57	15,60
M53_25	37,5	37,664	37,44	13,62	54,47	56,69
M53_50	75	75,065	74,929	23,96	95,83	97,22
M53_120	150	150,026	149,978	44,15	176,58	177,03
M53_125	187,5	-	-	54,05	216,18	216,56
M53_150	225	225,047	225,029	63,99	255,95	255,81
M60_0	0	-0,005	-2,885	0,75	3,01	0,01
M60_25	37,5	37,605	36,088	10,13	40,54	37,45
M60_50	75	75,077	74,211	19,49	77,96	75,01
M60_100	150	149,788	149,461	38,22	152,86	149,88
M60_125	187,5	187,57	187,359	47,58	190,30	187,28
M60_150	225	225,01	224,871	56,92	227,69	276,80
M61_0	0	-0,058	-0,479	3,84	15,36	23,05
M61_25	37,5	37,469	37,113	14,99	59,96	64,48
M61_50	75	74,905	74,652	25,67	102,69	105,45
M61_110	150	150,039	149,915	46,20	184,80	186,35
M61_125	187,5	187,109	187,022	56,32	225,27	226,43
M61_150	225	224,779	224,719	66,34	265,37	266,23
M62_0	0	-0,095	-0,524	3,84	15,36	22,85
M62_25	37,5	37,516	37,154	14,95	59,81	64,25
M62_50	75	74,556	74,295	25,53	102,11	105,15
M62_120	150	149,824	149,699	46,07	184,28	109,24
M62_125	187,5	187,321	187,233	56,18	224,70	225,82
M62_150	225	224,634	224,573	66,20	264,81	265,58
M63_0	0	-0,018	-0,456	3,80	15,21	22,38
M63_25	37,5	37,401	37,027	14,84	59,37	63,75
M63_50	75	74,895	74,627	25,38	101,53	104,42
M63_120	150	149,947	149,818	45,94	183,77	184,86
M63_125	187,5	187,046	186,956	55,89	223,56	224,68
M63_150	225	224,356	224,292	65,88	263,50	264,27

M70_0	0	-0,01	-1,52	0,39	1,57	-0,01
M70_25	15	15,14	14,22	4,18	16,71	15,13
M70_50	30	30,29	29,71	7,96	31,86	30,28
M70_100	60	60,61	60,34	15,54	62,16	60,58
M70_125	75	75,70	75,51	19,31	77,25	75,67
M70_150	90	90,84	90,71	23,10	92,38	90,80
M71_0	0	0,00	-0,22	2,03	8,11	6,53
M71_25	15	15,16	14,96	6,57	26,27	24,69
M71_50	30	30,27	30,11	10,89	43,56	41,98
M71_110	60	60,49	60,40	19,28	77,14	75,56
M71_125	75	74,60	74,53	23,10	92,38	90,80
M71_150	90	-	-	27,52	110,07	108,49
M80_0	0	0,00	-2,70	0,70	2,81	0,00
M80_25	15	15,00	12,98	4,45	17,81	14,77
M80_50	30	29,98	28,43	8,20	32,79	29,50
M80_100	60	59,95	59,00	15,69	62,76	59,21
M80_125	75	74,88	74,12	19,42	77,69	73,87
M80_150	90	89,81	89,21	23,16	92,63	88,53
M81_0	0	-0,02	-0,41	3,60	14,41	10,03
M81_25	15	15,00	14,62	8,16	32,65	27,96
M81_50	30	29,92	29,57	12,53	50,14	45,14
M81_110	60	59,91	59,64	21,07	84,30	78,99
M81_125	75	74,85	74,63	25,27	101,10	95,46
M81_150	90	89,84	89,65	29,41	117,63	111,65
M90_0	0	-0,01	-	3,73	14,92	-0,02
M90_25	37,5	37,55	25,07	13,12	52,47	37,54
M90_50	75	75,05	64,11	22,49	89,96	75,03
M90_100	150	149,87	141,38	41,20	164,78	149,85
M90_125	187,5	187,23	179,70	50,53	202,13	187,20
M90_150	225	224,67	217,98	59,89	239,57	224,64
M91_0	0	0,03	-2,04	19,16	76,64	61,71
M91_25	37,5	37,39	35,30	30,67	122,67	107,74
M91_50	75	74,97	72,94	41,97	167,88	152,94
M91_110	150	149,86	147,99	63,91	255,63	240,69
M91_125	187,5	187,33	185,56	74,73	298,91	283,97
M91_150	225	225,34	223,67	85,47	341,87	326,93
M100_0	0	0,03	-	4,29	17,16	0,01
M100_25	37,5	37,54	22,95	13,67	54,67	37,52
M100_50	75	74,94	61,95	23,01	92,06	74,91
M100_100	150	149,97	139,59	41,77	167,09	149,95
M100_125	187,5	187,29	177,96	51,10	204,40	187,26
M100_150	225	224,62	216,21	60,43	241,73	224,58
M101_0	0	0,10	-2,28	22,02	88,07	70,93
M101_25	37,5	37,45	35,05	33,56	134,23	117,08

M101_50	75	75,03	72,67	44,87	179,47	162,32
M101_110	150	149,85	147,64	66,98	267,91	250,77
M101_125	187,5	187,43	185,32	77,78	311,12	293,98
M101_150	225	224,52	222,51	88,63	354,54	337,39
M110_0	0	0,05	-	3,10	12,40	0,00
M110_25	37,5	13,28	2,07	6,40	25,62	13,22
M110_50	75	74,98	66,37	21,82	87,28	74,88
M110_100	150	149,87	143,49	40,53	162,14	149,74
M110_125	187,5	187,52	181,99	49,94	199,76	187,36
M110_150	225	224,76	219,93	59,24	236,97	224,57
M111_0	0	0,02	-1,70	15,93	63,71	51,31
M111_25	37,5	37,55	35,83	27,42	109,68	97,28
M111_50	75	75,03	73,36	38,65	154,58	142,18
M111_110	150	149,93	148,44	60,48	241,93	229,53
M111_125	187,5	187,57	186,19	71,19	284,74	272,34
M111_150	225	224,61	211,31	81,76	327,05	314,65
M120_0	0	-0,01	-8,74	2,27	9,08	-0,02
M120_25	37,5	37,38	30,40	11,62	46,48	37,39
M120_50	75	74,99	69,34	21,02	84,07	74,98
M120_100	150	149,75	145,93	39,72	158,87	149,78
M120_125	187,5	187,04	183,87	49,03	196,11	187,01
M120_150	225	224,57	221,92	58,43	233,71	224,62
M121_0	0	0,03	-1,23	11,69	46,74	37,65
M121_25	37,5	37,48	36,23	23,14	92,57	83,47
M121_50	75	74,82	73,65	34,17	136,69	127,60
M121_110	150	149,79	148,81	55,78	223,12	214,03
M121_125	187,5	187,37	186,49	66,31	265,24	256,14
M121_150	225	224,60	223,82	76,83	307,31	298,21
M130_0	0	-4,86	-9,80	0,01	0,05	-4,83
M130_25	37,5	37,34	34,22	10,57	42,29	37,41
M130_50	75	74,83	72,68	19,96	79,82	74,95
M130_100	150	149,58	148,47	38,66	154,66	149,78
M130_125	187,5	187,17	186,35	48,07	192,29	187,41
M130_150	225	224,28	223,67	57,36	229,44	224,57
M131_0	0	-0,01	-0,69	6,26	25,02	20,15
M131_25	37,5	37,44	36,80	17,53	70,13	65,25
M131_50	75	75,08	74,54	28,38	113,53	108,66
M131_110	150	149,85	149,50	49,33	197,31	192,44
M131_125	187,5	187,28	187,00	59,66	238,63	233,75
M131_150	225	224,67	224,45	69,87	279,50	274,62

4.2.1.1 Analisi dei dati

Dal confronto tra lo sforzo assiale sperimentale e quello calcolato tramite in metodi in esame rileviamo una maggiore convergenza dei valori stimanti dal metodo Tullini e metodo Rebecchi. Si nota poi che la teoria dei fili tesi se considera condizioni vincolari di incastro tende a sottostimare lo sforzo assiale discostandosi molto dal valore reale soprattutto per catene molto tirate, mentre se vengono ipotizzate condizioni di vincolo a cerniera il valore è solitamente sovrastimato presentando variazioni notevoli in tutti i casi di sforzo assiale imposto; Luong sovrastima il tiro anche se corregge leggermente la stima data dalla teoria dei fili tesi (cerniera).

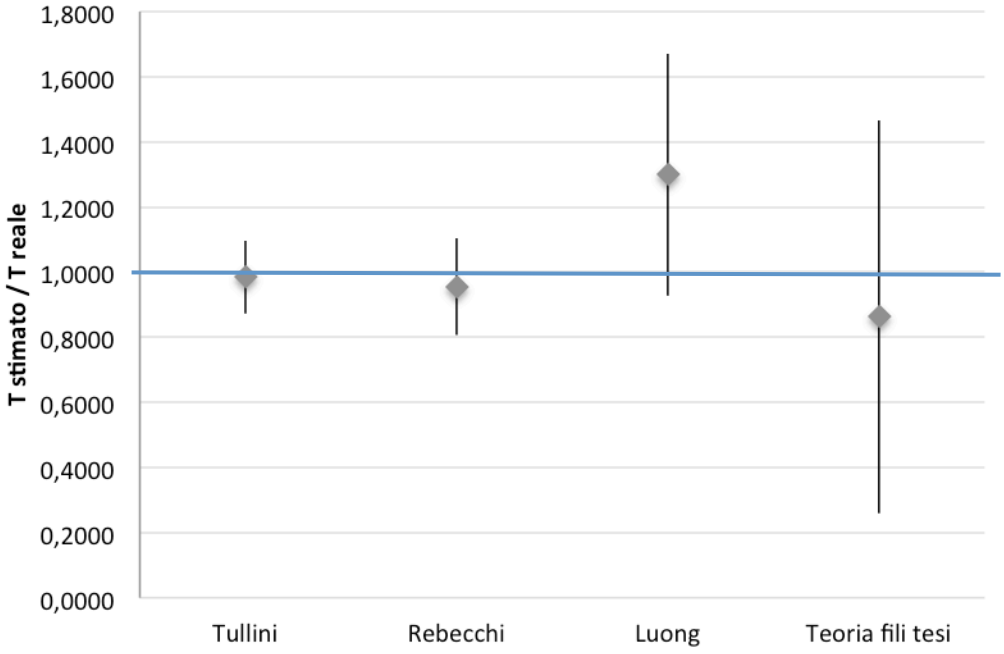


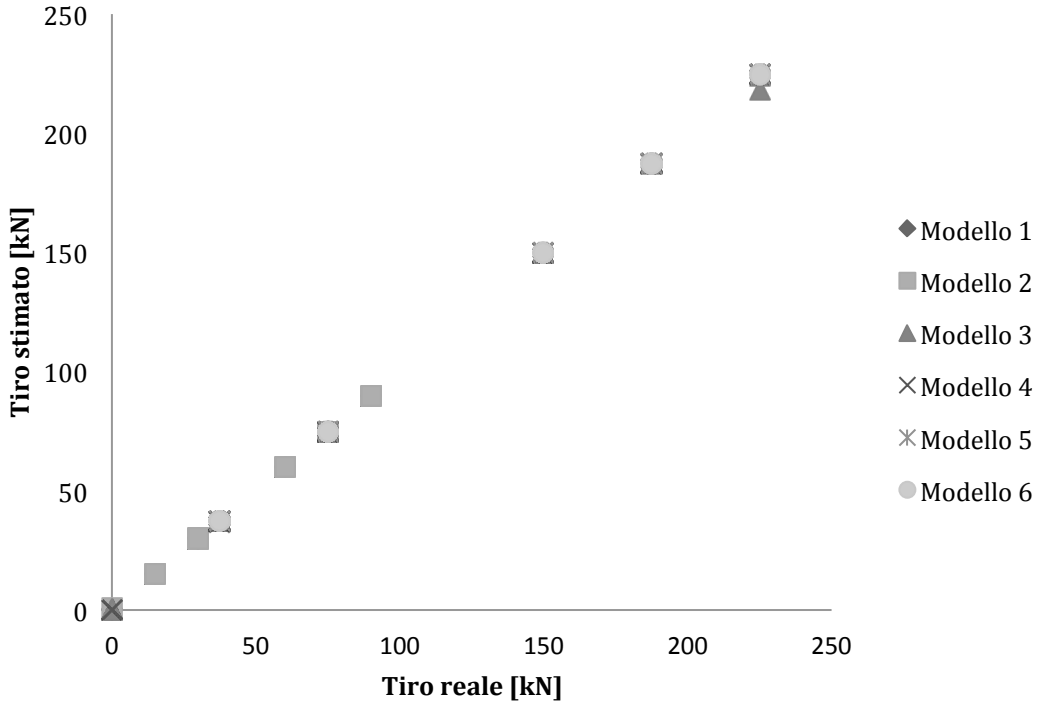
FIGURA 4.9 - CONFRONTO TRA I METODI ANALIZZATI: NEL GRAFICO SI SONO RIPORTATI I VALORI MEDI DEL RAPPORTO TRA IL TIRO STIMATO E QUELLO REALE CON LE RELELATIVE DEVIZIONI STANDARD. MIGLIORE È IL METODO PIÙ IL VALORE MEDIO SI AVVICINA A 1.

Sono stati in seguito analizzati i singoli modelli e quindi l'influenza di caratteristiche fisiche sulla stima del tiro, tenendo presente che:

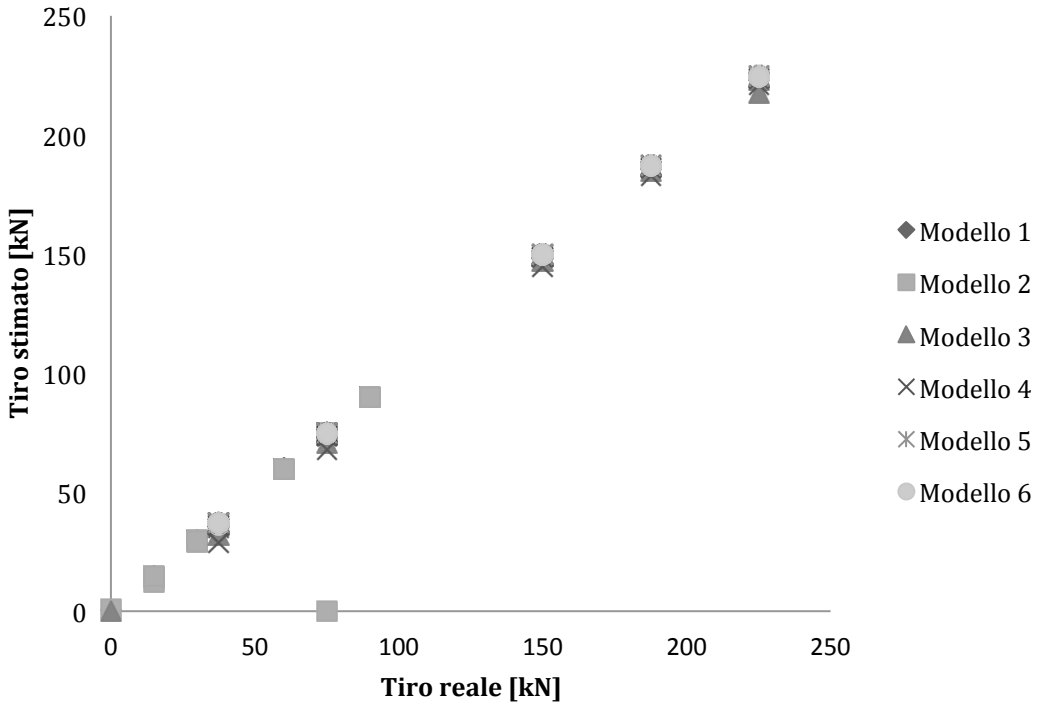
- Modelli 1 e 2: catene corte, snelle
- Modelli 3 e 4: catene corte, tozze
- Modelli 5 e 6: catene lunghe, snelle

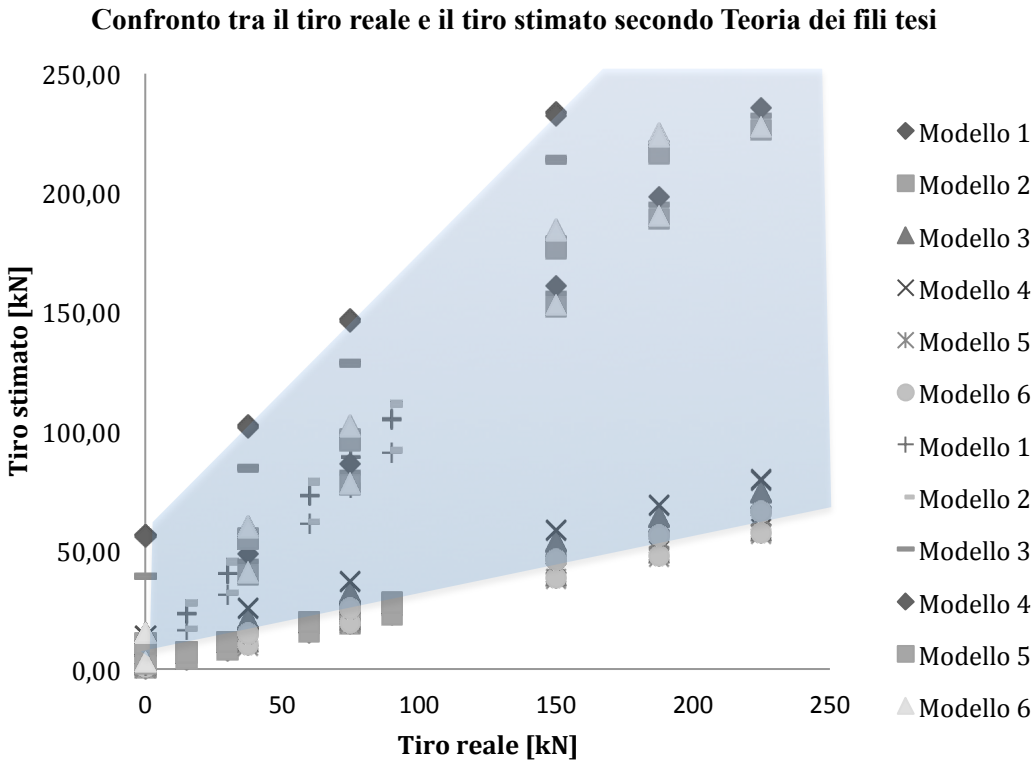
I grafici delle figure sottostanti mettono in relazione il tiro stimato con quello sperimentale nei diversi modelli.

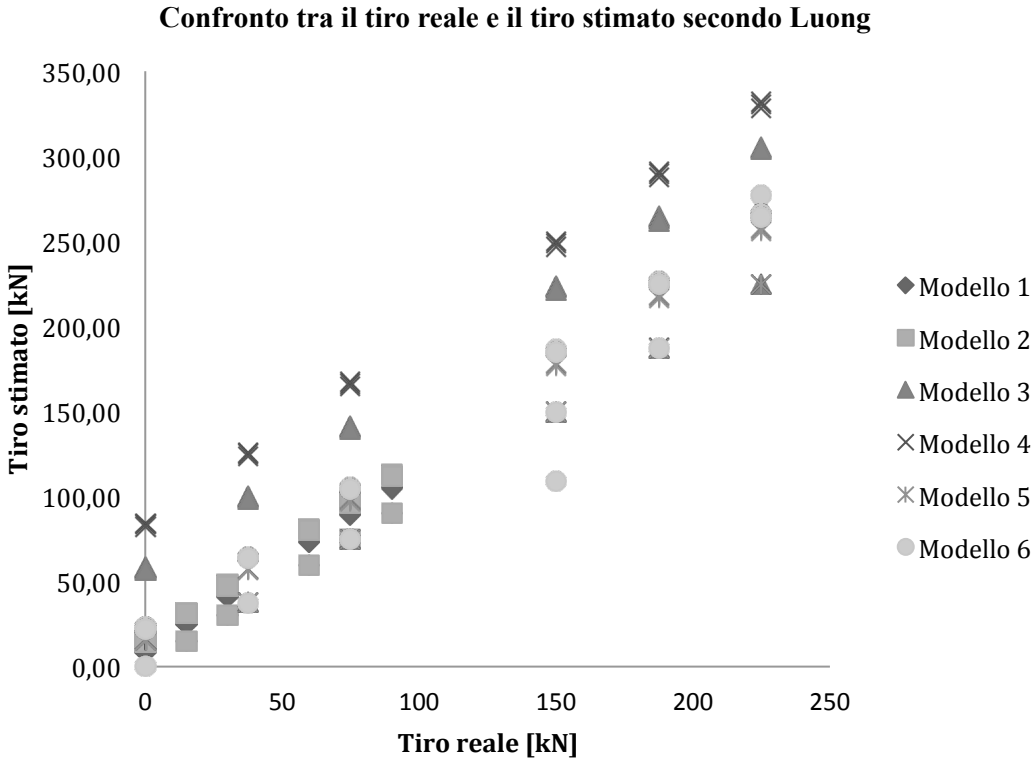
Confronto tra il tiro reale e il tiro stimato secondo Tullini



Confronto tra il tiro reale e il tiro stimato secondo Rebecchi




Confronto tra il tiro reale e il tiro stimato secondo Teoria dei fili tesi
Tiro stimato [kN]
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
0
50
100
150
200
250
Tiro reale [kN]
Modello 1
Modello 2
Modello 3
Modello 4
Modello 5
Modello 6
Modello 1
Modello 2
Modello 3
Modello 4
Modello 5
Modello 6

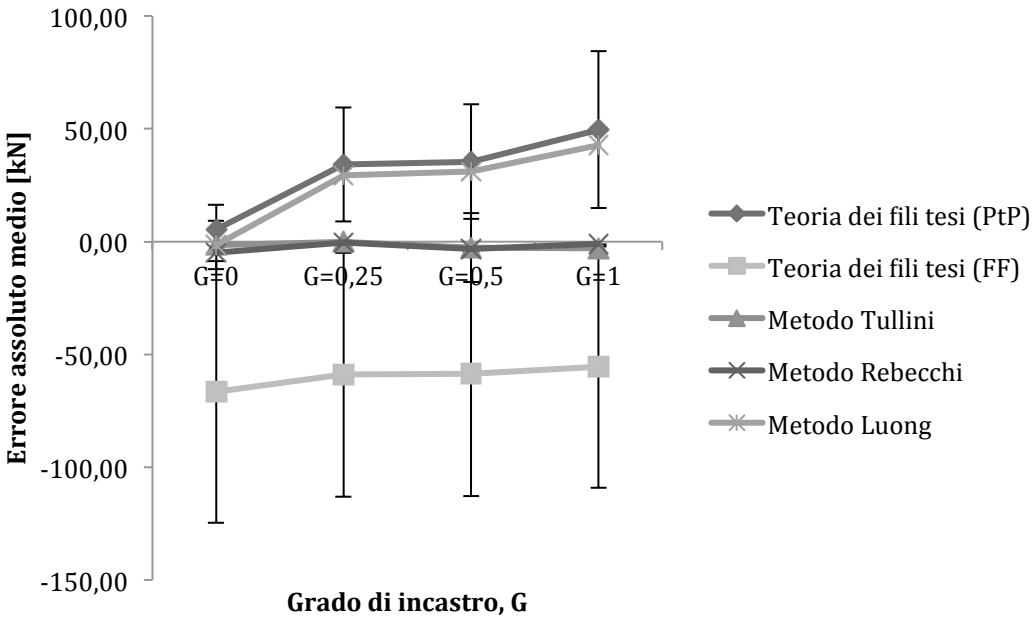

Confronto tra il tiro reale e il tiro stimato secondo Luong
Tiro stimato [kN]
350,00
300,00
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
0
50
100
150
200
250
Tiro reale [kN]
Modello 1
Modello 2
Modello 3
Modello 4
Modello 5
Modello 6

Dall'analisi deriva che i metodi Tullini e Rebecchi non presentano particolari problematiche in relazione alle caratteristiche dei singoli modelli, dimostrando una buona corrispondenza ai valori sperimentali. Il tiro determinato tramite la teoria dei fili tesi con condizioni di vincolo ad incastro sottostima invece il valore di forza assiale, incorrendo in errori massimi assoluti di 190 kN; se invece viene ipotizzato un vincolo a cerniera il tiro tende ad essere solitamente sovrastimato con un errore massimo di 90 kN.

Un successivo studio ha voluto approfondire l'influenza della condizione di vincolo sulla stima dei tiri; è stato quindi studiato il valore medio di errore assoluto tra tiro sperimentale e stimato.

TABELLA 4.8 – ERRORE ASSOLUTO MEDIO E DEVIAZIONE STANDARD SULLA STIMA DEL TIRO IN RELAZIONE AL GRADO DI INCASTRO

	Metodo Tullini [kN]		**Metodo Rebecchi [kN]**		**Teoria dei fili tesi (FF) [kN]**		**Teoria dei fili tesi (PtP) [kN]**		**Metodo Luong [kN]**	
	e	**σ**	**e**	**σ**	**e**	**σ**	**e**	**σ**	**e**	**σ**
G=0	-1,5	9,67	-4,9	10,7	-66,6	57,98	5,43	10,8	-1,4	9,7
G= 0,25	-0,1	0,23	-0,5	0,60	-58,9	54,11	34,2	25,3	29,6	22,1
G=0,5	-2,6	15,1	-3,2	15,2	-58,6	54,2	35,5	25,5	31,0	22,2
G=1	-2,9	25,5	-1,0	1,65	-55,2	53,57	49,6	34,7	42,6	29,9



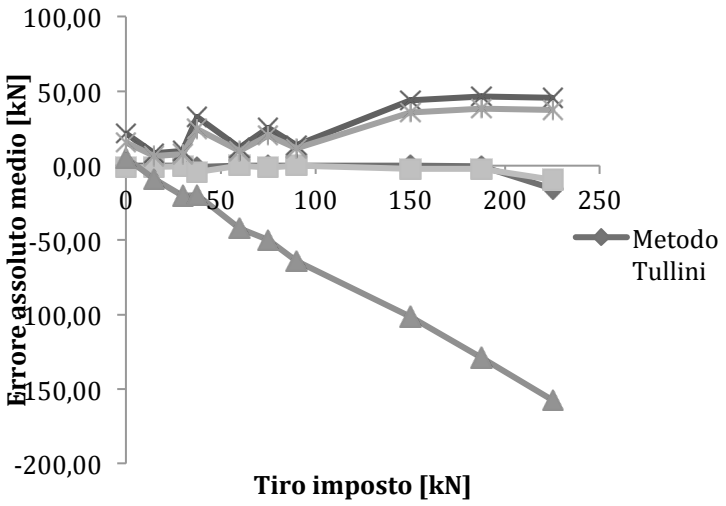
Dai dati riportati in tabella e nel grafico è evidente come la stima del tiro di Tullini e Rebecchi sia poco sensibile alle variazioni di condizioni di vincolo così come

la stima tramite l'utilizzo della teoria dei fili tesi in ipotesi di incastro perfetto. Interessante notare come la teoria dei fili tesi in ipotesi di cerniera e Luong siano effettivamente più accurati in caso di condizioni reali a cerniera e quindi congruenza tra ipotesi e realtà.

Per valutare l'influenza del tiro sulla stima del tiro è stato calcolato l'errore medio commesso nei diversi step di carico imposti. Ciò che risulta è che il metodo Tullini e Rebecchi presentano generalmente valori molto bassi di errore medio (< 1 kN) se non per il caso di tiro imposto parti a 225 kN dove infatti a causa di un valore mal stimato l'errore medio aumenta a 15 kN. Per gli altri metodi si può generalmente notare un aumento dell'errore medio corrispondente all'aumento di tiro imposto.

TABELLA 4.9 – ERRORE ASSOLUTO MEDIO E DEVIAZIONE STANDARD SULLA STIMA DEL TIRO IN RELAZIONE AL TIRO IMPOSTO

Tiro [kN]	Metodo Tullini [kN]		Metodo Rebecchi [kN]		Teoria dei fili tesi (FF) [kN]		Teoria dei fili tesi (PtP) [kN]		Metodo Luong [kN]	
	e	**σ**	**e**	**σ**	**e**	**σ**	**e**	**σ**	**e**	**σ**
0	-0,08	0,82	-1,32	2,15	5,38	5,75	21,50	23,01	15,34	19,80
15	0,03	0,06	-0,73	0,90	-9,2	1,36	8,35	5,45	6,43	5,08
30	0,03	0,12	-0,40	0,45	-20,1	1,61	9,77	6,45	7,80	6,12
37,5	-0,99	4,74	-4,13	7,43	-19,9	7,14	32,74	28,56	24,60	26,49
60	0,04	0,24	-0,18	0,36	-42,0	2,02	11,97	8,07	9,95	7,76
75	-0,05	0,17	-1,46	3,16	-49,9	6,96	25,20	27,82	20,09	25,08
90	-0,05	0,30	-0,19	0,35	-64,1	2,34	13,69	9,38	11,57	9,09
150	-0,15	0,09	-2,12	2,73	-101,5	8,74	43,90	34,98	35,76	33,01
187,5	-0,20	0,15	-2,00	2,45	-128,9	9,28	46,52	37,13	38,39	35,22
225	-15,6	48,72	-9,38	24,14	-157,3	11,38	45,76	45,53	37,49	43,82



4.2.1.2 Conclusioni

L'analisi, condotta su 230 modelli FE, diversi per caratteristiche geometriche, sforzo assiale imposto e condizioni di vincolo assegnate, ha portato alla conclusione che il metodo maggiormente preciso risulta essere quello proposto da Tullini, Laudiero e Rebecchi (2008), che riesce ad approssimare correttamente lo sforzo assiale con un errore assoluto medio inferiore ai 2 kN. Dall'analisi risulta inoltre che il metodo correntemente utilizzato e considerato maggiormente attendibile, ovvero il metodo dei fili tesi con ipotesi ad incastro, dà una stima spesso errata, in particolare per catene sufficientemente tese, delle quali riesce a sottostimare la forza assiale fino a 150 kN.

4.2.2 CASI STUDIO

Nell'analisi di comparazione dei metodi si è voluto utilizzare alcuni dei casi presenti nel database; essendo il tiro reale incognito, lo studio qui proposto ha solo uno scopo comparativo tra i metodi presentati. Dipendentemente dalle informazioni possedute è stato possibile applicare uno o più metodi; in particolare il metodo Tullini e Rebecchi necessitano la conoscenza delle forme modali relative alla prima e terza frequenza propria di vibrazione, si sono quindi esclusi dalla comparazione i numerosi casi di cui era nota la sola prima frequenza. È stato quindi possibile esaminare i seguenti casi:

- Torre degli Anziani, Padova **(TPd**) [Appendice A]
- Sovraintendenza ai Beni Architettonici, Verona (**SBAP**) [Appendice B]
- Palazzo Ducale di Urbino (**MU**)
- Museo Archeologico di Verona (**ArVr**)
- Villa del Bene, Dolcè (**VDo**)
- Duomo di Guastalla (**DGu**)

In Tabella 4.10 sono riportate le caratteristiche geometrici relative alle 49 catene analizzate:

TABELLA 4.10 – CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLE CATENE DEI CASI STUDIO IN ESAME

ID	b [mm]	h / d [mm]	A [mm^2]	J [mm^4]	L [mm]	h/L
TPd_C1	-	16,5	213,72	7,27E+03	4190	0,004
TPd_C2	15	61	915	1,72E+04	3840	**0,016**
TPd_C3	19	0	283,385	1,28E+04	3870	0,005
TPd_C4	28	53	1484	9,70E+04	4210	**0,013**
SBAP_C1	22	22	484	1,95E+04	4405	0,006
SBAP_C2	22	22	484	1,95E+04	4500	0,006
SBAP_C2bis	22	22	484	1,95E+04	4000	-
SBAP_C3	23	22	506	2,23E+04	2820	0,007
SBAP_C4	20	20	400	1,33E+04	2500	0,006
SBAP_C5	18	18	324	8,75E+03	2840	0,006
SBAP_C6	17	19	323	7,78E+03	2840	0,006
SBAP_C7	20	25	500	1,67E+04	2700	**0,011**
SBAP_C8	17	42	714	1,72E+04	4400	**0,011**
SBAP_C8bis	17	42	714	1,72E+04	400	**-**
SBAP_C9	17	17	289	6,96E+03	2900	0,020
SBAP_C9bis	17	17	289	6,96E+03	2500	-
SBAP_C10	18	18	324	8,75E+03	2700	0,005
SBAP_C11	15	18	270	5,06E+03	2800	0,006
SBAP_C12	20	20	400	1,33E+04	2700	0,005
SBAP_C13	22	22	484	1,95E+04	2760	0,008
SBAP_C13bis	22	22	484	1,95E+04	2360	-
SBAP_C14	20	20	400	1,33E+04	2820	0,006
SBAP_C15	19	21	399	1,20E+04	2880	0,007
SBAP_C16	12	35	420	5,04E+03	2860	0,009
SBAP_C17	13	32	416	5,86E+03	2900	**0,011**
MU_C1	30	55	1650	1,24E+05	9570	0,010
MU_C2	30	55	1650	1,24E+05	9600	0,007
MU_C3	33	33	1089	9,88E+04	4960	0,006
MU _C4	33	33	1089	9,88E+04	4980	0,007
MU _C5	25,5	25,5	650,25	3,52E+04	4180	0,006
MU_C6	25,5	25,5	650,25	3,52E+04	4240	0,007
MU_C7	25,5	25,5	650,25	3,52E+04	4220	0,009
MU_C8	17	42	714	1,72E+04	3700	0,008
MU_C9	17	42	714	1,72E+04	3800	0,007
ArVr_C1	10	44	440	3,67E+03	2060	0,007
ArVr_C2	10	44	440	3,67E+03	2255	**0,012**
ArVr_C3	10	44	440	3,67E+03	2255	**0,011**
VDo_C1	23,6	22,2	523,92	2,43E+04	4620	0,005

VDo_C2	-	35	961,625	1,47E+05	4600	0,008
VDo_C3	23,5	21	493,5	2,27E+04	4540	0,005
VDo_C4	24,8	52,5	1302	6,67E+04	6280	0,008
VDo_C5	29	50	1450	1,02E+05	6260	0,008
VDo_C6	26	51	1326	7,47E+04	6200	0,008
VDo_C7	29	50	1450	1,02E+05	6200	0,008
DGu_C1	24	50	1200	5,76E+04	9000	0,006
DGu_C2	24	54	1296	6,22E+04	9000	0,006
DGu_C3	24	50	1200	5,76E+04	10710	0,005
DGu_C4	-	35	961,625	1,47E+05	3300	**0,011**
DGu_C5	-	29	660,185	6,94E+04	3240	0,009

In Tabella 4.11 sono riassunte le proprietà dinamiche delle catene; le informazioni non sono sempre complete dipendendo, infatti, dalla modalità dell'esecuzione della prova *in situ* in particolare dal set-up della frequenza di acquisizione e dal numero di accelerometri utilizzati.

TABELLA 4.11 – CARATTERISTICHE DINAMICHE DELLE CATENE DEI CASI STUDIO IN ESAME

ID	f_1 **[Hz]**	f_2 **[Hz]**	f_3 **[Hz]**	**Ampiezze relative al primo modi di vibrare**				
				v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
TPd_C1	**9,39**	19,62	30,14	-	0,4672	0,7459	0,4748	-
TPd_C2	16,69	34,82	54,43	-	0,49	0,734	0,4678	-
TPd_C3	**16,69**	34,82	54,43	-	0,4900	0,7340	0,4678	-
TPd_C4	**12,79**	26,70	41,70	-	0,4766	0,7479	0,4620	-
SBAP_C1	**5,60**	19,68	40,95	-	0,4429	0,7816	0,4391	-
SBAP_C2	**17,44**	-	-	0,0035	0,4654	0,7431	0,4806	0,0080
SBAP_C2bis	**12,99**	22,19	-	0,0068	0,4496	0,7476	0,4886	0,0062
SBAP_C3	**12,95**	22,44	-	0,0436	0,4603	0,7130	0,5225	0,0692
SBAP_C4	**17,91**	-	-	0,0198	0,4514	0,7601	0,4661	0,0286
SBAP_C5	**14,51**	-	-	0,0486	0,4630	0,7714	0,4316	0,0098
SBAP_C6	**14,61**	15,66	-	0,0117	0,4716	0,7392	0,4789	0,0128
SBAP_C7	**15,70**	-	-	0,0144	0,4691	0,7527	0,4597	0,0305
SBAP_C8	**15,42**	-	-	0,0145	0,4688	0,7491	0,4648	0,0209
SBAP_C8bis	**13,99**	20,77	-	0,0191	0,4575	0,7300	0,5060	0,0167
SBAP_C9	**13,91**	20,88	-	0,0708	0,4833	0,6861	0,5327	0,0768
SBAP_C9bis	**12,12**	18,55	-	0,0320	0,4998	0,7651	0,3999	0,0065
SBAP_C10	**12,15**	18,85	-	0,0708	0,4944	0,7360	0,4542	0,0494
SBAP_C11	**13,21**	16,07	-	-	0,4769	0,7393	0,4721	-
SBAP_C12	**16,37**	-	-	-	0,4347	0,7536	0,4927	-
SBAP_C13	**14,31**	-	-	-	0,4880	0,7498	0,4299	-
SBAP_C13bis	**16,44**	-	-	0,0753	0,4601	0,4087	0,4852	0,0337
SBAP_C14	**16,22**	-	-	0,1587	0,4576	0,6956	0,5197	0,1037
SBAP_C15	**19,91**	-	-	-	0,4577	0,7446	0,4846	-

SBAP_C16	**9,91**	23,10	-	-	0,4355	0,7418	0,5098	-
SBAP_C17	**14,96**	17,52	-	-	0,4311	0,7636	0,4806	-
MU_C1	**8,88**	21,75	-	-	0,4429	0,7601	0,4736	-
MU_C2	**4,88**	11,07	16,47	-	0,4968	0,7229	0,4801	-
MU_C3	**5,49**	12,36	18,12	-	0,5158	0,7348	0,4234	-
MU _C4	**11,42**	23,46	-	-	0,4745	0,7488	0,4627	-
MU _C5	**11,97**	23,34	-	-	0,3391	0,8097	0,4784	-
MU_C6	**8,32**	21,20	-	-	0,4521	0,7561	0,4731	-
MU_C7	**9,46**	23,09	-	-	0,4599	0,7479	0,4787	-
MU_C8	**9,43**	23,60	-	-	0,4263	0,7435	0,5152	-
MU_C9	**10,65**	23,50	-	-	0,4741	0,7461	0,4667	-
ArVr_C1	**10,58**	93,80	-	-	0,4841	0,7355	0,4741	-
ArVr_C2	**17,21**	42,56	73,12	-	0,5177	0,7275	0,4503	-
ArVr_C3	**11,89**	27,64	48,47	-	0,5162	0,6738	0,5287	-
VDo_C1	**14,89**	32,33	36,43	-	59,770 0	0,5204	0,7166	-
VDo_C2	**13,38**	27,59	43,84	-	0,4863	0,6731	0,5572	-
VDo_C3	**13,38**	27,59	43,84	-	0,4976	0,7066	0,5030	-
VDo_C4	**13,04**	27,05	43,46	-	0,5346	0,6923	0,4846	-
VDo_C5	**7,28**	15,39	24,66	-	0,5261	0,7032	0,4782	-
VDo_C6	**7,37**	16,02	25,88	-	0,5191	0,7069	0,4805	-
VDo_C7	**6,84**	14,94	25,00	-	0,4932	0,7077	0,5059	-
DGu_C1	**6,35**	13,92	23,93	-	0,5042	0,7199	0,4770	-
DGu_C2	**6,64**	13,48	20,70	-	0,5191	0,7224	0,4567	-
DGu_C3	**5,86**	12,01	18,51	-	0,5256	0,7188	0,4549	-
DGu_C4	**5,08**	10,11	15,14	-	0,4641	0,7432	0,4820	-
DGu_C5	**13,72**	31,45	45,21	-	0,4900	0,7557	0,4345	-

4.2.2.1 Elaborazione dati

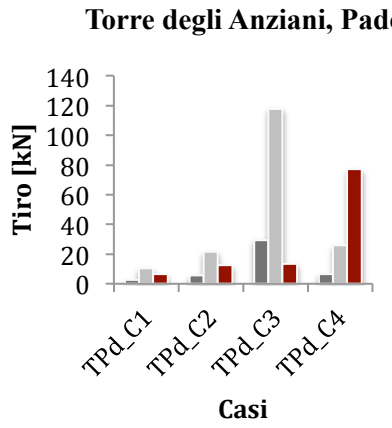
Si è scelto di confrontare il tiro stimato con il metodo Tullini (T_{Tull}) con quello calcolato mediante la teoria dei fili tesi (T_{FF} relativo alla condizione di incastro ad incastro perfetto e T_{PtP} relativo a quella di cerniera). In Tabella 4.12 sono riportati i risultati.

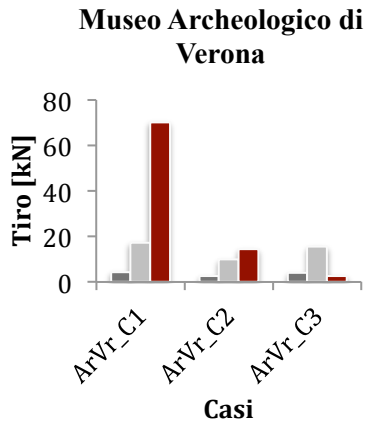
TABELLA 4.12 – COMPARAZIONE DEI TIRI STIMATI SECONDO I DIVERSI METODI PER I CASI STUDIO IN ESAME

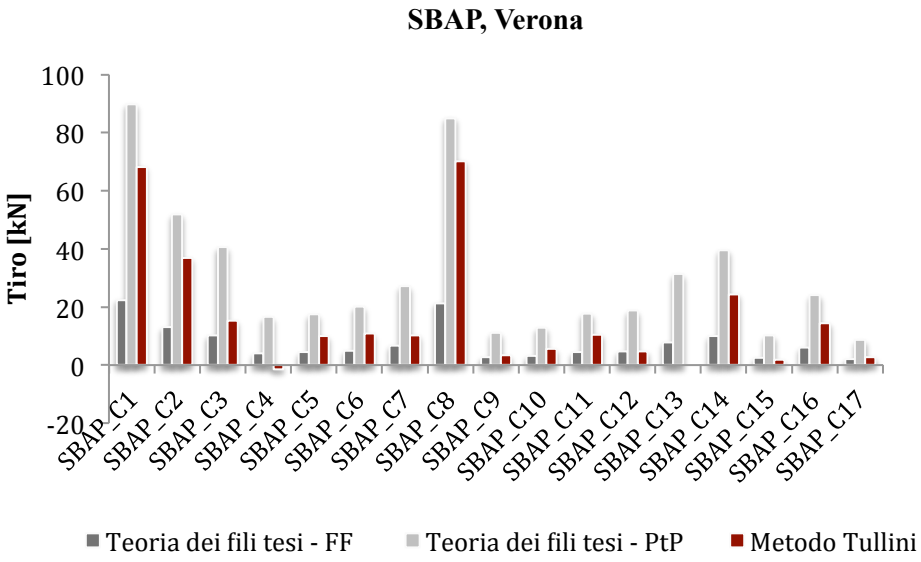
ID	Teoria dei fili tesi		Tullini	$\Delta T_1 =$	$\Delta T_2 =$
	T_{FF} [kN]	T_{PtP} [kN]	T_{Tull} [kN]	$T_{FF} - T_{Tull}$ [kN]	$T_{PtP} - T_{Tull}$ [kN]
TPd_C1	2,61	10,45	6,466	-3,856	3,984
TPd_C2*	5,45	21,8	12,667	-89,661	-73,311
TPd_C3	29,48	117,92	13,398	16,082	104,522
TPd_C4*	6,47	25,89	77,13		

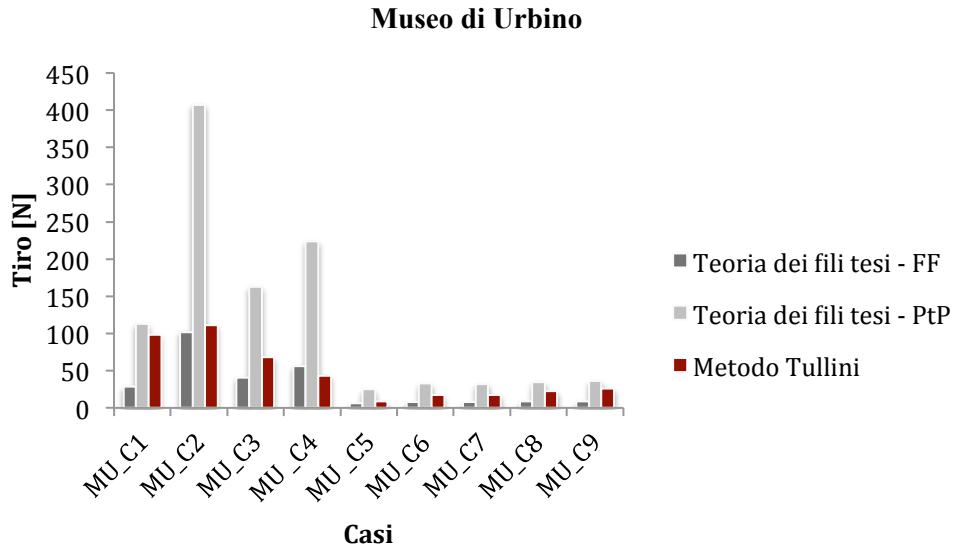
SBAP_C1	22,42	89,69	68,272	-45,852	21,418
SBAP_C2	12,98	51,93	36,817	-23,837	15,113
SBAP_C3	10,13	40,53	15,281	-5,151	25,249
SBAP_C4	4,13	16,53	-1,408	5,538	17,938
SBAP_C5	4,38	17,52	9,915	-5,535	7,605
SBAP_C6	5,04	20,16	10,855	-5,815	9,305
SBAP_C7**	6,8	27,21	10,262	-3,462	16,948
SBAP_C8**	21,26	85,04	70,21	-48,95	14,83
SBAP_C9	2,8	11,21	3,284	-0,484	7,926
SBAP_C10	3,24	12,94	5,488	-2,248	7,452
SBAP_C11	4,45	17,81	10,548	-6,098	7,262
SBAP_C12	4,69	18,75	4,792	-0,102	13,958
SBAP_C13	7,82	31,29	-	-	-
SBAP_C14	9,9	39,59	24,429	-14,529	15,161
SBAP_C15	2,55	10,21	1,749	0,801	8,461
SBAP_C16	6,04	24,14	14,48	-8,44	9,66
SBAP_C17**	2,17	8,66	2,695	-0,525	5,965
MU_C1	28,28	113,12	98,183	-69,903	14,937
MU_C2	101,78	407,13	111,401	-9,621	295,729
MU_C3	40,7	162,82	68,222	-27,522	94,598
MU _C4	55,91	223,66	43,427	12,483	180,233
MU _C5	6,17	24,7	8,418	-2,248	16,282
MU_C6	8,21	32,83	16,944	-8,734	15,886
MU_C7	8,09	32,35	17,158	-9,068	15,192
MU_C8	8,69	34,78	22,197	-13,507	12,583
MU_C9	9,06	36,24	26,064	-17,004	10,176
ArVr_C1	4,34	17,37	12,33	-7,986	5,044
ArVr_C2*	2,48	9,93	14,48	-10,933	-3,483
ArVr_C3*	3,89	15,58	2,695	-8,777	2,913
VDo_C1	15,74	62,94	81,903	-66,163	-18,963
VDo_C2	25,8	103,18	100,562	-74,762	2,618
VDo_C3	13,59	54,38	58,917	-45,327	-4,537
VDo_C4	21,51	86,03	84,388	-62,878	1,642
VDo_C5	24,32	97,3	91,532	-67,212	5,768
VDo_C6	18,74	74,98	70,45	-51,71	4,53
VDo_C7	17,39	69,55	57,346	-39,956	12,204
DGu_C1	4,5	18	119,029	-114,529	-101,029
DGu_C2	4,5	18	102,001	-97,501	-84,001
DGu_C3	5,36	21,44	87,313	-81,953	-65,873
DGu_C4**	1,65	6,6	-	-	-
DGu_C5	1,62	6,48	16,478	-14,858	-9,998

Note alla Tabella 4.12 – Il tiro calcolato tramite metodo Tullini dei casi contrassegnati da asterisco (*) è stimato a partire dalla terza frequenza principale di vibrazione, presentando essi un rapporto $h/l > 0.01$, secondo quanto concluso nel precedente paragrafo. Per i casi contrassegnati da (**) pur presentando un rapporto $h/l > 0.01$ non è stato possibile calcolare il tiro tramite la terza frequenza in quanto il dato è assente.


Torre degli Anziani, Padova
Tiro [kN]
140
120
100
80
60
40
20
0
TPd_C1
TPd_C2
TPd_C3
TPd_C4
Casi


Museo Archeologico di Verona
Tiro [kN]
80
60
40
20
0
ArVr_C1
ArVr_C2
ArVr_C3
Casi


SBAP, Verona
Tiro [kN]
100
80
60
40
20
0
-20
SBAP_C1
SBAP_C2
SBAP_C3
SBAP_C4
SBAP_C5
SBAP_C6
SBAP_C7
SBAP_C8
SBAP_C9
SBAP_C10
SBAP_C11
SBAP_C12
SBAP_C13
SBAP_C14
SBAP_C15
SBAP_C16
SBAP_C17
Teoria dei fili tesi - FF
Teoria dei fili tesi - PtP
Metodo Tullini


Museo di Urbino
Tiro [N]
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
MU_C1
MU_C2
MU_C3
MU_C4
MU_C5
MU_C6
MU_C7
MU_C8
MU_C9
Casi
Teoria dei fili tesi - FF
Teoria dei fili tesi - PtP
Metodo Tullini

4.2.2.2 Conclusioni

Dalla comparazione dei tiri stimati secondo i diversi metodi emerche che calcolando il tiro con la Teoria dei fili tesi si incorre in una differenza potenziale di + 295 kN a -115 kN rispetto al valore suggerito dal metodo Tullini, che per quanto visto nel precedente paragrafo ha un errore medio minore al kN.

Risulta evidente che commettere un errore di tale portata possa risultare particolarmente rischioso (nel caso di sovrastima del tiro) o comportare interventi anche invasivi (nel caso di sottostima) nell'analisi di manufatti di valore artistico e culturale.

5 CONCLUSIONI E RACCOMANDAZIONI

5.1 CONCLUSIONI

Il lavoro si è posto l'obiettivo di indagare quale fosse la metodologia più corretta ed affidabile per la stima della forza assiale nei tiranti storici mediante prove dinamiche non distruttive. Inizialmente si sono investigate, tramite uno studio della letteratura e dello stato dell'arte, quali fossero le caratteristiche più comuni dei tiranti storici, creando un database contenente informazioni di carattere geometrico e dinamico di numerose catene oggetto di analisi di studi passati. La caratterizzazione tipologica ha permesso quindi di sviluppare dei modelli prossimi alle situazioni reali, oggetto sia delle analisi ad elementi finiti che della prova di laboratorio ideata e progettata.

L'analisi della letteratura scientifica e dei vari metodi per la stima del tiro ad oggi proposti è stata quindi portata avanti su tre livelli: analisi su modelli FE, confronto con i casi raccolti nel database e impostazione di una prova di laboratorio. A partire dai risultati delle analisi condotte è stato possibile definire il metodo di stima più corretto.

La costruzione del database si è concentrata nella raccolta di dati geometrici concernenti il tirante stesso e la volta o l'arco in presidio oltre che nelle prime frequenze e nei modi di vibrare. È stato possibile raccogliere un totale di 340 dati, che hanno permesso la determinazione di modelli tipologici, caratterizzati per la loro lunghezza, area e momento di inerzia; inoltre il database ha fornito sufficiente materiale per una prima analisi sui fattori influenti sulle caratteristiche dinamiche.

Gli studi parametrici sui dati contenuti nel database, avvalorati dalla ricerca di Luong (2010) e dalle informazioni rilevate in letteratura, definiscono quali siano le caratteristiche influenti sulle frequenze e sui modi di vibrare. *In primis* a condizionare le caratteristiche dinamiche è la forza assiale, il cui effetto è influenzato dalle caratteristiche geometriche del tirante, dal numero di modo indagato e dalle condizioni di vincolo. Oltre al tiro gli altri fattori che influenzano le frequenze sono il numero del

modo indagato, la lunghezza, la forza e la dimensione della sezione trasversale e le condizioni di vincolo. I differenti parametri determinano un aumento o una diminuzione delle frequenze, ma spesso non possono essere studiati singolarmente, in quando sono condizionati dagli effetti degli altri fattori.

A conferma dello studio Luong (2010) e con lo scopo di indagare i diversi metodi per la stima del tiro (Luong, 2010; Rebecchi et al., 2013; Tullini & Laudiero, 2008) sono state condotte 230 analisi FE con differenti caratteristiche geometriche (sezione trasversale e lunghezza), condizioni di vincolo (quattro diverse configurazioni, da cerniera perfetta ad incastro) e stati di tensione (sei tassi di lavoro, da 0 a 150 MPa). I risultati delle analisi hanno permesso di confermare l'ipotesi iniziale di poca adeguatezza della teoria dei fili tesi, che assimilando il tirante ad una corda tesa non ne considera la rigidezza flessionale, parametro di grandezza non trascurabile per quanto riguarda le catene antiche; inoltre è stato possibile dimostrare l'attendibilità del metodo Tullini and Laudiero (2008), che basandosi sulla prima frequenza e sul relativo modo di vibrare riesce a stimare la forza assiale con un errore medio minore di 2 kN.

Ulteriori conferme dell'accuratezza del metodo potranno essere effettuate a seguito dell'esecuzione della prova di laboratorio progettata nel corso del lavoro. La prova, pensata per essere eseguita nei locali sotterranei dei laboratori del DICEA dell'Università di Padova, è atta a testare 6 modelli diversi, desunti dallo studio del database e della letteratura, in diversi stati di tensione e di condizioni di vincolo. Il test ha anche l'obiettivo di determinare quale sia la migliore configurazione di disposizione degli accelerometri per la prova *in situ*, a supporto dei risultati ottenuti attraverso analisi FE nei quali, grazie all'uso delle matrici di MAC come strumento di verifica di congruenza tra due modelli distinti, si evince che la disposizione migliore, utilizzando tre accelerometri, risulta essere ai terzi e in mezzeria o agli estremi e in mezzeria, mentre l'utilizzo di 5 accelerometri garantisce, in ogni disposizione, un'appropriata acquisizione delle prime frequenze e in particolare dei modi di vibrare.

In ultimo si sono applicati i metodi analizzati, a semplice scopo comparativo delle stime di forza assiale, a diversi casi studio sia contenuti nel database che specificatamente testati per il lavoro di tesi (Torre degli Anziani a Padova, Sovraintendenza ai Beni Architettonici a Verona).

5.2 RACCOMANDAZIONI

5.2.1 *RACCOMANDAZIONI PER UNA CORRETTA ESECUZIONE DELLA PROVA* IN SITU

La prova *in situ* si configura come un test di facile e veloce esecuzione, oltre ad essere una prova non distruttiva. Il numero di sensori da utilizzare deve essere pensato nei riguardi del metodo da impiegare per la determinazione del tiro, del numero di frequenze che si vogliono trovare, oltre che delle necessità di tipo pratico e tempistico.

Per l'applicazione del metodo Tullini nella sua formula semplificata e analizzata è necessario predisporre tre accelerometri, ai quarti e in mezzeria per l'acquisizione della prima frequenza di vibrare e dei relativi modi. Tale configurazione degli accelerometri non è però la migliore in quanto si dispone in prossimità dei nodi dei modi di vibrare pari.

Generalmente la procedura di *peak-picking* non risulta essere difficoltosa in quanto la spettro di risposta nel dominio delle frequenze presenta chiari picchi; maggiore è il numero dei sensori, minore è la difficoltà nella determinazione delle frequenze principali di vibrazione.

Per l'applicazione di metodi d'identificazione dinamica basata sulla minimizzazione dell'errore delle misure acquisite, è invece necessario acquisire le frequenze maggiori, fino all'ottava almeno, questo comporta quindi un aumento della frequenza di acquisizione, maggiore di 200 SPS (*Sample Per Second*). L'applicazione di questi metodi, sebbene dia risultati maggiormente accurati sia per quanto riguarda la determinazione dello sforzo assiale che delle rigidezze vincolari, risulta essere particolarmente onerosa in termini di tempo e calcolo (Amabili et al., 2010; Garziera & Collini, 2008; Luong, 2010; Park et al., 2006).

6 BIBLIOGRAFIA

Abraham, P. (1935). Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval.

Alberti, L. B. (1966). *L'architettura (De re aedificatoria)* (P. Orlandi G; Portoghesi Ed.). Milano: Il Polifilo.

Allernang, R. J., & Brown, D. L. (1983). A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis. *IMAC I*, 110-116.

Amabili, M., Carra, S., Collini, L., Garziera, R., & Panno, A. (2010). Estimation of tensile force in tie-rods using a frequency-based identification method. *Journal of Sound and Vibration, 329*, 2057-2067.

Astrua, G. (1995). *Manuale completo del capomastro assistente edile*. Milano: Hoepli.

Beconcini, M. L. (1996). Un metodo pratico per la determinazione del tiro nelle catene. *Costruire in laterizio, 54*, 229-301.

Bejarano Urrego, L. E. (2014). *Methodology for Seismic Assessment applied to the Case Study of Tower Anziani in Padua (Italy).* (Master), Università degli studi di Padova.

Belli, M., Guideri, S., & La Salvia, V. Archometallurgia del ferro. from http://archeologiamedievale.unisi.it/SitoCNR/Metalli/ferro/home.html

Biringuccio, V. (1540). *De la Pirotechmia* (Vol. X). Venezia: Roffinello.

Borgato, G. *Analisi della copertura lignea e studio del comportamento sismico della chiesa di Santa Maria Assunta a Vobarno (Brescia)*. Università degli Studi di Padova, Padova.

Briccolo Bati, S., & Tonietti, U. (1993). *Determinazione dello sforzo nelle catene metalliche di vecchi edifici*. Paper presented at the Conferenza Nazionale sulle Prove non Distruttive Monitoraggio Diagnostica, Ferrara.

Briccolo Bati, S., & Tonietti, U. (2001). Experimental Methods for Estimating In Situ Tensile Force in Tie-Rods. *Journal of Engineering Mechanics, December*, 1275-1283.

Brusegan, L. (2008/09). *Indagini sperimentali e analisi del comportamento sismico dell'ex distretto militare- complesso di San Paolo a Treviso.* Università degli Studi di Padova, Padova.

Caleca, L., & De Vecchi, A. (1987). *Tecnologie di consolidamento delle strutture murarie*. Palermo: Libreria Dario Flaccovio Editrice.

Calore, R. (1997-98). *Analisi sperimentale delle tecniche di rinforzo di manufatti in ghisa.* Università degli Studi di Padova, Padova.

Carbonara, G. (1942). *Trattato di restauro architettonico*. Torino: UTET.

Cherubini, F. (1814). *Vocabolario Milanese-Italiano* (Vol. I). Milano: Stamperia Reale.

Collini, L., & al., e. (2014). Load and effectiveness of the tie-rods of an ancient Dome: Technical and historical aspects. *Journal of Cultural Heritage*.

Dall'Igna, S. (1998/99). *Caratterizzazione meccanica di tiranti metallici in edifici storici.* Università degli Studi di Padova.

Dalla Torre, C., & Rosso, S. (2008/09). *Indagini sperimentali ed analisi del comportamento sismico del seminario del patriarcato di Venezia.* Università degli studi di Padova, Padova.

Dardano, D., Miranda, J. C., Persichetti, B., & Valvo, P. (2005). *Un metodo per la determinazione del tiro nelle catene mediate identificazione dinamica*. Paper presented at the Conferenza Nazionale sulle Prove non Distruttive, Monitoraggio e Diagnostica - 11° Congresso Nazionale dell'AIPnD, Milano.

De Cesaris, F. (1996). Gli elementi costruttivi tradizionali. In G. Carbonara (Ed.), *Trattato di restauro*

architettonico (Vol. sez. E3, pp. 83-119). Tornino: UTET.
De Ioanna, F., & Piccarreta, F. (2004). Volte e Cupole. In G. Carbonara (Ed.), *Atlante del restauro* (Vol. I, sez. C3, pp. 210-235). Torino: UTET.
Di Giorgio Martini, F. (1967). *Trattati di architettura, ingegneria e arte militare* (C. Maltese Ed.). Milano: Il Polifilo.
Di Pisa, F. (1998/99). *Caratterizzazione dei tiranti metallici negli edifici storici.* Università degli Studi di Padova, Padova.
Facchini, L., Galano, L., & Vignoli, A. (2003). *Experimental analysis of two method for estimating in-situ tensile force in tie*. Paper presented at the 2nd International Speciality Conference on 'The Conceptual Approach to Structural Design', Milan ,Italy.
Fonda, G. (1794). Del meccanismo delle volte e delle loro diverse specie *Elementi di Architettura civile e militare ad uso del collegio Nazzareno*. Roma.
Gallaccini, T. (1970). *Trattato sopra gli errori degli architetti*. Westmead: Gregg International Publishers Limited.
Garziera, R., & Collini, L. (2008). Identificazione della tesione nelle catene di edifici storici mediante analisi modale: Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università degli Studi di Parma.
Giustina, I. (1996). Problemi di lessico tecnico nella documentazione relativa a cantieri ricchiniani. In S. Della Torre (Ed.), *Storia delle tecniche murarie e tutela del costruito, esperienze e questioni di metodo*. Milano: Guerini Studio.
Lagomarsino, S., & Calderini, C. (2005). The dynamical identification of the tensile force in ancient tie-rods. *Engineering Structures, 27*, 846–856.
Levi, C. (1932). *Trattato teorico-pratico di costruzioni civili, rurali, stradali ed idrauliche* (Vol. I
II). Milano: Hoepli.
Liu, C.-S. (2008). Identifying time-dependent damping and stiffness functions by a simple and yet accurate method. *Journal of Sound and Vibration, 318*, 148-165.
Luong, T. (2010). *Identification of the tensile force in tie-rods using modal analysis tests.* (Master Master), Universidade do Minho.
Mastrodicasa, S. (1993). *Dissesti statici delle strutture edilizie*. Milano: Hoepli.
Menicali, U. (1992). *I materiali dell'edilizia storica: tecnologia e impiego dei materiali tradizionali*: Nuova Italia scientifica.
Mirabella Roberti, G., & Spina, O. (2001). *Numerical Analysis on the Sardinian "Nuraghe"*. Paper presented at the III International Seminar – Structural Analysis of Historical Constructions, Guimarães, Portugal.
Modena, C., Zonta, D., Facchin, D., Dall'Igna, S., & Di Pisa, F. (2000). Analisi dello stato di tensione delle catene metalliche del Palazzo della Ragione di Padova: resoconto delle prove: Comune di Padova.
Park, S., Choi, S., Oh, S.-T., Stubbs, N., & Song, H.-C. (2006). Identification of the tensile force in high-tension bars using modal sensitivities. *International Journal of Solids and Structures, 43*.
Pipinato, A. (2010). *In-situ and laboratory tests for steel structures.* (Advanced Master in Structural Analysis of Monuments and Historical Structures (SAHC)).
Podestà, S., & Scandolo, L. (2013). Le catene metalliche nell'ediliza storica: come valutarne il contributo strutturale.
Rebecchi, G. (2007/2009). *Beam axial load identification using one vibration mode shape.* (Phd), Università degli Studi di Ferrara, Ferrara.
Rebecchi, G., Tullini, N., & Laudiero, F. (2013). Estimate of the axial force in slender beams with unknown boundary conditions using one flexural mode shape. *Journal of Sound and Vibration, 332*, 4122-4135.
Tampone, G. (1983). *Restauro delle strutture di legno*. Paper presented at the 1° Convegno Nazionale sul Restauro del Legno, Milano.
Tomasoni, E. (2008). *Le volte in muratura negli edifici storici: tecniche costruttive e comportamento strutturale.* (Phd), Università degli Studi di Trento, Università degli Studi di Brescia, Università degli Studi di Padova, Università degli Studi di Trieste, Università degli Studi di

Udine, Università IUAV di Venezia, Trento.
Tullini, N., & Laudiero, F. (2008). Dynamic identification of beam axial loads using one flexural mode shape. *Journal of Sound and Vibration, 318*, 131-147.
Tullini, N., & Laudiero, F. (2008). Dynamic identification of beam axial loads using one flexural mode shape. *Journal of Sound and Vibration, 318*, 131-147.
Tullini, N., Rebecchi, G., & Laudiero, F. (2011). Bending tests to estimate the axial force in tie-rods. *Mechanics Research Communications, 44*, 57-64.
Valadier, G. (1833). *L' Architettura Pratica dettata nella scuola e cattedra dell'insigne accademia di San Luca* (Vol. IV). Roma.
Vincenzi, L. (2007). *Identificazione dinamica delle caratteristiche modali e delle proprietà meccaniche di strutture mediante algoritmi di ottimizzazione.* (PhD), Università degli Studi di Bologna, Bologna.
Viollet-le-Duc, E.-E. (1814-1879). *Dictionnaire raisonné de l'architecture française*.

APPENDICE A TORRE DEGLI ANZIANI - PADOVA

A.1 INTRODUZIONE

Torre degli Anziani è una torre civile in stile romanico costruita nel Medioevo nel cuore della città di Padova, nei pressi di Piazza delle Erbe (Figura 6.1). La torre è connessa al Palazzo Moroni, un complesso di edifici di differente epoca di costruzione.



FIGURA 6.1 - UBICAZIONE SITO DI INDAGINE: CENTRO DI PADOVA NEI PRESSI DI PIAZZA DELLE ERBE, ALL'INTERNO DEL COMPLESSO DI EDIFICI DI PALAZZO MORONI

La torre è stata oggetto nel tempo di numerose trasformazioni, di carattere strutturale (ad esempio forti notevoli variazioni di altezza) e stilistico. Attualmente la torre ha un'altezza di 45 metri e presenta una leggera pendenza verso est. La struttura, a pianta quasi quadrata, si articola su nove livelli ed è costituita da due volte in muratura a crociera, quattro volte a botte in muratura e solide parenti anch'esse in muratura collegate tra loro da tiranti in ferro.

TABELLA 6.1 – TORRE DEGLI ANZIANI (PD): COMPLESSO DI EDIFICI ANNESSI A TORRE DEGLI ANZIANI

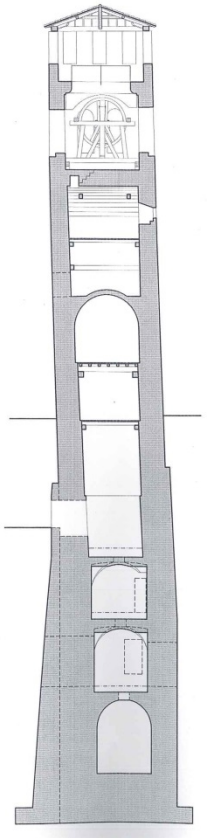
Edificio	Stile	Epoca di costruzione	Funzione iniziale	Funzione attuale
Palazzo della Ragione	Romanico	1218-1306	Tribunale	Eventi e mostre
Palazzo del consiglio	Romanico-Gotico	XIII secolo (numerose ricostruzioni)	Palazzo della Cancelleria	Amministrazione comunale
Palazzo degli anziani	Romanico-Gotico	XIII secolo	Palazzo della Cancelleria	Amministrazione comunale
Torre degli Anziani	Romanico	XIII secolo	Torre campanaria	Valore simbolico
Palazzo del Podestà	Rinascimentale veneto	Restaurato nel XVI secolo da Moroni (originariamente del XIII secolo)	Palazzo del Podestà	Amministrazione comunale
L'ala Moretti-Scarpari	Rinascimento veneto	XX secolo, tra le due guerre mondiali	Amministrazione comunale	Amministrazione comunale



FIGURA 6.2 - TORRE DEGLI ANZIANI (PD): LOCALIZZAZIONE DELLA TORRE NEL COMPLESSO, VISTA AEREA (BEJARANO URREGO, 2014)

La torre venne costruita agli inizi del XIII secolo e venduta alla città di Padova da Tiso Camposampiero VI nel 1215. Quasi subito la struttura, conosciuta allora come Torre Bianca a causa delle lastre di cui era rivestita, fu modifica, innalzando e introducendo una cella campanaria. Nel XVII secolo fu costruita sulla sommità un'importante lanterna gotica, poi demolita nel 1938. Nella seconda metà del XX secolo la torre fu oggetto di diversi interventi di restauro mirati alla consolidazione dell'apparato murario, alla ricostruzione del tetto e, in generale, alla messa in sicurezza della struttura.

A.1.1 INQUADRAMENTO MORFOLOGICO



Ad oggi la torre presenta un altezza di 47,2 metri, tetto incluso; la muratura è costituita prevalentemente di elementi in laterizio del XII secolo, ad eccezione del parapetto merlato in sommità che fu ricostruito nello stesso materiale e risale al 1939. Presenta una pendenza verso oriente, probabilmente causata da cedimenti fondazionali già nei primi anni successivi alla costruzione, con una deviazione rispetto l'asse di 1,1 m (1,8°).

La torre presenta un contrafforte, costruito nel 1696 a compensare il meccanismo di ribaltamento, che da livello stradale arriva fino a circa 18 metri, con uno spessore di 2,25 metri alla base e di 0,47 metri in sommità.

La pianta è approssimativamente quadrata, con lato di 7,2 metri alla base e di 6,6 metri al livello maggiore. La torre si articola su undici livelli e presenta una rastremazione degli apparati murari (1,88 metri alla base e 0,57 metri in sommità). Gli orizzontamenti sono composti da tre volte a botte, due volte a crociera, due pavimenti lignei e il tetto.

L'accesso alla torre è garantito solamente nel lato orientale al quarto livello (+15,10m). I primi tre livelli sono voltati, dal basso: da una volta a botte e da due volte a crociera; questi ambienti non presentano aperture sulle murature d'ambito.

TABELLA 6.2 - TORRE DEGLI ANZIANI (PD): ORIZZONTAMENTI E QUOTE

Livello	Elemento strutturale	Altitudine dal terreno (m)
1	Volta a botte	4,82

2	Volta a crociera	9,34
3	Volta a crociera	13,24
6	Orizzontamento ligneo	25,31
7	Volta a botte	29,43
8	Orizzontamento ligneo	32,9
9	Volta a botte	36,85

A.2 ESECUZIONE DELLA PROVA

Il giorno 27 maggio 2014 sono state svolte prove di identificazione dinamica su quattro catene, i test T1 e T4 corrispondono dalle catene N22 e N13 risalenti al XIII secolo, mentre i test T2 e T3 si riferiscono ai tiranti N29 e N32 (XX secolo). I test eseguiti hanno avuto lo scopo di valutare la prima frequenza propria di ognuna delle funi e di definirne il tiro.



FIGURA 6.3 – ACCELEROMETRO CENTRALE DELLA CATENA T1 (DESTRA) E POSIZIONAMENTO DEI TRE ACCELEROMETRI DELLA CATENA T2 (SINISTRA)

Per ognuna delle catene sono stati applicati, tramite morsetti in alluminio, tre accelerometri. Considerando le posizioni nelle quali si registrano i ventri e i nodi significativi delle forme modali di una fune, si è scelto di applicare i tre sensori ai quarti e in mezzeria della lunghezza delle catene in esame.

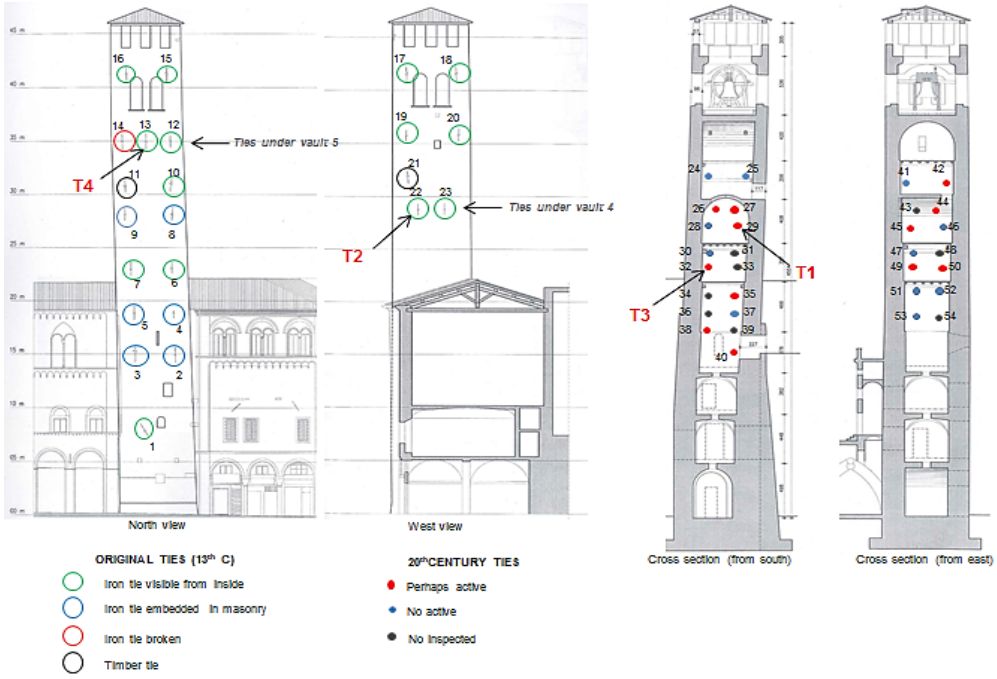


FIGURA 6.4 – LOCAZIONE DELLE CATENE TESTATE (T1, T2, T3, T4)

La catena di acquisizione risulta composta dall'unità centrale di acquisizione (piattaforma portatile a 16 canali dotata di processore, hard disk, monitor e tastiera National Instruments mod. NI PMA 1115 - schede di acquisizione digitale National Instruments mod. PXI NI 4472) e da 3 sensori di accelerazione (PCB Piezotronics 393 B12), collegati a questa mediante cavi coassiali PCB 012R10 a bassa impedenza (lunghezza 3.0 m) e cavi coassiali RG58 a bassa impedenza (lunghezza variabile da 10.0 a 25.0 m, uniti tra loro per coprire maggiori distanze). La gestione dell'acquisizione e dell'archiviazione viene effettuata tramite software sviluppato in ambiente LabVIEW.

La tipologia di analisi impiegata è basata sullo studio della risposta del sistema considerato ad una forzante ignota (Output Only Technique). Nel caso delle prove eseguite nella torre, la sollecitazione è stata fornita sia dalla vibrazione ambientale presente sia mediante l'applicazione di una piccola forzante casuale. Il test è consistito nel misurare la vibrazione della catena per un periodo di tempo di 80 secondi ad una frequenza di campionamento pari a 200 SPS (Samples per Second – campioni al secondo). Per ogni catena si sono acquisite tre registrazioni ambientali e tre con forzante. La Figura 6.5 mostra le registrazioni relative alla catena **T2** relative ad una registrazione ambientale e ad una forzata. In Figura 6.6 sono invece rappresentate le FFT dei due casi durante l'operazione di Peak Peacking.

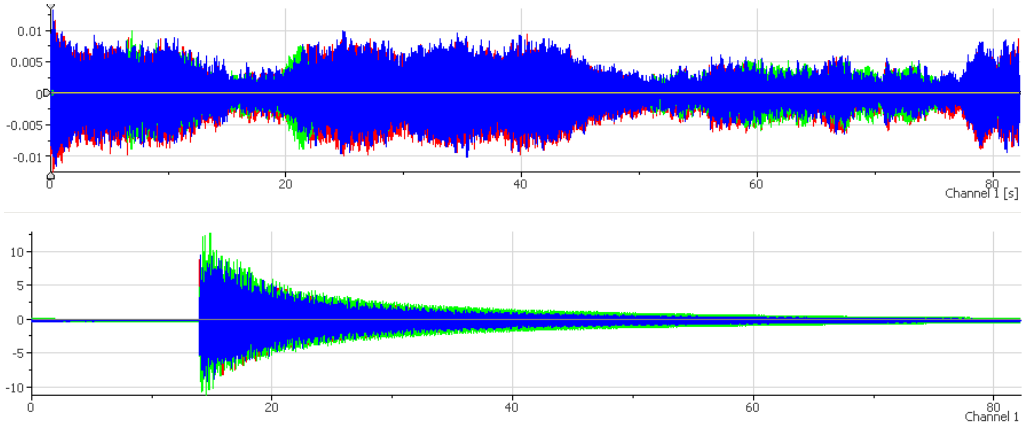


FIGURA 6.5 - TORRE DEGLI ANZIANI (PD). T2. REGISTRAZIONE AMBIENTALE (SOPRA) E FORZATA (SOTTO)

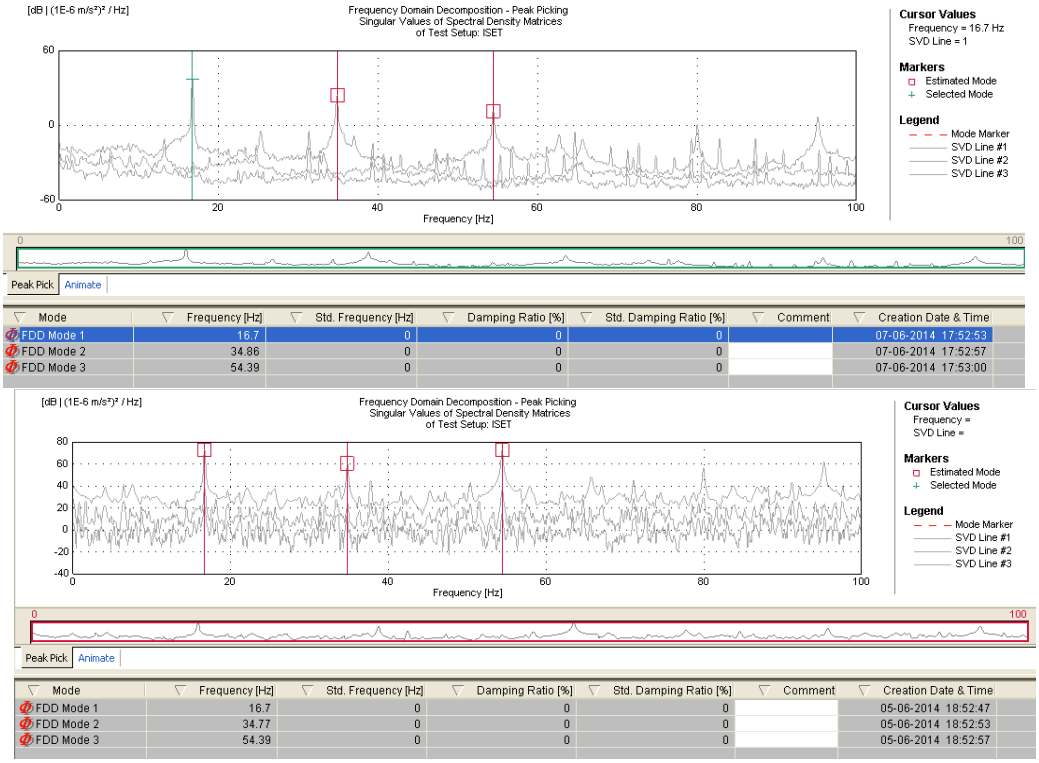


FIGURA 6.6 - TORRE DEGLI ANZIANI (PD). T2. FFT, VIBRAZIONI AMBIENTALI (SOPRA) E FORZATE (SOTTO)

Le caratteristiche geometriche di ogni catena sono riassunte in Tabella 6.3, inoltre per ogni catena si sono considerati i valori di densità pari a ρ=7830 kg/m^3 e modulo elastico di E=206GPa.

TABELLA 6.3 - TORRE DEGLI ANZIANI (PD): CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLE CATENE

ID	Tipologia sezione	b [mm]	h [mm]	A [mm^2]	J [mm^4]	L [mm]
C1	Circolare	16,5	-	213,72	7,27E+03	4190
C2	Rettangolare	15	61	915	1,72E+04	3840
C3	Circolare	19	0	283,385	1,28E+04	3870
C4	Rettangolare	28	53	1484	9,70E+04	4210

Per ognuna delle catene si sono elaborate le acquisizioni tramite trasformata di Fourier (FFT) per ricavare la prima frequenza propria di vibrazione. Tale frequenza è stata poi impiegata per il calcolo del tiro delle catene. Le prime frequenze e le ampiezze del primo modo di vibrare sono riassunte in Tabella 6.4.

TABELLA 6.4 - TORRE DEGLI ANZIANI (PD): PROPRIETÀ DINAMICHE DELLE CATENE

ID	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	Ampiezze relative al primo modi di vibrare		
				v_1	v_2	v_3
T1	9,39	19,62	30,14	0,4672	0,745875	0,474755
T2	16,69	34,82	54,43	0,49	0,734	0,4678
T3	12,79	26,70	41,70	0,4765595	0,7479369	0,4620404
T4	5,60	19,68	40,95	0,4429	0,781647	0,4391259

APPENDICE B SOVRINTENDENZA AI BENI CULTURALI - VERONA

B.1 INTRODUZIONE

B.1.1 CONTESTUALIZZAZIONE

La Soprintendenza per i Beni Architettonici e Paesaggistici per le province di Verona, Rovigo e Vicenza (SBAP) ha sede nel centro storico di Verona nell'ex convento di San Fermo Maggiore addossato al fianco meridionale dell'omonima basilica, nel luogo in cui, secondo la tradizione, subirono il martirio i santi Fermo e Rustico nel 304 d.C. (Figura 6.7).

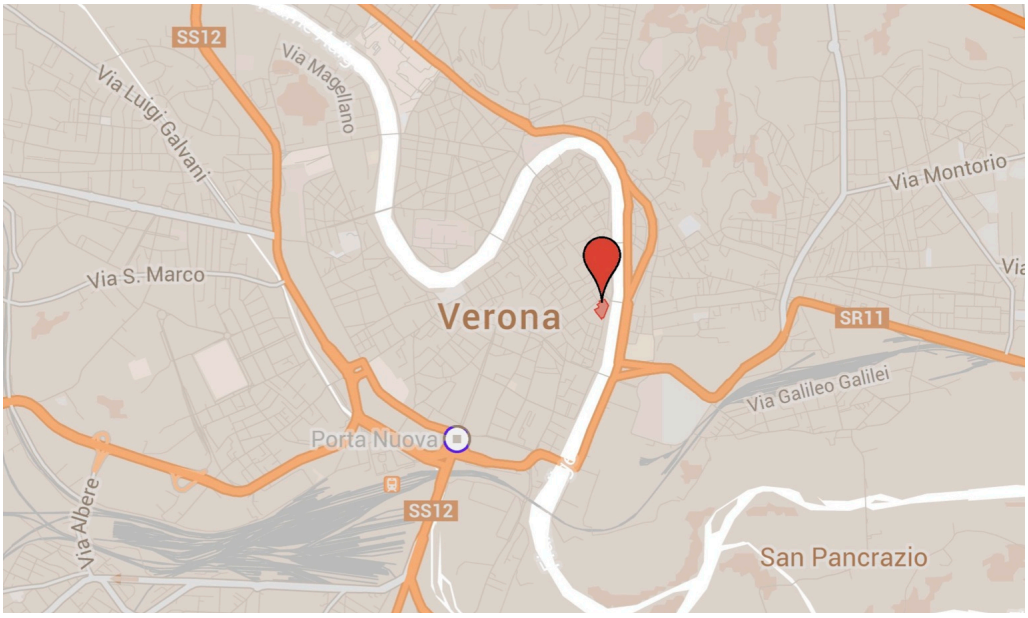


FIGURA 6.7 - UBICAZIONE SITO DI INDAGINE A VERONA

Dal sagrato della chiesa in piazzetta San Fermo, in corrispondenza dei civici 3 e 3/a, si accede agli spazi ed ai locali che accolgono gli uffici dove l'impianto claustrale dell'antico monastero è ancora leggibile. Il complesso, comprensivo della chiesa e dell'ex convento, è delimitato a nord dalla piazzetta San Fermo e dallo Stradone San Fermo e a sud da via Dogana.

Incerta è ancora oggi la data di fondazione del monastero, che viene indicata dagli studiosi indifferentemente all'VIII secolo per volontà del vescovo Annone, la cui sorella Consolata avrebbe recuperato i corpi dei due martiri a Trieste, oppure al 996 per volontà del vescovo Otberto. Inizialmente fu un cenobio di sacerdoti secolari, sostituiti dai monaci benedettini tra il 996 e il 1084, i quali ristrutturarono il complesso dando avvio alla costruzione di due chiese, una inferiore e una superiore, in stile romanico e del campanile (terminato intorno al XIII secolo).

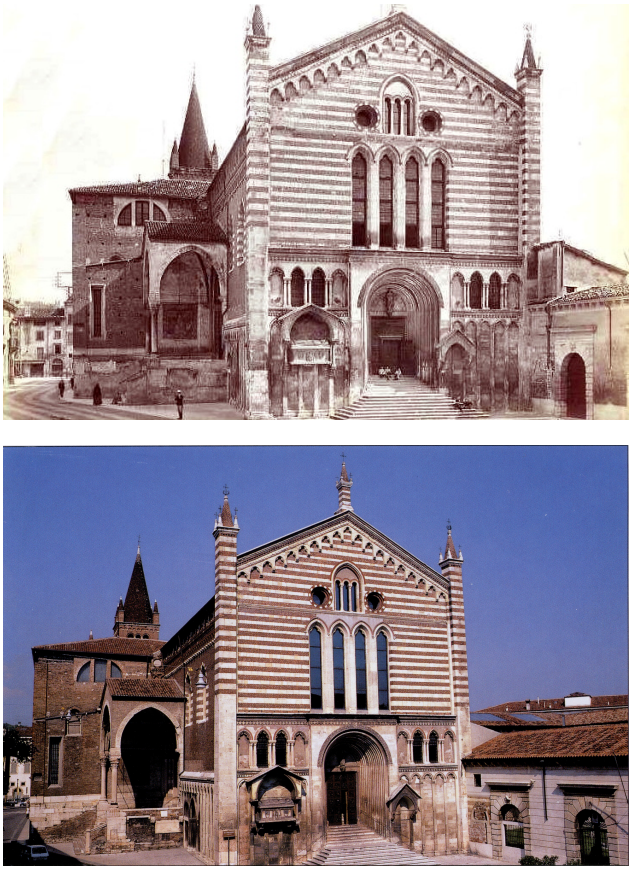


FIGURA 6.8 - CONFRONTO TRA LA FACCIATA DI SAN

In data 19 luglio 1261 in San Fermo entrarono i minori francescani che ricostruirono la chiesa superiore; l'opera, terminata intorno al 1350, è rimasta sostanzialmente invariata fino ad oggi (Figura 6.8).

Nel 1806 in applicazione delle disposizioni napoleoniche relative alla soppressione degli ordini monastici, i francescani furono costretti ad abbandonare la chiesa, che, divenuta proprietà demaniale, fu adibita a parrocchia mentre gli spazi conventuali furono destinati all'Imperial Regia Intendenza di Finanza. Il convento fu trasformato per ospitare gli uffici sulla via Dogana, la caserma dell'intendenza di Finanzia negli edifici intorno ai due chiostri. Nel XIX secolo nel prospetto sulla piazza furono aperti altri quattro portali identici a quello realizzato nel 1592.

Il bombardamento del 23 febbraio 1945, durante la seconda guerra mondiale, danneggiò gravemente il complesso, che venne ricostruito negli anni Cinquanta dal Genio civile di Verona per ospitare gli uffici della Sovraintendenza ai Monumenti.

Difficile è ritrovare nell'odierna organizzazione distributive degli spazi, l'antico impianto claustrale; sono infatti rimasti indenni soltanto i due chiostri, decorati con affreschi raffiguranti le *Storie di Sant'Antonio* dipinte da Bernardino e Bernardo

Muttoni.

La soprintendenza per i beni architettonici e paesaggistici per le province di Verona, Rovigo e Vicenza si articola intorno ai due antichi chiostri, Chiostro maggiore e Chiostro minore, dell'antico convento monastico.

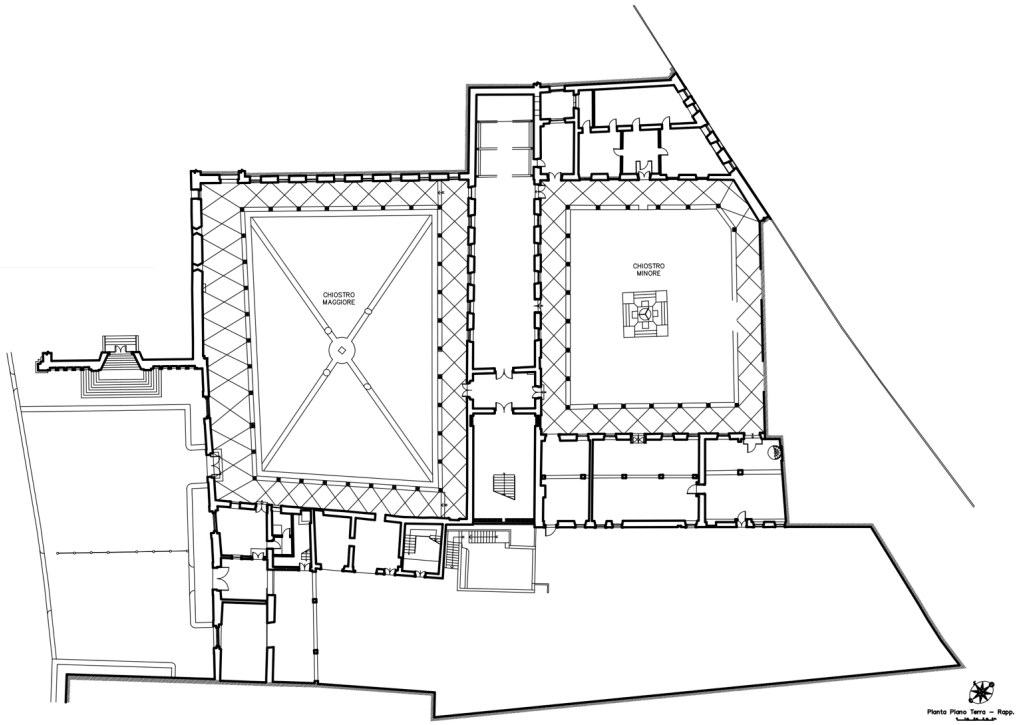


FIGURA 6.9 – SBAP (VR). PIANO TERRA.

Il complesso si sviluppa su due livelli; al piano terra trovano spazio i locali di portineria e di servizi, parte dell'archivio, una sala conferenza e lo scalone principale, che si trova frapposto tra i due chiostri (Figura 6.9). Al piano superiore sono ubicati gli uffici e i locali adibiti ad archivio (Figura 6.10).

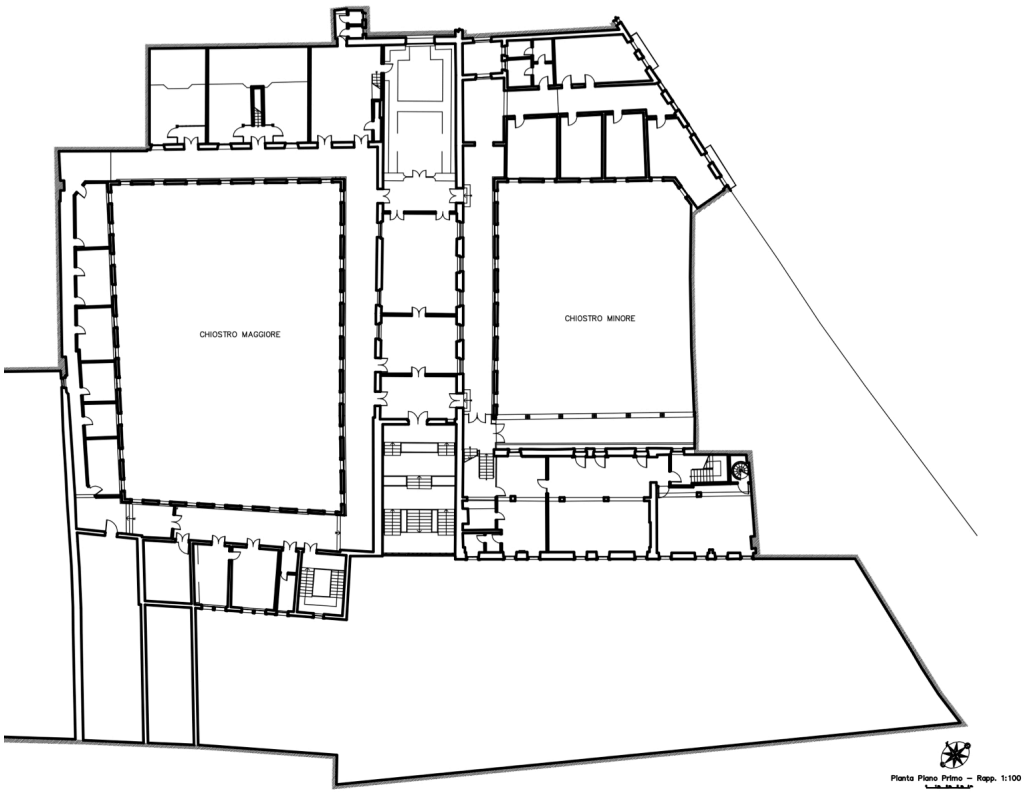


FIGURA 6.10 – SBAP (VR). PIANO PRIMO

Il Chiostro maggiore presenta un impianto pressoché rettangolare (35x28 metri) ed è addossato al lato meridionale della basilica di San Fermo (Figura 6.11); il giardino è circondato da un ambulacro leggermente rialzato con copertura formata da volte a crociera. Al piano terra regolari aperture scandite da colonne bianche lisce e archi a tutto sesto regolano il ritmo e la geometria del chiostro, mentre al piano superiore troviamo corrispondenza tra gli archi e le aperture rettangolari del corridoio servente gli uffici della Sovrintendenza. Il giardino presenta una geometria riconoscibile con il tracciamento delle diagonali del rettangolo e la presenza di un elemento lapideo ornamentale al centro.



FIGURA 6.11 - CHIOSTRO MAGGIORE, SAN FERMO, VERONA

Il Chiostro minore presenta anch'esso una pianta rettangolare quasi quadrata (28x25 metri) ed è situato nel lato sud-est del complesso. Un porticato coperto a volte a crociera si apre con archi a tutto sesto, del tutto simili a quelli del chiostro maggiore, sul giardino, al centro del quale è presente un pozzo.

Sul lato occidentale, al primo piano, è presente una loggia, che riprende l'ordine inferiore (Figura 6.12).



FIGURA 6.12 - CHIOSTRO MINORE, SAN FERMO, VERONA

B.1.2 CHIOSTRO MAGGIORE: RILIEVO FOTOGRAFICO

In Tabella 6.5 sono riportate le catene testate con le relative note e la posizione dei cinque accelerometri. Alcune catene sono state testate due volte (CAT2, CAT8) con diversa posizione dei sensori: nel primo caso collocati agli estremi, ai quarti e in mezzeria, mentre nel secondo caso ("bis") riducendo la lunghezza tra il primo e il quinto accelerometro e poi disponendoli in modo equidistante tra loro.

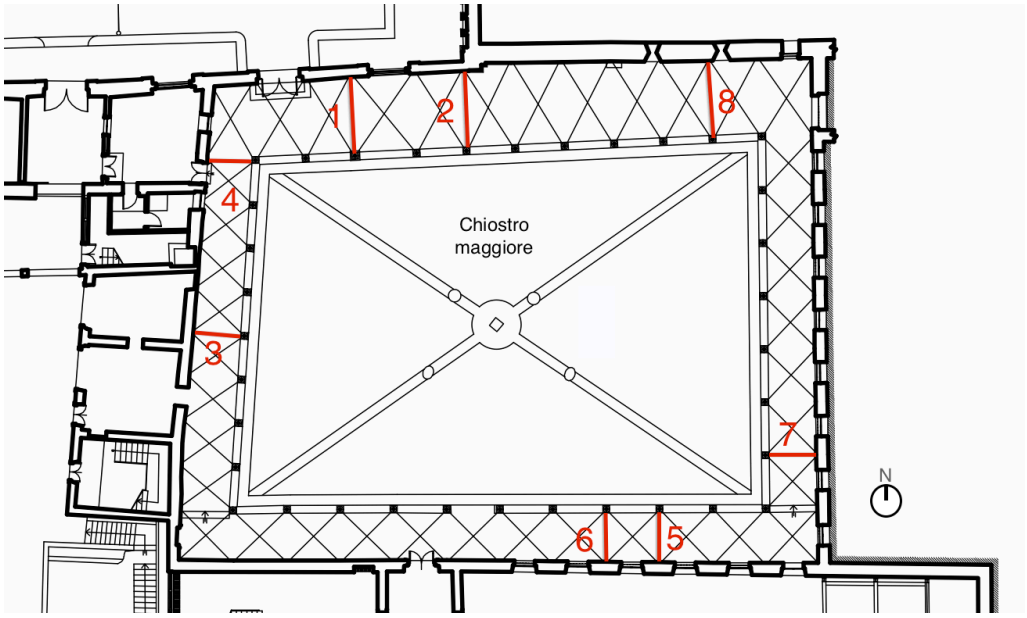
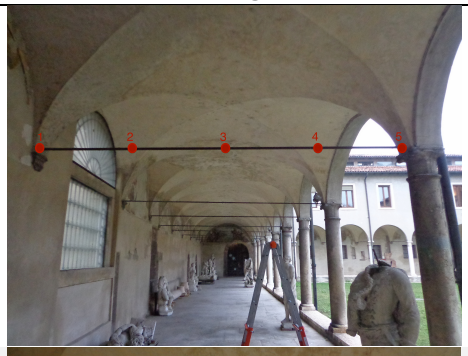
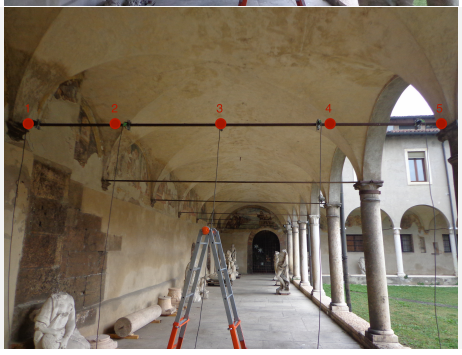


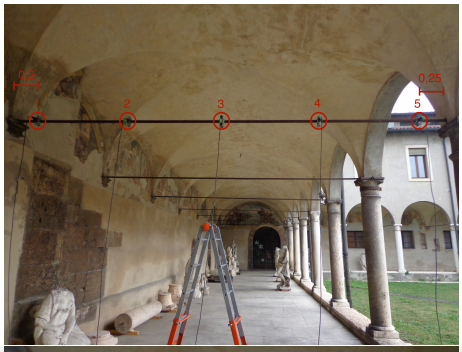
FIGURA 6.13 - SBAP (VR). LOCALIZZAZIONE DELLE CATENE DEL CHIOSTRO MAGGIORE

TABELLA 6.5 - SBAP (VR): RILIEVO FOTOGRAFICO CATENE DEL CHIOSTRO MAGGIORE

ID - note	Immagini
CAT1 5 accelerometri: estremità, quarti e mezzeria Vincoli: nessuna nota particolare Volta a crociera: nessuna nota particolare	
CAT2 5 accelerometri: estremità, quarti e mezzeria Vincoli: nessuna nota particolare Volta a crociera: nessuna nota particolare	

CAT2bis

5 accelerometri: offset 1 = 0,3 m
offset 2 = 0,25 m



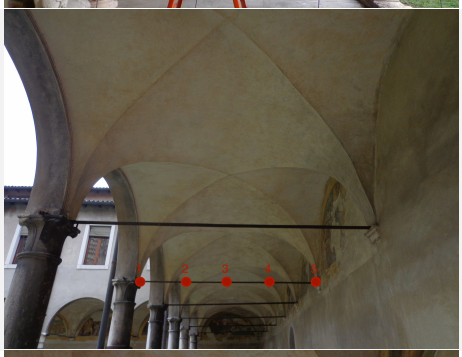
CAT3

5 accelerometri: estremità, quarti e mezzeria

Sezione: rettangolare con angoli smussati

Vincoli: nessuna nota particolare

Volta a crociera: nessun nota particolare



CAT4

5 accelerometri: estremità, quarti e mezzeria

La catena presenta una leggera torsione

Vincoli: nessuna nota particolare

Volta a crociera: presenza di alcune lesioni sulle vele della volta



CAT5

5 accelerometri: estremità, quarti e mezzeria

La catena presenta un visibile ingrossamento in mezzeria

Vincoli: nessuna nota particolare

Volta a crociera: nessuna nota particolare

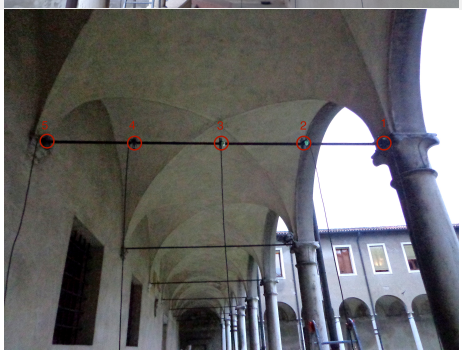


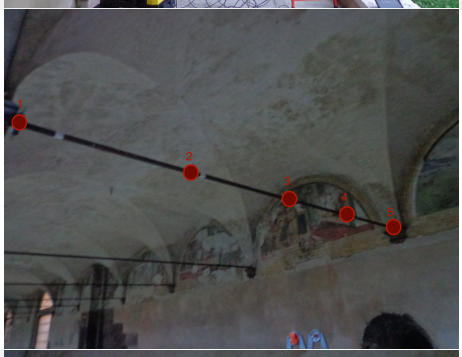
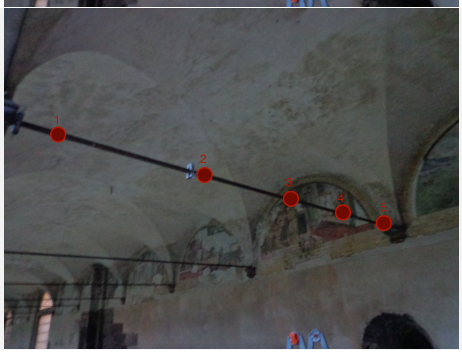
CAT6

5 accelerometri: estremità, quarti e mezzeria

Vincoli: nessuna nota particolare

Volta a crociera: nessuna nota particolare



CAT7 5 accelerometri: estremità, quarti e mezzeria Presenza di un faretto all'estremità 5 Vincoli: nessuna nota particolare Volta a crociera: nessuna nota particolare	
CAT8 5 accelerometri: estremità, quarti e mezzeria Vincoli: nessuna nota particolare Volta a crociera: nessuna nota particolare	
CAT8 bis 5 accelerometri: offset 1 = 0,2 m offset 2 = 0,2 m	

B.1.3 CHIOSTRO MINORE: RILIEVO FOTOGRAFICO

In Tabella 6.6 e in Figura 6.14 sono riportate le catene testate con le relative note e la posizione dei tre o cinque accelerometri. Alcune catene sono state testate due volte (CAT9, CAT13) con diversa posizione dei cinque sensori: nel primo caso collocati agli estremi, ai quarti e in mezzeria, mentre nel secondo caso ("bis") riducendo la lunghezza tra il primo e il quinto accelerometro e poi disponendoli in modo equidistante tra loro. La maggior parte delle catene presenti nel chiostro minore dimostravano di essere poco tirate (in blu in Figura 6.14) in alcuni casi mostravano una curvatura propria degli elementi compressi (in arancione in Figura 6.14). Sono state testate quindi solo le catene che sembravano presentare uno sforzo di tensione rilevabile.

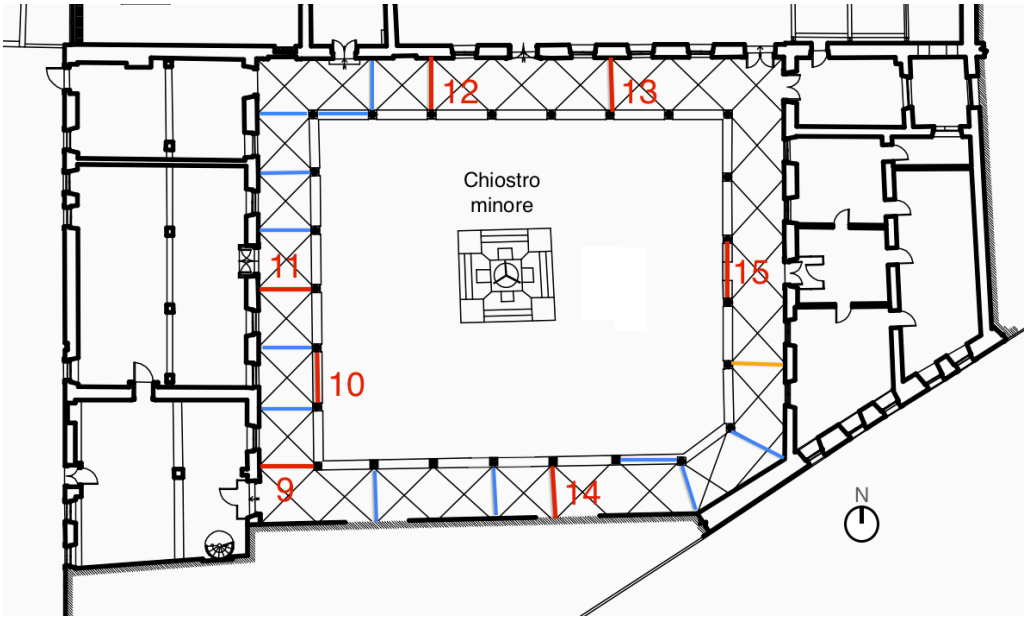
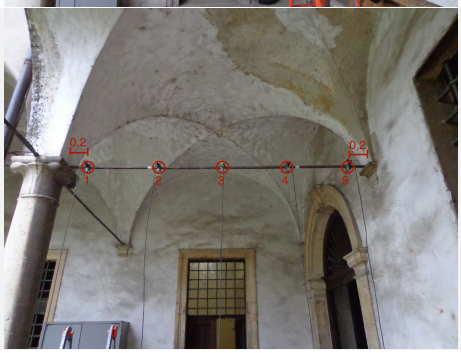


FIGURA 6.14 - SBAP (VR). LOCALIZZAZIONE CATENE NEL CHIOSTRO MINORE

TABELLA 6.6 - SBAP (VR): RILIEVO FOTOGRAFICO CATENE DEL CHIOSTRO MINORE

ID - note	Immagini
CAT9 5 accelerometri: estremità, quarti e mezzeria La catena si presenta molto arrugginita Vincoli: nessuna nota particolare Volta a crociera: degrado, variazioni cromatiche, assenza di lesioni	
CAT9 bis 5 accelerometri: offset 1 = 0,2 m offset 2 = 0,2 m	



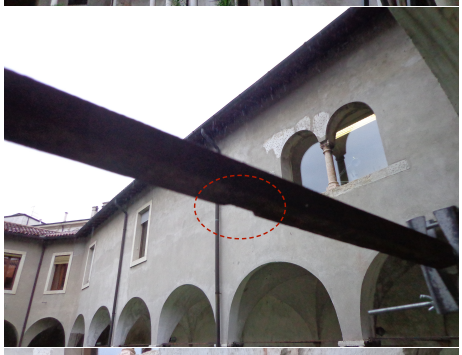
CAT10

3 accelerometri: ai quarti e mezzeria

La catena si presenta la sezione ristretta ad un terzo

Vincoli: estremità ingrossate

Volta a crociera: nessuna nota particolare







CAT11

3 accelerometri: ai quarti e mezzeria

La catena si presenta visibilmente ritorta con sezione trasversale variabile; stato di degrado materico evidente.

Vincoli: nessuna nota particolare

Volta a crociera: nessuna nota particolare



CAT12

3 accelerometri: ai quarti e mezzeria

La catena si presenta arrugginita con sezione trasversale non sempre costante

Vincoli: presenza di una lesione sulla parete dell'estremità 5

Volta a crociera: nessuna nota particolare





CAT13

5 accelerometri: estremità, quarti e mezzeria

Vincoli: nessuna nota particolare

Volta a crociera: nessuna nota particolare



CAT13 bis

5 accelerometri: offset 1 = 0,2 m
offset 2 = 0,2 m



CAT14

3 accelerometri: ai quarti e mezzeria

Vincoli: nessuna nota particolare

Volta a crociera: nessuna nota particolare



CAT15

3 accelerometri: ai quarti e mezzeria

Vincoli: ingrossamento ad entrambe le estremità

Volta a crociera: nessuna nota particolare





B.1.4 LOGGIA: RILIEVO FOTOGRAFICO

IN

Tabella 6.7 sono riportate le catene testate con le relative note e la posizione dei tre accelerometri.

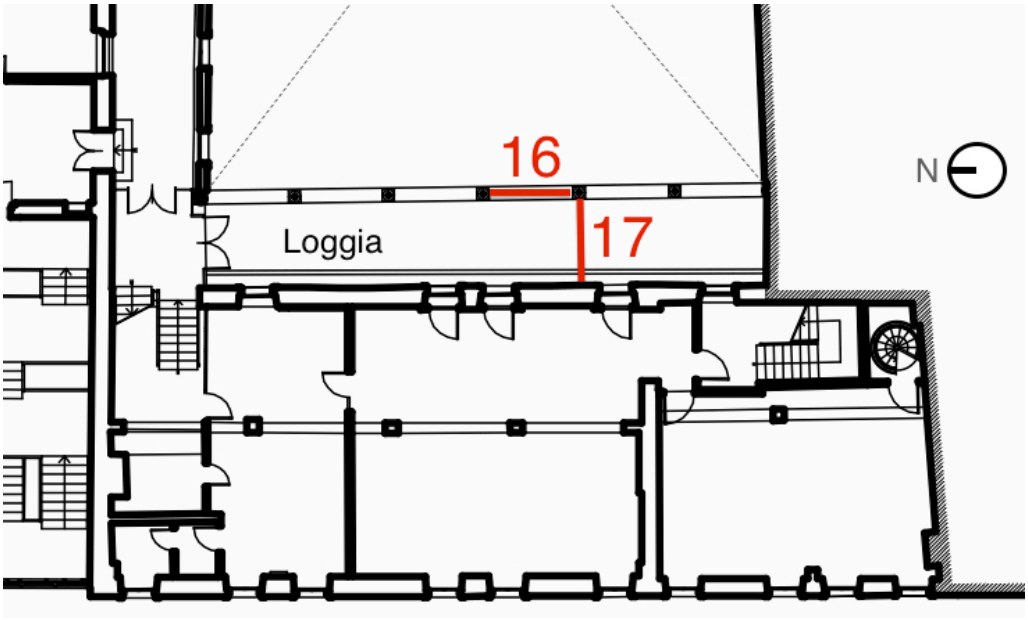
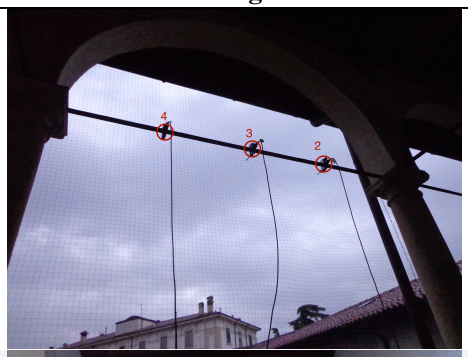


TABELLA 6.7 - SBAP (VR): RILIEVO FOTOGRAFICO CATENE DELLA LOGGIA AL PRIMO PIANO

ID - note	Immagini
CAT16 3 accelerometri: ai quarti e mezzeria Vincoli: nessuna nota particolare Volta a crociera: nessuna nota particolare	
CAT17 3 accelerometri: ai quarti e mezzeria Vincoli: nessuna nota particolare Volta a crociera: nessuna nota particolare	

B.2 ESECUZIONE DELLA PROVA

I giorni 15 e 16 dicembre 2014 sono state svolte prove di identificazione dinamica su 17 catene presenti all'interno della sede della Soprintendenza per i Beni Architettonici e Paesaggistici delle province di Verona, Vicenza e Rovigo - ex convento di San Fermo a Verona.

I test eseguiti hanno avuto lo scopo di valutare la prima frequenza propria di vibrazione di ognuna delle funi e di definirne il tiro.

Per ognuna delle catene sono stati applicati, tramite morsetti in alluminio appositamente realizzati, tre o cinque accelerometri. Considerando le posizioni nelle quali si registrano i ventri e i nodi significativi delle forme modali di una fune, si è scelto di applicare i cinque sensori alle estremità, ai quarti e in mezzeria della lunghezza delle catene in esame.

La catena di acquisizione risulta composta dall'unità centrale di acquisizione

(piattaforma portatile a 16 canali dotata di processore, hard disk, monitor e tastiera National Instruments mod. PXI 1025 - schede di acquisizione digitale National Instruments mod. PXI NI 4472) e da 5 sensori di accelerazione (PCB Piezotronics 393 B12), collegati a questa mediante cavi coassiali PCB 012R10 a bassa impedenza (lunghezza 3.0 m) e cavi coassiali RG58 a bassa impedenza (lunghezza variabile da 10.0 a 25.0 m, uniti tra loro per coprire maggiori distanze). La gestione dell'acquisizione e dell'archiviazione viene effettuata tramite software sviluppato in ambiente LabVIEW.

ll test è consistito nel misurare la vibrazione della catena per un periodo di tempo di 40 secondi ad una frequenza di campionamento pari a 200 SPS (Samples per Second – campioni al secondo). Per ogni catena si sono acquisite due registrazioni ambientali e due con forzante.

Le caratteristiche geometriche di ogni catena sono riassunte in Tabella 6.8, inoltre per ogni catena si sono considerati i valori di densità pari a ρ=7850 kg/m^3 e modulo elastico di E=210GPa.

TABELLA 6.8 - SBAP (VR): CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLE CATENE

ID*	Tipologia sezione	b [mm]	h [mm]	A [mm^2]	J [mm^4]	L [mm]
CAT1	Rettangolare	22	22	484	1,95E+04	4405
CAT2	Rettangolare	22	22	484	1,95E+04	4500
CAT2bis	Rettangolare	22	22	484	1,95E+04	4000
CAT3	Rettangolare	23	22	506	2,23E+04	2820
CAT4	Rettangolare	20	20	400	1,33E+04	2500
CAT5	Rettangolare	18	18	324	8,75E+03	2840
CAT6	Rettangolare	17	19	323	7,78E+03	2840
CAT7	Rettangolare	20	25	500	1,67E+04	2700
CAT8	Rettangolare	17	42	714	1,72E+04	4400
CAT8bis	Rettangolare	17	42	714	1,72E+04	400
CAT9	Rettangolare	17	17	289	6,96E+03	2900
CAT9bis	Rettangolare	17	17	289	6,96E+03	2500
CAT10	Rettangolare	18	18	324	8,75E+03	2700
CAT11	Rettangolare	15	18	270	5,06E+03	2800
CAT12	Rettangolare	20	20	400	1,33E+04	2700
CAT13	Rettangolare	22	22	484	1,95E+04	2760
CAT13bis	Rettangolare	22	22	484	1,95E+04	2360
CAT14	Rettangolare	20	20	400	1,33E+04	2820
CAT15	Rettangolare	19	21	399	1,20E+04	2880
CAT16	Rettangolare	12	35	420	5,04E+03	2860
CAT17	Rettangolare	13	32	416	5,86E+03	2900

Note alla Tabella 6.8: le catene che presentano un caso bis sono state testate due volte, con diversa

disposizione degli accelerometri e quindi con lunghezza ridotta (caso bis).

Per ognuna delle catene si sono elaborate le acquisizioni tramite trasformata di Fourier (FFT) per ricavare la prima frequenza propria di vibrazione. Tale frequenza è stata poi impiegata per il calcolo del tiro delle catene. Le prime frequenze e le ampiezze del primo modo di vibrare sono riassunte in Tabella 6.9.

TABELLA 6.9 - SBAP (VR): PROPRIETÀ DINAMICHE DELLE CATENE

ID*	f_1 [Hz]	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
CAT1	17,44	0,003538655	0,4654436	0,74310855	0,480616425	0,007960567
CAT2	12,99	0,0067807	0,449587375	0,747614275	0,488595175	0,00622645
CAT2b	12,95	0,04358689	0,460332233	0,713031767	0,522480167	0,069199603
CAT3	17,91	0,019802435	0,451449225	0,760055	0,46611965	0,028648853
CAT4	14,51	0,048605113	0,4629549	0,7714211	0,431621933	0,009801361
CAT5	14,61	0,011676234	0,471622675	0,739206725	0,47890195	0,012767566
CAT6	15,7	0,014351762	0,469079067	0,752684433	0,459680067	0,030471633
CAT7	15,42	0,014484585	0,46875865	0,749053675	0,464802375	0,020883403
CAT8	13,997	0,019133603	0,457473725	0,73001625	0,50603115	0,016664995
CAT8b	13,91	0,070770453	0,483316367	0,686084667	0,532666067	0,076794817
CAT9	12,12	0,03195397	0,49979465	0,765086325	0,399854	0,006464391
CAT9b	12,15	0,070756605	0,4944306	0,73602755	0,4542318	0,049435005
CAT10*	13,21	0	0,476870667	0,7392859	0,472135167	0
CAT11*	16,37	0	0,4346839	0,7536265	0,49265125	0
CAT12*	14,31	0	0,4879511	0,7498459	0,429920767	0
CAT13	16,44	0,075341955	0,460095975	0,408699918	0,485225655	0,03365119
CAT13b	16,22	0,158712225	0,457585555	0,6956246	0,519730675	0,103713218
CAT14*	19,91	0	0,457728533	0,744646233	0,484649833	0
CAT15*	9,91	0	0,435491525	0,74183765	0,509782575	0
CAT16*	14,96	0	0,431122355	0,763601	0,4805905	0
CAT17*	8,88	0	0,442922233	0,7600848	0,473582933	0

Note alla Tabella 6.9: le catene segnate da asterico sono state testate con 3 accelerometri