UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Propagazione di onde gravitazionali attraverso strutture cosmiche

Relatore

Prof. Nicola Bartolo

Laureando

Francesco Iraci

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione

Nel 2015 l'interferometro LIGO (Laser Interferometer Gravitational Observatory) negli Stati Uniti ha misurato in maniera diretta il primo segnale di onde gravitazionali proveniente dalla fusione di due buchi neri (GW150914). Poco tempo dopo, anche l'interferometro italiano VIRGO è entrato in funzione e la collaborazione LIGO/Virgo ha misurato, ad oggi, decine di segnali di onde gravitazionali.

1.1 GW170817 e GRB170817A

Tra questi il 17 Agosto 2017 fu osservato l'evento GW170817 dai detectors degli interferometri di *LIGO* e *Advanced VIRGO*, mentre dal *Fermi Gamma-Ray Burst Monitor* e dal *International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory* fu osservato indipendentemente un fascio di raggi gamma (Gamma-Ray Burst) GRB170817A proveniente dalla fusione di un sistema binario di stelle di neutroni (BNSs). L'associazione tra questi due eventi ha portato a nuove intuizioni nella fisica fondamentale.
L'importanza della rivelazione degli eventi GW170817 e GRB170817A sta nella scoperta della fusione di un sistema binario di stelle di neutroni come sorgente sia di onde gravitazionali che di *Short-duration Gamma-Ray Burst (SGRB).* La classificazione in *short* e *long* GRBs dipende dalla durata dell'emissione di raggi gamma. Prima di GRB170817A la correlazione tra emissione di SGRB e la fusione di un BNSs veniva solo da osservzioni indirette [5] e simulazoini numeriche [4].
Uno dei dati più interessanti ottenuti dal confronto dei due eventi è la differenza di tempo di arrivo delle due onde:

$$\Delta t = (+1.74 \pm 0.05)\, s \tag{1.1}$$

Per la Relatività Generale (GR) le GWs e le onde elettrmoagnetiche si propagano alla stessa velocità. Inoltre ci si aspetta che entrambe subiscano in modo eguale l'effetto di background gravitazionale. Usando i dati sul time delay, sulla distanza dalla sorgente e sulla differenza di tempo di emissione attesa è stato possibile porre dei limiti superiori e inferiori alla differenza di velocità di GWs e onde EM. Sia $\Delta\nu = \nu_{GW} - \nu_{EM}$ e sia D la distanza di percorsa. Il discostamento della velocità delle GWs da quella dei fotoni si scrive come:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_{EM}} \simeq \nu_{EM}\frac{\Delta t}{D} \tag{1.2}$$

Per ottenere il limite superiore si assume che il picco della GW e il primo fotone siano emessi simultaneamente attribuendo così il time delay alla maggiore velocità nel percorrere D da parte del segnale gravitazionale. Il limite inferiore invece si calcola assumendo che le due onde vengano emesse con un offset iniziale maggiore di $(1.74 \pm$

0.05) s con il segnale elettromagnetico che viaggia più velocemente per compensare il delay iniziale. Il risultato di tali limiti è [2]:

$$-3 \times 10^{-15} \leqslant \frac{\Delta v}{v_{\mathrm{EM}}} \leqslant +7 \times 10^{-16} \tag{1.3}$$

La dispersione del fascio di fotoni nell'universo durante il viaggio ha un impatto trascurabile sulla velocità dei fotoni stessi. Future rivelazioni di eventi correlati GW-GRB dovrebbero riuscire a dissociare la differenza di tempo di emissione dal relativo tempo di propagazione, poiché solo quest'ultimo ci si aspetta dipenda dalla distanza.

1.2 Effetto Shapiro

Nel calcolo del tempo di propagazione delle onde è importante considerare il delay dovuto all'Effetto Shapiro.

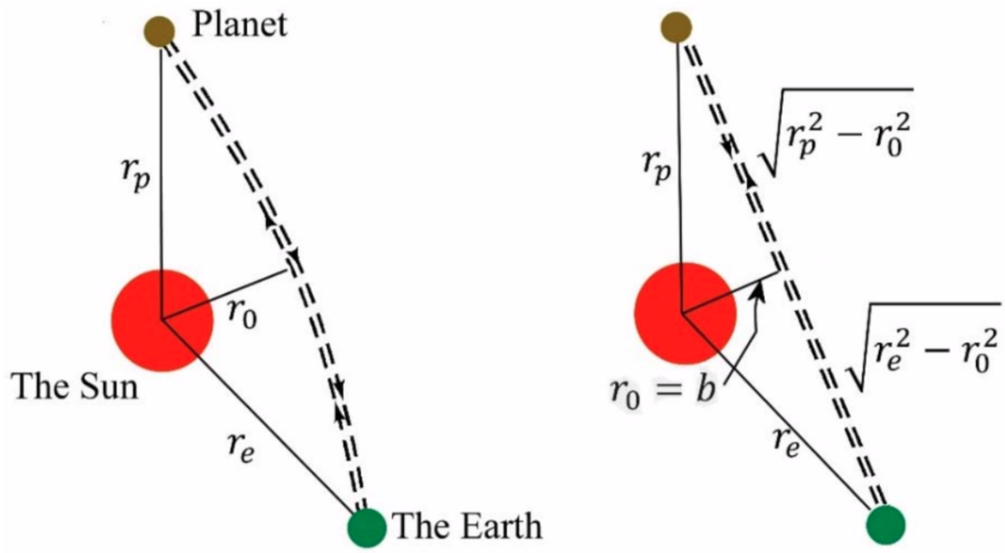

Figura 1.1: Percorso di un segnale dalla Terra ad un altro pianeta. A sinistra il cammino effettivo, a destra quello approssimato in uno spazio piatto. Fonte [3]

La presenza di un corpo massivo modifica, almeno nelle vicinanze, la metrica dello spazio-tempo. Dunque se un fotone percorre una traiettoria abbastanza vicina all'oggetto massivo, risentirà in modo non trascurabile del potenziale gravitazionale. Come si evince da Figura (1.1) il percorso del fotone non è più rettilineo come in uno spazio piatto, bensì viene curvato dalla presenza del corpo massivo percorrendo la geodetica. Il delay dovuto a tale effetto è dato da:

$$\Delta t_{\mathrm{Shapiro}} \approx \frac{4GM}{c^3}\left[\ln\left(\frac{r_p r_e}{r_0}\right) + 1\right]. \tag{1.4}$$

Talvolta è possibile riscrivere l'apporto di questo effetto esplicitamente in funzione del potenziale nel seguente modo [2]:

$$\delta t_{\mathrm{Shapiro}} = -\frac{1+\gamma}{c^3}\int_{r_{\mathrm{e}}}^{r_{\mathrm{o}}} U(\boldsymbol{r}(l))dl \tag{1.5}$$

dove r_e e r_o denotano la posizione dell'emettitore e dell'osservatore. Il parametro γ fornisce informazione sulla deviazione dalla teoria di Einstein-Maxwell, infatti per quest'ultima si ha che $\gamma_{\mathrm{EM}} = \gamma_{\mathrm{GW}} = 1$[1] [2]. I dati sperimentali forniti dagli eventi GW170817, GRB170817A hanno aperto una acceso dibattito in cosmologia che ha portato a scartare diverse teorie che non rientravano all'interno dei vincoli posti dall'evidenza sperimentale [7]. Un esempio è la *Covariant Galileon*, teoria di campo scalare che si ispira al modello Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) descrivendo l'espansione accelerata dell'universo senza l'introduzione di una costante cosmologica o dell'energia oscura [6].

1.3 Lente Gravitazionale

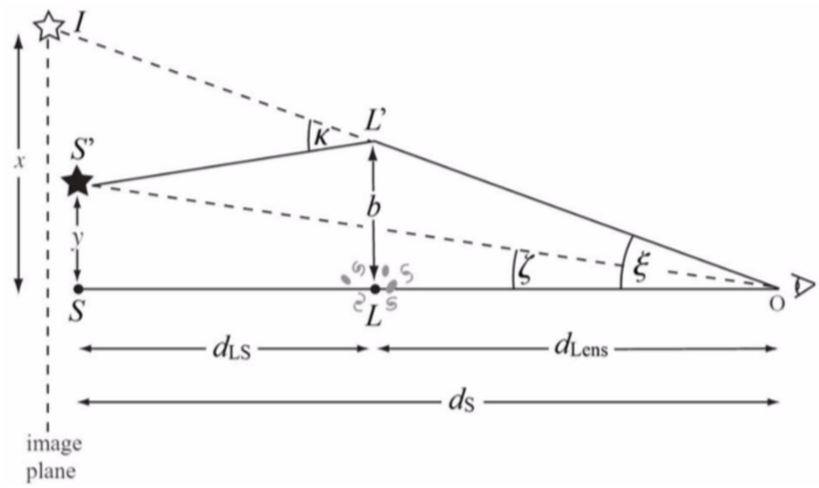

Figura 1.2: Schema Lente gravitazionale [3]

Uno degli effetti da tenere in considerazione quando si va a calcolare il time delay è il cosiddetto effetto di Lensing che si verifica quando una distribuzione di materia (la lente) è posta tra l'osservatore e la sorgente di onde (elettromagnetiche o gravitazionali). Il potenziale gravitazionale della distribuzione di massa modifica la metrica dello spazio-tempo e la luce (o la GW) non percorre più una traiettoria rettilinea. Come in ottica la lente fornisce all'osservatore l'immagine virtuale della sorgente, come si vede dallo schema in figura (1.2). Da semplici considerazioni geometriche è facile arrivare all'equazione della lente per l'angolo ξ tra osservatore e immagine virtuale, attenendosi alla notazione di Figura (1.2):

$$\xi^2 - \zeta\xi - \theta_E^2 = 0 \tag{1.6}$$

dove θ_E è l'angolo di Einstein definito dalle distanze e dal potenziale gravitazionale.

L'obiettivo di questo lavoro è di mostrare che per future rivelazione di onde gravitazionali sarà cruciale tenere in considerazione effetti di lensing nel calcolo del tempo di propagazione. In particolare nel capitolo 2 si andrà a ricavare l'equazione d'onda (sezione 2.1) tenendo conto anche della massa non nulla dei gravitoni e poi la formula

[1]Dai risultati sperimentali di GW170817 e GRB170817A si è ottenuto, considerando solo gli effetti della Via Lattea, usando un potenziale Kepleriano con una massa di $2.5 \times 10^{11} M_\odot$ e usando gli stessi limiti dell'equazione (1.3): $-2.6 \times 10^{-7} \leqslant \gamma_{\mathrm{GW}} - \gamma_{\mathrm{EM}} \leqslant 1.2 \times 10^{-6}$.

generale della differenza di ti tempo di arrivo (sezione 2.2). Nel capitolo 3 si applicheranno le formule trovate a due modelli di lente gravitazionale. Il capitolo 4 è dedicato alle conclusioni.

Capitolo 2

Differenza di arrivo di tempo di onde gravitazionali massive e onde elettromagnetiche

La Relatività Generale è la teoria di maggior successo in cui i gravitoni non hanno massa ($m_g = 0$ come i fotoni). Tuttavia, per provare a spiegare l'espansione accelerata dell'universo, sono nate diverse teorie di gravità modificata, una delle quali propone $m_g \neq 0$. Un metodo per poter stimare la massa dei gravitoni è quello di confrontare i tempi di arrivo di onde elettromagnetiche e onde gravitazionali emesse simultaneamente dalla stessa sorgente: la differenza di tempo di arrivo mostra la differenza tra fotoni e gravitoni. Da recenti studi della collaborazione LIGO è stato possibile porre dei limiti superiori ad m_g, cioè $m_g \lesssim 5.0 \times 10^{-23}$eV. Il range di frequenze in cui lavorano gli interferometri LIGO e VIRGO è $10 - 10^3\,Hz$ e le sorgenti che emettono questo tipo di GWs simultaneamente ad onde EM sono tipicamente sistemi binari di stelle di neutroni, supernovae o fusione tra stella di neutroni e buco nero.

Un progetto che coinvolge sia *ESA* che *NASA* si pone l'obiettivo di andare a ricercare GWs in un range di frequenze più basso, tra 0.1mHertz e 1Hertz. Il nome del progetto è LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*) e consisterà in tre satelliti disposti ai vertici di un triangolo equilatero. LISA sarà in grado di rivelare molti più sistemi binari che lavorano in un range di frequenze non accessibile a LIGO e VIRGO. Il lancio è previsto dopo il 2030 [1].

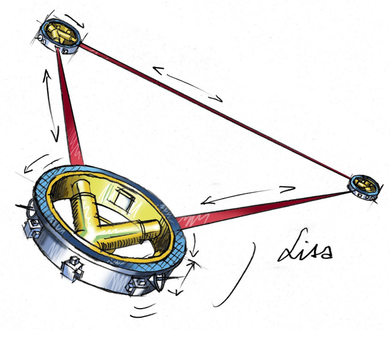

Figura 2.1: Illustrazione progetto LISA

Nel range di frequenze in cui lavora l'interferometro LISA, considerare la massa dei gravitoni diversa da zero implica un ritardo non trascurabile nel tempo di propagazione. Inoltre le GWs hanno una lunghezza d'onda tipicamente comparabile con il raggio gravitazionale dell'oggetto lente. Per questo motivo, nel computo del tempo di percorrenza è necessario considerare anche gli effetti di ottica ondulatoria. Dunque quando si va a calcolare il Δt bisogna tenere conto di questi due opposti fenomeni: il ritardo dovuto alla massa non nulla dei gravitoni e l'avanzamento dato dall'effetto di lente gravitazionale.
D'ora in poi si useranno $G = c = \hbar = 1$.

2.1 Equazione d'onda

In Relatività Generale è possibile ricavare l'equazione delle onde gravitazionali a partire dalle equazioni di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

con $R_{\mu\nu}$ tensore di Ricci, R scalare di Ricci, $T_{\mu\nu}$ tensore energia-impulso e $g_{\mu\nu}$ tensore metrico. Con l'approssimazione Newtoniana, ovvero di campo debole, il tensore metrico si scrive come $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $\eta_{\mu\nu}$ metrica dello spazio di Minkowski e $|h_{\mu\nu}| << 1$. La metrica inoltre è assunta stazionaria: $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$. In tali condizioni l'equazione dell'onda gravitazionale risulta essere, in gauge di Lorentz $\partial_\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

dove $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ e $\bar{h}_{\mu\nu}$ è la traccia inversa definita come $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. Come si vede in (2.2), se la propagazione avviene nel vuoto $T_{\mu\nu} = 0$ e l'equazione risulta identica a quella delle onde elettromagnetiche. Tuttavia tale equazione prevede che le GWs non abbiano massa, $m_g = 0$. L'onda gravitazionale è descritta non come un vettore ma come un tensore di rango due. Con una particolare scelta di coordinate (TTGauge [8]) l'onda presenta due polarizzazioni e le equazioni delle singole polarizzazioni sono le stesse di un campo scalare. Per descrivere quindi il moto della particella massiva (il gravitone) utilizzo l'equazione di Klein-Gordon:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right) - m_g^2\right]\phi(t, \boldsymbol{r}) = 0 \tag{2.3}$$

dove m_g è la massa del gravitone, g è il determinante del tensore metrico, $\phi(t, \boldsymbol{r})$ è il campo scalare massivo e $\boldsymbol{r}$ è il vettore posizione. È la prima versione relativistica dell'equazione di Schrödinger per particelle con spin nullo.

Attorno alla lente, per l'approssimazione Newtoniana, il ds^2 è dato da:

$$ds^2 = -(1 + 2U(\boldsymbol{r}))dt^2 + (1 - 2U(\boldsymbol{r}))d\boldsymbol{r}^2 \tag{2.4}$$

Dove $U(\boldsymbol{r})$ è il potenziale gravitazionale. Dall'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 U(\boldsymbol{r}) = 4\pi G \rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.5}$$

con $\rho(\boldsymbol{r})$ densità di massa, si ottiene il potenziale gravitazionale:

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int \frac{d^3\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}|}\rho\left(\boldsymbol{r}'\right) \tag{2.6}$$

Dalla metrica (2.4) posso ricavare le entrate del tensore $g^{\mu\nu}$

$$g^{00} = 1 - 2U \tag{2.7}$$
$$g^{ij} = 1 + 2U \tag{2.8}$$

e sostituirle nell'equazione (2.3).

$$[(1-2U)\omega^2 + (1+2U)\nabla^2 - m_g^2]\tilde{\phi}(\omega, \boldsymbol{r}) = 0 \tag{2.9}$$

$|U(\boldsymbol{r})| << 1$, quindi dividendo entrambi i termini per $(1 + 2U)$ si può sfruttare l'approssimazione $\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$:

$$[(1-2U)^2\omega^2 + \nabla^2 - m_g^2(1-2U)]\tilde{\phi}(\omega, \boldsymbol{r}) = 0 \tag{2.10}$$

Isolando quindi i termini con il potenziale, fermandosi al prim'ordine:

$$[\omega^2 + \nabla^2 - m_g^2]\tilde{\phi}(\omega, \boldsymbol{r}) = (4\omega^2 U - 2m_g^2 U)\tilde{\phi}(\omega, \boldsymbol{r}). \tag{2.11}$$

Si ottiene, dunque:

$$\left[\omega^2 + \nabla^2 - m_g^2\right]\tilde{\phi}(\omega, \boldsymbol{r}) = 4\omega^2 U(\boldsymbol{r})\left(1 - \frac{m_g^2}{2\omega^2}\right)\tilde{\phi}(\omega, \boldsymbol{r}) \tag{2.12}$$

con $\tilde{\phi}(\omega, \boldsymbol{r})$ trasformata di Fourier di $\phi(t, \boldsymbol{r})$ rispetto al tempo ($\phi(t, \boldsymbol{r}) = \int d\omega e^{-i\omega t}\tilde{\phi}(\omega, \boldsymbol{r})$), ω è la frequenza angolare e $\nabla^2 \equiv \partial_i \partial^i$.
Il termine a destra dell'equazione esprime la presenza della lente tramite il potenziale $U(\boldsymbol{r})$. Il range del potenziale è molto piccolo rispetto alle dimensioni del sistema quindi possiamo usare l'approssimazione di lente sottile. L'azione del potenziale sarà quindi solo nell'intorno della lente.

Lo schema in Figura (2.2) rappresenta l'effetto di lente gravitazionale nel limite di ottica geometrica. Si considera cioè che tutto il piano della lente (x, y) agisca come una lente sottile. Il sistema di coordinate utilizzato sarà semplificato da (x, y, z) a $(\boldsymbol{X}, z)$ con $\boldsymbol{X} = (x, y)$. L'osservatore è posto nell'origine $(\boldsymbol{0}, 0)$, la lente è posta a $\boldsymbol{r_L} = (\boldsymbol{0}, D_L)$ e la sorgente è posta a $\boldsymbol{r_S} = (\boldsymbol{\eta}, D_S)$. La distanza tra lente e sorgente è definita come

$D_{LS} = D_S - D_L$. L'onda emessa dalla sorgente viene rifratta a $(\boldsymbol{\xi}, D_L)$ e poi arriva all'osservatore.

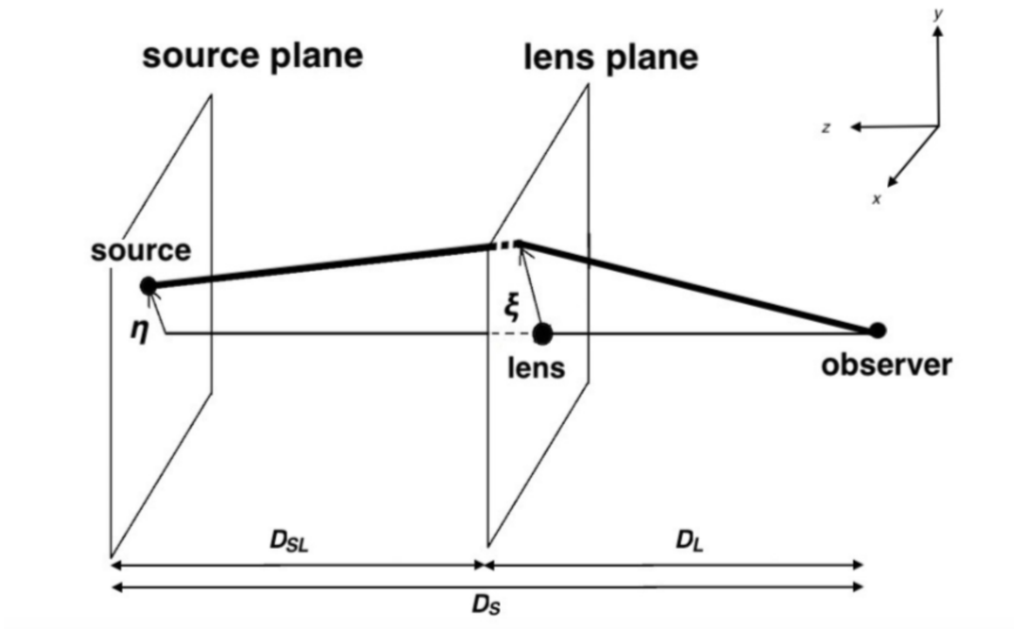

Figura 2.2: Schema effetto lente gravitazionale nel limite dell'ottica geometrica. Osservatore, lente e sorgente sono rispettivamente in $(\mathbf{0}, 0)$, $(\mathbf{0}, D_L)$,$(\boldsymbol{\eta}, D_S)$.

Per la linearità dell'equazione (2.12) si può dividere il problema considerando l'onda imperturbata ($U(\boldsymbol{r}) = 0$), che chiameremo $\tilde{\phi}_0$, e l'onda soggetta all'effetto di lensing, che chiameremo $\tilde{\phi}_1$. Scriviamo quindi:

$$\tilde{\phi}(\omega, \boldsymbol{r}) = \tilde{\phi}_0(\omega, \boldsymbol{r}) + \tilde{\phi}_1(\omega, \boldsymbol{r}) \tag{2.13}$$

Per trovare l'espressione delle due soluzioni si usa la funzione di Green per l'equazione di Helmholtz, $\frac{e^{i\omega|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$. Si ottiene dunque:

$$\tilde{\phi}_0(\omega, \boldsymbol{r}) = \frac{e^{i\sqrt{\omega^2 - m_g^2}\int^{D_S} dr}}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_S}|} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_1(\omega, \boldsymbol{r}) &= -\frac{\omega^2}{\pi}(1 - \frac{m_g^2}{2\omega^2}) \int dr' U(\boldsymbol{r'}) \frac{e^{i\omega|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tilde{\phi}_0(\boldsymbol{r'}) \\ &= -\frac{\omega}{2\pi i} \int d\boldsymbol{r'} \frac{e^{i\sqrt{\omega^2 - m_g^2}\int^{D_L} dr}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} 2i\omega U(\boldsymbol{r'}) \left(1 - \frac{m_g^2}{2\omega^2}\right) \frac{e^{i\sqrt{\omega^2 - m_g^2}\int_{D_L}^{D_S} dr}}{4\pi|\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r_S}|}\end{aligned} \tag{2.15}$$

Usando l'approssimazione di lente sottile si ha $\xi\,, \eta << D_i$ con $i = L, LS, S$. Si assume inoltre che $m_g << \omega$, quindi per i termini m_g/ω l'espansione si interrompe al secondo ordine. Poiché, infine, $|\boldsymbol{r'}|$ è molto minore delle dimensioni del sistema è possibile espandere in serie i termini $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|$[1]. Espandendo $|\boldsymbol{r_S}-\boldsymbol{r'}|$ e $|\boldsymbol{r_L}-\boldsymbol{r'}|$ si ottiene [10] :

$$|\boldsymbol{r_L}-\boldsymbol{r'}| \simeq D_L - \frac{\eta\,\xi}{D_L} - z' + \frac{1}{2D_L}\left(\xi^2 - \frac{(\xi\eta)^2}{D_L^2} - \frac{2z'\xi\eta}{D_L^2}\right) \tag{2.16}$$

$$|\boldsymbol{r_S}-\boldsymbol{r'}| \simeq D_{LS} + z' + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{D_{LS}} \tag{2.17}$$

dove z' è la terza coordinata di $r' = (\boldsymbol{\xi}, z')$. Il rapporto $\tilde{\phi}_1/\tilde{\phi}_0$ risulta quindi:

$$\frac{\tilde{\phi}_1(\boldsymbol{r})}{\tilde{\phi}_0(\boldsymbol{r})} = -\frac{\omega^2}{\pi}\frac{D_S}{2D_L D_{LS}}\int d\boldsymbol{r}\, e^{i\omega\frac{D_S}{2D_L D_{LS}}\left|\boldsymbol{\xi}-\frac{D_{LS}}{D_S}\boldsymbol{\eta}\right|^2} U(\boldsymbol{r'})\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right). \tag{2.18}$$

Definendo il potenziale gravitazionale bidimensionale $\psi(\boldsymbol{\xi}) = \int dz\, 2U(\boldsymbol{\xi}, z)$ si ottiene:

$$\frac{\tilde{\phi}_1(\boldsymbol{r})}{\tilde{\phi}_0(\boldsymbol{r})} = -\frac{\omega^2}{\pi}\frac{D_S}{2D_L D_{LS}}\int d^2\boldsymbol{\xi}\, e^{i\omega\frac{D_S}{2D_L D_{LS}}\left|\boldsymbol{\xi}-\frac{D_{LS}}{D_S}\boldsymbol{\eta}\right|^2} \psi(\boldsymbol{\xi})\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right). \tag{2.19}$$

È utile studiare il fattore di amplificazione F definito come:

$$F = \frac{\tilde{\phi}_0 + \tilde{\phi}_1}{\tilde{\phi}_0} \tag{2.20}$$

Sfruttando l'approssimazione di lente sottile sopra descritta si può riscrivere F come:

$$F \simeq \frac{\omega}{2\pi i}\frac{D_S}{D_L D_{SL}}\int d^2\boldsymbol{\xi} e^{-\frac{m_g^2}{2\omega^2}} e^{\left[i\omega\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right)\left\{\frac{D_S}{D_L D_{SL}}\frac{\left|\boldsymbol{\xi}-\frac{D_L}{D_S}\boldsymbol{\eta}\right|^2}{2} - \psi(\boldsymbol{\xi})\right\}\right]} \tag{2.21}$$

I termini presenti nell'esponenziale sono rispettivamente il ritardo dovuto alla geometria del sistema e quello dovuto all'effetto Shapiro, che infatti dipende dal potenziale della lente come in (1.5).
Si definisce ora la funzione di fase del fattore di amplificazione:

$$T(\omega) \equiv \frac{1}{i\omega\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right)}\ln\left(\frac{F}{|F|}\right). \tag{2.22}$$

A questo punto possiamo risalire all'equazione dell'onda gravitazionale sapendo che $\tilde{\phi} = F\tilde{\phi}_0$ e $\phi = \int d\omega e^{-i\omega t}\tilde{\phi}$:

$$\phi \propto \int d\omega e^{i\omega\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right)(D_S+T(\omega))-i\omega t}. \tag{2.23}$$

[1] $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \simeq r - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')/r + \left[r'^2/r - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2/r^3\right]/2$ per $r >> r'$

2.2 Differenza di tempo di arrivo

Per calcolare il tempo impiegato a raggiungere l'osservatore si considera l'onda con una distribuzione gaussiana delle frequenze attorno a ω_0 e dispersione σ^2. Espandendo l'esponente di (2.23) attorno a ω_0 fino al second'ordine:

$$
\begin{aligned}
& i\left(\omega-\frac{m_g^2}{2\omega}\right)\left(D_S+T(\omega)\right)-i\omega t \\
& \simeq i\left(\omega_0-\frac{m_g^2}{2\omega_0}\right)\left(D_S+T\left(\omega_0\right)\right)-i\omega_0 t \\
& +i\left(\left(1+\frac{m_g^2}{2\omega_0^2}\right)\left(D_S+T\left(\omega_0\right)\right)+\left(\omega_0-\frac{m_g^2}{2\omega_0}\right)T'\left(\omega_0\right)-t\right)\delta\omega \\
& +i\left\{-\frac{m_g^2}{\omega_0^3}\left(D_S+T\left(\omega_0\right)\right)+2\left(1+\frac{m_g^2}{2\omega_0^2}\right)T'\left(\omega_0\right)+\left(\omega_0-\frac{m_g^2}{2\omega_0}\right)T''\left(\omega_0\right)\right\}\delta\omega^2
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

Dunque si può riscrivere l'equazione dell'onda come:

$$
\begin{aligned}
\phi \propto & \int d(\delta\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{\delta\omega^2}{2\sigma^2}}\times e^{i\omega_0\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega_0^2}\right)\left(D_S+T(\omega_0)\right)-i\omega_0 t} \\
& \times e^{i\left(\left(1+\frac{m_g^2}{2\omega_0^2}\right)\left(D_S+T(\omega_0)\right)+\left(\omega_0-\frac{m_g^2}{2\omega_0}\right)T'(\omega_0)-t\right)\delta\omega+iN\delta\omega^2}
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

dove è stato denotato con N il coefficiente di $\delta\omega^2$. L'integrazione è semplice perché è della forma $\int dx\, e^{\alpha x+\beta x^2}$:

$$
\begin{aligned}
\phi \propto & e^{\left[i\omega_0\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega_0^2}\right)\left(D_S+T(\omega_0)\right)-i\omega_0 t\right]} \\
& \times e^{\left[\frac{1}{4\left(iN-\frac{1}{2\sigma^2}\right)}\left(\left(1+\frac{m_g^2}{2\omega_0^2}\right)\left(D_S+T(\omega_0)\right)+\omega_0\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega_0^2}\right)T'(\omega_0)-t\right)^2\right]}
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

Il secondo fattore descrive l'evoluzione temporale del pacchetto d'onda e ci permette di ricavare il tempo di propagazione:

$$
t=\left(1+\frac{m_g^2}{2\omega_0^2}\right)\left(D_S+T\left(\omega_0\right)\right)+\omega_0\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega_0^2}\right)T'\left(\omega_0\right) \tag{2.27}
$$

Come detto in precedenza, per le onde elettromagnetiche valgono le approssimazioni dell'ottica geometrica poiché la loro lunghezza d'onda λ è molto piccola rispetto alle dimensioni del sistema. Per le onde gravitazionali invece non è più possibile trascurare gli effetti dell'ottica ondulatoria. Questo comporta delle differenze nel tempo di propagazione dell'onda, infatti se per l'ottica ondulatoria la funzione di fase $T(\omega)$ si calcola a partire dall'integrale dell'equazione (2.21), in ottica geometrica si sfrutta il Principio di Fermat:

$$\partial_{\boldsymbol{\xi}} \left[i\omega \left(1 - \frac{m_g^2}{2\omega^2} \right) \left(\frac{D_S}{D_L D_{SL}} \frac{\left| \boldsymbol{\xi} - \frac{D_L}{D_S}\boldsymbol{\eta} \right|^2}{2} - \psi(\boldsymbol{\xi}) \right) \right] = 0 \tag{2.28}$$

Si ricava quindi la funzione di fase nel limite dell'ottica geometrica:

$$T_{\text{geo}} = \frac{D_S}{D_L D_{SL}} \frac{\left| \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}) - \frac{D_L}{D_S}\boldsymbol{\eta} \right|^2}{2} - \psi(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta})) \tag{2.29}$$

che sostituita nell'equazione (2.27) fornisce il tempo di propagazione delle onde elettromagnetiche.
La differenza di tempo d'arrivo è data da:

$$\Delta t = (\text{propagation time of EMWs}) - (\text{propagation time of GWs}) \tag{2.30}$$

Capitolo 3

Modelli di lenti gravitazionali

3.1 Lente puntiforme

Si considera come lente un oggetto puntiforme posto al centro della nostra galassia e la sorgente posta invece al di fuori del Gruppo Locale. Si assume che l'onda elettromagnetica e l'onda gravitazionale vengano emesse simultaneamente dalla sorgente e che la massa dei fotoni sia nulla. Vengono presi i seguenti valori per D_i:

$$D_L = 8\,kpc \quad D_S \simeq 1Gpc$$

La lente è posta in $(\mathbf{0}, D_L)$ e la densità di massa è data da:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = M_L \delta^3(\boldsymbol{r} - (\mathbf{0}, D_L)). \tag{3.1}$$

Il potenziale gravitazionale lo si ottiene dall'equazione (2.6) integrando:

$$U(\boldsymbol{r}) = -\frac{M_L}{|\boldsymbol{r} - (\mathbf{0}, D_L)|}. \tag{3.2}$$

Integrando nuovamente si ricava il potenziale gravitazionale bidimensionale:

$$\psi(\boldsymbol{\xi}) = 4M_L \ln |\boldsymbol{\xi}|. \tag{3.3}$$

Per il modello appena definito il raggio di Eistein è definito come:

$$\xi_0 = \sqrt{4M_L \frac{D_L D_{SL}}{D_S}}. \tag{3.4}$$

Per semplicità definiamo un sistema di coordinate adimensionali:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y} \equiv & \frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_0} \\ \boldsymbol{u} \equiv & \frac{D_L}{D_S} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\xi_0} \end{cases} \tag{3.5}$$

che permette di riscrivere il fattore di amplificazione in termini di $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{u}$ e ξ_0:

$$F = \frac{We^{-\frac{m_g^2}{2\omega^2}}}{2\pi i} \int d^2\boldsymbol{y} \exp\left[iW\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right)\left(\frac{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}|^2}{2} - \ln|\boldsymbol{y}|\right)\right] \tag{3.6}$$

dove $W = 4M_L\omega$ è una frequenza riscritta in modo da essere adimensionale.
Nel limite dell'otica geometrica la lunghezza d'onda è molto piccola rispetto alle dimensioni del sistema, quindi la frequenza sarà molto alta ($W >> 1$). Si applica quindi il Principio di Fermat applicando l'espressione (2.28) al fattore di amplificazione appena ricavato. Per semplicità assumiamo che $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{\eta}$ siano paralleli.

$$\begin{aligned} \partial_{\boldsymbol{y}}\left(\frac{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}|^2}{2} - \ln|\boldsymbol{y}|\right) &= 0 \\ y(u) &= \frac{u \pm \sqrt{u^2+4}}{2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dove $y(u) \equiv |\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})|$. Il $\pm$ corrisponde alle due immagini virtuali che si creano per l'effetto di lensing. Inserendo quindi il risultato appena trovato nell'equazione (2.29) la funzione di fase per la lente puntiforme diventa:

$$T_{\text{PM,geo},\pm} = 4M_L\left(\frac{u^2+2\mp u\sqrt{u^2+4}}{4} - \ln\left|\frac{u\pm\sqrt{u^2+4}}{2}\right|\right). \tag{3.8}$$

Sostituendo il risultato nell'equazione (2.27) si ricava il tempo di propagazione nel limite dell'ottica geometrica:

$$t_{\text{PM,geo},\pm} = \left(1+\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right)\left[D_S + 4M_L\left(\frac{u^2+2\mp u\sqrt{u^2+4}}{4} - \ln\left|\frac{u\pm\sqrt{u^2+4}}{2}\right|\right)\right]. \tag{3.9}$$

Passando all'ottica ondulatoria si avrà $W << 1$. Posso allora riscrivere il fattore di amplificazione nel seguente modo:

$$F \propto \exp\left[\frac{iW\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right)}{2}\left\{\ln\left(\frac{W\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right)}{2}\right)+\gamma\right\}\right] \tag{3.10}$$

con γ costante di Eulero. Si ricava quindi la funzione di fase dall'equazione (2.22):

$$T_{\text{PM, wave}}(\omega) = 2M_L\left\{\ln\left(2M_L\omega\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right)\right)+\gamma\right\} \tag{3.11}$$

che permette di ricavare il tempo di propagazione nel limite dell'ottica ondulatoria da (2.27):

$$t_{\text{PM, wave}} = \left(1+\frac{m_g^2}{2\omega_0^2}\right)\left\{D_S + 2M_L\left[\ln\left(2M_L\omega\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right)\right)+\gamma+1\right]\right\} \tag{3.12}$$

3.1.1 Ottica ondulatoria per il range di LIGO

È importante ricordarsi di reinserire le costanti c, G, $\hbar$ per l'analisi dimensionale.
È facile verificare che per LIGO gli effetti di ottica ondulatoria sono trascurabili. Si valuta la frequenza adimensionale

$$W = 4M_L\,\omega\,\frac{G}{c^3} \tag{3.13}$$

e poi si moltiplica e divide per le grandezze caratteristiche del sistema:

$$W = 2\left(\frac{M}{10^4 M_\odot}\right)\left(\frac{\omega}{10\text{Hz}}\right) \tag{3.14}$$

che come si vede, nella banda di frequenze di LIGO $10 - 10^3\,Hz$ e con una lente con $10^4 M_\odot < M_L$ porta a $W > 1$. Quindi LIGO lavora nel range dell'ottica geometrica. Inoltre, per una lente con massa $M_L < 10^4 M_\odot$, il guadagno dovuto agli effetti di ottica ondulatoria è dato dal termine $2M_L$ di (3.12):

$$2M_L\,\frac{G}{c^3} \simeq 0.1\left(\frac{M_L}{10^4 M_\odot}\right)\ \text{sec} \tag{3.15}$$

che è piccolo. Infine è interessante valutare il delay causato dalla massa non nulla dei gravitoni col termine $(m_g/\omega)^2\,D_S$ della (3.12):

$$\left(\frac{m_g}{\omega}\right)^2 D_S\frac{c^3}{\hbar^2} = 10^{-7}\left(\frac{m_g}{10^{-26}\text{eV}}\right)\left(\frac{10\text{Hz}}{\omega}\right)^2\left(\frac{D_S}{1\text{Gpc}}\right)\text{sec} \tag{3.16}$$

che per LIGO è piccola.
Quindi sia gli effetti di ottica ondulatoria che quelli dovuti alla massa m_g sono trascurabili nei dati di LIGO. Se invece si vanno ad analizzare gli stessi effetti nel range di frequenze di LISA si vedrà che saranno rilevanti fino a $M_L < 10^8 M_\odot$. Anche il termine di massa, per LISA, avrà un effetto misurabile. Infatti prendendo una $m_g = 10^{-26}$eV e $M_L = 10^4 M_\odot$ la differenza di arrivo di tempo è nell'ordine del secondo.

In Figura (3.1) è riportata la differenza di arrivo in funzione della frequenza dell'onda gravitazionale. È stata presa come massa della lente $M_L = 5 \cdot 10^4 M_\odot$ e come range per le frequenze $W = 6 \cdot 10^{-6} - 6 \cdot 10^{-2} << 1$ cioè il range dell'ottica ondulatoria. Le linee rosse, blu e nere corrispondono ai casi in cui $m_g = (10^{25} - 10^{-27})eV$, mentre quelle tratteggiate sono quelle per $m_g = 0$. Le linee rosse e blu corrispondono al caso in cui la lente è presente, cioè $M_L = 5 \cdot 10^4 M_\odot$. Per le linee nere invece non vi è l'effetto di lensing, infatti per quei casi M_L è posta uguale a zero. Il grafico mostra dunque che il ritardo dovuto agli effetti di lente gravitazionali è nell'ordine dei secondi, come si vede dalla differenza tra linee rosse (o blu) e nere. L'errore di LISA è dello stesso ordine, quindi l'effetto di lensing va tenuto in considerazione. Da notare che anche in assenza di gravitoni massivi (linee tratteggiate) gli effetti dell'ottica ondulatoria sarebbero non trascurabili. Dunque, per la stima della massa dei gravitoni a partire dai dati di LISA, si dovrà considerare l'effetto di lente gravitazionale sapendo che per le onde gravitazionali non è sufficiente porsi in ottica geometrica, poiché gli effetti di ottica ondulatoria sono non trascurabili.

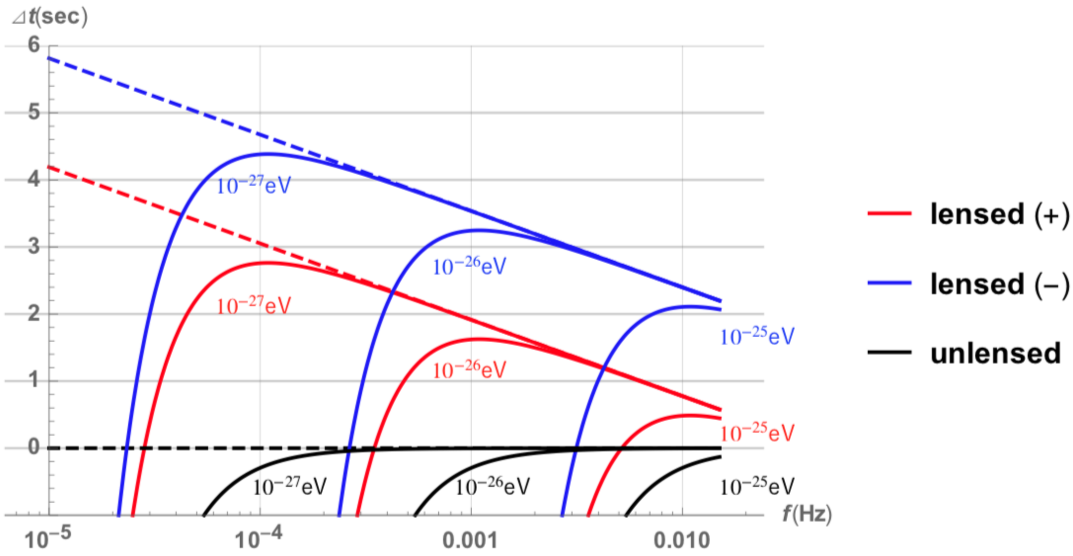

Figura 3.1: Differenza di arrivo di tempo nella banda di frequenze di LISA con un modello a lente puntiforme.
Fonte: [9]

3.2 Lente Sferica

Si procede come nel caso precedente a partire però da una diversa densità di massa:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma^2}{2\pi|\boldsymbol{r}^2|} \tag{3.17}$$

dove σ è la dispersione di velocità. Il potenziale gravitazionale si calcola con la (2.6):

$$U(\boldsymbol{r}) = 2\sigma^2 \ln\left(\frac{|\boldsymbol{r}|}{r_0}\right) \tag{3.18}$$

dove r_0 è il cutoff. Si calcola il potenziale gravitaizionale bidimensionale:

$$\psi(\boldsymbol{\xi}) = 4\pi\sigma^2|\xi|. \tag{3.19}$$

In questo modello di lente puntiforme, il raggio di Einstein è dato da:

$$\xi_0 = \frac{4\pi\sigma^2 D_L D_{LS}}{D_S} \tag{3.20}$$

e la massa della lente:

$$M_L = \frac{4\pi^2\sigma^4 D_L D_{LS}}{D_S}. \tag{3.21}$$

Il fattore di amplificazione per questo modello è quindi:

$$F \simeq \frac{We^{-\frac{m_g^2}{2\omega^2}}}{2\pi i}\int d^2\boldsymbol{y}\exp\left[iW\left(1-\frac{m_g^2}{2\omega^2}\right)\left\{\frac{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}|^2}{2}-|\boldsymbol{y}|\right\}\right] \tag{3.22}$$

con $W = 4M_L\omega$.

Ora si studia il sistema nel dominio dell'ottica geometrica e in quello di ottica ondulatoria.

Per $W >> 1$ si usano le approssimazioni di ottica geometrica e si usa (2.28):

$$y(u) = u \pm 1. \tag{3.23}$$

La funzione di fase diventa quindi:

$$T_{\text{SIS,geo},\pm} = 4M_L \left(\mp u - \frac{1}{2} \right) \tag{3.24}$$

e il tempo di propagazione dell'onda gravitazionale, tramite (2.27)

$$t_{\text{SIS,geo},\pm} = \left(1 + \frac{m_g^2}{2\omega^2} \right) \left\{ D_S + 4M_L \left(\mp u - \frac{1}{2} \right) \right\} \tag{3.25}$$

In ottica ondulatoria $W << 1$ quindi la funzione di fase è:

$$T_{\text{SIS, wave}}\left(\omega\right) = 4M_L \left\{ -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(4M_L\omega \left(1 - \frac{m_g^2}{2\omega^2} \right) \right)^{-1/2} - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \tag{3.26}$$

e di conseguenza il tempo di propagazione:

$$t_{\text{SIS, wave}} \simeq \left(1 + \frac{m_g^2}{2\omega^2} \right) \left[D_S + 4M_L \left\{ -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(4M_L\omega \left(1 - \frac{m_g^2}{2\omega^2} \right) \right)^{-1/2} - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right] \tag{3.27}$$

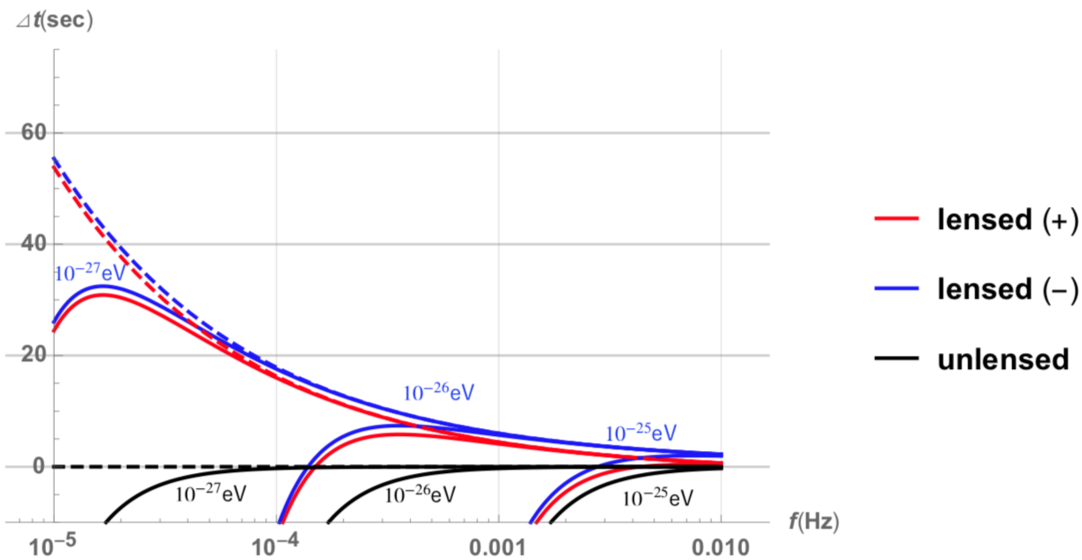

Figura 3.2: Differenza di tempo di arrivo nella banda di frequenze di LISA con un modello a lente sferica.
Fonte [9]

Il grafico in Figura (3.2) pone la differenza di arrivo di tempo $\Delta t(s)$ in funzione della frequenza dell'onda gravitazionale $f(Hz)$.

Come nel caso della lente puntiforme, le linee rosse e blu sono quelle in cui $M_L = 5 \cdot 10^4 M_\odot$ e $\sigma = 80\,km/s$, quelle nere invece corrispondono al caso senza lente. Per le linee tratteggiate $m_g = 0$. Il delay nel caso di lente sferica è più grande di un ordine di grandezza rispetto a quello della lente puntiforme. Gli effetti di lente gravitazionale e il range dell'ottica ondulatoria non vanno trascurati perché, come si vede, hanno una non banale rilevanza. Le conclusioni tratte con questo modello sono le stesse di quelle del caso precedente.

Capitolo 4

Conclusioni

La differenza di tempo di arrivo misurata degli eventi GW170817 e GRB170817A (1.1) ha fornito un vincolo molto stringente sulla velocità di propagazione delle onde gravitazionali, che risulta compatibile con quella della luce (1.3). Tale evidenza sperimentale ha imposto ai fisici di scartare le teorie che prevedessero una velocità di propagazione delle GWs diversa da c. In futuro le misure sulla differenza temporale di arrivo saranno sempre più precise, tanto da rendere sensibili i rivelatori anche alle più lievi perturbazioni cosmologiche. L'effetto di lente gravitazionale, a questo proposito, dovrà essere tenuto in considerazione. Inoltre, gli effetti di ottica ondulatoria potrebbero essere rilevanti per il lensing delle onde gravitazionali.
Tra i più importanti rivelatori di GWs vi sono gli interferometri LIGO e VIRGO, i quali lavorano in un range di frequenze tra i $10 - 10^3$Hz. In queste condizioni l'effetto di lensing è possibile studiarlo nel limite dell'ottica geometrica.
Di maggior interesse per la tesi, invece, il progetto di interferometro spaziale LISA che si propone di indagare sorgenti di GWs nel range $0.1\,\mathrm{mHz} - 1\,\mathrm{Hz}$. In questa banda la propagazione delle GWs soggette all'effetto di lente si deve studiare nel dominio dell'ottica ondulatoria, mentre per le onde elettromagnetiche è ancora valido il limite di ottica geometrica.
Un altro elemento che potrebbe influire sulla differenza di tempo di propagazione, nel range di frequenze di LISA, è la massa non nulla dei gravitoni. Sommando questo effetto con quello dell'ottica ondulatoria è stato possibile calcolare il Δt per due modelli di lente: puntiforme e gravitazionale. A partire da $m_g = 10^{-25} - 10^{-27}$eV e $M_L = 5 \cdot 10^4 M_\odot$, per la lente puntiforme il delay ottenuto è circa $\mathcal{O}(1)$s, mentre per la lente sferica è circa $\mathcal{O}(10)$s. Dunque per scenari futuri sarà fondamentale tenere conto degli effetti di lensing per poter interpretare al meglio i dati sulla differenza di arrivo di tempo di GWs e onde EM. Di più, si potrà utilizzare la differenza temporale per fornire dei limti ancora più stringenti sulla possibile massa dei gravitoni.

Bibliografia

[1] `https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/LISA`.

[2] Benjamin P Abbott, R Abbott, TD Abbott, F Acernese, K Ackley, C Adams, T Adams, P Addesso, RX Adhikari, VB Adya, et al. Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: Gw170817 and grb 170817a. *The Astrophysical Journal Letters*, 848(2):L13, 2017.

[3] Estelle Asmodelle. Tests of general relativity: A review. *arXiv preprint arXiv:1705.04397*, 2017.

[4] Luca Baiotti and Luciano Rezzolla. Binary neutron star mergers: a review of einstein's richest laboratory. *Reports on Progress in Physics*, 80(9):096901, jul 2017.

[5] Edo Berger. Short-duration gamma-ray bursts. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 52:43–105, 2014.

[6] Cédric Deffayet, G. Esposito-Farese, and Alexander Vikman. Covariant galileon. *Physical Review D*, 79, 01 2009.

[7] Jose María Ezquiaga and Miguel Zumalacárregui. Dark energy after gw170817: dead ends and the road ahead. *Physical review letters*, 119(25):251304, 2017.

[8] Michael Paul Hobson, George P Efstathiou, and Anthony N Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists.* Cambridge University Press, 2006.

[9] Takuya Morita and Jiro Soda. Arrival time differences of lensed massive gravitational waves. *arXiv preprint arXiv:1911.07435*, 2019.

[10] Ryuichi Takahashi, Teruaki Suyama, and Shugo Michikoshi. Scattering of gravitational waves by the weak gravitational fields of lens objects. *Astronomy & Astrophysics*, 438(1):L5–L8, 2005.