



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Tunneling quantistico macroscopico con i condensati di
Bose-Einstein in tripla buca di potenziale**

Candidato:

Filippo Stellin

Matricola 617028-SF

Relatore:

Prof. Luca Salasnich

Correlatore:

Dott. Giovanni Mazzeella

Indice

1	Introduzione	2
2	Sistemi di bosoni	2
2.1	Gas di Bose ideale	2
2.2	Gas di bosoni non interagenti	3
2.2.1	Gas a temperatura nulla	5
2.2.2	Gas a temperatura finita	5
2.3	Gas di bosoni interagenti	7
2.3.1	Interazioni in un gas degenere	7
2.3.2	L'equazione di Gross-Pitaevskii	10
3	Gas di bosoni confinati	11
3.1	Gas di bosoni con confinamento armonico trasverso	11
3.1.1	Confinamento mediante potenziale a doppia buca: approssimazione a due modi	13
3.1.2	Confinamento mediante potenziale a tripla buca: approssimazione a tre modi	16
4	Conclusioni	21

1 Introduzione

La *condensazione di Bose-Einstein* (BEC) è una transizione di fase per un sistema di particelle bosoniche ed è caratterizzata dal fatto di non essere imputabile all'interazione tra le particelle, bensì alla statistica a cui obbediscono. Scegliendo la temperatura T come variabile termodinamica, esiste una temperatura critica T_c , alla quale una frazione finita di particelle di un sistema bosonico inizia a occupare lo stato quantico di singola particella corrispondente al livello energetico fondamentale. A temperatura nulla, il sistema diviene completamente degenere, in quanto tutte le particelle che lo compongono vengono a trovarsi nel medesimo stato quantico: in tali condizioni è possibile osservare effetti quantistici macroscopici.

La prima formulazione teorica della condensazione di Bose-Einstein risale al 1925, quando Albert Einstein, partendo dai risultati ottenuti da Satyendra Nath Bose l'anno prima nella descrizione statistica dei quanti di luce, ipotizzò il manifestarsi di transizioni di fase in un gas di atomi non interagenti, posti all'equilibrio termico [1]. Nel 1938 F. London, dopo la scoperta della superfluidità dell'elio liquido, intuì che c'era un legame con la condensazione [2]. La prima teoria auto-consistente sulla superfluidità fu elaborata da Lev Landau nel 1941 in termini dello spettro delle eccitazioni elementari del fluido, che distinse in due tipi: le eccitazioni *fononiche*, che sono l'analogo quantistico delle onde sonore, e quelle *rotoniche*, di energia più elevata e legate ai moti rotazionali nel liquido. Nel 1947 Efim Bogoljubov sviluppò la prima teoria sui gas di bosoni debolmente interagenti, nella quale si assumeva che le interazioni binarie tra le particelle fossero molto più probabili di quelle ternarie [3], condizione soddisfatta in molti esperimenti condotti in seguito. Nel decennio successivo il legame tra condensazione e superfluidità venne approfondito da Lev Landau ed Evgenij Lifšits, che introdussero il concetto di *ordine non diagonale a lungo raggio* [2] e da Roger Penrose e Richard Feynman. Negli stessi anni gli studi sperimentali sull'elio superfluido divennero sempre più raffinati, al fine di verificare l'ipotesi di Lev Landau sullo spettro di eccitazione e di misurare la frazione di condensato determinando la funzione di distribuzione dei momenti. Negli anni '70 proseguirono gli studi sui gas atomici diluiti, sfruttando alcune delle tecniche utilizzate in fisica atomica, come l'intrappolamento ottico e magnetico, e i meccanismi di raffreddamento. Il gas utilizzato inizialmente era l'idrogeno spin-polarizzato, come proposto da Hecht nel 1959, in quanto presenta deboli interazioni attrattive e non dà origine a stati legati.

Negli anni '80 iniziarono ad essere impiegati anche i metalli alcalini appartenenti al primo gruppo della Tavola Periodica, confinati con tecniche magneto-ottiche, poiché la struttura dei loro livelli energetici consentiva un raffreddamento laser fino a temperature più basse di quelle ottenute in precedenza. Tuttavia, per ottenere la condensazione fu necessaria l'adozione della tecnica di *raffreddamento evaporativo*, in quanto essa permetteva di ridurre la temperatura in maniera notevole conservando soltanto le particelle a energia più bassa. Combinando tecniche di raffreddamento diverse (laser ed evaporazione [3]), Eric Cornell, Carl Wieman e Wolfgang Ketterle riuscirono nel 1995 a raggiungere la temperatura e la densità sufficiente per ottenere un popolamento macroscopico dello stato fondamentale di singola particella, utilizzando atomi neutri di ^{87}Rb , ^{23}Na e ^7Li . Nella seconda metà degli anni '90 si ottennero condensati di ^7Li (1995), di idrogeno (1998), di ^4He metastabile e di ^{41}K .

In questa tesi si analizzerà un particolare fenomeno che interessa i condensati di Bose-Einstein, ovvero il *tunneling macroscopico* di atomi bosonici attraverso barriere di potenziale, che separano due regioni spaziali distinte. Lo studio di questo tunneling è strettamente connesso all'*effetto Josephson* che si verifica nelle giunzioni superconduttive [4] formate da due superconduttori separati da un sottile strato di isolante. Inoltre, il trasferimento di bosoni verrà preso in esame, studiando il comportamento di un condensato di Bose-Einstein intrappolato in un potenziale a tripla buca, avvalendosi dell'*approssimazione a tre modi*. Dal punto di vista quantitativo, l'esame di questi sistemi verrà condotto, ricavando le equazioni differenziali che regolano l'evoluzione temporale degli sbilanciamenti di popolazione e delle fasi relative tra buche prime vicine. Si mostrerà, infine, che, sotto opportune ipotesi tali equazioni si riconducono alle note equazioni per la doppia buca [5].

2 Sistemi di bosoni

2.1 Gas di Bose ideale

Si consideri il più semplice sistema di N particelle identiche, quello composto da N elementi non interagenti. In questo caso, l'hamiltoniana è:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}, \quad (1)$$

dove $p_i^2 = \vec{p}_i \cdot \vec{p}_i$ è l'operatore impulso della i -esima particella. In questo caso H è indipendente dalle posizioni delle particelle e da qualunque altra coordinata, come, ad esempio, lo *spin* [6]. Le particelle identiche che costituiscono il sistema descritto dall'hamiltoniana H sono indistinguibili in meccanica quantistica e possono

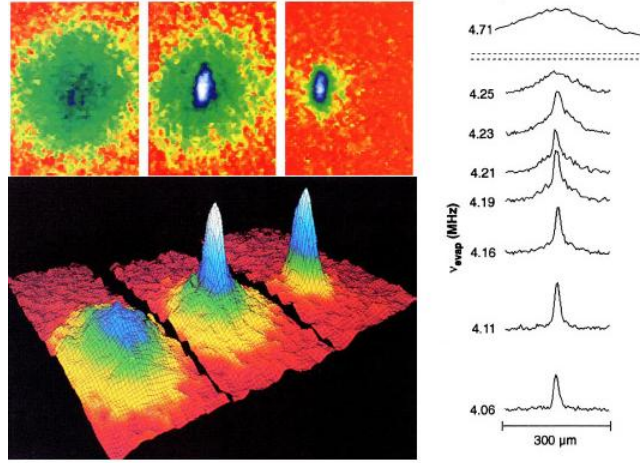


Figura 1: La distribuzione della velocità di atomi di ^{87}Rb nell'esperimento di Anderson et al. del 1995: a sinistra si osserva il gas a temperatura appena superiore a T_C , al centro il condensato poco oltre la soglia e a destra la sola frazione di condensato ottenuta in seguito all'evaporazione.

essere suddivise in due classi fondamentali: i *bosoni*, che seguono la statistica di Bose-Einstein, e i *fermioni*, che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac. Scambiando una qualunque coppia di particelle non varia alcuna osservabile fisica del sistema, ma può variare la fase associata a ciascuna autofunzione di H che forma un insieme completo. Se la fase varia di un fattore -1 , le autofunzioni sono antisimmetriche rispetto a tale trasformazione e le particelle che compongono il sistema seguono la statistica di Fermi-Dirac: ne consegue che due o più fermioni non possono trovarsi nello stesso stato quantico di singola particella, a causa del *principio di esclusione* di Pauli. Nel caso in cui la fase non varia, le autofunzioni sono simmetriche rispetto allo scambio di coppie di coordinate delle particelle, e il sistema è di Bose-Einstein. Tale proprietà delle funzioni d'onda è legata alla presenza dello *spin* delle particelle: come asserisce il *teorema spin - statistica*, il momento angolare intrinseco assume valori interi nei bosoni e semiinteri nei fermioni, in unità di $\hbar$. Sebbene tale definizione sia valida rigorosamente soltanto per le particelle elementari, le particelle composite possono trattate come bosoni se il loro spin totale è multiplo intero di $\hbar$ e la spaziatura energetica della loro struttura interna è molto maggiore dell'energia di interazione. Tale prescrizione è verificata nei gas diluiti a temperature estremamente basse, in cui i momenti delle particelle sono molto ridotti. In tali condizioni, la distinzione tra fermioni e bosoni diviene evidente: mentre i primi occupano ciascuno uno stato quantico diverso di singola particella, i secondi popolano massicciamente lo stato quantico di singola particella corrispondente al livello energetico fondamentale, dando origine a un *condensato* di Bose-Einstein, come verrà illustrato in seguito.

2.2 Gas di bosoni non interagenti

Un generico gas di Bose non interagente è formato da N particelle indistinguibili, aventi hamiltoniane indipendenti h_i (con $i = 1, 2, \dots, N$, tali che l'hamiltoniana complessiva del sistema sia:

$$H = \sum_{i=1}^N h_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + U(\vec{r}_i) \right), \quad (2)$$

dove $U(\vec{r}_i)$ è il potenziale agente sulla singola particella e p_i rappresenta l'impulso ad essa associato. Al fine di spiegare il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein, è necessario introdurre la distribuzione di Bose-Einstein, definendola nel contesto dell'*ensemble grancanonico*. In tale descrizione, si suppone di conoscere la temperatura T e il potenziale chimico μ del gas di bosoni, mettendo in contatto il sistema con un serbatoio termico a temperatura e potenziale chimico noti. Il numero di particelle N , invece, è considerato variabile e non misurabile con estrema precisione.

La funzione di partizione da utilizzare nel conteggio degli stati è la *funzione di partizione grancanonica* $Z(\beta, \mu)$, definita nel modo seguente:

$$Z(\beta, \mu) = \sum_{N=0}^{+\infty} e^{\beta\mu N} Q_N(\beta) = \sum_{N=0}^{+\infty} e^{\beta\mu N} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\beta E_k}, \quad (3)$$

dove $\beta = \frac{1}{k_B T}$, mentre $Q_N(V, T)$ è la funzione di partizione canonica per un sistema di N particelle e la serie di cui è composta comprende un insieme completo di autostati dell'hamiltoniana H con energia E_k . Tale energia,

per un sistema di N particelle avente insieme di numeri di occupazione $\{n_{ik}\}$, è data da $E_k = \sum_{i=0}^{+\infty} n_{ik}\epsilon_i$, dove ϵ_i con $i = 1, 2, \dots, +\infty$ rappresentano i livelli energetici associati agli autostati dell'hamiltoniana di singola particella. Si osserva che la funzione di partizione grancanonica può dipendere, attraverso le autoenergie, dai parametri che descrivono le caratteristiche del potenziale esterno di confinamento, come, ad esempio la pulsazione nel caso dell'intrappolamento armonico.

Nel caso in cui l'hamiltoniana è scomponibile in N hamiltoniane di singola particella indipendenti, è possibile scrivere gli autostati del sistema in termini dei numeri di occupazione $\{n_i\}$ degli autostati ϵ_i dell'hamiltoniana di singola particella h . Un generico autostato dell'hamiltoniana H , utilizzando questa notazione, può essere scritto come:

$$|\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N\rangle = |n_0, n_1, n_2, \dots\rangle . \quad (4)$$

Utilizzando il formalismo della seconda quantizzazione si possono definire tali autostati a partire dallo stato di vuoto $|vac\rangle$, caratterizzato dall'avere numeri di occupazione n_i tutti nulli:

$$|n_0, n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_{i=0}^{+\infty} \frac{(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |vac\rangle , \quad (5)$$

dove $\hat{a}_i^\dagger$ e $\hat{a}_i$ rappresentano rispettivamente l'operatore di creazione e l'operatore di annichilazione relativi all' i -esimo stato di singola particella e obbediscono alle regole di commutazione $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$ e vale l'uguaglianza $\hat{a}_i|vac\rangle = 0$. Il numero di particelle totali N è legato all'insieme di numeri di occupazione $\{n_i\}$ dalla relazione $N = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i$ e l'energia totale E_k è legata alle auto-energie dell'hamiltoniana di singola particella h tramite l'uguaglianza $E_k = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon_i n_{ik}$, dove n_{ik} rappresenta il numero di bosoni di energia ϵ_i . La funzione di partizione grancanonica può, allora, essere riscritta nella forma:

$$Z(\beta, \mu) = \sum_{N=0}^{+\infty} e^{\beta\mu \sum_{i=1}^{+\infty} n_i} \sum_{\substack{k=0 \\ \sum_{i=0}^{+\infty} n_{ik} = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i = N}}^{+\infty} e^{-\beta \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon_i n_{ik}} \quad (6)$$

$$= \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ \sum_{i=0}^{+\infty} n_{ik} = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i = N}}^{+\infty} \prod_{i=0}^{+\infty} e^{\beta(\mu - \epsilon_i)n_{ik}} \quad (7)$$

$$= \prod_{i=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\beta(\mu - \epsilon_i)n} = \prod_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}} . \quad (8)$$

La probabilità che lo stato di singola particella con energia ϵ_i sia occupato da n particelle è data da:

$$P_n(\epsilon_i) = \frac{e^{\beta(\mu - \epsilon_i)n}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\beta(\mu - \epsilon_i)n}} . \quad (9)$$

Il numero medio di particelle del gas di bosoni è, dunque:

$$\langle N \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{\beta(\mu - \epsilon_i)n}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\beta(\mu - \epsilon_i)n}} \right) , \quad (10)$$

dove si nota che il termine tra le parentesi rappresenta il numero medio di particelle del gas che si trova allo stato ϵ_i , dunque, sommando su tutti gli autovalori dell'energia si ottiene il valore di aspettazione del numero di bosoni $\langle N \rangle$ del gas. Dal momento che il potenziale chimico μ ha un valore finito, si osserva che la serie al denominatore converge solo per $\mu < \epsilon_0$ e, sotto questa condizione, la sua somma vale $\frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}}$. Riconducendo la serie al numeratore alla derivata della serie al denominatore rispetto a $e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}$, il valor medio $\langle N \rangle$ si riscrive nella forma:

$$\langle N \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} . \quad (11)$$

Il valore di aspettazione $\langle N \rangle$ può essere considerato come somma di un contributo termico $\langle N_T \rangle$ e di un contributo dovuto alla popolazione del livello energetico fondamentale $\langle N_0 \rangle$:

$$\langle N \rangle = \langle N_0 \rangle + \langle N_T \rangle , \quad (12)$$

dove $\langle N_0 \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1}$. Si osserva che il numero medio di particelle che occupano livelli energetici eccitati $\langle N_T \rangle(T, \mu)$ è massimo per $\mu = \epsilon_0$, detto $\langle N_c \rangle = \langle N_T \rangle(T, \mu = \epsilon_0)$ e che in questa condizione $\langle N_0 \rangle$ diverge. Se

$\langle N_c \rangle > \langle N \rangle$ allora l'uguaglianza (12) è soddisfatta per valori di μ minori di ϵ_0 e $\langle N_0 \rangle$ è trascurabile rispetto a $\langle N \rangle$. Poiché $\langle N_c \rangle(T)$ è una funzione crescente di T , allora tale scenario si verifica per temperature maggiori di quella critica T_c , definita dalla relazione:

$$\langle N_T \rangle(T_c, \mu = \epsilon_0) = \langle N \rangle . \quad (13)$$

Se, invece, $\langle N_c \rangle$ è minore di $\langle N \rangle$ (o, equivalentemente, $T < T_c$), allora il contributo dovuto alla popolazione bosonica allo stato fondamentale è importante per soddisfare la relazione (12) e il valore di μ si avvicinerà all'energia dello stato fondamentale ϵ_0 nel limite termodinamico ($N \rightarrow +\infty$).

2.2.1 Gas a temperatura nulla

Nel caso di un gas di N bosoni a temperatura nulla, tutte le particelle occupano lo stato fondamentale del sistema, la cui energia dipende dal tipo di potenziale esterno applicato. Detta $\Psi_0^{(N)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ l'autofunzione complessiva del sistema allo stato energetico fondamentale, se l'hamiltoniana complessiva è scomponibile in hamiltoniane indipendenti a una particella (come la (2)), allora essa sarà scrivibile come prodotto delle N autofunzioni $\phi_0(\vec{r}_i)$ delle hamiltoniane h_i di singola particella:

$$\Psi_0^{(N)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \prod_{i=1}^N \phi_0(\vec{r}_i) , \quad (14)$$

dove le funzioni d'onda $\phi_0(\vec{r}_i)$ sono autofunzioni dell'hamiltoniana h_i relative all'autovalore ϵ_0 di singola particella:

$$h_i \phi_0(\vec{r}_i) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\vec{r}_i) \right] \phi_0(\vec{r}_i) = \epsilon_0 \phi_0(\vec{r}_i) . \quad (15)$$

In questo caso la funzione d'onda complessiva $\Psi_0^{(N)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ prende il nome di *funzione d'onda macroscopica del condensato*.

2.2.2 Gas a temperatura finita

Nel caso di un gas a temperatura finita, se $T < T_c$, allora vi è una frazione finita di particelle allo stato fondamentale, che costituisce un condensato. I bosoni che occupano livelli energetici di singola particella diversi dallo stato fondamentale costituiscono, invece, la frazione termica di particelle del gas, indicata con $\langle \tilde{N}_T \rangle$ ed esprimibile come:

$$\langle \tilde{N}_T \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} , \quad (16)$$

dove ϵ_i con $i = 1, 2, \dots, +\infty$ sono i livelli energetici di singola particella del gas di bosoni. Quando il numero di particelle diviene molto elevato, la spaziatura tra i livelli energetici E_k del sistema a N particelle diviene sempre più piccola [7] e quindi la somma presente nella (16) può essere sostituita con un'integrazione nello spazio delle coordinate e dei momenti della funzione di distribuzione di Bose-Einstein, normalizzata con un fattore $(2\pi\hbar)^3$:

$$\langle \tilde{N}_T \rangle = \int \int \frac{1}{e^{\beta(\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) - \mu)} - 1} \frac{d^3 \vec{r} d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \quad (17)$$

, dove le autoenergie sono state sostituite con $\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r})$, nonostante la posizione e il momento non siano buoni numeri quantici, dal momento che non sono ben definite le relazioni energia-posizione ed energia-momento. Tale scelta è motivata dal fatto che si considerano potenziali con lunghezze caratteristiche minori della lunghezza d'onda di De Broglie dei bosoni del gas (data da $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$). L'approssimazione usata, detta *approssimazione locale*, è valida quando i gas si trovano a temperature basse, ovvero quando i momenti sono piccoli e le lunghezze d'onda associate ai bosoni sono elevate. E' possibile definire il numero medio di bosoni termici in termini delle densità di particelle nello spazio delle coordinate ($\tilde{n}(\vec{r})$) e nello spazio dei momenti ($\tilde{n}_T(\vec{p})$):

$$\langle \tilde{N}_T \rangle = \int \tilde{n}_T(\vec{p}) d^3 \vec{p} = \int \tilde{n}_T(\vec{r}) d^3 \vec{r} , \quad (18)$$

Integrando nello spazio dei momenti si trova il valor medio $\langle \tilde{n}_T(\vec{r}) \rangle$, ovvero la densità media di particelle nello spazio delle coordinate:

$$\langle \tilde{n}_T(\vec{r}) \rangle = \int \frac{1}{e^{\beta(\frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) - \mu)} - 1} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \quad (19)$$

$$= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) - \mu)} \sum_{l=0}^{+\infty} e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) - \mu)l} \quad (20)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{e^{-\beta(U(\vec{r}) - \mu)(l+1)}}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 \vec{p} e^{-\beta(\frac{p^2}{2m})(l+1)} \quad (21)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{e^{-\beta(U(\vec{r}) - \mu)(l+1)}}{(l+1)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (22)$$

$$= \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{e^{-\beta(U(\vec{r}) - \mu)l}}{l^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{\frac{3}{2}}(z(\vec{r})), \quad (23)$$

dove si è posto $z(\vec{r}) = e^{\beta(\mu - U(\vec{r}))}$, mentre $\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ rappresenta la lunghezza d'onda termica di De Broglie dei bosoni che compongono il gas e $g_{\frac{3}{2}}(z(\vec{r})) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{3}{2}}}$.

Nel caso in cui il potenziale di confinamento è armonico, allora $z(\vec{r}) = e^{\beta\mu}$ e dunque $\langle \tilde{n}_T(\vec{r}) \rangle$ non dipende dalle coordinate e il numero medio di particelle termiche del gas di bosoni è:

$$\langle \tilde{N}_T \rangle = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{\frac{3}{2}}(e^{\beta\mu}), \quad (24)$$

dove V è il volume all'interno del quale è confinato il gas di bosoni. Ponendo $\langle \tilde{n} \rangle = \frac{\langle \tilde{N} \rangle}{V}$, $\langle \tilde{n}_T \rangle = \frac{\langle \tilde{N}_T \rangle}{V}$ e $\langle \tilde{n}_0 \rangle = \frac{\langle \tilde{N}_0 \rangle}{V}$ e ricordando che $\langle \tilde{n} \rangle = \langle \tilde{n}_0 \rangle + \langle \tilde{n}_T \rangle$, si ha:

$$\langle \tilde{n} \rangle = \langle \tilde{n}_0 \rangle + \frac{1}{\lambda_T^3} g_{\frac{3}{2}}(e^{\beta\mu}). \quad (25)$$

Se $T \geq T_c$ la frazione di condensato è nulla (ovvero $\langle \tilde{n}_0 \rangle = 0$) mentre per $T \leq T_c$ vale $\mu = \epsilon_0 = 0$ e, quindi, in soglia di condensazione ($T = T_c$) si ottiene la relazione:

$$\langle \tilde{n} \rangle = \frac{1}{\lambda_{T_c}^3} g_{\frac{3}{2}}(1) = \left(\frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} g_{\frac{3}{2}}(1). \quad (26)$$

Dall'equazione [26] si ricava immediatamente la temperatura critica T_c al di sotto della quale il gas confinato nella regione a potenziale nullo inizia a condensarsi:

$$T_c = \langle \tilde{n} \rangle^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2\pi m k_B g_{\frac{3}{2}}(1)^{\frac{2}{3}}}, \quad (27)$$

dove $g_{\frac{3}{2}} = \zeta(\frac{3}{2}) \approx 2,6124$. Servendosi delle relazioni (24) e (25) e ponendo il potenziale chimico $\mu = 0$, si trova la relazione tra la frazione media di condensato e la temperatura del gas di bosoni, valida per $T \leq T_c$:

$$\frac{\langle \tilde{n}_0 \rangle}{\langle \tilde{n} \rangle} = \frac{\langle \tilde{N}_0 \rangle}{\langle \tilde{N} \rangle} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (28)$$

Se il potenziale di confinamento è armonico ($U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$), il numero medio di bosoni termici del gas, per $T \leq T_c$ è dato da:

$$\langle \tilde{N}_T \rangle = \int d^3 \vec{r} \tilde{n}_T(\vec{r}) = \int \frac{1}{\lambda_T^3} g_{\frac{3}{2}}(e^{\beta(\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2)}) = \frac{1}{\lambda_T^6} \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega} \right)^3 \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{3\beta\hbar\omega l}{2}}}{l^3} = \frac{1}{\lambda_T^6} \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega} \right)^3 g_3(e^{\frac{3\beta\hbar\omega}{2}}), \quad (29)$$

dove si è sostituito μ con il livello energetico fondamentale dell'oscillatore armonico in tre dimensioni $\frac{3}{2}\hbar\omega$. Tuttavia, se la temperatura non è troppo vicina allo zero assoluto o la pulsazione ω è abbastanza bassa, $z(\vec{r}) = e^{\frac{3\beta\hbar\omega}{2}} \rightarrow 1$, allora l'equazione (28) diventa:

$$\langle \tilde{N}_T \rangle = \frac{1}{\lambda_T^6} \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega} \right)^3 g_3(1). \quad (30)$$

Dall'equazione precedente si ricava che, per $T = T_c$, il numero medio di bosoni del gas è:

$$\langle \tilde{N} \rangle = \frac{1}{\lambda_{T_c}^6} \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega} \right)^3 g_3(1) \quad (31)$$

dall'equazione precedente si ricava che la temperatura critica di condensazione vale:

$$T_c = \frac{\hbar\omega}{k_B g_3(1)^{\frac{1}{3}}} \langle \tilde{N} \rangle^{\frac{1}{3}}. \quad (32)$$

Usando la relazione (30) e il fatto che $\langle \tilde{N} \rangle = \langle \tilde{N}_0 \rangle + \langle \tilde{N}_T \rangle$, si trova che la relazione tra la frazione media di condensato e la temperatura del gas, valida per $T \leq T_c$, è:

$$\frac{\langle \tilde{N}_0 \rangle}{\langle \tilde{N} \rangle} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (33)$$

2.3 Gas di bosoni interagenti

2.3.1 Interazioni in un gas degenere

Un gas di bosoni diluito e a basse temperature è un gas imperfetto, dove le particelle possono interagire fra di loro tramite un potenziale a raggio d'azione finito e tale che non possano costituirsi stati legati tra due o più bosoni. La diluitezza del sistema consente, tuttavia, di trattare l'interazione come una piccola perturbazione del gas ideale e di utilizzare l'approssimazione di campo medio. In questo paragrafo verrà introdotto il potenziale efficace di interazione tra due particelle di un gas condensato, a partire dalla funzione d'onda che ne descrive il moto relativo.

Il potenziale di interazione tra gli atomi del gas, spesso globalmente neutri, può essere dovuto alla presenza dei momenti di dipolo magnetico, che scalano come r^{-3} , e dalle interazioni di van der Waals, che sono riconducibili alla forma $-\frac{C_6}{r^6}$ [8]. Le prime sono caratterizzate da un'intensità abbastanza bassa da risultare trascurabili anche a lunga distanza rispetto alle seconde, nonostante l'esponente sembri favorirle. Considerando condensati di metalli alcalini, il coefficiente C_6 del potenziale di van der Waals è più alto per gli elementi aventi numero atomico più elevato [1] ed è utilizzabile nella definizione della lunghezza caratteristica di van der Waals $r_0 = \left(\frac{2m_r C_6}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{4}}$, dove m_r è la massa ridotta di un sistema di due particelle, che è pari a $\frac{m}{2}$, nel caso in cui le particelle che interagiscono sono identiche. La lunghezza appena introdotta è dell'ordine di circa $50 \div 100 \text{ \AA}$, mentre la spaziatrice media tra le particelle è tipicamente di $1000 \text{ \AA}$. Poiché in un gas degenere la spaziatrice tra le particelle è minore o uguale alla lunghezza d'onda termica di De Broglie, allora la lunghezza r_0 appena introdotta è molto minore di $\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$: in altre parole, ogni bosone si estende su una distanza molto maggiore del raggio di interazione del potenziale [6]. Inoltre si assume che l'intensità media del potenziale di interazione di cui risente ciascuna particella sia mediamente molto piccola e che la formula analitica dello stesso non sia molto importante, dal momento che ciascun bosone vede soltanto l'effetto medio del potenziale. Alle energie considerate, la diffusione di una particella non dipende dalla forma del potenziale (che può anche non avere simmetria sferica), ma dipende da una lunghezza ad esso associata, indicata con a_s e detta lunghezza di diffusione (*scattering length*).

Gli urti che si verificano nel gas a basse temperature sono generalmente *binari* (ovvero a due particelle) ed *elastici* [9], se si considera che il potenziale esterno sia pressoché costante nella regione in cui si manifesta l'interazione: le collisioni a tre o più corpi si verificano con probabilità progressivamente più bassa [3] e, quindi, si esclude la formazione di stati legati del potenziale attrattivo di van der Waals. Si consideri ora un sistema a due particelle identiche avente l'hamiltoniana seguente:

$$H(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = -\frac{\hbar^2}{2m} p_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m} p_2^2 + U(\vec{r}_1) + U(\vec{r}_2) + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \quad (34)$$

dove $p_i^2 = \vec{p}_i \cdot \vec{p}_i$ con $i = 1, 2$ e $U(\vec{r}_i)$ rappresenta un potenziale esterno mentre $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ è il potenziale di interazione e, per il momento, non vengono contemplati effetti dovuti all'indistinguibilità dei due bosoni. Se la somma dei due potenziali esterni è scomponibile in una parte dipendente dalle coordinate del centro di massa del sistema $\vec{R}$ e in una dipendente dalle coordinate relative $\vec{r}$ e $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, allora è conveniente utilizzare le coordinate del centro di massa e le coordinate relative, ottenendo:

$$H(\vec{R}, \vec{r}, \vec{P}, \vec{p}) = -\frac{\hbar^2}{4m} P^2 - \frac{\hbar^2}{m} p^2 + U_{ext}(\vec{R}) + V_{int}(\vec{r}), \quad (35)$$

dove $P^2 = \vec{P} \cdot \vec{P}$ e $p^2 = \vec{p} \cdot \vec{p}$, mentre $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ e $\vec{p} = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}$, mentre $U_{ext}(\vec{R})$ e $V_{int}(\vec{r})$ denotano rispettivamente il potenziale esterno, di cui risente il centro di massa del sistema, e il potenziale di

interazione, di cui risente una particella di massa pari alla massa ridotta del sistema (nel caso di particelle identiche la massa ridotta è $\mu = \frac{m}{2}$ e la massa complessiva è $M = 2m$). La funzione d'onda che descrive il sistema sarà, quindi, esprimibile come il prodotto tra un'autofunzione dell'hamiltoniana del moto relativo e un'autofunzione dell'hamiltoniana relativa al centro di massa. La funzione d'onda che rappresenta il moto relativo tra i due bosoni è data dalla somma di un'onda piana entrante, che avanza lungo z , e un'onda diffusa, che può essere considerata sferica ad elevate separazioni tra le particelle. Se il potenziale di interazione ha simmetria sferica, la funzione d'onda totale sarà indipendente dalla coordinata azimutale ϕ :

$$\Psi(\vec{r})_{r \rightarrow +\infty} \approx e^{ikz} + f(\theta_{rel}) \frac{e^{ikr}}{r} , \quad (36)$$

dove $e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta}$ rappresenta la funzione d'onda incidente, mentre $f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$ la funzione d'onda diffusa a grandi distanze dal centro di diffusione. Il fattore $f(\theta)$ è l'ampiezza dell'onda sferica diffusa rapportata all'ampiezza dell'onda incidente ed è detta *ampiezza di diffusione*, e dipende dalla forma funzionale del potenziale di interazione. L'ampiezza di diffusione $f(\theta)$ è legata alla sezione d'urto σ per unità di angolo solido tramite la relazione differenziale [8]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 , \quad (37)$$

dove $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi d(\cos \theta)$ rappresenta l'elemento di angolo solido. Dal momento che il potenziale di interazione $V_{int}(\vec{r})$ è a simmetria sferica, la generica soluzione dell'equazione di Schrödinger avrà simmetria assiale rispetto alla direzione della particella incidente e può essere espansa in termine dei polinomi di Legendre $P_l(\cos \theta)$ [8]:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l P_l(\cos \theta) R_{kl}(r) , \quad (38)$$

dove la parte radiale della funzione d'onda $R_{kl}(r)$ è soluzione della seguente equazione di Schrödinger stazionaria [10]:

$$\frac{d^2 R_{kl}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{kl}(r)}{dr} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{m}{\hbar^2} U_{int}(r) \right] R_{kl}(r) = 0 , \quad (39)$$

dove $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ è il modulo del momento angolare relativo tra i due bosoni e i coefficienti A_l presenti nello sviluppo riportato nella (38) sono funzioni dello sfasamento asintotico δ_l di $R_{kl}(r)$ a rispetto alla soluzione dell'Hamiltoniana di particella libera. Inoltre, nell'equazione di Schrödinger (39), l'autovalore dell'energia è stato scritto in termini del vettore d'onda $\vec{k}$, ottenendo la seguente espressione: $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$ la funzione radiale dipenderà dallo sfasamento asintotico secondo la relazione:

$$R_{kl}(r) \approx \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_l \right) , \quad (40)$$

dove δ_l rappresenta lo sfasamento, che varia a seconda del potenziale di interazione [10] e determina la sezione d'urto σ . L'onda piana incidente, che si propaga lungo l'asse z , può essere sviluppata anch'essa in polinomi di Legendre [10], ottenendo:

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{\pi}{2}l \right) P_l(\cos \theta) . \quad (41)$$

Sostituendo le espressioni (38) e (41) nell'equazione (36) si osserva che $A_l = i^l (2l+1) e^{i\delta_l}$ e che l'ampiezza di diffusione ha la forma:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) (e^{i2\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) . \quad (42)$$

La sezione d'urto totale è ottenibile integrando la sezione d'urto differenziale su tutti gli angoli solidi ed è data da:

$$\sigma = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) |f(\theta)|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) . \quad (43)$$

dove si è tenuto conto dell'ortogonalità tra polinomi di Legendre relativi a un diverso autovalore del momento angolare relativo: [10] $\int_{-1}^1 P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$. Per potenziali di interazione di van der Waals, che scalano come r^{-6} , per $l < \frac{3}{2}$ lo sfasamento asintotico δ_l dipende da k^{2l+1} per valori piccoli di k . Ne consegue che la sezione d'urto è dominata dal termine con $l = 0$, corrispondente alla diffusione di onda s , in cui l'ampiezza di diffusione è pari a:

$$f \approx \frac{\delta_0}{k} . \quad (44)$$

La parte radiale della funzione d'onda vale, quindi:

$$R_{k0} = \frac{1}{kr} (\sin kr \cos \delta_0 + \cos kr \sin \delta_0) . \quad (45)$$

A energie molto basse, lo sfasamento dipende soltanto dalla *lunghezza di diffusione di onda* s , indicata con a_s : $\delta_0 = -ka_s$. Ne consegue che la sezione d'urto e l'ampiezza di diffusione non dipendono dalle coordinate spaziali relative:

$$f \approx -a_s \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \delta_0^2 = 4\pi a_s^2 . \quad (46)$$

La funzione d'onda $\Psi(\vec{r})$, nei limite di basa energia (ovvero $k \rightarrow 0$) e a grandi distanze dal centro di diffusione, dipenderà dalla lunghezza di diffusione secondo la relazione:

$$\Psi(\vec{r})_{k \rightarrow 0, r \rightarrow +\infty} \approx 1 - \frac{f(\theta)}{r} \approx 1 - \frac{a_s}{r} . \quad (47)$$

A causa dell'indistinguibilità dei bosoni, è necessario utilizzare funzioni d'onda simmetrizzate per lo scambio tra le coordinate delle due particelle interagenti. Sotto tale trasformazione le coordinate relative cambiano segno ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$), ovvero $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$ e $\phi \rightarrow \pi + \phi$. Allora, in luogo della (36), si trova l'equazione d'onda:

$$\Psi(\vec{r}) = e^{ikz} + e^{-ikz} + [f(\theta) + f(\phi - \theta)] \frac{e^{ikr}}{r} . \quad (48)$$

L'ampiezza di diffusione è, dunque, la somma dell'ampiezza di diffusione della particella diffusa a un'angolo pari a θ e dell'ampiezza di diffusione corrispondente a un angolo $\pi - \theta$ rispetto all'asse z . Di conseguenza, la sezione d'urto differenziale assume la forma [10]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 . \quad (49)$$

A causa della simmetria della funzione d'onda, per evitare un doppio conteggio, l'integrazione necessaria per ottenere la sezione d'urto complessiva deve essere effettuata su metà dell'angolo solido di 4π , scegliendo ad esempio un intervallo di integrazione nella colatitudine $0 \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}$. Allora la sezione d'urto è pari al doppio di quella trovata con l'assunzione della distinguibilità dei due bosoni nella seconda delle relazioni (46):

$$\sigma = 8\pi a_s^2 . \quad (50)$$

Pur non conoscendo la forma funzionale esatta del potenziale di interazione tra due bosoni, è possibile cercarne uno che presenti lo stesso sfasamento e la stessa lunghezza di diffusione di quello originale e che dia origine a funzioni d'onda con un corretto comportamento asintotico a grandi distanze. Siccome il gas che si considera è diluito, gli atomi sono per la maggior parte del tempo molto distanti tra di loro: la spaziatrice media tra i bosoni è molto maggiore del raggio d'azione efficace del potenziale d'interazione, ovvero $a_s \ll \bar{n}^{-\frac{1}{3}}$ dove $\bar{n}$ è la densità media di particelle del gas. Bisogna, quindi, ricorrere a uno pseudopotenziale, che può avere la forma seguente:

$$V_{int}(\vec{r}) = g\delta^{(3)}(\vec{r}) . \quad (51)$$

Per adottare una descrizione di campo medio, è importante verificare che il potenziale dia risultati corretti all'approssimazione di Born, la quale consiste nel sostituire la funzione d'onda diffusa a grandi distanze dal centro di diffusione con un'onda piana entrante avente lo stesso vettore d'onda dell'onda incidente. A basse energie, ovvero per $k \rightarrow 0$, l'approssimazione di Born assume la forma [11]:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(\theta) \approx - \int \frac{m}{4\pi\hbar^2} V_{int}(\vec{r}) d^3\vec{r} \approx a_{Born} . \quad (52)$$

Se si sostituisce il potenziale (51) nella (52) e si pone $a_{Born} \approx a_s$ (approssimazione valida se $ka_s < 1$), allora il parametro da cui dipende il potenziale (51) diviene:

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s . \quad (53)$$

Il potenziale di interazione in un gas di bosoni diluito e a basse temperature diventa:

$$V_{int}(\vec{r}) = g\delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s \delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) , \quad (54)$$

dove a_s ha segno positivo se il potenziale interatomico è repulsivo o negativo se esso è attrattivo. I gas di ^{87}Rb , ^{23}Na e ^1H presentano potenziale efficace repulsivo con lunghezze di diffusione pari a rispettivamente 50 Å, 30 Å e 0,65 Å mentre sistemi costituiti da atomi di ^7Li presentano interazioni attrattive, con una lunghezza di diffusione pari a -14 Å.

¹Tipicamente , $\bar{n}|a|^3 < 10^{-3}$ [7, pag.12], come nei gas di ^{87}Rb , ^{23}Na e ^7Li impiegati negli esperimenti.

2.3.2 L'equazione di Gross-Pitaevskii

Il sistema *diluito* di bosoni interagenti descritto nel paragrafo precedente presenta un'hamiltoniana della forma seguente:

$$H = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\vec{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) , \quad (55)$$

dove $V(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ lo pseudopotenziale descritto presente nella (54).

Sia $\Psi = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ una funzione d'onda che descrive il sistema a N bosoni interagenti nello stato fondamentale, normalizzata all'unità:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int \Psi^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_N = 1 . \quad (56)$$

Nell'approssimazione di campo medio, la funzione d'onda complessiva si può scomporre in funzioni d'onda di singola particella $\phi(\vec{r}_i)$ con $i = 1, 2, \dots, N$, come nel caso non interagente (14):

$$\Psi = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(\vec{r}_i) . \quad (57)$$

Ponendo ora il funzionale energia $E[\Psi] = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$, l'energia dello stato fondamentale del sistema può essere calcolata con il metodo variazionale, utilizzando il potenziale chimico μ come moltiplicatore di Lagrange relativo al numero di particelle N , che si considera fissato, così come μ . L'espressione da minimizzare diventa, quindi, la seguente:

$$E_\mu[\Psi] = \langle \Psi | H - \mu N | \Psi \rangle = \int \prod_{i=1}^N \phi^*(\vec{r}_i) \left[\sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\vec{r}_i) \right) - \mu N + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right] \prod_{i=1}^N \phi(\vec{r}_i) d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_N . \quad (58)$$

Tenendo conto del fatto che le funzioni d'onda di singola particella $\phi(\vec{r}_i)$ sono a loro volta normalizzate, il funzionale energia prende la forma:

$$E_\mu[\Psi] = \sum_{i=1}^N \int \phi^*(\vec{r}_i) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\vec{r}_i) - N\mu \right] \phi(\vec{r}_i) d^3\vec{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left[\int \phi^*(\vec{r}_i) \phi^*(\vec{r}_j) V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \phi(\vec{r}_i) \phi(\vec{r}_j) d^3\vec{r}_i d^3\vec{r}_j \right] . \quad (59)$$

Considerando che i bosoni del sistema si trovano nello stesso stato quantico di singola particella, l'equazione precedente può essere riscritta come:

$$E_\mu[\phi] = N \int \phi^*(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) - N\mu \right] \phi(\vec{r}) d^3\vec{r} + \frac{1}{2} N(N-1) \left[\int \phi^*(\vec{r}) \phi^*(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \phi(\vec{r}) \phi(\vec{r}') d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \right] . \quad (60)$$

Sostituendo nell'equazione precedente (60) il potenziale di interazione fra i bosoni del gas (54), si ottiene l'espressione dell'energia da minimizzare:

$$E_\mu[\phi] = N \int \phi^*(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) - N\mu \right] \phi(\vec{r}) d^3\vec{r} + \frac{1}{2} N(N-1) \left[\int |\phi(\vec{r})|^2 g |\phi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} \right] . \quad (61)$$

Ora, derivando l'espressione precedente rispetto a $\phi^*(\vec{r})$ e minimizzando rispetto a $E_\mu[\phi]$, si trova:

$$N \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) - N\mu \right] \phi(\vec{r}) d^3\vec{r} + N(N-1) \left[\int \phi(\vec{r}) g |\phi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} \right] = 0 . \quad (62)$$

Dall'equazione precedente si ottiene l'equazione di Gross-Pitaevskii stazionaria:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + (N-1)g |\phi(\vec{r})|^2 \right] \phi(\vec{r}) = N\mu \phi(\vec{r}) . \quad (63)$$

Nell'ipotesi che $N \gg 1$ e normalizzando la funzione d'onda macroscopica al numero totale di particelle N , si può introdurre il *parametro d'ordine* del sistema $\psi(\vec{r}) = \sqrt{N} \phi(\vec{r})$, riscrivendo la (63) nel modo seguente:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + g |\psi(\vec{r})|^2 \right] \psi(\vec{r}) = \tilde{\mu} \psi(\vec{r}) , \quad (64)$$

dove si è posto $\tilde{\mu} = N\mu$, che rappresenta il potenziale chimico complessivo del sistema.

Per trovare l'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo, si può applicare il principio di minima azione al funzionale $\mathcal{S}[\Psi]$:

$$\mathcal{S}[\Psi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3\vec{r}_1, d^3\vec{r}_2, \dots, d^3\vec{r}_N \mathcal{L}(\Psi, \Psi^*, \dot{\Psi}, \dot{\Psi}^*, \nabla\Psi, \nabla\Psi^*), \quad (65)$$

dove $\dot{\Psi} = \frac{\partial\Psi}{\partial t}$ e $\mathcal{L}(\Psi, \Psi^*, \dot{\Psi}, \dot{\Psi}^*, \nabla\Psi, \nabla\Psi^*)$ è una densità di lagrangiana ed ha le dimensioni di un'energia per unità di volume e dove si assume che Ψ sia nulla alla frontiera del volume di integrazione e che le sue variazioni infinitesime soddisfino la relazione $\delta\Psi(t_1, \vec{r}) = \delta\Psi(t_2, \vec{r})$ per ogni valore di $\vec{r}$. Per soddisfare le condizioni di minimo di $\mathcal{S}[\Psi]$, la densità di lagrangiana dovrà soddisfare le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}^*} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^*} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{x_i}\Psi^*} + \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{y_i}\Psi^*} + \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{z_i}\Psi^*} \right), \quad (66)$$

dove $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_{y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$ e $\partial_{z_i} = \frac{\partial}{\partial z_i}$. Una buona scelta per la lagrangiana di un gas di N bosoni è:

$$\mathcal{L}(\Psi, \Psi^*, \dot{\Psi}, \dot{\Psi}^*, \nabla\Psi, \nabla\Psi^*) = i\frac{\hbar}{2} [\Psi^* \dot{\Psi} - \dot{\Psi}^* \Psi] - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \nabla_{\vec{r}_i} \Psi^* \cdot \nabla_{\vec{r}_i} \Psi - \sum_{i=1}^N \Psi^* U(\vec{r}_i, t) \Psi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \Psi^* V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \Psi, \quad (67)$$

dove $\Psi = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \prod_{i=1}^N \phi(\vec{r}_i, t)$ e quindi $\dot{\Psi}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \sum_{i=1}^N \left(\dot{\phi}(\vec{r}_i, t) \prod_{k \neq i}^N \phi(\vec{r}_k, t) \right)$, mentre $U(\vec{r}_i, t)$ rappresenta il potenziale esterno, eventualmente dipendente dal tempo. Assumendo che $V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = g\delta^{(3)}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ e che i bosoni si trovino tutti nello stesso stato quantico $\phi(\vec{r})$, si trova che l'azione da minimizzare diventa:

$$\mathcal{S}[\phi] = N \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\vec{r} \left\{ i\frac{\hbar}{2} \left[\phi^*(\vec{r}, t) \frac{\partial\phi(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{\partial\phi^*(\vec{r}, t)}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) \right] - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\phi^*(\vec{r}, t) \cdot \nabla\phi(\vec{r}, t) - U(\vec{r}, t) |\phi(\vec{r}, t)|^2 - \frac{1}{2} (N-1) g |\phi(\vec{r}, t)|^4 \right\}. \quad (68)$$

La densità di lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \dot{\phi}, \dot{\phi}^*, \nabla\phi, \nabla\phi^*)$ diviene, quindi, la seguente:

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \dot{\phi}, \dot{\phi}^*, \nabla\phi, \nabla\phi^*) = N \left\{ i\frac{\hbar}{2} \left[\phi^*(\vec{r}, t) \frac{\partial\phi(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{\partial\phi^*(\vec{r}, t)}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) \right] - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\phi^*(\vec{r}, t) \cdot \nabla\phi(\vec{r}, t) - U(\vec{r}, t) |\phi(\vec{r}, t)|^2 - \frac{1}{2} (N-1) g |\phi(\vec{r}, t)|^4 \right\}. \quad (69)$$

Applicando a $\mathcal{S}[\phi]$ il principio di minima azione, si trova che $\mathcal{L}$ deve soddisfare le seguenti equazioni di Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^*} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_x\phi^*} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_y\phi^*} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_z\phi^*} \right). \quad (70)$$

A partire dalla precedente equazione, si trova l'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo:

$$i\hbar \frac{\partial\phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) + (N-1) g |\phi(\vec{r}, t)|^2 \phi(\vec{r}, t). \quad (71)$$

Nel caso in cui $N \gg 1$ e adoperando il parametro d'ordine del sistema di bosoni $\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{N} \phi(\vec{r}, t)$, la precedente equazione può essere riscritta nella forma seguente:

$$i\hbar \frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) + g |\psi(\vec{r}, t)|^2 \psi(\vec{r}, t). \quad (72)$$

3 Gas di bosoni confinati

3.1 Gas di bosoni con confinamento armonico trasverso

Un gas diluito di bosoni debolmente interagenti può giungere a condensazione soltanto al di sotto di determinati valori della temperatura e della densità (tipicamente $T_c \approx 10 \text{ nK} \div 1 \mu\text{K}$ e $\rho_c \approx 10^{17} \div 10^{21} \text{ m}^{-3}$) [9], grazie a opportune tecniche di raffreddamento e di confinamento.

Negli esperimenti più recenti, il gas di bosoni viene previamente raffreddato fino a una temperatura di circa

10 μK con un laser [12] e in seguito racchiuso all'interno di una trappola magnetica, grazie alla quale è possibile ridurre la temperatura fino a qualche centinaio di nK (nell'esperimento di Cornell e Wieman, $T_c \approx 270 \text{ nK}$ e $\rho_c \approx 2,5 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$ [13] con la tecnica del *raffreddamento evaporativo*. Tale metodo di raffreddamento si fonda sul fatto che nelle collisioni che si verificano tra i bosoni del gas, le particelle uscenti possono avere energia diversa tra di loro e, in particolare, quella più energetica ha più probabilità di sfuggire dalla trappola magnetica. Modellando opportunamente la forma del potenziale di confinamento, è possibile permettere a tali particelle di 'evaporare', lasciando all'interno della trappola quelle a energia più bassa, che termalizzano il gas attraverso le collisioni: l'effetto netto di questo processo è quello di abbassare la temperatura del sistema (vedi *Figura 2*). I metodi di confinamento ottico e magnetico si basano sulle interazioni tra gli atomi del gas e, rispettivamente, il campo elettrico e quello magnetico generati da una sorgente esterna.

Nell'intrappolamento magnetico, il campo magnetico utilizzato presenta delle disuniformità, tali che gli atomi aventi momento di dipolo magnetico parallelo alla direzione del campo si muovono verso le regioni di campo più intenso, mentre gli atomi con momento di dipolo magnetico antiparallelo si dirigono verso regioni di campo meno intenso[?]. Poiché per il teorema di S. Earnshaw non è possibile realizzare un campo magnetico statico il cui modulo ammetta un massimo locale in una regione priva di sorgenti esterne [9], il confinamento di atomi con momento di dipolo magnetico parallelo al campo non è permesso.

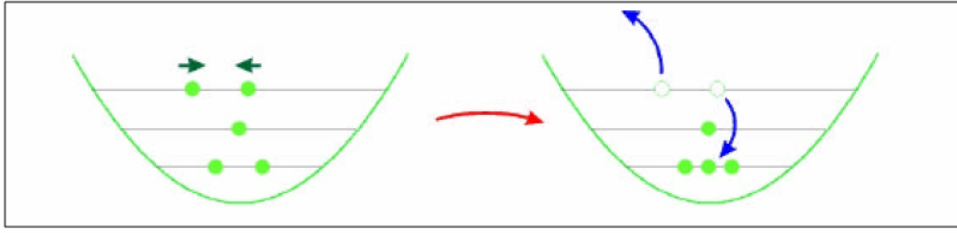


Figura 2: In figura viene illustrato il principio alla base del raffreddamento evaporativo: due atomi aventi la stessa energia iniziale collidono e vengono diffusi in due diversi stati quantici: se la particella più energetica viene fatta 'evaporare', le particelle rimaste avranno in media un'energia più bassa di quella iniziale.

Se il potenziale $V(\vec{r}, t)$ con cui è confinato il gas è decomponibile in una parte armonica ed isotropa generata nel piano *trasverso* (y, z) e in una parte *assiale* lungo la direzione x e dipendente, eventualmente, dal tempo t , allora:

$$U(\vec{r}) = W(y, z) + V(x, t) = \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2) + V(x, t), \quad (73)$$

dove m è la massa di un atomo del gas e $\omega_{\perp}$ è la pulsazione dell'oscillatore armonico bidimensionale e isotropo.

Il parametro d'ordine del sistema è, quindi, scomponibile in due funzioni d'onda: quella dipendente da y e z è autofunzione dell'oscillatore armonico bidimensionale di potenziale $W(y, z)$ normalizzata all'unità, mentre quella dipendente da x e da t è normalizzata a N , il numero di particelle del gas di bosoni. Definendo la lunghezza di intrappolamento trasverso $a_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\perp}}}$, se il confinamento sul piano (x, y) è molto intenso, ovvero $\left(\frac{g}{2\pi a_{\perp}^2}\right) |f(x, t)|^2 \ll 2\hbar\omega_{\perp}$ (ovvero, usando la (53) $a_s |f(x, t)|^2 \ll 1$ [16]), allora si può scegliere la funzione d'onda $W(y, z)$ come l'autofunzione dell'oscillatore armonico bidimensionale relativa al livello energetico fondamentale, indicata con $\phi_0(y, z)$. Il parametro d'ordine del sistema assume, dunque, la forma [17]:

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi_0(y, z) f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_{\perp}} e^{-\frac{(y^2+z^2)}{2a_{\perp}^2}} f(x, t), \quad (74)$$

dove le funzioni d'onda $\phi_0(y, z)$ e $f(x, t)$ soddisfano le relazioni di normalizzazione: $\int \int \phi_0^*(y, z) \phi_0(y, z) dy dz = 1$ e $\int_{t_1}^{t_2} \int f^*(x, t) f(x, t) dx dt = N$. Sostituendo la funzione d'onda $\phi(\vec{r}, t)$ presente nell'equazione (68) con il parametro d'ordine $\psi(\vec{r}, t)$, per $N \gg 1$ si ottiene il seguente funzionale da minimizzare:

$$\mathcal{S}[\psi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\vec{r} \left\{ i \frac{\hbar}{2} \left[\psi^*(\vec{r}, t) \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*(\vec{r}, t)}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \right] - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^*(\vec{r}, t) \cdot \nabla \psi(\vec{r}, t) - U(\vec{r}, t) |\psi(\vec{r}, t)|^2 - \frac{1}{2} g |\psi(\vec{r}, t)|^4 \right\}. \quad (75)$$

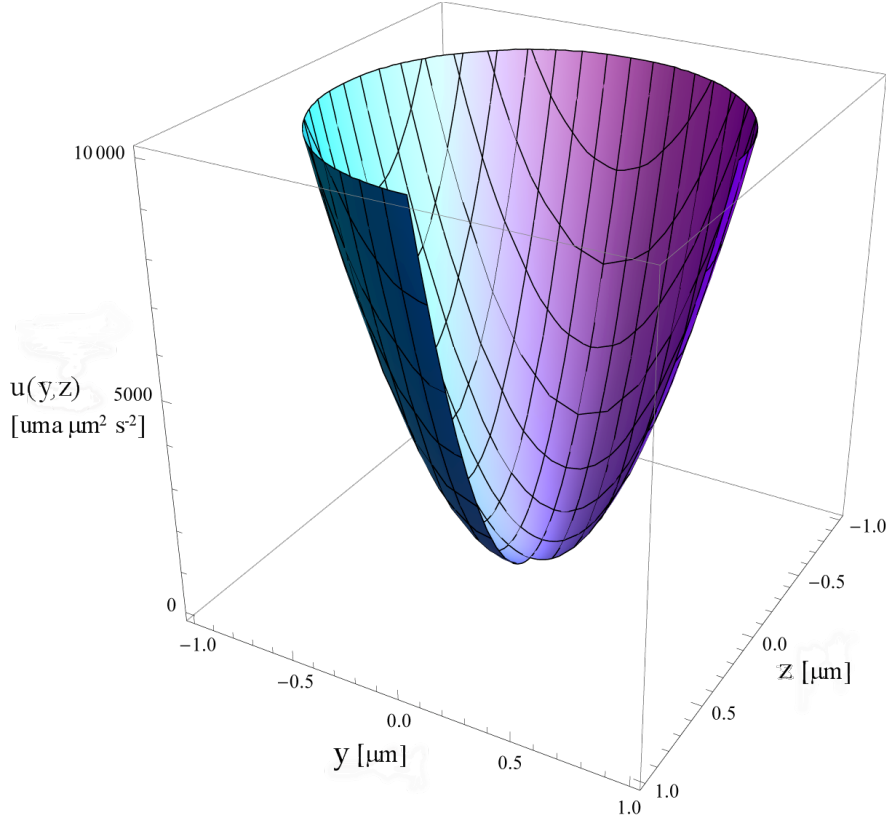


Figura 3: Nell'area grafica è rappresentato un potenziale della forma (76) con i parametri utilizzati nell'eperimento di Cornell e Wieman con condensati di ^{87}Rb : $m = 87,098016 \text{ u}$ e $\omega_{\perp} = 17.68 \text{ rad/s}$ [15, pag. 3]. La posizione lungo l'asse delle ascisse è espressa in unità di μm , mentre l'energia potenziale è espressa in unità di $\frac{u (\mu\text{m})^2}{\text{s}^2}$, dove $1 \text{ u} \approx 1,660538921 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Integrando la precedente equazione sul piano (y, z) e tenendo conto delle relazioni di normalizzazioni delle funzioni d'onda $\phi_0(y, z)$ e $f(y, z)$, il funzionale da minimizzare si riduce a:

$$\mathcal{S}[f] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \left\{ \frac{i\hbar}{2} \left(f^*(x, t) \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial f^*(x, t)}{\partial t} f(x, t) \right) - \hbar\omega_{\perp} f^*(x, t) f(x, t) - \frac{m\omega g}{4\pi\hbar} (f(x, t))^2 (f^*(x, t))^2 + \right. \\ \left. - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial f^*(x, t)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right) - f^*(x, t) f(x, t) V(x, t) \right\}. \quad (76)$$

Minimizzando il funzionale $\mathcal{S}[f]$ rispetto alla funzione d'onda $f^*(x, t)$ si trova l'equazione:

$$i\hbar \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) + \hbar\omega_{\perp} + \frac{g}{2\pi a_{\perp}^2} |f(x, t)|^2 \right) f(x, t), \quad (77)$$

dove $a_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\perp}}}$ e il terzo termine a secondo membro può essere trascurato, dal momento che il potenziale del sistema è definito a meno di una costante indipendente dal tempo. In questo modo di è ottenuto un'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo in una sola dimensione.

3.1.1 Confinamento mediante potenziale a doppia buca: approssimazione a due modi

Il confinamento longitudinale a doppia buca di un condensato di Bose-Einstein viene realizzato al fine di studiare fenomeni quantistici riconducibili alla coerenza spaziale, analoghi all'effetto *Josephson* in corrente continua o alternata che si verifica nei superconduttori [4]. Tale potenziale viene generalmente modellato utilizzando trappole magnetiche, che danno origine al potenziale armonico trasverso e longitudinale, e fasci laser, che possono dare luogo a un potenziale con andamento gaussiano. Un generico potenziale di confinamento longitudinale a doppia buca e dipendente dal tempo è il seguente [15]:

$$V(x, t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + V_0 e^{-\frac{(x-l(t))^2}{\lambda^2}}, \quad (78)$$

dove ω_0 è la frequenza di oscillazione del potenziale longitudinale armonico, mentre $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ rappresenta la dispersione del potenziale gaussiano che costituisce una barriera di altezza finita tra le due buche. La grandezza $l(t)$ denota, invece, la posizione del picco della gaussiana e determina l'asimmetria del potenziale longitudinale a doppia buca. Una possibilità di modellare un potenziale a doppia buca simmetrico è data dalla combinazione di due potenziali di Pöschl-Teller, che permette di risolvere in maniera analitica l'equazione di Schrödinger stazionaria di singola particella relativa a un condensato di bosoni non interagenti. A differenza di quello illustrato nella (78), tale potenziale presenta 'pareti esterne' di altezza finita, pari a $\hbar\omega$, e ha espressione [17, pag.4]:

$$V(x) = -\frac{\hbar\omega}{[1 + \text{sech}^2(\frac{2x_0}{a})]} \left(\text{sech}^2\left(\frac{x+x_0}{a}\right) + \text{sech}^2\left(\frac{x-x_0}{a}\right) \right), \quad (79)$$

dove il parametro a fissa l'altezza della buca, mentre $2x_0$ definisce la distanza fra due punti di minimo assoluto del potenziale.

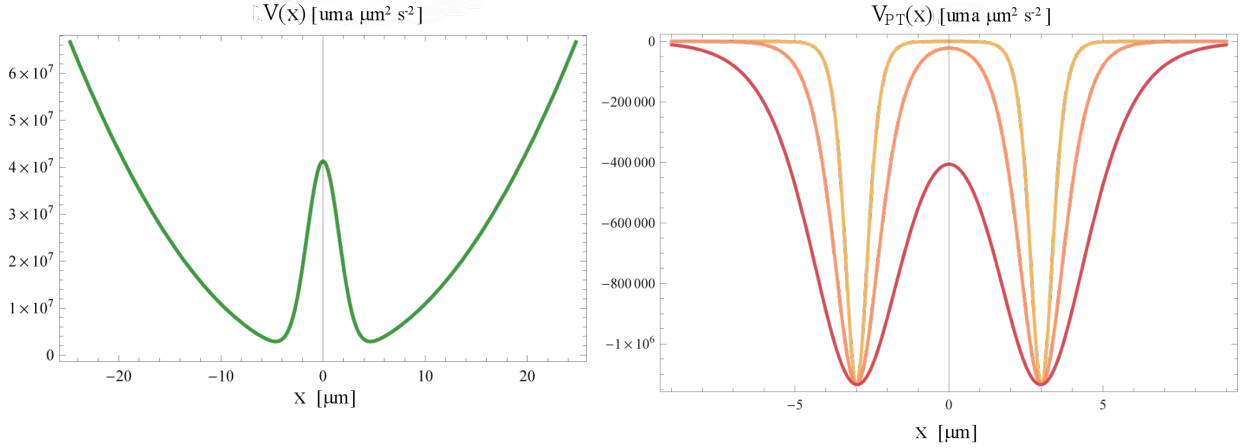


Figura 4: Potenziali a doppia buca a confronto. Nell'area grafica a sinistra sono confrontati tre potenziali di Pöschl-Teller della forma descritta dalla (79), in cui si è posto $x_0 = 3 \mu m$, facendo variare il parametro a : la curva in rosso rappresenta il potenziale con parametro $a = 2 \mu m$, la curva in arancio presenta $a = 1 \mu m$ e quella in giallo presenta $a = 0.5 \mu m$. Nell'area grafica a destra è rappresentato un potenziale della forma (76) con i parametri utilizzati nell'esperimento di Cornell e Wieman con condensati di ^{87}Rb : $m = 87,098016 u$, $\omega_0 = 50 \text{ rad/s}$, $\frac{V_0}{\hbar} = 6500.15 \text{ cm s}^{-1}$, $l(t) = 0$, $\frac{\lambda}{\sqrt{2}} = 3,5 \mu m$ [15]. La posizione lungo l'asse delle ascisse è espressa in unità di μm , mentre l'energia potenziale è espressa in unità di $\frac{u (\mu m)^2}{s^2}$, dove $1 u \approx 1,660538921 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Nella trattazione che segue verrà utilizzato un potenziale della forma indicata nella (78), ma con $l(t) = 0$, e quindi simmetrico rispetto all'origine e indipendente dal tempo. Inserendo tale potenziale nell'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo (72) e trascurando la costante additiva dell'energia dovuta al potenziale armonico trasverso, si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + V_0 e^{-\frac{x^2}{\lambda^2}} + \Lambda |f(x,t)|^2 \right) f(x,t), \quad (80)$$

dove $\Lambda = \frac{g}{2\pi a_\perp^2}$.

Se la barriera tra le due buche fosse impenetrabile, vi sarebbero livelli energetici corrispondenti al moto della particella nell'una o nell'altra buca, uguali per ciascuna buca. Il fatto che il passaggio attraverso la barriera sia possibile comporta una separazione di ciascuno di tali livelli energetici in due livelli molto vicini, al limite degeneri, corrispondenti a stati in cui la particella si muove simultaneamente in entrambe le buche [18]. Indicando con Φ_0 e Φ_1 rispettivamente i due autostati relativi ai due autovalori di energia più bassa ϵ_0 ed ϵ_1 dell'hamiltoniana non interagente $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + V_0 e^{-\frac{x^2}{\lambda^2}}$, è possibile definire due funzioni d'onda $\phi_L(x)$ e $\phi_R(x)$ localizzate in ciascuna delle due buche come combinazioni lineari delle autofunzioni sopracitate:

$$\begin{cases} \phi_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_0(x) - \Phi_1(x)) \\ \phi_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_0(x) + \Phi_1(x)) \end{cases}, \quad (81)$$

dove $\phi_L(x)$ e $\phi_R(x)$ rappresentano rispettivamente le funzioni d'onda localizzate nella buca di sinistra e in quella di destra, che soddisfano la relazione di ortonormalità: $\int \phi_i^*(x) \phi_j(x) = \delta_{ij}$ con $i, j = L, R$. Al fine di ottenere

le equazioni che descrivono le oscillazioni dinamiche dei condensati debolmente interagenti, è possibile servirsi dell'approssimazione a due modi [19], scrivendo l'autofunzione dell'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo come combinazione lineare delle due funzioni d'onda localizzate introdotte in precedenza:

$$f(x, t) = f_L(t)\phi_L(x) + f_R(t)\phi_R(x), \quad (82)$$

dove i coefficienti di sovrapposizione delle due funzioni d'onda soddisfano la condizione di normalizzazione a N imposta dalla definizione di parametro d'ordine di un sistema condensato. L'approssimazione utilizzata nella costruzione della funzione d'onda (82) è valida se si considera che la densità di condensato nella regione di tunneling sia bassa e che l'interazione di van der Waals sia ivi trascurabile, quindi la sovrapposizione tra le due funzioni d'onda viene preservata. Inoltre si suppone che il numero di particelle sia molto elevato ($N \gg 1$) e che le interazioni tra di esse siano abbastanza deboli da applicare l'approssimazione di campo medio [20]. I coefficienti introdotti nell'approssimazione a due modi possono essere espressi in termini del numero di bosoni presenti nella buca di sinistra e in quello di destra, indicati rispettivamente con $N_L(t)$ e $N_R(t)$:

$$\begin{cases} f_L(t) = \sqrt{N_L(t)}e^{i\theta_L(t)} \\ f_R(t) = \sqrt{N_R(t)}e^{i\theta_R(t)}, \end{cases} \quad (83)$$

dove $\theta_i(t)$ rappresentano le fasi associate a ciascuna funzione d'onda macroscopica localizzata e i coefficienti sopracitati soddisfano la relazione $|f_L(t)|^2 + |f_R(t)|^2 = N$. Per trovare le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione temporale della quantità di condensato presente in ciascuna buca, è utile introdurre le variabili coniugate di sbilanciamento frazionario di popolazione z e di fase relativa tra le due funzioni d'onda localizzate ϕ , definite come segue:

$$\begin{cases} z(t) = \frac{N_L(t) - N_R(t)}{N} \\ \phi(t) = \theta_R(t) - \theta_L(t), \end{cases} \quad (84)$$

dove $z(t)$ rappresenta lo squilibrio tra la popolazione bosonica della buca di sinistra e quella della buca di destra, mentre $\phi(t)$ rappresenta la differenza di fase le funzioni d'onda relative alle due buche. Moltiplicando scalarmente a sinistra per la funzione d'onda $\phi_L(x)$ l'equazione di Gross-Pitaevskii con il potenziale a doppia buca simmetrica unidimensionale, si ottiene:

$$\begin{aligned} i\hbar \int \phi_L^*(x) \left(\dot{f}_L(t)\phi_L(x) + \dot{f}_R(t)\phi_R(x) \right) dx &= \int \phi_L^*(x) H_0 (f_L(t)\phi_L(x) + f_R(t)\phi_R(x)) dx + \\ &+ \Lambda \int \phi_L^*(x) (|f_L(t)|^2\phi_L^2(x) + |f_R(t)|^2\phi_R^2(x) + f_L^*(t)f_R(t)\phi_L^*(x)\phi_R(x) + f_R^*(t)f_L(t)\phi_R^*(x)\phi_L(x)) \cdot \\ &\cdot (f_L(t)\phi_L(x) + f_R(t)\phi_R(x)) dx, \end{aligned} \quad (85)$$

dove $\dot{f}_L(t) = \frac{\partial f_L(t)}{\partial t}$ e $\dot{f}_R(t) = \frac{\partial f_R(t)}{\partial t}$ e le funzioni d'onda $\phi_L(x)$ e $\phi_R(x)$ sono considerate reali, in analogia a quelle dell'oscillatore armonico. Moltiplicando scalarmente a sinistra per la funzione d'onda $\phi_R(x)$ relativa ai bosoni localizzati nella buca di destra ambo i membri dell'equazione di Goss-Pitaevskii dipendente dal tempo (78), si ottiene un'equazione analoga alla precedente:

$$\begin{aligned} i\hbar \int \phi_R^*(x) \left(\dot{f}_L(t)\phi_L(x) + \dot{f}_R(t)\phi_R(x) \right) dx &= \int \phi_R^*(x) H_0 (f_L(t)\phi_L(x) + f_R(t)\phi_R(x)) dx + \\ &+ \Lambda \int \phi_R^*(x) (|f_L(t)|^2\phi_L^2(x) + |f_R(t)|^2\phi_R^2(x) + f_L^*(t)f_R(t)\phi_L^*(x)\phi_R(x) + f_R^*(t)f_L(t)\phi_R^*(x)\phi_L(x)) \cdot \\ &\cdot (f_L(t)\phi_L(x) + f_R(t)\phi_R(x)) dx. \end{aligned} \quad (86)$$

Nelle equazioni (85) e (86) è possibile individuare i termini di energia media $\bar{\epsilon}_L = \int \phi_L^*(x) H_0 \phi_L(x) dx$ ed $\bar{\epsilon}_R = \int \phi_R^*(x) H_0 \phi_R(x) dx$, che rappresentano le energie medie dei rispettivi stati localizzati e, data la simmetria del potenziale utilizzato, coincidono ($\bar{\epsilon}_L = \bar{\epsilon}_R = \bar{\epsilon}$). Inoltre, si rintracciano i termini di tunneling, indicati con $K_{LR} = -\int \phi_L^*(x) H_0 \phi_R(x) dx$ e $K_{RL} = -\int \phi_R^*(x) H_0 \phi_L(x) dx$, che si equivalgono a causa della simmetria dell'operatore hamiltoniano H_0 . Nelle equazioni sopracitate sono presenti anche due termini dovuti all'interazione tra i bosoni del condensato [5] nella stessa buca, definiti come $\gamma_L = \Lambda \int |\phi_L(x)|^4 dx = \Lambda \int \phi_L^4(x) dx$ e $\gamma_R = \Lambda \int \phi_R^4(x) dx$ e tali che $\gamma_L = \gamma_R = \gamma$ nel caso di un potenziale a doppia buca simmetrica.

Dal momento che la sovrapposizione tra le due funzioni d'onda $\phi_L(x)$ e $\phi_R(x)$ localizzate nelle rispettive buche si considera nulla, gli integrali del tipo $\int \phi_L^m(x) \phi_R^n(x)$ con $m = 1, 2, 3$ e $n = 1, 2, 3$ ed $m + n = 4$ vengono trascurati rispetto a quelli di *tunneling* tra le due buche e di *interazione* nella stessa buca. Alla luce di queste considerazioni, si ottengono due equazioni della forma:

$$\begin{cases} i\hbar \dot{f}_L(t) = f_L(t)\bar{\epsilon}_L - f_R(t)K_{LR} + f_L|f_L|^2\gamma_L \\ i\hbar \dot{f}_R(t) = f_R(t)\bar{\epsilon}_L - f_L(t)K_{LR} + f_R|f_R|^2\gamma_R. \end{cases} \quad (87)$$

Tenendo conto delle relazioni (83), dalle equazioni sopracitate si ricavano le equazioni relative alla fase e al numero di particelle corrispondenti a ciascuna buca, ottenendo per le variabili $N_L(t)$ e $N_R(t)$:

$$\begin{cases} \dot{N}_L = -\frac{2K_{LR}}{\hbar} \sqrt{N_L N_R} \sin(\theta_R - \theta_L) \\ \dot{N}_R = -\frac{2K_{RL}}{\hbar} \sqrt{N_L N_R} \sin(\theta_L - \theta_R) . \end{cases} \quad (88)$$

Dalle equazioni per $N_L(t)$ e $N_R(t)$ si ricava l'equazione differenziale relativa allo sbilanciamento frazionario di popolazione bosonica $z(t)$:

$$\dot{z} = -\frac{2K}{\hbar} \sqrt{1-z^2} \sin \phi , \quad (89)$$

dove si è serviti della relazione tra le energie di *tunneling* $K_{LR} = K_{RL} \equiv K$. Inoltre, per le variabili di fase θ_L e θ_R dalla (83) si ricavano le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_L = -\frac{\bar{\epsilon}}{\hbar} + \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{N_R}{N_L}} \cos(\theta_R - \theta_L) - \frac{\gamma\Lambda}{\hbar} N_L \\ \dot{\theta}_R = -\frac{\bar{\epsilon}}{\hbar} + \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{N_L}{N_R}} \cos(\theta_R - \theta_L) - \frac{\gamma\Lambda}{\hbar} N_R , \end{cases} \quad (90)$$

dove, dal momento che il potenziale è una funzione pari della coordinata z , si è posto $\bar{\epsilon}_L = \bar{\epsilon}_R \equiv \bar{\epsilon}$. Dalle equazioni per $\theta_L(t)$ e $\theta_R(t)$ si ricava l'equazione differenziale corrispondente allo sfasamento relativo tra i parametri d'ordine di ciascuna buca $\phi(t)$:

$$\dot{\phi} = \frac{2K}{\hbar} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cos \phi + \frac{\Lambda N \gamma}{\hbar} , \quad (91)$$

dove i parametri Λ e K determinano i diversi regimi dinamici dell'oscillazione dei condensati di Bose-Einstein. Si noti che le equazioni differenziali (89) e (91) si ricavano dalla seguente Hamiltoniana [21]:

$$H(z, \phi) = \frac{2k}{\hbar} \sqrt{1-z^2} \cos \phi + \frac{\Lambda N \gamma}{2\hbar} z^2 , \quad (92)$$

mediante le seguenti equazioni canoniche del moto:

$$\dot{z} = -\frac{\partial H(z, \phi)}{\partial \phi} \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H(z, \phi)}{\partial z} , \quad (93)$$

dove z e ϕ rappresentano le variabili canonicamente coniugate. L'hamiltoniana trovata è analoga a quella di un pendolo non-rigido con angolo di sospensione ϕ e lunghezza proporzionale a $\sqrt{1-z^2}$, che decresce con il momento angolare z . La corrente generata dal tunnelling bosonico I [5] è data da:

$$I = -\dot{z} \frac{N}{2} = I_0 \sqrt{1-z^2} \sin \phi , \quad (94)$$

dove si è posto $I_0 = \frac{KN}{\hbar}$.

3.1.2 Confinamento mediante potenziale a tripla buca: approssimazione a tre modi

Si consideri ora un condensato di bosoni confinato grazie a un potenziale assiale a tripla buca lungo l'asse x , e da un potenziale armonico isotropo generato nel piano (x, y) , avente pulsazione $\omega_\perp$. Il primo viene riprodotto viene riprodotto adoperando tre fasci laser a profilo gaussiano, che danno origine a tre buche di potenziale [22]: la buca centrale presenta un minimo in $x = 0$, e le due buche laterali che presentano minimi in $x = -l$ e in $x = l$. Il potenziale di confinamento assume, dunque, la forma seguente:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} m \omega_\perp (x^2 + y^2) - V_0 \sum_{s=0, \pm 1} \exp \left(-\frac{2(x - s \cdot l)^2}{w^2} \right) , \quad (95)$$

dove il parametro V_0 denota la profondità delle buche, l indica la posizione di ciascuna buca lungo l'asse x e $\frac{w}{2}$ definisce la semilarghezza delle stesse. Il potenziale a tripla buca scelto dovrà essere sufficientemente intenso rispetto all'energia di interazione tra i bosoni intrappolati, ma meno intenso rispetto al potenziale di confinamento armonico nel piano (x, y) . Inoltre, la larghezza w deve essere abbastanza piccola rispetto a l in modo da risolvere ciascuna buca e la profondità V_0 deve essere sufficientemente ridotta da giustificare un tasso di trasferimento non nullo di bosoni tra le buche contigue.

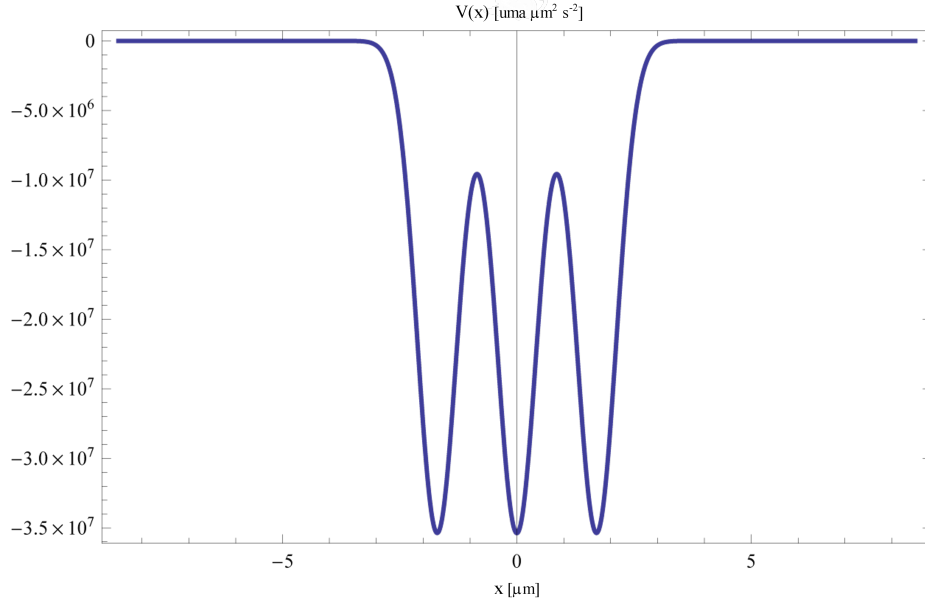


Figura 5: Il potenziale a tripla buca in figura, descritto dal secondo termine a secondo membro della (92), presenta un parametro di semilarghezza $w = 0.85 \mu m$, una distanza tra i minimi $l = 1,7 \mu m$ e una profondità $V_0 = 3,535 \cdot 10^7 \frac{uma (\mu m)^2}{s^2}$ [22], mentre l'energia potenziale è misurata in unità di $\frac{uma (\mu m)^2}{s^2}$.

L'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo (72), in presenza di un potenziale esterno siffatto diventa:

$$i\hbar \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_0 \sum_{s=0, \pm 1} \exp\left(-\frac{2(x-s \cdot l)^2}{w^2}\right) + \Lambda |f(x, t)|^2 \right) f(x, t), \quad (96)$$

dove $\Lambda = \frac{g}{2\pi a_\perp^2}$ e la costante additiva $\hbar\omega_\perp$, dovuta alla presenza del potenziale armonico trasverso, è stata ignorata.

In analogia con il caso del potenziale a doppia buca, a partire dalle tre autofunzioni associate ai primi tre livelli energetici del problema agli autovalori di singolo bosone soggetto al potenziale esterno presente nell'equazione (95):

$$H_0 \Phi_i(x) = \epsilon_i \Phi_i(x) \quad \text{dove} \quad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_0 \sum_{s=0, \pm 1} \exp\left(-\frac{2(x-s \cdot l)^2}{w^2}\right), \quad (97)$$

e $i = 0, 1, 2$ e $\epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, è possibile costruire tre funzioni d'onda di singola particella, ϕ_L , ϕ_C e ϕ_R , localizzate, rispettivamente, nella buca di sinistra, in quella centrale e in quella di destra. Tali funzioni d'onda sono esprimibili, in termini delle autofunzioni dell'hamiltoniana priva del termine di interazione, come segue:

$$\begin{cases} \phi_L(x) = \frac{1}{2}\Phi_0(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_1(x) + \frac{1}{2}\Phi_2(x) \\ \phi_C(x) = \frac{1}{2}\Phi_0(x) + \frac{1}{2}\Phi_2(x) \\ \phi_R(x) = \frac{1}{2}\Phi_0(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_1(x) + \frac{1}{2}\Phi_2(x), \end{cases} \quad (98)$$

dove $\phi_L(x)$, $\phi_C(x)$ e $\phi_R(x)$ indicano rispettivamente le funzioni d'onda localizzate nella buca di sinistra, di centro e di destra, che soddisfano le relazioni di ortonormalità: $\int \phi_i^*(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij}$ con $i, j = L, C, R$. Come nel paragrafo precedente, per risolvere l'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo, è possibile costruire la funzione d'onda complessiva $f(x, t)$ come combinazione lineare delle funzioni d'onda appena introdotte, considerando debole l'interazione tra i bosoni del condensato: tale descrizione prende il nome di *approssimazione a tre modi*. La funzione d'onda risolvete la (96) presenta la forma seguente [23]:

$$f(x, t) = f_L(t)\phi_L(x) + f_C(t)\phi_C(x) + f_R(t)\phi_R(x). \quad (99)$$

I coefficienti introdotti nell'approssimazione a tre modi, validi nel caso in cui $N \gg 1$, possono essere espressi in termini del numero di bosoni presenti nella rispettiva buca, indicato con $N_i(t)$ e della fase associata a ciascuna

funzione d'onda macroscopica, indicata con $\theta_i(t)$, dove $i = L, C, R$ [23]:

$$\begin{cases} f_L(t) = \sqrt{N_L(t)}e^{i\theta_L(t)} \\ f_C(t) = \sqrt{N_C(t)}e^{i\theta_C(t)} \\ f_R(t) = \sqrt{N_R(t)}e^{i\theta_R(t)} \end{cases}, \quad (100)$$

dove i coefficienti sopracitati soddisfano la relazione $|f_L(t)|^2 + |f_C(t)|^2 + |f_R(t)|^2 = N$. Utilizzando la definizione di H_0 e moltiplicando scalarmente a sinistra per la funzione d'onda macroscopica $\phi_L(x)$ ambo i membri della (96) si trova:

$$\begin{aligned} i\hbar \int \phi_L^*(x) \left(\dot{f}_L(t)\phi_L(x) + \dot{f}_C(t)\phi_C(x) + \dot{f}_R(t)\phi_R(x) \right) dx = \\ = \int \phi_L^*(x) H_0 (f_L(t)\phi_L(x) + f_C(t)\phi_C(x) + f_R(t)\phi_R(x)) dx + \\ + \Lambda \int \phi_L^*(x) |f_L(t)\phi_L(x) + f_C(t)\phi_C(x) + f_R(t)\phi_R(t)|^2 (f_L(t)\phi_L(x) + f_C(t)\phi_C(x) + f_R(t)\phi_R(t)) dx \end{aligned} \quad (101)$$

Analogamente, moltiplicando scalarmente la (96) per $\phi_C(x)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} i\hbar \int \phi_C^*(x) \left(\dot{f}_L(t)\phi_L(x) + \dot{f}_C(t)\phi_C(x) + \dot{f}_R(t)\phi_R(x) \right) dx = \\ = \int \phi_C^*(x) H_0 (f_L(t)\phi_L(x) + f_C(t)\phi_C(x) + f_R(t)\phi_R(x)) dx + \\ + \Lambda \int \phi_C^*(x) |f_L(t)\phi_L(x) + f_C(t)\phi_C(x) + f_R(t)\phi_R(t)|^2 (f_L(t)\phi_L(x) + f_C(t)\phi_C(x) + f_R(t)\phi_R(t)) dx \end{aligned} \quad (102)$$

Lo stesso procedimento può essere ripetuto per $\phi_R(x)$, ottenendo:

$$\begin{aligned} i\hbar \int \phi_R^*(x) \left(\dot{f}_L(t)\phi_L(x) + \dot{f}_C(t)\phi_C(x) + \dot{f}_R(t)\phi_R(x) \right) dx = \\ = \int \phi_R^*(x) H_0 (f_L(t)\phi_L(x) + f_C(t)\phi_C(x) + f_R(t)\phi_R(x)) dx + \\ + \Lambda \int \phi_R^*(x) |f_L(t)\phi_L(x) + f_C(t)\phi_C(x) + f_R(t)\phi_R(t)|^2 (f_L(t)\phi_L(x) + f_C(t)\phi_C(x) + f_R(t)\phi_R(t)) dx. \end{aligned} \quad (103)$$

Nelle equazioni (101), (102) e (103) è possibile riconoscere i termini di energia media $\bar{\epsilon}_L = \int \phi_L^*(x) H_0 \phi_L(x) dx$, $\bar{\epsilon}_C = \int \phi_C^*(x) H_0 \phi_C(x) dx$ e $\bar{\epsilon}_R = \int \phi_R^*(x) H_0 \phi_R(x) dx$ che rappresentano le energie medie dei rispettivi stati localizzati. Inoltre, si distinguono i seguenti termini di tunneling:

- i) $K_{LR} = - \int \phi_L^*(x) H_0 \phi_R(x) dx = K_{RL} = - \int \phi_R^*(x) H_0 \phi_L(x) dx = 0$ poichè non è possibile il trasferimento di bosoni dalla buca a sinistra alla buca a destra e viceversa.
- ii) $K_{LC} = - \int \phi_L^*(x) H_0 \phi_C(x) dx = K_{CL} = - \int \phi_C^*(x) H_0 \phi_L(x) dx = K_1$ dal momento che l'operatore hamiltoniano è autoaggiunto [24] e quindi, anche, hermitiano ²
- iii) $K_{CR} = - \int \phi_C^*(x) H_0 \phi_R(x) dx = K_{RC} = - \int \phi_R^*(x) H_0 \phi_C(x) dx = K_2$ per le ragioni esposte al punto precedente.

Nelle equazioni (101), (102) e (103) sono ravvisabili anche i termini di *interazione* tra i bosoni del condensato [5] all'interno della stessa buca di potenziale, definiti, servendosi della realtà delle funzioni d'onda, come $\gamma_L = \Lambda \int |\phi_L(x)|^4 dx = \Lambda \int \phi_L^4(x) dx$, $\gamma_C = \Lambda \int |\phi_C(x)|^4 dx = \Lambda \int \phi_C^4(x) dx$ e $\gamma_R = \Lambda \int |\phi_R(x)|^4 dx = \Lambda \int \phi_R^4(x) dx$. I restanti termini, di espressioni $\int \phi_L^m(x) \phi_R^n(x)$, $\int \phi_C^m(x) \phi_R^n(x)$ e $\int \phi_L^m(x) \phi_C^n(x)$ con $m = 1, 2, 3$ e $n = 1, 2, 3$ ed $m + n = 4$, vengono trascurati nell'ipotesi che gli integrali che descrivono la sovrapposizione tra funzioni d'onda localizzate in due buche diverse siano nulli. Alla luce di queste considerazioni, le tre equazioni sopracitate possono essere semplificate fino ad ottenere:

$$\begin{cases} i\hbar \dot{f}_L(t) = f_L(t)\bar{\epsilon}_L - f_C(t)K_1 + f_L(t)|f_L(t)|^2\gamma_L \\ i\hbar \dot{f}_C(t) = f_C(t)\bar{\epsilon}_C - f_L(t)K_1 - f_R(t)K_2 + f_C(t)|f_C(t)|^2\gamma_C \\ i\hbar \dot{f}_R(t) = f_R(t)\bar{\epsilon}_R - f_C(t)K_2 + f_R(t)|f_R(t)|^2\gamma_R. \end{cases} \quad (104)$$

²Si ricorda che un operatore A si dice hermitiano se, in notazione di Dirac, $\forall \chi, \phi \in D(A)$ vale l'uguaglianza $\langle \chi, A\phi \rangle = \langle A\chi, \phi \rangle$. Se $D(A) = \mathcal{H}$ e $A^\dagger = A$, dove $A^\dagger$ indica l'operatore aggiunto di A , l'operatore è definito *autoaggiunto* e soddisfa anche la condizione di hermitianità [24].

Partendo dalle relazioni (100), dalle equazioni (104) si ricavano le equazioni relative alla fase e al numero di particelle corrispondenti a ciascuna buca: le prime si derivano eguagliando le parti reali delle (104), le seconde eguagliando le parti immaginarie delle stesse. Per le variabili $N_L(t)$, $N_C(t)$ e $N_R(t)$ si ottiene, quindi:

$$\begin{cases} \dot{N}_L = -\frac{2K_1}{\hbar} \sqrt{N_L(t)N_C(t)} \sin(\theta_C(t) - \theta_L(t)) \\ \dot{N}_C = -\frac{2K_1}{\hbar} \sqrt{N_C(t)N_L(t)} \sin(\theta_L(t) - \theta_C(t)) - \frac{2K_2}{\hbar} \sqrt{N_C(t)N_R(t)} \sin(\theta_R - \theta_C) \\ \dot{N}_R = -\frac{2K_2}{\hbar} \sqrt{N_R(t)N_C(t)} \sin(\theta_C(t) - \theta_R(t)) . \end{cases} \quad (105)$$

Per ricavare le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione temporale della numero di particelle presenti in ciascuna buca, è utile definire due coppie di variabili coniugate: gli sbilanciamenti frazionari di popolazione bosonica, detti $z_1(t)$ e $z_2(t)$, e gli sfasamenti relativi delle funzioni d'onda macroscopiche localizzate, detti $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$. Tali variabili sono definite nel modo seguente:

$$\begin{cases} z_1(t) = \frac{N_L(t) - N_C(t)}{N} \\ z_2(t) = \frac{N_R(t) - N_C(t)}{N} \\ \phi_1(t) = \theta_C(t) - \theta_L(t) \\ \phi_2(t) = \theta_C(t) - \theta_R(t) , \end{cases} \quad (106)$$

dove $N = N_L(t) + N_C(t) + N_R(t)$ è il numero totale di particelle del sistema, indipendente dal tempo, in quanto si è assunto che il confinamento sia ideale. Servendosi delle equazioni (104) e (106), è possibile ottenere le seguenti equazioni per gli sbilanciamenti $z_1(t)$ e $z_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{4K_1}{3\hbar} \sqrt{(1 - z_1 - z_2)(1 + 2z_1 - z_2)} \sin \phi_1 - \frac{2K_2}{3\hbar} \sqrt{(1 - z_1 - z_2)(1 - z_1 + 2z_2)} \sin \phi_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{2K_1}{3\hbar} \sqrt{(1 - z_1 - z_2)(1 + 2z_1 - z_2)} \sin \phi_1 + \frac{4K_2}{3\hbar} \sqrt{(1 - z_1 - z_2)(1 - z_1 + 2z_2)} \sin \phi_2 . \end{cases} \quad (107)$$

Utilizzando le equazioni (100) ed eguagliando le parti immaginarie della (104), si ottengono le equazioni per l'evoluzione delle variabili di fase θ_L , θ_C e θ_R :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_L = -\frac{\bar{\epsilon}_L}{\hbar} + \frac{K_1}{\hbar} \sqrt{\frac{N_C}{N_L}} \cos(\theta_C - \theta_L) - \frac{\gamma_L}{\hbar} N_L \\ \dot{\theta}_C = -\frac{\bar{\epsilon}_C}{\hbar} + \frac{K_1}{\hbar} \sqrt{\frac{N_R}{N_C}} \cos(\theta_R - \theta_C) + \frac{K_2}{\hbar} \sqrt{\frac{N_L}{N_C}} \cos(\theta_L - \theta_C) - \frac{\gamma_C}{\hbar} N_C \\ \dot{\theta}_R = -\frac{\bar{\epsilon}_R}{\hbar} + \frac{K_2}{\hbar} \sqrt{\frac{N_C}{N_R}} \cos(\theta_C - \theta_R) - \frac{\gamma_R}{\hbar} N_R . \end{cases} \quad (108)$$

A partire dalle relazioni (106), dalle equazioni per θ_L , θ_C e θ_R si ricavano le equazioni che descrivono l'andamento temporale delle differenze di fase ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = \frac{\bar{\epsilon}_L - \bar{\epsilon}_C}{\hbar} + \frac{3K_1}{\hbar} \frac{z_1 \cos \phi_1}{\sqrt{(1 + 2z_1 - z_2)(1 - z_1 - z_2)}} + \frac{K_2}{\hbar} \sqrt{\frac{1 - z_1 + 2z_2}{1 - z_1 - z_2}} \cos \phi_2 + \\ + \frac{N\gamma_L}{3\hbar} (1 + 2z_1 - z_2) - \frac{N\gamma_C}{3\hbar} (1 - z_1 - z_2) \\ \dot{\phi}_2 = -\frac{\bar{\epsilon}_C - \bar{\epsilon}_R}{\hbar} + \frac{K_1}{\hbar} \sqrt{\frac{1 + 2z_1 - z_2}{1 - z_1 - z_2}} \cos \phi_1 + \frac{3K_2}{\hbar} \frac{z_2 \cos \phi_2}{\sqrt{(1 - z_1 + 2z_2)(1 - z_1 - z_2)}} - \\ - \frac{N\gamma_C}{3\hbar} (1 - z_1 - z_2) + \frac{N\gamma_R}{3\hbar} (1 - z_1 + 2z_2) . \end{cases} \quad (109)$$

Le equazioni così ricavate possono essere ricondotte a quelle relative al confinamento in doppia buca di potenziale ((89) e (91)), se si innalza indefinitamente la barriera tra una delle due buche laterali e quella centrale, in modo da ottenere un sistema composto da un condensato di N_{DW} bosoni confinato in doppia buca e un condensato di N_{SW} confinato in una regione di potenziale a buca singola. In condizioni di intrappolamento ideale, il numero di particelle contenute nel sistema si conserva ($N = N_{SW} + N_{DW}$, dove i pedici 'SW' e 'DW' indicano, rispettivamente, 'singola buca' e 'doppia buca') e non avviene alcuno scambio di particelle tra le due regioni di confinamento. Immaginando di isolare la buca di destra dalle buche di centro e di sinistra, si può definire una

nuova variabile di sbilanciamento frazionario $z(t) = \frac{N_L - N_C}{N_{DW}}$, tale che le variabili di sbilanciamento per la tripla buca si possano riscrivere nella forma:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{N_{DW} z}{N} \\ z_2 = + \frac{2N_{SW} - (1 - z)N_{DW}}{2N} . \end{cases} \quad (110)$$

A partire dalle equazioni precedenti si ricavano le equazioni per $N_L(t)$, $N_C(t)$ e $N_R(t)$:

$$\begin{cases} N_L(t) = \frac{N}{3}(1 + 2z_1(t) - z_2(t)) = \frac{N_{DW}(1 + z(t))}{2} \\ N_C(t) = \frac{N}{3}(1 - z_1(t) - z_2(t)) = \frac{N_{DW}(1 - z(t))}{2} \\ N_R(t) = \frac{N}{3}(1 - z_1(t) + 2z_2(t)) = \frac{3N_{SW}}{N} , \end{cases} \quad (111)$$

dove si nota che, in questa configurazione, il numero di bosoni presenti nella buca di destra non dipende dal tempo. Ciò è dovuto al fatto che la barriera di potenziale tra la buca centrale e quella di destra è infinitamente alta, cosicché il trasferimento di bosoni tra la buca centrale e quella di destra viene praticamente arrestato. Dal momento che non è più possibile lo scambio di particelle con la buca di destra, il termine di tunneling K_2 si annulla e, ponendo ora $K_1 \equiv K$ e $\phi_1 \equiv \phi$ e sostituendo le equazioni (111) nelle equazioni (107) per la tripla buca, si ottiene:

$$\dot{z} = -\frac{2K}{\hbar} \sqrt{1 - z(t)^2} \sin \phi(t) , \quad (112)$$

che non è altro che l'equazione (89) che descrive l'evoluzione temporale dello sbilanciamento frazionario di popolazione nel caso di confinamento a doppia buca. Se il potenziale comprendente le buche di centro e di sinistra è simmetrico rispetto all'asse parallelo all'asse delle ordinate e passante per il suo punto di massimo locale, allora è possibile porre $\gamma_L = \gamma_C = \gamma_{DW}$ e $\bar{\epsilon}_L = \bar{\epsilon}_C = \bar{\epsilon}_{DW}$ e inoltre $\bar{\epsilon}_{DW} = \frac{\epsilon_{0,DW} + \epsilon_{1,DW}}{2}$ [18], dove $\epsilon_{0,DW}$ ed $\epsilon_{1,DW}$ sono le autoenergie relative all'hamiltoniana con tale potenziale a doppia buca. Nella regione in cui è presente il potenziale a buca singola, a destra dell'origine, l'energia $\bar{\epsilon}_R$ può essere posta pari all'energia dello stato fondamentale di buca singola, indicata con $\epsilon_{0,SW}$, che è legata all'energia dei primi due livelli energetici di doppia buca tramite la relazione $\epsilon_{0,SW} = \frac{\epsilon_{0,DW} + \epsilon_{1,DW}}{2}$ [18]. Ne consegue che $\bar{\epsilon}_L = \bar{\epsilon}_C = \bar{\epsilon}_R$ e, quindi, sostituendo le (107) nella prima equazione delle (105) si ottiene:

$$\dot{\phi} = \frac{2K}{\hbar} \frac{z \cos \phi(t)}{\sqrt{1 - z(t)^2}} + \frac{N_{DW} \gamma_{DW}}{\hbar} z(t) , \quad (113)$$

che rappresenta l'equazione dell'evoluzione temporale della differenza di fase tra le funzioni d'onda macroscopiche localizzate nella buca di centro e di sinistra ed è analoga alla (91). Per giungere allo stesso risultato a partire dalla seconda equazione delle (109), è possibile provare che $\dot{\phi} = \dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 - \dot{\theta}_R + \dot{\theta}_L$, servendosi della prima e della terza delle (106). Poiché $K_2 = 0$, la fase θ_R associata al parametro d'ordine relativo alla buca di destra varia linearmente nel tempo:

$$\dot{\theta}_R = -\frac{\bar{\epsilon}}{\hbar} - \frac{3\gamma}{\hbar} \frac{N_{SW}}{N} . \quad (114)$$

In questo modo, si è verificato che, innalzando all'infinito la barriera tra due delle tre buche di potenziale è possibile descrivere la regione di potenziale a doppia buca tramite equazioni riconducibili alle (89) e (91).

Ora si riprenda in esame il sistema avente potenziale di confinamento a tripla buca di equazione (95): a causa della simmetria del potenziale $V(x)$ (vedi *Figura 5*) rispetto all'asse delle ordinate, le energie medie associate agli stati macroscopici localizzati sono identiche ($\bar{\epsilon}_L = \bar{\epsilon}_C = \bar{\epsilon}_R \equiv \bar{\epsilon}$) e, quindi, anche i termini di tunneling ($K_1 = K_2 \equiv K$ e di interazione $\gamma_R = \gamma_C = \gamma_L \equiv \gamma$). Dall'uguaglianza dei termini di tunneling, utilizzando le definizioni delle funzioni d'onda localizzate in termini delle prime tre autofunzioni dell'hamiltoniana imperturbata, presenti nella (98), si ricava che i livelli energetici ϵ_1 , ϵ_0 e ϵ_2 sono equispaziati e ciò può essere dedotto anche a partire dall'equaglianza tra le energie associate alle funzioni d'onda localizzate ($\bar{\epsilon}_L = \bar{\epsilon}_C = \bar{\epsilon}_R \equiv \bar{\epsilon}$). Le equazioni (107)

e (109) divengono, dunque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = -\frac{4K}{3\hbar} \sqrt{(1-z_1-z_2)(1+2z_1-z_2)} \sin \phi_1 - \frac{2K}{3\hbar} \sqrt{(1-z_1-z_2)(1-z_1+2z_2)} \sin \phi_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{2K}{3\hbar} \sqrt{(1-z_1-z_2)(1+2z_1-z_2)} \sin \phi_1 - \frac{4K}{3\hbar} \sqrt{(1-z_1-z_2)(1-z_1+2z_2)} \sin \phi_2 \\ \dot{\phi}_1 = +\frac{3K}{\hbar} \frac{z_1 \cos \phi_1}{\sqrt{(1+2z_1-z_2)(1-z_1-z_2)}} + \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{1+2z_1-z_2}{1-z_1-z_2}} \cos \phi_2 + \frac{N\gamma}{\hbar} z_1 \\ \dot{\phi}_2 = -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{1-z_1+2z_2}{1-z_1-z_2}} \cos \phi_1 + \frac{3K}{\hbar} \frac{z_2 \cos \phi_2}{\sqrt{(1-z_1-z_2)(1-z_1+2z_2)}} + \frac{N\gamma}{\hbar} z_2 . \end{array} \right. \quad (115)$$

4 Conclusioni

In questo breve elaborato sono stati analizzati sistemi di bosoni confinati entro regioni di potenziale di diversa geometria, descrivendone il comportamento tramite le equazioni del moto di due opportune variabili coniugate. Partendo dalla distinzione tra bosoni e fermioni, è stata dapprima illustrata la natura statistica del fenomeno della condensazione di Bose-Einstein, mostrando, a partire dalla *funzione di partizione* dell'ensemble grancanonico, la dipendenza della frazione di condensato dalla temperatura e da parametri che caratterizzano il potenziale di confinamento del gas. Si è, quindi, focalizzato l'attenzione sui gas diluiti nel limite di temperatura nulla e in presenza di deboli interazioni tra i bosoni, dovute alle forze di van der Waals. In seguito a brevi cenni sulla teoria quantistica degli urti a basse temperature, è stato introdotto un potenziale efficace che descrivesse il comportamento macroscopico di siffatti sistemi, servendosi del *concetto di lunghezza di diffusione*. Tale potenziale è all'origine della non-linearità dell'equazione di Gross-Pitaevskii, che è stata ricavata a partire dall'equazione di Schrödinger per un sistema a molte particelle interagenti e situate allo stesso stato quantico di singola particella. Si è, quindi, giustificato la sostituzione della funzione d'onda a molte particelle con una funzione d'onda in grado di predire il comportamento macroscopico di tali sistemi: il parametro d'ordine di un condensato. Inoltre, applicando il principio di minima azione a un determinato funzionale, è stata ottenuta l'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo, che è stata, poi, utilizzata per studiare condensati confinati mediante due diversi potenziali: un potenziale a doppia buca e un potenziale a tripla buca, che possono essere riprodotti sperimentalmente mediante l'uso di fasci laser a profilo gaussiano. Nello studio del sistema di bosoni in doppia buca, avvalendosi dell'approssimazione a due modi, sono state ottenute le equazioni che descrivono l'evoluzione temporale delle variabili di sbilanciamento frazionario di popolazione e di differenza di fase: la prima è atta a spiegare fenomeni di tunneling tra le due buche, mentre la seconda è indice delle sovrapposizioni tra le due funzioni d'onda macroscopiche che descrivono i condensati presenti nelle due regioni di potenziale sopracitate. Un procedimento analogo è stato seguito nella descrizione del condensato intrappolato tramite il potenziale a tripla buca, servendosi, in questo caso, dell'approssimazione a tre modi e introducendo quattro variabili. Si è, infine, dimostrato che le equazioni del moto relative a tale sistema, di studio più recente, possono essere ricondotte a quelle derivate nel caso precedente sotto opportune ipotesi.

Riferimenti bibliografici

- [1] Anthony J. Leggett, *Quantum Liquids*, Oxford University Press, King's Lynn, UK, 2006.
- [2] Lev Pitaevskii, Sandro Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford University Press, King's Lynn, 2003, UK.
- [3] James R. Anglin, Wolfgang Ketterle, *Nature* **416**, 21, 2003.
- [4] A. Barone, G. Paternò, *Physics and applications of the Josephson Effect*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1982.
- [5] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, *Physical Review Letters* **79**, 4950-4953, 1997.
- [6] Kerson Huang, *Meccanica Statistica*, Zanichelli Editore, Bologna, 1997.
- [7] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Review of Modern Physics* **71**, 463-512, 1999.
- [8] Christopher Pethick, Henrik Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [9] James F. Annett, *Superconductivity, Superfluids and Condensates*, Oxford University Press, Chippenham, UK, 2004.
- [10] Cesare Rossetti, *Elementi di Teoria dell'Urto*, Levrotto & Bella, Torino, 1985.
- [11] Charles Joachain, *Quantum Collisions Theory*, North Holland, Amsterdam, NL, 1975.
- [12] Giulia Ferrini, *Macroscopic quantum coherent phenomena in josephson junctions*, Thèse, Université de Grenoble, Grenoble, F, 2011.
- [13] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Science* **269**, 198, 1995.
- [14] V. I. Balykin, V. G. Minogin, V. S. Letokhov, *Report on Progress in Physics* **63**, 1429-1510, 2000.
- [15] S. Giovanazzi, A. Smerzi, S. Fantoni, *Physical Review Letter* **84**, 20, 4521-4524, 2000.
- [16] L. Salasnich, A. Parola, L. Reatto, *Physical Review A* **65**, 043614, 2002.
- [17] G. Mazzarella, M. Moratti, L. Salasnich, F. Toigo, *Journal of Physics B* **43**, 065383, 2010.
- [18] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifšic, *Corso di Fisica Teorica*, Vol. III, Pergamon Press, Bristol, UK, 1958.
- [19] C. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wright, D. F. Walls, *Physical Review A* **55**, 4318-4324, 1997.
- [20] C. Weiss, N. Teichmann, *Physical Review Letters* **100**, 140408, 2008.
- [21] S. Raghavan, A. Smerzi, S. Fantoni, S. R. Shenoy, *Physical Review A* **59**, 620-633, 1997.
- [22] D. Peter, K. Pawłowski, T. Pfau, K. Rzążewski, *Journal of Physics B* **45**, 225302, 2012.
- [23] Mu Ai-Xia, Zhu Xiao-Yan, Xue Ju-Kui, *Chinese Physics B* **17**, 764, 2008.
- [24] Gianfranco Sartori, *Istituzioni di Meccanica Quantistica*, Libreria Internazionale Cortina, Padova, 2004.