

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE
Corso di Laurea in Statistica per l'economia e l'impresa

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Confronto tra VaR e Expected Shortfall

Relatore:
Prof.ssa Luisa Bisaglia

Candidato:
Nicolò Ortolan
Matricola 1124333

Ai miei genitori

Sommario

In questa relazione si vanno a cogliere le principali differenze tra due misure di rischio che negli ultimi anni hanno acceso diversi dibattiti tra gli esperti, ovvero il Value-at-Risk e l'Expected Shortfall. Nella prima parte di questo lavoro si fa una breve introduzione a quelle che sono le norme che regolano il mondo finanziario e che gli istituti finanziari sono tenuti a rispettare quando trattano con il rischio finanziario. Nella seconda parte sono contenute le proprietà che deve possedere una misura di rischio e vengono definite le due misure protagoniste in questa tesi. L'ultima parte contiene gli aspetti pratici, ovvero le modalità di calcolo e alcuni esempi reali che rafforzano quanto sostenuto nella parte teorica dell'elaborato.

Indice

1	Normativa	1
1.1	Il Comitato di Basilea	1
1.2	Basilea 1	1
1.3	Basilea 2	2
1.3.1	I metodi	3
1.3.2	Il Rating	4
1.3.3	Conseguenze	4
1.4	Basilea 3	5
1.4.1	Gli standard di capitale	5
1.4.2	Il capitale di rischio	6
1.4.3	Copertura dei rischi	6
1.4.4	Leva Finanziaria	7
1.4.5	Misure anticicliche	7
1.4.6	Conseguenze	7
1.5	Solvency 2	7
1.6	Swiss Solvency Test (SST)	9
2	Il rischio e le misure di rischio	11
2.1	Tipi di rischio	11
2.2	Il rischio come variabile casuale: il patrimonio netto futuro . .	12
2.3	Assiomi sugli insiemi di accettazione	12
2.4	Proprietà delle misure di rischio	14
2.5	Coerenza o non coerenza?	16
3	Value-at-Risk e Expected Shortfall	17
3.1	Introduzione	17
3.2	Value-at-Risk	18
3.2.1	Definizione del VaR	18
3.2.2	"Pro e Contro" del VaR	20
3.2.3	Perché utilizzare il VaR ?	22
3.3	Expected Shortfall	23
3.3.1	Definizione dell'Expected Shortfall	23
3.3.2	Problemi di utilizzo	24

3.4	Valori parametrici di VaR e Expected Shortfall	25
3.4.1	VaR	25
3.4.2	Expected Shortfall	25
4	Metodologie di calcolo del VaR	29
4.1	Approccio parametrico	30
4.1.1	Stima della volatilità	31
4.2	Simulazione storica	34
4.2.1	Vantaggi della simulazione storica	34
4.2.2	Limiti della simulazione storica	34
4.3	Simulazione Monte Carlo	35
4.3.1	Vantaggi della simulazione Monte Carlo	35
4.3.2	Limiti della simulazione Monte Carlo	36
5	Backtesting	37
5.1	VaR	37
5.1.1	Le regole di Basilea	39
5.2	Expected Shortfall	40
5.2.1	Elicibilità	40
5.2.2	Alcune tipologie di backtest	41
5.2.3	Test 1 di Acerbi e Szekely	41
5.2.4	Test 2 di Acerbi e Szekely	42
5.2.5	Test di Emmer, Kratz e Tasche	43
6	Applicazioni pratiche	45
6.1	Scelta di un modello interno	45
6.1.1	Metodologia	45
6.1.2	Backtesting con metodo parametrico	46
6.1.3	Backtesting con simulazione storica	46
6.1.4	Backtesting con metodo Monte Carlo	46
6.2	Applicazioni a serie finanziarie reali	46
6.2.1	S&P 500	47
6.2.2	Portafoglio composto da 3 titoli azionari	52
7	Conclusioni	57

Capitolo 1

Normativa

1.1 Il Comitato di Basilea

Il Comitato di Basilea è un organo consultivo internazionale, istituito nel 1974 dalle banche centrali dei paesi del G10. L'obiettivo che si pone è quello di definire un sistema di regole per la Vigilanza Bancaria, per garantire stabilità al sistema finanziario globale. Non avendo però potere legislativo, il Comitato formula delle proposte con l'intento che queste vengano accolte dal maggior numero possibile di Stati, così da rendere omogenea la normativa sulla Vigilanza Bancaria in un sistema finanziario sempre più globalizzato.

1.2 Basilea 1

Nel 1988 il Comitato si accordò sui requisiti patrimoniali minimi delle Banche per far fronte al rischio di credito e al rischio di mercato. Lo scopo era quello di limitare la condotta “aggressiva” di alcuni istituti di credito, liberi di operare in contesti normativi poco regolamentati.

Il requisito patrimoniale minimo è una quota di capitale destinata a proteggere i depositanti dal rischio che gli attivi bancari (prestiti alla clientela) subiscano delle perdite, risultando insolventi. Il capitale deve risultare almeno pari all'8% dei crediti alla clientela. Inoltre, sono previsti degli “sconti” (coefficienti di ponderazione) in funzione del tipo di prestatore e in presenza di garanzie. Quindi più il coefficiente di ponderazione è alto e meno garanzie saranno date dal debitore, nonostante la disponibilità patrimoniale risulti più alta.

Vi sono però numerosi limiti per quanto riguarda Basilea 1:

- non vi è differenziazione delle misure di rischio per la stessa tipologia di clientela;
- non viene considerata la scadenza del prestito;

- non vengono considerati i cosiddetti “rischi operativi”;
- non viene considerata la diversificazione del portafoglio come strumento di riduzione del rischio.

Questi limiti pongono le basi per un processo di revisione, che conduce, nel 1999, ad un primo documento di consultazione aperto alle osservazioni dei singoli paesi, oltre che delle associazioni bancarie e degli studiosi.

1.3 Basilea 2

Nel 2004, il Comitato approva la versione definitiva di un secondo accordo, entrato poi in vigore nel 2008. Questo nuovo accordo viene presentato come un’architettura basata su tre pilastri:

- requisiti patrimoniali;
- controllo prudenziale;
- disciplina di mercato.

1° pilastro: requisiti patrimoniali Vengono apportate modifiche ai criteri di calcolo dei requisiti patrimoniali minimi, rimodellando la regola dell’8% per renderla più sensibile al rischio dei singoli prestiti e introducendo il rischio operativo. Inoltre, viene consentito l’utilizzo di *rating* da parte della banca per la misurazione del rischio di credito. Rimane perciò invariato il coefficiente minimo dell’8%, ma cambiano le regole di calcolo del coefficiente di ponderazione.

Le banche hanno a disposizione tre metodologie per calcolare il rischio di credito:

- Metodo *Standard*
- Metodo *Internal Rating Based* di base (*IRB Foundation*)
- Metodo *Internal Rating Based* avanzato (*IRB Advanced*)

Tutte le metodologie di calcolo sono accumulate dal fondamentale ruolo delle garanzie (*risk mitigants*), le quali permettono di ottenere degli “sconti” proprio sul calcolo dei requisiti patrimoniali e sono divise in due categorie. Le prime sono garanzie personali e vengono emesse da Stati, banche e società con alto *rating*. Le seconde sono garanzie reali che comprendono, invece, due tipi di approcci, quello semplice (contanti, oro, azioni, obbligazioni qualificate, fondi), e quello integrale (anche altre azioni quotate).

2° pilastro: controllo prudenziale Le Autorità di Vigilanza ottengono maggiori poteri di controllo, che dovranno sfruttare per verificare sia i requisiti minimi sia l'applicazione di politiche e procedure organizzative da parte degli istituti di credito, atte a misurare e governare i propri rischi.

3° pilastro: disciplina di mercato Gli istituti di credito sono ora obbligati a fornire maggiori informazioni al mercato, così che gli investitori pubblici possano verificare, in maniera chiara e trasparente, le condizioni di rischio e di patrimonializzazione delle singole banche. Gli istituti troppo rischiosi saranno penalizzati da tassi più alti e rischieranno di non essere finanziati dal mercato.

1.3.1 I metodi

Il metodo *Standard* non è altro che una versione aggiornata della metodologia prevista da Basilea 1. La valutazione delle imprese affidate o da affidare sarà effettuata da agenzie di *rating* esterne, autorizzate dall'Autorità di Vigilanza. In base al *rating* attribuito, verrà utilizzata una ponderazione diversa per il calcolo della riserva di capitale. La formula è:

$$(\text{finanziamento}) \cdot (\text{coefficiente di ponderazione}) \cdot (8\%) = \text{riserva}$$

Se un'impresa è priva di *rating*, la ponderazione utilizzata sarà la stessa prevista da Basilea 1, ovvero 100%, il che non comporta modifiche sostanziali tra il nuovo e l'attuale schema di vigilanza.

Nel caso di prestiti scaduti da almeno 90 giorni (in Italia 180), la ponderazione viene alzata al 150% poiché il ritardo viene considerato come sintomatico di possibili difficoltà del debitore.

Le imprese vengono segmentate nel mercato in base al proprio fatturato e se ne possono distinguere tre tipologie: *corporate*, *sme corporate* e *retail*. Per quest'ultima particolare classe, che racchiude in sé i privati e le piccole imprese (fatturato inferiore a 5 milioni e prestiti non superiori a 1 milione), in funzione dell'importo modesto e dell'adeguata diversificazione del rischio, è prevista l'applicazione di un coefficiente di ponderazione fisso del 75%.

Mentre le banche più "piccole" potranno fare riferimento a "*rating* esterni", le banche maggiori potranno invece costruirsi i propri *rating*, rispettando ovviamente regole organizzative e metodologiche rigorose. Come illustrato in G. De Laurentis (2011), il metodo IRB prevede due metodi alternativi:

- metodo di base (*Foundation*): ideato per banche con ridotta esperienza nel *rating*;
- metodo avanzato (*Advanced*): ideato per banche che avranno sviluppato strumenti di controllo di credito raffinati ed affidabili verificati dalle Autorità.

Entrambe le metodologie prevedono quattro componenti per il calcolo del rischio di credito, le quali determinano le possibili perdite future di un prestito:

- *Probability of Default*: probabilità che il cliente sia insolvente, misurata dal *rating*
- *Loss Given Default*: perdita di credito che, in caso di *default*, non è possibile recuperare
- *Exposure at Default*: rischio di aumento nell'importo prestato
- *Maturity*: durata dell'operazione che influenza il rischio che il *rating* possa peggiorare

Il requisito patrimoniale sarà calcolato a partire da queste quattro componenti. In particolare, il metodo “avanzato” stima tutte le componenti, mentre il metodo “base” solo la *Probability of Default*.

1.3.2 Il Rating

Il *rating* viene determinato da una procedura di calcolo oggettiva e non arbitraria, capace di tener conto di casi particolari non catturabili dai modelli automatici. Per fare ciò è necessaria la presenza di informazioni sulle banche sotto forma di dati, suddivisi in qualitativi e quantitativi.

I dati qualitativi comprendono tutte le informazioni riguardanti la capacità dell'azienda di adottare scelte strategiche coerenti con l'evoluzione dell'ambiente esterno e del settore di riferimento, l'assetto proprietario, la professionalità del *management*, la certificazione dei processi produttivi e la velocità d'innovazione. Fanno parte dei dati qualitativi anche le informazioni sull'andamento dell'impresa e del mercato.

I dati quantitativi raccolgono le informazioni di carattere economico-finanziario reperibili dai bilanci e nei documenti contabili delle imprese, e servono a determinare la capacità dell'impresa di generare nel tempo flussi di cassa positivi, mantenendo un'equilibrata struttura patrimoniale e finanziaria con livelli di redditività soddisfacenti.

Il risultato sarà un voto numerico, che corrisponderà alla probabilità di insolvenza dell'impresa, e viene associato alla previsione della sua evoluzione nel tempo.

1.3.3 Conseguenze

Gli istituti di credito devono impegnare del capitale a fronte dei rischi connessi alla loro attività, i quali dipenderanno anche dal rischio di credito relativo alle imprese affidate. Questo comporta la richiesta da parte delle banche alle

imprese di ridurre il rischio finanziario per migliorare il *rating*, così da avere minor capitale di rischio impegnato a fronte dei prestiti alla clientela.

Il minor capitale impegnato consente alle banche di utilizzarlo per altri impieghi e sfruttare delle opportunità di investimento. In caso contrario, la mancanza di opportunità comporta un aumento dei tassi per le aziende più rischiose.

Basilea 2 implica che i costi di finanziamento per un'impresa siano sempre più connessi al *rating* dei prestatori di denaro. Di conseguenza, il contenimento dei costi finanziari richiede necessariamente un incremento della patrimonializzazione e quindi un miglioramento del *rating* aziendale.

1.4 Basilea 3

In seguito alla crisi finanziaria del 2008, viene pubblicato un insieme di nuove regole relative alla vigilanza bancaria, col nome di Basilea 3, poi approvate nel settembre 2010 dal G20. Queste nuove regole entrano in vigore nel 2013, dopo un'ampia consultazione con l'industria bancaria e inserendo un periodo transitorio che terminerà nel 2019, così da favorire un graduale adattamento delle strategie operative delle banche ed evitare ricadute sulla ripresa economica.

L'obiettivo della riforma è quello di prevenire l'eccessiva assunzione di rischi da parte degli operatori, rendere più solido il sistema finanziario e creare un ambiente più uniforme.

Le misure previste da Basilea 3 sono le seguenti:

- introduzione di standard minimi di liquidità;
- definizione di capitale regolamentare in concomitanza alla fissazione di requisiti patrimoniali più elevati;
- migliore copertura dei rischi di mercato e di controparte;
- contenimento del livello di leva finanziaria;
- misure anticicliche per ridurre la "prociclicità" delle regole prudenziali.

1.4.1 Gli standard di capitale

1° regola: Liquidity Coverage Ratio

$$\frac{\text{Attività liquide di elevata qualità}}{\text{Deflussi di cassa totali netti in 30gg}} \geq 100\%$$

Tale criterio è stato elaborato per aumentare la resilienza a breve termine del profilo di rischio di liquidità delle banche, assicurando che dispongano di sufficienti "Attività Liquide di Elevata Qualità" per superare una fase di accentuato deflusso di fondi della durata di 30 giorni, senza dover ricorrere al mercato o a rifinanziamenti.

2° regola: Net Stable Funding Ratio

$$\frac{\text{Provvista stabile disponibile (Fonti)}}{\text{Provvista stabile richiesta (Impieghi)}} \geq 100\%$$

Tale indicatore è generalmente calibrato in base a due ipotesi. La prima è che le passività a lungo termine siano più stabili di quelle a breve termine. La seconda è che i depositi a breve termine (scadenza inferiore all'anno) collocati al dettaglio dalla clientela e la provvista fornita dalla clientela di piccole imprese si comportino in maniera più stabile della provvista all'ingrosso di pari scadenza, fornita da altre controparti.

1.4.2 Il capitale di rischio

Dalla definizione del sito della Borsa Italiana, il capitale di rischio è la porzione del capitale di un'impresa apportata a titolo di capitale proprio dall'imprenditore (o dai soci nel caso di società). Esso è rappresentativo della partecipazione al progetto imprenditoriale ed è pienamente soggetto al rischio d'impresa. Per tale motivo al capitale di rischio non è associata una remunerazione minima. La remunerazione del capitale di rischio (ad esempio delle azioni) dipende dal risultato di gestione raggiunto, mentre le obbligazioni danno diritto al rimborso del capitale e alla corresponsione di un interesse indipendentemente dal risultato di gestione dell'impresa. Inoltre, in caso di perdite rilevanti dell'impresa con conseguente avvio della procedura di liquidazione, prima si procede al rimborso dei creditori (gli obbligazionisti) e poi, con i mezzi residui, si rimborsano i titolari del capitale di rischio (gli azionisti).

È essenziale che le banche detengano una base patrimoniale di elevata qualità a fronte delle proprie esposizioni al rischio. Livelli di capitale adeguati e di migliore qualità aumentano la capacità delle banche di far fronte alle perdite, e garantiscono che gli intermediari siano in grado di sfruttare le opportunità di crescita e di sostenere famiglie e imprese.

Vengono quindi richiesti requisiti più rigorosi in termini di strumenti di elevata qualità patrimoniale, mentre il requisito di capitale totale rimane invariato all'8% delle attività ponderate per il rischio.

1.4.3 Copertura dei rischi

Il Comitato di Basilea ha proposto delle modifiche ai requisiti patrimoniali, per aumentarne la capacità di catturare i rischi di mercato e di controparte, in modo da evitare una sottostima dei rischi che si corrono quando si trasformano dei crediti in strumenti finanziari complessi e nelle attività di *trading*.

Le nuove regole prevedono quindi che il *Value-at-Risk* e le correlazioni tra attività siano calcolati tenendo conto di condizioni di stress.

1.4.4 Leva Finanziaria

Come illustrato e dimostrato in Brealey, Myers e Allen (2006), l'indice di leva finanziaria è un componente del teorema di Modigliani-Miller. L'innovazione da parte del Comitato di Basilea di questo indice ha come obiettivo quello di contenere il grado di rischio nel settore bancario, contribuendo quindi a ridurre il rischio di processi di *deleveraging* destabilizzanti per il sistema finanziario e per l'economia. Inoltre vi è stata l'introduzione di presidi aggiuntivi a fronte del rischio di modello e degli errori di misurazione, integrando i coefficienti basati sul rischio.

1.4.5 Misure anticicliche

Il Comitato di Basilea introduce delle misure con lo scopo di rafforzare la solidità delle banche di fronte a comportamenti prociclici degli operatori. Queste aiuteranno ad assicurare che il settore bancario assorba gli shock anziché trasmettere il rischio al sistema finanziario e, più in generale, all'economia. Viene previsto che le banche siano dotate di un cuscinetto di capitale al di sopra dei minimi regolamentari, e si introduce un meccanismo atto a garantire che le banche accumulino risorse patrimoniali nelle fasi di crescita eccessiva del credito complessivo.

1.4.6 Conseguenze

Secondo Basilea 3, tutte le operazioni compiute da una banca comportano dei rischi, e quindi delle possibili perdite. Più è alto il rischio, più alte potrebbero risultare le perdite e maggiore è la quantità di capitale che la banca deve risparmiare per far fronte alle emergenze.

Le nuove disposizioni aumentano in percentuale il capitale da risparmiare per avere una certa sicurezza. Gli istituti di credito subiranno perciò un aumento dei costi, che infine ricadrà sui clienti, aumentando le commissioni sui prestiti bancari.

Le aziende saranno esaminate con più attenzione prima di ricevere denaro dalle banche. Le valutazioni del *rating* delle imprese saranno sempre più puntuali e determineranno la quantità di denaro da prestare, oltre che ai costi e alle condizioni.

1.5 Solvency 2

Solvency 2 (ufficialmente Direttiva 2009/138/CE) è una direttiva dell'Unione Europea che ha lo scopo di estendere la normativa di Basilea 2 al settore assicurativo. Basilea 2 è infatti una normativa pensata solo per il settore bancario.

Nel novembre 2003 la Commissione Europea istituisce un comitato permanente con l'incarico di redigere un quadro di legge per la gestione del rischio nel settore assicurativo, ovvero il CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors).

Nel 2005, il CEIOPS incarica l'IAA (*International Actuarial Association*), un'associazione internazionale che si occupa di standardizzazione delle contabilità aziendali interne e civilistiche, di redigere un elenco non esaustivo dei rischi propri del settore assicurativo non coperti da Basilea 2.

Anche *Solvency 2* si basa su tre pilastri.

1° Pilastro - Requisiti finanziari minimi e copertura dei rischi Basilea 2 prevede la copertura di tre tipi di rischio (interni al pilastro 1): rischio di credito, rischio di mercato e rischio operativo. Durante il processo di revisione del secondo pilastro, Basilea 2 raccomanda di garantire una copertura per tutti i rischi non compresi nei tre del primo pilastro, e assegna alle autorità nazionali piena discrezionalità per fissare i requisiti patrimoniali aggiuntivi necessari.

C'è però da sottolineare che le autorità non hanno l'obbligo di fissare i requisiti aggiuntivi e le aziende che seguono un modello multinazionale possono utilizzare i gap legislativi per porre la sede legale nel Paese in cui l'autorità ha requisiti patrimoniali meno stringenti e favorevoli. Ciò avviene anche perché non esiste un elenco esaustivo nel quale questi rischi vengono scomposti e definiti.

Solvency 2 ha come scopo l'estensione dei rischi del pilastro 1 a tutti quelli tipici del settore assicurativo, oltre che ad accordare i requisiti patrimoniali per la loro copertura. Ciò pone *Solvency 2* come un ampliamento di Basilea 2, anche per i metodi di calcolo di tali rischi.

All'interno del pilastro 1, *Solvency 2* pone un limite superiore ai requisiti patrimoniali, ovvero una percentuale di riserve oltre il quale l'azienda è riparatata dagli interventi dell'autorità. Le riserve variano quindi tra un limite inferiore, il *Minimum Capital Requirement* (MCR) e un limite superiore, il *Solvency Capital Requirement* (SCR).

Entrambi i limiti sono calcolati come valore aggregato per tutti i rami di un'assicurazione, tramite una formula standard o un modello progettato dall'assicurazione, in possesso di determinati requisiti qualitativi e quantitativi richiesti dall'autorità.

Solvency 2 intende incentivare ogni assicurazione ad adottare un modello interno, consentendo di scegliere i coefficienti di correlazione fra i rami assicurativi e fra i rischi, mentre richiede dei requisiti patrimoniali maggiori per chi adotta la formula standard.

Finché il modello non è approvato dall'autorità, l'assicurazione deve calcolare MCR ed SCR con la formula standard.

Oltre a quello base, i metodi di calcolo previsti sono due: il metodo standardizzato con percentuali fisse per linea di business e il metodo avanzato. Le linee di business più comuni nel settore assicurativo sono: polizze, affari finanziari e pensioni occupazionali.

2° Pilastro – Governance e risk management Il secondo pilastro prevede la necessità di un corretto sistema interno e integrato di *Risk Management* per valutare se la compagnia assicurativa sia in grado di far fronte ai rischi assunti e valutarne l'esposizione globale. Inoltre, definisce le regole per l'esercizio del controllo da parte delle autorità di vigilanza.

3° Pilastro – Regole di trasparenza per il rafforzamento del mercato

All'interno di questo pilastro, il CEIOPS ha previsto due canali informativi distinti: uno privato con l'autorità e uno pubblico con il mercato. In questo modo si tiene conto delle diverse esigenze informative relative ai diversi *stakeholder* tutelati (sottoscrittori di polizze e azionisti). Inoltre, questa distinzione regola l'impatto ingiustificato sul prezzo dell'azione, a causa della diffusione di notizie come un aumento dei requisiti patrimoniali, sinonimo di un rischio sottostimato. La comunicazione di informazioni *price-sensitive* è un diritto del mercato, che va però bilanciato tenendo conto delle possibili errate interpretazioni dei dati tecnici.

L'informativa societaria tiene conto dei principi di materialità e proporzionalità dell'informazione. I dati devono essere accessibili, certi, pubblicati nel periodo di tempo al quale si riferisce l'informazione, aggiornati con periodicità e confrontabili nel tempo.

1.6 Swiss Solvency Test (SST)

Il test svizzero di solvibilità rileva la situazione economica di rischio delle imprese di assicurazione. Questo strumento di vigilanza mira a garantire che le imprese di assicurazione siano in grado di erogare in modo permanente le prestazioni concordate.

L'autorità di vigilanza svizzera non tutela individualmente le singole persone assicurate, bensì l'intera comunità di assicurati. Mette in atto questa protezione collettiva garantendo che le imprese di assicurazione dispongano di mezzi finanziari sufficienti e pertanto siano in grado di onorare i propri impegni di pagamento a lungo termine. Solo così gli assicurati possono far fronte ai propri impegni.

Lo *Swiss Solvency Test* stabilisce il capitale proprio economico minimo di cui un assicuratore deve disporre ed è fissato in ragione dei rischi assunti dall'assicuratore. In una prima fase l'assicuratore definisce il proprio capitale disponibile, e a tal fine, a ogni voce degli attivi e dei passivi di bilancio viene assegnato un valore. In una seconda fase si valuta se l'assicuratore dispone di

capitale sufficiente a far fronte ai propri impegni, anche in scenari sfavorevoli. L'assicuratore deve, inoltre, essere a conoscenza dei rischi a cui è esposto il suo bilancio e di come essi possano incidere sul capitale disponibile nella peggiore delle ipotesi.

La FINMA stabilisce le esigenze di capitale in modo tale che l'assicuratore non si trovi in difficoltà patrimoniali neppure nel caso di eventi che avvengono ogni cento anni. Il capitale così calcolato è denominato capitale previsto. Il test tiene conto di tutti i principali rischi di mercato, di credito e di assicurazione.

Per la misurazione dei rischi, le imprese di assicurazione utilizzano un modello standard prescritto dalla FINMA. Se la situazione di rischio specifica di un'impresa assicurativa è tale da non poter essere rappresentata adeguatamente con il modello standard, l'impresa di assicurazione deve creare un proprio modello interno, il quale deve soddisfare i criteri del test e, per poter essere utilizzato, deve essere stato approvato dalla FINMA.

Lo *Swiss Solvency Test* è basato su tre principi:

- 1) Per fare in modo che il bilancio dell'impresa di assicurazioni rispecchi la realtà economica, gli strumenti finanziari con un prezzo di mercato sono iscritti a bilancio al prezzo di mercato, mentre le posizioni senza prezzo di mercato vengono valutate tramite modelli che si orientano ai prezzi di mercato.
- 2) Nel calcolo del capitale previsto si tiene conto dei rischi di mercato, di credito e di assicurazione.
- 3) Non sono ammesse posizioni fuori bilancio. Si tiene conto dell'interazione dei rischi sulla pagina degli attivi e dei passivi del bilancio.

Anche grazie al primo principio, il test contribuisce a individuare anticipatamente eventuali difficoltà finanziarie delle imprese di assicurazione. Variazioni dei tassi d'interesse o dei corsi azionari si rispecchiano immediatamente nel capitale disponibile, ed è per questo che una valida gestione dei rischi con salvaguardia o trasferimento dei rischi può proteggere il capitale disponibile da movimenti dei mercati finanziari. Nel caso estremo in cui il capitale disponibile risulti inferiore al capitale previsto, la FINMA esige che l'impresa di assicurazione adotti misure per ricostituire una sufficiente capitalizzazione.

Gli altri due principi permettono di fornire un quadro attendibile della situazione di rischio dell'impresa assicurativa e la induce pertanto a gestire i rischi in base a principi economici.

Capitolo 2

Il rischio e le misure di rischio

2.1 Tipi di rischio

Il Comitato di Basilea individua due tipi di rischio finanziario all'interno dei suoi accordi: il rischio di credito e il rischio di mercato. Il Prof. Arlotta (2011) li descrive come quei rischi che vengono percepiti in modo più diretto dalle imprese, ai quali, con Basilea 2, sono state attribuite una maggiore attenzione e una crescente sensibilità.

- Rischio di credito: è il rischio di incorrere in perdite a causa dell'inadempienza o dell'insolvenza della controparte.
- Rischio di mercato: è legato ad oscillazioni del valore di attività/passività a seguito di variazioni delle condizioni di mercato.

La trasformazione del contesto in cui operano le banche e la modifica delle attività da loro svolte hanno incrementato l'attenzione alla gestione integrata dei rischi bancari. Tre fenomeni, collegati fra essi, hanno portato alla situazione attuale.

Il primo riguarda l'incremento della volatilità dei mercati finanziari, in particolar modo evidenziata dall'integrazione tra gli stessi. Questo incremento ha posto in evidenza la rilevanza dei rischi assunti dalle banche nelle attività di trasformazione delle scadenze dal passivo all'attivo, ed ha inoltre generato una nuova domanda di strumenti dedicati alla copertura del rischio da parte degli investitori, portando allo sviluppo di nuovi tipi di attività per le banche.

Il secondo riguarda l'aumento della concorrenza nell'attività di intermediazione creditizia, a causa di un più frequente accesso diretto al mercato dei capitali da parte di soggetti finanziatori e soggetti finanziati. Il risultato è stata una riduzione dei margini di profitto derivanti da prestiti e depositi bancari che ha indotto gli intermediari ad incrementare i rischi assunti nelle attività bancarie e l'esposizione al rischio di mercato.

Il terzo, causa diretta del secondo, riguarda il cambio di atteggiamento delle autorità di vigilanza, sia per quanto concerne gli obbiettivi che per quanto concerne gli strumenti utilizzati, passando da strumenti di vigilanza strutturale a strumenti di vigilanza prudenziale.

2.2 Il rischio come variabile casuale: il patrimonio netto futuro

Artzner, Delbaen, Eber e Heath (1999) introducono il rischio collegandolo alla variabilità del valore futuro di una posizione, dovuto ai cambiamenti di mercato o più generalmente ad eventi incerti.

Gli oggetti che vengono considerati sono le variabili casuali sull'insieme degli stati di natura ad una data futura, interpretate come possibili valori futuri di posizioni o di portafogli detenuti attualmente. Una prima misurazione del rischio di una posizione sarà quella di verificare se il suo valore futuro appartiene o meno al sottoinsieme dei rischi accettabili, decisione che spetta ad un'autorità di vigilanza.

Per un rischio non accettabile, modificare la posizione può essere un rimedio. Oppure si può cercare degli strumenti comunemente accettati che, in aggiunta alla posizione attuale, rendono il suo valore futuro accettabile per l'autorità. Il costo attuale per ottenere uno o più di questi strumenti in numero sufficiente è un buon candidato per una misura di rischio della posizione inizialmente non accettabile.

Consideriamo un solo periodo di incertezza tra due date 0 e T . Le varie valute sono numerate da i , con $1 \leq i \leq I$ e, per ciascuna di esse, è dato uno strumento di "riferimento" che riporta un'unità della valuta i nella data 0 in r_i unità della valuta i nella data T . Semplici strumenti possono essere delle obbligazioni senza cedola con scadenza in data T .

Dal punto di vista di un investitore, il quale considera un portafoglio di titoli in varie valute, i tassi di cambio alla data 0 sono supposti uguali a 1, mentre e_i denota il numero casuale di unità di valuta 1 che un'unità di valuta i acquista in data T . Il portafoglio iniziale dell'investitore consiste in posizioni A_i , con $1 \leq i \leq I$. La posizione A_i fornisce $A_i(T)$ unità di valuta i in data T .

Definiamo allora il "rischio" come il patrimonio netto futuro dell'investitore ottenuto come $\sum_{i=1}^I e_i \cdot A_i(T)$.

2.3 Assiomi sugli insiemi di accettazione

Supponiamo che l'insieme di tutti i possibili stati del mondo alla fine del periodo sia noto, mentre potrebbero essere sconosciute le probabilità dei vari stati. Nel caso di rischio di mercato, lo stato del mondo potrebbe essere descritto da un elenco (assunto noto) dei prezzi di tutti i titoli e di tutti i

tassi di cambio. Assumiamo inoltre che i mercati alla data T siano liquidi, così da consentire l'utilizzo di modelli meno complessi.

Riporto la notazione che viene utilizzata nel seguito da Artzner, Delbaen, Eber e Heath (1999).

- (a) Chiamiamo Ω l'insieme finito degli stati di natura. Se consideriamo Ω come l'insieme degli esiti di un esperimento, si potrà calcolare il patrimonio netto finale di una posizione per ogni elemento di Ω , variabile casuale denotata da X . La sua parte negativa, $\max(-X, 0)$, è denotata da X^- e il suo estremo superiore è denotato da $\|X^-\|$. La funzione indicatrice dello stato ω è denotata da $\mathbf{1}_{\{\omega\}}$.
- (b) Sia $\mathcal{G}$ l'insieme di tutti i rischi, che è l'insieme di tutte le funzioni con valori reali in Ω e può essere identificato da R^n , dove $n = \text{card}(\Omega)$. Il sottoinsieme degli elementi non negativi di $\mathcal{G}$ può essere denotato da L_+ , mentre quello degli elementi negativi da L_- .
- (c) Chiamiamo $\mathcal{A}_{i,j}$, con $j \in J_i$, un insieme di patrimoni netti finali, espressi in valuta i , e accettati dal regolatore j nella regione i .
- (d) Possiamo denotare con $\mathcal{A}_i$ l'intersezione $\bigcap_{j \in J_i} \mathcal{A}_{i,j}$ e quindi utilizzare la notazione generica $\mathcal{A}$ negli assiomi che seguono.

I primi due assiomi indicano che un patrimonio netto finale che è sempre non negativo non richiede capitale extra, mentre un patrimonio netto che è sempre negativo (strettamente) lo richiede.

Assioma 2.1. *L'insieme di accettazione $\mathcal{A}$ contiene L_- .*

Assioma 2.2. *L'insieme di accettazione $\mathcal{A}$ non interseca l'insieme L_{--} dove*

$$L_{--} = \{X \mid \text{per ogni } \omega \in \Omega, X(\omega) < 0\}$$

Si può inoltre considerare un assioma più forte:

Assioma 2.3. *L'insieme di accettazione $\mathcal{A}$ è tale che $\mathcal{A} \cap L_- = \{0\}$.*

Il prossimo assioma riflette l'avversione al rischio del regolatore, del direttore di borsa o del supervisore della sala di trading.

Assioma 2.4. *L'insieme di accettazione $\mathcal{A}$ è convesso.*

Un requisito meno naturale nell'insieme di patrimoni netti finali accettabili è:

Assioma 2.5. *L'insieme di accettazione $\mathcal{A}$ è un sottoinsieme positivamente omogeneo.*

2.4 Proprietà delle misure di rischio

Gli insiemi dei patrimoni netti futuri accettabili sono gli oggetti primari da considerare per descrivere l'accettazione o il rifiuto di un rischio. Attraverso degli strumenti di riferimento è possibile definire una misura di rischio descrivendo quanto una posizione sia vicina o lontana dall'accettazione.

Definizione 2.1. Una misura di rischio è una mappatura da $\mathcal{G}$ a $\mathbb{R}$.

Quando è positivo, il numero $\rho(X)$ assegnato dalla misura ρ al rischio X è interpretato come il contante extra minimo che l'agente deve aggiungere alla posizione rischiosa X ed investire prudentemente, cioè nello strumento di riferimento, per procedere con i propri piani. Se invece è negativo, l'ammontare di contante $-\rho(X)$ può essere ritirato dalla posizione, o ricevuto a titolo di restituzione. Definiamo la corrispondenza tra insiemi di accettazione e misure di rischio.

Definizione 2.2. Dato il tasso totale di rendimento r su uno strumento di riferimento, la misura di rischio associata ad un insieme di accettazione $\mathcal{A}$ è la mappatura da $\mathcal{G}$ a $\mathbb{R}$ denotata da $\rho_{\mathcal{A},r}$ e definita così

$$\rho_{\mathcal{A},r}(X) = \inf\{m \mid m \cdot r + X \in \mathcal{A}\}$$

Definizione 2.3. L'insieme di accettazione associato ad una misura di rischio ρ è l'insieme denotato da $\mathcal{A}_\rho$ e definito così

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{G} \mid \rho(X) \leq 0\}$$

Andiamo ora a considerare diverse possibili proprietà per una misura di rischio ρ definita su $\mathcal{G}$.

Il primo requisito garantisce che la misura di rischio sia indicata nelle stesse unità del patrimonio netto finale. Questo particolare insieme è modellato in tal modo da avere 1 come prezzo iniziale e un prezzo r strettamente positivo in ogni stato di natura in data T . Sarà responsabilità del regolatore accettare per r possibili valori casuali come anche per valori inferiori a 1.

Vediamo ora quali sono le proprietà individuate da Artzner, Delbaen, Eber e Heath (1999) per una misura di rischio.

La prima proprietà dice che aggiungendo (sottraendo) l'importo iniziale certo α alla posizione iniziale e investendo nello strumento di riferimento, semplicemente la misura di rischio diminuisce (aumenta) del valore α .

Proprietà 1 (Invarianza in traslazione). Per qualsiasi $X \in \mathcal{G}$ e qualsiasi numero reale α , si ottiene

$$\rho(X + \alpha \cdot r) = \rho(X) - \alpha$$

Questo significa che disporre di denaro contante riduce il rischio dello stesso importo. Ciò deriva dalla definizione di misura di rischio come capitale di riserva necessario per mantenere un certo livello di rischio. Disporre di denaro contante uguale al rischio sostenuto da un portafoglio $\alpha = \rho(X)$ rende nullo il rischio totale.

Proprietà 2 (Subadditività). Per qualsiasi X_1 e $X_2 \in \mathcal{G}$,

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

La combinazione di due portafogli non dovrebbe mai avere un rischio maggiore della somma del rischio dei due portafogli presi singolarmente.

Proprietà 3 (Omogeneità positiva). Per qualsiasi $\lambda \geq 0$ e qualsiasi $X \in \mathcal{G}$,

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

In altre parole, raddoppiare il capitale significa raddoppiare il rischio.

Proprietà 4 (Monotonicità). Per qualsiasi X e $Y \in \mathcal{G}$ con $X \leq Y$, abbiamo che

$$\rho(Y) \leq \rho(X)$$

Questo significa che se sappiamo che il valore di un portafoglio sarà sempre maggiore del valore di un altro portafoglio, allora il portafoglio con il valore garantito più alto sarà sempre meno rischioso.

Proprietà 5 (Rilevanza). Per qualsiasi $X \in \mathcal{G}$ con $X \leq 0$ e $X \neq 0$, abbiamo che

$$\rho(X) > 0$$

Proprietà 6 (Convessità). Per qualsiasi X_1 e $X_2 \in \mathcal{G}$ e qualsiasi $\lambda \geq 0$,

$$\rho(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda \rho(X_1) + (1 - \lambda)\rho(X_2)$$

Essenzialmente, ciò significa che la diversificazione e l'investimento in attività diverse non dovrebbe mai aumentare il rischio, ma potrebbe ridurlo.

Diamo di seguito la definizione di misura di rischio coerente.

Definizione 2.4 (Coerenza). Una misura di rischio che soddisfa le proprietà di invarianza in traslazione, subadditività, omogeneità positiva e monotonicità è detta *coerente*.

Inoltre, le proprietà di convessità e omogeneità positiva insieme implicano la proprietà di subadditività.

2.5 Coerenza o non coerenza?

Per molti anni il concetto di coerenza non è stato ritenuto una proprietà fondamentale per una misura di rischio, ritenendola una proprietà presente solo in un mondo ideale. L'introduzione degli assiomi è stato un passo necessario per rappresentare una realtà complessa attraverso una formulazione matematica. Gli assiomi di coerenza assimilano tutte quelle caratteristiche che individuano una misura di rischio all'interno della classe di statistiche che regolano le dinamiche di un portafoglio.

L'assioma di subadditività verifica se la misurazione del rischio di un portafoglio è coerente con quello dei singoli portafogli di cui si compone. Questa proprietà è inoltre necessaria per i requisiti di adeguatezza patrimoniale nella vigilanza bancaria. Si pensi ad esempio ad una banca composta da diverse filiali, che deve essere certa che il capitale complessivo sia adeguato in base al requisito patrimoniale richiesto dalle filiali ed in proporzione al proprio rischio. Nel caso in cui l'assioma non sia rispettato, il rischio dell'intera banca potrebbe rivelarsi molto più elevato della somma dei rischi parziali.

La subadditività è anche una proprietà essenziale nei problemi di ottimizzazione del portafoglio. Essa è legata alla convessità della superficie di rischio che deve essere minimizzata nello spazio dei portafogli. Solo le superfici convesse saranno sempre dotate di un punto di minimo assoluto globale, pertanto il processo di minimizzazione del rischio avrà sempre una soluzione ottimale unica e ben diversificata.

Capitolo 3

Value-at-Risk e Expected Shortfall

3.1 Introduzione

Il Value-at-Risk (VaR) nel tempo è diventato una misura standard per la gestione del rischio finanziario. Ciò è dovuto alle sue caratteristiche che lo rendono uno strumento semplice da usare, data la facilità di calcolo e l'immediata applicabilità. Inoltre, il VaR è molto facile da validare o da sottoporre a *backtest*, nel senso che, dopo aver subito una serie di perdite, è possibile tornare indietro e confrontare il rischio previsto con il rischio effettivo.

Il VaR misura una perdita che in un periodo di tempo considerato non supererà una certa soglia ad un livello di confidenza fissato. Se stimiamo che il VaR al 99% di un giorno per una banca è di 10 milioni, siamo sicuri al 99% che entro il giorno successivo la banca non perderà più di 10 milioni. Possiamo però aspettarci che un giorno su 100 la banca subirà perdite superiori a questo valore. Se scopriamo però che nei 100 giorni passati la banca ha subito una serie di perdite superiori a 10 milioni, allora c'è qualcosa di sbagliato nella stima del VaR .

Nell'attuale quadro normativo del Comitato di Basilea, le banche sono tenute a riferire il proprio VaR al 99% su base giornaliera. I valori riferiti specificano l'ammontare di capitale richiesto per mantenere un certo livello di rischio nella banca, ovvero il requisito patrimoniale. Per assicurare che le stime del VaR fornite dalle banche siano riportate correttamente, i valori sono sottoposti a *backtest* rispetto alle perdite che si sono realizzate, contando il numero di volte in cui le perdite di una banca hanno superato la soglia del VaR nell'ultimo anno. Se questo numero è troppo elevato, la banca sarà costretta ad aumentare il proprio requisito patrimoniale.

D'altro canto, il *VaR* presenta però alcuni problemi concettuali. In Artzner, Delbaen, Eber e Heath (1997) e (1999) sono evidenziate le seguenti lacune:

- non specifica di quanto una perdita superi la soglia, ovvero non tiene conto delle perdite che superano un certo valore (problema del rischio di coda);
- non è una misura di rischio coerente poichè non soddisfa la proprietà di subadditività.

Per spiegare il concetto di misura di rischio si fa affidamento agli assiomi descritti in precedenza e che caratterizzano le proprietà che una determinata misura deve possedere. Grazie a questi assiomi la gestione del rischio diventa improvvisamente una scienza con le proprie regole, all'interno della quale il *VaR* non viene riconosciuto come misura di rischio.

L'incapacità di catturare il rischio di coda e la mancanza di subadditività ha portato all'adozione di un'altra misura di rischio, chiamata *Expected Shortfall*. In breve, l'*Expected Shortfall* misura la perdita attesa nella coda della distribuzione, ovvero la perdita attesa nei giorni in cui la perdita supera la soglia del *VaR*. Poiché questa misura di rischio tiene in considerazione ciò che succede nella coda della distribuzione è in grado di catturare efficacemente il rischio di coda. Inoltre, l'*Expected Shortfall* è una misura di rischio che soddisfa la proprietà di subadditività.

3.2 Value-at-Risk

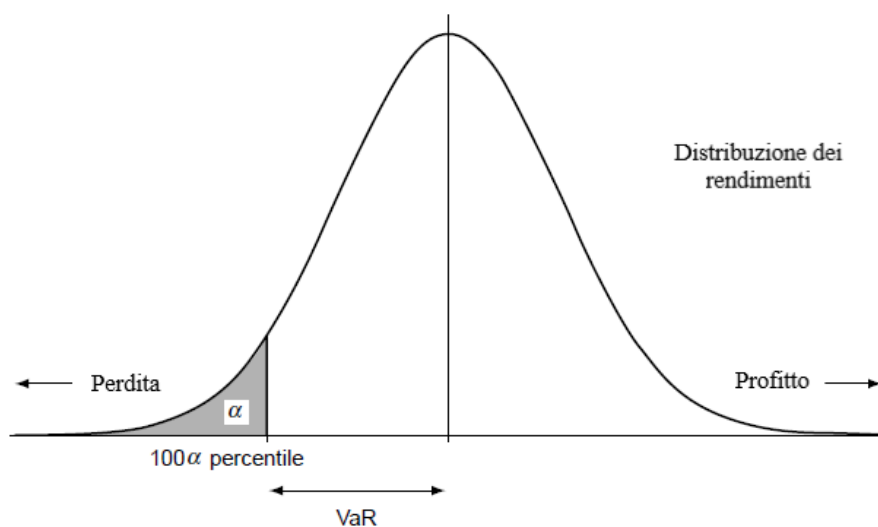
3.2.1 Definizione del *VaR*

Sia V_0 il valore di un portafoglio oggi e V_1 il valore del portafoglio il giorno dopo. Inoltre sia R_0 il rendimento percentuale di un'attività priva di rischio. Solitamente si utilizza il *VaR* con un livello del 99%, ovvero viene calcolata una perdita che non verrà superata con una confidenza del 99%. In termini matematici il *VaR* al 99% si riferisce alla perdita peggiore nell'1% dei casi della distribuzione dei rendimenti. Pertanto denotiamo il *VaR* al 99% come $VaR_{1\%}$ e diciamo che in questo caso $\alpha = 0.01$. Wimmerstedt (2015) definisce il *VaR* di un portafoglio con patrimonio netto finale $X = V_1 - V_0 R_0$ ad un livello α come segue:

Definizione 3.1 (Value-at-Risk). Dato $\alpha \in (0,1)$ e un'attività priva di rischio con rendimento percentuale R_0 , il *Value-at-Risk* al livello α del patrimonio netto finale X con funzione di densità P è

$$VaR_\alpha(X) = \min\{m \mid P[L \leq m] \geq 1 - \alpha\} \quad (3.1)$$

dove L è la perdita del portafoglio attualizzata $L = -X/R_0$.

Figura 3.1: Distribuzione dei rendimenti e VaR

Se ora assumiamo una distribuzione dei rendimenti con funzione di densità P continua e strettamente monotona crescente, possiamo definire il VaR come segue

$$VaR_{\alpha}(X) = -P^{-1}(\alpha) \quad (3.2)$$

Verifichiamo con un esempio che, mentre sono soddisfatte le proprietà di invarianza in translazione, omogeneità positiva e monotonicità, il VaR non soddisfa la proprietà di subaddittività e non è quindi una misura di rischio coerente. Per la dimostrazione vediamo degli esempi presi da Acerbi, Nordio e Sirtori (2001).

Esempio 3.1. *Assumiamo di avere due obbligazioni X_1 e X_2 . Le due obbligazioni hanno tassi di recupero del 70% e 90% e probabilità di insolvenza del 3% e del 2% rispettivamente, ma non possono essere entrambe insolventi.*

Evento finale	Probabilità	X_1	X_2	$X_1 + X_2$
1	3%	70	100	170
2	2%	90	100	190
3	3%	100	70	170
4	2%	100	90	190
5	90%	100	100	200

La tabella seguente mostra i valori iniziali delle obbligazioni e il valore della loro combinazione.

	X_1	X_2	$X_1 + X_2$
Valore iniziale	98.9	98.9	197.8
VaR 5%	8.9	8.9	27.8

Vediamo che il VaR della combinazione è più grande del VaR della somma delle singole obbligazioni, e questo basta per affermare che il VaR non soddisfa la proprietà di subadditività poiché sottostima i rischi in X_1 e in X_2 . In un problema di ottimizzazione di un portafoglio, un investitore che vuole ridurre al minimo il VaR costruirebbe un portafoglio composto solo da obbligazioni X_1 o solo da obbligazioni X_2 , anziché sfruttare il concetto di diversificazione.

Artzner, Delbaen, Eber e Heath (1999) fanno notare che se i quantili sono calcolati sotto una distribuzione per la quale tutti i prezzi sono congiuntamente normali, allora i quantili soddisfano la proprietà di subadditività dato che le probabilità di eccedenza sono minori di 0.5. Infatti, $\sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_Y$ per ogni coppia (X, Y) di variabili casuali. Poiché per una variabile casuale normale X abbiamo che

$$VaR_\alpha(X) = -(\mathbb{E}[X] + \Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma_X),$$

con Φ funzione di ripartizione della Normale e poiché $\Phi^{-1}(0.5) = 0$, segue che la proprietà di subadditività è soddisfatta.

3.2.2 "Pro e Contro" del VaR

Nella gestione del rischio finanziario il VaR ha certamente rappresentato un significativo passo in avanti rispetto alle più tradizionali misure basate principalmente sulla sensibilità alle variabili di mercato. Secondo Acerbi, Nordio e Sirtori (2001) la forza del VaR si basa sulle seguenti caratteristiche:

1. il VaR si applica a qualsiasi strumento finanziario ed è espresso nella stessa unità di misura, ovvero in “denaro perso”;
2. si può effettuare un confronto diretto tra la rischiosità relativa tra un portafoglio azionario e un portafoglio *forex* (utilizzato per il *trading* sui mercati di cambio delle valute straniere) conoscendo i loro VaR;
3. il VaR include una stima degli eventi futuri e consente di convertire il rischio di un portafoglio in un unico numero.

Il calcolo del VaR sui portafogli finanziari incontra però delle difficoltà nei seguenti casi:

1. includere nell'analisi l'intero insieme delle variabili di rischio che influenzano un portafoglio;
2. stimare opportunamente le probabilità di eventi futuri di mercato.

Nei casi reali, a causa della complessità degli aspetti computazionali e della delicatezza della stima delle probabilità di mercato, per calcolare il VaR si deve ricorrere ad assunzioni (a volte forti) sia sulla dipendenza funzionale degli strumenti finanziari dai fattori di rischio, sia sulle distribuzioni di probabilità.

Nel caso di portafogli complessi esposti a diverse variabili di rischio come nelle istituzioni finanziarie, il calcolo del VaR può spesso essere un compito arduo. Un aspetto impegnativo è dovuto al fatto che il calcolo non può essere suddiviso in sotto calcoli separati a causa della doppia non additività del VaR .

1. Non additività per posizione: dato un portafoglio composto da due sottoportafogli, il VaR totale non è dato dalla somma dei due VaR parziali, con la conseguenza che l'aggiunta di un nuovo strumento ad un portafoglio spesso rende necessario ricalcolare il VaR per l'intero portafoglio.
2. Non additività per variabile di rischio: per un portafoglio che dipende da più variabili di rischio, il VaR non è la somma dei VaR parziali.

In entrambi i casi, assumendo la normalità dei rendimenti di un portafoglio, si può mostrare che la non-additività è in realtà una subadditività: il VaR totale è sempre minore o uguale della somma dei VaR parziali.

La non-additività è il segno diretto di uno degli aspetti più interessanti del VaR come strumento di analisi del rischio, ovvero la sua capacità di mostrare i vantaggi derivanti dalla diversificazione degli strumenti finanziari e dei fattori di rischio. Il VaR è infatti sensibile all'effetto *hedging* delle diverse posizioni e all'effetto di correlazione reciproca dei fattori di rischio. La subadditività del VaR sotto l'assunzione di Gaussianità rappresenta la convinzione comune secondo la quale la diversificazione diminuisce i rischi.

Vediamo di seguito quali sono state le critiche più frequentemente usate contro il VaR , le quali hanno acceso un forte dibattito tra Jorion (1997) e Taleb (1997).

- “Il VaR arriva quando il danno è già fatto”: al fine di stimare le probabilità di mercato è abitudine comune prevedere gli scenari futuri su dati di mercato passati. Per fare un esempio, è chiaro che il giorno prima di alcune turbolenze di mercato, le stime dei parametri non saranno in grado di prevedere l'improvviso salto di volatilità e il VaR sottostimerà i rischi, notando l'aumento dei rischi solo qualche giorno dopo.

- “Il VaR *non ha senso*”: le stime del *VaR* specialmente nel caso di portafogli complessi, possono essere così complesse da ottenere un numero finale che potrebbe non avere alcun valore statistico. Tra i fattori che rendono difficile la stima possiamo trovare:

1. la complessità degli strumenti finanziari
2. la dimensione del portafoglio
3. la valutazione delle probabilità di mercato
4. le approssimazioni introdotte per velocizzare il calcolo
5. l'errore statistico nelle stime del *VaR*. Come descritto in Bassi, Embrechts e Kafetzaki (1997), il *VaR*, essendo una variabile basata sui quantili, è affetto da errori statistici molto grandi, in particolare quando il livello di probabilità scelto è molto piccolo.

Nonostante queste osservazioni, dobbiamo ricordare che prima di fidarsi di qualsiasi stima statistica è necessario che le approssimazioni e le ipotesi fatte siano sotto controllo.

Spesso vengono prodotte stime del *VaR* senza prima menzionare le ipotesi sottostanti e si presentano i risultati ottenuti a soggetti inconsapevoli dell'affidabilità dei numeri.

3.2.3 Perché utilizzare il *VaR*?

Per il calcolo del *VaR* si deve scegliere un determinato livello di confidenza selezionando l'insieme dei “casi peggiori” considerati e un orizzonte temporale su cui vengono effettuate le stime dei guadagni futuri. Per semplicità consideriamo un livello del 5% e un orizzonte temporale di 7 giorni.

Una definizione usata spesso per il *VaR* ma che risulta incorretta è la seguente.

“Il VaR è la massima perdita potenziale che un portafoglio può subire nel 5% dei casi peggiori in 7 giorni”

La seguente versione corretta tuttavia è raramente usata poiché risulta insolita:

“Il VaR è la minima perdita potenziale che un portafoglio può subire nel 5% dei casi peggiori in 7 giorni”

ed è frequentemente rimpiazzata con la versione politicamente più “corretta”

“Il VaR è la massima perdita potenziale che un portafoglio può subire nel 95% dei casi migliori in 7 giorni”

Un'attenta analisi delle tre definizioni pone qualche dubbio sul fatto che il *VaR* sia davvero la variabile più appropriata per descrivere i rischi associati al 5% dei casi peggiori di una distribuzione. Infatti, perché dovremmo essere interessati alla perdita nel peggiore dei casi, indipendentemente dalla gravità di tutte le altre perdite? Il *VaR*, in altre parole, è una sorta di “migliore dei peggiori scenari” e inoltre sottostima sistematicamente le perdite potenziali associate al livello di confidenza determinato.

3.3 Expected Shortfall

3.3.1 Definizione dell'Expected Shortfall

A differenza del *VaR*, l'*Expected Shortfall* cerca di rispondere alla domanda

“Qual'è la perdita attesa subita nel $\alpha\%$ dei casi peggiori del nostro portafoglio?”

Definizione 3.2 (*Expected Shortfall*). Sia X il rendimento di un portafoglio in un orizzonte di tempo T e sia $\alpha \in (0, 1)$ il livello di confidenza specificato. L'*Expected Shortfall* ad un livello α di un portafoglio è definito come

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}(E[X\mathbf{1}_{\{X \leq x_\alpha\}}] - x_\alpha(P[X \leq x_\alpha] - \alpha)) \quad (3.3)$$

dove $\mathbf{1}$ è la funzione indicatrice e α indica il livello di confidenza, ovvero se α è il 5%, l'*Expected Shortfall* indicherà che nel 95% dei casi si subiranno perdite inferiori al valore calcolato. Questa definizione fornisce quindi una misura di rischio coerente. Nonostante possa apparire complicata, l'equazione può essere interpretata come la traduzione matematica alla domanda che ci siamo posti sopra.

Per comprendere meglio la formulazione, il termine $x_\alpha(P[X \leq x_\alpha] - \alpha)$ deve essere interpretato come la parte in eccesso da sottrarre al valore atteso $E[X\mathbf{1}_{\{X \leq x_\alpha\}}]$ quando $\{X \leq x_\alpha\}$ ha probabilità maggiore di α . Al contrario, quando $P[X \leq x_\alpha] = \alpha$ e se la distribuzione è continua, il termine scompare e otteniamo $ES_\alpha = TCE_\alpha$, ovvero il valore atteso condizionato di coda (“tail conditional expectation”):

$$TCE_\alpha(X) = -E[X|X \leq x_\alpha] \quad (3.4)$$

Se ora non consideriamo ES_α come una combinazione di valori attesi, possiamo ottenerne una rappresentazione che rivela molto più chiaramente la diretta dipendenza tra il parametro α e la funzione della distribuzione $F(X) = P[X \leq x]$. Infatti, introducendo la funzione inversa di $F(X)$

$$F^{-1}(u) = \inf\{x|F(x) \geq u\}$$

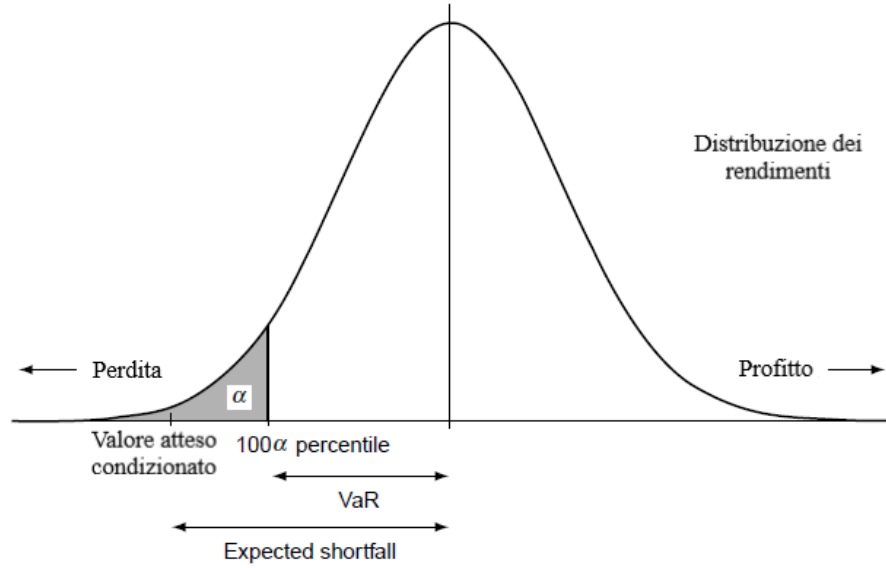


Figura 3.2: Distribuzione dei rendimenti, VaR e Expected Shortfall

si può mostrare che ES_α può essere espressa come la media negativa di $F^{-1}(p)$ nell'intervallo di confidenza di livello $p \in (0, \alpha]$:

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(u) du \quad (3.5)$$

e dalla definizione del VaR possiamo riscrivere l'equazione dell'*Expected Shortfall* come:

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_u(X) du \quad (3.6)$$

3.3.2 Problemi di utilizzo

Mentre il VaR rimane la misura di rischio più importante ad oggi, ci si aspetta un cambiamento nel prossimo futuro. Seguendo le critiche poste sul VaR , i supervisori hanno proposto di sostituire il VaR al 99% con l'*Expected Shortfall* al 97.5% come misura di rischio ufficiale nel calcolo del requisito patrimoniale. Lo scopo è quello di controllare il rischio di coda.

Mentre l'*Expected Shortfall* risolve alcuni dei problemi relativi al VaR , c'è uno svantaggio che impedisce una transizione completa dal VaR all'*Expected Shortfall*. Come già spiegato sopra, è molto semplice effettuare il *backtest* del VaR contando il numero di eccedenze della soglia. Non è però così semplice effettuare un *backtest* quando si utilizza l'*Expected Shortfall*.

Nel 2011, Gneiting ha pubblicato un articolo che mostra che l'*Expected Shortfall* manca di una proprietà matematica chiamata elicibilità, che invece il *VaR* possiede, e che potrebbe essere necessaria per effettuare il *backtest*. In tal caso, se le autorità di vigilanza decidessero di cambiare la principale misura di rischio passando dal *VaR* all'*Expected Shortfall*, perderebbero la possibilità di valutare il rischio riportato e di conseguenza non riuscirebbero ad identificare le banche che presentano un rischio troppo basso.

Nel 2013 il Comitato di Basilea ha proposto di sostituire il *VaR* con l'*Expected Shortfall*, aggiungendo però che il *backtest* deve essere effettuato sul *VaR* anche se il capitale è basato sulle stime dell'*Expected Shortfall*. A seguito della proposta, nuove ricerche hanno indicato che potrebbe essere possibile effettuare il *backtest* per l'*Expected Shortfall* senza riscontrare grandi difficoltà.

3.4 Valori parametrici di *VaR* e Expected Shortfall

Le distribuzioni che consideriamo sono la Normale con media 0 e deviazione standard σ , e la t di Student con ν gradi di libertà, parametro di locazione 0 e parametro di scala σ .

3.4.1 *VaR*

Poiché entrambe le distribuzioni sopra indicate hanno funzioni di densità continue e monotone crescenti, otteniamo che il *VaR* è

$$VaR_\alpha(X) = -F^{-1}(\alpha) \quad (3.7)$$

Assumendo che X sia distribuita come una Normale standard, possiamo calcolare il *VaR* come

$$VaR_\alpha(X) = -\sigma\Phi^{-1}(\alpha) = \sigma\Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (3.8)$$

dove $\Phi(x)$ è il quantile della Normale standard.

Assumendo, invece, che X sia distribuita come una t di Student con parametri ν e σ , possiamo scrivere il *VaR* come

$$VaR_\alpha(X) = -\sigma t_\nu^{-1}(\alpha) = \sigma t_\nu^{-1}(1 - \alpha) \quad (3.9)$$

dove $t_\nu(x)$ è il quantile della distribuzione t di Student standard.

3.4.2 Expected Shortfall

Data la definizione di *Expected Shortfall*, abbiamo che

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_u(X) du \quad (3.10)$$

Se assumiamo che X sia una variabile Normale standard sappiamo che $VaR_\alpha(X) = \sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)$. Possiamo allora scrivere l'*Expected Shortfall* come

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= \frac{\sigma}{\alpha} \int_0^\alpha \Phi^{-1}(1-u) du \\ &= \frac{\sigma}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 \Phi^{-1}(u) du \end{aligned}$$

Facendo un cambio di variabili e ponendo $q = \Phi^{-1}(u)$ otteniamo

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= \frac{\sigma}{\alpha} \int_{\Phi^{-1}(1-\alpha)}^\infty q\phi(q) dq \\ &= \frac{\sigma}{\alpha} \int_{\Phi^{-1}(1-\alpha)}^\infty q \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-q^2/2} dq \\ &= -\frac{\sigma}{\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-q^2/2} \right]_{\Phi^{-1}(1-\alpha)}^\infty \\ &= \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(1-\alpha))}{\alpha} \end{aligned}$$

dove $\phi(x)$ è la funzione di densità di una distribuzione Normale standard.

Possiamo fare lo stesso calcolo assumendo che X segua una distribuzione t di Student con parametri ν e σ . L'*Expected Shortfall* può essere scritto come

$$ES_\alpha(X) = \sigma \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(1-\alpha))}{\alpha} \frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1}$$

dove $g_\nu(x)$ è la funzione di densità di una distribuzione t di Student standard. La tabella sottostante mostra *VaR* e *Expected Shortfall* per differenti livelli utilizzando diverse assunzioni parametriche. Tutte le stime assumono $\sigma = 1$.

	VaR			Expected Shortfall		
	95%	97.5%	99%	95%	97.5%	99%
$t_3(0, 1)$	2.35	3.18	4.54	3.87	5.04	7.00
$t_6(0, 1)$	1.94	2.45	3.14	2.71	3.26	4.03
$t_9(0, 1)$	1.83	2.26	2.82	2.45	2.88	3.46
$t_{12}(0, 1)$	1.78	2.18	2.68	2.34	2.73	3.22
$t_{15}(0, 1)$	1.75	2.13	2.60	2.28	2.64	3.10
$N(0, 1)$	1.64	1.96	2.33	2.06	2.34	2.67

Dalla tabella si può notare che per la distribuzione Normale, il *VaR* al 99% e l'*Expected Shortfall* al 97.5%, assumono, più o meno, lo stesso valore. Questo significa che se i rendimenti sono distribuiti normalmente, una transizione dal *VaR* all'*Expected Shortfall* non aumenterebbe gli oneri sul capitale. Se invece i rendimenti sono distribuiti come una t di Student, la transizione

provocherebbe un aumento del requisito patrimoniale, in quanto è possibile osservare che il valore dell'*Expected Shortfall* porterebbe ad avere soglie più alte e di conseguenza requisiti maggiori rispetto a quelli che verrebbero utilizzati considerando il *Var*.

Capitolo 4

Metodologie di calcolo del VaR

Il calcolo del VaR si basa su due tipi di approcci, quello parametrico basato sulla matrice di varianze/covarianze e quello basato sulle simulazioni. Quest'ultimo comprende il metodo Monte Carlo. Prima di descrivere le due tipologie, vediamo in breve quali sono le caratteristiche delle due.

Approccio parametrico

- Ipotizza che le possibili variazioni di valore di tutti i fattori di mercato seguano una distribuzione Normale;
- l'informazione sui possibili valori futuri dei fattori di mercato e sulle loro correlazioni è riassunta in una matrice di varianze/covarianze;
- le perdite dipendono da tale matrice e dalla sensibilità delle singole posizioni in un portafoglio rispetto a variazioni dei fattori di mercato;
- il VaR è ricavato come multipli della deviazione standard delle perdite future.

Approccio basato sulle simulazioni

- Le possibili variazioni di valore dei fattori di mercato non si distribuiscono necessariamente secondo una Normale;
- l'impatto dei possibili valori futuri dei fattori di mercato della banca è quantificato attraverso il ricalcolo del valore di ogni attività e passività come funzione delle nuove condizioni di mercato;
- il VaR va ricercato analizzando l'intera distribuzione delle perdite future, individuandone il valore massimo, dopo aver escluso una percentuale di casi a partire dai peggiori.

4.1 Approccio parametrico

L'approccio parametrico, detto anche varianze/covarianze, è quello più diffuso per la sua semplicità di implementazione. Tale semplicità consiste nel fatto che si assume che le variazioni dei parametri di mercato si distribuiscano sseguito un modello Gaussiano. La media e la varianza della distribuzione dei valori del portafoglio possono quindi essere dedotti dal calcolo della media e della varianza dei parametri di mercato sottostanti. La teoria finanziaria, come descritto da Betti (2001), assume che la distribuzione dei rendimenti sia normale in linea con la teoria di portafoglio di Markowitz e con il modello di Black e Scholes per il pricing delle opzioni. Così facendo è possibile utilizzare la deviazione standard quale indicatore statistico del grado di rischio. Data la forma della Normale, la probabilità di ottenere profitti molto alti (coda destra) o perdite molto alte (coda sinistra) è la stessa.

Vediamo di seguito come nella pratica si può procedere seguendo questo approccio.

Calcolare la perdita

1. Si determina il valore di mercato della posizione interessata;
2. si identifica la variabile casuale che determina il valore di mercato della posizione;
3. se la variabile casuale scelta è rappresentata dai rendimenti dei *risk factor* si identifica la sensibilità δ del valore di mercato della posizione alle variazioni dei fattori di rischio;
4. si stima la massima variazione potenziale delle variabili casuali rilevanti;
5. si ricava la massima variazione sfavorevole del portafoglio.

Vantaggi dei modelli parametrici

- Semplicità, sia sotto il profilo concettuale che sotto il profilo numerico, in quanto i calcoli non si presentano complicati e i sistemi informativi di supporto sono di semplice utilizzo;
- è la versione originale dei modelli *VaR*, presentata per la prima volta da RiskMetrics;
- numerosi database si basano sull'approccio parametrico;
- la maggior parte dei software utilizza questo tipo di approccio.

Il *VaR* parametrico però presenta anche alcuni limiti e/o svantaggi, come illustrato nell'elaborato di Ponzio (2014).

Limiti dei modelli parametrici

- L'assunzione di distribuzione Normale non permette di cogliere alcune peculiarità delle serie storiche finanziarie quali, ad esempio, *fat tails* e *skewness*;
- l'assunzione di una dipendenza lineare dai fattori di rischio resta valida solo in presenza di piccole variazioni degli stessi;
- quando la matrice di correlazione contiene un elevato numero di elementi il calcolo del *VaR* può diventare difficoltoso poiché l'algoritmo di calcolo ne è rallentato;
- con l'ipotesi di distribuzione Normale, quando si considerano come fattori di rischio i tassi di interesse utilizzati come riferimento per le transazioni monetarie, bisogna tenere presente che le loro variazioni possono essere dovute alle diverse politiche monetarie e non a fluttuazioni del tutto casuali intorno ai valori medi.

4.1.1 Stima della volatilità

Resti e Sironi (2008) affermano che nell'approccio parametrico uno dei metodi utilizzabili è quello che include i modelli che utilizzano dati di volatilità e correlazioni storiche per le stime di volatilità e correlazioni future. I modelli più semplici considerano questi due parametri come costanti, ipotizzando perciò distribuzioni dei rendimenti stabili nel tempo. I modelli più complessi, nati dall'esigenza di assumere volatilità e correlazioni variabili nel tempo (come del resto emerge dalle osservazioni empiriche), includono algoritmi basati sui modelli della famiglia ARCH/GARCH.

Modello ARCH

L'introduzione dei modelli ARCH permette la formalizzazione di processi non lineari né in media né in varianza in grado di spiegare le diverse caratteristiche connesse al fenomeno della volatilità variabile. Dato il set informativo $I_{t-1} = \{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}\}$, il termine di disturbo di un modello di regressione lineare segue un processo di tipo ARCH se sono verificate le seguenti condizioni:

1. La media di ε_t condizionato al set informativo I_{t-1} è nulla per ogni t .

$$E(\varepsilon_t | I_{t-1}) = 0 \quad (4.1)$$

Ciò implica anche che $E(\varepsilon_t) = 0$ e soprattutto che tale processo risulti serialmente incorrelato condizionatamente allo stesso set informativo:

$$Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k} | I_{t-h}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k} | I_{t-h}) - E(\varepsilon_t | I_{t-h}) E(\varepsilon_{t+k} | I_{t-h})$$

Dato che per la legge dei valori attesi iterati $E(\varepsilon_t|I_{t-h}) = E[E(\varepsilon_t|I_{t-1})|I_{t-h}] = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}|I_{t-h}) &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}|I_{t-h}) \\ Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}|I_{t-h}) &= E[E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}|I_{t+k-1})|I_{t-h}] \\ Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}|I_{t-h}) &= E[\varepsilon_t \cdot E(\varepsilon_{t+k}|I_{t+k-1})|I_{t-h}] \end{aligned}$$

Dato che $E(\varepsilon_{t+k}|I_{t+k-1}) = 0$ risulta:

$$Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}|I_{t-h}) = 0$$

2. La componente d'innovazione ε_t è data dalla relazione:

$$\varepsilon_t = u_t h_t^{1/2} \quad (4.2)$$

dove $u_t \sim i.i.d.(0, 1)$ è un processo standardizzato, spesso assunto come una Normale standard. In base a questa espressione si assume che e_t^2 è un previsore corretto per la volatilità in quanto per definizione si ha:

$$h_t = E(e_t^2|I_{t-1}) = Var(\varepsilon_t|I_{t-1}) \quad (4.3)$$

Detto ciò la distribuzione dell'innovazione risulta essere:

$$e_t|I_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (4.4)$$

La varianza condizionata è quindi variabile nel tempo. Un modello di regressione lineare sui rendimenti y_t con innovazioni che seguono un modello di tipo ARCH ha le seguenti componenti:

$$\begin{cases} y_t = x_t' b + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = u_t h_t^{1/2} \\ h_t = E(\varepsilon_t^2|I_{t-1}) \\ y_t|I_{t-1} \sim N(x_t' b, h_t) \end{cases} \quad (4.5)$$

Questi processi, inoltre, rappresentano lo strumento formale che mette in relazione le dinamiche (condizionate) della volatilità con il concetto di leptocurticità (non condizionata). Infatti l'innovazione rispetta pienamente la relazione:

$$\frac{E(\varepsilon_t^4)}{[E(\varepsilon_t^2)]^2} \geq 3 \quad (4.6)$$

Il modello ARCH viene introdotto per la prima volta da Engle (1982). Tale modello specifica la varianza condizionata come una funzione lineare dei quadrati dei valori passati delle innovazioni, ovvero:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (4.7)$$

dove $\omega \geq 0$ e tutti gli $\alpha_i \geq 0$ per $i = 1, 2, \dots, q$ rappresentano i parametri da stimare. La 4.7 è l'equazione relativa all'innovazione ε_t che segue un generico processo ARCH(q) dove q è il numero di ritardi di ε_t^2 .

L'ARCH è quindi un processo con media nulla, varianza costante e varianza condizionata linearmente dipendente dai quadrati delle innovazioni. Esso riesce a catturare il fenomeno delle oscillazioni delle serie storiche relative ai rendimenti dei titoli, quindi interpreta il *volatility clustering*.

L'ARCH(q) della 4.7 può essere riscritto mediante un processo MA(q) per i quadrati delle innovazioni:

$$h_t = \omega + A(L)\varepsilon_{t-i}^2 \quad (4.8)$$

dove $A(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q$ è il polinomio nell'operatore ritardo. Se si pone $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, l'ARCH(q) può essere riscritto come un modello AR(q) per i quadrati dei disturbi:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + A(L)\varepsilon_{t-i}^2 + v_t \quad (4.9)$$

dove v_t è un termine non normale, asimmetrico ed eteroschedastico con media condizionata nulla.

Modello GARCH

Il modello GARCH (*Generalized ARCH*) è stato elaborato da Bollerslev (1986) e rappresenta un utile strumento per analizzare la persistenza dei movimenti della volatilità senza dover stimare l'alto numero di parametri presenti nel polinomio $A(L)$. Dato che anch'esso si basa sul set informativo I_{t-1} , l'equazione di un generico modello GARCH(p,q) specifica la varianza condizionata come segue:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4.10)$$

dove $\omega \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$ per $i = 1, 2, \dots, q$ e $\beta_j \geq 0$ per $j = 1, 2, \dots, p$. La varianza condizionata dipende da $(1 + p + q)$ parametri dove p si riferisce all'ordine del ritardo della parte autoregressiva rappresentata dai valori della varianza condizionata stessa nel passato, mentre q mostra il numero dei ritardi della componente ε_t^2 . Riscrivendo l'espressione utilizzando l'operatore ritardo si ha:

$$h_t = \omega + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t \quad (4.11)$$

Definendo $m = \max\{p, q\}$, il GARCH(p,q) è riconducibile ad un ARMA(m,p) per i quadrati delle innovazioni passate imponendo la condizione $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$. Si ricava in fine la seguente espressione:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + [A(L) + B(L)]\varepsilon_t^2 - B(L)v_t + v_t \quad (4.12)$$

4.2 Simulazione storica

Nella simulazione storica si assume che tutte le possibili variazioni future del valore del portafoglio siano già state osservate nel passato e quindi la distribuzione delle perdite future sia identica alla distribuzione delle perdite già avvenute, come spiegato da Carol (2008).

Inanzitutto il portafoglio considerato viene mappato su determinati fattori di rischio calcolati utilizzando dati di mercato attuali. Successivamente si assume che le *sensitivity* a tali fattori di rischio siano costanti.

Si calcolano quindi i rendimenti dei vari fattori di rischio calcolati dalle serie storiche e si applicano alle *sensitivity* per ottenere la distribuzione dei vari rendimenti del portafoglio.

La procedura può essere riassunta in 4 passi:

1. Si considera un campione di rendimenti giornalieri relativi ad un preciso periodo storico del fattore di rischio considerato.
2. Si rivaluta la posizione attuale del portafoglio in esame in corrispondenza dei rendimenti storici.
3. Si ottiene una distribuzione simulata dei valori del portafoglio.
4. Si estrae il percentile desiderato della distribuzione.

4.2.1 Vantaggi della simulazione storica

- Permette di non fare alcuna assunzione a priori della distribuzione dei fattori di rischio, ma si ipotizza che la distribuzione dei rendimenti futuri sia correttamente approssimata da quella dei rendimenti passati. In questo modo *fat tails* e *skewness* non impattano sul calcolo se la distribuzione si mantiene costante nel tempo.
- Non è necessario stimare la matrice di covarianza tra i fattori di rischio.
- Si ottengono stime del *VaR* stabili rispetto alle variazioni di mercato.

4.2.2 Limiti della simulazione storica

- Più sono complessi e numerosi gli strumenti finanziari presenti nel portafoglio e i relativi fattori di rischio, più lo sforzo computazionale richiederà tempi di calcolo lunghi e onerosi.
- Si assume che i rendimenti siano indipendenti e identicamente distribuiti. Se tale assunzione viene meno la simulazione storica non è più valida.
- Non viene considerato il caso in cui una perdita futura possa essere maggiore della perdita più elevata della serie storica.

- E' necessario disporre di dati con frequenza di rilevazione settimanale, mensile o annuale e questo limita il numero di serie storiche a disposizione. Inoltre comporta una scarsa risoluzione delle code della distribuzione poiché nel periodo considerato possono essersi verificati troppi o troppo pochi eventi rari.

4.3 Simulazione Monte Carlo

Per ovviare al problema del limitato numero di serie storiche di dati finanziari viene utilizzata la metodologia di calcolo della simulazione Monte Carlo. Se il valore di un certo strumento finanziario è funzione di $f(x)$ di una variabile casuale X , si simulano n valori di tale variabile e, in corrispondenza di ognuno di essi, si calcola il valore della funzione. Si ottiene così un valore atteso per $f(x)$.

Nel *risk management* si ipotizza che gli n fattori di rischio su cui è stato mappato il portafoglio seguono una certa distribuzione di probabilità n -variata. Si simulano quindi un determinato numero di rendimenti dei vari fattori di rischio e si calcola a partire da essi la serie simulata dei rendimenti del portafoglio. Si estrae quindi il percentile appropriato dalla suddetta serie.

Nel calcolo del *VaR* non bisogna quindi calcolare il valore atteso del portafoglio mentre è necessario ottenere una distribuzione simulata dei suoi rendimenti.

La procedura può essere riassunta in 5 passi:

1. Si identifica (o si assume a priori) la legge multivariata seguita dai vari fattori di rischio su cui è mappato il portafoglio.
2. Se ne stimano i parametri.
3. Si estraggono n valori casuali per ognuno dei fattori di rischio.
4. Si calcolano i rendimenti del portafoglio in base alle variazioni dei fattori di rischio simulati.
5. Si estrae il percentile appropriato dalla distribuzione delle perdite del portafoglio.

4.3.1 Vantaggi della simulazione Monte Carlo

- E' possibile superare i problemi connessi alla limitatezza delle serie storiche.
- Si può scegliere la distribuzione da utilizzare per le simulazioni in accordo ai mezzi disponibili e alle osservazioni empiriche sulle distribuzioni storiche di fattori di rischio utilizzati.

- Potendo simulare tutte le fluttuazioni dei fattori di rischio è possibile analizzare più in dettaglio anche posizioni in derivati attraverso l'osservazione del processo stocastico del sottostante.

4.3.2 Limiti della simulazione Monte Carlo

- E' necessario ipotizzare un modello per la distribuzione dei rendimenti.
- Il calcolo del VaR può prevedere aspetti computazionali complessi e difficili da gestire se si considera un elevato numero di fattori di rischio per il portafoglio.
- L'istituzione finanziaria non può verificare la bontà della misura in quanto non è possibile effettuare un ricalcolo dei risultati forniti da un eventuale applicativo commerciale.

Capitolo 5

Backtesting

In quest'ultima parte andremo a vedere cosa si intende per *backtest* di una misura di rischio e si forniranno delle applicazioni a serie finanziarie reali, valutando in pratica le differenze tra *VaR* ed *Expected Shortfall*. Le simulazioni sono ottenute tramite il software statistico R Studio.

5.1 *VaR*

La procedura di *backtesting* del *VaR* si basa sul semplice conteggio del numero di volte in cui si realizza una perdita che supera la soglia predetta, o più brevemente, quando si realizza un'eccedenza. Definiamo una potenziale eccedenza al tempo t come

$$e_t = \mathbf{1}_{(L_t \geq \text{VaR}_\alpha(X))}, \quad (5.1)$$

dove $L_t = -X_t$ è definito come la perdita che si è realizzata nel periodo t . $e_t = 1$ implica un'eccedenza nel periodo t mentre $e_t = 0$ significa che non si sono verificate eccedenze nel periodo t . Ogni potenziale eccedenza può essere trattata come realizzazione di una variabile casuale di Bernoulli con probabilità α . Assumiamo che tali variabili casuali siano indipendenti ed identicamente distribuite e siano $e_1, e_2, \dots, e_T$ tutte le potenziali eccedenze in un periodo di T giorni. Assumeremo sempre un periodo di $T = 250$ poiché i backtest sono normalmente effettuati con i dati di un anno. Sia Y la somma delle eccedenze, ovvero la somma di T variabili Bernoulliane indipendenti ed identicamente distribuite. Poiché Y è la somma di variabili casuali Bernoulli indipendenti con la stessa probabilità, Y segue una distribuzione binomiale con parametri $n = T$ e probabilità $\pi = \alpha$. Abbiamo quindi che

$$Y = \sum_{t=1}^T e_t \sim \text{Bin}(T, \alpha)$$

Il numero totale delle eccedenze in un anno è una variabile casuale binomiale con valore atteso $T\alpha$. Un *VaR* al 99% ha $\alpha = 0.01$. Poiché abbiamo assunto

$T = 250$, il numero atteso di eccedenze in un anno è 2.5.

Conoscendo quindi la distribuzione delle eccedenze, è anche possibile determinare la probabilità che si verifichi un certo numero di eccedenze. Definiamo la funzione di probabilità cumulata di una variabile binomiale come

$$F(k; n, \pi) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \pi^i (1 - \pi)^{n-i} \quad (5.2)$$

La probabilità cumulata è semplicemente la probabilità che il numero di eccedenze sia minore o uguale al numero di eccedenze realizzate per un modello corretto. Può essere utilizzata per calcolare il livello di confidenza quando si rifiutano stime del *VaR* con troppe eccedenze. Vediamo un esempio riferito ai lanci di una moneta.

Esempio 5.1. *Sappiamo che la probabilità di ottenere testa o croce nel lancio di una moneta è 0.5. Consideriamo una moneta non equa e vediamo che dopo alcuni lanci la moneta mostra solo teste. Dopo il primo lancio, la probabilità di ottenere testa è di 0.5. Dopo un secondo lancio è 0.25. Dopo il terzo, quarto e quinto le probabilità sono 0.125, 0.063 e 0.031 rispettivamente. La probabilità cumulata è la probabilità che il numero di volte in cui si ottiene testa in successione sia minore o uguale alle probabilità elencate precedentemente. Se consideriamo il complemento di queste probabilità, abbiamo che per tre, quattro e cinque teste di fila esso è 0.875, 0.938 e 0.969. Ciò significa che dopo cinque teste di fila possiamo dire con un livello di confidenza del 96.9% che la moneta non è equa. Possiamo applicare lo stesso ragionamento al numero di eccedenze del *VaR* in un anno se conosciamo la probabilità cumulata della binomiale descritta sopra.*

Numero di eccedenze	Probabilità cumulata
0	8.11
1	25.58
2	54.32
3	75.81
4	89.22
5	95.88
6	98.63
7	99.60
8	99.89
9	99.97
10	99.99

La tabella mostra le probabilità cumulate di un particolare numero di eccedenze per un *VaR* al 99% considerando i rendimenti di 250 giorni. In altre

parole, mostra la probabilità che il numero di eccedenze sia uguale o minore al numero di eccedenze della prima colonna.

Vediamo dalla tabella che per più di quattro eccedenze possiamo dire, con un livello di confidenza del 95%, che c'è qualcosa di sbagliato nel modello poiché la probabilità che il numero di eccedenze sia cinque o minore è 95.88%. Se vogliamo un livello di confidenza del 99% allora le stime del *VaR* con più di sei eccedenze dovrebbero essere rifiutate dato che la probabilità di sette o meno eccedenze è 99.60%.

5.1.1 Le regole di Basilea

Il Comitato di Basilea prevede delle regole che le banche devono seguire per effettuare il *backtest* del *VaR*. Le stime del *VaR* ad un livello del 99% devono essere riportate su base giornaliera, in modo tale che le autorità di vigilanza siano in grado di controllare se le banche possiedono il capitale necessario per mantenere un certo livello di rischio. Il Comitato richiede inoltre che venga riportato il numero di eccedenze degli ultimi 250 giorni. Le autorità di vigilanza necessitano di un meccanismo per aumentare il requisito patrimoniale quando vi è il sospetto che le stime di rischio comunicate dalle banche siano troppo basse. Questo problema viene risolto applicando un requisito capitale aggiuntivo quando il numero di eccedenze risulta troppo alto nell'ultimo anno. Riprendiamo le probabilità cumulate dell'esempio precedente.

Zona	Numero di eccedenze	Fattore	Probabilità cumulata
Verde	0	0.00	8.11
	1	0.00	25.58
	2	0.00	54.32
	3	0.00	75.81
	4	0.00	89.22
Gialla	5	0.40	95.88
	6	0.50	98.63
	7	0.65	99.60
	8	0.75	99.89
	9	0.85	99.97
Rossa	10+	1.00	99.99

La tabella mostra il quadro di riferimento per il *backtesting* del *VaR*. Il numero di eccedenze sono riferite agli ultimi 250 giorni e dividono le banche in tre zone in accordo con le probabilità cumulate. La banca è in zona verde se il numero di eccedenze non rifiuta un modello di *VaR* con una confidenza inferiore al 95%, ovvero vi sono al massimo quattro eccedenze in un anno. La zona gialla comprende un numero di eccedenze per le quali un modello viene rifiutato con una confidenza del 95% ma non per una confidenza del 99%,

ovvero tra le cinque e le nove eccedenze. Un numero di eccedenze superiori a nove portano al rifiuto del modello considerato con una confidenza del 99.99%. Il fattore determina di quanto la banca verrà punita per l'elevato numero di eccedenze. Il requisito patrimoniale è calcolato semplicemente nel seguente modo

$$\text{MRC}_t = (3 + m)\text{VaR}_{t-1} \quad (5.3)$$

dove m è il fattore e MRC_t è il requisito patrimoniale per il rischio di mercato nel periodo t . Dalle probabilità cumulate possiamo vedere che il Comitato di Basilea aggiunge capitale extra quando la probabilità cumulata è maggiore di 95%.

5.2 Expected Shortfall

5.2.1 Elicitabilità

Riprendiamo brevemente il concetto di "elicitabilità". I professionisti del rischio non avevano mai sentito parlare di questo concetto fino al 2011, quando Gneiting spiegò che L'*Expected Shortfall* non possedeva questa proprietà matematica a differenza del *VaR*.

Per spiegarlo facilmente, una statistica $\psi(Y)$ di una variabile casuale Y possiede la proprietà di elicitabilità se minimizza il valore atteso di una funzione di punteggio S :

$$\psi = \arg \min_x \mathbb{E}[S(x, Y)]$$

Date una serie di previsioni x_t per le statistiche e le realizzazioni y_t della variabile casuale, questa funzione fornisce un modo naturale per valutare il modello di previsione, richiedendo che il punteggio medio

$$\bar{S} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T S(x_t, y_t)$$

sia il più piccolo possibile. La media e la mediana sono due popolari esempi che minimizzano la media al quadrato e l'errore assoluto rispettivamente. Il quantile α , cioè il *VaR*, gode della proprietà di elicitabilità, con funzione di punteggio $S(x, y) = ((x > y) - \alpha)(x - y)$.

La scoperta della non elicitabilità dell'*Expected Shortfall* ha significato per molti l'impossibilità di *backtesting* per questa misura di rischio, mentre altri ritenevano che il *backtesting* per l'*Expected Shortfall* non fosse più complicato rispetto a quello del *VaR* e affermavano che la potenza del test fosse maggiore.

Vediamo ora come effettuare il *backtesting* dell'*Expected Shortfall*, restringendo l'utilizzo dei test a quelli non parametrici e liberi da assunzioni distributive oltre alla continuità, condizione necessaria per qualsiasi applicazione nella regolamentazione bancaria.

5.2.2 Alcune tipologie di backtest

Si adotta un quadro di riferimento standard di verifica delle ipotesi per la copertura incondizionata dell'*Expected Shortfall* analogo allo standard di Basilea per il *VaR*. Si assume che l'indipendenza degli eventi di coda sia verificata separatamente.

Assumiamo che ogni giorno $t = 1, \dots, T$, X_t rappresenti il rendimento di una banca distribuito come una distribuzione reale (sconosciuta) F_t , prevista da un modello di distribuzione P_t condizionato a precedenti informazioni utilizzate per calcolare $VaR_{\beta,t}$ e $ES_{\alpha,t}$ come segue

$$ES_{\alpha,t} = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha P_t^{-1}(q) dq \quad (5.4)$$

Le variabili casuali $X_n = \{X_t\}$ sono assunte indipendenti, ma non identicamente distribuite. Lasciamo inoltre libera la variabilità di F_t e P_t nel tempo e denotiamo con $VaR_{\alpha,t}^F$ e $ES_{\alpha,t}^F$ i valori delle misure di rischio quando $X \sim F$.

Assumiamo che le distribuzioni siano continue e strettamente crescenti e scriviamo l'*Expected Shortfall* come

$$ES_{\alpha,t} = -E[X_t | X_t + VaR_{\beta,t} < 0] \quad (5.5)$$

con il *VaR* definito univocamente come $VaR_{\beta,t} = P_t^{-1}(\beta)$. Senza perdita di generalità consideriamo sempre $T = 250$, $\beta = 1\%$ e $\alpha = 2.5\%$. Come già detto precedentemente, il *VaR* al 99% coincide con l'*Expected Shortfall* al 97.5%.

L'ipotesi nulla assume che la previsione sia corretta, mentre l'ipotesi alternativa si riferisce solo alla sotto stima del rischio dato che la scelta del Comitato di Basilea è quella di valutare il numero di eccedenze del *VaR*.

Di seguito vedremo due metodi proposti da Acerbi e Szekely (2014) e un metodo più semplice di Emmer, Kratz e Tasche (2013) per modelli non parametrici.

5.2.3 Test 1 di Acerbi e Szekely

Il primo test di Acerbi e Szekely (2014) permette di calcolare l'*Expected Shortfall* dopo aver calcolato il *VaR*. Iniziamo mostrando che dal valore atteso condizionato della 5.5 possiamo derivare facilmente la seguente equazione

$$E \left[\frac{X_t}{ES_{\alpha,t}} + 1 \mid X_t + VaR_{\alpha,t} < 0 \right] = 0 \quad (5.6)$$

Se è già stato effettuato il backtest per il $VaR_{\alpha,t}$, è possibile effettuare il backtest separatamente e misurare l'entità delle eccezioni realizzate rispetto

alle previsioni del modello. Definendo $I_t = (X_t + VaR_{\alpha,t} < 0)$ la funzione indicatrice di un'eccezione α , la statistica test è

$$Z_1(X_n) = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{X_t I_t}{ES_{\alpha,t}}}{N_T} + 1 \quad (5.7)$$

dove $N_T = \sum_{t=1}^T I_t > 0$.

Per questo test scegliamo come ipotesi nulla

$$H_0 : P_t^{[\alpha]} = F_t^{[\alpha]}, \quad \forall t$$

dove $P_t^{[\alpha]}(x) = \min(1, P_t(x)/\alpha)$ è la distribuzione di coda per $x < -VaR_{\alpha,t}$. Le alternative sono

$$\begin{aligned} H_1 : ES_{\alpha,t}^F &\geq ES_{\alpha,t}, \quad \text{per ogni } t \text{ e } > \text{ per qualche } t \\ VaR_{\alpha,t}^F &= VaR_{\alpha,t}, \quad \text{per ogni } t \end{aligned}$$

Vediamo che il VaR al livello α predetto rimane corretto sotto H_1 , in linea col fatto che questo test è subordinato ad un test preliminare del VaR . Questo test è infatti insensibile ad un numero eccessivo di eccezioni in quanto si tratta di una media delle eccezioni stesse.

Sotto queste condizioni $E_{H_0}[Z_1|N_T > 0] = 0$ e $E_{H_1}[Z_1|N_T > 0] < 0$. Allora, ci si aspetta che il valore realizzato $Z_1(x_n)$ sia uguale a zero, segnalando un problema quando è negativo.

Dividere l'equazione 5.6 per $ES_{\alpha,t}$ ci consente di tenere sotto controllo l'eteroschedasticità.

5.2.4 Test 2 di Acerbi e Szekely

Questo secondo tipo di test adottato da Acerbi e Szekely (2014) calcola invece l'*Expected Shortfall* in maniera diretta e deriva dal valore atteso non condizionato

$$ES_{\alpha,t} = -E\left[\frac{X_t I_t}{\alpha}\right] \quad (5.8)$$

dal quale si può definire

$$Z_2(X_n) = \sum_{t=1}^T \frac{X_t I_t}{T\alpha ES_{\alpha,t}} + 1 \quad (5.9)$$

Le ipotesi appropriate per il test sono

$$\begin{aligned} H_0 : P_t^{[\alpha]} &= F_t^{[\alpha]}, \quad \forall t \\ H_1 : ES_{\alpha,t}^F &\geq ES_{\alpha,t}, \quad \text{per ogni } t \text{ e } > \text{ per qualche } t \\ VaR_{\alpha,t}^F &\geq VaR_{\alpha,t}, \quad \text{per ogni } t \end{aligned}$$

Abbiamo ancora $E_{H_0}[Z_2] = 0$ e $E_{H_1}[Z_2] < 0$. Questi risultati non richiedono l'indipendenza delle X_t .

Il test valuta congiuntamente la frequenza e l'entità degli α eventi di coda come mostra la relazione

$$Z_2 = 1 - (1 - Z_1) \frac{N_T}{T\alpha} \quad (5.10)$$

ricordando che $E_{H_0}[N_T] = T\alpha$.

5.2.5 Test di Emmer, Kratz e Tasche

Il metodo presentato da Emmer, Kratz e Tasche (2013) fornisce un semplice modo per effettuare il *backtest* dell'*Expected Shortfall* basato sull'approssimazione di diversi livelli del *VaR*. Questo metodo è un'approssimazione grezza rispetto ad altri, ma è di gran lunga il meno complesso e il più semplice da utilizzare nella pratica. Il punto di partenza del metodo è quello di rappresentare l'*Expected Shortfall* come approssimazione di diversi livelli di *VaR* secondo la formulazione

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_u(X) du \approx \frac{1}{4} [VaR_{0.25\alpha+0.0075}(X) + VaR_{0.5\alpha+0.005}(X) + VaR_{0.75\alpha+0.0025}(X) + VaR_\alpha(X)].$$

Quindi, se assumiamo $\alpha = 0.05$ abbiamo

$$ES_{5\%}(X) \approx \frac{1}{4} [VaR_{1.25\%}(X) + VaR_{2.5\%}(X) + VaR_{3.75\%}(X) + VaR_{5\%}(X)].$$

Da questo si può vedere che il *VaR* ai livelli 95%, 96.25%, 97.5% e 98.75% possono essere testati congiuntamente per ottenere il *backtest* sull'*Expected Shortfall*. Se tutti questi livelli del *VaR* sono testati con successo allora l'*Expected Shortfall* può essere considerato il più accurato possibile.

Emmer, Kratz e Tasche non hanno spiegato perchè vengono utilizzati quattro livelli del *VaR*. Poiché nella pratica si utilizza un *Expected Shortfall* al livello 97.5% sarebbe più conveniente utilizzare cinque livelli del *VaR* per ottenere quantili migliori. Possiamo allora scrivere

$$ES_{2.5\%}(X) \approx \frac{1}{5} [VaR_{2.5\%}(X) + VaR_{2.0\%}(X) + VaR_{1.5\%}(X) + VaR_{1.0\%}(X) + VaR_{0.5\%}(X)].$$

Il metodo ci consentirebbe quindi di effettuare il *backtest* dell'*Expected Shortfall* se prima ci assicuriamo che il *VaR* ai livelli 97.5%, 98.0%, 98.5%, 99.0% e 99.5% abbia passato il *backtest*. Iniziamo calcolando la probabilità cumulata

per diverse eccedenze del VaR per livelli diversi utilizzando la stessa metodologia adottata finora. Consideriamo un periodo $T = 250$ giorni. I risultati sono riportati nella tabella sottostante.

Numero di eccedenze	Probabilità cumulate - Livelli				
	97.5%	98.0%	98.5%	99.0%	99.5%
0	0.18	0.64	2.29	8.11	28.56
1	1.32	3.91	10.99	28.58	64.44
2	4.97	12.21	27.49	54.32	86.89
3	12.70	26.22	48.26	75.81	96.21
4	24.95	43.87	67.79	89.22	99.11
5	40.40	61.60	82.43	95.88	99.82
6	56.57	76.37	91.53	98.63	99.97
7	71.03	86.87	96.36	99.60	100.00
8	82.29	93.39	98.59	99.89	100.00
9	90.05	96.96	99.51	99.97	100.00
10	94.85	98.72	99.84	99.99	100.00
11	97.53	99.50	99.95	100.00	100.00
12	98.90	99.82	99.99	100.00	100.00

Rifiutiamo la previsione del VaR se la probabilità cumulata è maggiore del 95%. Prendiamo il VaR al livello 98.5% come esempio. Vediamo che per sette eccedenze, la probabilità cumulata è 96.36%. Questo significa che se il VaR al 98.5% ha sette eccezioni nell'ultimo anno allora possiamo rifiutare la previsione del VaR con una confidenza del 96.36%. In altre parole, possiamo permettere al massimo sei eccedenze per non rifiutare la previsione.

Se uno dei cinque *backtest* viene rifiutato, verrà rifiutato anche l'*Expected Shortfall*. Il massimo numero di eccedenze per ogni livello del VaR sono riassunte nella tabella seguente.

α	Massimo umero di eccedenze
0.025	10
0.020	8
0.015	6
0.010	4
0.005	2

Capitolo 6

Applicazioni pratiche

In questo capitolo conclusivo si analizzano delle serie storiche finanziarie reali e, applicando i metodi descritti in precedenza, si valutano l'efficienza del *VaR* e dell'*Expected Shortfall*. Per quanto riguarda l'*Expected Shortfall* si andranno ad analizzare i vari metodi considerati in termini di complessità ed efficienza secondo un approccio basato sul fatto che le banche vorrebbero verificare le previsioni dell'*Expected Shortfall* internamente, confrontando fra loro queste previsioni o per validare dei modelli di rischio. Ciò significa che la scelta del metodo può essere diversa in base al tipo di modello *VaR* utilizzato.

6.1 Scelta di un modello interno

In questa sezione descriviamo quali metodi possono essere implementati da una banca per la validazione interna.

6.1.1 Metodologia

Prendiamo in considerazione tre differenti aspetti. Il primo si basa sull'analisi del tipo di modello *VaR* applicato dalla banca. Dall'equazione 3.1, sappiamo che il *VaR* è calcolato come un quantile di una funzione di densità P_t che rappresenta i rendimenti. Abbiamo visto in precedenza che ci sono tre modi per calcolare la distribuzione dei rendimenti. La distribuzione può essere empirica e consistere in un numero di rendimenti storici, solitamente degli ultimi 250 giorni, in cui il metodo è indicato come simulazione storica. La distribuzione può essere parametrica, assumendo che i rendimenti seguano una distribuzione conosciuta, o può essere ottenuta tramite simulazioni di Monte Carlo.

Il secondo aspetto si basa sulle proprietà dei metodi di *backtest*, ovvero sul loro utilizzo in base ad assunzioni parametriche o non parametriche e se richiedono o meno delle simulazioni.

L'ultimo aspetto si basa sulle *performance* di ogni metodo per capire quale sia il più adatto per l'implementazione.

6.1.2 Backtesting con metodo parametrico

Quando una banca utilizza un modello parametrico per il calcolo del rischio, il *backtesting* dovrebbe essere effettuato in base alla stessa distribuzione dei rendimenti. In questo caso tutti i metodi sono applicabili. Wimmerstedt (2015) suggerisce che le banche che utilizzano questo metodo per il calcolo del *VaR* utilizzino il primo metodo di Acerbi e Szekely per il *backtesting* dell'*Expected Shortfall*, in particolare quando si fanno assunzioni distributive non normali.

6.1.3 Backtesting con simulazione storica

La simulazione storica è forse il metodo meno consigliato per il calcolo del *VaR*, poiché le assunzioni parametriche sono di solito sbagliate e le simulazioni sono prese da una distribuzione che consiste di soli 250 rendimenti. Questo significa che è difficile dire qualcosa sulla significatività della coda della distribuzione. Wimmerstedt (2015) trova che il metodo di Emmer, Kratz e Tasche risulta l'unico metodo utilizzabile per effettuare il *backtesting* dell'*Expected Shortfall* in questa situazione, nonostante alcuni problemi che si presentano quando il numero di eccedenze diventa grande.

6.1.4 Backtesting con metodo Monte Carlo

Per una banca che utilizza questo metodo, determinare la significatività utilizzando gli stessi risultati della simulazione sia nel *backtesting* che nel calcolo del rischio è semplice. D'altro canto, metodi con assunzione parametrica non funzionano correttamente poiché il risultato dell'intera distribuzione dei rendimenti raramente segue una distribuzione standard. Ciò significa che è possibile utilizzare sia i metodi di Acerbi e Szekely che il metodo di Emmer, Kratz e Tasche, i quali non richiedono simulazioni. Secondo quanto dimostrato da Wimmerstedt (2015), alle banche che utilizzano il metodo Monte Carlo per il calcolo del *VaR* è raccomandato l'utilizzo del primo metodo di Acerbi e Szekely per il *backtesting* dell'*Expected Shortfall*.

6.2 Applicazioni a serie finanziarie reali

Andremo ora a vedere come si comportano *VaR* ed *Expected Shortfall* applicati a delle serie finanziarie reali. Per questo scopo sono stati selezionati diversi indici. Il primo che sarà analizzato è l'indice S&P 500, che segue l'andamento di un paniere azionario formato dalle 500 aziende statunitensi

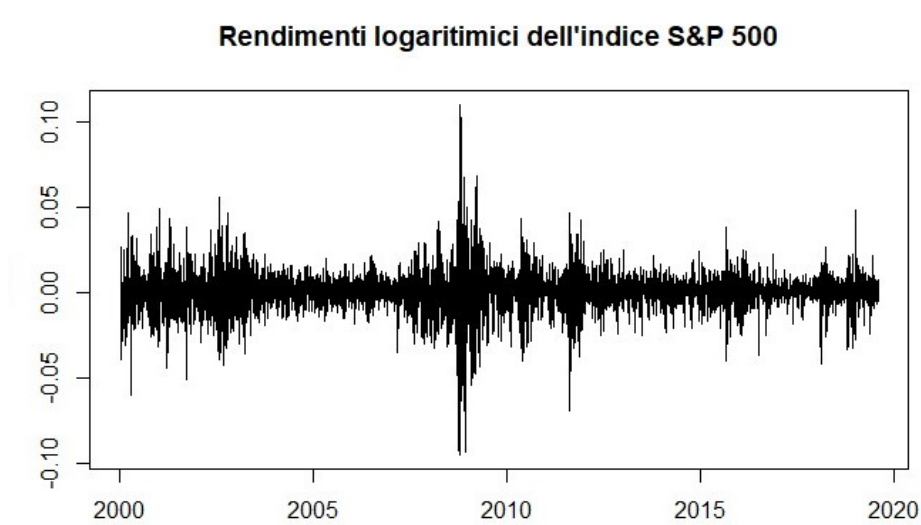


Figura 6.1: Rendimenti logaritmici dell'indice S&P 500 dal 01/01/2000 al 31/07/2019

a maggiore capitalizzazione. A questo indice sarà applicato il metodo parametrico, con assunzione distributiva normale, e il metodo della simulazione storica. Successivamente sposteremo la nostra analisi sul metodo Monte Carlo applicato ad un portafoglio di 3 titoli della borsa italiana.

6.2.1 S&P 500

Caratteristiche

Il periodo in cui la serie è studiata è compreso tra le date 01/01/2000 e 31/07/2019, per un totale di 4924 osservazioni. Per questo scopo vengono considerati i prezzi di chiusura. Nella figura 6.1 sono mostrati i rendimenti logaritmici che saranno oggetto di analisi. La serie presenta un indice di asimmetria pari a -0.220656 e un indice di curtosi pari a 8.602929 , entrambi sintomi di allontanamento dalla normalità distributiva.

Metodo parametrico

Assumiamo che la serie dei rendimenti segua una distribuzione Normale e consideriamo inizialmente l'intero campione per il calcolo della volatilità, mentre successivamente ci concentriamo su un periodo di bassa volatilità e su uno di alta volatilità. Utilizziamo gli ultimi 250 valori (ultimo anno) per il calcolo del *VaR* e dell'*Expected Shortfall*. Possiamo vedere i risultati delle

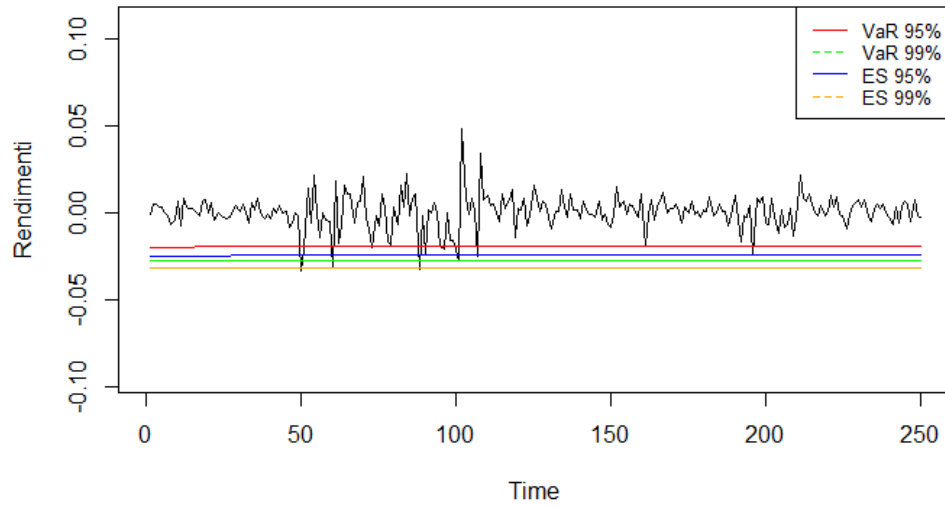


Figura 6.2: Soglie del *VaR* e dell'*Expected Shortfall* ai livelli 95% e 99% per gli ultimi 250 valori dei rendimenti della serie dell'indice S&P 500, con volatilità calcolata sull'intero campione. Metodo parametrico.

elaborazioni nelle figure 6.2 , 6.3 e 6.4 . Nella tabella sottostante possiamo invece leggere i livelli stimati del *VaR*, calcolati dal numero di eccedenze, e i livelli dell'*Expected Shortfall*, calcolati applicando il primo metodo di Acerbi e Szekely (2014).

Periodo	Livelli del <i>VaR</i> e dell' <i>Expected Shortfall</i>				
	<i>VaR</i> 95%	<i>VaR</i> 99%	ES 95%	ES 97.5%	ES 99%
Campione intero	95.6	98.8	98.0	98.8	99.2
Bassa volatilità	93.2	96.8	96.4	96.8	98.8
Alta volatilità	91.2	94.8	92.8	94.8	96.8

Si può osservare dai risultati riportati in tabella come cambino le stime se si considera un periodo di bassa volatilità rispetto ad un periodo di alta volatilità. Valori minori dei livelli di *VaR* ed *Expected Shortfall* indicano una sottostima della misura di rischio, mentre valori più alti indicano una sovrastima. Si può notare in modo evidente come in tutti i casi vi sia una sottostima abbondante nel periodo di alta volatilità. Secondo l'ipotesi nulla del test di Acerbi e Szekely (2014), tutti le stime dell'*Expected Shortfall* non possono essere rifiutate in quanto nessuno dei tre test presentava valori negativi.

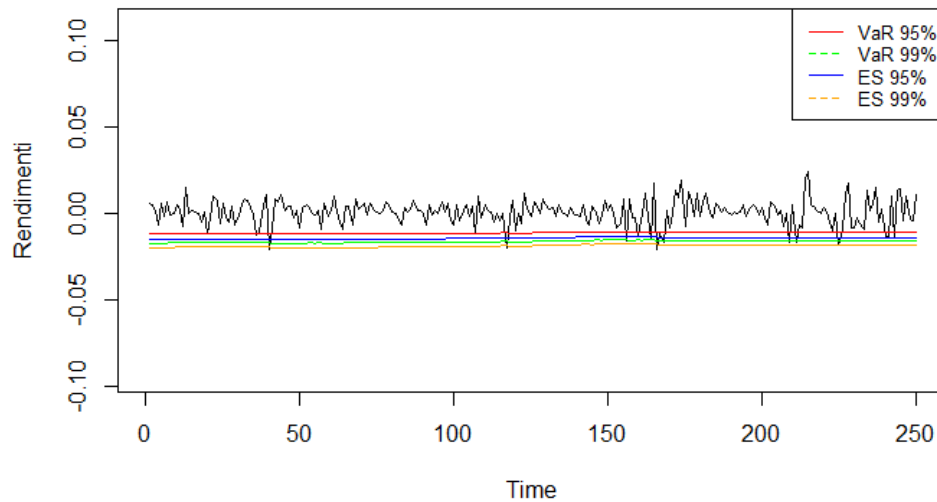


Figura 6.3: Soglie del *VaR* e dell'*Expected Shortfall* ai livelli 95% e 99% per gli ultimi 250 valori dei rendimenti della serie dell'indice S&P 500, in un periodo di bassa volatilità. Metodo parametrico.

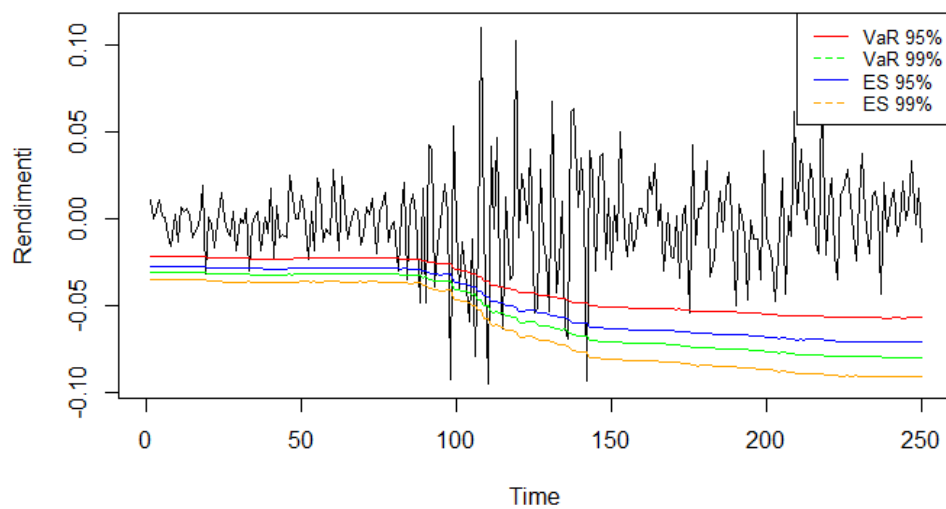


Figura 6.4: Soglie del *VaR* e dell'*Expected Shortfall* ai livelli 95% e 99% per gli ultimi 250 valori dei rendimenti della serie dell'indice S&P 500, in un periodo di alta volatilità. Metodo parametrico.

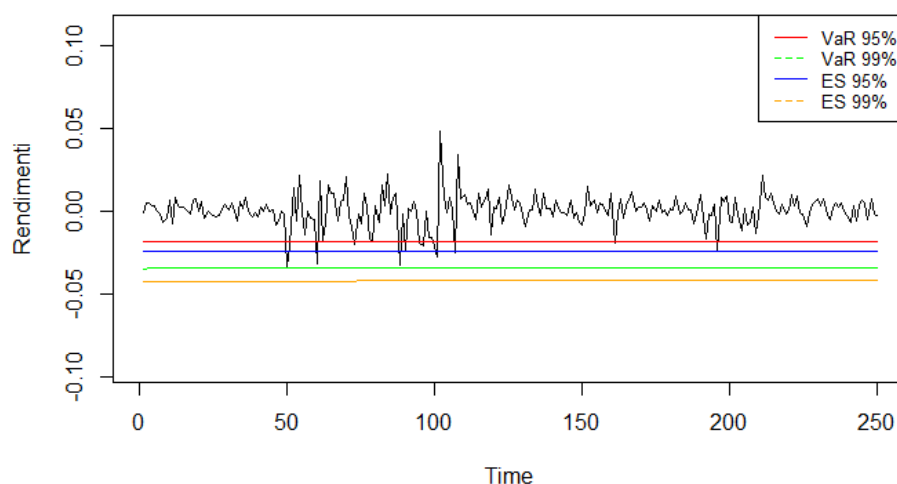


Figura 6.5: Soglie del VaR e dell'*Expected Shortfall* ai livelli 95% e 99% per gli ultimi 250 valori dei rendimenti della serie dell'indice S&P 500 con volatilità calcolata sull'intero campione. Simulazione storica.

Simulazione storica

Vediamo ora come cambiano i risultati se le elaborazioni vengono effettuate con il metodo della simulazione storica. I passaggi saranno analoghi a quelli svolti con il metodo parametrico. Consideriamo quindi l'intero campione per il calcolo della volatilità come prima fase dell'analisi e successivamente un periodo di bassa volatilità e uno di alta volatilità. I risultati grafici sono riportati nelle figure 6.5 , 6.6 e 6.7 . Nella tabella sottostante si osservano i livelli stimati di VaR ed *Expected Shortfall*, quest'ultimo ottenuto attraverso l'approssimazione basata sulla sommatoria dei livelli del VaR introdotta da Emmer, Kratz e Tasche (2013).

Periodo	Livelli del VaR e dell' <i>Expected Shortfall</i>				
	VaR 95%	VaR 99%	ES 95%	ES 97.5%	ES 99%
Campione intero	94.8	100	97.6	99.2	100
Bassa volatilità	94.4	99.6	96.4	98.8	100
Alta volatilità	91.6	95.6	93.2	95.2	96.4

Vediamo come, anche con la simulazione storica, i livelli del VaR in un periodo di alta volatilità vengano maggiormente sottostimati, mentre negli altri periodi l'errore di stima è contenuto. Per quanto riguarda l'*Expected*

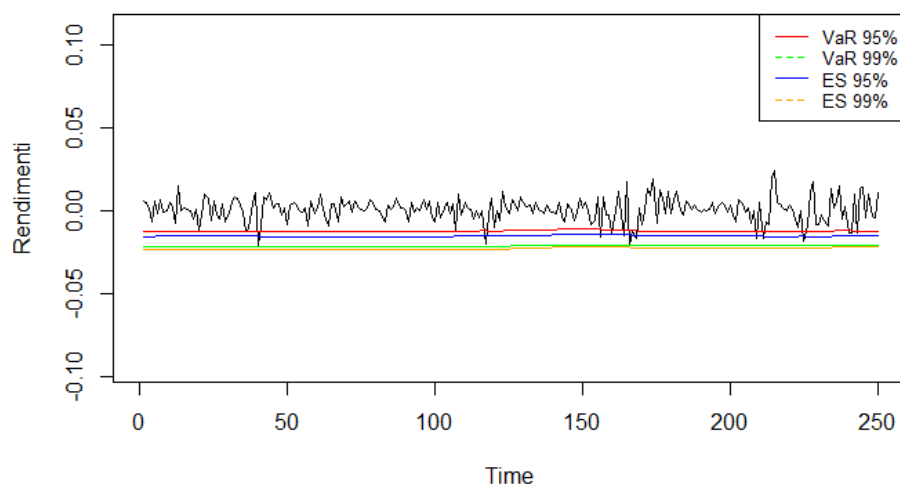


Figura 6.6: Soglie del *VaR* e dell'*Expected Shortfall* ai livelli 95% e 99% per gli ultimi 250 valori dei rendimenti della serie dell'indice S&P 500 in un periodo di bassa volatilità. Simulazione storica.

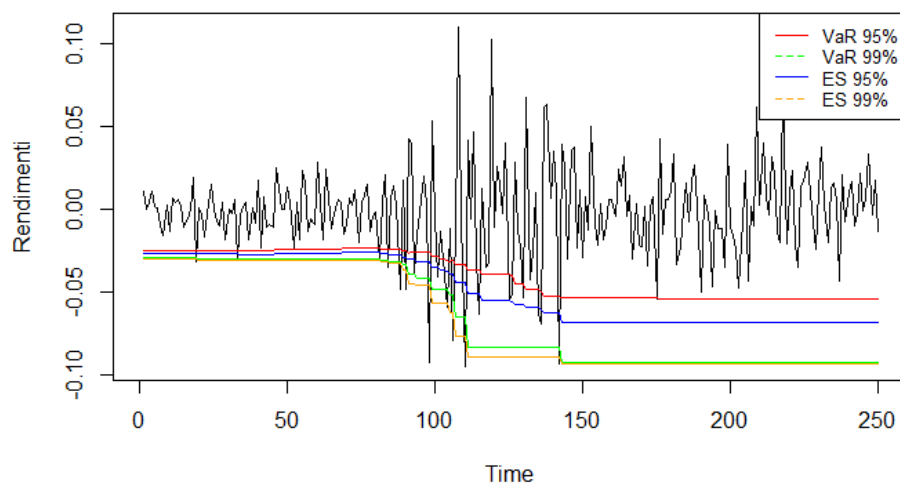


Figura 6.7: Soglie del *VaR* e dell'*Expected Shortfall* ai livelli 95% e 99% per gli ultimi 250 valori dei rendimenti della serie dell'indice S&P 500 in un periodo di alta volatilità. Simulazione storica.

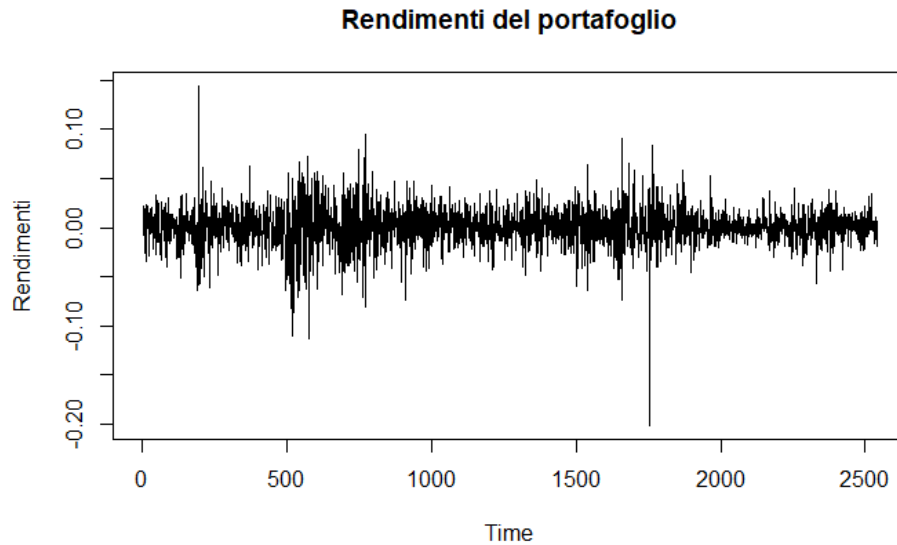


Figura 6.8: Rendimenti logaritmici del portafoglio composto dai titoli Intesa Sanpaolo S.p.A., Assicurazioni Generali e Fiat Chrysler Automobiles NV, nel periodo compreso tra il 31/07/2009 e il 31/07/2019.

Shortfall con livello 97.5% c'è da precisare che la stima ottenuta dovrà essere rifiutata, in quanto dalle elaborazioni le stime del *VaR* ai livelli 97.5% e 98% devono essere rifiutate per l'eccessivo numero di eccedenze, come spiegato da Emmer, Kratz e Tasche (2013).

6.2.2 Portafoglio composto da 3 titoli azionari

Caratteristiche

Per la costruzione del portafoglio sono stati scelti 3 dei titoli più conosciuti della borsa di Milano: Intesa Sanpaolo S.p.A., Assicurazioni Generali e Fiat Chrysler Automobiles NV, con vettore delle proporzioni (0.45, 0.35, 0.2). Il periodo considerato è compreso tra le date 31/07/2009 e il 31/07/2019, per un totale di 2539 osservazioni. Il portafoglio così composto risulta avere una media dei rendimenti pari a 0.000262 e una varianza di 0.000408. Presenta inoltre un'asimmetria di -0.498849 e un indice di curtosi pari a 6.942228. Possiamo vedere il grafico dei rendimenti del portafoglio nella figura 6.8 .

Metodo Monte Carlo

Assumiamo che i tre titoli si distribuiscano congiuntamente come una Normale multivariata e generiamo tante replicazioni per la creazione dei rendimenti

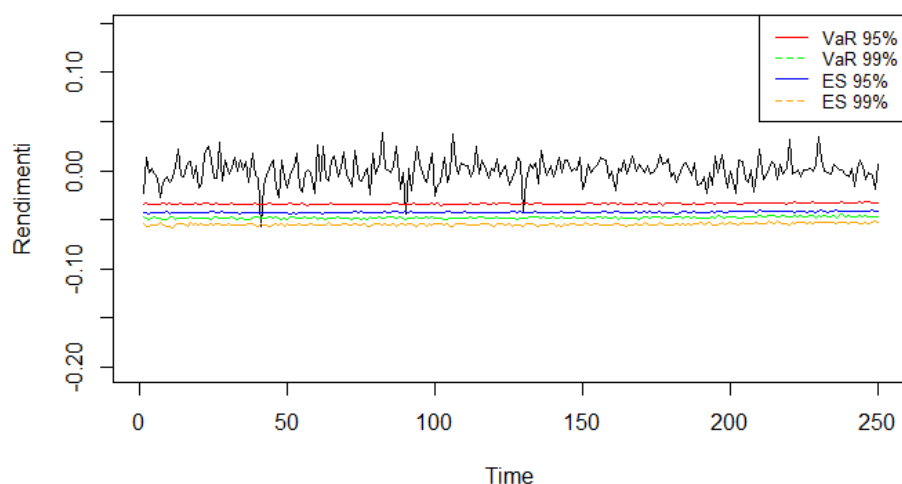


Figura 6.9: Soglie del *VaR* e dell'*Expected Shortfall* ai livelli 95% e 99% per gli ultimi 250 valori dei rendimenti del portafoglio composto dai titoli Intesa Sanpaolo S.p.A., Assicurazioni Generali e Fiat Chrysler Automobiles NV, con volatilità calcolata sull'intero campione. Metodo Monte Carlo.

del portafoglio. Infine andiamo a calcolare il *VaR* e l'*Expected Shortfall* utilizzando il primo metodo di Acerbi e Szekely. I risultati delle elaborazioni sono riportati nella tabella sottostante. Nelle figure 6.9 , 6.10 e 6.11 possiamo osservare i risultati grafici dei livelli stimati.

Periodo	Livelli del <i>VaR</i> e dell' <i>Expected Shortfall</i>				
	<i>VaR</i> 95%	<i>VaR</i> 99%	ES 95%	ES 97.5%	ES 99%
Campione intero	98.8	99.6	99.2	99.6	99.6
Bassa volatilità	97.2	99.6	98.8	99.6	100
Alta volatilità	93.2	96.4	94.8	96.8	97.6

Dopo aver calcolato i valori dei test per il metodo di Acerbi e Szekely (2013) e aver verificato che nessuno fosse negativo, si può concludere che non possiamo rifiutare le stime ottenute.

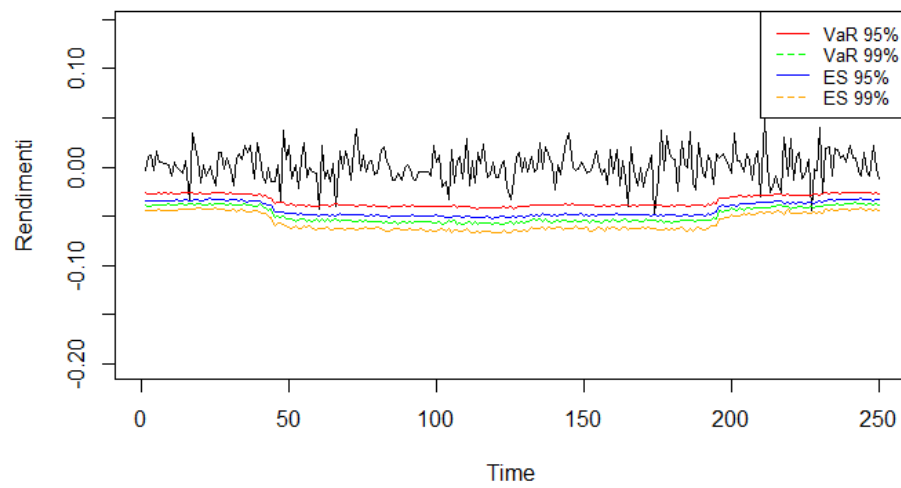


Figura 6.10: Soglie del *VaR* e dell'*Expected Shortfall* ai livelli 95% e 99% per gli ultimi 250 valori dei rendimenti del portafoglio composto dai titoli Intesa Sanpaolo S.p.A., Assicurazioni Generali e Fiat Chrysler Automobiles NV, in un periodo di bassa volatilità. Metodo Monte Carlo.

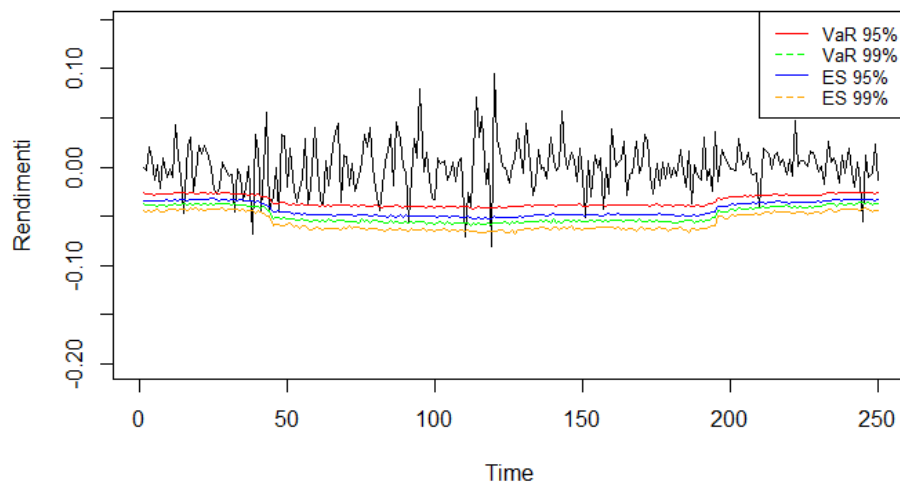


Figura 6.11: Soglie del *VaR* e dell'*Expected Shortfall* ai livelli 95% e 99% per gli ultimi 250 valori dei rendimenti del portafoglio composto dai titoli Intesa Sanpaolo S.p.A., Assicurazioni Generali e Fiat Chrysler Automobiles NV, in un periodo di alta volatilità. Metodo Monte Carlo.

Capitolo 7

Conclusioni

Partendo da una visione generale di quelle che sono le normative che regolano il *Risk Management* delle banche, siamo arrivati a descrivere e a confrontare le due misure di rischio che in questi anni si stanno succedendo, ovvero il *VaR* e l'*Expected Shortfall*.

Il *VaR* è una misura di rischio che si è rivelata inadatta a descrivere i rischi di un portafoglio, soprattutto per la mancanza della proprietà fondamentale della subadditività. L'importanza di questa proprietà è quella di permettere che la diversificazione di un portafoglio possa ridurre il rischio. Si è visto però che esiste una misura di rischio alternativa, che non richiede neppure grandi sforzi di calcolo aggiuntivi per le banche che vogliono sostituire la vecchia misura di rischio con la nuova.

L'*Expected Shortfall* è una misura di rischio coerente e quindi subadditiva, che cattura il rischio di coda e risolve così due dei maggiori problemi del *VaR*. Inoltre permette ai *risk managers* di concentrarsi sulla domanda “*what-if*” piuttosto che sulla domanda “*if*” a cui risponde invece il *VaR*. Tuttavia, mentre effettuare il *backtest* per il *VaR* è piuttosto semplice, ci sono ancora dei problemi su come debba essere effettuato il *backtest* dell'*Expected Shortfall*.

In *Fundamental Review of the Trading Book* (2013), il Comitato di Basilea ha proposto un cambio nella misurazione del rischio dal *VaR* con livello 99% all'*Expected Shortfall* con livello 97.5% per tenere in considerazione il rischio di coda. Poiché il *backtesting* per l'*Expected Shortfall* è complicato, il *backtesting* ufficiale sarà quello effettuato sul *VaR*. Da quando però Gneiting (2011) ha dimostrato che l'*Expected Shortfall* manca della proprietà di elicitabilità, c'è stato un dibattito sulla possibilità di effettuare il *backtest*. La mancanza di elicitabilità implica che non è possibile utilizzare una funzione di punteggio per il *backtesting*. Ciò non significa però che non possa essere effettuato il *backtest* dell'*Expected Shortfall*.

I tre metodi presentati in questa tesi permettono di effettuare il *backtest* senza menzionare la proprietà di elicitabilità. Il metodo più semplice è sicu-

ramente quello del metodo proposto da Emmer, Kratz e Tasche (2013), dove l'*Expected Shortfall* è approssimato da diversi livelli del *VaR*. Abbiamo visto che l'*Expected Shortfall* può riscritto come

$$ES_{2.5\%}(X) \approx \frac{1}{5}[VaR_{2.5\%}(X) + VaR_{2.0\%}(X) + VaR_{1.5\%}(X) + VaR_{1.0\%}(X) + VaR_{0.5\%}(X)].$$

Ciò significa che il *backtesting* può essere effettuato se prima lo si effettua sui diversi livelli del *VaR*, concludendo che essi siano però tutti corretti.

Bibliografia

- [1] Abbondo, F. (2015) *L'efficienza dei modelli VaR nella gestione dei rischi di mercato*, Università di Pisa
- [2] Acerbi, C., Nordio, C., Sirtori, C. (2001) *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management*, <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0102304.pdf>
- [3] Acerbi, C., Nordio, C., Sirtori, C. (2002) *On the Coherence of Expected Shortfall*, Journal of Banking & Finance **26**, 1487-1503
- [4] Acerbi, C., Tasche, D. (2001) *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk*, Journal of Banking & Finance **26**
- [5] Acerbi, C., Szekely, B. (2014) *Backtesting Expected Shortfall*, MSCI Inc.
- [6] Arlotta, C. (2011) *I rischi finanziari aziendali: dalla prevenzione alla gestione*, Milano
- [7] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1997) *Thinking coherently*, RISK **10** (11), 68-71
- [8] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999) *Coherent measures of risk*, Math. Fin. **9** (3), 203-228
- [9] Basel Committee on Banking Supervision (2013) *Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework*, Second Consultative Paper
- [10] Bassi, F., Embrechts, P., Kafetzaki, M. (1997) *A Survival Kit for Quantile Estimation*, Department of Mathematics, ETHZ, Zurich
- [11] Betti, F. (2001) *Value-at-Risk: la gestione dei rischi finanziari e la creazione del valore*, Il Sole 24 ore, Milano
- [12] Bollerslev, T. (1986) *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics **31**, 307-327
- [13] Brealey, Richard A., Stewart C. Myers, Franklin Allen (2006) *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill Irwin, New York

- [14] Carol, A. (2008) *Market Risk Analysis, Value at Risk Models (Volume IV)*, Prima edizione, John Wiley & Sons Ltd
- [15] De Laurentis, G. (2011) *Il credito alle imprese dopo la crisi*, Bancaria Editrice
- [16] Engle, R. F. (1982) *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the U.K. inflation*, *Econometria* **50**, 987-1008
- [17] FINMA (2018) *The Swiss Solvency Test*
- [18] Gneiting, T. (2011) *Making and evaluating point forecasts*, *Journal of the American Statistical Association* **106** (494), 746-762
- [19] Hajek, S. (2011) *Solvency 2 - Strumenti per il risk management delle aziende assicurative*, Egea.
- [20] Jorion, P. (1997) *In Defense of VaR*, <https://merage.uci.edu/~jorion/oc/ntalib2.html>
- [21] Koch-Medina, P., Munari, C. (2014) *Value-at-Risk vs Expected Shortfall: A Financial Perspective*
- [22] Orsini, C. (2017) *Da Basilea 1 a Basilea 3*, Arcadia Consulting Srl - Bologna
- [23] Palomba, G. (2014) *Modelli ARCH*, Università politecnica delle Marche, Dottorato in Econometria
- [24] Ponzio, A. (2014) *Modelli quantitativi per il calcolo del VaR in ambito finanziario*, Università degli studi di Bari
- [25] Resti, A., Sironi, A. (2008) *Rischio e valore delle banche. Misura, regolamentazione, gestione*, Egea, Milano
- [26] Spada, V. (2011) *Basilea 3*, Università del Salento
- [27] Taleb, N. (1997) *Against Value-at-Risk: Nassim Taleb Replies to Philippe Jorion*, <https://www.foolledbyrandomness.com/jorion.html>
- [28] Wimmerstedt, L. (2015) *Backtesting Expected Shortfall: the design and implementation of different backtests*