



Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Aumentare il flusso limitando i potenziali
conflitti: studio di un modello di
programmazione matematica a capacità
variabili per la gestione del traffico aereo**

Relatore:
Prof. Luigi De Giovanni

Candidato:
Monica Cocco
Numero di matricola:
1207411

11 dicembre 2020 - Anno Accademico 2019/2020

*“A chi trova se stesso nel proprio coraggio
A chi nasce ogni giorno e comincia il suo viaggio
A chi lotta da sempre e sopporta il dolore
Qui nessuno è diverso, nessuno è migliore
A chi ha perso tutto e riparte da zero
Perché niente finisce quando vivi davvero
A chi resta da solo abbracciato al silenzio
A chi dona l'amore che ha dentro”*

Fiorella Mannoia, *“Che sia benedetta”*

Indice

Introduzione	9
Motivazioni	9
Contenuti e contributi della tesi	12
1 Il problema della gestione del traffico aereo	15
1.1 Le capacità dello spazio aereo	15
1.2 Strategie di gestione del traffico aereo	17
1.3 Il problema ATFM	19
2 Strumenti teorici e computazionali	21
2.1 Programmazione Lineare	22
2.1.1 Metodo del simplesso	23
2.2 Programmazione Lineare Intera	24
2.2.1 Tecnica del Branch-and-Bound	24
2.2.2 Metodo dei piani di taglio	26
2.2.3 Branch-and-Cut	26
2.3 Framework computazionale	27
2.3.1 Il solver CPLEX	27
2.3.2 Il generatore algebrico di modelli AMPL	27
2.3.3 Il linguaggio di programmazione Python	29
2.3.4 L'ambiente MATLAB	30
3 Gestione del traffico aereo: stato dell'arte	31
3.1 Evoluzione storica dei modelli ATFM	31
3.2 Il modello di Bertsimas e Stock Patterson - 1998	36
3.2.1 Dati del problema e notazione	36
3.2.2 Variabili decisionali	38
3.2.3 La formulazione del modello	38
3.2.4 La funzione obiettivo	39
3.2.5 I vincoli	41
3.2.6 Altre opzioni	43

4	Alcune considerazioni preliminari alla formulazione di un nuovo modello	45
4.1	Settori e capacità	47
4.2	Finestra temporale e strategie consentite	47
4.3	Traiettorie, potenziali conflitti e tempi di incrocio	48
4.4	Classificazione degli scenari critici	50
5	Studio di un modello a incremento controllato di capacità	59
5.1	Dati del problema e notazione	59
5.2	Variabili decisionali	62
5.3	La formulazione del modello	65
5.4	La funzione obiettivo	69
5.5	I vincoli	69
5.5.1	Relazioni tra le variabili	69
5.5.2	Vincoli di capacità	70
5.5.3	Vincoli di connettività	70
5.5.4	Vincoli di traffico e condizioni di sicurezza	71
5.5.5	Altri vincoli	87
5.6	Alcune precisazioni	88
5.6.1	Stabilità delle configurazioni di capacità	88
5.6.2	Massimo aumento consentito	89
5.6.3	Monitoraggio selettivo di differenti situazioni critiche	89
5.7	Dimensione del modello	90
6	Implementazione del modello	93
6.1	Modalità di generazione delle istanze	93
6.1.1	Traiettorie e tempi di percorrenza	93
6.1.2	Potenziali conflitti	95
6.2	Implementazione in AMPL	96
6.2.1	File .dat	96
6.2.2	File .mod	96
6.2.3	File .run	97
7	Risultati computazionali	99
7.1	Descrizione delle istanze testate	99
7.2	Discussione dei risultati	102
7.2.1	Miglioramento del flusso di traffico	103
7.2.2	Tempi di calcolo	108
7.2.3	Qualità della formulazione	112
7.2.4	Incidenza della capacità aggiuntiva	114

8	Considerazioni finali	117
	Appendice A – Codice sorgente AMPL	119
	Ringraziamenti	125
	Riferimenti bibliografici	127

Introduzione

In questo capitolo introduttivo descriviamo alcuni aspetti significativi e presentiamo alcuni dati interessanti che riguardano l'industria del trasporto aereo, con uno sguardo sia a livello globale sia a livello europeo e, nello specifico, italiano. Analizziamo inoltre come l'impatto della pandemia sia stato particolarmente rilevante per il settore dell'aviazione. Dopo aver esposto le motivazioni del nostro lavoro, infine, presentiamo brevemente una sintesi dei principali contenuti e contributi della tesi.

Motivazioni

L'industria del trasporto aereo è senza dubbio uno dei più notevoli motori della crescita economica mondiale e fornisce anche significativi benefici sociali. La rete di trasporti che l'aviazione offre, oltre ad essere essenziale per il turismo e per il global business e a facilitare la globalizzazione della produzione e l'accesso ai mercati internazionali, contribuisce a generare un diffuso miglioramento delle condizioni di vita e incoraggia le relazioni e l'integrazione sociale ed economica tra diversi paesi.

Il traffico aereo (passeggeri e cargo, internazionale e interno) è cresciuto costantemente a partire dagli anni '40 del Novecento fino ai giorni nostri. A livello mondiale, nel 2018 il settore dell'aviazione ha contribuito a supportare 87.7 milioni di posti di lavoro, 11.3 milioni dei quali creati direttamente, e ha avuto un impatto economico diretto corrispondente a \$961.3 miliardi. Globalmente nel 2019 sono stati 4.5 miliardi i passeggeri che hanno usufruito del trasporto aereo e i voli commerciali programmati sono stati 46.8 milioni [4]. A livello europeo, nel 2019 1.1 miliardi di persone hanno viaggiato via aerea, con un aumento del 24.8% rispetto ai numeri del 2015. In Italia la crescita rispetto al 2015 è stata leggermente superiore alla media europea, con un aumento del 25.8% e un totale di circa 161 milioni di passeggeri nel 2019 [16]. Nel nostro paese il trasporto aereo sostiene 714000 posti di lavoro e contribuisce all'economia con 46 miliardi di euro, pari a circa il 2.7% del Prodotto Interno Lordo italiano [19].

Globalmente il numero di passeggeri che viaggiano via aria ha registrato un costante aumento nel corso degli anni, anche grazie a una sempre maggiore accessibilità del trasporto aereo. Nel 2000 un cittadino prendeva l'aereo in media una volta ogni 44 mesi; al 2018 invece, grazie al miglioramento della connettività tra i diversi aeroporti, all'aumento del numero delle tratte e alla comparsa di compagnie aeree low cost, il tempo che intercorre in media tra un viaggio in aereo e l'altro si è ridotto a 21 mesi [20]. Questi trend sono ben rappresentati nella **Figura 1**.

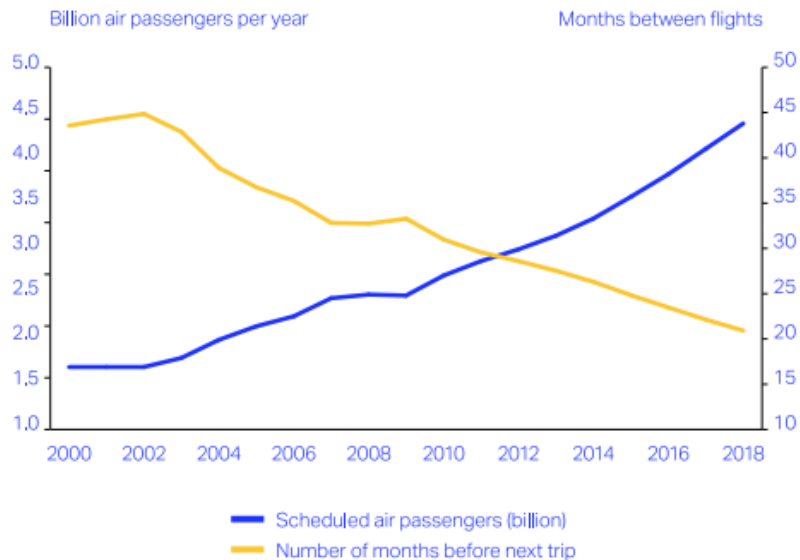


Figura 1: Numero di passeggeri che usufruiscono del trasporto aereo e numero di mesi che intercorre in media tra un viaggio in aereo e l'altro: andamento dall'anno 2000 all'anno 2018 [20].

Come conseguenza dell'aumento delle richieste di tratte e del numero di voli effettuati dalle diverse compagnie, il flusso di traffico aereo si è via via intensificato; questo dà spesso luogo a fenomeni di congestione degli elementi del sistema e si traduce in ritardi rispetto agli orari di partenza e di arrivo previsti. A livello europeo, nel 2019 si è assistito a un aumento dello 0.8% nel numero di voli e del 3.2% nel numero di passeggeri rispetto all'anno precedente. Dei voli effettuati, il 77.8% è arrivato a destinazione entro 15 minuti dall'orario programmato. Sebbene nel 2019 la puntualità sia migliorata rispetto al 2018 (+2.1%), complessivamente si è registrata la terza performance peggiore dell'ultimo decennio, seconda solo agli scenari verificatisi nel 2010 e nel 2018 [15].

L'inefficienza della gestione del traffico aereo è responsabile di un notevole incremento dei costi per le compagnie aeree: oltre ai costi operativi dovuti al consumo di carburante e all'incremento delle ore di lavoro del personale di volo, occorre considerare anche i rimborsi e le compensazioni spettanti ai passeggeri e la perdita di quote di mercato dovuta alle valutazioni negative e all'insoddisfazione degli stessi. L'importanza di migliorare la performance della gestione del traffico aereo si riflette anche a livello ambientale: per ogni tonnellata di carburante risparmiato, si evita l'emissione di 3.15 tonnellate di CO₂ [15].

Il problema della gestione del traffico aereo, in inglese *Air Traffic Flow Management* (ATFM), consiste nella pianificazione e gestione del flusso di aeromobili all'interno dell'aerospazio, considerando la traiettoria di ogni velivolo durante tutte le fasi di volo e le sue interazioni con le traiettorie di altri voli, al fine di raggiungere una configurazione ottimale del sistema mantenendo la minima deviazione dalle traiettorie di volo richieste dagli utenti [24]. L'ATFM, avendo l'obiettivo di assicurare una gestione dei volumi di traffico aereo ottimale e di garantire un aggiustamento delle rotte dei voli in modo che siano rispettate le capacità degli elementi del sistema e sia contemporaneamente migliorata la puntualità, gioca un ruolo fondamentale nel ridurre i costi dovuti ai ritardi e nell'aumentare l'efficienza del trasporto aereo.

Di recente, purtroppo, il trend positivo di crescita che il settore dell'industria aerea aveva costantemente registrato nel corso degli scorsi anni ha subito un forte contraccolpo a causa del Covid-19. La pandemia ha certamente avuto un impatto notevole su tutti gli aspetti dell'economia globale, ma quello dell'aviazione è risultato uno dei settori più duramente colpiti. In pieno lockdown, il numero dei voli operativi globalmente era solamente il 25% dei voli operati in condizioni normali, e molti di questi voli viaggiavano con un numero assai ridotto di passeggeri: nel mese di aprile 2020, ad esempio, si è registrato un calo del 94.4% nel numero di passeggeri rispetto ai numeri di aprile 2019. Accanto alla massiccia riduzione del traffico aereo, come conseguenza del Covid-19 si è vista a livello globale una riduzione temporanea di 46 milioni di posti di lavoro legati direttamente o indirettamente all'aviazione; le stime affermano inoltre che probabilmente si avrà una perdita del 43% dei posti di lavoro creati direttamente rispetto ai livelli pre-Covid, e dunque una perdita di 4.8 milioni di posti di lavoro, qualora i governi degli Stati non continuino a supportare il settore dell'aviazione nella ripresa post-pandemia con adeguati programmi di sostegno. Dal punto di vista economico, inoltre, nel periodo della pandemia l'impatto diretto dell'industria del trasporto aereo sull'economia mondiale è diminuito del 51% rispetto ai livelli pre-Covid [4]. La International Air Transport Association (IATA), che rappresenta molte delle maggiori compagnie aeree mondiali,

ha affermato che non sarà possibile una completa ripresa dell'industria del trasporto aereo prima del 2024 [21].

Il generale pessimismo e il senso di incertezza dovuti alla pandemia rendono estremamente difficile fare previsioni sul futuro andamento dell'industria del trasporto aereo, anche dal momento che gli sviluppi della situazione sanitaria non risultano ancora chiari. La speranza, tuttavia, è che si possa tornare al più presto alla normalità, con una maggiore consapevolezza, una maggiore attenzione alla sostenibilità e un maggiore rispetto per l'ambiente. In questa prospettiva, puntare sull'ATFM e sul miglioramento delle strategie di gestione del traffico aereo rappresenta un grande investimento per il futuro, anche in tempo di pandemia.

Contenuti e contributi della tesi

Esponiamo di seguito i principali contenuti della tesi, sottolineando in modo particolare i contributi originali più importanti.

Nel **Capitolo 1** viene presentata un'ampia descrizione del problema di Air Traffic Flow Management (ATFM) nella quale vengono considerati tutti gli aspetti rilevanti che concorrono alla sua formulazione e vengono sottolineati gli obiettivi che i modelli di gestione del traffico aereo si prefiggono. In particolare, ci si sofferma sui problemi di congestione che possono verificarsi e sulle possibili strategie da adottare per ovviare al problema.

Nel **Capitolo 2** vengono introdotti alcuni strumenti teorici di Ricerca Operativa utili per risolvere il problema ATFM che abbiamo analizzato, dal momento che la formulazione proposta rientra nella categoria dei modelli di Programmazione Lineare Intera. Viene inoltre fornita una panoramica relativa al linguaggio di programmazione e al solver utilizzato per l'implementazione del modello al calcolatore.

Nel **Capitolo 3** vengono descritte, in ordine temporale, alcune formulazioni chiave nell'evoluzione storica dei modelli di gestione del traffico aereo. Viene infine presentata la formulazione di Bertsimas e Stock Patterson del 1998, modello che sta alla base di questa tesi.

Nel **Capitolo 4** viene descritto l'obiettivo del nuovo modello proposto in questa tesi, vengono illustrate le idee chiave e vengono presentate alcune considerazioni preliminari necessarie per una adeguata comprensione della formulazione. Il nuovo modello propone per i settori una capacità che varia in funzione del traffico, ovvero che può essere incrementata rispetto ai livelli nominali qualora la complessità del traffico nel settore considerato

sia controllata. Tale complessità è misurata attraverso le situazioni critiche determinate dai possibili incroci tra traiettorie: nel capitolo viene data una classificazione dei possibili scenari nell'intorno del punto di intersezione delle traiettorie di due voli in potenziale conflitto e viene definito il concetto di situazione critica.

Nel **Capitolo 5**, che rappresenta uno dei principali contributi della tesi, viene presentata una descrizione dettagliata del nuovo modello, delle variabili decisionali utilizzate e dei vincoli che compaiono nella sua formulazione. Sono inoltre descritti alcuni vincoli che possono essere aggiunti allo scopo di arricchire la formulazione e renderla più dettagliata e aderente alla realtà. Viene illustrata, infine, una possibile variazione concettuale che dà luogo a una formulazione alternativa rispetto al modello presentato in precedenza.

Nel **Capitolo 6** viene descritto il metodo utilizzato per la generazione automatica delle istanze da testare e viene successivamente illustrata l'implementazione del nuovo modello in AMPL, ulteriore contributo della tesi, attraverso una dettagliata descrizione dei file `.dat`, `.mod` e `.run`.

Nel **Capitolo 7** vengono descritte le istanze testate e presentati i risultati computazionali. Nella discussione, i risultati ottenuti risolvendo le istanze con il nuovo modello vengono paragonati ai risultati ottenuti con il modello base, evidenziando i miglioramenti in termini di riduzione dei costi dovuti ai ritardi (funzione obiettivo dei modelli) e proponendo alcune osservazioni relative ai tempi di risoluzione e alla qualità della formulazione.

Nel **Capitolo 8** vengono tratte le conclusioni dello studio teorico e computazionale svolto nella tesi. Sono discussi, inoltre, alcuni possibili miglioramenti e potenziali sviluppi futuri.

Nell'**Appendice A** è riportato il codice AMPL che implementa il modello studiato.

Capitolo 1

Il problema della gestione del traffico aereo

Quello della gestione del flusso del traffico aereo, *Air Traffic Flow Management* in lingua inglese (da cui l'acronimo ATFM), è un problema di rilevanza fondamentale nel settore della logistica e dei trasporti. Compito fondamentale dell'ATFM è assicurare e mantenere una gestione dei volumi di traffico aereo sempre ottimale, limitando i ritardi e migliorando la puntualità e l'efficienza. Più concretamente, il problema ATFM consiste nell'organizzare il movimento di un insieme di vettori aerei, ognuno con origine e destinazione fissate, all'interno di una certa area e di una certa finestra temporale. Per ogni volo sono assegnati i tempi di arrivo e partenza previsti e occorre determinare la rotta e/o la velocità e i tempi di percorrenza, nel tentativo di soddisfare i vincoli sulle capacità di traffico che gli aeroporti e i volumi di spazi aerei nazionali sono in grado di gestire e cercando di minimizzare i costi dovuti agli eventuali ritardi.

1.1 Le capacità dello spazio aereo

Lo spazio aereo è virtualmente diviso in regioni di informazioni di volo, *Flight Information Regions* in lingua inglese (da cui l'acronimo FIRs), in ciascuna delle quali viene assicurato il controllo del traffico dal centro informazioni volo, *Flight Information Center* in inglese (FIC). Nella **Figura 1.1** viene fornito un esempio di FIR: si tratta della regione di informazione di volo di Milano, gestita dal FIC di Milano nella parte ovest e dal FIC di Padova nella parte est, essendo stata accorpata la FIR di Padova a quella di Milano [32].

Le capacità di aeroporti e settori variano dinamicamente nel tempo e sono influenzate da vari fattori. Un controllore di volo, per quanto esperto, non è in grado di monitorare e gestire più di un certo numero di voli simultaneamente. Questo numero è legato alla complessità del traffico: se i piani di volo indicano che pochi aeromobili che transitano in un settore hanno traiettorie che si intersecano, ad esempio, un controllore può verosimilmente monitorare un numero di voli più elevato rispetto alla situazione di traffico in cui le rotte di molti vettori aerei si incrociano. Inoltre, le riduzioni del personale, gli scioperi, le manutenzioni o l'avaria di uno o più apparati possono concorrere a una riduzione della capacità operativa. La posizione geografica è un altro fattore di fondamentale importanza. Alcune leggi regolano le altezze minime e massime di sicurezza per l'aviazione, che dipendono dalla morfologia e dalle caratteristiche del territorio: lo spazio attraversabile sovrastante una zona montuosa, ad esempio, è minore rispetto allo spazio attraversabile in corrispondenza di un luogo pianeggiante [24]. Inoltre ci sono specifiche disposizioni che limitano il passaggio sopra centri abitati o aree protette, restringendo la capacità dei settori coinvolti. Le condizioni meteorologiche, infine, possono influire pesantemente e causare rilevanti variazioni nella capacità di un aeroporto o di un settore aereo: quando un settore è colpito da cattive condizioni meteorologiche il numero di voli che possono transitare si riduce temporaneamente; inoltre, un temporale o un forte vento possono causare bassa visibilità con conseguente limitazione delle piste utilizzabili in un aeroporto e aumento della minima separazione tra successivi aeromobili in avvicinamento per l'atterraggio.

1.2 Strategie di gestione del traffico aereo

Considerare restrizioni di capacità è necessario per consentire di monitorare adeguatamente il flusso di aeromobili all'interno dell'aerospazio e, di conseguenza, per garantire che il traffico aereo si svolga in condizioni di sicurezza, e tali vincoli sono la principale causa della congestione degli elementi dello spazio aereo e quindi dei ritardi dei voli. D'altra parte, il continuo e rapido sviluppo del settore del trasporto aereo e la crescente domanda di voli porta settori aerei e aeroporti ad avere una difficoltà sempre maggiore nel coprire tutte le tratte richieste in modo soddisfacente, in quando spesso il numero di voli richiesti dalle compagnie aeree risulta essere maggiore delle massime capacità consentite per i vari settori e aeroporti del sistema. Quando un elemento del sistema non riesce ad assicurare la partenza o l'arrivo se si tratta di un aeroporto, o il transito se si tratta di un settore, del numero di voli che è stato previsto, si verificano fenomeni di congestione. Il compito dei modelli di ATFM è dunque quello di programmare il traffico aereo avendo cura di soddisfare la domanda di voli, rispettare le capacità degli elementi del sistema e gestire gli eventuali momenti di congestione.

Per perseguire una gestione del traffico ottimale ed evitare congestioni all'interno dello spazio aereo possono essere messe in atto varie strategie, che descriviamo brevemente di seguito e di cui diamo rappresentazione nella sottostante **Figura 1.2**.

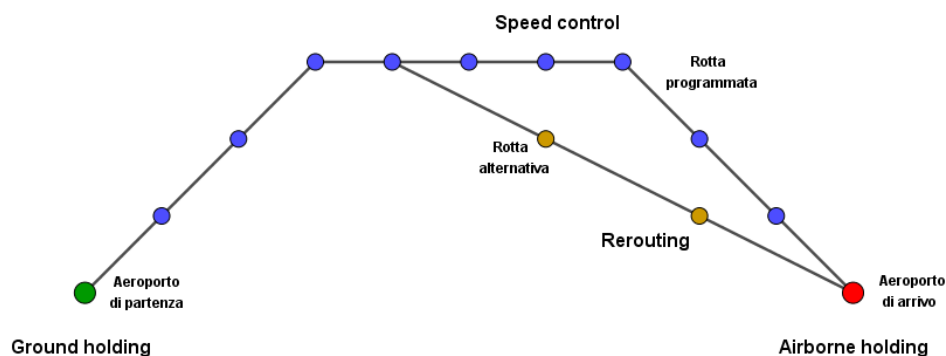


Figura 1.2: Politiche di gestione del traffico aereo.

La politica di **ground holding** prevede che un aeromobile venga obbligato a posticipare il decollo rispetto all'orario di partenza previsto e sia trattenuto al suolo, prolungando la sosta nel suo aeroporto di partenza. Applicare ritardi a terra è una delle opzioni più conosciute e attuate, in quanto si tratta di una politica sicura e che prevede costi più contenuti rispetto alle altre strategie possibili [3].

L'opzione di **airborne holding** prevede invece che un aeromobile venga obbligato a trascorrere in aria alcune unità di tempo necessarie a far smaltire la congestione nell'aeroporto di arrivo. Il costo del ritardo in aria è superiore al costo del ritardo a terra, in quanto si deve tenere conto, ad esempio, dell'aumento delle spese di carburante e dell'incremento delle ore di lavoro del personale impiegato nell'aeromobile.

L'operazione di **speed control** prevede la possibilità per un aeromobile di modificare la velocità di percorrenza della sua rotta, ad esempio rallentando per ritardare l'entrata in un settore successivo che risulta congestionato.

Mentre le politiche descritte finora mantengono per ogni volo la traiettoria definita precedentemente e modificano solamente il tempo di decollo, i tempi di attraversamento o i tempi di atterraggio, la strategia di **rerouting** prevede la possibilità di dirottare un volo lungo rotte alternative per evitare di attraversare un settore successivo congestionato presente nella sua attuale rotta [7]. In principio il compito di indicare la rotta alternativa era lasciato,

in fase operativa, ai controllori del traffico aereo, ma si è poi cercata una formulazione matematica che consentisse di descrivere dinamicamente tali decisioni già a livello pretattico. Esistono sostanzialmente due possibilità per mettere in pratica l'opzione di rerouting. Nel primo caso occorre definire preventivamente per ogni settore un insieme di elementi percorribili immediatamente prima e dopo di lui; così facendo è possibile descrivere passo passo la rotta da seguire, scegliendo via via quali settori compongono la nuova traiettoria. Il secondo caso, invece, prevede la possibilità di scegliere la rotta da seguire tra un insieme finito di rotte possibili.

1.3 Il problema ATFM

L'applicazione a un volo di politiche come il ground holding, l'airborne holding, lo speed control e/o il rerouting provoca ritardi rispetto agli orari previsti che risultano essere molto onerosi per le compagnie aeree. Inoltre, nel caso di voli consecutivi, ovvero quando vengono destinati ad uno stesso aeromobile due o più voli conseguenti intervallati da una sosta necessaria per la preparazione al volo successivo, un ritardo sulla prima tratta si propaga spesso anche sulla seconda tratta. Possiamo dunque definire il problema ATFM come il problema della gestione del traffico aereo con l'obiettivo di minimizzare i costi dovuti ai ritardi causati dall'applicazione di politiche contro la congestione.

Più in dettaglio, considerando tutti gli elementi costitutivi presentati, il problema ATFM consiste nella pianificazione e gestione del movimento di un insieme di vettori aerei, ognuno con origine e destinazione fissate, attraverso l'aerospazio e all'interno di una fissata finestra temporale, in modo da soddisfare la domanda di voli, rispettare le capacità di settori e aeroporti e raggiungere una configurazione ottimale del sistema con deviazioni minime dalle traiettorie di volo richieste dagli utenti [24]. I momenti di congestione che si verificano a causa dell'imposizione di vincoli sulle capacità degli elementi dell'aerospazio vengono gestiti applicando specifiche politiche che provocano ritardi rispetto agli orari previsti e, di conseguenza, un aggravio di costi per le compagnie aeree. L'obiettivo del problema ATFM è di minimizzare tali costi, determinando, avendo cura di soddisfare tutti i vincoli, la rotta e/o la velocità e i tempi di percorrenza ottimali da assegnare ad ogni volo.

Un tempo la programmazione del traffico aereo e la gestione del flusso era affidata in toto ai controllori di volo e alla loro esperienza. Nell'ultimo trentennio, invece, sono state sviluppate numerose formulazioni matematiche che permettono di descrivere le decisioni relative ai voli in modo dinamico, grazie a modelli matematici che si prestano ad essere risolti più volte al giorno.

Capitolo 2

Strumenti teorici e computazionali

Il modello presentato in questa tesi appartiene alla classe dei modelli di Programmazione Lineare Intera (PLI). La Programmazione Lineare (PL) è una branca dell'ottimizzazione matematica che nel ventesimo secolo ha registrato notevole successo per la sua capacità di descrivere e risolvere problemi del mondo reale anche molto complessi. Essa afferisce al campo della matematica applicata noto come Ricerca Operativa.

La Programmazione Lineare e la Programmazione Lineare Intera sono utilizzate in numerosi contesti legati alle scienze computazionali e in svariati ambiti anche molto diversi tra loro, dall'area economica e industriale all'ambito della logistica e delle comunicazioni. Esempi importanti di applicazioni della PL e della PLI sono l'organizzazione delle reti di trasporti e dei network di telecomunicazioni, la gestione del portfolio, la pianificazione dei turni. Inoltre, la PL ha un ruolo fondamentale anche in alcuni campi della matematica teorica come la teoria dei grafi e la combinatoria.

Per risolvere problemi di ottimizzazione e di programmazione matematica sono stati sviluppati nel corso degli anni numerosi software. Gli strumenti che abbiamo utilizzato per implementare il nostro modello e per ottenere i risultati computazionali illustrati in questo lavoro di tesi sono descritti nella **Sezione 2.3**.

Per la presentazione degli aspetti fondamentali della programmazione lineare e della programmazione lineare intera ci siamo affidati alle note [11] e [12]. Per la descrizione dei software e dei linguaggi di programmazione utilizzati abbiamo invece fatto riferimento a [1], [22], [12], [13], [23] e [31].

2.1 Programmazione Lineare

Un programma lineare è un problema di ottimizzazione vincolata in cui la funzione da minimizzare (o massimizzare) è lineare e i vincoli sono descritti da equazioni e/o disequazioni lineari.

Ogni programma lineare può essere scritto in forma standard nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è la matrice dei coefficienti dei vincoli lineari, $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore dei termini noti dei vincoli, $c \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei costi e x è un vettore di variabili in \mathbb{R}^n .

Ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfi $Ax = b$ e $x \geq 0$ è detto *soluzione ammissibile*. L'insieme di tutte le soluzioni ammissibili di un programma lineare è detto *regione ammissibile*. Un vettore $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è *soluzione ottima* del problema di programmazione lineare se \bar{x} è ammissibile e $c^T \bar{x} \leq c^T x$ per ogni altra soluzione x ammissibile. Il corrispondente valore $c^T \bar{x}$ è detto *valore ottimo*.

Teorema 2.1.1 (Teorema fondamentale della Programmazione Lineare). *Dato un programma lineare, vale una e una sola delle seguenti alternative:*

- (i) *il problema ha almeno una soluzione ottima;*
- (ii) *il problema è inammissibile, cioè non ha soluzioni ammissibili;*
- (iii) *il problema è illimitato, cioè per ogni $K \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione ammissibile x tale che $c^T x < K$.*

Dato un qualunque programma lineare in forma standard in cui le righe della matrice A sono linearmente indipendenti, si definisce *base* un qualunque sottoinsieme di indici $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ tale che $|B| = m$ e la matrice quadrata A_B , ovvero la sottomatrice di A formata dalle colonne con indice in B , è invertibile. La corrispondente *non-base* è $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$.

Data una base B , vale la seguente catena di equivalenze:

$$Ax = b \iff A_B x_B + A_N x_N = b \iff x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

Si definisce *soluzione di base* associata alla base B l'unica soluzione \bar{x} di $Ax = b$ ottenuta ponendo $\bar{x}_N = 0$. Si noti che una soluzione di base non è necessariamente ammissibile perché potrebbero essere violati i vincoli di non negatività delle variabili.

Teorema 2.1.2. *Se un programma lineare in forma standard ha una soluzione ottima, allora c'è almeno una soluzione ottima che è una soluzione di base.*

Il teorema appena enunciato permette di restringere la ricerca della soluzione ottima alle sole soluzioni di base ammissibili, che, come segue dalla definizione di base, sono in numero finito. Questa osservazione è alla base del metodo del simplesso, di cui ora presentiamo qualche cenno.

2.1.1 Metodo del simplesso

In linea di principio, si potrebbe cercare una soluzione ottima enumerando tutte le soluzioni di base ammissibili del programma lineare e individuando tra queste quella che dà il miglior valore della funzione obiettivo. Tale approccio, sebbene possa sembrare a prima vista ragionevole, risulta nella pratica inapplicabile. Il numero di soluzioni di base di un problema di programmazione lineare, pur essendo sempre finito, può essere molto grande anche per problemi di modeste dimensioni. Inoltre tale approccio non permetterebbe di stabilire l'eventuale illimitatezza del problema, perché fornirebbe solo la migliore tra le soluzioni di base ammissibili.

Il metodo più conosciuto e usato per risolvere problemi di PL è il metodo del simplesso, algoritmo che esplora le soluzioni di base ammissibili in modo più intelligente rispetto all'enumerazione completa. Il metodo del simplesso permette di decidere se il problema è inammissibile, illimitato o se ammette ottimo; in quest'ultimo caso, esso fornisce una soluzione ottima di base. Senza addentrarci nei dettagli, presentiamo ora una descrizione essenziale dell'algoritmo. Per approfondimenti si rimanda a [11].

- (i) Punto di partenza del metodo del simplesso è una qualsiasi soluzione di base ammissibile, che viene individuata nella cosiddetta *fase uno*; se non ci sono soluzioni ammissibili, la fase uno del metodo del simplesso ne fornisce prova.
- (ii) Ad ogni iterazione, il metodo del simplesso si muove dalla soluzione di base ammissibile corrente ad una nuova soluzione di base ammissibile a cui corrisponde un valore della funzione obiettivo non peggiore di quello della soluzione precedente.
- (iii) Se il problema è ammissibile, dopo un numero finito di iterazioni il metodo del simplesso restituisce una soluzione di base ottima. Se invece il problema è illimitato, il metodo del simplesso fornisce prova dell'illimitatezza.

2.2 Programmazione Lineare Intera

Un programma lineare intero è un problema di ottimizzazione vincolata in cui la funzione obiettivo è lineare e la regione ammissibile è costituita dall'insieme dei vettori interi che soddisfano un dato sistema di equazioni e/o disequazioni. Scrivendolo in forma compatta, un problema di programmazione lineare intera si presenta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Di fondamentale importanza in programmazione lineare intera sono le variabili binarie, ovvero quelle che possono assumere solo valore 0 o 1.

I problemi di programmazione lineare intera sono, di norma, molto più difficili da risolvere rispetto a quelli di programmazione lineare. Presentiamo di seguito alcune delle tecniche risolutive più utilizzate nell'ambito della PLI.

2.2.1 Tecnica del Branch-and-Bound

Il metodo di Branch-and-Bound è una tecnica di enumerazione implicita delle soluzioni ammissibili: per cercare una soluzione ottima del problema non si esaminano effettivamente tutte le soluzioni, ma una parte di esse potrà essere scartata. Prima di descrivere l'algoritmo occorre però dare una definizione preliminare e introdurre due osservazioni essenziali.

Il *rilassamento lineare* (o rilassamento continuo) di un programma lineare intero è il programma lineare che si ottiene tralasciando i vincoli di interezza (nel caso in cui una variabile sia binaria, il vincolo $x \in \{0, 1\}$ viene sostituito con la disuguaglianza $0 \leq x \leq 1$).

Il rilassamento lineare non fornisce, in generale, una buona approssimazione del problema PLI; il valore ottimo del rilassamento continuo, infatti, può essere arbitrariamente distante dal valore ottimo del programma lineare intero di partenza. Possiamo tuttavia individuare una relazione tra la soluzione ottima di un problema lineare intero e la soluzione ottima del suo rilassamento lineare: nel caso di un problema di minimizzazione, il valore ottimo del rilassamento lineare è un lower bound al valore ottimo del programma lineare intero, perché ogni soluzione ammissibile del PLI è ammissibile anche per il rilassamento continuo.

Infine, un'osservazione di fondamentale importanza per la tecnica del Branch-and-Bound è la seguente: se la regione ammissibile Ω di un problema viene suddivisa in due sottoinsiemi $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, allora il valore ottimo del problema iniziale è il migliore dei valori ottimi dei due sottoproblemi:

$$\min\{c^T x : x \in \Omega\} = \min\{\min\{c^T x : x \in \Omega_1\}, \min\{c^T x : x \in \Omega_2\}\}$$

L'algoritmo di Branch-and-Bound è una tecnica ricorsiva che si basa sulla suddivisione del problema iniziale in sottoproblemi via via più semplici da risolvere.

Inizialmente si risolve il rilassamento lineare del problema intero assegnato. Se la soluzione ottima trovata è intera oppure non ci sono soluzioni ammissibili, allora rispettivamente abbiamo trovato l'ottimo del PLI oppure il problema di partenza è inammissibile. Se invece la soluzione del rilassamento lineare è un vettore \bar{x} non intero, viene scelta una delle sue componenti frazionarie (sia $\bar{x}_i \notin \mathbb{Z}$) e si considerano due sottoproblemi, detti nodi figli: tali sottoproblemi sono ottenuti dal programma lineare intero di partenza aggiungendo rispettivamente i vincoli

$$x_i \leq \lfloor \bar{x}_i \rfloor \quad x_i \geq \lceil \bar{x}_i \rceil$$

dove $\lfloor \cdot \rfloor$ rappresenta l'arrotondamento per difetto e $\lceil \cdot \rceil$ rappresenta l'arrotondamento per eccesso. Questa operazione è detta *branching*; tramite essa si va creando l'albero di Branch-and-Bound e vengono via via eliminate le soluzioni (frazionarie) comprese nella striscia $(\lfloor \bar{x}_i \rfloor, \lceil \bar{x}_i \rceil)$.

Dopo aver suddiviso il problema originario in due nodi figli si procede con la risoluzione dei due sottoproblemi ottenuti; grazie all'osservazione vista precedentemente possiamo affermare che scegliendo la migliore delle due soluzioni si trova una soluzione ottima del programma lineare intero di partenza.

Il procedimento viene a questo punto iterato: per ogni sottoproblema si risolve il rilassamento continuo, e così via. Non è tuttavia necessario esaminare tutti i nodi figli che vengono via via creati, in quanto esistono tre criteri che permettono di stabilire quando un sottoproblema può essere potato (e quindi non deve essere esaminato ulteriormente). L'algoritmo di Branch-and-Bound termina quando tutti i sottoproblemi sono stati potati.

Esaminiamo di seguito i tre criteri di potatura.

- (i) Se il rilassamento lineare di un sottoproblema P è inammissibile, allora anche P stesso è inammissibile ed è possibile potare per inammissibilità.
- (ii) Se il rilassamento lineare di un sottoproblema P ha una soluzione ottima intera \bar{x} , tale soluzione è ottima anche per P . Se \bar{x} è la prima soluzione ammissibile intera trovata, viene registrata come soluzione *incombente*. Se invece era già stata trovata precedentemente un'altra soluzione intera \tilde{x} in un altro sottoproblema P' , si confrontano le due soluzioni: se \bar{x} è migliore di \tilde{x} , allora \bar{x} viene registrata come nuova soluzione incombente e vengono potati P per ottimalità e P' per bound; in caso contrario, ovvero se \bar{x} non è migliore di \tilde{x} , viene potato P per bound senza aggiornare la soluzione incombente.

- (iii) Se il valore ottimo del rilassamento lineare di un sottoproblema P è peggiore dell'incombente, è possibile potare P per bound anche se non si conosce il valore ottimo di P .

2.2.2 Metodo dei piani di taglio

Una tecnica risolutiva alternativa all'algoritmo di Branch-and-Bound è il metodo dei piani di taglio, approccio che sfrutta gli aspetti poliedrali della programmazione lineare intera. Prima di presentare l'algoritmo diamo alcune definizioni preliminari.

Dato un insieme $\Omega \in \mathbb{R}^n$, una disequazione $a^T x \leq \beta$ è una *disuguaglianza valida* per Ω se è soddisfatta da tutti i punti di Ω .

Dato un programma lineare intero con regione ammissibile Ω , una disequazione $a^T x \leq \beta$ è un *piano di taglio* se è valida per Ω , ma è violata da almeno un punto del rilassamento lineare del problema. Possiamo interpretare un piano di taglio come una disequazione che contribuisce a eliminare punti ammissibili per il rilassamento continuo che giacciono al di fuori della regione ammissibile del problema lineare intero.

Il metodo dei piani di taglio (*cutting planes* in lingua inglese) prevede che inizialmente venga risolto il rilassamento lineare del PLI assegnato. Se la soluzione ottima trovata \bar{x} è un punto intero, l'algoritmo termina. In caso contrario, si cerca un piano di taglio $a^T x \leq \beta$ che sia valido per Ω ma violato da \bar{x} (ovvero $a^T \bar{x} > \beta$). A questo punto si aggiunge la disequazione $a^T x \leq \beta$ al rilassamento lineare del problema e si itera il procedimento.

L'algoritmo dei piani di taglio cerca di raggiungere l'ottimo intero eliminando ad ogni passo la soluzione ottima del rilassamento lineare appena trovata. Esistono alcune procedure standard che permettono di generare i tagli; tra queste, una delle più usate è quella di Gomory [12].

2.2.3 Branch-and-Cut

L'utilizzo combinato dell'algoritmo di Branch-and-Bound e del metodo dei piani di taglio può aiutare a risolvere un problema di programmazione lineare intera in modo più efficiente. I due metodi considerati singolarmente, infatti, presentano un problema comune: accade spesso che le prime iterazioni portino ad una rapida riduzione della distanza dalla soluzione ottima intera, ma che in seguito ogni iterazione successiva porti a un miglioramento irrisorio, se non addirittura nullo, della soluzione. La tecnica del Branch-and-Cut, combinando il Branch-and-Bound e l'algoritmo dei piani di taglio, permette di rafforzare la formulazione del rilassamento continuo attraverso la generazione di piani di taglio e di utilizzare invece la tecnica del branching quando i tagli risultano poco efficaci.

2.3 Framework computazionale

La tesi include una parte computazionale di implementazione e risoluzione del modello preso in esame che è stata svolta utilizzando il solver CPLEX e il generatore algebrico di modelli AMPL. Le istanze testate sono state invece generate in modo automatico utilizzando in sinergia il linguaggio di programmazione Python e l'ambiente MATLAB.

2.3.1 Il solver CPLEX

IBM ILOG CPLEX Optimization Studio (solitamente abbreviato, in modo informale, con CPLEX) è un software dedicato all'ottimizzazione e alla risoluzione di problemi di programmazione lineare intera e mista, fortemente utilizzato in ambito industriale e di ricerca e noto per la sua stabilità e le sue elevate prestazioni [22]. Originariamente sviluppato da Robert E. Bixby, è stato commercializzato a partire dal 1988 dalla CPLEX Optimization Inc., acquisita da ILOG nel 1997. ILOG è stata a sua volta acquisita nel 2009 da IBM, in cui attualmente CPLEX viene mantenuto e sviluppato [23]. Il solver prende il nome dal metodo del simplesso, anche se oggi comprende al suo interno diversi algoritmi addizionali per la risoluzione di problemi nel campo della programmazione matematica.

Dopo aver rilassato il problema se necessario, viene svolto il preprocessing (presolve+probing), insieme di operazioni eseguite con l'obiettivo di rafforzare la formulazione e di semplificare l'istanza ricevuta, mantenendo comunque invariate le soluzioni ottime del problema. Le operazioni svolte nel preprocessing consistono usualmente nel fissare, ove possibile, alcune variabili e nell'eliminare i vincoli che risultano ridondanti. In questa fase, dopo aver analizzato variabili e vincoli del modello, CPLEX può concludere che il problema è inammissibile o affermare che viene superato il limite di memoria. In seguito al preprocessing, il solver utilizza alcuni algoritmi, come il simplesso o il Branch-and-Cut, per risolvere il problema. Vengono inoltre utilizzati occasionalmente procedimenti euristici per migliorare i bound. Quando il procedimento termina, oltre alla soluzione ottima CPLEX fornisce altre informazioni utili sulla soluzione stessa oppure sul processo di risoluzione.

2.3.2 Il generatore algebrico di modelli AMPL

AMPL, acronimo di A Mathematical Programming Language, è un linguaggio di modellazione algebrica sviluppato da Robert Fourer, David Gay e Brian Kernighan all'interno dei laboratori Bell, centro di ricerca e sviluppo attualmente di proprietà di Nokia con sede principale a Murray Hill nel New Jersey (USA), e rilasciato per la prima volta nel 1985 [1].

Il software AMPL è in grado di tradurre modelli di programmazione matematica scritti nel linguaggio AMPL in un formato comprensibile ad un generico risolutore di programmazione matematica. Esso è un generatore algebrico di modelli che fornisce un linguaggio semplice per descrivere modelli complessi; tale linguaggio è contemporaneamente ad alto livello, cioè comprensibile ad un essere umano, e formalmente strutturato, ovvero accessibile a un risolutore [12]. In quanto generatore algebrico di modelli, inoltre, AMPL permette all'utente di comunicare con il risolutore attraverso file di testo anziché attraverso strutture dati, in modo da non richiederli conoscenze informatiche approfondite e da poter formulare il modello con un semplice editor, qualunque sia la piattaforma su cui viene scritto e risolto. Ulteriori caratteristiche vantaggiose sono la possibilità di comunicare con diversi risolutori e la possibilità di tenere distinti la struttura logica del modello (variabili decisionali, funzione obiettivo, vincoli) dal valore dei dati numerici.

Uno schema formale che illustra quanto appena descritto è riportato in **Figura 2.1**.

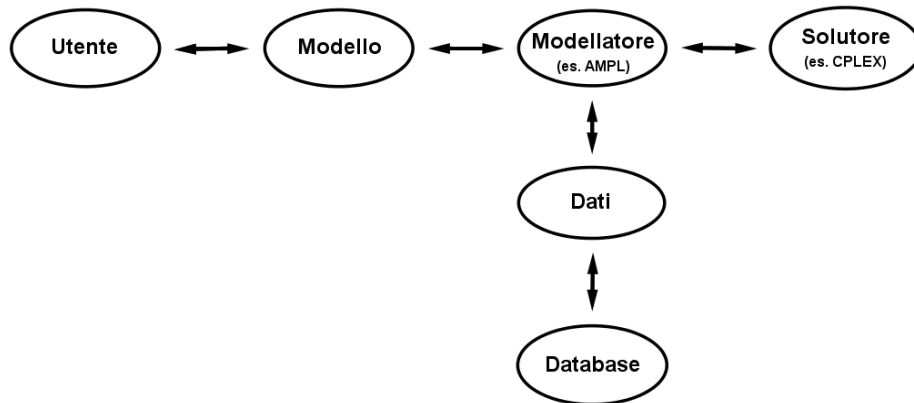


Figura 2.1: Schema di funzionamento del generatore algebrico di modelli AMPL.

Utilizzando un generatore algebrico di modelli come AMPL, l'utente non si occupa più direttamente di interrogare il risolutore, ma può concentrarsi sulla stesura del modello, usando un linguaggio ad alto livello che permette di descrivere agevolmente problemi reali anche molto complessi. Inoltre può affidare la gestione dei dati a un database esterno a cui accedere quando necessario e può utilizzare diversi risolutori senza dover modificare il modello. Infine, la separazione tra la struttura logica e i dati evita che piccole variazioni nella struttura del modello o nei dati comportino di riscrivere tutto: è infatti semplice usare lo stesso modello su dati differenti o applicare modelli diversi allo stesso problema.

2.3.3 Il linguaggio di programmazione Python

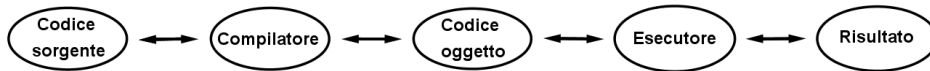
Python è un linguaggio di programmazione ad alto livello sviluppato dal programmatore olandese Guido van Rossum e rilasciato nel 1991 [13]. A differenza dei linguaggi di basso livello, detti anche linguaggi macchina o linguaggi assembly, che sono orientati alla macchina e direttamente eseguibili dal processore del calcolatore, i programmi scritti in un linguaggio di alto livello sono orientati al programmatore, il loro scopo è quello di essere facilmente utilizzabili dai programmatori umani e necessitano di essere elaborati prima di essere eseguiti. Questo processo di elaborazione impiega del tempo e rappresenta un piccolo svantaggio dei linguaggi ad alto livello, ma per contro i vantaggi sono enormi: i programmi sono più veloci da scrivere, più corti e facilmente leggibili, e possono essere eseguiti su tipi di computer diversi con poche o addirittura nessuna modifica [13].

In genere, i programmi di alto livello vengono trasformati in programmi di basso livello eseguibili dal computer tramite due tipi di elaborazione: l'interpretazione e la compilazione.

Un interprete legge il programma di alto livello e lo esegue, trasformando ogni riga di istruzioni in un'azione. L'interprete elabora il programma un po' alla volta, alternando la lettura delle istruzioni all'esecuzione dei comandi che le istruzioni descrivono.



Un compilatore invece legge il programma di alto livello e lo traduce completamente in basso livello, prima che il programma possa essere eseguito. In questo caso il programma di alto livello viene chiamato codice sorgente e il programma tradotto codice oggetto o eseguibile.



Python è un linguaggio interpretato perché i programmi Python sono eseguiti da un interprete. Questa caratteristica fa sì che sia possibile scrivere agevolmente programmi anche complessi senza perdersi in problemi di compilazione e link. Python permette dunque un ottimo equilibrio tra l'aspetto pratico e quello concettuale; inoltre è fornito di un'ampia libreria di moduli che possono essere usati in contesti molto diversi tra di loro per portare a termine progetti anche non banali.

2.3.4 L'ambiente MATLAB

MATLAB è un ambiente integrato per il calcolo scientifico e per la visualizzazione, scritto in linguaggio C e distribuito dalla MathWorks [31]. Abbreviazione di MATrix LABoratory, MATLAB è stato creato alla fine degli anni settanta da Cleve Moler, presidente del Dipartimento di Scienze Informatiche dell'Università del Nuovo Messico, ed è stato originariamente sviluppato per consentire un accesso immediato a pacchetti di software per il calcolo matriciale. MATLAB consente di manipolare matrici, visualizzare funzioni e dati, implementare algoritmi, creare interfacce utente e interfacciarsi con altri programmi. Nonostante sia specializzato nel calcolo numerico, MATLAB è molto versatile e grazie ai suoi numerosi strumenti a supporto dei più disparati campi di studio applicati viene utilizzato da milioni di persone nell'industria e nelle università.

Capitolo 3

Gestione del traffico aereo: stato dell'arte

Nel corso degli anni sono stati proposti numerosi modelli per descrivere matematicamente il problema ATFM. Sono possibili diversi approcci e le diverse formulazioni introdotte possono differire in molti aspetti: alcuni modelli sono più dettagliati di altri, alcuni modelli sono deterministici e altri stocastici, alcuni sono statici e altri dinamici. In generale, i modelli di ATFM non sono modelli continui, ma adottano una rappresentazione discreta del tempo: l'intera finestra temporale considerata viene suddivisa in intervalli più piccoli e il comportamento degli aeromobili è osservato in riferimento a questi intervalli di discretizzazione. In virtù di ciò, ogni modello di programmazione lineare intera che descrive il problema ATFM cattura il comportamento macroscopico del flusso di traffico aereo. Tuttavia ogni formulazione è peculiare perché considera ed esplora diversi aspetti e caratteristiche del problema.

Nella **Sezione 3.1** analizziamo dal punto di vista storico-cronologico l'evoluzione dei principali modelli di programmazione lineare intera introdotti per ottimizzare la gestione del traffico aereo. Successivamente, nella **Sezione 3.2** descriviamo la formulazione di Bertsimas e Stock Patterson [8], modello proposto nel 1998 e che sta alla base del nostro lavoro di tesi, che ne propone un'estensione ulteriore nella direzione di una rappresentazione più flessibile delle capacità dei settori aerei.

3.1 Evoluzione storica dei modelli ATFM

La prima formulazione teorica del problema ATFM risale al 1987 ed è opera di Amedeo Rodolfo Odoni, professore presso il Dipartimento di Aeronautica e Astronautica e presso il Dipartimento di Ingegneria Civile e

Ambientale del MIT, Massachusetts Institute of Technology. Nel suo articolo [28] Odoni per la prima volta formalizza il problema della gestione del traffico aereo e ne descrive le principali caratteristiche, costruendo un primo modello matematico deputato alla programmazione dei voli e alla gestione del flusso di traffico che cerca di minimizzare i costi dovuti ai ritardi. Nella formulazione di Odoni, la congestione è possibile esclusivamente a livello aeroportuale: gli aeroporti sono gli unici elementi del sistema ad avere capacità limitata. La strategia proposta nel modello è quella del ground holding, che consiste nel posticipare l'orario di decollo di un volo e trattenere l'aeromobile al suolo nell'aeroporto di partenza, assorbendo a terra il ritardo causato da un'eventuale congestione nell'aeroporto di arrivo. Le variabili considerate sono variabili binarie definite per ogni intervallo di discretizzazione, volo ed elemento del sistema; fissato un istante temporale e un settore o aeroporto, la variabile assume valore 1 se all'istante in questione il volo considerato si trova all'interno del settore o aeroporto preso in esame. Variabili binarie definite in questo modo verranno utilizzate almeno per un decennio, fino al lavoro di Bertsimas e Stock Patterson del 1998 [8].

In seguito all'articolo di Odoni si è registrato un acceso fervore intellettuale intorno a questo argomento, favorito senza dubbio dall'esponentiale incremento del traffico aereo verificatosi in quel periodo. Di conseguenza, a partire dal 1990 circa, si è assistito alla formulazione di diversi modelli che tengono conto di differenti strategie possibili e alla pubblicazione di numerosi articoli sulle riviste scientifiche dedicate. In un primo momento, i modelli formulati comprendevano esclusivamente un aeroporto con la sua capacità; fissata quest'ultima venivano determinati i ritardi a terra da assegnare ai voli. In seguito si è passati a formulazioni che consideravano un sistema composto da più aeroporti. Di fronte al progressivo incremento del numero di voli richiesti dalle compagnie aeree si è resa evidente, inoltre, la necessità di considerare nei modelli anche settori aerei con capacità limitata e, conseguentemente, di tenere in considerazione anche eventuali congestioni a livello delle traiettorie e non più solo a livello aeroportuale. L'introduzione di queste novità ha portato alla nascita ed elaborazione di diverse strategie e politiche deputate alla gestione degli episodi di congestione; accanto al ground holding sono state introdotte le opzioni di airborne holding, speed control e rerouting (vedi **Sezione 1.2**). Rispetto alla formulazione iniziale, dunque, si nota come i modelli matematici proposti per descrivere il problema di ATFM si siano progressivamente complessificati: non solo i voli possono essere trattenuti al suolo prima del decollo, ma è consentito trattenere gli aeromobili in aria all'interno di un settore della sua rotta oppure sopra il suo aeroporto di arrivo; agli aeromobili, inoltre, è permesso modificare la loro velocità durante il volo e non solo prima della partenza, ed è lecito che un volo raggiunga la sua destinazione seguendo una rotta diversa da quella individuata inizialmente.

Uno dei primi modelli in cui viene considerata la capacità dei settori è quello di Helme del 1992, il quale in [25] propone di risolvere il problema di ATFM mediante la determinazione del flusso di costo minimo di multi-commodity in una rete spazio-temporale. Nel suo modello, a ogni settore e aeroporto è associato un arco orientato di capacità limitata ma variabile nel tempo, a ogni punto di passaggio tra settori e aeroporti contigui è associato un nodo e a ogni rotta è associata una commodity con origini e destinazioni fissate. L'obiettivo è quello di programmare il decollo e l'atterraggio degli aerei minimizzando i costi dovuti agli eventuali ritardi e cercando di soddisfare la domanda di voli e di rispettare i vincoli di capacità degli archi e di conservazione del flusso. Le politiche considerate sono il ground holding e l'airborne holding, ovvero le decisioni possibili nel modello di Helme sono di due tipologie: si può decidere se e per quanto tempo trattenerne un aeromobile al suolo nell'aeroporto di partenza e se e per quanto tempo trattenerne un aeromobile in aria sopra l'aeroporto di arrivo. Il modello non permette la possibilità di controllare la velocità dell'aeromobile durante il volo. A causa dell'elevata semplicità della sua formulazione questo modello risulta essere molto debole, nel senso che il rilassamento continuo fornisce un lower bound molto lontano dalla soluzione ottima intera.

Un anno dopo, nel 1993, Lindsay et al. formulano un modello deterministico di programmazione intera binaria per la gestione del traffico aereo. Il loro Time Assignment Model [26] determina per ogni volo la migliore posizione spazio-temporale, assegnando ritardi a terra e in aria ai singoli voli in presenza di vincoli di capacità sia degli aeroporti che dei settori aerei. Il rilassamento lineare di questa formulazione non risulta essere molto forte e richiede l'utilizzo del Branch-and-Bound.

Nello stesso anno emerge un nuovo interessante aspetto del problema della gestione del traffico aereo grazie all'articolo di Gilbo [18], che con il suo modello capacitivo analizza la relazione che intercorre tra le capacità di un aeroporto e incentra la sua ricerca sulla rappresentazione, stima e ottimizzazione di tali capacità, ritenendo che questo aspetto sia decisivo per la definizione di buone strategie di gestione del traffico aereo. Nell'articolo viene osservato che le due capacità di ogni aeroporto, ovvero le capacità di partenze e di arrivi, risultano essere legate da una relazione che può essere rappresentata geometricamente in un piano tramite una curva che, intersecandosi con gli assi cartesiani, dà luogo a un politopo convesso. L'intensità dell'interdipendenza varia a seconda delle configurazioni degli aeroporti: è più stretta se si assegnano le stesse piste sia ai decolli che agli atterraggi, più debole se invece non ci sono problemi di concorrenza per le stesse risorse tra arrivi e partenze; può dipendere da condizioni meteorologiche avverse che limitano la capacità di volo e forzano a scelte operative che penalizzano più o meno arrivi o partenze; può infine crearsi anche tra aeroporti molto vicini

tra loro e instaurarsi tra arrivi in uno e partenze nell'altro. Per stimare la curva di capacità occorre raccogliere numerosi dati su arrivi e partenze relative ad uno specifico aeroporto operante in un dato momento con una certa configurazione delle piste e sotto certe condizioni meteorologiche; la regione della capacità relativa a quest'insieme di condizioni viene calcolata in Gilbo costruendo una curva a tratti convessa che attraversa e racchiude i dati che si presentano con maggiore frequenza. Dal 1993 in poi, grazie al lavoro di Gilbo, molti articoli riprenderanno l'argomento dell'interdipendenza tra le capacità di arrivi e partenze degli aeroporti considerandolo nelle loro formulazioni e confermandone l'importanza.

Nell'articolo di Vranas [33] del 1994, ad esempio, viene considerata la relazione tra le capacità di partenze e di arrivi in ogni istanze attraverso la definizione di un insieme di vincoli lineari che, intersecandosi, generano la regione di piano relativa alle coppie di capacità ammissibili. Nell'articolo vengono descritti diversi modelli di programmazione intera a variabili decisionali binarie che risolvono il problema di ATFM nei quali vengono permesse le opzioni di ground holding e di airborne holding e viene consentita anche la cancellazione dei voli.

Per arrivare ad avere una formulazione più completa del problema di ATFM occorre attendere il 1998, quando Bertsimas e Stock Patterson pubblicano un articolo particolarmente importante per l'approccio e le novità che esso introduce. Oltre alle politiche di ground holding e di airborne holding, nell'articolo di Bertsimas e Stock Patterson del 1998 [8] viene introdotta la possibilità di regolare la velocità degli aeromobili durante il volo e non solo prima della partenza. Inoltre vengono presi in considerazione i voli continuativi, ovvero voli successivi effettuati con lo stesso aeromobile. La formulazione, associando ad ogni volo un insieme di settori contigui che ne descrive la traiettoria compresa tra l'aeroporto di arrivo e l'aeroporto di partenza, determina il tempo ottimale di partenza, di attraversamento di ogni settore e di atterraggio. Uno dei maggiori contributi di questo articolo è l'introduzione di una nuova classe di variabili decisionali: fissato un volo, un tempo e un settore, la variabile ad essi associata assume valore 1 se l'aereo arriva in quel dato settore *entro* il tempo considerato, non più *al* tempo considerato. Queste nuove variabili presentano numerosi vantaggi rispetto alle variabili utilizzate fino ad allora: i vincoli possono essere descritti in modo più chiaro ed elegante e la formulazione risulta essere stringente, in quanto include vincoli che costituiscono faccette della convex hull del problema e il rilassamento lineare del modello produce quasi sempre soluzioni intere. La formulazione di base del modello di Bertsimas e Stock Patterson non prevede la possibilità di dirottare voli lungo rotte alternative in caso di congestione, ma nell'articolo vengono descritte due diverse modalità per poter estendere il modello inglobando decisioni dinamiche di rerouting.

Un'ulteriore opzione presa in considerazione è il legame tra le due capacità di un aeroporto, che viene trattata come nell'articolo di Vranas [33].

Il primo modello che considera il rerouting è quello di Bertsimas e Stock Patterson del 2000 [9]. Si tratta di un modello di programmazione lineare intera su rete di flusso multi-commodity con l'obiettivo di minimizzare i costi decidendo la migliore configurazione spaziale delle traiettorie dei voli. Tale modello ha però lunghi tempi computazionali e non risulta adatto allo studio di problemi realistici con istanze molto grandi.

Per giungere ad una formulazione che considera in modo efficiente il dirottamento e la gestione della velocità occorre aspettare il 2009 con Bertsimas, Lulli e Odoni [7]. L'opzione di rerouting viene resa possibile senza inserire nuove variabili, ma tramite la definizione di vincoli che descrivono il dirottamento aereo locale. Questo modello conserva la tipologia di variabili e la struttura stringente del modello di Bertsimas e Stock Patterson del 1998 [8], ma introduce nuove accortezze come l'equità e l'equivalenza tra soluzioni e si presta a risolvere istanze anche grandi in tempi ragionevoli e ad essere utilizzato efficacemente in sistemi che coordinano la circolazione di aerei su territori di grandi dimensioni quali ad esempio gli USA e l'Europa centro-occidentale.

Successivamente, nel 2012 Augustin, Alonso-Ayuso, Escudero e Pizarro presentano in [5] un modello deterministico misto in cui si considerano la cancellazione dei voli, la presenza di voli consecutivi e il rerouting. Il modello vuole minimizzare una funzione obiettivo definita da diverse componenti, quali il costo di cancellazione dei voli, il numero di voli che superano il numero massimo di unità di tempo di ritardo permesso, i costi dovuti al ground holding e all'airborne holding, la penalizzazione dovuta alla percorrenza di rotte alternative rispetto a quella inizialmente programmata o all'arrivo in un settore o all'aeroporto di destinazione in anticipo rispetto all'orario programmato. Il modello è capace di gestire istanze anche grandi e la formulazione risulta così stringente che in molti casi non richiede l'esecuzione del Branch-and-Bound per ottenere la soluzione ottima. Dopo il primo articolo, gli autori pubblicano anche un secondo paper [6], che presenta una variazione del problema in termini stocastici, in cui cioè viene introdotto un certo margine di incertezza. Si tratta di una novità, perché i modelli precedenti erano tutti deterministici.

Molti articoli sull'ATFM sono stati pubblicati anche nell'ultimo decennio e molti aspetti del problema sono stati oggetto di studio da parte dei ricercatori che si occupano di quest'ambito. Nel panorama degli articoli più recenti particolare attenzione merita il modello di Fomeni, Lulli e Zografos del 2017 [17]. Nell'articolo viene sottolineata l'importanza del concetto di TBO, Tra-

jectory Based Operations, ovvero di migliorare l'efficienza del traffico aereo attraverso una migliore predizione e coordinazione delle traiettorie degli aeromobili. Obiettivo del modello è di assegnare ad ogni volo una traiettoria 4D che sia ottima, ottenuta minimizzando la variazione spazio-temporale rispetto alla traiettoria prefissata e preferita dalla compagnia aerea [10]. Le traiettorie 4D vengono descritte includendo nelle variabili decisionali le informazioni sul livello di volo.

3.2 Il modello di Bertsimas e Stock Patterson - 1998

Come già anticipato nella **Sezione 3.1**, uno dei principali modelli di riferimento per chi si occupa di gestione del traffico aereo è quello formulato da Dimitris Bertsimas e Sarah Stock Patterson nel 1998 [8]. Tale modello riprende alcune caratteristiche e alcuni concetti dei modelli precedenti ma fornisce una descrizione più completa del problema in questione, considerando come strategie possibili non solo il ground holding, ma anche l'airborne holding e lo speed control. Obiettivo del modello è determinare, conoscendo la rotta prevista per ogni volo e dunque la sequenza di settori che ogni aereo deve attraversare per giungere a destinazione partendo dall'aeroporto di origine, il tempo ottimale di partenza e di attraversamento di ogni settore in modo da minimizzare i costi dovuti ai ritardi. In altre parole, il problema descritto dal modello di Bertsimas e Stock Patterson è quello di determinare una configurazione di tempi che minimizza i ritardi, sia al suolo sia in aria, rispettando le restrizioni relative alle capacità di settori e aeroporti. Si tratta quindi di decidere quanti istanti di tempo ogni aereo viene mantenuto al suolo e/o in aria.

Il modello ATFM di seguito descritto fornisce la base di partenza da cui muove il nostro lavoro di tesi. Infatti, sebbene abbiamo apportato qualche leggera modifica e semplificazione, come dettagliato nel **Capitolo 5**, il nostro modello base ricalca le idee chiave, le variabili e i vincoli del modello di Bertsimas e Stock Patterson.

3.2.1 Dati del problema e notazione

Presentiamo di seguito i dati del problema e le notazioni necessarie alla formulazione del modello di Bertsimas e Stock Patterson:

$\mathcal{F} = \{1, \dots, F\}$: insieme dei voli;

$\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$: insieme degli aeroporti;

$\mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$: insieme dei settori aerei;

$\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$: insieme degli intervalli di tempo;

$\mathcal{C} = \{(f, f') : f' \text{ è continuato dal volo } f\}$: insieme di coppie di voli continuativi;

N_f : numero di settori nella traiettoria del volo f ;

$P(f, i)$: corrisponde a $\begin{cases} \text{l'aeroporto di partenza} & \text{se } i=1, \\ \text{il settore } (i-1)^{\text{esimo}} \text{ nella traiettoria di } f & \text{se } 1 < i < N_f, \\ \text{l'aeroporto di arrivo} & \text{se } i=N_f; \end{cases}$

$P_f = \{P(f, i) : 1 \leq i \leq N_f\}$;

$D_k(t)$: capacità di partenze dell'aeroporto k al tempo t ;

$A_k(t)$: capacità di arrivi dell'aeroporto k al tempo t ;

$S_j(t)$: capacità del settore j al tempo t ;

d_f : orario di partenza previsto per il volo f ;

r_f : orario di arrivo previsto per il volo f ;

s_f : tempo minimo per preparare l'aeromobile al volo successivo in seguito all'atterraggio con il volo f ;

\underline{I}_j^f : numero minimo di unità di tempo che il volo f deve spendere all'interno del settore j per attraversarlo;

\underline{T}_j^f : primo tempo ammissibile di arrivo nel settore j per il volo f ;

\overline{T}_j^f : ultimo tempo ammissibile di arrivo nel settore j per il volo f ;

$T_j^f = [\underline{T}_j^f, \overline{T}_j^f]$: insieme dei tempi ammissibili per il volo f per arrivare nel settore j ;

c_g^f : costo di trattenimento del volo f a terra per un'unità di tempo;

c_a^f : costo di trattenimento del volo f in aria per un'unità di tempo.

3.2.2 Variabili decisionali

La particolarità del modello di Bertsimas e Stock Patterson rispetto ai modelli precedenti è l'utilizzo di nuove variabili decisionali binarie. Fissato un volo, un tempo e un settore, la variabile ad essi associata assume valore 1 se l'aereo arriva in quel dato settore *entro* quel determinato tempo, e non più *a* quel determinato tempo, come invece accadeva in precedenza:

$$x_j^f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se il volo } f \text{ arriva nel settore } j \text{ entro il tempo } t, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tale definizione ha innumerevoli pregi, ed è comunque possibile passare facilmente dalle variabili x alle variabili usate nei modelli precedenti perché esse dipendono linearmente una dall'altra. Se infatti definiamo

$$u_j^f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se il volo } f \text{ arriva nel settore } j \text{ al tempo } t, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

possiamo facilmente verificare che valgono le seguenti relazioni tra variabili:

$$\begin{cases} u_j^f(t) = x_j^f(t) - x_j^f(t-1); \\ x_j^f(t) = \sum_{s \leq t} u_j^f(s). \end{cases}$$

Le nuove variabili x così definite permettono di descrivere in modo elegante i vincoli della formulazione, in particolare quelli che descrivono la connettività tra settori, aeroporti e nel tempo. Inoltre, grazie ad esse, la formulazione risulta essere stringente in quanto include vincoli che costituiscono faccette della convex hull del problema e il rilassamento lineare del modello produce quasi sempre soluzioni intere. Dato che per molte istanze non risulta necessario procedere con l'algoritmo di Branch-and-Bound per ottenere una soluzione intera, i costi e i tempi computazionali sono relativamente bassi e dunque questo algoritmo si presta a gestire grandi istanze e ad essere risolto ripetutamente più volte al giorno.

3.2.3 La formulazione del modello

Presentiamo di seguito la formulazione del modello di Bertsimas e Stock Patterson e descriviamo i vincoli che compaiono.

$$\begin{aligned} \min \sum_{f \in \mathcal{F}} & \left[(c_g^f - c_a^f) \sum_{t \in T_k^f, k=P(f,1)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \right. \\ & + c_a^f \sum_{t \in T_k^f, k=P(f, N_f)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \\ & \left. + (c_a^f - c_g^f)d_f - c_a^f r_f \right] \end{aligned}$$

soggetto a

$$\sum_{\substack{f \in \mathcal{F} : P(f, 1) = k, \\ t \in T_k^f}} (x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \leq D_k(t) \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (3.1)$$

$$\sum_{\substack{f \in \mathcal{F} : P(f, N_f) = k, \\ t \in T_k^f}} (x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \leq A_k(t) \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (3.2)$$

$$\sum_{\substack{f \in \mathcal{F} : P(f, i) = j, P(f, i+1) = j', \\ 1 < i < N_f, t \in T_j^f}} (x_j^f(t) - x_{j'}^f(t)) \leq S_j(t) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (3.3)$$

$$x_{j'}^f(t + \underline{I}_j^f) - x_j^f(t) \leq 0 \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, t \in T_j^f, \\ j = P(f, i), j' = P(f, i+1), \\ i < N_f \end{cases} \quad (3.4)$$

$$x_k^f(t) - x_k^{f'}(t - s_{f'}) \leq 0 \quad \begin{cases} \forall (f', f) \in \mathcal{C}, t \in T_k^f, \\ k = P(f, 1) = P(f', N_{f'}) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$x_j^f(t-1) - x_j^f(t) \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f \quad (3.6)$$

$$x_j^f(t) \in \{0, 1\} \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f \quad (3.7)$$

3.2.4 La funzione obiettivo

Analizziamo attentamente di seguito la funzione obiettivo, che descrive i costi totali dovuti ai ritardi dei voli in funzione delle variabili $x_j^f(t)$. L'obiettivo del problema è quello di minimizzare tali costi.

Il costo totale relativo ad un volo f è dato dalla somma del costo del suo ritardo a terra presso l'aeroporto di partenza e del costo del suo mantenimento in aria sopra l'aeroporto di arrivo.

La funzione obiettivo può essere dunque espressa come

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} [c_g^f g_f + c_a^f a_f],$$

dove g_f e a_f rappresentano rispettivamente il ritardo al suolo e il ritardo in aria relativi al volo f .

Il numero totale di unità di tempo che un volo f viene trattenuto al suolo, ovvero quello che abbiamo definito g_f , può essere calcolato come il tempo effettivo di partenza del volo f a cui si sottrae l'orario previsto per il decollo:

$$\begin{aligned} g_f &= \sum_{t \in T_k^f, k=P(f,1)} tw_k^f(t) - d_f \\ &= \sum_{t \in T_k^f, k=P(f,1)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) - d_f. \end{aligned}$$

Il numero totale di unità di tempo che un volo f viene trattenuto in aria, ovvero il ritardo in aria che abbiamo indicato con a_f , può essere calcolato come il tempo effettivo di arrivo a destinazione a cui si sottraggono l'orario previsto per l'atterraggio e il ritardo accumulato al suolo:

$$\begin{aligned} a_f &= \sum_{t \in T_k^f, k=P(f, N_f)} tw_k^f(t) - r_f - g_f \\ &= \sum_{t \in T_k^f, k=P(f, N_f)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) - r_f - g_f. \end{aligned}$$

Riscrivendo esplicitamente la funzione obiettivo otteniamo la seguente espressione:

$$\begin{aligned} &\sum_{f \in \mathcal{F}} \left[c_g^f \left(\sum_{t \in T_k^f, k=P(f,1)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) - d_f \right) \right. \\ &\quad \left. + c_a^f \left(\sum_{t \in T_k^f, k=P(f, N_f)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) - r_f \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{t \in T_k^f, k=P(f,1)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) - d_f \right) \right]. \end{aligned}$$

Riarrangiando i termini possiamo infine giungere a una formulazione più elegante dell'espressione che descrive la funzione obiettivo:

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{F}} \left[(c_g^f - c_a^f) \sum_{t \in T_k^f, k=P(f,1)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \right. \\ \left. + c_a^f \sum_{t \in T_k^f, k=P(f,N_f)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \right. \\ \left. + (c_a^f - c_g^f)d_f - c_a^f r_f \right]. \end{aligned}$$

3.2.5 I vincoli

Descriviamo ora in dettaglio i vincoli del problema.

Vincoli di capacità

I vincoli di capacità tengono in considerazione il numero massimo di aeromobili che possono, ad ogni intervallo di tempo, decollare o atterrare in un determinato aeroporto o essere presenti all'interno di un determinato settore aereo, assicurando che le soluzioni del problema rispettino le capacità di ogni elemento del sistema ad ogni intervallo di tempo.

In particolare, i vincoli (3.1)

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{f \in \mathcal{F} : P(f,1) = k, \\ t \in T_k^f}} (x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \leq D_k(t) \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

assicurano che ad ogni tempo t considerato il numero di voli che decollano dall'aeroporto k non sia superiore alla capacità di partenze dell'aeroporto in quel determinato intervallo temporale, $D_k(t)$.

I vincoli (3.2)

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{f \in \mathcal{F} : P(f,N_f) = k, \\ t \in T_k^f}} (x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \leq A_k(t) \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

impongono che ad ogni tempo t della finestra temporale considerata il numero di voli che atterrano nell'aeroporto k sia inferiore o uguale alla capacità di arrivi dell'aeroporto in quel determinato intervallo di tempo, $A_k(t)$.

I vincoli (3.3)

$$\sum_{\substack{f \in \mathcal{F} : P(f, i) = j, P(f, i + 1) = j', \\ 1 < i < N_f, t \in T_j^f}} (x_j^f(t) - x_{j'}^f(t)) \leq S_j(t) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$$

assicurano infine che in ogni intervallo di discretizzazione t il numero di voli presenti all'interno di ogni settore j non superi la capacità del settore prevista per quell'intervallo di tempo, $S_j(t)$.

Vincoli di connettività

I vincoli di connettività descrivono la connettività tra i settori contigui che compaiono nelle traiettorie di ogni volo e tra aeroporti nel caso di voli continuativi.

In particolare, i vincoli (3.4)

$$x_{j'}^f(t + \underline{I}_j^f) - x_j^f(t) \leq 0 \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, t \in T_j^f, \\ j = P(f, i), j' = P(f, i + 1), \\ i < N_f \end{cases}$$

descrivono la connettività tra settori appartenenti a una stessa rotta. Essi assicurano che ogni volo attraversi i vari settori della sua traiettoria rispettando i tempi minimi di percorrenza previsti per ogni settore, affermando che se un volo f arriva nel settore j' entro il tempo $t + \underline{I}_j^f$, allora deve essere arrivato nel settore precedente j entro il tempo t .

I vincoli (3.5)

$$x_k^f(t) - x_k^{f'}(t - s_{f'}) \leq 0 \quad \begin{cases} \forall (f, f') \in \mathcal{C}, t \in T_k^f, \\ k = P(f, 1) = P(f', N_{f'}) \end{cases}$$

descrivono la connettività tra aeroporti nel caso di voli continuativi, ovvero quando a uno stesso aeromobile sono affidate due tratte consecutive. Nel caso di voli continuativi occorre prevedere un tempo minimo di sosta tra la prima tratta e la seconda dovuto a motivi di rifornimento di carburante, carico-scarico delle valigie, cambio pista, ecc. I vincoli impongono che dato (f, f') volo continuativo, se f parte dall'aeroporto k entro il tempo t , allora il volo f' deve essere arrivato all'aeroporto k entro il tempo $t - s_{f'}$, dove $s_{f'}$ è il tempo necessario per preparare l'aeromobile al volo successivo.

Altri vincoli

I vincoli (3.6)

$$x_j^f(t-1) - x_j^f(t) \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f$$

descrivono la consistenza temporale delle variabili $x_j^f(t)$: se un volo f entra nel settore j entro il tempo t , esso sicuramente deve essere entrato nel settore j entro ogni tempo successivo $t' \geq t$ (e quindi in particolare entro il tempo t). La variabile decisionale $x_j^f(t')$ assumerà dunque valore 1 per ogni istante di tempo $t' \geq t, t' \in T_j^f$.

I vincoli (3.7)

$$x_j^f(t) \in \{0, 1\} \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f$$

impongono infine che le variabili utilizzate siano variabili binarie.

3.2.6 Altre opzioni

Si nota che la formulazione di base non prevede l'opzione di rerouting, ovvero la possibilità di dirottare voli lungo rotte alternative in caso di congestione. Nell'articolo vengono però descritte due diverse modalità che permettono di inglobare tale opzione ed estendere il modello considerando decisioni dinamiche che fino a quel momento erano lasciate all'esperienza dei controllori di volo. La prima strategia prevede la definizione, per ogni volo, di un numero limitato di rotte alternative e la scelta ad ogni passo della rotta da percorrere. La seconda strategia consiste invece nella definizione, per ogni settore, di un insieme di settori precedenti e successivi, così da scegliere ad ogni passo il settore in cui il volo deve entrare.

Capitolo 4

Alcune considerazioni preliminari alla formulazione di un nuovo modello

Nonostante i notevoli miglioramenti nelle procedure e nelle operazioni di controllo registratisi negli ultimi anni, il sistema di controllo del traffico aereo attuale è spesso stressato e vicino ai livelli di saturazione. Per stare al passo con i tempi e riuscire a soddisfare la crescente domanda di voli si sta facendo strada l'esigenza di investigare nuovi metodi efficienti ed efficaci per organizzare e strutturare il traffico che permettano di incrementare le capacità dei settori, come riportato in [30]. Uno sviluppo dei modelli in tale direzione porterebbe senza dubbio a grandi vantaggi: la creazione di capacità aggiuntiva, infatti, permetterebbe di ridurre i ritardi, sia al suolo che in aria, e porterebbe ad un notevole incremento dell'efficienza complessiva del sistema di gestione del traffico aereo; la diminuzione dei ritardi, inoltre, permetterebbe di ridurre gli effetti negativi del traffico aereo sull'ambiente e porterebbe a un notevole alleggerimento dei costi per le compagnie aeree. Trovare una soluzione che consenta di gestire meglio l'incrementata complessità del traffico aereo e di rispondere alle sfide di efficienza sostenibile rappresenta una sentita necessità, come testimoniato dalla nascita di alcuni progetti di ricerca che hanno l'obiettivo di investigare nuove metodologie e risorse per il problema ATFM quali, ad esempio, il progetto Single European Sky ATM Research (SESAR) [29]. La questione, tuttavia, è molto articolata, in quanto l'ambizioso piano di aumentare le capacità degli elementi dell'aerospazio non può essere disgiunto da valutazioni sulla sicurezza, che costituiscono priorità assolute. L'incremento del flusso di traffico aereo deve essere necessariamente accompagnato da modalità efficaci di controllo, mitigazione e gestione delle situazioni di rischio.

Il nostro lavoro di tesi muove da queste considerazioni ed è inoltre avvalorato da un'ulteriore osservazione: analizzando i dati disponibili sulle tra-

iettorie e i piani di volo presenti nel Demand Data Repository DDR2 [14] si nota che già allo stato attuale si verificano alcuni episodi di violazione dei vincoli relativi alle capacità nominali dei settori [2]; in questi casi, anche in condizioni di traffico più intenso rispetto a quanto previsto dai piani di volo, i controllori di traffico, seppur non operando confortevolmente, sono comunque in grado di gestire il flusso degli aeromobili in modo soddisfacente.

Dato che aumentando la capacità dei settori il traffico fluisce in modo più agevole e il rischio di congestione viene limitato, l'idea chiave della nostra tesi è di proporre un nuovo modello di gestione del traffico aereo in cui le capacità dei settori aerei vengono aumentate in base alle condizioni di traffico sussistenti. In presenza di situazioni di traffico intenso in cui le limitazioni di capacità dei settori non permettono di soddisfare la domanda di voli se non assegnando agli stessi notevoli ritardi, il nostro modello permette di aumentare le capacità effettive rispetto a quelle nominali dichiarate dei settori aerei, garantendo comunque di operare in condizioni di sicurezza. In questo modo si possono più facilmente evitare episodi di congestione, ma, dato che operare a capacità elevate diminuisce il comfort e aumenta la responsabilità dei controllori di volo, l'incremento del flusso di aeromobili viene ammesso solamente imponendo dei vincoli aggiuntivi riguardanti le condizioni di traffico. Nella formulazione del nostro problema sarà dunque consentito alle capacità nominali di venire aumentate, a patto però che vengano rispettati alcuni vincoli di sicurezza e che siano dunque assicurate le condizioni per un monitoraggio ottimale delle situazioni di rischio.

Per chiarire questo concetto proponiamo brevemente un esempio. Consideriamo un settore j con capacità costante nel tempo pari a S . Notiamo che la capacità nominale S è definita in base a condizioni di traffico medie, in cui sono prevedibili, tra altri elementi, incroci tra traiettorie. Supponiamo che al tempo t ci siano proprio S voli che si apprestano ad entrare nel settore in questione, inizialmente vuoto. Se questi voli non si incrociano, in quanto ad esempio provengono tutti dallo stesso settore precedente e procedono tutti verso lo stesso settore successivo, allora sarà sufficiente mantenere un'adeguata separazione tra gli aeromobili e potrà essere concesso anche ad un maggiore numero di voli di entrare nel settore e di transitarvi in sicurezza. Se invece alcuni voli provengono da settori precedenti diversi e le previsioni indicano un possibile incrocio tra le loro traiettorie, un aumento di capacità non è indicato in quanto gli scenari di rischio sono notevoli e in fase di monitoraggio occorre dunque prestare maggiore attenzione.

Presentiamo ora di seguito alcune considerazioni preliminari al nuovo modello e descriviamo in dettaglio i diversi elementi che compongono il problema ATFM, sottolineando in particolare i concetti innovativi che compaiono nella nuova formulazione.

4.1 Settori e capacità

Come precedentemente descritto nel **Capitolo 1**, lo spazio aereo è virtualmente suddiviso in settori di ampiezza e altezza variabili, in modo da consentire un'agevole rappresentazione delle informazioni sul traffico aereo e da garantire la sicurezza degli aeromobili in volo. I confini dei settori sono determinati in base a svariati fattori, sia geografico-morfologici sia geopolitici. Ogni aeroporto si trova all'interno di uno specifico settore e la rotta di un aereo in volo può essere perciò definita come una sequenza di settori contigui che si apre e si chiude con un aeroporto.

Le autorità di controllo che si occupano del traffico aereo hanno il compito di assicurare che il flusso di traffico si svolga in condizioni di sicurezza. Da questo punto di vista, la capacità di settori e aeroporti è un concetto cruciale. Ogni aeroporto ha una struttura organizzativa e logistica tale da poter consentire, in ogni intervallo di tempo, solo un limitato numero di decolli e atterraggi. Ogni settore aereo, inoltre, ha una capacità limitata, ovvero è definito il numero massimo di aeromobili che possono transitare all'interno del settore in un determinato intervallo di tempo e che possono venire adeguatamente monitorati dal controllore aereo (capacità nominale).

Nel nostro lavoro di tesi non consideriamo esclusivamente le capacità nominali, ma in alcuni casi permettiamo che tali capacità possano venire incrementate di una certa percentuale per agevolare il flusso del traffico aereo ed evitare congestioni, così da ridurre il ritardo complessivo e, di conseguenza, i costi per le compagnie aeree. Tuttavia, la diminuzione di sicurezza che risulta dall'aumento delle capacità dei settori viene compensata, nel nostro modello, dall'introduzione di alcuni vincoli aggiuntivi che regolano i potenziali conflitti.

4.2 Finestra temporale e strategie consentite

Il nostro modello considera un insieme di intervalli di tempo dato dalla discretizzazione di una finestra temporale più ampia. La discretizzazione dei tempi è caratteristica comune a tutti i modelli di gestione del traffico aereo, come visto precedentemente nel **Capitolo 3**. Solitamente si sceglie di suddividere la finestra temporale in periodi di 5 minuti, e per il nostro modello una discretizzazione fine risulta essenziale per catturare al meglio le informazioni sulle traiettorie dei voli.

Ogni volo ha un tempo di partenza e un tempo di arrivo previsti. Nella nostra formulazione, come nel modello di Bertsimas e Stock Patterson, è consentita la strategia di ground holding e per ogni volo è fissato un tempo massimo di permanenza al suolo, ovvero è assegnato un insieme di istanti

di tempo successivi all'istante di partenza previsto ammissibili per il decollo dell'aereo. Nel nostro modello non ammettiamo invece lo speed control, opzione che risulta invece permessa in [8], ma come dato del problema viene fornito il tempo di percorrenza che ogni aereo impiega per attraversare i settori presenti nella sua traiettoria. Il tempo di partenza, dunque, determina il tempo in cui ogni volo entra nei vari settori: esso è dato dal tempo di partenza a cui vengono sommati i tempi di percorrenza dei vari settori precedenti a quello considerato. In particolare, sommando al tempo di partenza i tempi di percorrenza di tutti i settori eccetto l'ultimo possiamo determinare il tempo in cui il volo giunge all'interno dell'ultimo settore della sua traiettoria, quello cioè in cui si trova l'aeroporto di arrivo. Questo non è però sufficiente per determinare l'istante di atterraggio, perché ammettiamo la possibilità di airborne holding sopra l'aeroporto di arrivo, ovvero consentiamo che l'aeromobile venga trattenuto in aria all'interno dell'ultimo settore della sua rotta prima dell'atterraggio. Per ogni volo è inoltre fissato l'ultimo tempo ammissibile per giungere a destinazione.

4.3 Traiettorie, potenziali conflitti e tempi di incrocio

Per la formulazione del nostro modello a incremento controllato di capacità è fondamentale considerare traiettorie prestabilite, ovvero è necessario conoscere preventivamente la rotta che ogni aeromobile percorre. Come in [8], nella nostra formulazione non ammettiamo il rerouting, ovvero la possibilità di dirottare alcuni voli lungo traiettorie alternative in caso di congestione dei settori aerei. Nel nuovo modello, inoltre, al contrario di quanto accade in Bertsimas e Stock Patterson, per semplicità non consideriamo voli continuativi.

Conoscendo preventivamente le rotte è possibile individuare le coppie di voli che condividono uno o più settori delle loro traiettorie; la condivisione di uno o più settori, infatti, può rappresentare uno scenario critico da monitorare attentamente. Nella fattispecie, per voli che condividono almeno un settore j possono sussistere diverse situazioni in merito al transito, atterraggio o decollo dei voli della coppia nel/dal settore considerato:

- (1) entrambi i voli sono in transito nel settore j considerato, quindi provengono da un settore precedente e procedono verso un settore successivo;
- (2) entrambi i voli atterrano nell'aeroporto collocato all'interno del settore j in questione;

- (3) entrambi i voli decollano dall'aeroporto collocato all'interno del settore j considerato;
- (4) uno dei voli della coppia atterra nell'aeroporto collocato nel settore j in esame e l'altro decolla dallo stesso;
- (5) uno dei voli della coppia atterra nell'aeroporto collocato nel settore j considerato e l'altro è in transito nel settore;
- (6) uno dei voli della coppia decolla dall'aeroporto collocato all'interno del settore j in questione e l'altro è in transito nel settore.

Grazie alla considerazione di rotte prefissate è possibile individuare, per ogni settore e intervallo di tempo, quali traiettorie, e di conseguenza quali voli e aeromobili, potrebbero trovarsi in conflitto all'interno di quel settore in quel determinato intervallo temporale. Possiamo assimilare, infatti, i potenziali conflitti alla possibilità che le traiettorie di due voli possano entrare in una stessa area critica e/o incrociarsi all'interno di un settore j , qualora la rotta di entrambi i voli preveda il transito attraverso tale settore.

La convenzione adottata nella nostra tesi per la determinazione dell'insieme dei voli in potenziale conflitto è la seguente: considerato un settore j si ha un potenziale conflitto ogni qualvolta due voli entrano in esso non provenendo dallo stesso elemento (settore o aeroporto) precedente. Ad esempio, considerato j come settore di riferimento, due voli che transitano in j e vi entrano provenendo dallo stesso settore precedente non rappresentano dunque un potenziale conflitto. Appare chiaro, inoltre, che situazioni di tipo (3) non danno mai luogo a potenziali conflitti: due voli che condividono il primo settore della rotta, ovvero quello in cui è collocato l'aeroporto da cui entrambi i voli decollano, provengono dallo stesso elemento precedente, rappresentato proprio dall'aeroporto di partenza.

Per la determinazione dei potenziali conflitti è fondamentale anche valutare la compatibilità di tempo dei due voli della coppia che condivide il settore j in questione. Per ogni coppia di voli (f, f') viene definito l'insieme dei tempi ammissibili in cui i voli f e f' possono trovarsi all'interno dello stesso settore j contemporaneamente; tale intervallo di tempo è calcolato a partire dai tempi di partenza (previsto e ultimo ammissibile) di f e f' e dai tempi di percorrenza dei settori da parte dei voli della coppia. Se tale insieme è vuoto, ovvero se non esiste alcun istante di tempo in cui i voli considerati possono trovarsi contemporaneamente all'interno del settore in questione, il potenziale conflitto non può avvenire.

Sulla base delle considerazioni presentate vengono determinate, per ogni settore dell'aerospazio, le coppie di voli in potenziale conflitto. Per ogni

potenziale conflitto si suppone che sia possibile individuare un punto critico in cui le due rotte si intersecano e in cui può avvenire il potenziale incrocio tra gli aeromobili della coppia. Per ogni volo della coppia, dunque, è infine fissato come dato del problema il tempo di percorrenza impiegato dall'aeromobile per raggiungere il supposto punto di incrocio delle traiettorie.

4.4 Classificazione degli scenari critici

La definizione dei tempi di incrocio permette, per ogni coppia di voli che potenzialmente possono entrare in conflitto e per ogni istante nell'intervallo di tempo in cui questo potenziale conflitto può verificarsi, di descrivere diverse situazioni possibili e di suddividere gli scenari in categorie differenti sulla base delle posizioni degli aeromobili rispetto al punto di incrocio.

In generale, quando una coppia di voli in potenziale conflitto si trova all'interno del settore in cui le due rotte si intersecano, possono verificarsi diverse situazioni, come rappresentato in **Figura 4.1**:

- (α) all'istante di tempo considerato entrambi i voli possono aver già superato il punto di incrocio delle traiettorie;
- (β) all'istante di tempo considerato può accadere che un volo abbia già superato il punto di incrocio delle traiettorie mentre l'altro debba ancora raggiungere l'intersezione delle rotte;
- (γ) all'istante di tempo considerato entrambi i voli possono trovarsi in un punto precedente all'intersezione delle due rotte.

Calcolare in generale quante siano le situazioni delle tre tipologie descritte che si verificano in un determinato settore a un dato momento, tuttavia, può risultare di poco interesse. Questo calcolo complessivo conta anche situazioni che in realtà non destano particolare preoccupazione: se ad esempio un volo f è all'interno di un certo settore e molto vicino al punto di incontro con la traiettoria del volo f' , ma quest'ultimo è appena entrato nel settore e si trova ancora molto lontano dall'incrocio, tale situazione non ha motivo di essere considerata allarmante. Può essere invece più utile dare una stima delle sole situazioni critiche, ovvero di quegli scenari a cui i controllori del traffico aereo devono prestare particolare attenzione e in cui è necessario monitorare attentamente il progressivo avvicinamento e/o allontanamento degli aeromobili per fare in modo di evitare collisioni. Intuitivamente, se all'istante di tempo considerato almeno uno dei voli della coppia si trova molto lontano dal punto di incrocio, tale scenario non è considerato rischioso perché lo scontro potenziale non può avvenire. Se entrambi gli aeromobili si trovano in prossimità dell'incrocio, invece, occorre prestare particolare attenzione.

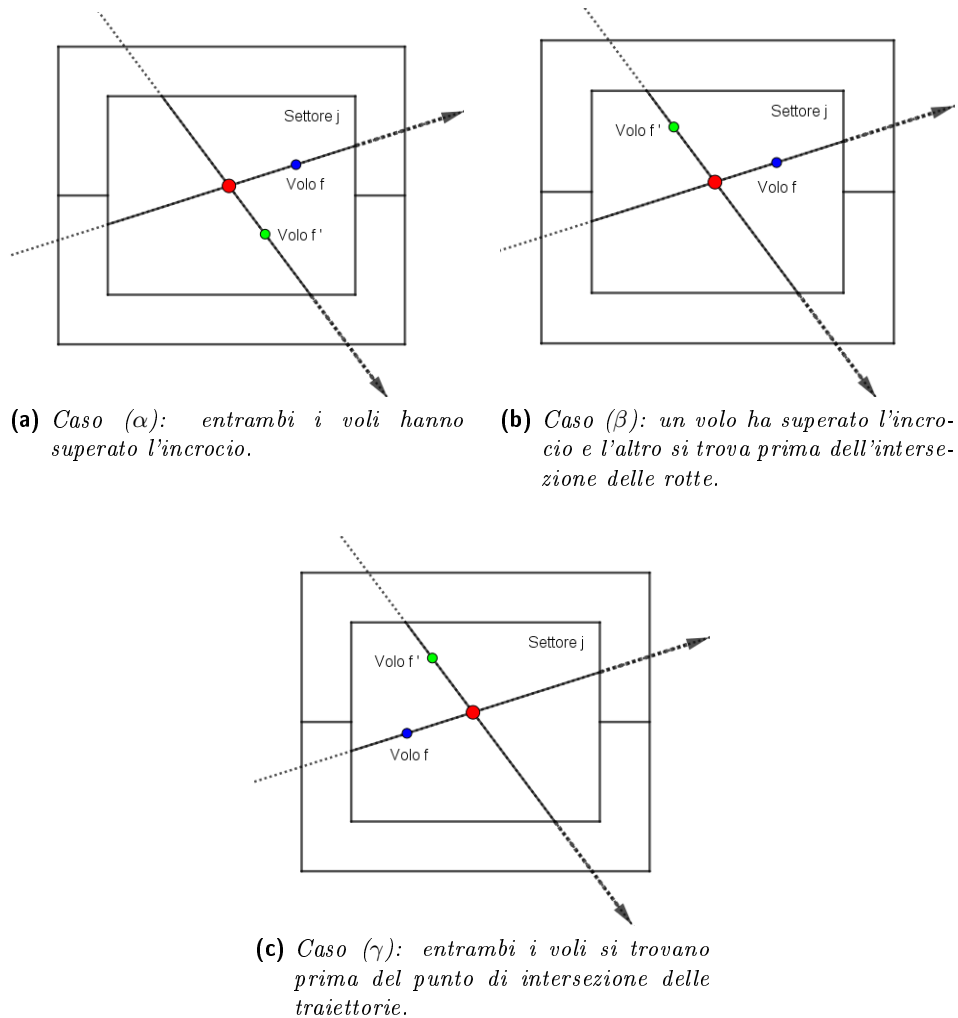


Figura 4.1: Le tre diverse possibili posizioni di una coppia di aeromobili in potenziale conflitto rispetto al punto di incrocio delle traiettorie.

Le situazioni critiche possono essere rappresentate euristicamente dai seguenti scenari:

- (α^*) all'istante di tempo considerato entrambi i voli si trovano in un punto precedente all'intersezione delle due rotte ma supereranno l'incrocio a breve;
- (β^*) all'istante di tempo considerato un volo ha superato il punto di incrocio delle traiettorie da poco tempo mentre l'altro deve ancora raggiungere l'intersezione delle rotte ma oltrepasserà l'incrocio a breve;

(γ^*) all'istante di tempo considerato entrambi i voli hanno già superato il punto di incrocio delle traiettorie ma lo hanno oltrepassato da poco tempo.

Allo scopo di descrivere matematicamente queste situazioni critiche definiamo, nell'intorno del punto di intersezione delle traiettorie di una coppia di voli in potenziale conflitto, un'area di criticità, o area di conflitto. Definito \mathcal{J} come insieme dei settori che compongono l'aerospazio, tale area di criticità viene delimitata, per ogni settore $j \in \mathcal{J}$, grazie all'assegnazione di due parametri di tolleranza δ_j e Δ_j , che rispettivamente descrivono l'ampiezza dell'area di conflitto in avanti e all'indietro a partire dal punto di intersezione delle rotte. Quando due aeromobili si trovano nel settore e non hanno ancora superato il punto di incrocio ma sono in procinto di oltrepassarlo (lo avranno superato tra meno di Δ_j istanti di tempo), un potenziale conflitto può avvenire nel futuro e tale situazione merita particolare attenzione da parte dei controllori di volo. Tuttavia, se uno dei due voli o entrambi hanno superato l'incrocio da poco tempo (da meno di δ_j istanti di tempo) la situazione è ancora estremamente critica e va anch'essa adeguatamente monitorata.

Osservando il settore j e una coppia di voli (f, f') le cui traiettorie si intersecano nel settore considerato e definita l'area critica di conflitto per mezzo dei parametri di sicurezza δ_j e Δ_j , il settore in questione viene di fatto suddiviso in quattro aree, due che precedono il punto di incrocio e due che lo seguono. All'indietro rispetto al punto di incrocio sono individuabili, infatti, una zona che racchiude i punti delle traiettorie che distano più di Δ_j istanti di tempo dall'intersezione delle rotte (i) e una zona che comprende i punti delle traiettorie a meno di Δ_j istanti dall'incrocio (ii). In avanti rispetto al punto di incrocio, invece, si possono individuare un'area che racchiude i punti delle traiettorie che distano meno di δ_j istanti di tempo dall'intersezione delle rotte (iii) e un'area che racchiude i punti delle traiettorie a più di δ_j istanti dall'incrocio (iv). Tali aree non contengono necessariamente punti di entrambe le traiettorie e non sono necessariamente vuote, ma, a seconda della coppia di voli considerati e della conformazione dell'area di conflitto disegnata nell'intorno del punto di incrocio delle rotte, è possibile che nessun punto di una o entrambe le traiettorie sia contenuto in una o più aree. Vedremo nel **Paragrafo 5.5.4** come questa osservazione complica un po' la modellazione del problema: non sarà possibile, infatti, scrivere tutti i vincoli di traffico in modo compatto, ma sarà necessario introdurre vincoli specifici che descrivono ogni possibile situazione che può presentarsi.

Considerando le quattro aree appena descritte, ogni volo della coppia presente nel settore può trovarsi all'istante di tempo t considerato all'interno di una di esse (qualora contengano punti della sua rotta), ovvero per ogni volo della coppia è possibile essere, rispetto al punto di incrocio delle traiettorie dei voli della coppia:

- (i) all'indietro a più di Δ_j istanti di tempo dall'incrocio;
- (ii) all'indietro a meno di Δ_j istanti di tempo dall'incrocio;
- (iii) in avanti a meno di δ_j istanti di tempo dall'incrocio;
- (iv) in avanti a più di δ_j istanti di tempo dall'incrocio.

Sulla base delle considerazioni e osservazioni presentate, se consideriamo una coppia di voli in potenziale conflitto nel settore j ed entrambi i voli della coppia a un determinato istante temporale t si trovano all'interno del settore in questione, gli scenari di traffico che possono sussistere in j al tempo t vengono classificati nel modo seguente:

- (A) se all'istante di tempo considerato t entrambi i voli sono dopo l'incrocio (casi (iii) e (iv)) e almeno uno dei due ha già superato il punto di intersezione delle traiettorie da almeno δ_j istanti di tempo (caso (iv)), abbiamo una **situazione di tipo A**;
- (B) se all'istante di tempo considerato t un volo ha già superato il punto di incrocio delle traiettorie da almeno δ_j istanti di tempo (caso (iv)) mentre l'altro volo deve ancora raggiungere l'intersezione delle rotte (casi (i) e (ii)), *oppure* un volo ha superato il punto di incrocio delle traiettorie da meno di δ_j istanti di tempo (caso (iii)) mentre l'altro volo deve ancora raggiungere l'intersezione delle rotte e non avrà oltrepassato il punto di incrocio tra Δ_j istanti di tempo (caso (i)), abbiamo invece una **situazione di tipo B**;
- (C) se all'istante di tempo considerato t entrambi i voli si trovano in un punto precedente al punto di intersezione delle traiettorie ma all'istante $t + \Delta_j$ entrambi i voli avranno oltrepassato il punto di incontro (caso (ii)), *oppure* se un volo ha superato il punto di intersezione da meno di δ_j istanti di tempo (caso (iii)) e l'altro non ha ancora superato l'incrocio al tempo t ma lo avrà oltrepassato al tempo $t + \Delta_j$ (caso (ii)), *oppure* se entrambi hanno superato l'incrocio da meno di δ_j istanti di tempo (caso (iii)), abbiamo una **situazione di tipo C**;
- (D) se all'istante di tempo considerato t entrambi i voli devono ancora raggiungere l'incrocio (casi (i) e (ii)) e almeno uno dei due non avrà oltrepassato il punto di intersezione delle rotte tra Δ_j istanti di tempo (caso (i)), abbiamo infine una **situazione di tipo D**.

Per chiarezza espositiva, riportiamo nella **Tabella 4.1** la corrispondenza tra la classificazione delle possibili situazioni di traffico A, B, C e D appena descritte e le possibili configurazioni della coppia di posizioni assunte da due voli (f, f') rispetto all'area di conflitto individuata nell'intorno del punto di incrocio delle traiettorie.

Tabella 4.1: Corrispondenza tra casi (i)-(iv) e situazioni (A)-(D).

(f, f')	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(i)	D	D	B	B
(ii)	D	C	C	B
(iii)	B	C	C	A
(iv)	B	B	A	A

Ai fini della modellazione proposta in questa tesi, consideriamo le situazioni di tipo A, B e D irrilevanti, perché non rappresentano situazioni pericolose e non hanno motivo di destare particolare preoccupazione. Ciò che ci interessa, invece, è tenere sotto controllo le situazioni critiche, che sulla base della nostra classificazione sono esclusivamente quelle di tipo C. Tali scenari rischiosi devono essere attentamente monitorati dai controllori di volo per evitare potenziali collisioni tra aeromobili. Data la criticità degli scenari di tipo C, ad un eventuale aumento di capacità si fa corrispondere una soglia massima di situazioni C che un controllore di volo può controllare per ogni intervallo di tempo in presenza di capacità aggiuntiva. Tale quantità rientra tra i dati del problema ed è dunque fissata a priori.

Per una maggiore chiarezza espositiva descriviamo di seguito le diverse situazioni di tipo C che possono sussistere in un settore aereo j all'istante di tempo t considerato:

- (C1) si ha una **situazione di tipo C1** quando al tempo t i due voli si trovano entrambi prima del punto di incrocio, ma al tempo $t + \Delta_j$ avranno già superato il punto di intersezione delle traiettorie (caso (ii));
- (C2) si verifica invece una **situazione di tipo C2** se al tempo t uno dei due voli si trova prima dell'incrocio e lo avrà oltrepassato al tempo $t + \Delta_j$ (caso (ii)) e l'altro volo della coppia ha già superato il punto di incrocio ma si trovava prima dell'intersezione delle traiettorie al tempo $t - \delta_j$ (caso (iii));
- (C3) si ha infine una **situazione di tipo C3** quando al tempo t entrambi i voli hanno già superato il punto di incrocio, ma al tempo $t - \delta_j$ si trovavano prima dell'intersezione delle traiettorie (caso (iii)).

La coppia (f, f') rappresenta dunque una situazione critica solo se i voli della coppia si trovano nella posizione (ii) o (iii). Più nello specifico, la corrispondenza tra la classificazione delle situazioni critiche fornita e le possibili configurazioni delle posizioni dei voli della coppia è riportata nella **Tabella 4.2**.

Tabella 4.2: Corrispondenza tra casi (ii)-(iii) e situazioni critiche (C1)-(C3).

(f, f')	(ii)	(iii)
(ii)	C1	C2
(iii)	C2	C3

Per completezza, nelle seguenti **Figure 4.2 - 4.4** diamo una rappresentazione visiva dei possibili scenari critici che siamo interessati a indagare.

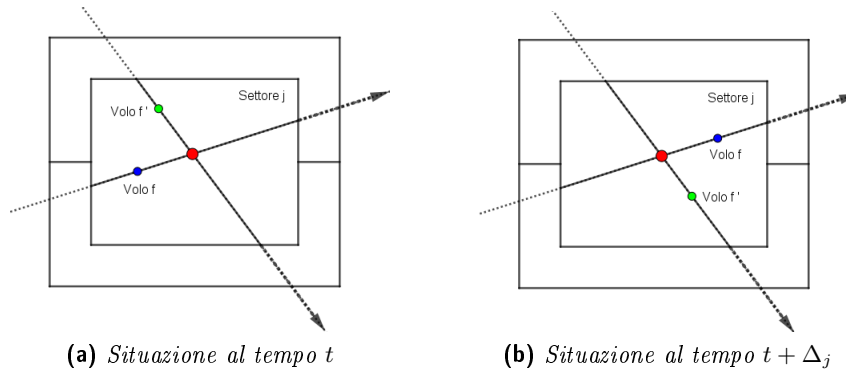


Figura 4.2: Situazione di tipo C1.

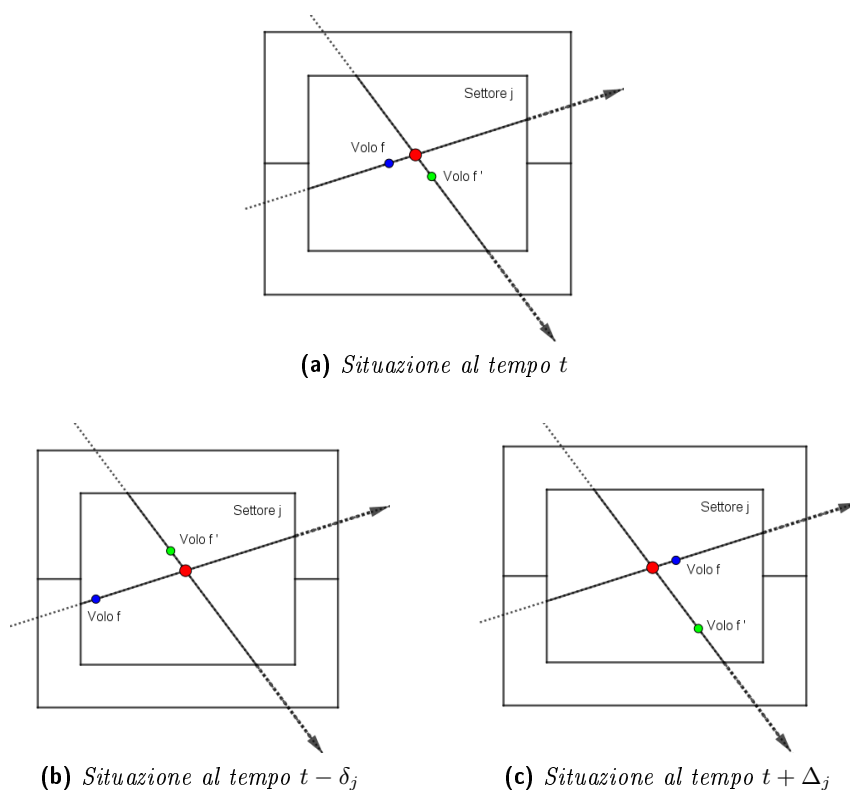


Figura 4.3: Situazione di tipo C2. Al tempo t il volo f si trova prima dell'incrocio e il volo f' ha già superato il punto di incrocio. Lo scambio di ruoli tra f e f' dà luogo a un'analogia situazione critica di tipo C2.

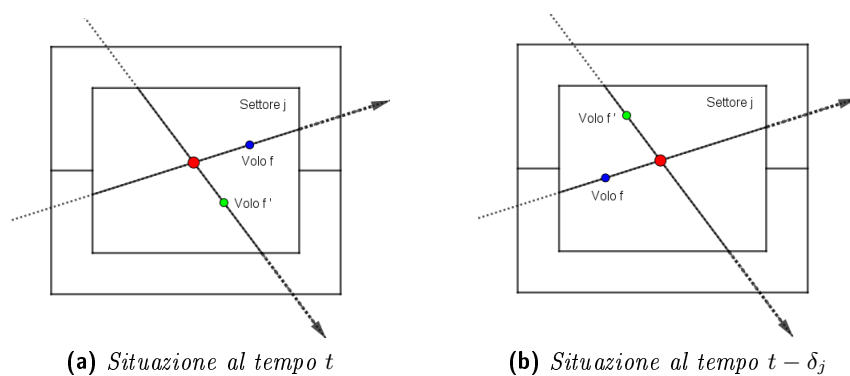


Figura 4.4: Situazione di tipo C3.

Osserviamo che la classificazione presentata è caratterizzata dal fatto che uno scenario viene tenuto in considerazione nella classificazione per un determinato settore j all'istante di tempo t preso in esame esclusivamente quando entrambi i voli della coppia di aeromobili in potenziale conflitto si trovano all'interno di j al tempo t . Evidenziamo in particolare che per la valutazione delle situazioni critiche nel settore j all'istante t non abbiamo previsto di tenere in considerazione casi nei quali almeno uno dei due voli interessati non si trovi all'interno del settore j ma in un settore diverso. Questo perché al fine di gestire la capacità di un settore abbiamo ritenuto opportuno considerare rilevanti solo gli aerei che si trovano all'interno di quel settore in quel dato istante temporale. Due voli in potenziale conflitto in j potranno dunque diventare rilevanti nel nostro modello per la determinazione della capacità del settore considerato se e quando si troveranno entrambi ad un certo istante di tempo t all'interno del settore j .

Capitolo 5

Studio di un modello a incremento controllato di capacità

Il modello di Bertsimas e Stock Patterson [8] presentato nella **Sezione 3.2** rappresenta il punto di partenza del nostro lavoro. Tenendo in considerazione le caratteristiche fondamentali di tale formulazione, il nostro obiettivo è quello di costruire un nuovo modello di programmazione lineare intera 0-1 per il problema di ATFM in cui vengono rilassate le restrizioni sulle capacità degli elementi del sistema e al contempo vengono introdotte limitazioni sul numero di potenziali conflitti che possono essere rilevati e controllati in presenza di capacità aggiuntiva. La possibilità di incrementare le capacità dei settori aerei porta ad un aumento del flusso di traffico e, di conseguenza, permette di diminuire i ritardi dei voli e di evitare congestioni, garantendo un migliore scorrimento degli aeromobili all'interno dello spazio aereo. L'aumento delle capacità viene però consentito esclusivamente nel caso in cui sussistano determinate condizioni di sicurezza.

5.1 Dati del problema e notazione

Definiamo ora le notazioni necessarie per la modellizzazione. Alcuni dei dati riportati in seguito equivalgono a quelli già precedentemente descritti nella **Sezione 3.2**, altre notazioni sono state invece introdotte ex-novo per formulare il nuovo problema che stiamo analizzando.

$\mathcal{F} = \{1, \dots, F\}$: insieme dei voli;

$\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$: insieme degli aeroporti;

$\mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$: insieme dei settori aerei;

$\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$: insieme degli intervalli di tempo;

N_f : numero di settori nella traiettoria del volo f ;

$P(f, i)$: corrisponde a $\begin{cases} \text{l'aeroporto di partenza} & \text{se } i=1, \\ \text{il settore } (i-1)^{\text{esimo}} \text{ nella traiettoria di } f & \text{se } 1 < i < N_f, \\ \text{l'aeroporto di arrivo} & \text{se } i=N_f; \end{cases}$

$P_f = \{P(f, i) : 1 \leq i \leq N_f\}$;

$D_k(t)$: capacità di partenze dell'aeroporto k al tempo t ;

$A_k(t)$: capacità di arrivi dell'aeroporto k al tempo t ;

$S_j(t)$: capacità del settore j al tempo t ;

I_k^f : numero di unità di tempo che il volo f impiega per attraversare l'aeroporto k (questo parametro viene introdotto per uniformità e viene sempre posto uguale a 0, perché il ritardo a terra non viene considerato come tempo di percorrenza dell'aeroporto di partenza da parte del volo in questione, e per quanto riguarda l'aeroporto di arrivo ciò che conta è esclusivamente l'istante di atterraggio, non vengono considerati tempi di percorrenza all'interno dell'aeroporto di destinazione);

I_j^f : numero di unità di tempo che il volo f impiega per attraversare il settore j

d_f = orario di partenza previsto per il volo f ;

$r_f = d_f + \sum_{j \in P_f} I_j^f$: orario di arrivo previsto per il volo f ;

\underline{T}_k^f : primo tempo ammissibile di partenza dall'aeroporto k o di arrivo nell'aeroporto k per il volo f (queste quantità sono uguali al tempo di partenza previsto e al tempo di arrivo previsto nel caso dell'aeroporto di partenza e dell'aeroporto di arrivo rispettivamente);

\overline{T}_k^f : ultimo tempo ammissibile di partenza dall'aeroporto k o di arrivo nell'aeroporto k per il volo f ;

\underline{T}_j^f : primo tempo ammissibile di arrivo nel settore j per il volo f (calcolato a partire dal tempo di partenza previsto a cui vengono sommati i tempi di percorrenza dei settori precedenti a j);

\overline{T}_j^f : ultimo tempo ammissibile di arrivo nel settore j per il volo f (calcolato a partire dall'ultimo tempo ammissibile per la partenza del volo f a cui vengono sommati i tempi di percorrenza dei settori fino a j escluso);

$T_k^f = [\underline{T}_k^f, \overline{T}_k^f]$: insieme dei tempi ammissibili per il decollo dall'aeroporto k o per l'atterraggio nell'aeroporto k per il volo f ;

$T_j^f = [\underline{T}_j^f, \overline{T}_j^f]$: insieme dei tempi ammissibili per il volo f per arrivare nel settore j ;

c_g^f : costo di trattenimento del volo f a terra per un'unità di tempo;

c_a^f : costo di trattenimento del volo f in aria per un'unità di tempo;

$T_{j,last}^f$: ultimo tempo ammissibile per la presenza del volo f all'interno del settore j (calcolato a partire dall'ultimo tempo ammissibile per la partenza del volo f a cui vengono sommati i tempi di percorrenza dei settori fino a j incluso; se il settore considerato è l'ultimo settore di P_f , $T_{j,last}^f$ viene posto uguale all'ultimo tempo ammissibile di arrivo nell'aeroporto k per il volo f in quanto ammettiamo la possibilità di airborne holding all'interno dell'ultimo settore della rotta prima dell'atterraggio nell'aeroporto di arrivo);

$\tau_j^f = [\underline{T}_j^f, T_{j,last}^f]$: insieme degli istanti di tempo ammissibili in cui il volo f può trovarsi all'interno del settore j ;

\mathcal{C}_j : insieme delle coppie (non ordinate) di voli che attraversano il settore j provenendo da elementi precedenti diversi e che hanno tempi di transito compatibili, ovvero che possono essere presenti all'interno del settore contemporaneamente;

$i_j^{ff'}$: numero di unità di tempo che il volo f impiega per percorrere la sua traiettoria fino a raggiungere il punto di incrocio con la rotta del volo f' all'interno del settore j ;

$\tau_j^{ff'} = \tau_j^f \cap \tau_j^{f'}$: insieme dei tempi ammissibili in cui i voli in potenziale conflitto f e f' possono trovarsi all'interno dello stesso settore j contemporaneamente;

$k_j^C(t)$: numero massimo di situazioni di tipo C che possono essere monitorate da un controllore di volo all'interno del settore j all'istante t in presenza di capacità aggiuntiva;

$M_j(t)$: parametro di controllo (big-M) relativo al settore j e al tempo t ;

$Q_j(t)$: quantità di cui può venire aumentata la capacità del settore j al tempo t nel caso in cui vengano rispettate le condizioni di sicurezza relative agli scenari di conflitto ad elevata criticità;

δ_j : parametro di tolleranza per il settore j che definisce l'area di conflitto in avanti rispetto al punto di intersezione delle rotte di due voli in potenziale conflitto in j ;

Δ_j : parametro di tolleranza per il settore j che definisce l'area di conflitto all'indietro rispetto al punto di incontro delle traiettorie di due voli in potenziale conflitto in j .

5.2 Variabili decisionali

Presentiamo ora le variabili decisionali utilizzate nel nostro modello. Alcune delle variabili che consideriamo sono le stesse già utilizzate nel modello di Bertsimas e Stock Patterson e già introdotte nella **Sezione 3.2**, che risultano ideali per descrivere in modo elegante la formulazione e i vincoli del modello. Altre variabili sono invece nuove e sono state introdotte appositamente per modellizzare il problema ATFM a capacità variabili che stiamo studiando.

Fissato un volo $f \in \mathcal{F}$, un settore $j \in \mathcal{J}$ e un tempo ammissibile $t \in T_j^f$, definiamo la variabile decisionale ad essi associata in questo modo:

$$x_j^f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se il volo } f \text{ arriva nel settore } j \text{ entro il tempo } t, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nel caso in cui si consideri un aeroporto k invece di un settore j , il significato della variabile decisionale è il seguente: se si considera l'aeroporto di partenza del volo f si ha che

$$x_k^f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se il volo } f \text{ decolla dall'aeroporto } k \text{ entro il tempo } t, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

mentre invece se si considera l'aeroporto di arrivo del volo f si ha

$$x_k^f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se il volo } f \text{ atterra nell'aeroporto } k \text{ entro il tempo } t, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Evidenziamo il fatto che le variabili x non sono definite per tutti i tempi $t \in \mathcal{T}$, ma solo per alcuni istanti di tempo. Al di fuori dell'intervallo di definizione, alle variabili x_j^f viene assegnato un valore pari a 0 quando si considerano tempi inferiori al primo tempo ammissibile di arrivo di f in j , ovvero $t < \underline{T}_j^f$, e pari a 1 quando si considerano tempi superiori all'ultimo tempo ammissibile per f per arrivare in j , cioè $t > \overline{T}_j^f$.

La definizione delle variabili x è la stessa utilizzata nel modello di Bertsimas e Stock Patterson, la cui novità fondamentale rispetto ai modelli precedenti risiede nell'utilizzo dell'espressione *entro il tempo* t invece di *al tempo* t nella definizione.

Oltre alle variabili x così definite, è opportuno definire alcune nuove variabili utili alla formulazione del nostro problema.

Per ogni volo $f \in \mathcal{F}$, per ogni settore $j \in \mathcal{J}$ e per ogni tempo $t \in \tau_j^f$ definiamo la variabile decisionale ad essi associata in questo modo:

$$y_j^f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se il volo } f \text{ si trova nel settore } j \text{ al tempo } t, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Notiamo che, come accadeva per le variabili x , anche le variabili y sono definite solo per alcuni istanti di tempo. Al di fuori dell'intervallo di definizione, per il suo significato la variabile y_j^f è posta uguale a 0. Sfortunatamente in questo caso la relazione tra le variabili x e y non è lineare, ma coinvolge un operatore di massimo. Infatti sono soddisfatte queste relazioni:

$$\begin{cases} y_j^f(t) = \max\{0, x_j^f(t) - x_{j'}^f(t)\} & \text{con } j = P(f, i), j' = P(f, i + 1), \\ & 1 < i < N_f, \\ x_j^f(t) = \max\{0, y_j^f(t) - y_j^f(t - 1)\}. \end{cases}$$

In seguito vedremo tuttavia che questa relazione può essere facilmente linearizzata.

Occorre infine definire due gruppi di variabili indispensabili l'uno per contare il numero di situazioni critiche e l'altro per guidare l'incremento di capacità, ovvero per decidere quando la capacità dei settori può essere aumentata e quando invece deve essere mantenuta la capacità nominale.

Per ogni settore $j \in \mathcal{J}$, per ogni coppia di voli $(f, f') \in \mathcal{C}_j$ e per ogni $t \in \tau_j^{ff'}$ definiamo:

$$c_j^{ff'}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se la coppia di voli } (f, f') \text{ si trova in } j \text{ al tempo } t \text{ e} \\ & \text{rappresenta uno scenario di tipo C, ovvero una} \\ & \text{situazione critica,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per tutti gli altri tempi della finestra temporale ($t \notin \tau_j^{ff'}$) si pone

$$c_j^{ff'}(t) = 0.$$

Ricordiamo che, in virtù della classificazione proposta e descritta nella **Sezione 4.4**, le situazioni di tipo C, ovvero le situazioni critiche, si riferiscono ai casi in cui entrambi i voli f e f' sono all'interno del settore j considerato al tempo t e in cui entrambi si trovano in un punto precedente all'intersezione delle traiettorie ma all'istante $t + \Delta_j$ entrambi i voli avranno oltrepassato il punto di incontro (situazione C1), oppure uno dei due ha superato il punto di intersezione da meno di δ_j istanti e l'altro non ha ancora superato l'incrocio al tempo t ma lo avrà oltrepassato al tempo $t + \Delta_j$ (situazione C2), oppure ancora entrambi i voli hanno superato l'incrocio da meno di δ_j unità di tempo (situazione C3).

Le variabili c hanno l'importante compito di contare il numero di situazioni critiche, ovvero di situazioni di tipo C, che sussistono in un determinato settore in un certo intervallo di discretizzazione considerato. Nel nostro modello siamo infatti interessati a considerare e conteggiare gli scenari critici presenti in ogni settore in ogni intervallo di tempo, in modo che sia possibile controllarli e monitorarli attraverso l'imposizione di specifiche condizioni di sicurezza. Vedremo in seguito nel **Paragrafo 5.5.4** come si possono scrivere opportuni vincoli di traffico che permettono di imporre delle condizioni di sicurezza da essere necessariamente rispettate qualora venga ammessa la possibilità di creare capacità aggiuntiva così da aumentare la capacità dei settori aerei.

Infine, per ogni settore $j \in \mathcal{J}$ e per ogni istante di tempo $t \in \mathcal{T}$ definiamo

$$q_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{se la capacità del settore } j \text{ al tempo } t \text{ viene aumentata,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quest'ultima variabile è essenziale nel nostro modello perché guida la modificazione delle capacità dei settori aerei, a patto che vengano rispettate le condizioni di sicurezza e di controllo relative agli scenari critici.

5.3 La formulazione del modello

Vediamo ora la formulazione completa del nuovo modello. Seguirà poi nei paragrafi successivi una dettagliata descrizione.

$$\begin{aligned} \min \sum_{f \in \mathcal{F}} & \left[(c_g^f - c_a^f) \sum_{t \in T_k^f, k=P(f,1)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \right. \\ & + c_a^f \sum_{t \in T_k^f, k=P(f, N_f)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \\ & \left. + (c_a^f - c_g^f)d_f - c_a^f r_f \right] \end{aligned}$$

soggetto a

$$x_j^f(t) - x_{j'}^f(t) \leq y_j^f(t) \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, i), j' = P(f, i+1), \\ 1 < i < N_f, \\ t \in \tau_j^f \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\sum_{\substack{f \in \mathcal{F} : P(f, 1) = k, \\ t \in T_k^f}} (x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \leq D_k(t) \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (5.2)$$

$$\sum_{\substack{f \in \mathcal{F} : P(f, N_f) = k, \\ t \in T_k^f}} (x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \leq A_k(t) \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{f \in \mathcal{F} : P(f, i) = j, P(f, i+1) = j', \\ 1 < i < N_f, t \in T_j^f}} (x_j^f(t) - x_{j'}^f(t)) \leq S_j(t) + Q_j(t)q_j(t) \\ \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$x_{j'}^f(t + I_j^f) - x_j^f(t) = 0 \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, i), j' = P(f, i+1), \\ i < N_f - 1, \\ t \in T_j^f \end{cases} \quad (5.5)$$

$$x_k^f(t + I_j^f) - x_j^f(t) \leq 0 \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, N_f - 1), k = P(f, N_f), \\ t \in T_j^f \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 5 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned} \quad (5.7a)$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned} \quad (5.7b)$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned} \quad (5.7c)$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned} \quad (5.7d)$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 5 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned} \quad (5.8a)$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned} \quad (5.8b)$$

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + & (5.8c) \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\
 & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + & (5.8d) \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \\
 & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{ff'}) + & (5.9a) \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 5 \\
 & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{ff'}) + & (5.9b) \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\
 & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + & (5.9c) \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\
 & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'} \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + & (5.9d) \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \\
 & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'} \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{ff'}) + & (5.10a) \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 5 \\
 & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{ff'}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\
 & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{ff'}, t \in \tau_j^{ff'}
 \end{aligned} \tag{5.10b}$$

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{ff'}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{ff'}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\
 & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'} \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{ff'} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
 \end{aligned} \tag{5.10c}$$

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{ff'}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \\
 & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'} \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{ff'}, t \in \tau_j^{ff'}
 \end{aligned} \tag{5.10d}$$

$$\sum_{(f, f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{ff'}(t) \leq k_j^C(t) + M_j(t) (1 - q_j(t)) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \tag{5.11}$$

$$x_j^f(\overline{T}_j) = 1 \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f \tag{5.12}$$

$$x_j^f(t - 1) - x_j^f(t) \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f \tag{5.13}$$

$$x_j^f(t) \in \{0, 1\} \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f \tag{5.14a}$$

$$y_j^f(t) \in \{0, 1\} \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in \tau_j^f \tag{5.14b}$$

$$c_j^{ff'}(t) \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j, t \in \tau_j^{ff'} \tag{5.14c}$$

$$q_j(t) \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \tag{5.14d}$$

5.4 La funzione obiettivo

La funzione obiettivo del nuovo modello, esattamente come accade in Bertsimas e Stock Patterson [8], descrive i costi totali dovuti ai ritardi dei voli provocati dall'applicazione delle politiche di ground holding e airborne holding. Il costo totale relativo ad un volo f è dato dalla somma del costo del suo ritardo a terra presso l'aeroporto di partenza e del costo del suo mantenimento in aria sopra l'aeroporto di arrivo. L'obiettivo del problema è quello di minimizzare i costi totali relativi a tutti i vettori aerei considerati, i quali sono calcolati in funzione delle variabili $x_j^f(t)$ che descrivono le configurazioni delle traiettorie come descritto nel **Paragrafo 3.2.4**.

5.5 I vincoli

Descriviamo ora in dettaglio i vincoli del problema. Come già osservato, alcuni vincoli sono esattamente uguali a quelli presenti in [8] e rimandiamo al **Paragrafo 3.2.5** per la loro descrizione. Alcuni dei vincoli che saranno dettagliatamente analizzati di seguito sono invece stati introdotti per descrivere la nuova formulazione e rappresentano il principale contributo teorico di questo lavoro di tesi.

5.5.1 Relazioni tra le variabili

I vincoli (5.1)

$$x_j^f(t) - x_{j'}^f(t) \leq y_j^f(t) \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, i), j' = P(f, i + 1), \\ 1 < i < N_f, \\ t \in \tau_j^f \end{cases}$$

esprimono la relazione che sussiste tra le variabili x e y del modello. Aniché usare l'operatore di massimo introdotto precedentemente abbiamo scritto questa relazione, la quale assicura comunque che se il volo f si trova all'interno del settore j al tempo t la variabile $y_j^f(t)$ assuma valore pari a 1. Se ciò non succede, ovvero se f non si trova in j all'istante t , allora la variabile $y_j^f(t)$ non è obbligata ad assumere valore 0, ma può prendere valore 0 o 1 liberamente. Tuttavia questo dettaglio non è rilevante perché l'unica informazione che ci interessa è la prima.

5.5.2 Vincoli di capacità

I vincoli di capacità tengono conto del numero massimo di aeromobili che possono, in ogni intervallo di discretizzazione, decollare o atterrare in un determinato aeroporto o essere presenti all'interno di un determinato settore aereo. Tali vincoli impongono che le soluzioni del problema rispettino le capacità di ogni elemento del sistema in ogni momento della finestra temporale considerata.

In particolare i vincoli (5.2) impongono che il numero di voli che partono dall'aeroporto k al tempo t non superi la capacità di partenze dell'aeroporto in quel dato momento ($D_k(t)$) e i vincoli (5.3) impongono che il numero di voli che atterrano nell'aeroporto k al tempo t non superi la capacità di arrivi dell'aeroporto in quel dato istante di tempo ($A_k(t)$).

I vincoli relativi alle capacità di partenze e di arrivi degli aeroporti sono gli stessi presenti nel modello di Bertsimas e Stock Patterson già descritto precedentemente. I vincoli relativi alla capacità dei settori, invece, cambiano rispetto ai vincoli presentati nel **Paragrafo 3.2.5** in quanto si deve tenere conto della possibilità di creare capacità aggiuntiva.

I vincoli (5.4)

$$\sum_{\substack{f \in \mathcal{F} : P(f, i) = j, P(f, i + 1) = j', \\ 1 < i < N_f, t \in T_j^f}} (x_j^f(t) - x_{j'}^f(t)) \leq S_j(t) + Q_j(t)q_j(t) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$$

assicurano che in ogni intervallo di tempo non vengano violate le capacità dei settori aerei. Questi vincoli, infatti, impongono che per ogni settore j il numero di aeromobili presenti all'istante t non ecceda il numero massimo di voli ammissibile per il settore considerato previsto per quel dato intervallo temporale, che assume valore $S_j(t)$ nel caso in cui la capacità del settore j al tempo t sia quella nominale, ma può aumentare fino ad assumere valore $S_j(t) + Q_j(t)$ nel caso in cui la capacità al tempo t venga aumentata per effetto del controllo degli scenari critici. Nel **Paragrafo 5.5.4** in cui vengono descritti i vincoli di traffico e le condizioni di sicurezza sono spiegate più in dettaglio le questioni relative all'incremento controllato di capacità, fulcro di questo nostro lavoro di tesi.

5.5.3 Vincoli di connettività

I vincoli di connettività descrivono la connettività tra settori contigui in modo leggermente diverso rispetto a quanto proposto nel modello di Bertsimas e Stock Patterson presentato nel **Paragrafo 3.2.5**. Dal momento che

nel nuovo modello non viene considerata l'opzione di controllo della velocità, infatti, vengono distinti due casi: nel primo caso si considerano l'aeroporto di partenza e tutti i settori eccetto l'ultimo; nel secondo caso si considera invece l'ultimo settore, ovvero quello in cui si trova l'aeroporto di arrivo.

I vincoli (5.5)

$$x_{j'}^f(t + I_j^f) - x_j^f(t) = 0 \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, i), j' = P(f, i + 1), \\ i < N_f - 1, \\ t \in T_j^f \end{cases}$$

descrivono la connettività tra i settori presenti nella traiettoria del volo f fino a considerare la connettività tra il penultimo e l'ultimo settore della rotta, ovvero tra $P(f, N_f - 2)$ e $P(f, N_f - 1)$. Tale vincolo posto ad uguaglianza assicura che prima che il volo f passi dal settore j a quello successivo j' devono trascorrere *esattamente* (dal momento che non ammettiamo lo speed control, ovvero variazioni nella velocità dell'aeromobile) I_j^f unità di tempo. Se il volo f , dunque, entra in $j = P(f, i)$ entro il tempo t , esso deve entrare nel settore $j' = P(f, i + 1)$ entro il tempo $t + I_j^f$.

I vincoli (5.6)

$$x_k^f(t + I_j^f) - x_j^f(t) \leq 0 \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, N_f - 1), k = P(f, N_f), \\ t \in T_j^f \end{cases}$$

descrivono invece la connettività tra l'ultimo settore $j = P(f, N_f - 1)$ e l'aeroporto di arrivo $k = P(f, N_f)$ tenendo in considerazione la possibilità di airborne holding, ovvero la possibilità di trattenere il volo in aria sopra l'aeroporto di arrivo prima dell'atterraggio. Prima che ogni volo atterri nell'aeroporto di arrivo, infatti, esso deve trascorrere *almeno* I_j^f unità di tempo all'interno dell'ultimo settore della sua rotta $j = P(f, N_f - 1)$.

Evidenziamo che questa formulazione dei vincoli di connettività deriva da una semplificazione delle strategie di controllo del flusso rispetto al modello di Bertsimas e Stock Patterson; in quest'ultimo, infatti, dal momento che viene ammesso lo speed control come strategia possibile, nessun vincolo di connettività è posto ad uguaglianza.

5.5.4 Vincoli di traffico e condizioni di sicurezza

I vincoli che descrivono la situazione del traffico aereo e che esprimono condizioni di sicurezza da soddisfare in caso di aumento della capacità dei

settori rappresentano il contributo più importante emerso da questo lavoro di tesi e il focus del problema studiato.

Le variabili y_j^f precedentemente definite ci permettono di capire quando un determinato volo si trova all'interno di uno specifico settore. Se il volo f si trova nel settore j all'istante t , allora per definizione si ha $y_j^f(t) = 1$. Se l'istante di tempo t è ammissibile per la presenza nel settore j sia del volo f sia del volo f' e in quel preciso istante entrambi i voli si trovano in j , allora si ha contemporaneamente $y_j^f(t) = 1$ e $y_j^{f'}(t) = 1$.

Il nostro interesse è rivolto a conteggiare il numero di scenari critici, ovvero di situazioni di tipo C, presenti all'interno di un settore, come descritto nella **Sezione 4.4**. In questo senso è dunque necessario capire come riconoscere se un volo f si trova nel settore prima o dopo l'incrocio della sua traiettoria con quella di un altro volo f' . Ammesso che f sia all'interno del settore j al tempo t , l'idea chiave sta nell'osservare le variabili

$$y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) \quad \text{e} \quad y_j^{f'}(t - i_j^{ff'}).$$

Se $i_j^{ff'}$ rappresenta il tempo che il volo f impiega per raggiungere il punto di incontro della sua traiettoria con la traiettoria di un altro volo f' , allora la quantità $I_j^f - i_j^{ff'}$ rappresenta il numero di istanti di tempo che il volo f impiega per finire di attraversare il settore percorrendo lo spazio che segue il punto di intersezione delle traiettorie di f e f' fino a uscire dal settore j considerato.

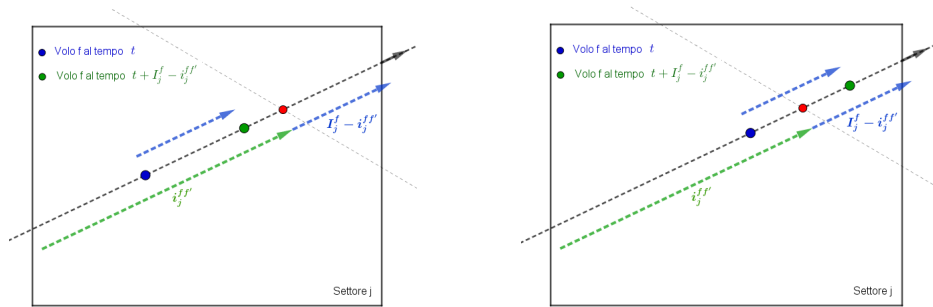
Si può allora dedurre che, se f è in j al tempo t , e quindi di conseguenza $y_j^f(t) = 1$, allora vale necessariamente:

$y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) = 1$ se il volo f al tempo t si trova in un punto della sua traiettoria che precede il punto di incrocio con la rotta del volo f' ;

$y_j^{f'}(t - i_j^{ff'}) = 1$ se il volo f al tempo t si trova in un punto della sua traiettoria che segue il punto di incrocio con la rotta del volo f' .

Più nello specifico, supponiamo che il volo f al tempo t si trovi prima del punto di intersezione della sua traiettoria con quella di un altro volo f' ; in tal caso, trascorsi $I_j^f - i_j^{ff'}$ istanti di tempo, ovvero dopo un tempo pari a quello che l'aeromobile impiega per uscire dal settore partendo dall'incrocio,

il volo f si troverà ancora all'interno del settore, anche se a priori non si riesce a stabilire se si troverà ancora prima dell'incrocio oppure se lo avrà già superato, come evidenziato nella **Figura 5.1**.



(a) Al tempo t il volo f si trova in j prima dell'incrocio e al tempo $t + I_j^f - i_j^{ff'}$ si trova ancora prima dell'incrocio.

(b) Al tempo t il volo f si trova in j prima dell'incrocio e al tempo $t + I_j^f - i_j^{ff'}$ si trova dopo l'incrocio ma sempre all'interno del settore j .

Figura 5.1: Come descrivere il caso di un volo che si trova all'interno di un settore prima del punto di intersezione con la traiettoria di un secondo volo grazie all'osservazione della posizione dell'aeromobile al tempo t e al tempo $t + I_j^f - i_j^{ff'}$.

Ammettiamo invece che al tempo t il volo f si trovi dopo il punto di intersezione delle rotte; in questo secondo caso si può dire con certezza che $i_j^{ff'}$ istanti prima, ovvero un numero di istanti prima pari al tempo impiegato dal volo f per raggiungere il punto di incrocio a partire dal momento di entrata nel settore, il volo f si trovava all'interno del settore, anche se non è possibile stabilire con precisione a priori la posizione in cui si trovava rispetto al punto critico di intersezione delle traiettorie, come illustrato in **Figura 5.2**.

Le osservazioni appena presentate sono essenziali per poter descrivere le situazioni di traffico che si presentano all'interno del settore j ad un determinato istante di tempo t . In particolare, ci interessa contare il numero di situazioni critiche, ovvero di tipo C, che sussistono in j al tempo t . Come abbiamo visto precedentemente, infatti, quando alcuni aeromobili si trovano all'interno dell'area di conflitto del settore j , ovvero all'interno dell'area delimitata dai parametri di tolleranza δ_j e Δ_j nell'intorno del punto di incrocio, si verificano situazioni ad alta pericolosità e i controllori del traffico aereo devono porre particolare attenzione per evitare i possibili incroci. Abbiamo perciò appositamente definito la variabile decisionale $c_j^{ff'}(t)$ che conteggia le situazioni di tipo C. Risulta in questo senso essenziale capire

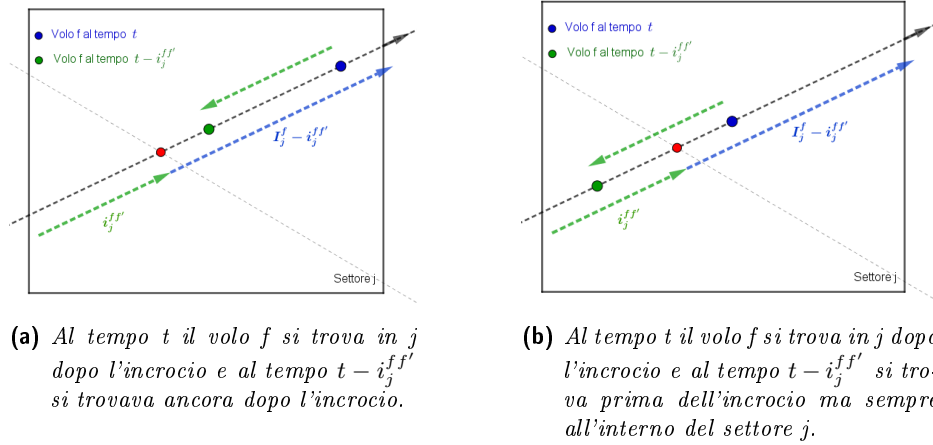


Figura 5.2: Come descrivere il caso di un volo che si trova all'interno di un settore dopo il punto di intersezione con la traiettoria di un secondo volo grazie all'osservazione della posizione dell'aeromobile al tempo t e al tempo $t - i_j^{ff'}$.

il funzionamento dei vincoli (5.7a)–(5.10d), che descrivono le relazioni tra le variabili y e le variabili c e permettono di dare una stima del numero di scenari critici presenti nel settore j al tempo t considerato.

Classificazione delle posizioni critiche

Prima di analizzare i vincoli che permettono di contare le situazioni critiche, ovvero gli scenari di tipo C, presenti all'interno di ogni settore ad ogni istante della finestra temporale, occorre introdurre un'ulteriore importante osservazione che riguarda la conformazione dell'area di conflitto e le possibili posizioni critiche di ogni volo. Questa osservazione ci porterà a una classificazione delle posizioni critiche che, in seguito, saranno messe in relazione con le situazioni di tipo C1, C2 e C3 descritte nel **Paragrafo 4.4**. Queste relazioni ci permetteranno poi di scrivere vincoli specifici per ogni situazione di tipo C1, C2 e C3 in base alla diversa conformazione dell'area di conflitto determinata da δ_j e Δ_j per il settore e la coppia di voli considerati. In virtù della specificità delle diverse situazioni possibili consideriamo separatamente i vari casi. Introduciamo dunque diversi gruppi di vincoli nella formulazione matematica del problema, ognuno dei quali viene considerato e si attiva esclusivamente quando sussiste una specifica conformazione dell'area di conflitto nell'intorno del punto di incrocio delle traiettorie della coppia di voli presa in esame.

Consideriamo un volo f che al tempo t si trova in j prima dell'incrocio con la rotta di un altro volo f' e supponiamo che l'area di conflitto all'in-

dietro rispetto all'incrocio non comprenda tutti i punti della traiettoria di f che si trovano in j e precedono l'incrocio ma soltanto un sottoinsieme di essi, ovvero supponiamo che per l'area di conflitto sia verificata la condizione

$$\Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1.$$

Se il volo in questione si trova all'interno dell'area di conflitto all'indietro, ovvero se si trova in j prima dell'incrocio ma avrà superato l'incrocio quando saranno trascorsi Δ_j istanti di tempo, è necessariamente verificata la condizione

$$y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) = 1.$$

Se invece consideriamo un volo f che al tempo t si trova in j prima dell'incrocio con la rotta di un altro volo f' ma supponiamo che l'area di conflitto all'indietro rispetto all'incrocio comprenda tutti i punti della traiettoria di f che si trovano in j e precedono l'incrocio, ovvero che valga la condizione

$$\Delta_j \geq i_j^{ff'},$$

allora non occorre osservare il comportamento di alcuna variabile e possiamo affermare direttamente che f si trova all'interno dell'area di conflitto all'indietro.

Consideriamo ora invece un volo f che al tempo t si trova in j dopo l'incrocio con la rotta di un altro volo f' e supponiamo che l'area di conflitto in avanti rispetto all'incrocio non comprenda tutti i punti della traiettoria di f che si trovano in j e seguono l'incrocio ma soltanto un sottoinsieme di essi, ovvero sia verificata la condizione

$$\delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1.$$

Se il volo in questione si trova all'interno dell'area di conflitto in avanti, ovvero se si trova in j dopo l'incrocio ma non aveva ancora superato l'incrocio δ_j istanti di tempo prima, è necessariamente verificata la condizione

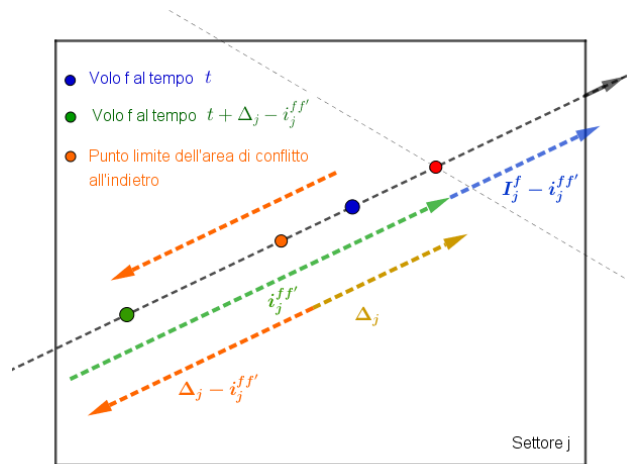
$$y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{ff'}) = 1.$$

Se invece consideriamo un volo f che al tempo t si trova in j dopo l'incrocio con la rotta di un altro volo f' ma supponiamo che l'area di conflitto in avanti rispetto all'incrocio comprenda tutti i punti della traiettoria di f che si trovano in j e seguono l'incrocio, ovvero che valga la condizione

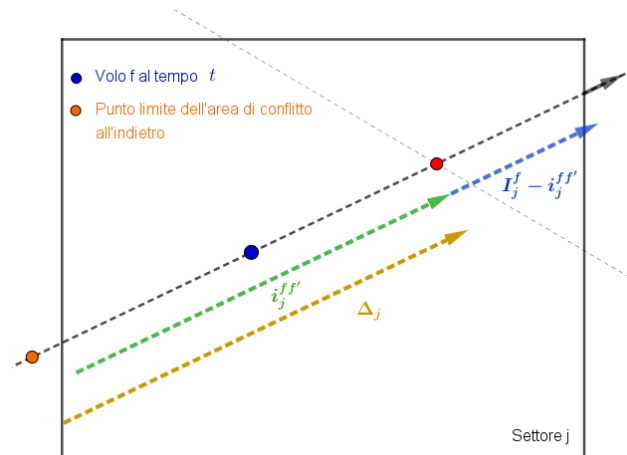
$$\delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'},$$

allora non occorre osservare il comportamento di alcuna variabile e possiamo affermare direttamente che f si trova all'interno dell'area di conflitto in avanti.

Possiamo avere un riscontro visivo di queste considerazioni relative alla posizione di un volo che si trova in un settore rispetto all'area di conflitto individuata nell'intorno del punto di intersezione con la rotta di un altro volo nelle **Figure 5.3–5.4**.

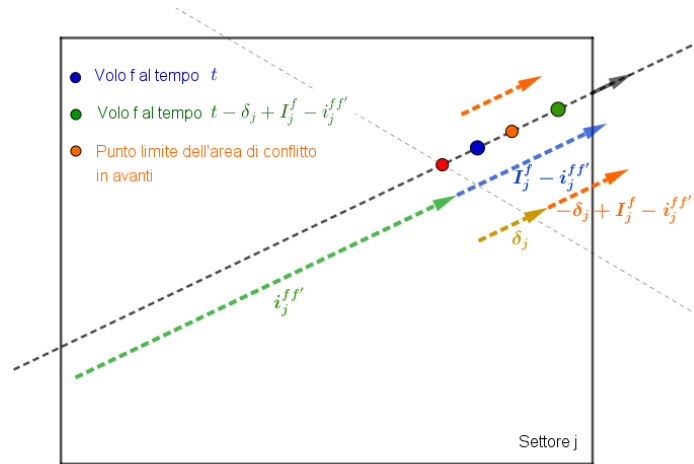


- (a) *L'area di conflitto all'indietro comprende solo un sottinsieme dei punti della traiettoria di f . In tal caso, se il volo considerato si trova nel settore all'interno dell'area di conflitto all'indietro al tempo t , allora si trovava all'interno del settore al tempo $t + \Delta_j - i_j^{ff'}$.*

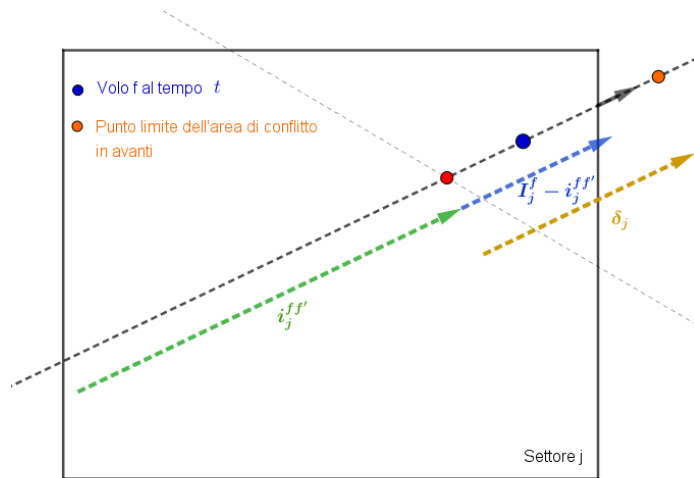


- (b) *L'area di conflitto all'indietro comprende tutti i punti della traiettoria di f . In tal caso, se il volo considerato si trova prima dell'incrocio, allora si trova all'interno dell'area di conflitto all'indietro.*

Figura 5.3: Area di conflitto all'indietro.



- (a) *L'area di conflitto in avanti comprende solo un sottoinsieme dei punti della traiettoria di f. In tal caso, se il volo considerato si trova nel settore all'interno dell'area di conflitto in avanti al tempo t , allora si trova ancora all'interno del settore al tempo $t - \delta_j + I_j^f - i_j^{ff'}$.*



- (b) *L'area di conflitto in avanti comprende tutti i punti della traiettoria di f. In tal caso, se il volo considerato si trova dopo l'incrocio, allora si trova all'interno dell'area di conflitto in avanti.*

Figura 5.4: Area di conflitto in avanti.

In virtù delle considerazioni precedenti, per ogni volo è possibile distinguere quattro diversi casi per la configurazione dell'area di conflitto, i quali entrano in gioco a coppie nella determinazione dei vincoli relativi al conteggio delle situazioni critiche di tipo diverso. Dato un volo f e un settore j e fissati il tempo di percorrenza I_j^f e il tempo impiegato dal volo f per raggiungere l'incrocio con la traiettoria di un altro volo f' , distinguiamo tra le seguenti configurazioni:

- (1) $\Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1$, ovvero l'area di conflitto all'indietro comprende solo un sottoinsieme dei punti della traiettoria di f in j ;
- (2) $\Delta_j \geq i_j^{ff'}$, ovvero l'area di conflitto all'indietro comprende tutti i punti della traiettoria di f in j ;
- (3) $\delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1$, ovvero l'area di conflitto in avanti comprende solo un sottoinsieme dei punti della traiettoria di f in j ;
- (4) $\delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'}$, ovvero l'area di conflitto in avanti comprende tutti i punti della traiettoria di f in j .

I casi considerati nella formulazione del nuovo modello per il conteggio delle situazioni critiche delle diverse tipologie sono mutualmente esclusivi e sono legati alla specificità delle possibili configurazioni che possono presentarsi quando si considera una coppia di voli in potenziale conflitto (f, f') . Per una migliore comprensione di tale specificità riportiamo nella seguente **Tabella 5.1** la corrispondenza tra i casi (C1)-(C3) descritti nella **Sezione 4.4** e i casi (1)-(4) appena descritti. Nella tabella, nei casi corrispondenti ad ognuna delle differenti situazioni critiche è riportata anche la corrispondenza con i vincoli 5.7a-5.10d, che come vedremo più dettagliatamente in seguito sono i responsabili del conteggio delle diverse situazioni critiche. Anticipiamo qui che i vincoli 5.7a-5.7d conteggiano le situazioni di tipo C1, i vincoli 5.8a-5.9d conteggiano le situazioni di tipo C2 e i vincoli 5.10a-5.10d conteggiano le situazioni di tipo C3. Evidenziamo in particolare che nel caso del conteggio delle situazioni C2, in cui la posizione rispetto al punto di incrocio non è la stessa per entrambi i voli della coppia, è necessario inserire nella formulazione due gruppi di vincoli. Nel primo gruppo (5.8a-5.8d) di vincoli, il volo f si trova all'interno dell'area di conflitto all'indietro e il volo f' si trova all'interno dell'area di conflitto in avanti; per comodità di notazione da utilizzare nella **Tabella 5.1** possiamo definire questo scenario come situazione C2i. Nel secondo gruppo di vincoli (5.9a-5.9d), invece, accade il contrario e le posizioni di f e f' sono scambiate; nella tabella ci riferiamo a questo secondo scenario con il nome di situazione C2ii.

Tabella 5.1: Corrispondenza tra casi (1)-(4) e situazioni (C1)-(C3) + relativi vincoli 5.7a-5.10d.

(f, f')	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	situazione C1 vincolo 5.7a	situazione C1 vincolo 5.7b	situazione C2i vincolo 5.8a	situazione C2i vincolo 5.8b
(2)	situazione C1 vincolo 5.7c	situazione C1 vincolo 5.7d	situazione C2i vincolo 5.8c	situazione C2i vincolo 5.8d
(3)	situazione C2ii vincolo 5.9a	situazione C2ii vincolo 5.9b	situazione C3 vincolo 5.10a	situazione C3 vincolo 5.10b
(4)	situazione C2ii vincolo 5.9c	situazione C2ii vincolo 5.9d	situazione C3 vincolo 5.10c	situazione C3 vincolo 5.10d

Conteggio delle situazioni C1

I vincoli (5.7a)–(5.7d) conteggiano gli scenari di tipo C1 a seconda delle diverse possibili configurazioni dell’area di conflitto. Essi descrivono le relazioni tra le variabili y e le variabili c , in modo che si abbia $c_j^{ff'}(t) = 1$ se entrambi i voli si trovano nel settore j prima del punto di incrocio all’istante t , ma lo avranno oltrepassato quando saranno trascorsi Δ_j istanti di tempo.

In particolare, analizzando più da vicino questa classe di vincoli notiamo che i vincoli (5.7a)

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 5 \\
 & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
 \end{aligned}$$

contano gli scenari C1 in cui l’area di conflitto all’indietro rispetto al punto di incrocio delle traiettorie della coppia di voli (f, f') comprende solo un sottinsieme di punti di entrambe le traiettorie. Si verifica uno scenario critico quando entrambi i voli si trovano all’interno dell’area di conflitto all’indietro, che in questo caso è contenuta completamente nel settore considerato. Se due voli f e f' si trovano in j prima dell’incrocio ma lo avranno superato al tempo $t + \Delta_j$, il primo membro della disuguaglianza assume valore 6. Si ha dunque

$$\begin{aligned}
 & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\
 & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) = 6 \\
 & \Rightarrow c_j^{ff'}(t) = 1
 \end{aligned}$$

Quando il primo membro, invece, assume un valore ≤ 5 , il vincolo è soddisfatto per qualsiasi valore della variabile $c_j^{ff'}(t)$.

I vincoli (5.7b)

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

contano invece le situazioni di tipo C1 in cui l'area di conflitto all'indietro rispetto al punto di incrocio delle traiettorie di f e f' contiene un sottoinsieme dei punti della rotta di f e tutti i punti della traiettoria di f' che si trovano nel settore prima dell'incrocio. Notiamo che l'area di conflitto all'indietro non è contenuta completamente nel settore considerato, ma comprende punti della traiettoria di f' che si trovano in settori precedenti. Possiamo affermare dunque che quando il volo f' si trova in j prima dell'incrocio, esso si trova automaticamente in una posizione critica; per descrivere tale scenario è sufficiente osservare la variabile y ai tempi t e $t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}$, senza il bisogno di osservare il comportamento della variabile al tempo $t + \Delta_j - i_j^{f'f}$ come accadeva invece nel vincolo precedente. In questo caso, se f si trova in j prima dell'incrocio ma lo avrà oltrepassato al tempo $t + \Delta_j$ e f' occupa un qualsiasi punto della sua traiettoria che si trova in j prima dell'incrocio (e questo, vista la conformazione dell'area di conflitto all'indietro, ci consente di dire che esso avrà sicuramente oltrepassato l'incrocio al tempo $t + \Delta_j$), il primo membro della disuguaglianza vale 5. Allora la variabile $c_j^{ff'}(t)$ è obbligata ad assumere valore 1.

I vincoli (5.7c)

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

contano le situazioni C1 in cui l'area di conflitto all'indietro rispetto al punto di incrocio delle traiettorie di f e f' contiene tutti i punti della traiettoria di f che si trovano nel settore prima dell'incrocio e un sottoinsieme dei punti della rotta di f' . Come accadeva per il vincolo precedente, tutte le posizioni di f in j prima dell'incrocio sono critiche. In tal caso, se f occupa un qualsiasi punto della sua traiettoria che si trova in j prima dell'incrocio (e dunque avrà sicuramente oltrepassato l'incrocio al tempo $t + \Delta_j$) e f' si trova in j prima dell'incrocio ma lo avrà oltrepassato al tempo $t + \Delta_j$, il primo membro della disuguaglianza vale 5. Allora la variabile $c_j^{ff'}(t)$ è obbligata ad assumere valore 1.

I vincoli (5.7d)

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

contano infine le situazioni di tipo C1 in cui l'area di conflitto all'indietro rispetto al punto di incrocio delle traiettorie di f e f' contiene tutti i punti di entrambe le traiettorie che si trovano nel settore prima dell'incrocio. Notiamo che l'area di conflitto comprende punti delle traiettorie di entrambi i voli che si trovano in settori precedenti a j , e dunque non appena entrambi i voli si trovano in j prima dell'incrocio si verifica una situazione critica. In questo scenario, se due voli f e f' si trovano in j prima dell'incrocio avranno sicuramente oltrepassato l'incrocio al tempo $t + \Delta_j$ e il primo membro della disuguaglianza assume valore 4. Allora la variabile $c_j^{ff'}(t)$ è obbligata ad assumere valore 1.

Conteggio delle situazioni C2

I vincoli (5.8a)–(5.8d) e (5.9a)–(5.9d) contano gli scenari di tipo C2 a seconda delle diverse possibili configurazioni dell'area di conflitto. Essi descrivono le relazioni tra le variabili y e le variabili c , in modo che si abbia $c_j^{ff'}(t) = 1$ se entrambi i voli al tempo t considerato si trovano nel settore j , uno prima e uno dopo il punto di incrocio, ma rispettivamente il primo lo supererà a breve (in massimo Δ_j istanti di tempo) e il secondo l'ha appena superato (da al più δ_j istanti di tempo).

In particolare, consideriamo la classe di vincoli (5.8a)–(5.8d), i quali descrivono le relazioni tra le variabili y e le variabili c , in modo che si abbia $c_j^{ff'}(t) = 1$ se il volo f si trova in j prima dell'incrocio al tempo t ma avrà superato l'incrocio al tempo $t + \Delta_j$ e il volo f' si trova dopo il punto di incrocio al tempo t ma non aveva ancora oltrepassato l'intersezione delle traiettorie al tempo $t - \delta_j$. Con riferimento alla notazione della **Tabella 5.1**, possiamo affermare che tali vincoli conteggiano le situazioni C2i.

I vincoli (5.8a)

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 5 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

contano gli scenari C2 in cui l'area di conflitto all'indietro rispetto al punto di incrocio delle traiettorie della coppia di voli (f, f') comprende solo un

sottoinsieme di punti della traiettoria di f e l'area di conflitto in avanti comprende solo un sottoinsieme di punti della traiettoria di f' . In tal caso, se un volo f si trova in j prima dell'incrocio ma lo avrà superato al tempo $t + \Delta_j$ e un volo f' si trova in j dopo l'incrocio ma non lo avevano ancora superato al tempo $t - \delta_j$, il primo membro della disuguaglianza assume valore 6. Si ha dunque

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) = 6 \\ & \Rightarrow c_j^{ff'}(t) = 1 \end{aligned}$$

Quando il primo membro, invece, assume un valore ≤ 5 , il vincolo è soddisfatto per qualsiasi valore della variabile $c_j^{ff'}(t)$.

I vincoli (5.8b)

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

contano invece le situazioni di tipo C2 in cui l'area di conflitto all'indietro rispetto al punto di incrocio delle traiettorie della coppia di voli (f, f') comprende solo un sottoinsieme di punti della traiettoria di f e l'area di conflitto in avanti comprende tutti i punti della traiettoria di f' che si trovano dopo l'incrocio. In tal caso, un volo f' che si trova in j dopo l'incrocio si trova automaticamente in una posizione critica; per descrivere questo scenario è sufficiente osservare la variabile y al tempo t e al tempo $t - i_j^{f'f}$, mentre non occorre osservare cosa succede al tempo $t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}$ come accadeva nel vincolo precedente. Se un volo f si trova in j prima dell'incrocio ma lo avrà superato al tempo $t + \Delta_j$ e un volo f' si trova in un qualsiasi punto di j dopo l'incrocio (e quindi sicuramente non lo aveva ancora superato al tempo $t - \delta_j$), il primo membro della disuguaglianza assume valore 5. Allora la variabile $c_j^{ff'}(t)$ è obbligata ad assumere valore 1.

I vincoli (5.8c)

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

contano le situazioni di tipo C2 in cui l'area di conflitto all'indietro rispetto al punto di incrocio delle traiettorie della coppia di voli (f, f') comprende

tutti i punti della traiettoria di f che si trovano in j e l'area di conflitto in avanti comprende un sottoinsieme di punti della traiettoria di f' . In tal caso, un volo f che si trova in j prima dell'incrocio avrà sicuramente superato l'incrocio al tempo $t + \Delta_j$ e dunque si trova in una posizione critica. Se un volo f si trova in un qualsiasi punto di j prima dell'incrocio e un volo f' si trova in j dopo l'incrocio ma non lo avevano ancora superato al tempo $t - \delta_j$, il primo membro della disuguaglianza assume valore 5. Allora la variabile $c_j^{ff'}(t)$ è obbligata ad assumere valore 1.

I vincoli (5.8d)

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{ff'}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{ff'}, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

contano infine le situazioni di tipo C2 in cui l'area di conflitto all'indietro rispetto al punto di incrocio delle traiettorie di f e f' contiene tutti i punti della rotta di f che si trovano nel settore dopo l'incrocio e l'area di conflitto all'indietro contiene tutti i punti della traiettoria di f' che sono in j dopo l'incrocio. Notiamo che l'area di conflitto contiene punti della traiettoria di f che si trovano in settori precedenti a quello considerato e punti della traiettoria di f' che si trovano in settori successivi a j . In tal caso, se un volo f si trova in j prima dell'incrocio lo avrà sicuramente superato al tempo $t + \Delta_j$ e se un volo f' si trova in j dopo l'incrocio certamente non lo aveva ancora superato al tempo $t - \delta_j$. Non appena il volo f si trova in j prima dell'incrocio e l'altro volo della coppia f' si trova in j dopo l'incrocio, dunque, si ha una situazione critica. Se questo accade, il primo membro della disuguaglianza assume valore 5 e allora la variabile $c_j^{ff'}(t)$ è obbligata ad assumere valore 1.

Considerazioni analoghe a quelle appena viste ma con i ruoli di f e f' scambiati valgono per la classe di vincoli (5.9a)–(5.9d), i quali descrivono le relazioni tra le variabili y e le variabili c in modo che si abbia $c_j^{ff'}(t) = 1$ se il volo f si trova dopo il punto di incrocio al tempo t ma non aveva ancora oltrepassato l'intersezione delle rotte al tempo $t - \delta_j$ e il volo f' si trova in j prima dell'incrocio al tempo t ma avrà superato l'incrocio al tempo $t + \Delta_j$. Riferendoci alla notazione utilizzata nella **Tabella 5.1**, evidenziamo che questo secondo gruppo di vincoli conteggia le situazioni C2ii.

Conteggio delle situazioni C3

Infine, i vincoli (5.10a)–(5.10d) conteggiano le situazioni di tipo C3 a seconda delle diverse possibili configurazioni dell'area di conflitto. Essi descrivono le relazioni tra le variabili y e le variabili c , in modo che si abbia

$c_j^{ff'}(t) = 1$ se entrambi i voli si trovano nel settore j dopo il punto di incrocio al tempo t , ma non avevano ancora oltrepassato il punto di intersezione delle traiettorie δ_j istanti di tempo prima.

In particolare, se esaminiamo più attentamente questa classe di vincoli notiamo che i vincoli (5.10a)

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 5 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

contano gli scenari C3 in cui l'area di conflitto in avanti rispetto al punto di incrocio delle traiettorie della coppia di voli (f, f') comprende solo un sottoinsieme di punti di entrambe le traiettorie. Si verifica una situazione critica quanto entrambi i voli si trovano all'interno dell'area di conflitto in avanti, che in questo caso è completamente contenuta nel settore considerato. Se due voli f e f' si trovano in j dopo l'incrocio ma non lo avevano ancora superato al tempo $t - \delta_j$, il primo membro della disuguaglianza assume valore 6. Si ha dunque

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) = 6 \\ & \Rightarrow c_j^{ff'}(t) = 1 \end{aligned}$$

Quando il primo membro, invece, assume un valore ≤ 5 , il vincolo è soddisfatto per qualsiasi valore della variabile $c_j^{ff'}(t)$.

I vincoli (5.10b)

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

contano invece le situazioni di tipo C3 in cui l'area di conflitto in avanti rispetto al punto di incrocio delle traiettorie di f e f' contiene un sottoinsieme dei punti della rotta di f e tutti i punti della traiettoria di f' che si trovano nel settore dopo dell'incrocio. In questo caso l'area di conflitto in avanti non è completamente contenuta nel settore considerato, ma contiene punti della traiettoria di f' appartenenti a settori successivi a j . Se il volo f' si trova in j dopo l'incrocio, dunque, esso non aveva sicuramente superato l'incrocio al tempo $t - \delta_j$ e dunque si trova in una posizione critica. Se f si trova in j dopo l'incrocio ma non lo aveva ancora oltrepassato al tempo $t - \delta_j$ e f' si trova in un qualsiasi punto all'interno del settore considerato

dopo l'incrocio, il primo membro della disuguaglianza vale 5. Allora la variabile $c_j^{ff'}(t)$ è obbligata ad assumere valore 1.

I vincoli (5.10c)

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'} \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

contano le situazioni C3 in cui l'area di conflitto in avanti rispetto al punto di incrocio delle traiettorie di f e f' contiene tutti i punti della traiettoria di f che si trovano nel settore dopo l'incrocio e un sottoinsieme dei punti della rotta di f' . Analogamente a quanto accadeva per il vincolo precedente, se f si trova in j dopo l'incrocio non lo aveva certamente ancora superato al tempo $t - \delta_j$. Dunque, se f si trova in un qualsiasi punto della sua traiettoria in j dopo l'intersezione delle rotte e f' si trova in j dopo l'incrocio ma non lo aveva ancora superato al tempo $t - \delta_j$, il primo membro della disuguaglianza vale 5. Allora la variabile $c_j^{ff'}(t)$ è obbligata ad assumere valore 1.

I vincoli (5.10d)

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + \\ & + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \\ & \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'} \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

contano infine le situazioni di tipo C3 in cui l'area di conflitto in avanti rispetto al punto di incrocio delle traiettorie di f e f' contiene tutti i punti di entrambe le traiettorie che si trovano nel settore dopo l'incrocio. In tal caso, l'area di conflitto in avanti contiene punti di entrambe le traiettorie che si trovano in settori successivi a j . Se due voli f e f' si trovano in j dopo l'incrocio, allora, sicuramente non lo avevano ancora oltrepassato al tempo $t - \delta_j$. Non appena entrambi i voli si trovano in j dopo l'incrocio, dunque, si verifica una situazione critica. Se si presenta questo scenario il primo membro della disuguaglianza vale 4, e allora la variabile $c_j^{ff'}(t)$ è obbligata ad assumere valore 1.

In tutti i casi descritti dai vincoli (5.7a)–(5.10d), come già accennato durante l'analisi, se le posizioni dei due voli non sono quelle descritte non necessariamente $c_j^{ff'}(t)$ vale 0, ma la variabile può liberamente assumere valore sia 0 che 1. Tuttavia questo non è un problema, perché la prima informazione è la sola che conta.

Condizione di incremento della capacità

Grazie alle variabili $c_j^{ff'}(t)$ è possibile dare una stima del numero di situazioni di traffico di potenziale conflitto ad elevata criticità, ovvero del numero di scenari di tipo C, presenti all'interno del settore osservato j al tempo t osservato. Per calcolare una stima complessiva degli scenari di tipo C occorre chiaramente tenere in considerazione le diverse sottocategorie C1, C2 e C3. Dal momento che abbiamo utilizzato la stessa variabile decisionale per contare le tre situazioni di tipo C possibili, si ha che

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{ff'}(t) \geq \text{numero di situazioni di conflitto di tipo C}$$

osservabili al tempo t all'interno del settore j .

Precisiamo che questa espressione non è posta ad uguaglianza ma vale il \geq in quanto nel modello potrebbe accadere (come usuale in presenza di vincoli con costanti big-M) che alcune variabili $c_j^{ff'}(t)$ siano poste ad 1 anche se la posizione della coppia di voli (f, f') al tempo t non rappresenta una situazione critica, qualora questo non porti comunque a superare la soglia impostata.

Grazie a questa disuguaglianza è possibile spiegare i vincoli che si occupano di guidare la modifica della capacità dei settori nel caso in cui sussistano ben precise condizioni di sicurezza.

I vincoli (5.11)

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{ff'}(t) \leq k_j^C(t) + M_j(t)(1 - q_j(t)) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$$

impongono che se la capacità del settore j viene aumentata al tempo t , ovvero se vale $q_j(t) = 1$, allora devono necessariamente essere soddisfatte alcune condizioni di traffico ben precise: in caso di aumento della capacità, il numero di situazioni di tipo C rilevate nel settore j all'istante t considerato devono essere inferiori a una certa quantità prestabilita $k_j^C(t)$, in modo tale da consentire che i controllori del traffico aereo possano monitorare in modo efficiente e senza correre rischi i voli che presentano criticità elevata perché in potenziale conflitto e che sia così preservata la sicurezza del flusso di traffico. All'interno di ogni settore j e ad ogni istante di tempo t , infatti, in presenza di capacità aggiuntiva i controllori di volo non riescono a monitorare un numero di situazioni critiche superiore a specifiche quantità prefissate, e dunque l'aumento di capacità dei settori è permesso solo nel caso in cui siano garantite adeguate condizioni di sicurezza. Qualora si abbia invece $q_j(t) = 0$, il parametro di controllo $M_j(t)$, scelto sufficientemente grande, fa in modo che a destra del simbolo di disuguaglianza ci sia una

quantità non positiva e che, dunque, il vincolo sia sempre soddisfatto. Per dare una stima del parametro di controllo $M_j(t)$ possiamo osservare che il risultato della sommatoria, trattandosi di una somma di variabili binarie, può assumere al massimo un valore pari alla cardinalità dell'insieme su cui si sta sommando. Se allora viene assegnato ad $M_j(t)$, ad ogni istante di tempo, il valore $|\mathcal{C}_j|$, sicuramente il vincolo considerato sarà sempre ridondante qualora non venga prodotta capacità aggiuntiva e si abbia $q_j(t) = 0$. Una seconda possibile stima per il valore del parametro di controllo $M_j(t)$ segue dalla seguente osservazione: nella sommatoria presente a secondo membro, quando $t \notin \tau_j^{ff'}$ la corrispondente variabile $c_j^{ff'}(t)$ assume per definizione valore 0. Se dunque viene assegnato ad $M_j(t)$, ad ogni istante di tempo, valore pari alla cardinalità dell'insieme $\{(f, f') \in \mathcal{C}_j | t \notin \tau_j^{ff'}\}$, certamente il vincolo (5.11) sarà sempre ridondante qualora la variabile decisionale $q_j(t)$ sia posta a 0 e dunque non si verifichi un incremento della capacità del settore considerato.

5.5.5 Altri vincoli

Analizziamo ora gli ultimi vincoli che compaiono nella formulazione del problema.

I vincoli (5.12)

$$x_j^f(\bar{T}_j^f) = 1 \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f$$

assicurano che ogni volo entri in ogni settore della sua traiettoria entro l'ultimo tempo ammissibile \bar{T}_j^f e che atterri entro il tempo massimo consentito per l'atterraggio \bar{T}_k^f . Questo è necessario per escludere soluzioni triviali identicamente nulle. Nel modello di Bertsimas e Stock Patterson questo vincolo in realtà non è presente esplicitamente: le variabili x vengono definite per gli intervalli temporali T_k^f nel caso degli aeroporti e T_j^f nel caso dei settori, e una variabile per ogni coppia volo - settore aereo o aeroporto viene semplicemente eliminata ponendo $x_j^f(\bar{T}_j^f) = 1$ come parametro prima di risolvere il problema.

I vincoli (5.13), come nel modello di Bertsimas e Stock Patterson già descritto nel **Paragrafo 3.2.5**, descrivono la consistenza temporale delle variabili $x_j^f(t)$.

I vincoli (5.14a)–(5.14d) stabiliscono infine che le variabili decisionali del modello siano variabili binarie.

5.6 Alcune precisazioni

Il modello descritto include i vincoli più importanti ed essenziali definiti nel nostro lavoro di ricerca; di seguito, tuttavia, presentiamo brevemente alcuni vincoli aggiuntivi che possono essere utili per una maggiore aderenza del modello alla realtà. Illustriamo inoltre una variazione concettuale del modello che permette di assegnare rilevanza diversa alle differenti tipologie di situazioni critiche.

5.6.1 Stabilità delle configurazioni di capacità

Può risultare utile esprimere un vincolo ulteriore che impone la permanenza dell'aumento di capacità relativo ad ogni settore j per un certo intervallo di tempo minimo t_j^{min} . L'esigenza di introdurre questa quantità nasce da considerazioni relative alla gestione organizzativa: cambiare le capacità dei settori significa modificare le configurazioni dell'aerospazio e le condizioni in cui i controllori di volo si trovano ad agire, e per questioni di operatività è auspicabile garantire una certa stabilità delle configurazioni ed evitare eccessive oscillazioni di capacità dei settori aerei.

In questo modo vogliamo imporre che, nel caso in cui la capacità di un settore j venga aumentata al tempo t , essa non possa tornare ad essere quella nominale all'istante di tempo successivo, ma debba mantenersi aumentata almeno per un numero di istanti di tempo minimo t_j^{min} .

Tale vincolo aggiuntivo può essere espresso in questo modo:

$$\sum_{s=0}^{t_j^{min}-1} q_j(t+s) \geq t_j^{min} (q_j(t) - q_j(t-1)) \quad \begin{cases} \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} : \\ t + t_j^{min} - 1 \leq |\mathcal{T}| \end{cases} \quad (5.15a)$$

$$\sum_{s=0}^{|\mathcal{T}|-t} q_j(t+s) \geq (|\mathcal{T}| - t + 1) (q_j(t) - q_j(t-1)) \quad \begin{cases} \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} : \\ t + t_j^{min} - 1 \geq |\mathcal{T}| + 1 \end{cases} \quad (5.15b)$$

Il primo gruppo di vincoli assicura che, qualora la capacità del settore j venga aumentata al tempo t mentre all'istante precedente la capacità era ancora quella nominale, allora l'aumento di capacità si deve mantenere per almeno t_j^{min} unità di tempo. Nei casi in cui l'istante di tempo t considerato dista meno di t_j^{min} unità dall'ultimo tempo della finestra temporale considerata, ovvero $|\mathcal{T}|$, il secondo gruppo di vincoli impone che quando viene creata capacità aggiuntiva l'incremento di capacità si mantenga fino all'ultimo istante possibile $|\mathcal{T}|$.

5.6.2 Massimo aumento consentito

Può essere rilevante esprimere anche il massimo aumento di capacità consentito complessivamente nello spazio aereo, introducendo il vincolo

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} Q_j(t) q_j(t) \leq Q_{tot}^{max}(t) \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (5.16)$$

Tale vincolo impone che la somma complessiva delle capacità aggiuntive (calcolata tenendo conto di tutti i settori del sistema) ad ogni istante di tempo non superi un certo valore prefissato $Q_{tot}^{max}(t)$.

5.6.3 Monitoraggio selettivo di differenti situazioni critiche

Nella formulazione presentata abbiamo scelto di considerare indistintamente, ponendole tutte sullo stesso piano, le situazioni di tipo C1, C2 e C3. Al momento di conteggiare gli scenari critici, dunque, abbiamo sommato i valori delle variabili decisionali c , le quali contavano tutte e tre le tipologie di situazioni possibili. Tuttavia, la scelta di dare importanza specifica ai differenti scenari critici appare plausibile e vediamo dunque di seguito come si può modificare il modello in tal senso.

I dati del problema rimangono pressoché invariati, con un'unica eccezione. Il parametro $k_j^C(t)$, che rappresentava il numero massimo di situazioni di tipo C che possono essere rilevate e correttamente monitorate da un controllore di volo nel settore j all'istante di tempo t in presenza di capacità aggiuntiva, deve essere sostituito con tre parametri distinti $k_j^{C1}(t)$, $k_j^{C2}(t)$ e $k_j^{C3}(t)$, i quali descrivono rispettivamente il numero massimo di situazioni critiche di tipo C1, C2 e C3 che possono essere gestite da un controllore del traffico aereo all'interno del settore j all'istante t se la capacità viene incrementata. Non introduciamo invece tre diverse quantità che rappresentano ciascuna l'aumento della capacità di un settore che si verifica qualora venga controllata una specifica tipologia di situazione di tipo C . Scegliamo infatti di consentire alla capacità del settore di aumentare rispetto alla capacità nominale solo nel caso in cui vengano contemporaneamente rispettate le condizioni di sicurezza relative a tutti e tre i diversi scenari critici.

Le variabili decisionali x , y e q del problema rimangono invariate. In luogo delle variabili c occorre però introdurre tre diverse variabili che conteggiano le diverse tipologie di situazioni critiche. Per ogni settore $j \in \mathcal{J}$, per ogni coppia di voli $(f, f') \in \mathcal{C}_j$ in potenziale conflitto e per ogni $t \in \tau_j^{ff'}$ definiamo quindi:

$$c_{j1}^{ff'}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se la coppia di voli } (f, f') \text{ si trova in } j \text{ al tempo } t \text{ e} \\ & \text{rappresenta una situazione critica di tipo C1,} \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$c_{j2}^{ff'}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se la coppia di voli } (f, f') \text{ si trova in } j \text{ al tempo } t \text{ e} \\ & \text{rappresenta una situazione critica di tipo C2,} \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$c_{j3}^{ff'}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se la coppia di voli } (f, f') \text{ si trova in } j \text{ al tempo } t \text{ e} \\ & \text{rappresenta una situazione critica di tipo C3,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per tutti gli altri tempi della finestra temporale ($t \notin \tau_j^{ff'}$) si pone

$$c_{j1}^{ff'}(t) = c_{j2}^{ff'}(t) = c_{j3}^{ff'}(t) = 0.$$

Anche i vincoli non si discostano molto rispetto al modello presentato precedentemente. Nei vincoli (5.7a)–(5.7d), che descrivono gli scenari critici C1, la variabile decisionale $c_j^{ff'}(t)$ va sostituita con la nuova variabile $c_{j1}^{ff'}(t)$. Analogamente, nei vincoli relativi alle situazioni C2, ovvero in (5.8a)–(5.8d) e (5.9a)–(5.9d), $c_j^{ff'}(t)$ va sostituita con la nuova variabile $c_{j2}^{ff'}(t)$, mentre nei vincoli (5.10a)–(5.10d) relativi agli scenari C3 la variabile $c_j^{ff'}(t)$ va sostituita con $c_{j3}^{ff'}(t)$. Infine, i vincoli (5.11) devono essere così modificati:

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_{jr}^{ff'}(t) \leq k_j^{Cr}(t) + M_j(t) \left(1 - q_j(t)\right) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}, r \in \{1, 2, 3\}$$

Osserviamo che occorre imporre tre diversi vincoli che riguardano l'incremento della capacità dei settori. Viene consentito alla capacità nominale di un settore di venire aumentata solo a patto che il numero di situazioni critiche delle diverse tipologie C1, C2 e C3 presenti all'interno del settore considerato al tempo t siano inferiori al massimo numero di scenari di quel tipo monitorabili da parte di un controllore di volo in presenza di capacità aggiuntiva e sia quindi preservata la sicurezza del traffico aereo.

5.7 Dimensione del modello

Determinare la dimensione del modello significa dare una stima del numero di variabili e del numero di vincoli presenti nel modello. A tale scopo, diamo di seguito alcune definizioni utili:

- sia T la massima cardinalità dell'insieme degli istanti di tempo ammissibili per un volo per entrare all'interno di un settore, ovvero

$$T = \max_{f \in \mathcal{F}, j \in P_f} |T_j^f|;$$

- sia N il massimo numero di elementi (settori e aeroporti) contenuti nella traiettoria di un volo, ovvero

$$N = \max_{f \in \mathcal{F}} |N_f|;$$

- sia I il massimo numero di istanti di tempo che un volo impiega per attraversare un settore, ovvero

$$I = \max_{f \in \mathcal{F}, j \in P_f} I_j^f;$$

- sia C il massimo numero di potenziali conflitti che si verificano all'interno di un settore, ovvero

$$C = \max_{j \in \mathcal{S}} |C_j|.$$

Ricordiamo inoltre che $|\mathcal{F}|$ è il numero totale dei voli, $|\mathcal{K}|$ è il numero complessivo degli aeroporti, $|\mathcal{J}|$ è il numero complessivo dei settori e $|\mathcal{T}|$ è il numero totale degli istanti di tempo.

Il numero totale di variabili $x_j^f(t)$ è pari a

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{j \in P_f} |T_j^f|.$$

Un upperbound valido al numero di variabili x risulta dunque essere $|\mathcal{F}|NT$.

Il numero totale di variabili $y_j^f(t)$ è pari a

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{j \in P_f} (|\tau_j^f|) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{j \in P_f} (|T_j^f| + I_j^f).$$

Un upperbound al numero di variabili y risulta quindi essere $|\mathcal{F}|N(T + I)$.

Il numero totale di variabili $c_j^{ff'}(t)$ è pari a

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} \sum_{(f, f') \in \mathcal{C}_j} |\tau_j^{ff'}|.$$

Dal momento che sicuramente valgono le relazioni $|\tau_j^{ff'}| \leq |T_j^f| + I_j^f$ e $|\tau_j^{ff'}| \leq |T_j^{f'}| + I_j^{f'}$, un upperbound valido al numero di variabili c risulta essere $|\mathcal{J}|C(T + I)$.

Infine, il numero totale di variabili $q_j(t)$ è pari a

$$|\mathcal{J}||\mathcal{T}|.$$

Diamo ora una stima del numero di vincoli del modello.

I vincoli (5.1) che descrivono la relazione tra le variabili x e le variabili y sono in totale

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{j=P(f,2)}^{P(f, N_j-1)} (|T_j^f| + I_j^f).$$

I vincoli di capacità (5.2)–(5.4) sono esattamente

$$2|\mathcal{K}||\mathcal{T}| + |\mathcal{J}||\mathcal{T}|.$$

I vincoli di connettività (5.5)–(5.6) sono pari a

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{j=P(f,1)}^{P(f, N_j-1)} |T_j^f|.$$

I vincoli (5.7a)–(5.10d) che descrivono le situazioni critiche sono complessivamente pari a

$$4 \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{(f, f') \in \mathcal{C}_j} |\tau_j^{ff'}| \right).$$

I vincoli (5.11) che guidano l'aumento di capacità dei settori sono in totale

$$|\mathcal{J}||\mathcal{T}|.$$

I vincoli di non trivialità della soluzione e di consistenza temporale (5.12)–(5.13) sono pari a

$$2 \left(\sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{j \in P(f)} |T_j^f| \right).$$

Infine, i vincoli (5.14a)–(5.14d) che impongono che le variabili siano binarie sono esattamente pari al numero delle variabili del modello, quantità calcolata precedentemente e uguale a

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{j \in P_f} (2|T_j^f| + I_j^f) + \sum_{j \in \mathcal{S}} \sum_{(f, f') \in \mathcal{C}_j} |\tau_j^{ff'}| + |\mathcal{J}||\mathcal{T}|.$$

Un upperbound al numero di vincoli è dunque il seguente:

$$\begin{aligned} & |\mathcal{F}|N(T + I) + 2|\mathcal{K}||\mathcal{T}| + |\mathcal{J}||\mathcal{T}| + |\mathcal{F}|NT + 4|\mathcal{J}|C(T + I) + \\ & + |\mathcal{J}||\mathcal{T}| + 2|\mathcal{F}|NT + |\mathcal{F}|N(2T + I) + |\mathcal{J}|C(T + I) + |\mathcal{J}||\mathcal{T}|. \end{aligned}$$

Riarrangiando i termini, questa quantità può essere così riscritta:

$$2|\mathcal{F}|N(3T + I) + 2|\mathcal{K}||\mathcal{T}| + 3|\mathcal{J}||\mathcal{T}| + 5|\mathcal{J}|C(T + I).$$

Capitolo 6

Implementazione del modello

6.1 Modalità di generazione delle istanze

Per la generazione delle istanze da testare abbiamo creato alcuni script utilizzando il linguaggio di programmazione Python e l'ambiente MATLAB. Per istanze che coinvolgono numerosi voli, infatti, è impensabile descrivere a mano le traiettorie, i tempi di percorrenza da assegnare ad ogni aeromobile e i possibili conflitti. Abbiamo dunque implementato alcuni programmi che, a partire da pochi dati iniziali assegnati, permettono di generare istanze in modo casuale e automatico; i codici, inoltre, stampano i risultati in formato tale da essere immediatamente trasferibili all'interno del file .dat di AMPL.

6.1.1 Traiettorie e tempi di percorrenza

Per questioni di semplicità abbiamo considerato uno spazio aereo suddiviso in settori regolari. Supponiamo dunque che l'aerospazio sia assimilabile a una griglia di dimensioni $m \times n$. Per descrivere i settori aerei con Python, partendo dalla griglia costruiamo una struttura di grafo nel modo seguente. Per ogni quadrato/rettangolo che compone la griglia aggiungiamo i due vertici in alto e il vertice in basso a sinistra all'insieme dei nodi del grafo. Tali vertici sono gli estremi di due dei segmenti che disegnano il bordo del settore: questi segmenti vengono aggiunti all'insieme degli archi e rappresentano nel grafo il settore in questione. Per ogni settore della griglia che contiene un aeroporto indichiamo inoltre il centro e tracciamo infine il segmento che collega il centro con il vertice in alto a sinistra; il centro rappresenta l'aeroporto e viene aggiunto all'insieme dei nodi, mentre il segmento viene aggiunto all'insieme degli archi e si unisce agli altri archi che rappresentano nel grafo il settore in questione.

Questa sequenza di operazioni porta ad individuare il grafo associato all'aerospazio considerato e che viene utilizzato per la generazione delle istanze.

Per una migliore comprensione illustriamo nella **Figura 6.1** una struttura di spazio aereo esemplificativa. Si tratta di una griglia 2×2 composta da 4 settori di forma quadrata (a1, a2, b1, b2) e 2 aeroporti (VCE, FCO).

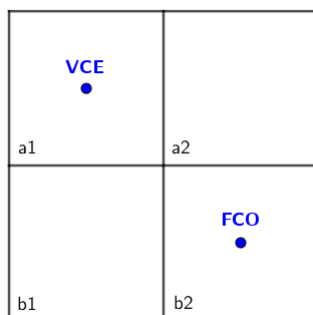


Figura 6.1: Esempio di aerospazio composto da 4 settori quadrati e 2 aeroporti.

Nella **Figura 6.2** è rappresentata invece la struttura di grafo associata all'aerospazio della figura precedente da considerare negli script per poter individuare le traiettorie dei voli.

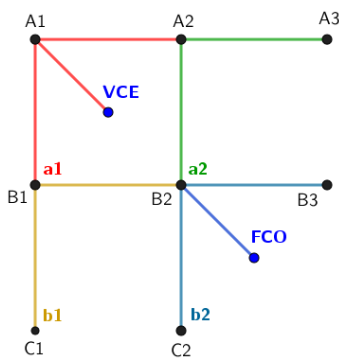


Figura 6.2: Grafo associato allo spazio aereo in figura precedente e utile da inserire negli script per la generazione automatica delle istanze.

Assegnata la struttura di grafo, individuato il sottoinsieme di nodi che corrispondono agli aeroporti e nota la partizione dell'insieme degli archi i cui elementi rappresentano ciascuno un diverso settore dell'aerospazio, il problema di scegliere le traiettorie dei voli si traduce nel problema di generare casualmente un certo numero di coppie ordinate di nodi distinti (aeroporto di partenza, aeroporto di arrivo) e di determinare successivamente uno dei cammini minimi che collega gli aeroporti della coppia. Il calcolo di tale

cammino minimo viene affidato a uno script MATLAB, mentre per tutte le altre operazioni viene utilizzato il linguaggio di programmazione Python. Dato che ogni settore dello spazio aereo è rappresentato da un insieme di archi, percorrere determinati archi del grafo ha il significato di transitare all'interno di un determinato settore; conoscendo il cammino che collega l'aeroporto di partenza e quello di arrivo, dunque, è possibile individuare i settori che compongono la traiettoria del volo in questione.

Anche i tempi di percorrenza di ogni volo sono determinati in modo casuale. Ad ogni arco (non orientato) del grafo viene assegnato un numero intero scelto casualmente all'interno di un intervallo di tempo prefissato. Grazie a ciò è possibile calcolare, dato un cammino minimo, il tempo che l'aeromobile impiega per attraversare un settore della rotta individuata dal cammino stesso: è infatti sufficiente sommare i tempi di percorrenza di tutti gli archi che rappresentano il settore considerato che compaiono nel cammino.

In seguito alla definizione delle traiettorie e dei tempi di attraversamento, fissato il numero di istanti di tempo che compongono la finestra temporale che si vuole considerare, per completare la creazione dell'istanza vengono generati per ogni volo il tempo di partenza previsto, l'ultimo tempo ammissibile per il decollo e l'ultimo tempo ammissibile per l'arrivo a destinazione.

6.1.2 Potenziali conflitti

Le coppie di voli in potenziale conflitto sono determinate sulla base delle osservazioni presentate e delle convenzioni descritte nella **Sezione 4.3**. Affinché due voli siano in potenziale conflitto all'interno di un certo settore occorre che provengano da un elemento precedente dell'aerospazio (settore o aeroporto) diverso e occorre che vi sia compatibilità di tempo, ovvero che sia possibile per i voli della coppia trovarsi contemporaneamente all'interno del settore in questione. Per ogni settore dell'aerospazio, il codice Python individua le coppie di voli in potenziale conflitto sulla base di queste considerazioni.

Per ogni coppia vengono infine definiti i tempi di incrocio in questo modo: per le coppie di voli in cui entrambi gli aeromobili atterrano nell'aeroporto collocato nel settore considerato il tempo di incrocio è rappresentato dal tempo impiegato dal volo per percorrere quel settore; in tutti gli altri casi, invece, i tempi di incrocio sono definiti generando casualmente per ogni volo un numero compreso tra 1 e il tempo che il volo considerato impiega per attraversare il settore.

6.2 Implementazione in AMPL

Per l'implementazione del modello e la risoluzione del problema di programmazione lineare intera formulato abbiamo utilizzato il generatore algebrico di modelli AMPL e il solver CPLEX. Di seguito è descritta la struttura dei file `.dat`, `.mod` e `.run` di cui ci siamo avvalsi per risolvere il problema di ATFM e ottenere i risultati computazionali che verranno presentati nel **Capitolo 7**. Per ogni insieme e parametro del codice si fa esplicitamente riferimento alla formulazione descritta nel **Capitolo 5** indicando tra parentesi la notazione corrispondente utilizzata nella tesi. Il codice sorgente AMPL completo è riportato nell'**Appendice A**.

6.2.1 File `.dat`

Dopo la definizione dell'insieme degli aeroporti AIRPORTS (\mathcal{K}), l'insieme dei settori SECTORS (\mathcal{J}), l'insieme dei voli FLIGHTS (\mathcal{F}) e l'insieme degli intervalli di tempo TIMES (\mathcal{T}), per ogni volo \mathbf{f} sono riportati nel file `.dat` la sua traiettoria PATH[\mathbf{f}] ($P_{\mathbf{f}}$), i tempi di percorrenza previsti per ogni settore $\mathbf{ct}[\mathbf{f}, \mathbf{j}]$ ($I_{\mathbf{j}}^{\mathbf{f}}$), l'istante di partenza previsto $\mathbf{dt}[\mathbf{f}]$ ($d_{\mathbf{f}}$), l'ultimo istante di tempo ammissibile per il decollo dall'aeroporto di partenza \mathbf{kd} , $\mathbf{1fdt}[\mathbf{f}]$ ($\overline{T}_{\mathbf{kd}}^{\mathbf{f}}$), e l'ultimo tempo ammissibile per l'atterraggio nell'aeroporto di arrivo \mathbf{ka} , $\mathbf{1fat}[\mathbf{f}]$ ($\overline{T}_{\mathbf{ka}}^{\mathbf{f}}$). Vengono inoltre definite le capacità degli elementi dell'aerospazio; nel nostro caso, per semplicità, tutte le capacità sono considerate indipendenti dal tempo e le capacità degli aeroporti sono uniformi, ovvero tutti gli aeroporti hanno la stessa capacità di partenze CapDep ($D_{\mathbf{j}}$) e di arrivi CapArr ($A_{\mathbf{j}}$). Le capacità dei settori CapSect[\mathbf{j}] ($S_{\mathbf{j}}$), invece, non sono omogenee e variano da settore a settore.

Nel file `.dat` vengono definite, per ogni settore \mathbf{j} , l'insieme delle coppie di voli in potenziale conflitto all'interno di quel settore, CONFLICTS[\mathbf{j}] ($\mathcal{C}_{\mathbf{j}}$). Sono inoltre riportati, infine, i tempi impiegati da ciascuno dei due aeromobili della coppia di voli in potenziale conflitto per raggiungere il punto di incrocio delle traiettorie dove può potenzialmente avvenire lo scontro, ovvero Tin[$\mathbf{j}, \mathbf{f}, \mathbf{ff}$] ($i_{\mathbf{j}}^{\mathbf{f}\mathbf{f}'}$) e tin[$\mathbf{j}, \mathbf{ff}, \mathbf{f}$] ($i_{\mathbf{j}}^{\mathbf{f}'\mathbf{f}}$). Infine, nel file `.dat` si possono leggere i parametri relativi all'aumento di capacità, al massimo numero di situazioni critiche consentite nel caso di aumento della capacità e all'ampiezza dell'area di conflitto.

6.2.2 File `.mod`

A partire dai pochi dati forniti nel file `.dat`, AMPL calcola autonomamente gli altri dati utili per la formulazione del modello (dati già presentati nella **Sezione 5.1**). Considerando il tempo di partenza e i tempi di attraversamento previsti per ogni volo \mathbf{f} , ad esempio, nel file `.mod` viene calcolato il tempo di arrivo previsto $\mathbf{at}[\mathbf{f}]$ ($r_{\mathbf{f}}$). Vengono inoltre calcolati Tmin[\mathbf{f}, \mathbf{j}]

(\underline{T}_j^f) e $\text{Tmax}[\mathbf{f}, j]$ (\overline{T}_j^f), rispettivamente il primo e l'ultimo istante di tempo in cui è possibile per il volo \mathbf{f} entrare nel settore j ; viene inoltre computato $\text{Tlast}[\mathbf{f}, j]$ ($T_{j,last}^f$), ultimo istante di tempo in cui è possibile per il volo \mathbf{f} trovarsi all'interno di j . A partire da questi dati vengono quindi calcolati $\text{T}[\mathbf{f}, j]$ (T_j^f) e $\text{Tsect}[\mathbf{f}, j]$ (τ_j^f), rispettivamente l'intervallo di tempo in cui è possibile per il volo \mathbf{f} entrare all'interno di ogni settore j che compone la sua traiettoria e l'intervallo di tempo in cui è possibile per ogni volo trovarsi all'interno di j . In particolare, il calcolo di quest'ultimo è essenziale per determinare $\text{TIME}[j, \mathbf{f}, \mathbf{ff}]$ (τ_j^{ff}), l'insieme degli istanti di tempo in cui è possibile per due voli in potenziale conflitto \mathbf{f} e \mathbf{ff} trovarsi contemporaneamente all'interno del settore interessato.

Prima di riportare le variabili, la funzione obiettivo e i vincoli del modello, nel file `.mod` sono stati inseriti dei controlli sui dati, in modo da essere sicuri che le istanze generate siano sensate. In particolare, viene verificato che l'ultimo tempo ammissibile per l'atterraggio sia maggiore o uguale al tempo di atterraggio previsto nel caso il volo non subisca ritardi, e viene verificato che i tempi di percorrenza relativi agli aeroporti siano fissati a 0.

6.2.3 File `.run`

Per ogni set di dati, eseguendo il file `.run` viene innanzitutto risolto il rilassamento continuo del modello e riportata la soluzione ottima, se trovata, che può essere intera o meno. Vengono inoltre visualizzate le variabili che non sono intere in modo che sia possibile valutare come queste si comportano quando vengono rilassati i vincoli di interezza. Successivamente viene risolto il modello includendo i vincoli che impongono che le tutte variabili decisionali siano variabili binarie 0-1 e viene visualizzata la soluzione ottima intera ottenuta, se trovata, oltre al tempo necessario per la risoluzione. Per il caso di istanze grandi che impiegano tempi consistenti per essere risolte viene impostato un *time limit*: se non viene trovata la soluzione ottima entro il tempo previsto, CPLEX restituisce la migliore soluzione intera trovata fino a quel momento. Infine, per consentire valutazioni sulla creazione di capacità aggiuntiva, per ogni settore viene riportato il numero di intervalli di tempo in cui la capacità è stata aumentata. Nel caso la capacità venga aumentata ed effettivamente sfruttata viene inoltre riportato il numero di unità di capacità utilizzate. Tutti i risultati ottenuti vengono stampati in un file di testo.

Capitolo 7

Risultati computazionali

In questo capitolo cerchiamo di comprendere se e in che misura il nuovo modello proposto nel **Capitolo 5** migliora l'utilizzo dell'aerospazio e la gestione del traffico aereo. Dapprima vengono descritte le caratteristiche delle istanze testate e successivamente vengono discussi i risultati computazionali ottenuti risolvendo il modello. Un primo obiettivo è capire in che misura, introducendo capacità che variano a seconda delle condizioni di traffico, ovvero nel nostro caso capacità che vengono incrementate se il numero di potenziali conflitti rappresentanti situazioni critiche si mantiene al di sotto di una soglia prefissata, si ottengono miglioramenti nella funzione obiettivo che significano una riduzione dei ritardi e, di conseguenza, dei costi. Un ulteriore obiettivo consiste nel proporre alcune considerazioni sull'efficienza del modello, analizzando i tempi di risoluzione e la qualità della formulazione in termini di aderenza del rilassamento continuo alla soluzione intera. Nelle prove eseguite non abbiamo considerato i vincoli aggiuntivi relativi alla stabilità delle configurazioni di capacità e al massimo aumento consentito e non abbiamo previsto un monitoraggio selettivo delle differenti situazioni critiche di tipo C1, C2 e C3.

7.1 Descrizione delle istanze testate

Al fine di ottenere i risultati computazionali da discutere consideriamo un aerospazio a forma di griglia di dimensioni 4×4 composto da 16 settori (a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4, c1, c2, c3, c4, d1, d2, d3, d4) e contenente 6 aeroporti (LON, BER, CDG, VCE, FCO, ATH) posti sulle diagonali della griglia come indicato in **Figura 7.1**. Per poter generare le istanze in modo automatico, a partire da questa struttura di aerospazio abbiamo costruito, seguendo la sequenza di operazioni descritte nella **Sezione 6.1**, il grafo riportato nella **Figura 7.2**.

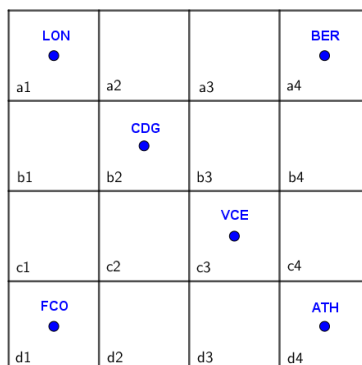


Figura 7.1: Aerospazio a griglia di dimensioni 4×4 .

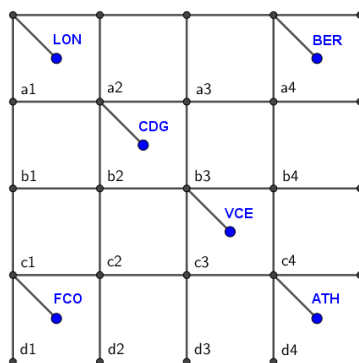


Figura 7.2: Grafo associato all'aerospazio considerato.

La finestra temporale considerata è di 48 intervalli di tempo; ogni intervallo di tempo corrisponde a 5 minuti, per un totale di 4 ore.

Per semplicità consideriamo capacità di partenze e di arrivi non dipendenti dal tempo e uguali per tutti gli aeroporti. Per ogni aeroporto le capacità di arrivi e di partenze sono fissate a 30 voli, in modo che non risulti possibile una congestione a livello degli aeroporti; in presenza di congestione a livello aeroportuale, infatti, il nostro modello risulta inefficace, mentre invece il nostro obiettivo è capire se e come il nuovo modello risulta utile per risolvere gli episodi di congestione che si verificano a livello dei settori. Per questi consideriamo capacità nominali non omogenee, indipendenti dal tempo ma diverse da settore a settore. Ai quattro settori superiori e ai quattro inferiori della griglia è stata assegnata capacità pari a 7, mentre per le due fasce centrali le capacità sono state così fissate: i quattro settori centrali **b2**, **b3**, **c2**, **c3**, quelli a cui si può accedere provenendo da quattro settori adiacenti, hanno capacità pari a 10, mentre i quattro settori appartenenti al bordo dell'aerospazio **b1**, **b4**, **c1**, **c4**, a cui si può accedere provenendo da tre settori adiacenti, hanno capacità nominale pari a 5.

Fissata per l'aerospazio questa struttura abbiamo generato 20 istanze diverse da testare sul modello in modo tale che, se risolte con il modello base, ovvero senza considerare l'incremento di capacità e i vincoli relativi al traffico e alle condizioni di sicurezza, 12 di queste (corrispondenti al 60% del totale) abbiano soluzioni intere ammissibili e 8 istanze (40% del totale) siano invece *integer infeasible*. Per ogni istanza generata consideriamo un numero di voli pari a 120, ma le traiettorie dei voli e i relativi tempi di partenza, arrivo e percorrenza variano e, di conseguenza, varia il numero di potenziali conflitti. Dato che considerando 6 aeroporti le possibili coppie ordinate (aeroporto di partenza, aeroporto di arrivo) sono $6 \cdot 5 = 30$, generare 120 voli le cui origini e destinazioni sono determinate casualmente significa dunque considerare in media 4 voli per ogni possibile coppia (aeroporto di origine, aeroporto di destinazione). Le traiettorie e i tempi di partenza, arrivo e percorrenza di ogni volo sono generati in modo automatico come descritto nella **Sezione 6.1** rispettando le seguenti condizioni: la rotta di ogni volo contiene almeno tre settori e il tempo di attraversamento di ogni settore è compreso tra 2 e 6 istanti di tempo. Per ogni volo consideriamo un costo di un'unità di ritardo al suolo pari ad 1 e un costo di un'unità di ritardo in aria pari a 3.

Per ogni istanza generata tutti i nuovi parametri introdotti, per questioni di semplificazione, sono considerati essere indipendenti dal tempo. Per ogni settore, dal momento che la griglia è regolare e dato che i tempi di attraversamento sono relativamente bassi, fissiamo rispettivamente a 1 e 2 i parametri di tolleranza δ e Δ , i quali individuano l'area di conflitto in avanti e all'indietro rispetto al punto critico di intersezione delle traiettorie e di potenziale scontro tra due voli in potenziale conflitto. Per ogni settore, al parametro di controllo M_j è assegnato valore $|\mathcal{C}_j|$ sulla base della prima stima proposta nel **Paragrafo 5.5.4**.

Le 20 istanze considerate sono testate al variare dei valori assegnati alla coppia di parametri (Q_j, k_j^C) .

I diversi aumenti di capacità Q_j consentiti per ogni settore j che sono stati di volta in volta considerati sono pari al 20%, 30%, 40% e 50% della capacità nominale del settore, S_j . I valori che Q_j assume di volta in volta nel caso del nostro aerospazio e delle capacità stabilite per i settori nelle istanze prese in esame sono riportati nella **Tabella 7.1**.

I valori del parametro k_j^C , ovvero della soglia massima di situazioni critiche che possono essere presenti in un settore affinché sia possibile incrementarne la capacità, sono stati invece stabiliti in base al numero massimo di coppie di voli in potenziale conflitto che possono essere presenti in un settore quando la sua capacità nominale viene completamente utilizzata. Nel peggiore dei casi possibili, infatti, in presenza del numero massimo di voli consentito dalla capacità nominale, un'approssimazione per eccesso del massimo

numero di potenziali conflitti, e dunque del numero massimo di situazioni critiche, che possono sussistere nel settore j ad un certo istante di tempo è data da $C_j^{max} = \binom{S_j}{2} = \frac{S_j(S_j-1)}{2}$. Questa considerazione porta ad affermare che, nel peggiore dei casi possibili, un controllore di volo può trovarsi a dover monitorare al massimo C_j^{max} scenari critici contemporaneamente quando la capacità nominale del settore j viene utilizzata completamente. Nelle istanze testate abbiamo deciso di permettere la creazione di capacità aggiuntiva per i settori solo a patto che il numero di situazioni critiche rilevate in seguito all'aumento di capacità sia inferiore o uguale a una frazione relativamente piccola del numero di scenari critici che possono verificarsi nel peggiore dei casi, ovvero abbiamo considerato di volta in volta un valore di k_j^C pari a $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ di C_j^{max} . I diversi valori che abbiamo considerato per i parametri k_j^C nel caso del nostro aerospazio e delle capacità stabilite per i settori sono riportati nella **Tabella 7.2**.

Tabella 7.1: Parametri Q_j considerati per ognuno dei tre diversi valori che assume il parametro S_j nelle istanze prese in esame.

S_j	20% di S_j	30% di S_j	40% di S_j	50% di S_j
5	1	1	2	2
7	1	2	2	3
10	2	3	4	5

Tabella 7.2: Parametri k_j^C considerati per ognuno dei tre diversi valori che assume il parametro S_j nelle istanze prese in esame.

S_j	C_j^{max}	$\frac{1}{12}C_j^{max}$	$\frac{1}{8}C_j^{max}$	$\frac{1}{6}C_j^{max}$	$\frac{1}{4}C_j^{max}$	$\frac{1}{3}C_j^{max}$
5	$\binom{5}{2} = 10$	0	1	1	2	3
7	$\binom{7}{2} = 21$	1	2	3	5	7
10	$\binom{10}{2} = 45$	3	5	7	11	15

7.2 Discussione dei risultati

Per ognuna delle 20 istanze considerate abbiamo dapprima risolto il modello nella sua versione base (senza i vincoli descritti nel **Paragrafo 5.5.4**) e successivamente nella versione modificata in cui abbiamo introdotto i nuovi vincoli di traffico e le condizioni di sicurezza. Il comportamento del nuovo modello è stato studiato al variare dei valori assunti dai parametri Q_j e k_j^C .

7.2.1 Miglioramento del flusso di traffico

Le soluzioni ottime ottenute risolvendo il modello base nei 20 diversi set di voli e conflitti presi in esame sono riportate nella sottostante **Tabella 7.3**. Nel caso delle istanze che non sono ammissibili per il modello base è riportata la dicitura *integer infeasible*.

Tabella 7.3: Risultati ottenuti risolvendo le 20 istanze considerate con il modello base.

Istanza	Soluzione ottima modello base	Istanza	Soluzione ottima modello base
1	<i>integer infeasible</i>	11	39
2	32	12	<i>integer infeasible</i>
3	<i>integer infeasible</i>	13	30
4	<i>integer infeasible</i>	14	26
5	49	15	36
6	<i>integer infeasible</i>	16	17
7	<i>integer infeasible</i>	17	<i>integer infeasible</i>
8	73	18	<i>integer infeasible</i>
9	36	19	98
10	21	20	123

In media, il tempo impiegato per risolvere le istanze ammissibili con il modello base è 1.3 secondi.

Avendo assegnato alle capacità di partenze e arrivi di ogni aeroporto valori elevati per evitare congestioni a livello aeroportuale, i ritardi ottenuti risolvendo il modello sono esclusivamente ritardi a terra creati allo scopo di trattenere l'aeromobile nell'aeroporto di partenza per consentirgli di decollare solo qualora l'aerospazio sia sufficientemente libero.

Un'osservazione preliminare e immediata ci permette di affermare che la soluzione ottima del modello base risulta certamente ammissibile anche per il nuovo modello; la soluzione ottima ottenuta risolvendo il nuovo modello, dunque, sarà inferiore o uguale alla soluzione ottima trovata risolvendo il modello base. In particolare, intuitivamente ci aspettiamo che all'aumentare di Q_j il valore della funzione obiettivo diminuisca: se la capacità aggiuntiva aumenta significa che a parità di situazioni critiche presenti all'interno del settore considerato è consentito un incremento maggiore della capacità del settore, che porta di conseguenza a un decremento maggiore dei ritardi dovuti alla congestione dei settori e dunque dei costi. Analogamente, all'aumentare di k_j^C si ammette una soglia più elevata e si consente il controllo di

un numero maggiore di situazioni critiche in presenza di capacità aggiuntiva; intuitivamente, dunque, aumentano i settori che ad un certo istante di tempo hanno i requisiti necessari per ammettere un aumento di capacità e così, reso possibile un flusso di aeromobili maggiore, ci aspettiamo di conseguenza che la funzione obiettivo diminuisca.

Per indagare più precisamente l'entità del miglioramento delle soluzioni ottenute con il nuovo modello rispetto a quelle ottenute con il modello base nel caso dei 20 set di voli e conflitti presi in esame osserviamo innanzitutto come si comportano le istanze che risultavano non ammissibili per il problema base se testate sulla nuova formulazione. Per ogni coppia di valori assunti da (Q_j, k_j^C) , nella **Tabella 7.4** è indicata la percentuale di istanze che risultano *integer infeasible* se risolte con il nuovo modello assegnando quei determinati valori al parametro che definisce l'aumento di capacità e al parametro che rappresenta la soglia massima di situazioni critiche che possono essere rilevate qualora venga creata capacità aggiuntiva; la percentuale è calcolata sul totale delle 20 istanze considerate. Ricordiamo che le istanze che risultano non ammissibili per il modello base sono il 40% del totale.

Tabella 7.4: Percentuale di istanze che risultano *integer infeasible* al variare dei parametri (Q_j, k_j^C) .

(Q_j, k_j^C)	$\frac{1}{12}C_j^{max}$	$\frac{1}{8}C_j^{max}$	$\frac{1}{6}C_j^{max}$	$\frac{1}{4}C_j^{max}$	$\frac{1}{3}C_j^{max}$
20% di S_j	10%	10%	5%	5%	5%
30% di S_j	5%	0%	0%	0%	0%
40% di S_j	5%	0%	0%	0%	0%
50% di S_j	5%	0%	0%	0%	0%

Dai dati riportati nella tabella si nota che, nella configurazione di parametri più sfavorevole ma più sicura in cui la capacità viene aumentata di poco (20%) se il numero di situazioni critiche è molto basso (inferiore a $\frac{1}{12}C_j^{max}$), la percentuale di istanze *integer infeasible* scende al 10% del totale: questo significa che il 75% delle istanze che risultavano non ammissibili (6 su 8) diventano ammissibili. Fissato il valore $Q_j = 20\%$ di S_j , solo una delle 8 istanze non ammissibili per il modello base rimane inammissibile per ogni valore assunto dal parametro k_j^C (5% del totale). Allo stesso modo, fissato il valore $k_j^C = \frac{1}{12}C_j^{max}$, solo un'istanza rimane inammissibile per ogni valore assunto dal parametro Q_j (5% del totale). In particolare, si osserva che è sufficiente permettere un incremento della capacità dei settori del 30% rispetto alla capacità nominale qualora il numero di scenari critici si mantenga al di sotto di $\frac{1}{8}C_j^{max}$ perché non vi sia più alcuna istanza *integer infeasible*.

Per le istanze che risultano ammissibili per il nuovo modello il solver può restituire la soluzione ottima entro il *time limit*, oppure alternativamente può non essere in grado di trovare la soluzione ottima e restituire soltanto la migliore tra le soluzioni ammissibili trovate entro la scadenza del tempo limite fissato. In seguito alle considerazioni sul numero di istanze che rimangono non ammissibili, dunque, osserviamo, al variare della coppia di parametri Q_j e k_j^C , i dati relativi alla percentuale di istanze per le quali è possibile trovare una soluzione ottima intera entro il *time limit* (fissato a 1800 secondi) e alla percentuale di istanze per cui il tempo necessario per ottenere una soluzione ottima è superiore alla mezz'ora e per le quali, dunque, il solutore restituisce soltanto la migliore tra le soluzioni ammissibili fino ad allora esplorate. I dati sono riportati nella **Tabella 7.5** e possono essere così letti: per ogni coppia di valori assunti dai parametri, il primo valore riportato (in grassetto) nella tabella rappresenta la percentuale di istanze risolte all'ottimo sul totale delle 20 istanze considerate; il secondo valore, invece, indica la percentuale delle istanze ammissibili ma non risolte all'ottimo entro il *time limit*, calcolata sempre sul totale delle 20 istanze prese in esame.

Tabella 7.5: Percentuale di istanze che vengono risolte all'ottimo e percentuale di istanze per le quali si riesce a trovare una soluzione ammissibile (senza certificato di ottimalità) entro il *time limit* al variare dei parametri (Q_j, k_j^C) .

(Q_j, k_j^C)	$\frac{1}{12}C_j^{max}$	$\frac{1}{8}C_j^{max}$	$\frac{1}{6}C_j^{max}$	$\frac{1}{4}C_j^{max}$	$\frac{1}{3}C_j^{max}$
20% di S_j	75% , 15%	90% , 0%	95% , 0%	95% , 0%	95% , 0%
30% di S_j	75% , 20%	90% , 10%	100% , 0%	100% , 0%	100% , 0%
40% di S_j	70% , 25%	90% , 10%	100% , 0%	100% , 0%	100% , 0%
50% di S_j	65% , 30%	90% , 10%	100% , 0%	100% , 0%	100% , 0%

A parità di istanze ammissibili, si nota che il numero di istanze per le quali entro il tempo limite fissato è possibile trovare la soluzione ottima diminuisce all'aumentare della capacità aggiuntiva Q_j e al diminuire del valore assegnato al parametro k_j^C . Per contro, il numero di soluzioni per le quali non è possibile raggiungere l'ottimo entro il *time limit* sono tanto maggiori quanto maggiore è l'aumento di capacità e quanto minore è la soglia massima di situazioni critiche monitorabili in presenza di capacità aggiuntiva. In virtù di queste osservazioni, dunque, ci aspettiamo che all'aumentare del valore della capacità aggiuntiva e al diminuire del valore soglia i tempi di risoluzione del nuovo modello aumentino. Considerazioni più precise a riguardo saranno fornite nel successivo **Paragrafo 7.2.2**.

E' interessante valutare l'entità del miglioramento ottenuto risolvendo le istanze con il modello nuovo rispetto ai risultati ottenuti testando le stesse sul modello base. A tale scopo, al variare dei valori assunti dalla coppia di parametri Q_j e k_j^C è riportata nella **Tabella 7.6** la percentuale media di miglioramento della soluzione ottima del modello nuovo rispetto alla soluzione ottima del modello base rilevata per le istanze tra loro confrontabili, ovvero per le istanze che risultano ammissibili (e in particolare ottime) per il modello base. Tale miglioramento è calcolato come indicato di seguito:

$$\text{miglioramento } \% = \frac{\text{ottimo modello base} - \text{ottimo modello nuovo}}{\text{ottimo modello base}} \cdot 100$$

In questo modo, ad una diminuzione della soluzione ottima del modello nuovo rispetto alla soluzione ottima del modello base corrisponde una percentuale di miglioramento positiva.

Tabella 7.6: Miglioramento medio percentuale della soluzione ottima del modello nuovo rispetto alla soluzione ottima del modello base al variare dei parametri (Q_j, k_j^C) .

(Q_j, k_j^C)	$\frac{1}{12}C_j^{max}$	$\frac{1}{8}C_j^{max}$	$\frac{1}{6}C_j^{max}$	$\frac{1}{4}C_j^{max}$	$\frac{1}{3}C_j^{max}$
20% di S_j	28.5%	40.3%	48.2%	57.4%	60.3%
30% di S_j	35.4%	48.1%	60.9%	72.2%	76.6%
40% di S_j	35.7%	49.3%	62.3%	73.9%	80.1%
50% di S_j	37.5%	53.5%	66.9%	79.5%	86.6%

Questi dati sono rappresentati visivamente nel grafico in **Figura 7.3**.

Analizzando le percentuali medie di miglioramento troviamo conferma di quanto ci aspettavamo, ovvero del fatto che l'ottimo del modello nuovo è tanto migliore rispetto all'ottimo del modello base quanto maggiori sono i valori dei parametri Q_j e k_j^C . Possiamo però notare come, fissato il valore del parametro relativo alla capacità aggiuntiva, il miglioramento aumenti notevolmente all'aumentare del parametro k_j^C ; nel caso in cui $Q_j = 20\%$ di S_j , ad esempio, si passa da un miglioramento del 28.5% con $k_j^C = \frac{1}{12}C_j^{max}$ a un miglioramento del 60.3% con $k_j^C = \frac{1}{3}C_j^{max}$ (la differenza è di ben 30 punti percentuali). Se invece fissiamo il valore soglia k_j^C e aumentiamo progressivamente i valori dell'incremento di capacità, la percentuale media di miglioramento aumenta meno rapidamente; nel caso in cui $k_j^C = \frac{1}{12}C_j^{max}$, ad esempio, si passa da un miglioramento del 28.5% con $Q_j = 20\%$ di S_j a un miglioramento del 37.5% con $Q_j = 50\%$ di S_j (la differenza è di soli 10 punti percentuali).

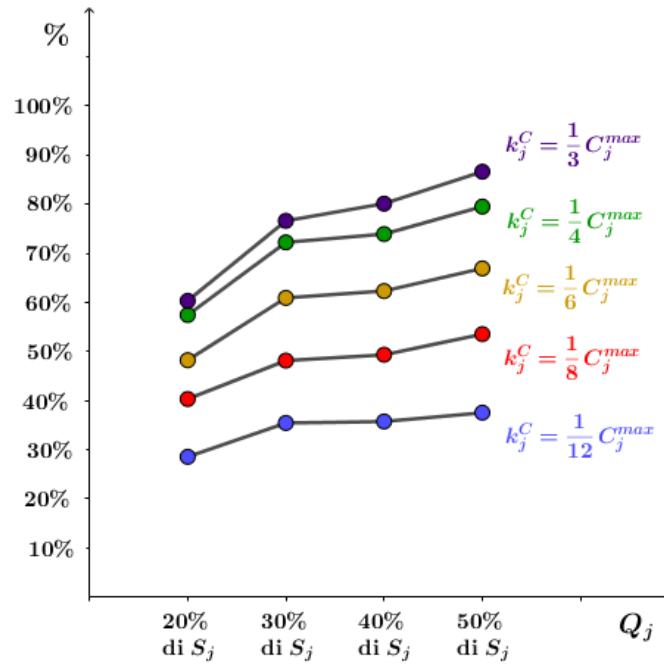


Figura 7.3: Miglioramento percentuale della soluzione ottima intera del nuovo modello rispetto all'ottimo intero del modello base al variare dei parametri (Q_j, k_j^C) .

Osservando congiuntamente i dati sul miglioramento medio (**Tabella 7.6**) e i dati relativi alla percentuale di istanze che risultano *integer infeasible* (**Tabella 7.4**) notiamo come, nel complesso, il miglioramento delle soluzioni ottenute con il nuovo modello rispetto alle soluzioni ottenute risolvendo le istanze con il modello base siano molto significative. Anche nella configurazione di parametri più sfavorevole (ma più sicura) in cui la capacità viene aumentata di poco (20%) se il numero di situazioni critiche è molto basso (inferiore a $\frac{1}{12}C_j^{max}$), infatti, la percentuale media di miglioramento è vicina al 30% e le istanze che risultano non ammissibili sono solamente il 10% del totale (mentre con il modello base le istanze *integer infeasible* sono complessivamente il 40%). Notiamo inoltre che è sufficiente aumentare la capacità del 30% se il numero di situazioni critiche è inferiore a $\frac{1}{8}C_j^{max}$ per avere un miglioramento medio di circa 50% rispetto alla soluzione ottima del modello base e per non avere più alcuna istanza non ammissibile.

Le osservazioni precedenti ci portano ad affermare che è sufficiente un aumento di capacità relativamente piccolo quando nei settori interessati il numero di situazioni critiche è inferiore alla soglia prefissata per sciogliere gli episodi di congestione, permettere un flusso più efficiente e consentire come conseguenza un miglioramento notevole della funzione obiettivo.

Nel caso delle istanze ammissibili per il nuovo modello ma non risolte all'ottimo entro il *time limit*, osservare la migliore soluzione ammissibile ottenuta entro il tempo limite fissato è comunque utile per fare delle valutazioni preliminari sulla qualità della soluzione ottima e per avere indicazioni sul miglioramento atteso risolvendo il nuovo modello rispetto alla soluzione ottima del modello base. Nella **Tabella 7.7** possiamo osservare i dati relativi al miglioramento percentuale della migliore soluzione ammissibile del nuovo modello rispetto all'ottimo del modello base per ogni configurazione dei parametri Q_j e k_j^C interessata. Per i valori della coppia di parametri (Q_j, k_j^C) tali che tutte le istanze ammissibili sono risolte, con il nuovo modello, all'ottimo entro il tempo limite fissato, nella tabella è riportato il simbolo /.

Tabella 7.7: Miglioramento percentuale medio della migliore delle soluzioni ammissibili esplorate entro il *time limit* dal modello nuovo rispetto alla soluzione ottima del modello base.

(Q_j, k_j^C)	$\frac{1}{12}C_j^{max}$	$\frac{1}{8}C_j^{max}$	$\frac{1}{6}C_j^{max}$	$\frac{1}{4}C_j^{max}$	$\frac{1}{3}C_j^{max}$
20% di S_j	35.9%	/	/	/	/
30% di S_j	48.0%	64.2%	/	/	/
40% di S_j	62.6%	64.1%	/	/	/
50% di S_j	59.1%	71.4%	/	/	/

Nel nostro esempio si nota che la migliore soluzione ammissibile restituita dal solutore è sempre inferiore alla soluzione ottima del modello base e, in particolare, il miglioramento rispetto a quest'ultima è addirittura superiore al miglioramento medio calcolato sulle istanze risolte all'ottimo. Nel caso delle istanze ammissibili per cui non si riesce a trovare la soluzione ottima entro il *time limit*, dunque, ci aspettiamo un miglioramento ancora maggiore rispetto al miglioramento medio riportato nella **Tabella 7.6**.

7.2.2 Tempi di calcolo

Dal punto di vista qualitativo, l'approccio proposto nel nuovo modello sembra avere buone performance. Occorre però valutare se tale approccio sia praticabile analizzando più precisamente il tempo che il modello impiega per essere risolto. Per ogni possibile configurazione dei parametri Q_j e k_j^C , nella **Tabella 7.8** è indicato il tempo di risoluzione medio impiegato per trovare la soluzione ottima, laddove possibile; per chiarezza, tra parentesi è indicata la percentuale di istanze risolte all'ottimo dal nuovo modello. L'andamento del tempo medio di risoluzione al variare dei parametri è illustrato in **Figura 7.4**.

Tabella 7.8: Tempo medio (in secondi) necessario per ottenere la soluzione ottima intera, calcolato considerando solo le istanze risolte all'ottimo (di cui è indicata la percentuale tra parentesi), al variare dei parametri (Q_j, k_j^C) .

(Q_j, k_j^C)	$\frac{1}{12}C_j^{max}$	$\frac{1}{8}C_j^{max}$	$\frac{1}{6}C_j^{max}$	$\frac{1}{4}C_j^{max}$	$\frac{1}{3}C_j^{max}$
20% di S_j	163s (75%)	149s (90%)	32s (95%)	15s (95%)	10s (95%)
30% di S_j	169s (75%)	101s (90%)	28s (100%)	10s (100%)	6s (100%)
40% di S_j	160s (70%)	139s (90%)	34s (100%)	10s (100%)	7s (100%)
50% di S_j	70s (65%)	211s (90%)	53s (100%)	10s (100%)	7s (100%)

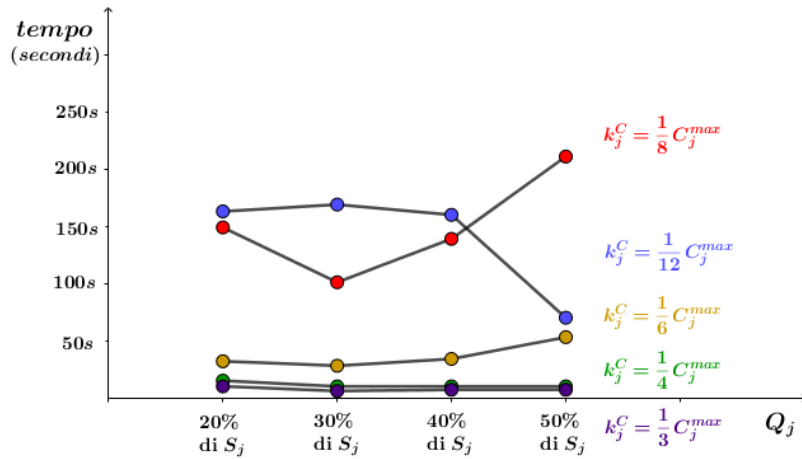


Figura 7.4: Tempo medio di risoluzione al variare dei parametri (Q_j, k_j^C) .

Nei casi tra loro confrontabili, ovvero a parità del numero di istanze ammissibili e del numero di istanze per le quali è possibile trovare una soluzione ottima entro il *time limit*, si osserva che il tempo medio necessario per ottenere la soluzione ottima tende ad aumentare all'aumentare di Q_j e al diminuire di k_j^C . Se si ammette una capacità aggiuntiva maggiore e/o si fissa un valore soglia inferiore, dunque, i tempi di risoluzione si dilatano.

In particolare, notiamo come il tempo medio di risoluzione peggiori notevolmente per i valori di k_j^C per cui accade che, assegnati determinati valori al parametro relativo all'incremento di capacità Q_j , alcune istanze non vengono risolte all'ottimo entro il *time limit* ($K_j^C = \frac{1}{8}C_j^{max}$ e $K_j^C = \frac{1}{12}C_j^{max}$). Osserviamo inoltre come il tempo medio di risoluzione aumenti più velocemente al diminuire di k_j^C che all'aumentare di Q_j : considerando le istanze confrontabili quando l'aumento di capacità è del 50%, ad esempio, osserviamo che i tempi di risoluzione passano da 7s quando $K_j^C = \frac{1}{3}C_j^{max}$ a 53s se $K_j^C = \frac{1}{6}C_j^{max}$, ovvero sono quasi ottuplicati, mentre invece se esaminiamo le istanze confrontabili quando $K_j^C = \frac{1}{6}C_j^{max}$ si passa da 28s quando

$Q_j = 30\%$ di S_j a 53s se $Q_j = 30\%$ di S_j , ovvero il tempo necessario per trovare la soluzione ottima raddoppia solamente.

Ricordando che il tempo medio impiegato per risolvere le istanze ammissibili con il modello base, sia t_{base} , è pari a 1.3 secondi, possiamo notare come i tempi riportati nella **Tabella 7.8**, pur essendo inferiori ai 3 minuti e dunque relativamente bassi, siano, in generale, notevolmente peggiori rispetto a t_{base} . Nella configurazione in cui la capacità viene aumentata di poco (20%) se il numero di situazioni critiche è inferiore a un valore soglia molto elevato ($\frac{1}{3}C_j^{max}$), ad esempio, il tempo di risoluzione medio è pari a circa $8 \cdot t_{base}$; nella configurazione di parametri in cui la capacità aumenta di molto (50%) se il numero di situazioni critiche è basso (inferiore a $\frac{1}{8}C_j^{max}$), invece, il tempo di risoluzione medio è addirittura pari a $162 \cdot t_{base}$.

Osserviamo comunque che i dati riportati nella tabella tengono conto solo delle istanze per le quali è possibile trovare la soluzione ottima entro il *time limit*, ma le valutazioni sui costi computazionali e sui tempi di risoluzione del modello non possono essere disgiunte dallo studio di ciò che accade alle istanze che risultano ammissibili per il modello nuovo ma non vengono risolte entro il tempo limite, nel nostro caso fissato a 1800 secondi. Nel **Paragrafo 7.2.1** avevamo già notato che, all'aumentare della capacità aggiuntiva Q_j e al diminuire del valore soglia k_j^C , il numero di istanze che non vengono risolte entro il tempo limite fissato aumenta. Considerando congiuntamente i risultati relativi al tempo medio impiegato per trovare l'ottimo e i dati concernenti il numero di istanze ammissibili non risolte all'ottimo entro il *time limit* riportati rispettivamente nelle **Tabelle 7.8** e **7.5**, dunque, possiamo confermare come, nel complesso, all'aumentare della capacità aggiuntiva Q_j e al diminuire del parametro soglia k_j^C i tempi necessari per trovare la soluzione ottima si dilatano.

Da quanto osservato finora consegue che, nelle configurazioni di parametri (Q_j, k_j^C) per cui ci sono istanze che non vengono risolte all'ottimo entro il *time limit*, il tempo di risoluzione medio effettivo risulta ancora peggiore rispetto a quanto si legge nella **Tabella 7.8**. Per avere una stima (per difetto) del tempo di risoluzione medio calcolato considerando tutte le istanze ammissibili e non solo quelle per le quali è possibile trovare la soluzione ottima entro il *time limit*, dunque, riportiamo nella **Tabella 7.9** il tempo medio calcolato assegnando alle istanze ammissibili ma non risolte all'ottimo entro il tempo limite fissato un tempo di risoluzione pari al *time limit* stesso, ovvero 1800 secondi.

I dati relativi al tempo medio di risoluzione e alla sua stima per difetto nel caso di configurazioni (Q_j, k_j^C) per cui vi sono alcune istanze non risolte all'ottimo entro il *time limit* sono rappresentati visivamente nella **Figura**

7.5. Per le coppie di parametri in cui il dato corrisponde solo ad una stima per difetto, il punto sul grafico è contrassegnato da un pallino vuoto.

Tabella 7.9: Tempo medio (stima per difetto del tempo medio nelle configurazioni in cui per alcune istanze non è possibile trovare la soluzione ottima entro il *time limit*) impiegato per ottenere la soluzione ottima intera (in secondi), calcolato considerando tutte le istanze ammissibili, al variare dei parametri (Q_j, k_j^C) .

(Q_j, k_j^C)	$\frac{1}{12} C_j^{max}$	$\frac{1}{8} C_j^{max}$	$\frac{1}{6} C_j^{max}$	$\frac{1}{4} C_j^{max}$	$\frac{1}{3} C_j^{max}$
20% di S_j	440s	149s	32s	15s	10s
30% di S_j	516s	272s	28s	10s	6s
40% di S_j	594s	305s	34s	10s	7s
50% di S_j	617s	371s	53s	10s	7s

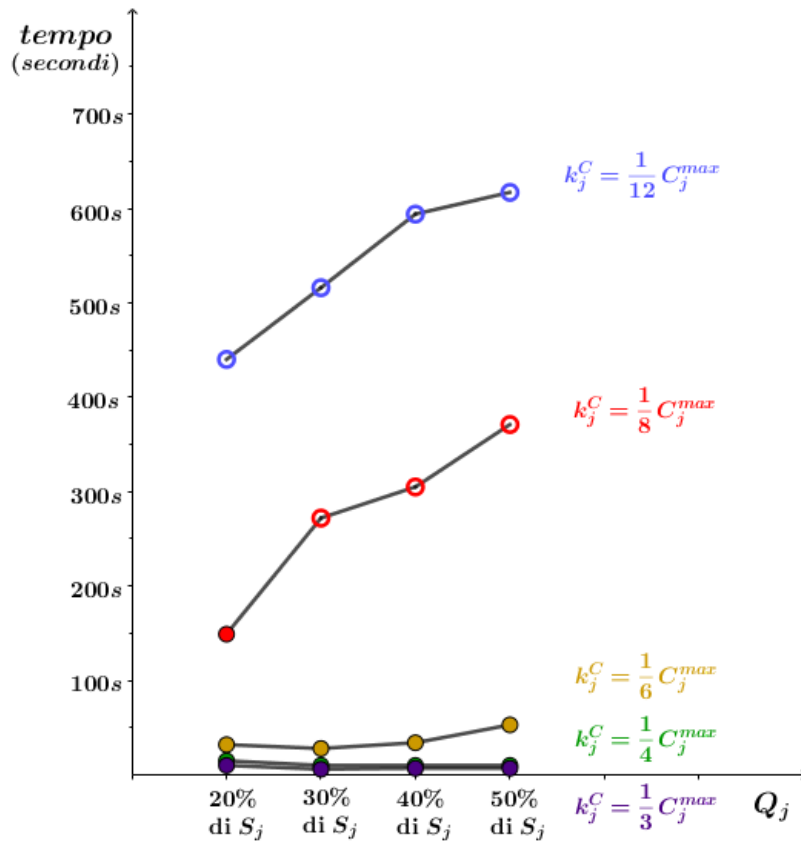


Figura 7.5: Tempo medio di risoluzione (stima per difetto per le istanze non risolte all'ottimo entro il tempo limite) al variare dei parametri (Q_j, k_j^C) .

Dalla tabella e dal grafico corrispondente troviamo conferma di quanto già osservato precedentemente: per valori di k_j^C pari a $\frac{1}{3}C_j^{max}$, $\frac{1}{4}C_j^{max}$ e $\frac{1}{6}C_j^{max}$ i tempi di risoluzione, pur essendo molto peggiori di t_{base} , si mantengono relativamente bassi; per valori di k_j^C pari a $\frac{1}{8}C_j^{max}$ e $\frac{1}{12}C_j^{max}$, invece, i tempi di risoluzione peggiorano drasticamente. Ricordiamo che, nel nostro esempio, a questi due casi corrispondono i contrassegni vuoti nel grafico, ovvero le situazioni in cui alcune istanze ammissibili non sono risolte all'ottimo entro il *time limit*. I tempi riportati, dunque, rappresentano solo una stima per difetto del tempo medio di risoluzione, e il tempo medio effettivo impiegato per trovare la soluzione ottima è ancora maggiore di quanto si osserva nella **Figura 7.5**.

Riassumendo tutte le considerazioni precedenti possiamo affermare che il nuovo modello, dal punto di vista dei costi computazionali, non risulta molto efficiente. In particolare, per valori di Q_j elevati e valori di k_j^C molto bassi i tempi di risoluzione peggiorano in modo rilevante: nel caso in cui la capacità viene aumentata del 50% se il numero di situazioni critiche è molto basso (inferiore a $\frac{1}{12}C_j^{max}$), ad esempio, la stima per difetto del tempo di risoluzione medio fornisce un valore pari a $475 \cdot t_{base}$. Sottolineiamo inoltre che, ai fini della valutazione dei tempi di risoluzione, occorre anche tenere in considerazione che le istanze testate hanno dimensioni ridotte rispetto a situazioni realistiche e che all'aumentare della dimensione del modello i costi computazionali aumentano.

7.2.3 Qualità della formulazione

Oltre ad osservazioni circa i risultati ottenuti risolvendo il modello nuovo e studiandone la soluzione ottima intera, dal punto di vista della programmazione lineare è importante valutare la qualità del rilassamento lineare e studiare quanto la soluzione del rilassamento continuo si avvicini alla soluzione ottima intera. Per questa analisi è utile introdurre il concetto di *integrality gap* che, nel caso di problemi di minimo, può essere così definito:

$$IG = \frac{\text{ottimo intero} - \text{ottimo del rilassamento continuo}}{\text{ottimo intero}} \cdot 100$$

L'*integrality gap* assume valore percentuale positivo in quanto, trattandosi di un problema di minimo, la soluzione ottima del rilassamento continuo è sempre inferiore o uguale a quella ottenuta imponendo che tutte le variabili decisionali siano variabili binarie. Questo indicatore misura la distanza tra la soluzione ottima intera e la soluzione ottima ottenuta rilassando i vincoli di interezza; tale distanza è tanto minore quanto più il *gap* corrispondente è piccolo. Per valutare come varia la qualità del rilassamento continuo al variare dei parametri Q_j e k_j^C consideriamo i valori dell'IG medio riportati nella **Tabella 7.10** e presentati visivamente nella **Figura 7.6**.

Tabella 7.10: *Integrality gap* medio al variare dei parametri (Q_j, k_j^C) .

(Q_j, k_j^C)	$\frac{1}{12} C_j^{max}$	$\frac{1}{8} C_j^{max}$	$\frac{1}{6} C_j^{max}$	$\frac{1}{4} C_j^{max}$	$\frac{1}{3} C_j^{max}$
20% di S_j	55.9%	46.0%	41.3%	32.5%	29.1%
30% di S_j	71.7%	58.4%	49.0%	35.9%	26.9%
40% di S_j	84.2%	77.1%	71.4%	64.3%	59.0%
50% di S_j	90.5%	83.8%	76.5%	68.0%	60.1%

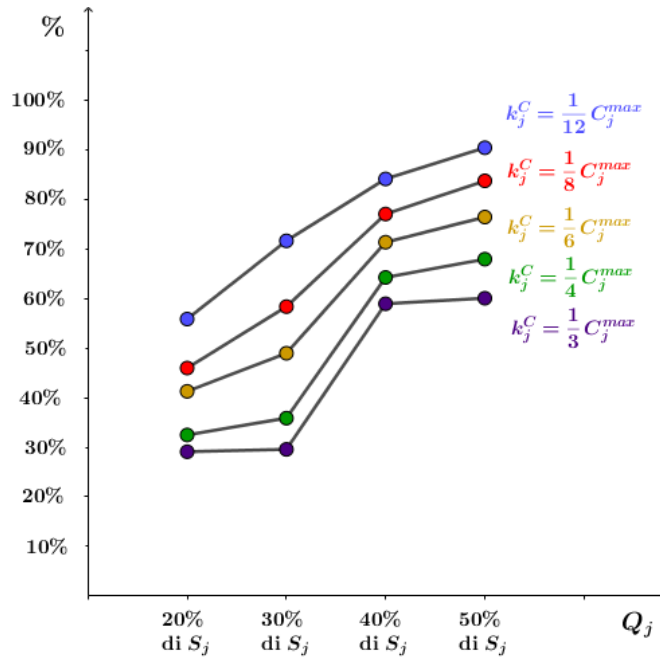


Figura 7.6: Valore medio dell'*integrality gap* al variare dei parametri (Q_j, k_j^C) .

Osservando la soluzione del rilassamento lineare del nuovo modello si nota che essa è quasi sempre non intera, dunque la nostra nuova formulazione non è stringente come accadeva, ad esempio, per il modello di Bertsimas e Stock Patterson [8] al quale ci siamo ispirati e come accade per il nostro modello base, che altro non è che una versione leggermente semplificata di [8]; per trovare la soluzione intera del nuovo modello occorre quasi sempre procedere con l'algoritmo di Branch-and-Bound. In particolare possiamo notare che, fissato un valore per il parametro Q_j , la soluzione del rilassamento continuo si mantiene quasi costante al variare dei valori assunti dal parametro k_j^C , mentre invece la soluzione ottima intera aumenta al diminuire del valore soglia k_j^C . Si osserva, dunque, un aumento dell'*integrality gap*, ovvero un aumento della distanza tra l'ottimo intero e la soluzione ottima del rilassamento, al diminuire del parametro k_j^C . Fissato un valore per il parametro

k_j^C , invece, si assiste ad un aumento dell'*integrality gap* all'aumentare dei valori assunti dal parametro Q_j . In ogni caso, la soluzione ottima intera è in genere molto lontana dalla soluzione ottima del rilassamento continuo.

Accanto a valutazioni sull'*integrality gap*, quando si considerano le soluzioni ottime del rilassamento è importante analizzare anche il numero di variabili frazionarie in rapporto al numero di variabili che assumono valore intero, ovvero che vengono poste dal modello a 0 oppure a 1. Per ogni coppia di valori possibili assunti dai parametri Q_j e k_j^C , nella **Tabella 7.11** è riportata la percentuale di variabili che assumono valore frazionario nella soluzione ottima ottenuta rilassando i vincoli di interezza; la percentuale è calcolata sul numero di variabili che nell'ottimo del rilassamento assumono valore diverso da 0.

Tabella 7.11: Percentuale di variabili frazionarie totali calcolata sul numero di variabili diverse da 0 nella soluzione ottima del rilassamento lineare al variare dei parametri (Q_j, k_j^C) .

(Q_j, k_j^C)	$\frac{1}{12}C_j^{max}$	$\frac{1}{8}C_j^{max}$	$\frac{1}{6}C_j^{max}$	$\frac{1}{4}C_j^{max}$	$\frac{1}{3}C_j^{max}$
20% di S_j	9.7%	9.6%	9.8%	11.1%	5.8%
30% di S_j	10.2%	9.8%	9.9%	9.1%	8.6%
40% di S_j	8.7%	8.5%	9.0%	9.2%	9.3%
50% di S_j	9.4%	9.4%	9.9%	8.6%	9.3%

Nelle istanze considerate, in media, il numero di variabili è pari a 41950. Dai dati sulle variabili frazionarie osserviamo che, nel nostro esempio, in media, fino all'11.1% delle variabili diverse da 0 sono frazionarie. La percentuale è significativa e, inoltre, come visto precedentemente, l'*integrality gap* è nel complesso molto elevato e l'ottimo del rilassamento è in genere molto lontano dalla soluzione ottima intera.

7.2.4 Incidenza della capacità aggiuntiva

Ci sembra rilevante, infine, proporre alcune valutazioni più specifiche sulla creazione di capacità aggiuntiva. Ci soffermiamo in particolare sui risultati ottenuti quando $Q_j = 30\%$ di S_j e $k_j^C = \frac{1}{8}C_j^{max}$, valori minimi per cui tutte le 20 istanze considerate sono ammissibili per il nuovo modello e per cui per 18 istanze è possibile trovare una soluzione ottima intera entro il *time limit*. I dati relativi all'incremento di capacità dei settori in presenza di questa specifica configurazione dei parametri (Q_j, k_j^C) e relativi alle 18 istanze che vengono risolte entro il tempo limite sono riportati nella **Tabella 7.12**.

Tabella 7.12: Dati relativi alla capacità aggiuntiva nel caso in cui $(Q_j, k_j^C) = (30\% \text{ di } S_j, \frac{1}{8} C_j^{max})$.

Istanza	Numero di volte in cui la capacità viene aumentata e relativa %	Numero di volte in cui la capacità aggiuntiva viene effettivamente utilizzata e relativa %	Capacità aggiuntiva utilizzata in %
1	28 (3.7%)	13 (1.7%)	46.4%
2	23 (3.0%)	9 (1.2%)	39.1%
3	35 (4.6%)	18 (2.3%)	51.4%
4	39 (5.1%)	21 (2.7%)	53.9
5	28 (3.6%)	14 (1.8%)	50.0%
6	45 (5.9%)	13 (1.7%)	28.9%
7	46 (6.0%)	11 (1.4%)	23.9%
8	36 (4.7%)	19 (2.5%)	52.8%
9	27 (3.5%)	8 (1.0%)	29.6%
10	22 (2.9%)	9 (1.2%)	40.9%
11	33 (4.3%)	10 (1.3%)	30.3%
12	37 (4.8%)	24 (3.1%)	64.9%
13	24 (3.1%)	5 (0.7%)	20.8%
14	26 (3.4%)	5 (0.7%)	19.2%
15	24 (3.1%)	11 (1.4%)	45.8%
16	24 (3.1%)	3 (0.4%)	12.5%
17	38 (5.0%)	24 (3.1%)	63.2%
18	54 (7.0%)	31 (4.0%)	57.4%
Media	33 (4.3%)		40.6%

Dai dati riportati nella tabella si nota che il numero di volte in cui la capacità dei settori viene aumentata è in media pari a 33 (4.3% delle variabili q). Questo valore tiene conto di tutti i settori e di tutti gli intervalli di tempo compresi nella finestra temporale considerata, in quanto le variabili decisionali responsabili dell'aumento di capacità sono indicizzate sull'insieme dei settori e sull'insieme degli intervalli di tempo. Ricordiamo che nelle prove eseguite non è attivo il vincolo relativo alla stabilità delle configurazioni di capacità.

Nei nostri esempi, dal momento che consideriamo 16 settori e 48 intervalli di tempo, le variabili $q_j(t)$ sono in tutto $16 \cdot 48 = 768$. In media, solo il 4.3% delle variabili $q_j(t)$ viene dunque posta dal modello uguale a 1. Nei rimanenti casi tali variabili assumono valore 0 in quanto il numero di situazioni critiche all'interno dei settori è superiore al valore soglia oppure perché non è necessaria la creazione di capacità aggiuntiva. Si osserva, inoltre, che in

media solo nel 40.6% del limitato numero di casi in cui viene incrementata la capacità dei settori tale capacità aggiuntiva viene effettivamente utilizzata, del tutto o in parte. Tuttavia, nonostante la capacità dei settori non venga aumentata di frequente e nonostante il fatto che alla creazione di capacità aggiuntiva non sempre corrisponda un effettivo utilizzo della stessa, si nota che è sufficiente un incremento di capacità limitato a pochi settori e momenti strategici per aumentare anche di molto l'efficienza della gestione del traffico aereo.

Capitolo 8

Considerazioni finali

A partire da una versione leggermente modificata del modello di Bertsimas e Stock Patterson del 1998 presente in letteratura [8], in questa tesi abbiamo proposto e studiato un modello di programmazione lineare intera a capacità variabili per la gestione del traffico aereo. I nuovi vincoli introdotti permettono di incrementare la capacità dei settori e di aumentare il flusso di aeromobili in base alle condizioni del traffico aereo, qualora siano soddisfatte delle condizioni di sicurezza che prevedono una limitazione dei potenziali conflitti che rappresentano scenari critici. I risultati computazionali ottenuti testando il modello su istanze artificialmente generate e relativamente piccole sono incoraggianti e hanno dimostrato che permettere aumenti anche lievi di capacità in settori e momenti strategici in cui le situazioni critiche rilevate siano inferiori a una certa soglia fissata permette di ottenere miglioramenti anche notevoli nell'efficienza della gestione del traffico aereo. Un approccio di questo tipo, basato sullo studio e sul controllo delle situazioni di criticità che possono crearsi nell'aerospazio, appare dunque possibile e sembra avere performance relativamente buone, ma alcune debolezze e criticità individuate lasciano spazio a potenziali miglioramenti e aprono la strada a possibilità di ricerca future.

Dal punto di vista modellistico, uno spunto di studio per il futuro potrebbe essere quello di indagare in modo più accurato, in collaborazione con gli enti preposti al controllo del traffico aereo, le tipologie di situazioni di potenziale conflitto che possono verificarsi, valutando diversi livelli di criticità e di rischio. In questo modo sarebbe possibile prevedere un aumento della capacità dei settori sulla base di un controllo più mirato delle diverse tipologie di situazioni possibili. Inoltre, sarebbe utile indagare la possibilità di proporre variazioni di capacità non omogenee, ma differenziate in base ai differenti scenari che si verificano di volta in volta all'interno dei settori aerei. Questo approccio più flessibile potrebbe essere utile perché permetterebbe contemporaneamente di aumentare anche di molto la capacità in un settore in cui non si rilevano particolari criticità e di consentire aumenti più

moderati o nulli in settori in cui le situazioni di rischio sono in numero più elevato. Potrebbe essere inoltre rilevante studiare in modo più approfondito il vincolo di permanenza dell'aumento di capacità; il senso di tale vincolo è impedire che le capacità degli elementi dell'aerospazio oscillino e, pur rappresentando una restrizione apparentemente importante alla creazione di capacità aggiuntiva, potrebbe contribuire a rendere il modello più aderente alla realtà.

Un'ulteriore possibile direzione di ricerca muove dalla consapevolezza che l'approccio utilizzato per la formulazione del nostro modello è indissolubilmente legato ad un'accurata conoscenza a priori delle traiettorie dei voli e dei relativi tempi di percorrenza. Sarebbe interessante indagare possibilità e modalità di inclusione dell'opzione di speed control e di decisioni dinamiche di rerouting all'interno del nuovo modello, mantenendone le idee chiave ma arricchendo la formulazione e consentendo di ottenere soluzioni più flessibili. In questo senso, un'ulteriore questione aperta riguarda lo studio di traiettorie 4D che tengono in considerazione non solo il tempo e la bidimensionalità orizzontale ma anche la dimensione verticale; sarebbe infatti interessante esplorare la possibilità di prevedere l'opzione di volo su più livelli, che nella realtà viene praticata e in linea teorica potrebbe permettere di descrivere i vincoli che esprimono le condizioni di sicurezza in modo più preciso.

Possibili sviluppi futuri del modello potrebbero inoltre prevedere una riformulazione della funzione obiettivo in modo da includere la minimizzazione dei voli con ritardo superiore a una certa quantità prefissata, considerazioni sulla fairness delle soluzioni in modo da distribuire più equamente i ritardi ed evitare di sfavorire in modo non omogeneo le compagnie aeree e la penalizzazione di rotte alternative rispetto a quella prefissata nel caso la possibilità di dirottare voli lungo traiettorie alternative sia prevista.

Sul versante computazionale, infine, stime più accurate sui parametri di controllo utilizzati potrebbero aumentare l'efficienza e l'efficacia del modello e uno studio più approfondito del rilassamento continuo potrebbe consentire di includere nella formulazione disuguaglianze valide che rafforzerebbero la stessa, rendendola più stringente. Questi accorgimenti e considerazioni potrebbero consentire di avere costi computazionali inferiori e permetterebbero di testare il modello su istanze più grandi e su situazioni di traffico più realistiche.

Appendice A

Codice sorgente AMPL

Riportiamo di seguito il file .mod che abbiamo scritto utilizzando il linguaggio di programmazione AMPL per l'implementazione del nuovo modello per la gestione del traffico aereo a capacità variabili descritto nel **Capitolo 5**.

```
# insiemi e parametri

set FLIGHTS ; #insieme dei voli
set AIRPORTS ; #insieme degli aeroporti
set SECTORS ; #insieme dei settori
set TIMES ; #insieme degli istanti di tempo

set PATH { f in FLIGHTS } ordered ; #traiettoria del volo f

param N { f in FLIGHTS } := card(PATH[f]) ; #numero di elementi
(settori e aeroporti) che compongono la traiettoria del volo f

param CapDep ; #capacità di partenze di ogni aeroporto
param CapArr ; #capacità di arrivi di ogni aeroporto
param CapSect { j in SECTORS } ; #capacità nominale di ogni settore

param ct { f in FLIGHTS, j in PATH[f] } ; #crossing time, ovvero
tempo di percorrenza che il volo f impiega per attraversare il settore j
contenuto nella sua traiettoria

param dt { f in FLIGHTS } ; #orario di partenza previsto per il volo f

param lfdt { f in FLIGHTS } ; #ultimo orario ammissibile di partenza
per il volo f

param at { f in FLIGHTS } := dt[f] + sum{i in 1..N[f]}
```

```

ct[f,member(i,PATH[f])] ; #orario di arrivo previsto per il volo f

param lfat { f in FLIGHTS } ; #ultimo orario ammissibile di arrivo
per il volo f

param cg ; #costo unitario di mantenimento al suolo di ogni volo
param ca ; #costo unitario di mantenimento in aria di ogni volo

param Tmin { f in FLIGHTS, j in PATH[f] } := (if j==first(PATH[f])
then dt[f] else dt[f] + sum{i in 1..card(PATH[f]) :
i < ord(j,PATH[f])} ct[f,member(i,PATH[f])]) ; #primo istante di
tempo in cui è possibile per il volo f entrare nel settore j

param Tmax { f in FLIGHTS, j in PATH[f] } := (if j==first(PATH[f])
then lfdt[f] else if j!=last(PATH[f]) then lfdt[f] + sum{i in
1..card(PATH[f]) : i < ord(j,PATH[f])} ct[f,member(i,PATH[f])])
else lfat[f]) ; #ultimo istante di tempo in cui è possibile per il volo f
entrare nel settore j

set T { f in FLIGHTS, j in PATH[f] } := Tmin[f,j]..Tmax[f,j] ;
#intervallo di tempo in cui è possibile per il volo f entrare nel settore j

set CONFLICTS { j in SECTORS } dimen 2 ; #insieme delle coppie di
voli in potenziale conflitto nel settore j

param Tlast { f in FLIGHTS, j in PATH[f] } := Tmax[f,j] + ct[f,j] ;
#ultimo istante di tempo in cui è possibile per il volo f trovarsi
all'interno del settore j

set Tsect { f in FLIGHTS, j in PATH[f] } := Tmin[f,j]..Tlast[f,j] ;
#intervallo di tempo in cui il volo f può trovarsi all'interno del settore j

set TIME { j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS : (f,ff) in
CONFLICTS[j] } = Tsect[f,j] inter Tsect[ff,j] ; #intervallo di
tempo in cui è possibile per i voli f e ff trovarsi contemporaneamente
all'interno del settore j

param Tin { j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS : (f,ff) in
CONFLICTS[j] }; #tempo che il volo f impiega, dopo essere entrato nel
settore j, per raggiungere il punto di incrocio con la traiettoria del volo ff

param tin { j in SECTORS, ff in FLIGHTS, f in FLIGHTS : (f,ff) in
CONFLICTS[j] } ; #tempo che il volo ff impiega, dopo essere entrato nel
settore j, per raggiungere il punto di incrocio con la traiettoria del volo f

```

```
param Q { j in SECTORS } ; #aumento di capacità consentito

param kk { j in SECTORS } ; #massimo numero di situazioni critiche
consentite in caso di aumento della capacità

param M { j in SECTORS } ; #parametro di sicurezza

param delta ; #ampiezza dell'area di conflitto in avanti
param Delta ; #ampiezza dell'area di conflitto all'indietro

# controllo sui dati

check { f in FLIGHTS } : lfat[f] >= lfdt[f] + sum{i in
1..card(PATH[f])} ct[f,member(i,PATH[f])] ; #l'ultimo tempo ammissibile
di atterraggio deve essere maggiore o uguale all'orario di atterraggio previsto

check { f in FLIGHTS } : ct[f,first(PATH[f])] = 0 ; #per ogni volo
il tempo di percorrenza dell'aeroporto di partenza è 0: appena l'aereo decolla
entra nel primo settore della rotta

check { f in FLIGHTS } : ct[f,last(PATH[f])] = 0 ; #per ogni volo
il tempo di percorrenza dell'aeroporto di arrivo è 0: appena l'aereo lascia
l'ultimo settore della rotta atterra

# definizione delle variabili decisionali

var x { f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j] } binary ;

var y { f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in Tsect[f,j] } binary ;

var c { j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in
TIME[j,f,ff] : (f,ff) in CONFLICTS[j] } binary ;

var q { j in SECTORS, t in TIMES } binary ;
```

```
# funzione obiettivo da minimizzare
```

```
minimize costotot : sum{f in FLIGHTS} ((cg[f]-ca[f])*(sum{t in
T[f,first(PATH[f])]} (t*(x[f,first(PATH[f]),t)-(if t-1 >=
>= Tmin[f,first(PATH[f]) and t-1 <= Tmax[f,first(PATH[f]) then
x[f,first(PATH[f]),t-1] else if t-1 <= Tmin[f,first(PATH[f])]-1
then 0 else 1))))+ca[f]*(sum{t in T[f,last(PATH[f])]}
(t*(x[f,last(PATH[f]),t)-(if t-1 >= Tmin[f,last(PATH[f]) and
t-1 <= Tmax[f,last(PATH[f]) then x[f,last(PATH[f]),t-1] else if
t-1 <= Tmin[f,last(PATH[f])]-1 then 0 else 1))))+(ca[f]+
-cg[f])*dt[f]-ca[f]*at[f]) ;
```

```
# vincoli
```

```
s.t. DefVary { f in FLIGHTS, j in PATH[f] diff {first(PATH[f]),
last(PATH[f])}, t in Tsect[f,j] } : (if t in T[f,j] then x[f,j,t]
else 1) - (if t in T[f,next(j,PATH[f])] then x[f,next(j,PATH[f]),t]
else if t <= Tmin[f,next(j,PATH[f])]-1 then 0 else 1) <= y[f,j,t] ;
```

```
s.t. CapDepAirport { k in AIRPORTS, t in TIMES } : sum {f in
FLIGHTS : k == first(PATH[f])} ((if t in T[f,k] then x[f,k,t] else
if t <= Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)-(if t-1 in T[f,k] then x[f,k,t-1]
else if t-1 <= Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)) <= CapDep ;
```

```
s.t. CapArrAirport { k in AIRPORTS, t in TIMES } : sum {f in
FLIGHTS : k == last(PATH[f])} ((if t in T[f,k] then x[f,k,t] else
if t <= Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)-(if t-1 in T[f,k] then x[f,k,t-1]
else if t-1 <= Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)) <= CapArr ;
```

```
s.t. CapSectors { j in SECTORS, t in TIMES } : sum {f in FLIGHTS
: j in PATH[f] and ord0(j,PATH[f]) > 1 and ord0(j,PATH[f]) <
< card(PATH[f])} ((if t in T[f,j] then x[f,j,t] else if t <= Tmin[f,j]-1
then 0 else 1)-(if t in T[f,next(j,PATH[f])] then x[f,next(j,PATH[f]),t]
else if t <= Tmin[f,next(j,PATH[f])]-1 then 0 else 1)) <= CapSect[j]
+ Q[j]*q[j,t] ;
```

```
s.t. ConnSectors { f in FLIGHTS, j in PATH[f] diff {last(PATH[f]),
member(N[f]-1,PATH[f])}, t in T[f,j] } : ((if t+ct[f,j] in
T[f,next(j,PATH[f])] then x[f,next(j,PATH[f]),t+ct[f,j]] else if
t+ct[f,j] <= Tmin[f,next(j,PATH[f])]-1 then 0 else 1)-x[f,j,t]) = 0 ;
```

```
s.t. ConnLastSector { f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j] :
j = member(N[f]-1,PATH[f]) } : ((if t+ct[f,j] in
T[f,next(j,PATH[f])] then x[f,next(j,PATH[f]),t+ct[f,j]] else if
t+ct[f,j] <= Tmin[f,next(j,PATH[f])]-1 then 0 else 1)-x[f,j,t])
<= 0 ;
```

```
s.t. CondC1 { j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in
TIME[j,f,ff] : (f,ff) in CONFLICTS[j] } : y[f,j,t] + (if
t+ct[f,j]-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t+ct[f,j]-Tin[j,f,ff]]
else 0) + (if Delta <= Tin[j,f,ff]-1 then (if t+Delta-Tin[j,f,ff]
in Tsect[f,j] then y[f,j,t+Delta-Tin[j,f,ff]] else 0) else 0) +
y[ff,j,t] + (if t+ct[ff,j]-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then
y[ff,j,t+ct[ff,j]-tin[j,ff,f]] else 0) + (if Delta <= tin[j,ff,f]-1
then (if t+Delta-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then
y[ff,j,t+Delta-tin[j,ff,f]] else 0) else 0) <= c[j,f,ff,t] + (if
Delta <= Tin[j,f,ff]-1 then 1 else 0) + (if Delta <= tin[j,ff,f]-1
then 1 else 0) + 3 ;
```

```
s.t. CondC2i { j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in
TIME[j,f,ff] : (f,ff) in CONFLICTS[j] } : y[f,j,t] + (if
t+ct[f,j]-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t+ct[f,j]-Tin[j,f,ff]]
else 0) + (if Delta <= Tin[j,f,ff]-1 then (if t+Delta-Tin[j,f,ff]
in Tsect[f,j] then y[f,j,t+Delta-Tin[j,f,ff]] else 0) else 0) +
y[ff,j,t] + (if t-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t-tin[j,ff,f]]
else 0) + (if delta <= ct[ff,j]-tin[j,ff,f]-1 then (if
t-delta+ct[ff,j]-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then
y[ff,j,t-delta+ct[ff,j]-tin[j,ff,f]] else 0) else 0) <= c[j,f,ff,t]
+ (if Delta <= Tin[j,f,ff]-1 then 1 else 0) + (if
delta <= ct[ff,j]-tin[j,ff,f]-1 then 1 else 0) + 3 ;
```

```
s.t. CondC2ii { j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in
TIME[j,f,ff] : (f,ff) in CONFLICTS[j] } : y[f,j,t] + (if
t-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t-Tin[j,f,ff]] else 0) +
(if delta <= ct[f,j]-Tin[j,f,ff]-1 then (if t-delta+ct[f,j]-Tin[j,f,ff]
in Tsect[f,j] then y[f,j,t-delta+ct[f,j]-Tin[j,f,ff]] else 0) else
0) + y[ff,j,t] + (if t+ct[ff,j]-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then
y[ff,j,t+ct[ff,j]-tin[j,ff,f]] else 0) + (if Delta <= tin[j,ff,f]-1
then (if t+Delta-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then
y[ff,j,t+Delta-tin[j,ff,f]] else 0) else 0) <= c[j,f,ff,t] + (if
delta <= ct[f,j]-Tin[j,f,ff]-1 then 1 else 0) + (if
Delta <= tin[j,ff,f]-1 then 1 else 0) + 3 ;
```

s.t. CondC3 { j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff] : (f,ff) in CONFLICTS[j] } : y[f,j,t] + (if t-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t-Tin[j,f,ff]] else 0) + (if delta <= ct[f,j]-Tin[j,f,ff]-1 then (if t-delta+ct[f,j]-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t-delta+ct[f,j]-Tin[j,f,ff]] else 0) else 0) + y[ff,j,t] + (if t-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t-tin[j,ff,f]] else 0) + (if delta <= ct[ff,j]-tin[j,ff,f]-1 then (if t-delta+ct[ff,j]-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t-delta+ct[ff,j]-tin[j,ff,f]] else 0) else 0) <= c[j,f,ff,t] + (if delta <= ct[f,j]-Tin[j,f,ff]-1 then 1 else 0) + (if delta <= ct[ff,j]-tin[j,ff,f]-1 then 1 else 0) + 3 ;

s.t. CapImpr { j in SECTORS, t in TIMES } : kk[j] >= sum{f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS : (f,ff) in CONFLICTS[j]} (if t in TIME[j,f,ff] then c[j,f,ff,t] else 0) - M[j]*(1-q[j,t]) ;

s.t. Nontrivialsol { f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j] : t=Tmax[f,j] } : x[f,j,t] = 1 ;

s.t. Constime { f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j] } : ((if t-1 in T[f,j] then x[f,j,t-1] else if t-1 <= Tmin[f,j]-1 then 0 else 1)-x[f,j,t]) <= 0 ;

Ringraziamenti

Cinque anni fa mettevo piede per la prima volta nelle aule di Torre Archimede e in questo giorno, invece, mi ritrovo a salutare, seppur virtualmente, i luoghi che ho imparato a chiamare casa. Questo traguardo scrive il finale di un capitolo importante, ma non si arriva a una meta se non per ripartire. E se è vero che andando si fa il cammino, spero, camminando, di trovare un giorno la mia strada.

A conclusione di questo percorso, la mia più sincera gratitudine va alla mia famiglia, ai miei genitori e ai miei fratelli, ai miei zii e alle mie cugine; grazie per l'affetto che ogni giorno mi dimostrate e per il supporto che non mi avete mai fatto mancare.

Grazie ai miei genitori Moreno e Margherita per la loro presenza e il loro sostegno, per avermi permesso di scegliere la mia strada, per avermi spronato a dare sempre il massimo e per avermi insegnato a vedere la bellezza nella semplicità. Papà, da te ho imparato che più delle parole, spesso superflue, valgono le azioni; grazie perché hai sempre fatto e sempre farai il tifo per me. Mamma, con il tuo esempio ho compreso cosa significa prendersi cura e agire sempre per il bene del prossimo; grazie per la tua pazienza e per il tuo amore incondizionato.

Grazie ai miei fratelli, che sono la parte migliore di me e la cosa più bella che mi sia mai capitata; spero che anche con il passare del tempo sapremo sempre contare uno sull'altro e mantenere quella complicità unica che ci lega e che ha un valore inestimabile. Michele, asseconda le tue passioni e vivi pienamente ogni momento; ho fiducia in te e sono sicura che raggiungerai traguardi importanti. Alberto, sii sempre te stesso e abbi il coraggio di seguire i tuoi sogni e le tue aspirazioni; credo in te e non vedo l'ora di vedere chi diventerai.

Un pensiero e un ringraziamento speciale va alle mie care nonne Natalina e Pierina, che anche se non camminano più al mio fianco certamente da qualche parte ancora e sempre sono; l'amore che mi avete donato è come fuoco che non si spegne e il ricordo dei vostri sorrisi mi accompagna in ogni momento.

Grazie agli amici vicini, compagni di avventure e di esperienze, che sanno starmi accanto rispettando i miei tempi e avendo la pazienza di aspettarmi quando il cuore mi porta all'attivismo, alla difesa delle cause che ritengo giuste e alla scelta di seguire ciò che mi rende felice; siete preziosi.

Grazie agli amici lontani, sparsi ai quattro angoli di questo mondo che pian piano ho imparato a esplorare e a conoscere; ho scoperto che la distanza non necessariamente impedisce di mantenere relazioni di amicizia autentiche e ho compreso che, anche con migliaia di chilometri a separare le persone, ci sono legami indissolubili che difficilmente possono venire spezzati.

Sono immensamente grata per tutti i voli su cui ho avuto la possibilità e la fortuna di imbarcarmi e che mi hanno portato in un altrove più o meno lontano; ad ogni viaggio il mondo si rimpicciolisce leggermente, le persone lontane diventano più vicine e il cuore si allarga un po' di più.

Un ringraziamento speciale va infine al Prof. Luigi De Giovanni per la pazienza e la piena disponibilità nei miei confronti; con gentilezza mi ha incoraggiato e con competenza ha saputo guidarmi verso questo traguardo finale, suggerendomi sempre preziosi consigli.

Riferimenti bibliografici

- [1] AMPL
<http://www.ampl.com/>
- [2] G. Andreatta, L. Capanna, L. De Giovanni, L. Righi, *Rapporto sul progetto di ricerca Follow-up di Optiframe*, Rapporto interno Consorzio Futuro in Ricerca, 2018
- [3] G. Andreatta, A. R. Odoni, O. Richetta, *Models for the Ground-Holding Problem*, Large-Scale Computation and Information Processing in Air Traffic Control: 125-168, Springer-Verlag, 1993
- [4] ATAG, Air Transport Action Group, *Aviation: Benefits Beyond Borders*
<https://aviationbenefits.org/downloads/aviation-benefits-beyond-borders-2020/>
- [5] A. Augustin, A. Alonso-Ayuso, L.F. Escudero, C. Pizarro, *On Air Traffic Flow Management with Rerouting. Part I: Deterministic Case*, European Journal of Operational Research 219 (1): 156-166, 2012
- [6] A. Augustin, A. Alonso-Ayuso, L.F. Escudero, C. Pizarro, *On Air Traffic Flow Management with Rerouting. Part II: Stochastic Case*, European Journal of Operational Research 219 (1): 167-177, 2012
- [7] D. Bertsimas, G. Lulli, A.R. Odoni, *An Integer Optimization Approach to Large-Scale Air Traffic Flow Management*, Operations Research 59 (1): 211-227, 2011
- [8] D. Bertsimas, S. Stock Patterson, *The Air Traffic Flow Management Problem with Enroute Capacities*, Operations Research 46 (3): 406-422, 1998
- [9] D. Bertsimas, S. Stock Patterson, *The Traffic Flow Management Rerouting Problem in Air Traffic Control: A Dynamic Network Flow Approach*, Transportation Science 34 (3): 239-255, 2000
- [10] V. Dal Sasso, F.D. Fomeni, G. Lulli, K. Zografos, *Planning efficient 4D trajectories in Air Traffic Flow Management*, European Journal of Operational Research 276 (2): 676-687, 2019

-
- [11] M. Di Summa, *Note del corso di Ottimizzazione Discreta*, Università degli Studi di Padova, 2015
- [12] M. Di Summa, *Note del corso di Ricerca Operativa*, Università degli Studi di Padova, 2011
- [13] A. Downey, J. Elkner, C. Meyers, *Pensare da informatico. Imparare con Python*, Green Tea Press, 2002
- [14] EUROCONTROL, *Demand Data Repository (DDR2)*
<https://www.eurocontrol.int/ddr>
- [15] EUROCONTROL, *Performance Review Report 2019*
<https://www.eurocontrol.int/publication/performance-review-report-prr-2019>
- [16] Eurostat
<https://ec.europa.eu/eurostat/web/transport/data/main-tables>
- [17] F.D. Fomeni, G. Lulli, K. Zografos, *An Optimization Model for Assigning 4D-Trajectories to Flights under the TBO Concept*, in Twelfth USA/Europe Air Traffic Management Research and Development Seminar (ATM2017): 26-30, Seattle, Washington, USA, 2017
- [18] E.P. Gilbo, *Airport Capacity: Representation, Estimation, Optimization*, IEEE Transactions on Control System Technology 1: 144-154, 1993
- [19] IATA, International Air Transport Association, *Air Transport Competitiveness in Italy*, 2019
<https://www.iata.org/en/about/worldwide/europe/competitiveness/italy/>
- [20] IATA, International Air Transport Association, *World Air Transport Statistics 2019*
<https://www.iata.org/contentassets/a686ff624550453e8bf0c9b3f7f0ab26/wats-2019-mediakit.pdf>
- [21] IATA, International Air Transport Association, *Recovery Delayed as International Travel Remains Locked Down*, Press Release n°63, 28 luglio 2020
<https://www.iata.org/en/pressroom/pr/2020-07-28-02/>
- [22] IBM, *Cplex Guide*
<http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/>
- [23] IBM, *CPLEX User's Manual. Version 12.1*, 2015

- [24] ICAO, International Civil Aviation Organization, *Global Air Traffic Management Operational Concept*, Springer International Publishing, 2005
- [25] M. Helme, *Reducing Air Traffic Flow Delay in a space-time network*, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 236-242, 1992
- [26] K. Lindsday, E. Boyd, R. Burlingame, *Traffic Flow Management Modeling with the Time Assignment Model*, Air Traffic Control Quarterly 1 (3): 255-267, 1993
- [27] NATS, National Air Traffic Services, *Introduction to Airspace*
<https://www.nats.aero/ae-home/introduction-to-airspace/>
- [28] A.R. Odoni, *The Flow Management Problem in Air Traffic Control*, in A.R. Odoni, L. Bianco, G. Szego, Flow Control of Congested Networks, Springer-Verlag, 1987
- [29] SESAR JU, Single European Sky ATM Research Joint Undertaking
<https://www.sesarju.eu/>
- [30] E. Sunil, J. Hoekstra, J. Ellerbroek, F. Bussink, A. Vidosavljevic et al., *The Influence of Traffic Structure on Airspace Capacity*, 7th International Conference on Research in Air Transportation, Philadelphia (USA), 2016
- [31] A. Quarteroni, F. Saleri, *Introduzione al calcolo scientifico. Esercizi e problemi risolti con MATLAB*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2006
- [32] VATITA, Organizzazione Virtual Area Control Center Italiana, *Italian Airspace Structure*
<https://www.vatita.net/drupal/airspace/fir-milano>
- [33] P.B. Vranas, D. Bertsimas, A.R. Odoni, *The Multi-Airport Ground Holding Problem in Air Traffic Control*, Operation Research 42: 249-261, 1994

