UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Vortici quantizzati nei superconduttori e superfluidi bidimensionali

Relatore

Prof. Dr. Luca Salasnich

Laureando

Fabio Billiato

Anno Accademico 2019/2020

Abstract

Superfluidità e superconduttività sono fenomeni noti da circa un secolo che avvengono a temperature generalmente molto basse, che suscitano ancora oggi un grande interesse. Per sistemi tridimensionali la transizione alla fase superfluida/superconduttrice è legata alla condensazione di Bose Einstein. In sistemi bidimensionali la condensazione di Bose Einstein non può avvenire, e la transizione allo stato superfluido/superconduttore è di diversa natura ed è dovuta a particolari fluttuazioni termiche dette vortici quantizzati, tale transizione è nota come BKT e si applica a svariati sistemi bidimensionali. La transizione BKT fu un primo esempio dell' importanza di concetti come i vortici quantizzati, che oggi rappresentano un esempio di ciò che è noto come difetto topologico (topological defect), per cui la struttura topologica del sistema risulta fondamentale nello studio delle proprietà dello stesso. In questa tesi studieremo le proprietà dei vortici quantizzati e della transizione BKT adattandola per film superfluidi neutri He4 o per i più recenti sistemi di atomi ultrafreddi che rappresentano ad oggi un ambito di ricerca di grande interesse.

Indice

1 Introduzione **1**

2 Vortici quantizzati nel film superfluido **3**
2.1 Configurazioni a singolo vortice 4
2.1.1 Derivazione della transizione BKT a singolo vortice 4
2.2 Configurazioni a più vortici 5
2.2.1 Calcolo della funzione di Green 7
2.3 Energia e funzione di partizione di un sistema di vortici 8
2.3.1 Energia del sistema di vortici 8
2.3.2 Funzione di partizione del sistema di vortici 9

3 Transizione BKT nel film superfluido **11**
3.1 Rigidità rinormalizzata 11
3.1.1 Gruppo di rinormalizzazione per il sistema di vortici 13
3.1.2 Transizione BKT 15
3.2 Conclusioni e verifiche sperimentali 16

1 Introduzione

La superconduttività, scoperta nel 1911 dal fisco olandese Onnes [1], è il fenomeno per cui alcuni materiali, al di sotto di temperature solitamente dell'ordine di $\sim 1 - 10K$, presentano resistenza elettrica nulla. Un fenomeno analogo è la superfluidità, scoperta nel 1938 da Kapitza [2], in cui è la viscosità di un fluido ad essere nulla sotto una certa temperatura, comunque dell' ordine del Kelvin.

Alcune proprietà di superfluidi e superconduttori possono essere spiegate dalla teoria macroscopica di Ginzburg e Landau [3], sviluppata nel 1950 a partire dalla precedente teoria di Landau per le transizioni di fase [4]. Nell'ottica di Landau, una transizione di fase è caratterizzata introducendo una variabile termodinamica nulla prima della transizione e non nulla subito dopo, detta parametro d'ordine. Un esempio è la magnetizzazione nei ferromagneti. Si assume poi che l'energia libera F del sistema si possa esprimere in funzione del parametro d'ordine e al più altre variabili termodinamiche.

Per superfluidi e superconduttori Ginzburg e Landau basandosi su un analogia con la condensazione di Bose-Einstein, assumono come parametro d'ordine l'ampiezza complessa ψ di una funzione d'onda di singola particella Ψ che descrive lo stato superfluido ed è normalizzata come:

$$\int d^3r|\Psi(\mathbf{r})|^2 = N_s = n_s V \;\; \rightarrow \;\; |\psi|^2 \propto n_s \tag{1}$$

N_s è il numero di particelle nella fase superfluida[1]. Assumendo F differenziabile in $|\psi|$ allora per piccoli valori del parametro d'ordine vale, cioè vicino alla transizione:

$$F = F(|\psi|, T) \approx \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\psi|^4 + o(|\psi|^6) \tag{2}$$

Dove α, β dipendono dalla temperatura. In questo caso $\beta > 0$ e a seconda del segno di α l'energia libera assume andamenti diversi, in particolare per $\alpha < 0$ l'energia libera presenta un minimo se $|\psi| \neq 0$ ed è presente fase superfluida, se $\alpha > 0$ l'energia libera ha un minimo se $|\psi| = 0$ dunque, la transizione di fase avviene alla temperatura tale per cui $\alpha = 0$, si veda la Figura 1.

Ginzburg e Landau generalizzarono la teoria originale introducendo un parametro d'ordine variabile nello spazio $\psi(\mathbf{r})$. Nel farlo, postularono che l'energia libera in Eq. (2) diventi un funzionale di $\psi(\mathbf{r})$ con l'aggiunta di un nuovo termine [3],

$$F[\psi] = \int d^3r \left(\alpha|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi(\mathbf{r})|^4 + \gamma|\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + o(|\psi|^6) \right) \tag{3}$$

Il gradiente tiene conto del costo in energia libera associato alle disomogeneità del parametro d'ordine, si richiede $\gamma > 0$ in modo che il sistema non tenda spontaneamente a configurazioni fortemente disomogenee. Interpretando $\psi(\mathbf{r})$ come ad una funzione d'onda, il termine che contiene il gradiente può essere ricondotto al termine cinetico di una equazione di Shrodinger, in tal caso si trova che $\gamma = \frac{\hbar^2}{2m}$. Il funzionale trovato è detto funzionale di Landau ed è valido per sistemi composti da particelle neutre[2]. É importante osservare che F è l'energia libera del sistema soltanto quando assume il suo valore minimo, corrispondente al minimo variazionale ψ_0. Se si considerano fluttuazioni $\delta\psi$ del

[1] Per i superconduttori si assume siano gli elettroni ad entrare in una fase superfluida.

[2] Per sistemi composti da particelle cariche (superconduttori) è necessario introdurre dei termini di interazione tra le particelle e il campo elettromagnetico.

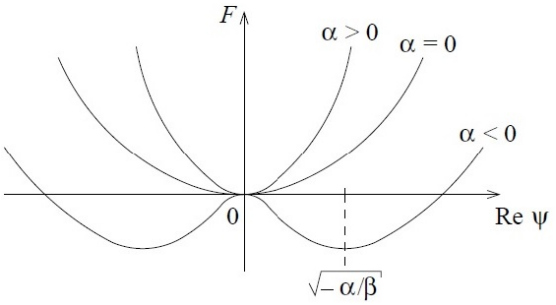

Figura 1: Energia libera F in funzione della parte reale del parametro d'ordine ψ per tre valori del coefficiente α. Figura adattata da [5].

parametro d'ordine attorno ψ_0, allora $F[\delta\psi]$ descrive il costo energetico associato a tali fluttuazioni. Con questo approccio Abrikosov [6] mostrò l'esistenza di due tipi di superconduttori, detti di tipo I e II. Per i tipo II in presenza di un campo magnetico esterno di opportuna intensità mostrano delle zone, delle linee, in cui il campo magnetico esterno penetra [3]. Abrikosov mostrò che per ogni linea il flusso magnetico è quantizzato e che si dispongono in un reticolo, detto reticolo di Abrikosov.

Si osservarono strutture simili ai reticoli di Abrikosov anche nell' $He4$ superfluido [7] o in sistemi di atomi ultrafreddi condensati [8]. In questo caso il reticolo è generato da vortici quantizzati, concetto introdotto per la prima volta da Onsanger nel 1947 [9] e successivamente perfezionato da Feynman [10]. Esempi di vortici quantizzati osservati in alcuni dei sistemi citati sono mostrati in Figura (2)

A partire dal 1970, Berezinskii, Kosterlitz e Thoules [11, 12, 13], studiando il modello XY 2d, mostrarono come i vortici quantizzati inducono una particolare transizione di fase nel sistema detta transizione BKT. Questo fu un primo esempio dell' importanza della topologia nell' ambito della materia condensata, che tutt'oggi rappresenta un vasto campo di ricerca.

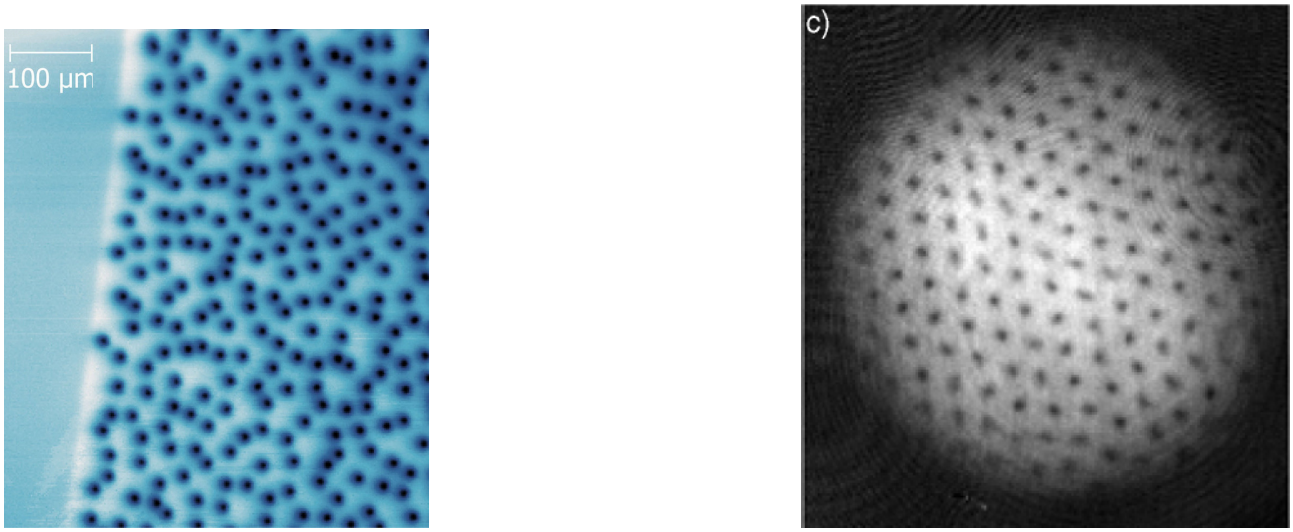

Figura 2: Vortici quantizzati, a sinistra in un film superconduttore di tipo II (YBCO) mantenuto a $T = 4K$ ed immerso in un campo magnetico $B = 6.93\mu T$, ottenuto con un microscopio a SQUID. I punti scuri rappresentano le zone in cui il campo magnetico penetra nel superconduttore. A destra, vortici in un condensato di Bose Einstein rotante disposti secondo il reticolo di Abrikosov, immagini adattate da [14, 8].

.

[3] Nei superconduttori di tipo I e per bassi valori del campo esterno nei tipo II, il campo all' interno del superconduttore è ovunque nullo per l'effetto Meissner.

2 Vortici quantizzati nel film superfluido

Come detto nell' introduzione, a temperatura non nulla, il parametro d'ordine del sistema può fluttuare attorno al minimo variazionale. Per studiare i vortici nel sistema è sufficiente studiare le fluttuazioni della fase del parametro d'ordine, considerandone l'ampiezza costante[4] [5]. Introducendo il campo scalare $\theta(\mathbf{r})$ per descrivere le fluttuazioni della fase, allora il parametro d'ordine e il funzionale di Landau in Eq. (3) diventano:

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi_0| e^{i(\theta_0+\theta(\mathbf{r}))} \quad \rightarrow \quad F[\psi] = F[\psi_0] - |\psi_0|^2 \gamma \int d^2r |\nabla\theta(\mathbf{r})|^2 \tag{4}$$

Il secondo termine nella equazione così trovata esprime il costo energetico associato alla fluttuazione $\theta(\mathbf{r})$ della fase ed è la stessa espressione studiata da Kosterlitz [12], per il modello XY nel limite continuo. Si definisce poi il parametro J, detto rigidità, come:

$$J = 2|\psi_0|^2\gamma = n_s \frac{\hbar^2}{m} = \rho_s \frac{\hbar^2}{m^2} \tag{5}$$

Dove si sfrutta la definizione di γ e $|\psi_0|^2$ e si introduce la densità $\rho_s = m n_s$.

Vediamo ora come si possono descrivere configurazioni vorticose nel sistema. Consideriamo un generico cammino chiuso $\mathcal{C}$, il parametro d'ordine può variare lungo tale cammino ma deve assumere lo stesso valore dopo aver completato un giro, per soddisfare questa richiesta è sufficiente che la fase θ del parametro d'ordine, cambi al più di un fattore $2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, come mostrato in Figura 3, in tal caso allora è vero che:

$$\oint_{\mathcal{C}} \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{C}} d\theta = 2\pi k \quad \text{con:} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

Assumendo però che il campo $\theta(\mathbf{r})$ sia definito e differenziabile in ogni punto del sistema, allora il campo $\nabla\theta$, essendo un campo gradiente, dovrebbe avere integrale di linea nullo lungo ogni percorso chiuso, ma dalla Eq. (6) si vede che esistono configurazioni per cui la circuitazione di $\nabla\theta$ non è nulla ma può assumere valori quantizzati, in questi casi deve esistere almeno una singolarità puntiforme[5] per θ all' interno del cammino $\mathcal{C}$. La singolarità così introdotta rappresenta il centro (core) del vortice e l'Eq. (6), per un generico cammino che contiene il core, è la condizione che definisce un vortice di intensità (o carica) quantizzata: $2\pi k$.

Interpretando il parametro d'ordine ψ come ad una funzione d'onda per le particelle nella fase superfluida, allora $\nabla\theta$ è proporzionale al campo di velocità del superfluido [15], in tal caso la condizione (6) è esattamente quella che definisce il campo di velocità di un fluido in presenza di un vortice.

Le configurazioni vorticose sono topologicamente distinte dalle fluttuazioni descritte da un campo $\nabla\theta$ regolare con circuitazione ovunque nulla, nel senso che non esistono trasformazioni continue che portano una configurazione vorticosa ad una regolare. Dovendo compiere un'operazione non continua sul sistema, si ha una certa barriera energetica da superare per distruggere un vortice e questo rende i vortici delle fluttuazioni stabili [16].

[4] Come vedremo dovremo tenere conto di questa approssimazione in seguito.

[5] In un sistema tridimensionale il core del vortice può essere una linea chiusa o che termina agli estremi del sistema.

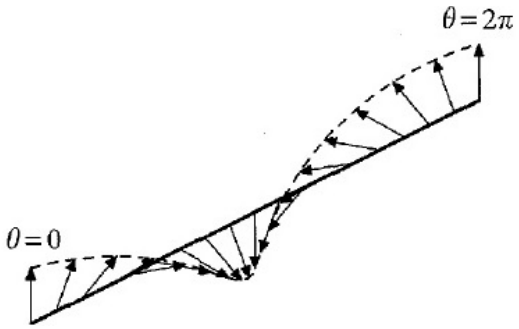

Figura 3: Variazione della fase θ lungo $\mathcal{C}$ per un vortice con numero di avvolgimento unitario [15].

2.1 Configurazioni a singolo vortice

Consideriamo un singolo vortice di carica $2\pi k$ centrato nell' origine e introduciamo delle coordinate polari centrate nel core del vortice, possiamo assumere che il campo $\nabla\theta$ abbia simmetria sferica e sia ovunque ortogonale alla direzione radiale. Con queste ipotesi e imponendo la condizione (6) considerando un cammino circolare di raggio r e centrato nel core del vortice $\mathcal{C}_r$, è possibile calcolare il campo $\nabla\theta$ come:

$$\oint_{\mathcal{C}_r} \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} r d\phi \, |\nabla\theta(r)| = 2\pi r |\nabla\theta(r)| = 2\pi k \;\; \rightarrow \;\; \nabla\theta = \frac{k}{r}\hat{e}_\phi \tag{7}$$

Dove $\hat{e_\phi} = \hat{z} \times \hat{r}$ è il versore ortogonale al versore radiale. Nota la forma del campo di velocità per un singolo vortice, è possibile calcolare l'energia della fluttuazione associata sostituendo il campo $\nabla\theta$ appena trovato nella Eq. (4):

$$E_{vor} = \frac{J}{2}\int d^2r |\nabla\theta(r)|^2 = \frac{J}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_\xi^L r dr \frac{k^2}{r^2} = \pi J k^2 ln\left(\frac{L}{\xi}\right) \tag{8}$$

A causa dell' andamento $|\nabla\theta| \propto \frac{1}{r}$ l'integrale diverge sia a distanze prossime al core del vortice, sia a grandi distanze da esso. La divergenza a grandi distanze può essere eliminata ricordando che il sistema ha dimensioni finite L. La divergenza a brevi distanze può essere eliminata soltanto osservando che, avvicinandosi al core del vortice il modulo del parametro d'ordine passa da un valore costante a zero in modo continuo[6]. L'azzeramento del parametro d'ordine è parametrizzato da una costante ξ che esprime la distanza dal core entro cui il parametro d'ordine riacquista il suo valore costante. Il modello utilizzato per il calcolo dell' energia è allora adatto fino ad una distanza pari a ξ dal core. Introducendo questo limite inferiore si elimina la divergenza a piccole distanze. Chiaramente sarà necessario introdurre un contributo $E_{cor}(\xi)$, che tiene conto dell' energia del core e che dipende dalla struttura microscopica del sistema considerato.

2.1.1 Derivazione della transizione BKT a singolo vortice

L'energia associata ad un singolo vortice cresce logaritmicamente con le dimensioni del sistema, portando ad un elevato costo energetico. Considerando però l'energia libera, ricordando che l'entropia

[6]Questa affermazione non è ovvia ma può essere ottenuta studiando il modello di Ginzburg Landau senza considerare un parametro d'ordine di modulo costante.

è data dal logaritmo del numero di punti in cui si può posizionare il core, cioè $S = 2k_B ln\left(\frac{L}{\xi}\right)$,

$$F = E - TS = ln\left(\frac{L}{\xi}\right)\left(\pi J k^2 - 2k_B T\right) \tag{9}$$

Si vede come per $T > \frac{\pi J}{2k_B}$, il contributo all' energia libera totale apportato dal vortice è negativo, allora ad alta temperatura la presenza di vortici isolati diminuisce l'energia libera del sistema, portando ad una configurazione più stabile. Per $T < \frac{\pi J}{2k_B}$ l'energia libera del singolo vortice è positiva e il sistema non è favorito a creare vortici isolati. Da questo argomento approssimativo è possibile intuire l'esistenza di una temperatura critica,

$$T_c = \frac{\pi J}{2k_B} \tag{10}$$

associata ad una transizione di fase per cui si passa da una fase in cui non sono presenti vortici isolati, ad una in cui una tale configurazione è favorita [12]. Per studiare meglio questa transizione è necessario però considerare fluttuazioni a più vortici.

2.2 Configurazioni a più vortici

Procediamo al calcolo dell' energia di un generico sistema di N vortici di carica $2\pi k_i$ e core in $\mathbf{r}_i$. Si introduce la quantità:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i 2\pi k_i \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{11}$$

Che rappresenta una densità di vorticosità [13] infatti data una regione S del piano:

$$\int_S d^2 r \rho(\mathbf{r}) = \oint_{\partial S} \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i \in S} 2\pi k_i \tag{12}$$

Per calcolare $\nabla\theta$ sfruttiamo una analogia con l'elettrostatica, se interpretiamo $\rho(\mathbf{r})$ come ad una densità di carica[7] e $\phi(\mathbf{r})$ come al potenziale scalare elettrostatico allora il campo $-\nabla\phi(\mathbf{r})$ descriverebbe il campo elettrico generato dalla densità di carica ρ. -$\nabla\phi$ soddisfa alla legge di gauss, per cui:

$$-\int_S d^2 r \rho(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} \nabla\phi \cdot d\mathbf{n} = \oint_{\partial S} (\hat{z} \times \nabla\phi) \cdot (\hat{z} \times d\mathbf{n}) = \oint_{\partial S} (\hat{z} \times \nabla\phi) \cdot d\mathbf{l} \tag{13}$$

Dove $\hat{z}$ è ortogonale al piano che contiene il film e $d\mathbf{n} = d\mathbf{l} \times \hat{z}$ è l'elemento di superficie uscente dal bordo di S. Dunque se ϕ è il potenziale elettrico generato dalla densità di cariche ρ, allora il campo vettoriale $(-\hat{z} \times \nabla\phi)$ soddisfa alla stessa condizione che definisce il campo $\nabla\theta$ generato dalla densità di vortici ρ (Eq. (6). ϕ soddisfa alla equazione di Poisson nel piano: $\nabla^2\phi = -\rho$, allora data la densità di vortici è possibile determinare ϕ e quindi l'energia del sistema di vortici dalla Eq. (4),

$$E_{vor} = -\frac{J}{2}\int d^2 r |-\hat{z} \times \nabla\phi|^2 = -\frac{J}{2}\int d^2 r |\nabla\phi|^2 \tag{14}$$

[7] Si potrebbe anche interpretare ρ come ad una densità di corrente ortogonale al piano, in tal caso il campo $\nabla\theta$ cercato è il campo magnetico generato, si veda [16].

Dove si sfrutta il fatto che $\hat{z}$ e $\nabla\phi$ sono ortogonali tra loro. Per completare il calcolo è necessario risolvere una equazione del tipo:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\delta^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{15}$$

Che descrive il campo generato da un vortice di carica unitaria con centro in $\mathbf{r}'$. La soluzione per una generica densità di vortici ρ si ottiene combinando linearmente diverse soluzioni di singolo vortice[8].

Possiamo anche risolvere l'equazione $\nabla^2\theta(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})$ eseguendone la trasformata di Fourier[9], nello spazio dei momenti l'equazione diventa allora: $k^2\tilde{\theta}(\mathbf{k}) = \tilde{\rho}(\mathbf{k})$. Possiamo allora scrivere la soluzione $\theta(\mathbf{r})$ equivalentemente come:

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_i 2\pi k_i G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) = \int d^2r' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k})}{k^2}e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}} \tag{16}$$

Dove l'ultima espressione è la riscrittura di $\theta(\mathbf{r})$ come integrale di Fourier, con trasformata $\tilde{\theta}(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k})}{k^2}$. Per calcolare l'energia del sistema di vortici osserviamo che:

$$E_{vor} = -\frac{J}{2}\int d^2r|\nabla\theta|^2 \tag{17}$$

$$= -\frac{J}{2}\int d^2r\left(\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}(i\mathbf{k})\tilde{\theta}(\vec{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right)\cdot\left(\int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2}(i\mathbf{k}')\tilde{\theta}(\mathbf{k}')e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}\right) \tag{18}$$

$$= \frac{J}{2(2\pi)^4}\int d^2k d^2k'\ \tilde{\theta}(\mathbf{k})\tilde{\theta}(\mathbf{k}')\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'\int d^2r e^{i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \tag{19}$$

$$= \frac{J}{2(2\pi)^2}\int d^2k d^2k'\ \tilde{\theta}(\mathbf{k})\tilde{\theta}(\mathbf{k}')\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'\delta^{(2)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \tag{20}$$

$$= \frac{J}{2(2\pi)^2}\int d^2k\ \tilde{\theta}(\mathbf{k})\tilde{\theta}(-\mathbf{k})k^2 = \frac{J}{2(2\pi)^2}\int d^2k\frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k})\tilde{\rho}(-\mathbf{k})}{k^2} \tag{21}$$

Si è sfruttata l'identità $\int d^2r exp(-i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{k}')) = (2\pi)^2\delta^{(2)}(k+k')$ oltre che l'espressione della trasformata del campo θ e del suo gradiente. Possiamo poi calcolare E_{vor} in funzione della densità ρ anzichè della sua trasformata $\tilde{\rho}$ sfruttando l'uguaglianza nella Eq. (16), infatti si osserva che:

$$\int d^2r\left(\int d^2r' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\right)\rho(\mathbf{r}) = \int d^2r\left(\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k})}{k^2}e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}\right)\rho(\mathbf{r}) \tag{22}$$

$$= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k})}{k^2}\left(\int d^2r\rho(\mathbf{r})e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}\right) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k})\tilde{\rho}(-\mathbf{k})}{k^2} \tag{23}$$

Per l'energia associata alle fluttuazioni del parametro d'ordine descritte dalla densità di vorticosità ρ, si è ottenuto che:

$$E_{vor} = \frac{J}{2}\int d^2r d^2r' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}') \tag{24}$$

L'energia totale del sistema di vortici è ottenuta sommando a questa espressione l'energia associata ai core dei singoli vortici. Rimane ora da determinare la funzione $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, soluzione della Eq. (15). G è la funzione di Green per l'operatore di Laplace nel piano.

[8] Si sfrutta la linearità della equazione $\nabla^2\phi = \rho$ e il fatto che ρ è una combinazione lineare di delta.

[9] Definisco la trasformata di Fourier come: $\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^2r f(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}$.

2.2.1 Calcolo della funzione di Green

L'equazione da risolvere è $\nabla^2 G(\mathbf{r}) = -\delta^{(2)}(\mathbf{r})$, trasformando di entrambi i membri si ottiene l'equazione nello spazio dei momenti: $-k^2\tilde{G}(\mathbf{k}) = -1$, la funzione di Green è allora calcolata come:

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}}{k^2} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\frac{2\pi}{L}}^{\frac{2\pi}{\xi}} \frac{kdk}{(2\pi)^2}\frac{e^{irkcos(\phi)}}{k^2} \tag{25}$$

Dove nell'ultimo passaggio si sono introdotte delle coordinate polari nel piano con angolo ϕ rispetto alla direzione identificata da $\mathbf{r}$. L'integrale nella variabile radiale k è limitato a causa delle dimensioni finite del sistema e della presenza del limite inferiore ξ alla validità del modello[10], grazie a questi vincoli l'integrale è ben definito ed è dato da:

$$G(r) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\frac{2\pi}{L}}^{\frac{2\pi}{\xi}} \frac{kdk}{(2\pi)^2}\frac{e^{irkcos(\phi)}}{k^2} \tag{26}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\frac{2\pi}{L}}^{\frac{2\pi}{\xi}} \frac{dk}{k}\int_0^{2\pi} d\phi\Big(cos\big(krcos(\phi)\big) + \underbrace{isin\big(krcos(\phi)\big)}_{0}\Big) \tag{27}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\frac{2\pi}{L}}^{\frac{2\pi}{\xi}} \frac{dk}{k}\int_0^{2\pi} d\phi\, cos\big(krcos(\phi)\big) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\frac{2\pi}{L}}^{\frac{2\pi}{\xi}} \frac{dk}{k}(2\pi)J_0(kr) \tag{28}$$

Dove si è sfruttato che $sin\big(krcos(\phi)\big)$ è dispari se $\phi \to \phi + \pi$ dunque il suo integrale è nullo e che, l'integrale in $d\phi$ del coseno introduce la funzione di Bessel di ordine 0 a meno di un fattore numerico $2\pi J_0(kr)$, si veda [17]. Posto $z = kr$ si ricorda che $J_0(kr)$ ammette le seguenti espansioni note [17]:

$$\begin{cases} J_0(z) = 1 - \frac{1}{4}z^2 + o(z^4) \text{ se: } z \ll 1 \\ J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\big(cos(z - \frac{\pi}{4}) + o(z^{-1})\big) \text{ se: } z \gg 1 \end{cases} \tag{29}$$

Sfruttando queste espansioni si vede che $\frac{J_0(z)}{z}$ è integrabile nel limite $z \to +\infty$ mentre $\frac{1-J_0(z)}{z}$ è integrabile nel limite $z \to 0$. Il calcolo della funzione di Green è allora completato calcolando il seguente integrale, separando le componenti divergenti da quelle finite e trascurando queste ultime [18], con buona approssimazione vale:

$$G(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{2\pi r}{L}}^{\frac{2\pi r}{\xi}} dz\frac{J_0(z)}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{2\pi r}{L}}^{\frac{2\pi r}{\xi}} dz\left(\frac{1}{z} - \frac{1 - J_0(z)}{z}\right) \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{2\pi r}{L}}^{\frac{2\pi r}{\xi}} \frac{dz}{z} - \int_{\frac{2\pi r}{L}}^{1} dz\frac{1 - J_0(z)}{z} - \int_1^{\frac{2\pi r}{\xi}} dz\left(\frac{1}{z} - \frac{J_0(z)}{z}\right) \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[ln\left(\frac{L}{\xi}\right) - ln\left(\frac{r}{\xi}\right) + const.\right] \tag{32}$$

[10] L'idea è che le onde piane $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ utilizzate nella scomposizione di Fourier non possono avere lunghezza d'onda maggiore delle dimensioni del sistema o minore della distanza ξ poichè, come già discusso, sotto tali distanze dal core del vortice il modello a parametro d'ordine di modulo costante non è più adatto.

Osserviamo che per un vortice di carica unitaria si ha: $-\hat{z} \times \nabla G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{r}$ che è il campo generato da un vortice centrato nell' origine e di carica unitaria.

2.3 Energia e funzione di partizione di un sistema di vortici

2.3.1 Energia del sistema di vortici

Nota la funzione di Green è possibile calcolare l'energia associata alla fluttuazione descritta dal campo $\theta(\mathbf{r})$, generato da $\rho(\mathbf{r})$. Sostituendo nella (24) la funzione di Green trovata, si ottiene:

$$E_{vor} = \frac{J}{2} \int d^2 r_1 d^2 r_2 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2) \tag{33}$$

$$= \frac{J}{4\pi} \left[\int d^2 r \rho(\mathbf{r}) \right]^2 ln\left(\frac{L}{\xi}\right) - \frac{J}{4\pi} \int_{|r_1 - r_2| > \xi} d^2 r_1 d^2 r_2 ln\left(\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{\xi}\right) \rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2) \tag{34}$$

Il primo termine cresce con il logaritmo delle dimensioni del sistema, come accadeva per l'energia del singolo vortice, e può essere eliminato richiedendo che il sistema abbia vorticità totale nulla [12, 13], nel caso del film superfluido questo equivale a richiedere che il momento angolare associato alla fase superfluida sia nullo. Il contributo rimanente è l'energia di interazione fra i vortici e deve essere calcolato tenendo conto del limite inferiore ξ, che limita la distanza minima tra due vortici.

Ricordando la forma esplicita di $\rho(\mathbf{r})$ in Eq. (11) e aggiungendo il contributo energetico dei core dei vortici (E_{cor}) si ricava l'energia totale del sistema di vortici, nell' ipotesi di vorticità nulla come:

$$E_{vor} = -2\pi J \sum_{i<j} k_i k_j ln\left(\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{\xi}\right) + E_{cor} \sum_i (k_i)^2 \tag{35}$$

Le configurazioni a vorticosità globalmente nulla e composte da vortici di carica piccola, sono energeticamente favorite. Dall' energia appena trovata è possibile interpretare il sistema di vortici come ad un gas di particelle cariche interagenti, l'interazione è descritta da un potenziale che cresce con il logaritmo della separazione tra i vortici e produce una forza inversamente proporzionale alla separazione, come mostrato in Figura 4. Per vortici di carica dello stesso segno $k_1 k_2 > 0$ la forza è repulsiva, per vortici di carica opposta $k_1 k_2 < 0$ è attrattiva. Per questo motivo spesso ci si riferisce al sistema di vortici come coulomb gas [16].

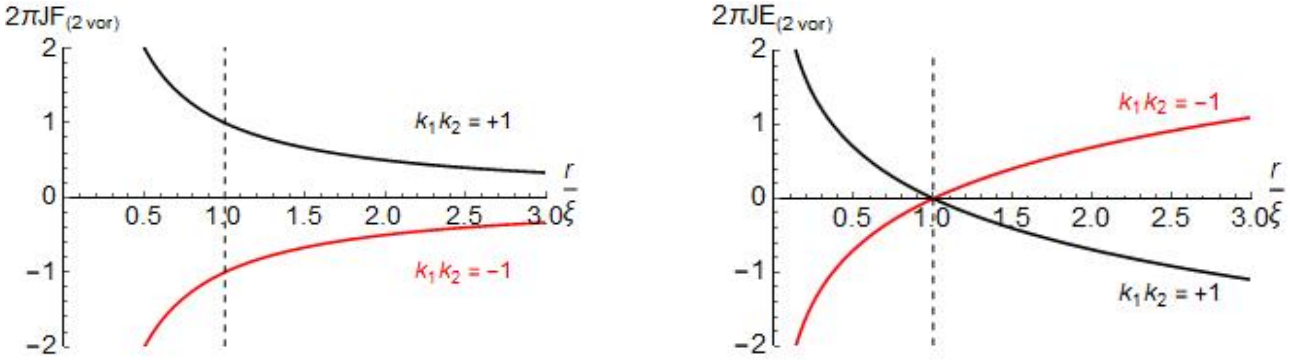

Figura 4: Andamento della forza F_{2vor} e dell' energia di interazione E_{2vor} tra due vortici con $k = \pm 1$ in funzione della loro separazione, tali andamenti sono validi solo per distanze $r > \xi$.

2.3.2 Funzione di partizione del sistema di vortici

Si prosegue con il calcolo della funzione di partizione associata al sistema di vortici, si riscrive il campo θ separando la parte regolare $\nabla\theta_s$ che origina le fluttuazioni dette spin waves, dalla parte che origina i vortici che scriviamo come: $(-\hat{z} \times \nabla\theta_v)$ si vedano le relazioni: (13), dove θ_v soddisfa alla equazione $\nabla^2\theta_v = -\rho$. Possiamo allora riscrivere l'energia delle fluttuazioni in Eq. (4) come:

$$E - F[\psi_0] = -\frac{J}{2}\int d^2r|\nabla\theta_s - \hat{z} \times \nabla\theta_v|^2 = -\frac{J}{2}\int d^2r\Big(|\nabla\theta_s|^2 + |\nabla\theta_v|^2 - 2\nabla\theta_s \cdot \hat{z} \times \nabla\theta_v\Big) \quad (36)$$

Il doppio prodotto può essere riscritto come:

$$\nabla\theta_s \cdot \hat{z} \times \nabla\theta_v = \nabla\theta_s \cdot \nabla \times (\hat{z}\theta_v) = \nabla \cdot \big(\theta_s\nabla \times (\hat{z}\theta_v)\big) - \theta_s\nabla \cdot \big(\nabla \times (\hat{z}\theta_v)\big) \quad (37)$$

Il secondo termine è una divergenza di un rotore ed è quindi nullo mentre l'integrale del primo termine dà contributo nullo sfruttando il teorema di gauss e nell' ipotesi che θ si annulli al bordo [12, 13], questa ipotesi nel caso del film superfluido, garantisce che la fase superfluida abbia velocità media nulla. Il contributo delle spin waves e dei vortici è allora disaccoppiato per cui vale:

$$E_{tot} = E_{sw} + E_{vor} \;\rightarrow\; \mathcal{Z}_{tot} = \mathcal{Z}_{sw}\mathcal{Z}_{vor} \quad (38)$$

Dove E_{vor} è quella mostrata in Eq. (35). Possiamo allora calcolare $\mathcal{Z}_{vor}$ osservando che questa è la funzione di partizione Gran Canonica di un sistema di particelle (vortici) a potenziale chimico fissato E_{cor}, ci sarà allora una sommatoria su tutte le possibili combinazioni di N vortici di cariche $\{k_i\}$ vincolata dalla condizione di vorticità nulla e un integrale su tutte le possibili configurazioni spaziali dei vortici, concretamente:

$$\mathcal{Z}_{vor} = \sum_{\{k_i\},\sum k_i=0}{}' (y)^N \int \prod_{i=1}^{N} \frac{d^2r_i}{\xi^2} exp\Big[2\pi\beta J \sum_{i<j} k_i k_j ln\Big(\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{\xi}\Big)\Big] \quad (39)$$

Dove $y = e^{-\beta E_{cor}}$. se ci si limita a configurazioni in cui sono presenti vortici con $k_i = \pm 1$, questa assunzione è giustificata dal fatto che tali vortici sono associati al minor costo energetico per essere creati [13], allora nell' ipotesi di vorticità totale nulla saranno presenti sempre un numero pari di vortici e $\sum_i k_i^2 = N$. Nel seguito lavoreremo con quest'ultima ipotesi. newpage

3 Transizione BKT nel film superfluido

A bassa temperatura, piccola fugacità y, nel sistema sono presenti solo coppie di vortici di carica opposta a formare dei dipoli, aumentando la temperatura si ha la formazione di più dipoli di lunghezza crescente [12], sopra una certa temperatura i dipoli si sciolgono e si forma un plasma di vortici liberi.

Questo tipo di transizione può essere immaginata come il passaggio da una fase dielettrica/isolante a una fase conduttrice/plasma composta da cariche (i vortici) liberi [13]. Le due fasi possiedono proprietà fisiche diverse e questo ci permette di distinguerle, ad esempio studiando come varia un campo elettrico esterno E all'interno del sistema. Nel caso del film di elio non è facile trovare un analogo del campo elettrico, ma è comunque possibile sfruttare questa idea anche per questo sistema.

In presenza di dielettrico, l'interazione tra due cariche di prova viene modificata, tramite l'introduzione di una costante dielettrica ϵ a causa della polarizzazione del dielettrico. Considereremo due cariche (vortici) di prova e ne studieremo l'interazione quando nel sistema sono presenti altri vortici [19], che supporremo essere organizzati in dipoli. Troveremo che l'interazione tra i vortici di prova viene modificata tramite l'introduzione di una nuova rigidità J_{eff} e che questo meccanismo porta alla transizione di fase ipotizzata in precedenza. Esistono altri modi noti per ricavare J_{eff} [16, 13].

3.1 Rigidità rinormalizzata

Consideriamo due vortici di carica 2π e segno opposto, posti in $\mathbf{x}_1$ ed $\mathbf{x}_2$, vogliamo trovare l'interazione effettiva E_{eff} quando tra le due cariche di prova sono presenti altri vortici[11]. Studieremo questo problema perturbativamente in y e quindi ipotizzando che nel sistema siano presenti pochi vortici. Per trovare E_{eff} calcoliamo prima la funzione di partizione associata ai due vortici di prova:

$$\mathcal{Z}' = \iint \frac{d^2x_1}{\xi^2}\frac{d^2x_2}{\xi^2}\, y^2 e^{-\beta E_{eff}(x_1,x_2)} \tag{40}$$

$\mathcal{Z}'$ può essere ottenuta direttamente da $\mathcal{Z}_{vor}$ in Eq. (39) esplicitando i due vortici di prova e dividendo per la funzione di partizione dei restanti vortici, in modo da non contare le configurazioni relative a questi ultimi. Sia N il numero di vortici oltre i due di prova e chiamo[12] $C(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = 2\pi\beta J ln\big(\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{\xi}\big)$, che rappresenta l'energia di interazione tra due vortici di carica 2π in modulo, moltiplicata per β.

$$\mathcal{Z}' = \frac{\int \frac{d^2x_1 d^2x_2}{\xi^4}\, y^2 e^{-C(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \sum'_{\{k_i\}}\big(y\big)^N \int \prod_{i=1}^N \frac{d^2r_i}{\xi^2} e^{-\left[\sum_{i<j} C(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j)+\sum_i \left(C(\mathbf{r}_i-\mathbf{x}_1)+C(\mathbf{r}_i-\mathbf{x}_2)\right)\right]}}{\sum'_{\{k_i\}}\big(y\big)^N \int \prod_{i=1}^N \frac{d^2r_i}{\xi^2} e^{-\sum_{i<j} C(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j)}} \tag{41}$$

Dal confronto delle due espressioni trovate per $\mathcal{Z}'$ si trova l'uguaglianza degli argomenti dell'integrale in $\mathbf{x}_{1,2}$ da cui si può ricavare l'interazione efficace, si prosegue dunque col calcolo di $C_{eff} = \beta E_{eff}$ sfruttando una espansione per piccoli y. All' ordine inferiore (y^2) si sta considerando solo le correzioni portate da un solo dipolo tra le cariche di prova,

[11] Che supporremo anche questi di carica $\pm 2\pi$, cioè $k = \pm 1$.

[12] Non esplicitiamo i fattori k_i e k_j essendo unitari, ricordiamo però che l'interazione C può essere positiva o negativa a seconda del segno delle cariche.

$$e^{-C_{eff}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \approx \frac{e^{-C(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}\Big(1+y^2\int\frac{d^2r_1d^2r_2}{\xi^4}e^{-\left[C(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)+D(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\right]}+O(y^4)\Big)}{\Big(1+y^2\int\frac{d^2r_1d^2r_2}{\xi^4}e^{-C(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)}+o(y^4)\Big)} \tag{42}$$

$$\approx e^{-C(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}\left[1+y^2\int\frac{d^2r_1d^2r_2}{\xi^4}e^{-C(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\big(e^{-D(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)}-1\big)+o(y^4)\right] \tag{43}$$

Nell' ultimo passaggio si è sfrutta l'approssimazione $(1+a)^{-1}\approx 1-a+O(a^2)$. All' ordine 0 si riottiene la solita interazione tra vortici C, D rappresenta l'interazione tra i vortici di prova e il dipolo presente. Si prosegue col calcolo dell' integrale in $\mathbf{r}_{1,2}$ passando alle coordinate del centro di massa ($\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$) e sfruttando il fatto che r cioè la separazione tra i vortici che formano il dipolo interno è piccola. Conviene prima studiare il termine D nelle coordinate del centro di massa espandendo per piccoli r,

$$D = C(\mathbf{r}_1-\mathbf{x}_1)-C(\mathbf{r}_2-\mathbf{x}_1)-C(\mathbf{r}_1-\mathbf{x}_2)+C(\mathbf{r}_2-\mathbf{x}_2) \tag{44}$$

$$= C\big(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}-\mathbf{x}_1\big)-C\big(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}-\mathbf{x}_1\big)-C\big(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}-\mathbf{x}_2\big)+C\big(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}-\mathbf{x}_2\big) \tag{45}$$

$$\approx 2\mathbf{r}\cdot\left(\nabla_r C\big(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}-\mathbf{x}_1\big)\Big|_{r=0}-\nabla_r C\big(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}-\mathbf{x}_2\big)\Big|_{r=0}\right)+o(r^3) \tag{46}$$

$$= \mathbf{r}\cdot\nabla_R\big(C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_1)-C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_2)\big)+o(r^3) \tag{47}$$

Nell' integrale in $r_{1,2}$ in Eq. (43), si sostituisce a D l'espressione trovata e si espande e^{-D} al secondo ordine in r,

$$\int\frac{d^2Rd^2r}{\xi^4}e^{-C(\mathbf{r})}\left[\mathbf{r}\cdot\nabla_R\big(C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_1)-C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_2)\big)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}\cdot\nabla_R\big(C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_1)-C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_2)\big)\right)^2\right] \tag{48}$$

Si svolge prima l'integrale in **r** passando a coordinate polari nel piano, integrando prima nella variabile angolare i termini lineari in **r** scompaiono dato che sono proporzionali a $cos(\theta)$, per la stessa ragione i termini quadratici in **r** acquistano un fattore $\frac{1}{2}$ essendo proporzionali a $cos(\theta)^2$, l'integrale (48) diventa:

$$\int rdr\,\frac{r^2}{\xi^4}e^{-C(\mathbf{r})}\int d^2R\,\frac{1}{4}\Big|\nabla_R\big(C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_1)-C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_2)\big)\Big|^2 \tag{49}$$

Si svolge poi l'integrale in **R** integrando per parti e ricordando che $\nabla^2 C(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)=4\pi^2\beta J\delta^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$[13]. Nell'integrare per parti il termine di superficie si trascura poichè è associato a configurazioni in cui il dipolo interno si trova agli estremi del sistema e dunque non interferisce con i vortici di prova, inoltre il termine $C(0)$ può essere eliminato ricordando che $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ non possono trovarsi a distanze inferiori a ξ. L'integrale in **R** in Eq. (49) può essere semplificato come:

[13]Si veda l'Eq. (32.) che dà la definizione della funzione di green e si ricordi la definizione di C per le costanti che compaiono davanti alla delta.

$$\int d^2R\Big|\nabla_R\big(C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_1)-C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_2)\big)\Big|^2 \tag{50}$$

$$=-\int d^2R\Big(C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_1)-C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_2)\Big)\nabla^2\Big(C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_1)-C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_2)\Big) \tag{51}$$

$$=-4\pi^2\beta J\int d^2R\Big(C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_1)-C(\mathbf{R}-\mathbf{x}_2)\Big)\Big(\delta^{(2)}(\mathbf{R}-\mathbf{x}_1)-\delta^{(2)}(\mathbf{R}-\mathbf{x}_2)\Big) \tag{52}$$

$$=-4\pi^2\beta J\big(-2C(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)+2C(0)\big)=8\pi^2\beta JC(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2) \tag{53}$$

É ora possibile riscrivere l'uguaglianza in Eq. (43) che definisce C_{eff} come segue:

$$e^{-C_{eff}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}\approx e^{-C(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}\left[1+2\pi^2\beta Jy^2C(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\int dr\frac{r^3}{\xi^4}e^{-C(\mathbf{r})}+o(y^4)\right] \tag{54}$$

$$=e^{-C(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}\left[1+2\pi^2\beta Jy^2C(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\int dr\frac{r^3}{\xi^4}\left(\frac{r}{\xi}\right)^{-2\pi\beta J}+o(y^4)\right] \tag{55}$$

$$\approx exp\left[-C(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)+2\pi^2\beta Jy^2C(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\int dr\frac{r^3}{\xi^4}\left(\frac{r}{\xi}\right)^{-2\pi\beta J}+o(y^4)\right] \tag{56}$$

Dove si riconosce nella quantità tra parentesi quadra lo sviluppo in serie di un esponenziale al secondo ordine. Da quanto ottenuto sopra si ottiene per l'interazione efficace C_{eff} la seguente espressione:

$$C_{eff}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)=C(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\left[1-2\pi^2\beta Jy^2\int dr\frac{r^3}{\xi^4}\left(\frac{r}{\xi}\right)^{-2\pi\beta J}\right] \tag{57}$$

La forma funzionale della interazione efficace è identica a quella non normalizzata C, cambia solo la costante J che viene sostituita da una rigidità efficace J_{eff} tale per cui si può scrivere C_{eff} come:

$$C_{eff}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)=2\pi\beta J_{eff}ln\left(\frac{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}{\xi}\right) \tag{58}$$

reintroducendo gli estremi di integrazione, J_{eff} è calcolata da J come:

$$\beta J_{eff}=\beta J-2\pi^2(\beta J)^2y^2\int_{\xi}^{+\infty}dr\,r^{(3-2\pi\beta J)}\xi^{(2\pi\beta J-4)}+o(y^4) \tag{59}$$

L'integrale in r diverge per $r\to+\infty$ se $2\pi\beta J\leq 4$ e converge altrimenti, si trova nuovamente la temperatura critica $T_c=\frac{\pi J}{2k_B}$, che separa i due andamenti. Se l'integrale diverge, non è possibile sfruttare il metodo perturbativo, poichè in tal caso la correzione perturbativa diventa grande indipendentemente da y. Per risolvere questa difficoltà è necessario studiare l'Eq. (59) tramite il gruppo di rinormalizzazione, questo calcolo fu svolto per la prima volta da Josè et al. nel 1977 [20].

3.1.1 Gruppo di rinormalizzazione per il sistema di vortici

Per prima cosa dividiamo l'integrale in Eq. (59) come segue:

$$\int_{\xi}^{+\infty} = \int_{\xi}^{b\xi} + \int_{b\xi}^{+\infty} \tag{60}$$

Con $b > 1$, in questo modo si separa il contributo dei dipoli di lunghezza compresa tra ξ e $b\xi$ dagli altri, la rigidità rinormalizzata è ora data da:

$$K_{eff} = \underbrace{\left[K - 2\pi^2 K^2 y^2 \xi^{(2\pi K-4)} \int_{\xi}^{b\xi} dr\, r^{(3-2\pi K)}\right]}_{K(b)} - 2\pi^2 K^2 y^2 \xi^{(2\pi K-4)} \int_{b\xi}^{+\infty} dr\, r^{(3-2\pi K)} \tag{61}$$

Si rinomina $\beta J = K$ e si definisce $K(b)$ che esprime la rigidità rinormalizzata dai soli dipoli di lunghezza massima $b\xi$, il valore assunto da $K(b)$ nel limite di $b \to +\infty$ corrisponde quindi a K_{eff}[14].

Il secondo passaggio consiste nel scalare la variabile di integrazione r nel secondo integrale in Eq. (61), in modo da ottenere gli stessi estremi di integrazione originali cioè tra ξ e $+\infty$. Si effettua dunque la sostituzione $r \to br$ ottenendo:

$$K_{eff} = K(b) - 2\pi^2 K^2 \underbrace{y^2 b^{4-2\pi K}}_{y(b)^2} \xi^{(2\pi K-4)} \int_{\xi}^{+\infty} dr\, r^{(3-2\pi K)} + o(y^4) \tag{62}$$

Poichè $K(b) = K + o(y^2)$ è possibile riscrivere questa espressione, allo stesso ordine in y come:

$$K_{eff} = K(b) - 2\pi^2 K(b)^2 y(b)^2 \xi^{(2\pi K(b)-4)} \int_{\xi}^{+\infty} dr\, r^{(3-2\pi K(b))} + o(y^4) \tag{63}$$

Questa espressione è identica a quella trovata in Eq. (59). K_{eff} è una quantità che compare solo su scale macroscopiche[15] e le Eqs. (59),(63) permettono di calcolare K_{eff} da un modello microscopico. Per l' Eq. (63), si considera il modello iniziale osservato rispetto una scala dilatata di un fattore b, in cui si trascura ciò che accade a distanze inferiori a $b\xi$. L'Eq. (63) mostra che sostituendo i parametri originali con $(K(b), y(b))$, il sistema possiede le stesse proprietà macroscopiche, cioè stessa K_{eff}. I nuovi parametri rappresentano allora come si modificano quelli originali K, y quando si studia il sistema rispetto scale diverse, come questo avvenga per K è già stato discusso. y viene modificato perché a scale maggiori i dipoli di lunghezza minore scompaiono. Il numero di vortici cambia ma, nell' ensemble gran canonico, questo numero è legato a y che verrà anch'esso modificato. La fugacità rinormalizzata $(y(b))^2$ può essere associata al numero di dipoli di separazione maggiore di $b\xi$.

Ripetendo più volte questo procedimento si studia il sistema a scale via via maggiori, $K(b)$ e $y(b)$ si possono ottenere iterando le seguenti sostituzioni:

$$\begin{cases} K(b) = K - 2\pi^2 K^2 y^2 \dfrac{b^{4-2\pi K} - 1}{4 - 2\pi K} \\ y(b) = y b^{\pi K - 2} \end{cases} \tag{64}$$

Che possono essere riscritte come equazioni differenziali considerando un riscalamento $b \approx 1$ infi-

[14] Questo fatto sarà fondamentale in seguito per il calcolo di K_{eff}.

[15] Se immagino K_{eff} come alla costante dielettrica di un materiale, allora ha senso parlare di costante dielettrica solo su scale grandi rispetto ai dipoli che compongono il dielettrico.

nitesimo. Riscrivendo le relazioni (64) in funzione di $lln\, b$ è possibile eseguire una espansione per piccoli $ln\, b$ essendo $b \approx 1$ e, ricordando che $K(ln\, b)|_{b=1} = K$ e lo stesso vale per y,

$$\begin{cases} K(ln\, b) = K - 2\pi^2 K^2 y^2 \dfrac{e^{ln(b)(4-2\pi K)} - 1}{4 - 2\pi K} \\ y(ln\, b) = y e^{ln(b)(\pi K - 2)} \end{cases} \xrightarrow[ln(b)\approx 0]{} \begin{cases} \frac{dK}{dln\, b} ln\, b = -2\pi^2 K^2 y^2 ln\, b \\ \frac{dy}{dln\, b} ln\, b = y(\pi K - 2) ln\, b \end{cases} \tag{65}$$

Le equazioni ottenute esprimono le variazioni di K e y a seguito di un riscalamento infinitesimo. Riscrivendo l'equazione per K in una equazione per K^{-1} si riscrive il sistema (65) come:

$$\begin{cases} (K^{-1})' = 2\pi^2 y^2 \\ y' = (2 - \pi K) y \end{cases} \tag{66}$$

L'equazione ottenuta da Kosterlitz per K^{-1} presenta un fattore $4\pi^3$ come coefficiente di y^2, a differenza di quanto ottenuto quì. Questa differenza è però irrilevante per i risultati che seguono.

3.1.2 Transizione BKT

Seguendo la linea di flusso con dati iniziali K e y per $ln\, b \to +\infty$, a temperatura costante, si ottengono i parametri macroscopici K_{eff} e y_{eff} rinormalizzati dai vortici. I dati iniziali per il film di elio devono soddisfare alla relazione $y = exp(-\beta E_{cor}) = exp(-\frac{K}{J} E_{cor})$, dove J, definito in Eq. (5), è inizialmente fissato, al variare della temperatura si dispongono lungo la linea mostrata in Figura 5.

J è proporzionale alla densità della fase superfluida, allora a J_{eff} è associata una nuova densità rinormalizzata dai vortici (ρ_s^R) che si osserva su scale macroscopiche.

A basse temperature i dati iniziali per il film di elio sono nella regione I, le linee di flusso (si veda la Figura 5) in questa regione tendono ad un punto stazionario con $y = 0$ e $K^{-1} > \frac{\pi}{2}$ e portano a $J_{eff} > \frac{2}{\beta\pi}$,cioè una densità della fase superfluida non nulla. Ad alte temperature si è nella regione II, in questa regione le linee di flusso tendono a valori di K^{-1} crescenti portando quindi a $J_{eff} = 0$, di conseguenza non si ha fase superfluida. La temperatura critica è quella per cui la linea dei dati iniziali interseca la separatrice tra la zona I e II e risulta essere di poco inferiore a quella prevista in Eq. (10). Si vede infatti dalla Figura 5 che il punto in cui avviene questa intersezione, si ha per un K^{-1} minore rispetto a $\frac{\pi}{2}$, che sarebbe il valore che si otterrebbe se T_c fosse quella prevista in Eq. (10). La separatrice, associata al dato iniziale con $T = T_c$, tende al valore porta al valore critico $K_c = \frac{2}{\pi}$.

Ricordando che $(y(b))^2$, e quindi $(y_{eff})^2$, può essere associato al numero di dipoli presenti di lunghezza maggiore di una certa scala, allora poichè a bassa temperatura si ha $y_{eff} = 0$, nel sistema saranno presenti solo dipoli di lunghezza breve e si è nella fase dielettrica. Ad alta temperatura le linee di flusso tendono a y crescenti e quindi y_{eff} non nullo, in questo caso saranno presenti un certo numero di dipoli di grande separazione che producono una configurazione più simile ad un plasma.

Studiando le Eqs. (66) attorno al punto critico $(\frac{\pi}{2}, 0)$, si può mostrare che per $T \to T_c^-$ l'andamento di K_{eff} è quello in Eq. (67), dove a è una costante, si veda la Figura 5.

$$K_{eff} = \frac{2}{\pi}(1 + a\sqrt{T_c - T}) \tag{67}$$

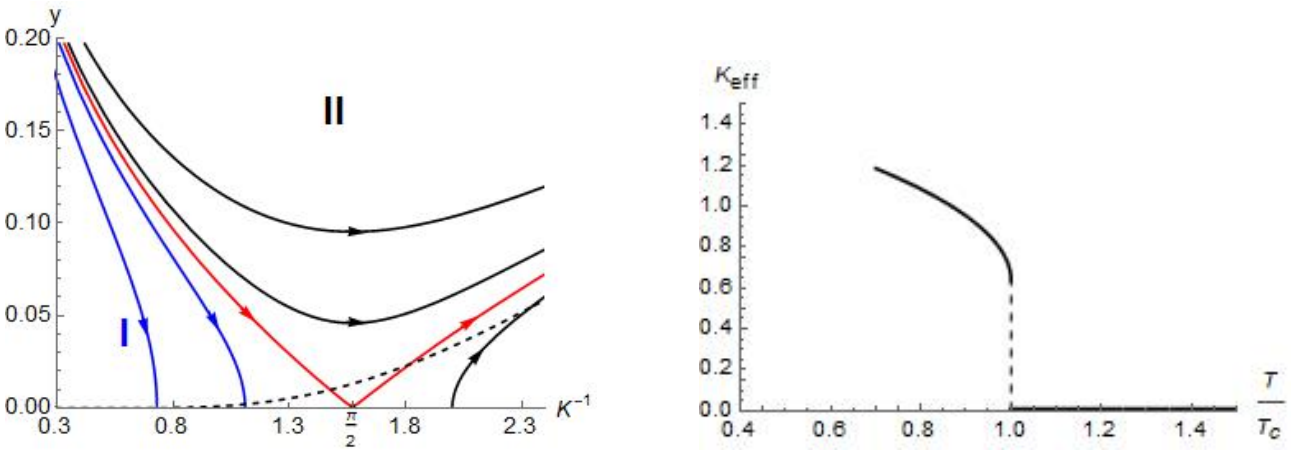

Figura 5: A destra: flusso del sistema (66), la linea tratteggiata rappresenta il luogo dei dati iniziali per il film. A sinistra: andamento di $K_{eff} = \beta J_{eff}$ al variare della temperatura.

3.2 Conclusioni e verifiche sperimentali

A $T = T_c$ la teoria BKT prevede una discontinuità della rigidità rinormalizzata da 0 a J_c, indipendentemente dal particolare sistema considerato, per cui si parla di salto universale della BKT. Per il film superfluido, la discontinuità riguarda la densità rinormalizzata ρ_s^R come già discusso. Ricordando il valore di J_c e la relazione tra rigidità e densità in Eq. (5) la discontinuità nella densità è data da:

$$J_c = \frac{2k_B T_c}{\pi} = \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 \rho_s^R(T_c^-) \quad \rightarrow \quad \rho_s^R(T_c^-) = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 \frac{2k_B}{\pi} T_c = (3.491 \cdot 10^{-9} g\, cm^{-2} K^{-1}) T_c \quad (68)$$

La temperatura critica dipende dal sistema considerato[16] e l'Eq. (68) predice che $\rho_s^R(T_c^-)$ sia proporzionale a T_c. Nel 1980 Bishop e Reppy [22] verificarono questo andamento studiando diversi film di elio a diversa T_c, trovando una costante di proporzionalità pari a 0.96 volte quella prevista teoricamente, si veda la Figura 6. La teoria prevede anche che ρ_s^R, abbia per $T \rightarrow T_c^-$ l'andamento mostrato in Eq. (67), questo risulta però difficile da verificare sperimentalmente perchè, la misura della densità superfluida si ottiene studiando la risposta del film a sollecitazioni dinamiche esterne. In questo caso è importante anche la dinamica dei vortici quantizzati che è stata finora ignorata. La teoria finora sviluppata, detta appunto statica, può essere corretta tenendo conto degli effetti dinamici nella teoria dinamica di Ambregaokar [23], verificata da Bishop e Reppy nello stesso esperimento [22].

Un altra difficoltà nello studio della transizione BKT riguarda le dimensioni finite dell'apparato sperimentale. Studiando il sistema (66) si è infatti ricavato K_{eff} dal limite delle linee di flusso per $ln\, b \rightarrow +\infty$, cioè studiando il sistema a una scala infinita. Se il sistema ha dimensioni finite è possibile seguire le linee di flusso al più alla scala del sistema ed è da questo punto che si ricava K_{eff}.

In questo caso l'effetto è la scomparsa della discontinuità a T_c per K_{eff} che tende a zero in modo continuo. Nei casi in cui sia rilevante il numero di particelle nel sistema è possibile riscrivere le relazioni di Kosterlitz in funzione del numero di particelle N anzichè del fattore di scala b. Si parte dal sistema (65) e si ricorda che a seguito del riscalamento del sistema, il raggio del core dei vortici diventa $b\xi$. Se si richiede che nel disco di raggio $b\xi$ cioè all' interno del core del vortice

[16] Per i film di elio dipende dallo spessore del film oltre che dal tipo di substrato che adsorbe l'elio, nel caso di gas atomici ultrafreddi dipende inoltre dal tipo e dalla forza delle interazioni microscopiche [21].

siano presenti N particelle allora, introducendo la densità totale di particelle n si possono eseguire le seguenti sostituzioni che portano alla riscrittura del sistema (65) come segue:

$$N = \pi b^2 \xi^2 n \xrightarrow[N_0 = \pi \xi^2 n]{} ln(b) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{N}{N_0}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2\frac{dK(N)}{dln\, N} = -4\pi^3 K(N)^2 y(N)^2 \\ 2\frac{dy(N)}{dln\, N} = y(N)(\pi K(N) - 2) \end{cases} \tag{69}$$

Si ottengono le relazioni di Kosterlitz parametrizzate dal numero di particelle N presenti sotto una certa scala, ora è N a determinare tale scala. $(K(N), y(N))$ possono essere interpretati come ai parametri rinormalizzati dai vortici in un sistema ad N particelle come $K((b), y(b))$ rappresentano i parametri rinormalizzati in un sistema di dimensione $b\xi$. Le Eqs. (69) possono essere utilizzate in una simulazione di Monte Carlo, in cui si considera un numero N grande ma finito di particelle. Equazioni simili alle (69) sono utilizzate da Pilati, Giorgini e Prokofev [24] in una simulazione con $N = 10^5$ particelle in 2d interagenti tramite un potenziale a sfere dure. Misurarono la densità della fase superfluida ρ_s al variare della temperatura per sistemi di diverse dimensioni, cioè diverso numero di particelle, estrapolando il comportamento nel limite termodinamico $N \to +\infty$. Il risultato ottenuto conferma la presenza della transizione BKT nel sistema, con il salto universale previsto dalla teoria statica e la corretta temperatura di transizione T_c calcolata per il sistema considerato [21], Figura (7).

Si conclude mostrano un recente risultato ottenuto da Christodoulou et al. [25] studiando la velocità del secondo suono in un gas di atomi ultrafreddi confinato in 2d da una trappola ottica. L'esperimento sembra confermare la teoria BKT statica, secondo cui la velocità del secondo suono ha un andamento al variare della temperatura simile a quello della densità della fase superfluida [26].

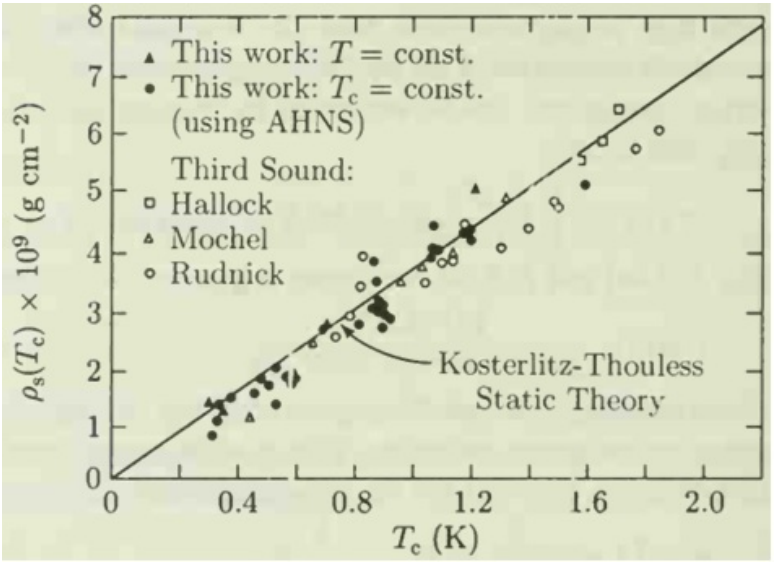

Figura 6: Valori $\rho_s(T_c^-)$ misurata per diversi tipi di film, vengono mostrati anche i risultati raccolti da altri lavori, che confermano l'andamento previsto dalla teoria BKT in Eq. (68), immagine adattata da: [22].

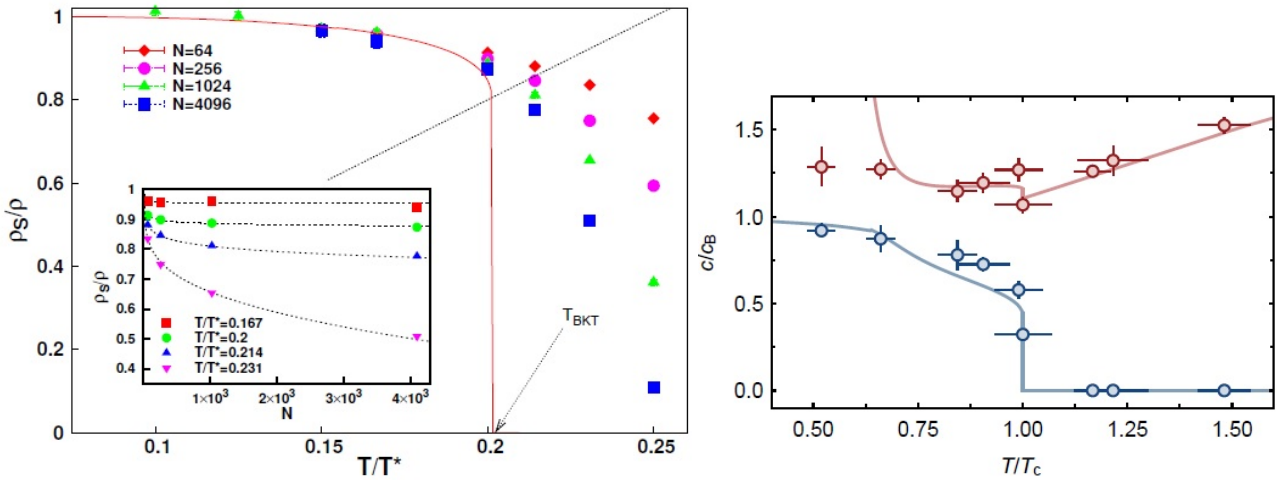

Figura 7: A sinistra: risultati ottenuti dalle simulazioni di Pilati, Giorgini e Prokofev. I punti colorati rappresentano l'andamento della densità superfluida quando nel sistema sono presenti N particelle. La linea continua rossa rappresenta l'andamento estrapolato nel limite termodinamico $N \to +\infty$. A destra: risultati dell' esperimento di Christodoulou et al. nello studio della velocità del suono in un gas di atomi ultrafreddi 2d, in blu sono mostrati i dati sperimentali relativi alla velocità del secondo suono, la linea continua (blu) rappresenta l'andamento atteso dalla teoria BKT per un sistema infinito [26]. immagini adattate da: [24, 25].

Riferimenti bibliografici

[1] KH Onnes. The resistance of pure mercury at helium temperatures. *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden, b* ***12***, page 120, 1911.

[2] P Kapitza. Viscosity of liquid helium below the λ-point. *Nature* ***141***, page 74, 1938.

[3] VL Ginzburg and LD Landau. On the theory of superconudctivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz* ***20***, page 1064, 1950.

[4] LD Landau. On the theory of phase transitions, part i. *Sov Phys JETP* ***7***, page 19, 1937.

[5] C Timm. Theory of superconductivity. Lecture notes. Wintersemester 2011/2012 TU Dresden Istitute of Theoretical Physics.

[6] AA Abrikosov. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Sov. Phys. JETP* ***5***, page 1174, 1957.

[7] GP Bewely, DP Lathrop, and KR Sreenivasan. Visualization of quantized vortices. *Nature* ***441***, page 588, 2006.

[8] JM Vogels, K Xu, C Raman, JR Abo-Shaeer, and W Ketterle. Vortex nucleation in a stirred bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.* ***87***, page 210402, 2001.

[9] L Onsager. Statistical hydrodynamics. *Il Nuovo Cimento (1943-1954)* ***6***, page 279, 1949.

[10] RP Feynman. Chapter ii application of quantum mechanics to liquid helium. volume 1 of *Progress in Low Temperature Physics*, page 17. Elsevier, 1955.

[11] VL Berezinskii. Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group i. classical systems. *Sov. Phys. JETP* ***32***, page 493, 1971.

[12] JM Kosterlitz and DJ Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *Journal of Physics C: Solid State Physics* ***6***, page 1181, 1973.

[13] J.M. Kosterlitz. The critical properties of the two-dimensional xy model. *J. Phys. C: Solid State Phhys.* ***7***, page 1046, 1974.

[14] XR Wang, SA Fedoseev, FS Wells, AV Pan, and H Hilgenkamp. Analysis of low-field isotropic vortex glass containing vortex groups in yba 2 cu 3 o 7- x thin films visualized by scanning squid microscopy. *Scientific reports* ***5***, page 8677, 2015.

[15] FJ Annett. *Superconductivity, superfluids and condensates*. Oxford University Press, 2004.

[16] CT Lubensky, MP Chaikin, and TA Witten. *Principles of condensed matter physics*. Cambridge university press Cambridge, 1995.

[17] GN Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge university press, 1995.

[18] F Spitzer. *Principles of random walk*. Springer Science & Business Media, 2013.

[19] M Kardar. *Statistical Physics of Fields*. Cambridge University Press, 2007.

[20] S Kirkpatrick, JV José, LP Kadanoff, and DR Nelson. Renormalization, vortices, and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model. *Physical Review B **16***, page 1217, 1977.

[21] D.S. Fisher and P.C. Hohenberg. Dilute bose gas in two dimensions. *Phys. Rev. B **37***, page 4936, 1988.

[22] DJ Bishop and JD Reppy. A precision measurement of the superfluid density near the transition of a 2d superfluid. *Le Journal de Physique Colloques **39***, page 339, 1978.

[23] V Ambegaokar, BI Halperin, DR Nelson, and ED Siggia. Dynamics of superfluid films. *Physical Review B **21***, page 1806, 1980.

[24] S Pilati, S Giorgini, and N Prokof'ev. Critical temperature of interacting bose gases in two and three dimensions. *Physical review letters **100***, page 140405, 2008.

[25] P Christodoulou, M Gałkaj, N Dogra, R Lopes, J Schmitt, and Z Hadzibabic. Observation of first and second sound in a berezinskii-kosterlitz-thouless superfluid. *arXiv preprint arXiv:2008.06044*, 2020.

[26] T Ozawa and S Stringari. Discontinuities in the first and second sound velocities at the berezinskii-kosterlitz-thouless transition. *Phys. Rev. Lett. **112***, page 025302, 2014.