

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Tesi di Laurea

Transizioni di fase quantistiche e dinamiche in catene di
Kitaev a lungo raggio

Relatore

Prof. Luca Dell’Anna

Laureando

Matteo Sighinolfi

Anno Accademico 2017/2018

Introduzione

Il modello di Kitaev standard [1] e il modello di Kitaev generalizzato [2] sono modelli che sono stati proposti per la realizzazione sperimentale di dispositivi per la quantum computation, in particolare per quantum memory. Questo modello rappresenta una catena unidimensionale con siti che possono essere occupati o meno da elettroni con direzione di spin fissata. Gli elettroni sono non interagenti, tuttavia nell'Hamiltoniana del modello è presente un termine di hopping e un termine di pairing superconduttivo indotto che fa sì che gli elettroni interagiscano. Il modello così definito ammette fasi topologiche caratterizzate dall'assenza o dalla presenza di uno o più modi di Majorana (o modi di edge) localizzati alle estremità della catena: poiché la catena è molto lunga questi modi sono immuni al fenomeno della decoerenza e risultano pertanto i candidati ideali a contenere informazione [1]. La differenza fra modello standard e generalizzato è che il primo è un modello a corto raggio mentre il secondo contiene parametri che possono fare sì che il modello diventi a lungo raggio. La realizzazione sperimentale del modello non è ancora perfettamente definita, tuttavia sono state proposte idee che coinvolgono fili in prossimità di un appropriato superconduttore per il modello standard [3] mentre per il modello generalizzato è stato proposto di utilizzare una miscela unidimensionale di fermioni e bosoni in trappola ottica [4] in modo che si possano avere interazioni a lungo raggio.

In questa tesi si studierà il modello generalizzato, di cui il modello standard è un caso particolare, attraverso i suoi diagrammi di fase. Poiché la presenza di modi di Majorana dipende dai parametri scelti per l'Hamiltoniana, si deve studiare in che regione dello spazio dei parametri i modi di edge sono o meno ammessi. Le diverse fasi del modello sono caratterizzate da un parametro d'ordine detto winding number e indicato con w . Lo studio dei diagrammi di fase può risultare complicato e costoso computazionalmente, pertanto si è cercato di sviluppare una nuova metodologia per lo studio dei diagrammi di fase che sia computazionalmente meno costosa e possa essere applicata anche ad altri modelli. Questo è stato fatto attraverso l'introduzione del concetto di transizione di fase quantistica dinamica (DQPT) [5]: una DQPT è un processo di non equilibrio legato ad una variazione improvvisa di uno dei parametri dell'Hamiltoniana (sudden quench). Lo studio dell'evoluzione temporale del sistema, preparato inizialmente nel ground state dell'Hamiltoniana iniziale, dopo il sudden quench permette di determinare se si abbiano o meno DQPT che sono definite come non-analiticità (in questo caso cuspidi) nella Loschmidt amplitude. Viene poi stabilita una relazione diretta tra il numero di DQPT che si hanno a seguito di un determinato sudden quench e il winding number che è quello che serve per la definizione della nuova metodologia. Infine si confrontano i risultati ottenuti per i sudden quench con gli slow quench, ovvero quello che succede quando un parametro dell'Hamiltoniana non viene più cambiato bruscamente ma evolve invece linearmente nel tempo in maniera più o meno lenta.

La tesi è così organizzata:

- **Capitolo 1:** vengono introdotti i concetti teorici riguardanti il modello utilizzato, viene definito il concetto di DQPT, le grandezze necessarie a stabilire il legame con il winding number, il concetto di slow quench e le grandezze fisiche di interesse ad esso legate;
- **Capitolo 2:** si analizza l'implementazione numerica e i relativi algoritmi per lo studio dei sudden quench e degli slow quench con annesse grandezze di interesse;
- **Capitolo 3:** si discutono i risultati ottenuti con le simulazioni numeriche;

-
- **Conclusioni:** si presentano le conclusioni e i passi successivi che possono avere origine da questo lavoro.

Indice

Introduzione	I
1 Fondamenti teorici	1
1.1 Hamiltoniana di Kitaev generalizzata	1
1.2 Transizioni di fase quantistiche e dinamiche	3
1.3 DQPT in modello di Kitaev	10
1.4 Legame tra DQPT e winding number	15
1.5 Diagrammi di fase del modello di Kitaev	18
2 Implementazione numerica	23
2.1 Implementazione numerica sudden quench con r finito	23
2.2 Implementazione numerica sudden quench con $r = \infty$	27
2.3 Implementazione numerica slow quench	27
3 Presentazione dei risultati	31
3.1 Sudden quench con $r < \infty$	31
3.2 Sudden quench con $r = \infty$	41
3.3 Slow quench	58
Conclusioni	63
Bibliografia	65

Capitolo 1

Fondamenti teorici

1.1 Hamiltoniana di Kitaev generalizzata

Il modello che si intende studiare in questo lavoro è il cosiddetto modello di Kitaev generalizzato. Per chiarezza si introduce inizialmente il modello di Kitaev standard di cui il caso generalizzato altro non è che un'estensione. Il modello di Kitaev standard [1] è un modello a corto raggio la cui Hamiltoniana è costruita appositamente per ottenere modi di Majorana, che sono per costruzione immuni al fenomeno della decoerenza e risultano pertanto utili per la quantum computation [6]. Un semplice sistema in grado di dare un'Hamiltoniana come quella cercata è dato da una catena unidimensionale di $L \gg 1$ siti, che possono essere vuoti o riempiti da un elettrone con spin fissato, adagiata sulla superficie di un superconduttore tridimensionale. L'Hamiltoniana andrà a descrivere la catena unidimensionale, si noti come il superconduttore indurrà la comparsa di un termine di pairing superconduttivo all'interno dell'Hamiltoniana. È inoltre importante notare come il pairing desiderato possa essere indotto solo considerando come substrato un superconduttore di tipo p (tripletto), in assenza di interazione spin-orbita, perché si hanno tutti gli elettroni con spin nella medesima direzione [1]. L'Hamiltoniana è:

$$H = \sum_{j=i}^L \left(-\omega(a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j) - \mu \left(a_j^\dagger a_j - \frac{1}{2} \right) + \Delta a_j a_{j+1} + \Delta^* a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger \right), \quad (1.1)$$

dove μ è il potenziale chimico e ω e Δ sono rispettivamente i termini di hopping e pairing. La realizzazione sperimentale di questa Hamiltoniana risulta più complicata del semplice modello proposto di catena unidimensionale appoggiata su un superconduttore, infatti nell'implementazione sperimentale non si può in linea di principio trascurare l'accoppiamento spin-orbita. Il sistema proposto [3], [7] è il seguente: si considera la catena unidimensionale (solitamente InAs o InSb) con forte accoppiamento spin-orbita che è posta molto vicina a un superconduttore di tipo "s-wave" (come Nb o Al) e immersa in un campo magnetico esterno. Il potenziale chimico è controllato da una serie di elettrodi posti a contatto con la catena e il superconduttore. In questo modo è possibile modulare il potenziale chimico in modo che la catena possa o meno esibire modi di Majorana alle estremità (modi di edge). In questo modo è possibile indurre il pairing superconduttivo desiderato e riprodurre sperimentalmente il modello di Kitaev standard.

Il modello di Kitaev generalizzato è l'estensione del modello precedente in un caso diverso da quello a corto raggio. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è:

$$H = \sum_{j=1}^L \mu \left(a_j^\dagger a_j - \frac{1}{2} \right) + \sum_{l=1}^r \sum_{j=1}^{L-l} (\omega_l e^{i\varphi_l} a_j^\dagger a_{j+l} + \Delta_l a_j a_{j+l} + \text{H.c.}), \quad (1.2)$$

dove μ è il potenziale chimico e ω_l e Δ_l sono rispettivamente i termini di hopping e pairing estesi. Questi possono presentarsi in varie forme, ma scegliamo per questi la forma:

$$\omega_l = \omega_o l^{-\alpha} \quad \Delta_l = \Delta l^{-\beta}, \quad (1.3)$$

con $\alpha, \beta > 0$ e dove l indica la distanza fra 2 siti nel caso di condizioni al contorno aperte come quello in cui ci si trova a lavorare. Infine, il termine di fase $e^{i\varphi_l}$ che può acquistare l'ampiezza di hopping può avere l'effetto di rompere la simmetria di inversione temporale (TRS). I due parametri α e β regolano il comportamento a lungo o corto raggio del modello, infatti per $\alpha \rightarrow \infty$ e $\beta \rightarrow \infty$ si ricrea il modello di Kitaev standard a corto raggio (hopping e pairing esclusivamente a primi vicini). Per quanto riguarda la realizzazione sperimentale di questo modello la difficoltà è data dalla presenza di interazioni a lungo raggio. Una possibile implementazione proposta in [4] è basata sull'utilizzo di misture unidimensionali di bosoni e fermioni. In particolare, si considerano fermioni non interagenti confinati in una dimensione in una trappola ottica e intrappolati in un reticolo ottico con hopping a primi e secondi vicini. Inoltre è presente un gas di bosoni liberi unidimensionale di background con cui i fermioni interagiscono. L'effetto dell'interazione fermioni-bosoni è quello di indurre un'interazione attrattiva a lungo raggio fra fermioni che possono pertanto formare coppie di Cooper e sia pertanto presente un accoppiamento superconduttivo. Il vantaggio di questa proposta di implementazione è che, al netto di alcune difficoltà (ad esempio il fatto che la temperatura debba essere molto bassa), richiede tecniche già utilizzate per sistemi ad atomi freddi. Questa proposta risulta quindi promettente.

Ritornando all'Hamiltoniana (1.2) si può ulteriormente lavorarci sopra. Se infatti si suppone di chiudere la catena con condizioni al bordo periodiche (PBC) o antiperiodiche (ABC) e si svolge la corretta trasformata di Fourier allora (1.2) può essere riscritta come

$$H = \sum_k (a_k^\dagger, a_{-k}) \left\{ \sum_l [\omega_l \sin(\varphi_l) \sin(kl)] \mathbb{1} - \left(\frac{\mu}{2} + \sum_l [\omega_l \cos(\varphi_l) \cos(kl)] \right) \sigma_z + \left(\sum_l \Delta_l \sin(kl) \right) \sigma_y \right\} \begin{pmatrix} a_k \\ a_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \equiv \sum_k (a_k^\dagger, a_{-k}) \mathcal{H}(k) \begin{pmatrix} a_k \\ a_{-k}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Lo spettro di (1.4) presenta una simmetria buca-particella poiché sotto la trasformazione buca-particella $\mathcal{C} = \sigma_x \mathcal{K}$ si ha (con $\mathcal{K}$ operatore di coniugazione di carica),

$$\mathcal{C}^{-1} \mathcal{H}(k) \mathcal{C} = -\mathcal{H}(-k). \quad (1.5)$$

La condizione di simmetria per inversione temporale (TRS) $\mathcal{H}(-k)^* = \mathcal{H}(k)$ è verificata solo per ampiezze di hopping ω_l reali, che si hanno se e solo se $\varphi_l = 0, n\pi$. D'ora in poi assumeremo la presenza di TRS.

Questo modello è caratterizzato dalla presenza di diverse fasi topologiche che presentano un diverso valore di un'opportuna grandezza detta invariante topologico. In particolare, queste fasi sono caratterizzate dalla presenza o meno di modi di Majorana, ovvero dal fatto che siano presenti fermioni di Majorana disaccoppiati alle estremità della catena.

Nel caso ci sia TRS ($\varphi_l = 0$) questo invariante è il cosiddetto winding number. Per ricavarlo, si definisce il vettore

$$\mathbf{h}(k) = (0, h_y(k), h_z(k)) \quad (1.6)$$

tale che $\mathcal{H}(k)$ in (1.4) possa essere scritta come

$$\mathcal{H}(k) = \mathbf{h}(k) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.7)$$

con $\boldsymbol{\sigma}$ vettore di matrici di Pauli. Si definisce poi il versore $\hat{\mathbf{h}}(k) = \frac{\mathbf{h}(k)}{|\mathbf{h}(k)|}$ e il winding number w

$$w = \frac{1}{2\pi} \oint d\theta_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{\partial_k \hat{h}_z(k)}{\hat{h}_y(k)}. \quad (1.8)$$

Le fasi in cui sono presenti modi di Majorana sono caratterizzate da $w \neq 0$ mentre la fase senza modi di Majorana ha $w = 0$. Risulta quindi di particolare interesse nello studio del modello l'analisi dei diagrammi di fase nello spazio dei parametri ω, Δ, μ al variare di α, β . Questo può essere fatto calcolando direttamente w e andando poi a calcolare le linee di punti critici che nello spazio dei parametri separano le regioni con w diverso, che è la procedura normalmente seguita in letteratura [2].

Si vuole però qui proporre un diverso metodo di studio che necessita dell'introduzione del concetto di transizioni di fase quantistiche dinamiche (dynamical quantum phase transition).

Infine, è possibile calcolare lo spettro di questo modello a partire da (1.4) e andando a diagonalizzare $\mathcal{H}(k)$. L'espressione esplicita di $\mathcal{H}(k)$ è data da

$$\mathcal{H}(k) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2} - \omega_0 g_\alpha(k) & -i\Delta f_\beta(k) \\ i\Delta f_\beta(k) & \frac{\mu}{2} + \omega_0 g_\alpha(k) \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

dove si è usata la notazione

$$\sum_{l=1}^r \omega_l \cos(kl) = \omega_0 \sum_{l=1}^r \frac{\cos(kl)}{l^\alpha} \equiv \omega_0 g_\alpha(k) \quad (1.10)$$

$$\sum_{l=1}^r \Delta_l \sin(kl) = \Delta \sum_{l=1}^r \frac{\sin(kl)}{l^\beta} \equiv \Delta f_\beta(k). \quad (1.11)$$

Per diagonalizzare $\mathcal{H}(k)$ si compie una trasformazione di Bogoliubov (che dipende da un angolo θ_k che sarà da determinare e che trasforma i miei spinori facendoli diventare:

$$\begin{pmatrix} \eta_k \\ \eta_{-k}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & i \sin \theta_k \\ i \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ a_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$(\eta_k^\dagger, \eta_{-k}) = (a_k^\dagger, a_{-k}) \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -i \sin \theta_k \\ -i \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Usando poi per brevità la notazione $c_k \equiv \cos \theta_k$, $s_k \equiv \sin \theta_k$ si ottiene:

$$\mathcal{H}_D = \begin{pmatrix} c_k & -i s_k \\ -i s_k & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2} - \omega_0 g_\alpha(k) & -i\Delta f_\beta(k) \\ i\Delta f_\beta(k) & \frac{\mu}{2} + \omega_0 g_\alpha(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k & i s_k \\ i s_k & c_k \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Svolgendo i prodotti indicati in (1.14) e imponendo la condizione $\mathcal{H}_D^{12} = \mathcal{H}_D^{21} = 0$ si ottiene la condizione:

$$-2 \left(\frac{\mu}{2} + \omega_0 g_\alpha(k) \right) c_k s_k + \Delta f_\beta(k) (s_k^2 - c_k^2) = - \left(\frac{\mu}{2} + \omega_0 g_\alpha(k) \right) \sin(2\theta_k) - \Delta f_\beta(k) \cos(2\theta_k) = 0, \quad (1.15)$$

che ha per soluzione

$$\tan(2\theta_k) = - \frac{\Delta f_\beta(k)}{\frac{\mu}{2} + \omega_0 g_\alpha(k)}. \quad (1.16)$$

Imponendo quanto appena visto ad $\mathcal{H}_D^{11}$ e $\mathcal{H}_D^{22}$ si ottiene che lo spettro dell'Hamiltoniana risulta essere

$$\epsilon(k) = \sqrt{\left(\frac{\mu}{2} + \omega_0 g_\alpha(k) \right)^2 + (\Delta f_\beta(k))^2}, \quad (1.17)$$

con l'Hamiltoniana che può essere scritta nella forma di Bogoliubov come

$$H = \sum_{n=0}^{L-1} \epsilon(k_n) \left(\eta_{k_n}^\dagger \eta_{k_n} - \frac{1}{2} \right) \quad (1.18)$$

1.2 Transizioni di fase quantistiche e dinamiche

Si introducono ora brevemente i concetti di transizioni di fase quantistiche (QPT) e di transizioni di fase quantistiche e dinamiche (DQPT) in modo da poterne illustrare le differenze. In seguito i due concetti verranno illustrati più in dettaglio.

Una QPT è una transizione di fase che avviene a $T = 0$, non è quindi controllata dalla temperatura ma da un parametro indipendente da essa (come può essere il campo magnetico). Se si varia questo

parametro nel tempo si può attraversare un punto critico quantistico (QCP) che separa due diverse fasi del sistema. Poiché ci si trova a $T = 0$ non sono presenti fluttuazioni termiche ed il sistema non può che trovarsi nello stato fondamentale: in seguito all'occorrere di una QPT questo stato cambia poi in maniera improvvisa. Se invece ci si trova a $T \neq 0$ allora le transizioni di fase quantistiche e classiche sono in competizione, con le prime che sono dominanti se $\hbar\omega > k_B T$ (ovvero se le fluttuazioni termiche sono ad una scala di energia inferiore rispetto al regime quantistico), dove ω è la frequenza caratteristica delle oscillazioni quantistiche. La regione in cui $\hbar\omega > k_B T$ è nota come *regione critica quantistica* e si manifesta ad esempio nei liquidi di Dirac critici e quantistici [8]. Come le transizioni di fase classiche, anche quelle quantistiche sono caratterizzate da non-analiticità nell'energia libera al punto critico. Non sono invece dovute a fluttuazioni termiche ma a fluttuazioni del parametro fisico di interesse dovute al principio di indeterminazione di Heisenberg.

Mentre le QPT riguardano fenomeni all'equilibrio, le DQPT sono invece legate a stati quantici di non equilibrio che non possono pertanto usufruire di una descrizione termodinamica. Questo permette agli stati di non equilibrio di realizzare fenomeni non accessibili con la fisica statistica di equilibrio (come ad esempio la pretermalizzazione) ma fa anche sì che gli strumenti con i quali si può descrivere un sistema di molti corpi all'equilibrio non possano più essere utilizzati. Perciò non è più possibile utilizzare funzioni di partizione o concetti come la minimizzazione dell'energia libera. Tuttavia, data l'importanza che ricoprono le transizioni di fase nella fisica all'equilibrio, si vuole definire un concetto analogo anche per stati quantici lontani dall'equilibrio. Le DQPT possono avere luogo una volta che si è fatto variare in maniera istantanea un parametro dell'Hamiltoniana, operando quello che in letteratura è noto come *sudden quench*. Una volta fatto ciò i parametri dell'Hamiltoniana restano fissati e l'unica grandezza che cambia risulta essere il tempo¹: si vogliono perciò trovare grandezze che diventino non analitiche allo scorrere del tempo che segnalino la presenza o meno di una DQPT.

La principale differenza tra QPT e DQPT è la seguente: mentre le QPT sono dovute all'attraversamento di un QCP in seguito alla variazione di un parametro dell'Hamiltoniana nel tempo, le DQPT si hanno quando in seguito ad un sudden quench su un parametro dell'Hamiltoniana nella dinamica di determinate grandezze si hanno non-analiticità al trascorrere del tempo. In conclusione, le QPT si osservano in seguito ad un quench lento (*slow quench*) mentre le DQPT in seguito ad un quench veloce (*sudden quench*).

DQPT e sudden quench

Come precedentemente illustrato, le DQPT avvengono in seguito ad un sudden quench. Supponiamo di avere un sistema descritto da un'Hamiltoniana $\mathcal{H}(\{\lambda\})$ dove $\{\lambda\}$ è un insieme di parametri, il sistema sarà inizialmente nella configurazione λ_0 descritta dall'Hamiltoniana $\mathcal{H}_0$. Supponiamo inoltre che il sistema si trovi nell'autostato $|\psi_0\rangle$ che rappresenta il ground state dell'Hamiltoniana iniziale. In seguito al sudden quench uno o più parametri della configurazione λ_0 vengono cambiati e ci si trova ora nella configurazione λ_1 con Hamiltoniana $\mathcal{H}_1$. In generale, $|\psi_0\rangle$ non è autostato di $\mathcal{H}_1$ e pertanto l'evoluzione temporale del sistema descritta da

$$|\psi_0(t)\rangle = e^{-i\mathcal{H}_1 t}|\psi_0\rangle, \quad (1.19)$$

risulta non banale.

Si può ora definire la grandezza più importante per la definizione di DQPT, ovvero la *Loschmidt amplitude*:

$$\mathcal{G}(t) = \langle\psi_0|\psi_0(t)\rangle = \langle\psi_0|e^{-i\mathcal{H}_1 t}|\psi_0\rangle, \quad (1.20)$$

che rappresenta la deviazione dello stato evoluto nel tempo rispetto allo stato iniziale. Da questa segue poi la definizione di Loschmidt echo:

$$\mathcal{L}(t) = |\mathcal{G}(t)|^2, \quad (1.21)$$

¹Ed è per questo motivo che vengono definite *dinamiche*

che è la probabilità associata alla Loschmidt amplitude. I concetti di Loschmidt amplitude e Loschmidt echo appaiono in vari contesti, tuttavia nella teoria delle DQPT sono importanti poiché è possibile dimostrare che tra Loschmidt amplitude e funzione di partizione esiste una somiglianza formale [5]. Per questo motivo la dipendenza funzionale di $\mathcal{G}(t)$ dagli N gradi di libertà del sistema risulta essere uno scaling di grandi deviazioni se N è grande. Pertanto,

$$\mathcal{G}(t) = e^{-Ng(t)}, \quad (1.22)$$

e analogamente per $\mathcal{L}(t)$:

$$\mathcal{L}(t) = e^{-N\lambda(t)}. \quad (1.23)$$

$\lambda(t)$ e $g(t)$ sono dette *funzioni di rate* e sono ben definite nel limite termodinamico dove è possibile calcolarle come²

$$g(t) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log [\mathcal{G}(t)] \quad (1.24)$$

$$\lambda(t) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log [\mathcal{L}(t)] = 2\text{Re} [g(t)]. \quad (1.25)$$

Si possono ora definire le DQPT come un comportamento non analitico della Loschmidt amplitude (o della sua rate function) al variare del tempo. Per sistemi unidimensionali come quello in esame questo si manifesta con una cuspidè nella rate function $\lambda(t)$ mentre per sistemi a dimensionalità maggiore la casistica può essere diversa.

Ci si può chiedere, in generale, sotto quali condizioni si possono osservare DQPT. È stato osservato [5], [9] che si hanno DQPT quando si va a fare un quench su un parametro dell'Hamiltoniana attraverso una transizione di equilibrio sottostante (ovvero quando i punti di quench iniziali e finali sono separati da una linea di QCP). Tuttavia è possibile osservare DQPT anche quando i punti di quench non sono separati da una linea di punti critici: non vi è pertanto perfetta corrispondenza tra QPT e DQPT. Questa mancata corrispondenza sarà all'origine della distinzione che si farà successivamente tra DQPT *robuste* e DQPT *accidentali*.

Zeri di Fisher

La definizione che si è appena data di DQPT in termini di non-analiticità della Loschmidt amplitude lascia aperte alcune questioni. In particolare, ci si potrebbe chiedere perché la Loschmidt amplitude diventi non analitica al trascorrere del tempo e se questa sia una caratteristica generale o richieda un fine tuning dei parametri di quench. Per verificare che si possono avere DQPT senza fine tuning conviene reintrodurre un concetto introdotto per la transizione di fase all'equilibrio: gli zeri di Fisher (FZ). Questo concetto richiede la complessificazione della funzione di partizione. Ora, anche se una funzione di partizione con parametri complessi non descrive un sistema fisico, la complessificazione di parametri reali è un metodo usato per lo studio delle transizioni di fase di equilibrio. Allo stesso modo, si effettua una complessificazione anche per lo studio della Loschmidt amplitude andando ad operare la sostituzione

$$z = R + it \in \mathbb{C}, \quad (1.26)$$

in questo modo la Loschmidt amplitude estesa al piano complesso è ora

$$\mathcal{G}(z) = \langle \psi_0 | e^{-\mathcal{H}_1 z} | \psi_0 \rangle. \quad (1.27)$$

Per sistemi a taglia finita la Loschmidt amplitude è una funzione analitica. Si può quindi applicare il teorema di fattorizzazione di Weierstraß e riscriverla come

$$\mathcal{G}(z) = e^{\mu(z)} \prod_j |z_j - z|, \quad (1.28)$$

²Nel caso unidimensionale i gradi di libertà coincidono con il numero di siti della catena.

con z_j zeri nel piano complesso e $\mu(z)$ funzione analitica. Pertanto tutte le proprietà di non-analiticità di $\mathcal{G}$ sono rinchiuse nella struttura degli zeri z_j . Concentrandosi sul contributo singolare alla rate function $g_s(z)$ della Loschmidt amplitude questo è dato da

$$g_s(z) = -\frac{1}{N} \sum_j \log|z_j - z|. \quad (1.29)$$

L'insieme degli zeri sarà formato da un numero finito di punti se $N < \infty$, mentre se $N \rightarrow \infty$ gli zeri formeranno una linea se il sistema è unidimensionale e un'area se è bidimensionale. Il risultato unidimensionale è una conseguenza del teorema di Lee-Yang che asserisce che se la funzione di partizione di un modello con interazioni ferromagnetiche è considerata come funzione di un campo esterno allora tutti i suoi zeri sono puramente immaginari³, mentre il risultato bidimensionale ne è una generalizzazione [10]. Considerando il caso unidimensionale, si hanno non-analiticità ogni volta che si attraversa una linea di FZ poiché si annulla l'argomento del logaritmo in (1.29). Tuttavia si ha effettivamente una DQPT solo quando si ha che $R = 0$, ovvero quando z_j è puramente immaginario. Perciò se si è in grado di determinare la forma delle linee di FZ nel piano complesso a seguito di un dato quench, la presenza di FZ puramente immaginari implica che debba occorrere una DQPT ad ogni z_j puramente immaginario. Inoltre, sfruttando ancora l'analogia con le transizioni di fase di equilibrio, si ha che le linee di FZ sono robuste sotto perturbazioni che lascino inalterata la simmetria del modello. Pertanto ci si attende che le linee di FZ abbiano struttura simile quando sono legate a quench simili. Ovvero, due quench $A_1 \rightarrow B_1$ e $A_2 \rightarrow B_2$ con A_1, A_2 e B_1, B_2 appartenenti alle stesse fasi devono dare luogo a linee di FZ che abbiano forma simile.

DQPT topologiche

Sono indicati con il termine *topologiche* le DQPT che hanno luogo in sistemi topologici come quello in esame. Le DQPT topologiche sono di particolare interesse poiché risultano essere intimamente connesse con le proprietà topologiche di equilibrio del sistema come verrà illustrato in seguito. Sono inoltre un utile punto di partenza per l'applicazione dei concetti precedentemente introdotti.

Si consideri un sistema topologico a due bande di fermioni non interagenti con invarianza traslazionale e simmetria buca-particella. Tutti i risultati ottenuti saranno validi per sistemi che risultino mappabili in una situazione di questo tipo. Il sistema scelto ammette per l'Hamiltoniana la rappresentazione compatta

$$H = \sum_{k \in \text{BZ}} c_k^\dagger \mathcal{H}_k c_k \quad (1.30)$$

dove c_k rappresenta un opportuno spinore a seconda che si stiano considerando ad esempio isolanti o superconduttori.

Le proprietà del sistema sono determinate dalla matrice Hermitiana 2×2 $\mathcal{H}_k$ che può essere espressa in termini delle matrici di Pauli come

$$\mathcal{H}_k = \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.31)$$

L'Hamiltoniana può essere diagonalizzata separatamente per ogni k in modo da ottenere i due stati di Bloch $|1_k\rangle$ e $|2_k\rangle$ con energie rispettivamente $-\epsilon_k$ e $+\epsilon_k$ (dove $\epsilon_k = |\mathbf{h}_k|$). I vari modi sono disaccoppiati tra di loro e pertanto il ground state, come qualsiasi altro autostato, è fattorizzabile come

$$|\psi_0\rangle = \prod_k |1_k\rangle. \quad (1.32)$$

Se si applica inoltre un protocollo di non equilibrio (come un quench) che non induce però accoppiamento tra i vari modi allora si ha anche che

$$|\psi_0(t)\rangle = \prod_k |1_k(t)\rangle, \quad (1.33)$$

³Questo teorema è per esempio utilizzabile per dimostrare l'assenza di transizioni nel modello di Ising unidimensionale.

di modo che la dinamica possa essere studiata separatamente per ogni modo k . Nel caso di un sudden quench il problema è completamente risolto considerando i vettori $\mathbf{h}_k^{i,f}$ per le Hamiltoniane iniziali e finali e tutte le grandezze corrispondenti.

Sfruttando quanto appena detto, si ha che la proprietà di fattorizzazione degli stati si estende anche alla Loschmidt amplitude che a sua volta si fattorizza come

$$\mathcal{G}(t) = \prod_h \mathcal{G}_k(t) = \prod_k \langle 1_k^i | 1_k^i(t) \rangle. \quad (1.34)$$

Per comodità è utile introdurre la quantità

$$n_k^f = |\langle 2_k^f | 1_k^i \rangle|^2, \quad (1.35)$$

che rappresenta l'occupazione dello stato di Bloch eccitato nell'Hamiltoniana finale. Per calcolare $\mathcal{G}_k(t)$ si espande $|1_k^i\rangle$ in termini dell'Hamiltoniana finale e si ottiene l'espressione

$$\mathcal{G}_k(t) = n_k^f e^{i\epsilon_{f,k}t} + (1 - n_k^f) e^{-i\epsilon_{f,k}t}. \quad (1.36)$$

Come noto, si ha DQPT quando si hanno zeri di $\mathcal{G}(t)$. Per la proprietà di fattorizzazione, si ha uno zero della Loschmidt amplitude ogni volta che si ha un modo critico k^* e un tempo critico t_c tali che $\mathcal{G}_{k^*}(t_c) = 0$. Questo si ha ogni volta che

$$n_{k^*}^f = \frac{1}{2}. \quad (1.37)$$

Questo implica una serie di tempi critici dati da

$$t_c^n = (2n + 1) \frac{\pi}{2\epsilon_{f,k^*}}. \quad (1.38)$$

È importante sottolineare come la condizione necessaria per la DQPT che si abbia $n_{k^*}^f = 1/2$ significhi che nel sistema i due livelli siano occupati in maniera identica, ovvero il sistema si trovi in uno stato equivalente a quello a temperatura infinita. Come sottolineato il precedenza, se con il quench si attraversa una linea di punti critici allora l'esistenza del modo k^* richiesto è assicurata. Si noti inoltre come l'attraversamento di una linea di punti critici coincida con una chiusura del gap nello spettro dell'Hamiltoniana.

Sfera di Bloch

Per trovare gli zeri di (1.34) si è utilizzata un'espansione nella base degli stati di Bloch. In generale, ogni stato $|\psi_k\rangle$ può essere espanso sugli stati di Bloch nella forma

$$|\psi_k\rangle = \cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right) |1_k\rangle + e^{i\varphi_k} \sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right) |2_k\rangle, \quad (1.39)$$

pertanto $|\psi_k\rangle$ è rappresentato sulla sfera di Bloch con coordinata polare $\theta_k \in [0, \pi]$ e coordinata azimutale $\varphi_k \in [0, 2\pi]$. Questa rappresentazione vale anche per stati che non sono di equilibrio, nel qual caso si ha

$$|\psi_k(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta_k(t)}{2}\right) |1_k\rangle + e^{i\varphi_k(t)} \sin\left(\frac{\theta_k(t)}{2}\right) |2_k\rangle, \quad (1.40)$$

che rappresenta una traiettoria sulla sfera di Bloch. In un sudden quench la scelta di avere lo stato iniziale coincidente con il ground state coincide con la richiesta che per ogni momento la rappresentazione dello stato sulla sfera di Bloch sia al polo nord della sfera, il che significa che $\theta_k(t=0) = 0$ e $|\psi_k(t=0)\rangle = |1_k^i\rangle$. Questa particolare rappresentazione è detta sfera di Bloch relativa.

In questa rappresentazione la condizione per avere una DQPT coincide con la richiesta che $\cos(\theta_{k^*}(t_c)/2) = 0$, ovvero $\theta_{k^*}(t_c) = \pi$. In altre parole, $|\psi_{k^*}(t_c)\rangle$ si trova al polo sud.

Transizioni robuste e accidentali

Finora si è osservato come ogni volta che si compia un quench tra 2 Hamiltoniane separate da una linea di punti critici si incorra in una DQPT. Le transizioni di questo tipo sono dette *robuste* o *topologicamente protette* perché legate alla natura topologica del sistema. Tuttavia non è escluso a priori che si possano osservare DQPT anche in seguito a quench fra Hamiltoniane appartenenti alla stessa fase topologica. Se si osservano DQPT in seguito a sudden quench di questo tipo queste transizioni prendono il nome di *accidentali* poiché sono dovute ad un fine tuning nella scelta dei punti di quench, pertanto cambiando il punto di partenza o di arrivo ma restando sempre all'interno della stessa fase non si osserva più alcuna transizione. Non vi è tuttavia alcun modo per distinguere DQPT robuste da DQPT accidentali studiando la forma della rate function della Loschmidt amplitude e le sue non-analiticità, si deve cercare quindi un nuovo modo per riconoscere i due casi.

La distinzione fra DQPT robuste e accidentali è l'unica classificazione che si introdurrà in questo lavoro: manca infatti ad oggi uno schema di classificazione per le transizioni di fase quantistiche analogo a quello esistente per le transizioni di fase classiche.

DQPT e slow quench

Finora si è trattato il caso di sudden quench, tuttavia questo non è l'unico possibile. Se infatti si suppone di variare uno dei parametri λ del modello in modo continuo nel tempo, ad esempio seguendo una rampa del tipo

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \frac{t}{\tau_Q}, \quad (1.41)$$

questo evolverà linearmente nel tempo dal valore iniziale λ_0 a $t = t_0$ fino ad un valore λ_f a t_f . Questa operazione è detta *slow quench* ed è caratterizzata, oltre che dai parametri iniziali e finali, dal tempo caratteristico di quench τ_Q che determina la pendenza della rampa⁴.

Se il quench passa attraverso un QCP si ha una chiusura di gap e la dinamica del sistema diventa non adiabatica indipendentemente da quanto lento sia il quench. Infatti se il gap tra ground state e primo livello eccitato, che in questo caso è l'unico altro livello presente, tende a zero è impossibile attraversare il QCP senza eccitare il sistema. Per questo motivo si vengono a creare dei difetti la cui densità dipende dalla velocità con cui è stato fatto il quench. Cose sia un difetto dipende dal modello in esame: in modelli cosmologici un difetto topologico con conseguenze osservabile può essere un monopolio [11], [12]; se invece si considera il modello di Ising [13] con transizione da paramagnete a ferromagnete, dove si hanno due ground state degeneri con spin che puntano uno verso l'alto e uno verso il basso lungo una certa direzione, i difetti topologici sono le linee di separazione tra le due direzioni di spin.

$$| \rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow \rangle \implies | \dots \uparrow \uparrow \uparrow \downarrow \downarrow \uparrow \uparrow \downarrow \downarrow \dots \rangle$$

Transizione di un modello di Ising da stato iniziale paramagnetico a stato finale ferromagnetico: i domini di spin up o down di grandezza finita sono separati da difetti topologici che sono effettivamente domain walls. La densità di questi domain walls sarà la grandezza successivamente cercata, ovvero la densità di difetti n_d .

Tornando allo slow quench: intuitivamente, se il quench è lento (τ_Q grande) la dinamica sarà non adiabatica solo in prossimità del QCP e si formeranno pochi difetti mentre più è veloce il quench più difetti si formeranno. Si suppone ora che il sistema a t_0 si trovi nel ground state dell'Hamiltoniana iniziale $\mathcal{H}_0$. Si effettua poi uno slow quench come descritto in precedenza attraversando un QCP. Il

⁴In questo senso, un sudden quench può essere visto come uno slow quench nel limite in cui $\tau_Q \rightarrow 0$

numero di difetti N_d che si ha nello stato finale è dato da

$$N_d = \sum_k p_k, \quad (1.42)$$

dove p_k è la probabilità di transire nello stato eccitato per il k -esimo modo.

In generale si può avere che $p_k \neq 0$ anche se lo slow quench non attraversa un QCP. Tuttavia l'attraversamento di un QCP implica una chiusura di gap e questo lascia una traccia ben riconoscibile. Infatti è stato dimostrato [12], [13], [14] che per modelli short range la densità di difetti n_d

$$n_d = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{N_d}{L} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk p_k \propto \frac{1}{\sqrt{\tau_Q}} \quad (1.43)$$

scala come $\tau_Q^{-1/2}$ se lo slow quench attraversa un QCP. Pertanto, studiando lo scaling di n_d è possibile stabilire se si sia attraversata o meno un QCP durante il quench.

Si sottolinea ancora una volta come questa relazione sia valida solo per modelli short range sia nell'hopping che nel pairing (il che significa che $\alpha, \beta \geq 2$). In caso ci si trovi in situazioni differenti si devono trovare che specifiche leggi di scaling che possono in generale dipendere dall'esponente che regola la natura a corto o lungo raggio del modello [14].

Problema di Landau-Zener

In generale non è semplice determinare p_k ma questo può essere molto semplice in alcuni casi particolari. Si consideri un sistema a due livelli energetici che presentano crossing e che si trova inizialmente nello stato ad energia più bassa: se il sistema viene fatto evolvere in maniera infinitamente lenta allora non si avrà mai una probabilità di transire nello stato eccitato diversa da zero. Tuttavia, se il sistema evolve con velocità finita allora questa probabilità sarà diversa da zero.

Si supponga che i due livelli energetici del sistema siano descritti da due funzioni d'onda ψ_1, ψ_2 rispettivamente per il ground state e lo stato eccitato. Inizialmente il sistema sarà descritto da ψ_1 se lo si prepara nel ground state. Se il sistema viene fatto evolvere con velocità finita, allora lo stato finale sarà dato da una combinazione lineare di ψ_1 e ψ_2 . Si introducono ora altre due funzioni d'onda ϕ_1 e ϕ_2 che sono combinazioni lineari di ψ_1 e ψ_2 tali che in determinate regioni dello spazio $\phi_1 \sim \psi_1$ e $\phi_2 \sim \psi_2$. Allora si ha che ϕ_1 e ϕ_2 soddisfano le equazioni, dove H è l'Hamiltoniana del sistema considerato,

$$H\phi_1 = \epsilon_1\phi_1 + \epsilon_{12}\phi_2 \quad (1.44)$$

$$H\phi_2 = \epsilon_{12}\phi_1 + \epsilon_2\phi_2, \quad (1.45)$$

dove $\epsilon_{1,2}$ sono rispettivamente le energie del ground state e dello stato eccitato. Ora si suppone che siano valide le condizioni

$$\frac{1}{\hbar}(\epsilon_2 - \epsilon_1) = \alpha t \quad (1.46)$$

$$\dot{\epsilon}_{12} = 0. \quad (1.47)$$

Se è così, è possibile dimostrare che la probabilità di transire nello stato finale all'istante t_f è data da [15], [16]

$$p = e^{-2\pi\Gamma} \quad (1.48)$$

$$\Gamma = \frac{\epsilon_{12}^2/\hbar}{|\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_2 - \epsilon_1)|} = \frac{\epsilon_{12}^2}{\hbar|\alpha|}. \quad (1.49)$$

Pertanto se nello studio di un sistema a 2 livelli ci si riesce a ricondurre ad un problema di Landau-Zener è possibile trovare immediatamente la probabilità di transizione necessaria al calcolo di n_d . Questa probabilità sarà dipendente dal modo k considerato poiché anche lo spettro del modello lo è.

1.3 DQPT in modello di Kitaev

Finora si sono introdotti separatamente il modello che si vuole esaminare e il concetto di DQPT. Si vede ora quando a seguito di un quench si osserva una DQPT in un modello di Kitaev generalizzato. Si ricorda che in questo caso il set di parametri da cui dipende l'Hamiltoniana è dato da $\{\lambda\} = \{\mu, \omega_0, \Delta, \alpha, \beta\}$. I quench riguarderanno tuttavia principalmente una variazione dei primi due elementi di $\{\lambda\}$, non c'è tuttavia nessun motivo particolare per lasciare fisso Δ . In seguito vengono fatti variare anche α e β per poter verificare alcune differenze che tra slow e sudden quench.

Sudden quench

Si utilizza il fatto che per il modello di Kitaev le proprietà sono tutte descritte dalla matrice hermitiana 2×2 $\mathcal{H}(k)$ descritta da (1.9) e che questa sia diagonalizzabile separatamente per ogni k appartenente alla zona di Brioullin⁵. La diagonalizzazione porta a definire due stati di Bloch indicati con $|1_k\rangle$ e $|2_k\rangle$ e di energie $-\epsilon(k)$ e $+\epsilon(k)$ date da (1.17). Pertanto si ha un modello a due bande con i vari modi disaccoppiati tra di loro. Pertanto, il ground state dell'Hamiltoniana può essere espresso come:

$$|\psi_0\rangle = \prod_{k \in \text{BZ}} |1_k\rangle, \quad (1.50)$$

o, se dipendente dal tempo, come:

$$|\psi_0(t)\rangle = \prod_{k \in \text{BZ}} |1_k(t)\rangle. \quad (1.51)$$

In generale però ogni stato di un settore k può essere espanso nella base ortonormale degli stati di Bloch $|1_k\rangle, |2_k\rangle$. In particolare, dato lo stato $|\psi_0\rangle$ dell'Hamiltoniana iniziale $\mathcal{H}(\lambda_i)$ si può scrivere una sua componente di un generico settore k in termini degli stati di Bloch dell'Hamiltoniana finale $\mathcal{H}(\lambda_f)$:

$$|\psi_0^k\rangle = u_f(k)|1_k^f\rangle + v_f(k)|2_k^f\rangle, \quad (1.52)$$

con $|u_f(k)|^2 + |v_f(k)|^2 = 1$. Come già illustrato in precedenza vale il teorema di fattorizzazione di Weierstrass per la Loschmidt amplitude, pertanto usando già la complessificazione del tempo $z = R + it$ si ha che

$$\mathcal{G}(z) = \prod_{k \in \text{BZ}} \mathcal{G}_k(z) \quad (1.53)$$

$$g(z) = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_k \log \mathcal{G}_k(z), \quad (1.54)$$

dove per una catena unidimensionale il numero di gradi di libertà N è dato dal numero di siti L . Per il calcolo esplicito della rate function e delle sue non-analiticità basta quindi lavorare su $\mathcal{G}_k(z)$. Per definizione,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_k(z) &= \langle \psi_0^k | \psi_0^k(z) \rangle = \langle \psi_0^k | e^{-\mathcal{H}_f z} | \psi_0^k \rangle = \langle \psi_0^k | \left(u_f(k) e^{\epsilon_f(k)z} |1_k^f\rangle + v_f(k) e^{-\epsilon_f(k)z} |2_k^f\rangle \right) = \\ &= |u_f(k)|^2 e^{\epsilon_f(k)z} + |v_f(k)|^2 e^{-\epsilon_f(k)z} \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(z) &= - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_k \log \left(|u_f(k)|^2 e^{\epsilon_f(k)z} + |v_f(k)|^2 e^{-\epsilon_f(k)z} \right) = \\ &= - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi dk \log \left(|u_f(k)|^2 e^{\epsilon_f(k)z} + |v_f(k)|^2 e^{-\epsilon_f(k)z} \right). \end{aligned} \quad (1.56)$$

⁵Questo indica che i vari modi k sono disaccoppiati tra di loro

Gli zeri di Fisher sono dati dagli z che annullano l'argomento del logaritmo, ovvero da

$$\begin{aligned}
& |u_f(k)|^2 e^{\epsilon_f(k)z} + |v_f(k)|^2 e^{-\epsilon_f(k)z} = 0 \\
& |u_f(k)|^2 e^{2\epsilon_f(k)z} + |v_f(k)|^2 = 0 \\
& 2\epsilon_f(k)z = \log\left(\frac{-|v_f(k)|^2}{|u_f(k)|^2}\right) = \log\left(\frac{|v_f(k)|^2}{|u_f(k)|^2}\right) - i(2n+1)\pi \quad n \in \mathbb{N} \\
& \Rightarrow z_n = \frac{1}{2\epsilon_f(k)} \left(\log\left(\frac{|v_f(k)|^2}{|u_f(k)|^2}\right) - i(2n+1)\pi \right).
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Ora è possibile identificare la probabilità di transire nello stato eccitato finale del settore k $|2_k^f\rangle$ partendo dallo stato iniziale $|1_k^i\rangle$ con $|v_f(k)|^2$, ovvero vado a definire

$$p(k) = |v_f(k)|^2 = |\langle 1_k^i | 2_k^f \rangle|^2, \tag{1.58}$$

Utilizzando la quale è possibile riscrivere z_n come

$$z_n = \frac{1}{2\epsilon_f(k)} \left(\log\left(\frac{p(k)}{1-p(k)}\right) - i(2n+1)\pi \right) \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.59}$$

Tuttavia gli zeri fisici sono solo quelli per cui $\text{Re}(z_n) = 0$, cioè quelli per cui esiste un modo k^* tale che:

$$\log\left(\frac{p(k^*)}{1-p(k^*)}\right) = 0 \tag{1.60}$$

$$\Rightarrow p(k^*) = \frac{1}{2}. \tag{1.61}$$

A questo modo k^* sono associati dei tempi critici che sono dati dalla parte immaginaria dello zero di Fisher:

$$t_n = \frac{\pi}{2\epsilon_f(k^*)} (2n+1) \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.62}$$

Prima di proseguire, si noti che l'esistenza del modo k^* dipende dal quench effettuato, ovvero dalla scelta dei parametri di $\mathcal{H}_i$ e $\mathcal{H}_f$. Inoltre non è nemmeno noto a priori quanti modi k^* linearmente indipendenti si abbiano dato un certo quench, anche se il numero di modi k^* è legato in qualche modo ai winding number w dei punti di quench iniziali e finali. Questo verrà tuttavia approfondito in seguito nella Sezione 1.4.

È possibile inoltre ricavare una forma per la rate function della Loschmidt echo $\lambda(t)$. Essa infatti è data da:

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_k \log(|\mathcal{G}_k(t)|^2) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^\pi dk \log(|\mathcal{G}_k(t)|^2) \\
\mathcal{G}_k(t) &= (1-p(k))e^{i\epsilon_f(k)t} + p(k)e^{-i\epsilon_f(k)t} = \cos(\epsilon_f(k)t) + i(1-2p(k))\sin(\epsilon_f(k)t) \\
|\mathcal{G}_k(t)|^2 &= \cos^2(\epsilon_f(k)t) + (1-2p(k))^2 \sin^2(\epsilon_f(k)t) = 1 + 4p(k)(p(k)-1)\sin^2(\epsilon_f(k)t) \\
\Rightarrow \lambda(t) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^\pi \log(1 + 4p(k)(p(k)-1)\sin^2(\epsilon_f(k)t)) \, dk.
\end{aligned} \tag{1.63}$$

Rimane ora solo da trovare una forma esplicita per $p(k)$ per poter calcolare esplicitamente tutte le grandezze di interesse: Loschmidt amplitude, Loschmidt echo e relative rate function.

Per trovare la forma di $p(k)$, si riprende la trasformazione di Bogoliubov (1.12) che porta alla forma diagonale $\mathcal{H}_D$. Questo permette di scrivere

$$|1_k^{1,f}\rangle = \cos\theta_k^{i,f} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin\theta_k^{i,f} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

$$|2_k^{i,f}\rangle = \sin\theta_k^{i,f} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\theta_k^{i,f} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.65}$$

Da (1.58) segue che

$$\sqrt{p(k)} = (\cos \theta_k^i, -\sin \theta_k^1) \begin{pmatrix} \sin \theta_k^f \\ \cos \theta_k^f \end{pmatrix} = \cos \theta_k^i \sin \theta_k^f - \sin \theta_k^i \cos \theta_k^f \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} p(k) &= (\cos \theta_k^i \sin \theta_k^f - \sin \theta_k^i \cos \theta_k^f)^2 = [\sin(\theta_k^i - \theta_k^f)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} [1 - (\cos(2\theta_k^i) \cos(2\theta_k^f) + \sin(2\theta_k^i) \sin(2\theta_k^f))] \end{aligned} \quad (1.67)$$

Esplicitando la dipendenza dai parametri dei punti di quench iniziali e finali si ottiene

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{\mu_i}{2} + \omega_{0,i} g_{\alpha_i}(k) \right)^2 + (\Delta_i f_{\beta_i}(k))^2 \right] \left[\left(\frac{\mu_f}{2} + \omega_{0,f} g_{\alpha_f}(k) \right)^2 + (\Delta_f f_{\beta_f}(k))^2 \right]}} \right\} \times \\ &\times \left[\left(\frac{\mu_i}{2} + \omega_{0,i} g_{\alpha_i}(k) \right) \left(\frac{\mu_f}{2} + \omega_{0,f} g_{\alpha_f}(k) \right) + \Delta_i \Delta_f f_{\beta_i}(k) f_{\beta_f}(k) \right], \end{aligned} \quad (1.68)$$

dove con i e f si indicano i parametri che si riferiscono ai punti iniziali o finali di quench. Tuttavia è possibile riscrivere (1.68) in forma più compatta come

$$p(k) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{a(k)b(k)}} \chi(k) \right\}, \quad (1.69)$$

con

$$a(k) = \epsilon_i^2(k) = \left(\frac{\mu_i}{2} + \omega_{0,i} g_{\alpha_i}(k) \right)^2 + (\Delta_i f_{\beta_i}(k))^2 \quad (1.70)$$

$$b(k) = \epsilon_f^2(k) = \left(\frac{\mu_f}{2} + \omega_{0,f} g_{\alpha_f}(k) \right)^2 + (\Delta_f f_{\beta_f}(k))^2 \quad (1.71)$$

$$\chi(k) = \left(\frac{\mu_i}{2} + \omega_{0,i} g_{\alpha_i}(k) \right) \left(\frac{\mu_f}{2} + \omega_{0,f} g_{\alpha_f}(k) \right) + \Delta_i \Delta_f f_{\beta_i}(k) f_{\beta_f}(k). \quad (1.72)$$

È interessante notare come questa forma di $p(k)$ sia particolarmente utile poiché, dato che si hanno DQPT in presenza dei modi k^* tali che $p(k^*) = 1/2$, per trovare il modo k^* si deve risolvere l'equazione

$$\chi(k) = 0, \quad k \in [0, \pi]. \quad (1.73)$$

In generale, a causa della forma analitica di $g_\alpha(k)$ e $f_\beta(k)$ date da (1.10),(1.11), questa equazione non è risolvibile analiticamente ma deve essere risolta numericamente. Inoltre, nel caso di numero di vicini infinito $r \rightarrow \infty$ $g_\alpha(k)$ e $f_\beta(k)$ assumono la forma

$$g_\alpha(k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(kl)}{l^\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{ikl} + e^{-ikl}}{l^\alpha} = \frac{1}{2} \left(\text{Li}_\alpha(e^{ik}) + \text{Li}_\alpha(e^{-ik}) \right) \quad (1.74)$$

$$f_\beta(k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(kl)}{l^\beta} = \frac{1}{2i} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{ikl} - e^{-ikl}}{l^\beta} = \frac{1}{2i} \left(\text{Li}_\beta(e^{ik}) - \text{Li}_\beta(e^{-ik}) \right), \quad (1.75)$$

dove si indica con $\text{Li}_\alpha(z)$ il polilogaritmo di ordine α e argomento z .

Slow quench

Come illustrato in precedenza, se la densità di difetti topologici n_d presenta uno scaling ben definito (di Kibble-Zurek per modelli short range o diverso per modelli long-range) allora si ha che lo sudden quench considerato ha attraversato un QCP. La densità di difetti è data da

$$n_d = \frac{N}{L}, \quad (1.76)$$

Dove N è il numero di difetti e L il numero di siti della catena. Il numero di difetti altro non è che il numero di quasi particelle eccitate nel punto finale di quench, pertanto l'operatore per il numero di difetti è

$$\mathcal{N} = \sum_k \eta_k^\dagger \eta_k \quad (1.77)$$

dove la probabilità di eccitazione nello stato finale è

$$p_k = \langle \psi_f | \eta_k^\dagger \eta_k | \psi_f \rangle, \quad (1.78)$$

ed infine il numero di difetti è dato da

$$N = \sum_k p_k = \langle \psi_f | \mathcal{N} | \psi_f \rangle. \quad (1.79)$$

Per calcolare questa probabilità è necessario conoscere $|\psi_f\rangle$ e questa dipende dal tipo di quench utilizzato. Per lo studio di interesse, si fanno quench sul potenziale chimico μ o sull'esponente β di pairing. Poiché ad ogni istante t è possibile scrivere

$$|\psi_k(t)\rangle = \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix}, \quad (1.80)$$

dove $|u_k(t)|^2$ rappresenta la probabilità di trovarsi nello stato non eccitato $|v_k(t)|^2$ quella di trovarsi nello stato eccitato. L'equazione di Schrödinger da risolvere diventa pertanto, imponendo $\hbar = 1$, utilizzando l'Hamiltoniana di (1.9) ed esplicitando i parametri con dipendenza temporale

$$i \frac{d}{dt} u_k(t) = - \left(\frac{\mu(t)}{2} + \omega_0 g_{\alpha,k} \right) u_k(t) - i \Delta f_{\beta(t),k} v_k(t) \quad (1.81)$$

$$i \frac{d}{dt} v_k(t) = i \Delta f_{\beta(t),k} u_k(t) + \left(\frac{\mu(t)}{2} + \omega_0 g_{\alpha,k} \right) v_k(t), \quad (1.82)$$

con condizioni iniziali $|u_k|^1 = 1$, $|v_k|^2 = 0$. Per la base scelta per rappresentare $|\psi\rangle$ si ha che

$$p_k = |v_k(t_f)|^2. \quad (1.83)$$

Passando poi nel limite del continuo si dimostra immediatamente che

$$n_d = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk p_k \quad (1.84)$$

che è la quantità cercata.

Ora si analizzano le differenze tra i due diversi tipi di slow quench proposti in precedenza

Quench su μ : In questo caso β è costante nel tempo mentre è invece μ a cambiare. Si sceglie di partire da $\mu \gg 1$ a $t = -\infty$ e di arrivare a $\mu = 0$ a $t = 0$ con una rampa lineare. Pertanto si ha che

$$\mu(t) = \frac{-t}{\tau_Q}, \quad (1.85)$$

con τ_Q tempo proprio del quench. Esplicitando la dipendenza temporale di μ e andando ad effettuare la sostituzione⁶

$$t = 2\tau_Q \omega_0 g_{\alpha,k} + \frac{\tau}{i \Delta f_{\beta,k}}, \quad (1.86)$$

nelle equazioni (1.81),(1.82) queste diventano (sfruttando anche il fatto che $dt = \frac{d\tau}{i \Delta f_{\beta,k}}$)

$$i \frac{d}{d\tau} u_k = -\tau \tilde{\Delta}_k u_k + v_k \quad (1.87)$$

$$i \frac{d}{d\tau} v_k = u_k + \tau \tilde{\Delta}_k v_k, \quad (1.88)$$

⁶È importante notare come il cambio di variabili dipenda dalla forma scelta per la rampa

con $\tilde{\Delta}_k = \frac{1}{2\tau_Q(\Delta f_{\beta,k})^2}$. Il sistema di equazione differenziali è ora un analogo del problema di Landau-Zener (LZ) di cui è nota la soluzione [LZ]. Il problema di LZ consiste nella soluzione di un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$i\hbar \frac{d}{dt} u = \epsilon_1 u + \epsilon_{12} v \quad (1.89)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} v = \epsilon_{12} u + \epsilon_2 v, \quad (1.90)$$

per trovare la probabilità di transizione nel livello eccitato in un sistema a due livelli energetici. Sotto le condizioni di Landau-Zener

$$\begin{cases} \epsilon_2 - \epsilon_1 = \alpha t \\ \dot{\epsilon}_{12} = 0, \end{cases} \quad (1.91)$$

si ha che la probabilità di transizione nel livello eccitato risulta essere

$$p = e^{-2\pi\Gamma}, \quad (1.92)$$

con $\Gamma = \epsilon_{12}^2 / |\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_2 - \epsilon_1)| = \epsilon_{12}^2 / \alpha^2$. In particolare si ha allora che per il caso in esame (dove andrà usata τ come variabile di derivazione)

$$p_k = e^{-2\pi\tau_Q(\Delta f_{\beta,k})^2}. \quad (1.93)$$

A partire da questa espressione per p_k si può calcolare poi n_d per via numerica.

Quench su β : Anche in questo caso è possibile costruire un quench con una rampa lineare da t_0 a t_f per β del tipo

$$\beta(t) = \frac{t}{\tau_Q} + \beta(t_0). \quad (1.94)$$

Tuttavia in questo caso non ci si può ricondurre al caso LZ perché la dipendenza temporale si trova nei due elementi fuori diagonale della matrice relativa all'Hamiltoniana (1.9). Pertanto si deve risolvere l'equazione di Schrödinger per trovare quanto cercato, mentre prima non era stato necessario in quanto ci si era ricondotti ad un problema di cui era già nota la soluzione. Infine si anticipa che il calcolo di p_k tramite risoluzione dell'equazione di Schrödinger sarà il metodo utilizzato per un quench in cui variano sia μ che β .

Scaling di n_d

Come detto n_d presenta una relazione di scaling ben precisa con τ_Q , tuttavia questa relazione dipende dal modello considerato e dal tipo di quench che si impone. In particolare si vogliono ottenere le relazioni di scaling per quench del primo tipo, dove μ varia mentre β è costante. In questo caso si hanno 3 diverse possibilità:

1. $\beta \geq 2$ (modelli short range)
2. $1 < \beta < 2$ (regione di crossover)
3. $\beta \leq 1$ (modelli short range).

Quello che si cerca sono relazioni del tipo $n_d \propto \tau_Q^{-\nu}$. Per i modelli a corto raggio si applica il meccanismo di Kibble-Zurek [12] che fornisce la relazione di scaling

$$n_d \propto \frac{1}{\sqrt{\tau_Q}}, \quad (1.95)$$

pertanto $\nu = 1/2$.

Se invece β appartiene alla regione di crossover o alla regione a lungo raggio la relazione di scaling è differente. Si ricorda che si sta lavorando nel limite di catena infinita, per cui la funzione $f_{\beta,k}$ un

polilogaritmo. Nel limite di τ_q grandi, l'espressione (1.93) è significativamente diversa da zero solo per $k \sim 0$ e pertanto si può usare l'espansione in serie del polilogaritmo per β non interi [17]

$$f_\beta(k) = 2 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \Gamma(1-\beta) \text{sign}(k) k^{\beta-1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi n}{2}\right) \frac{\zeta(\beta-n)}{n!} k^n. \quad (1.96)$$

Tuttavia in (1.93) serve il quadrato di questa espressione, che risulta essere

$$\begin{aligned} (f_\beta(k))^2 &= 4 \cos^2\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \Gamma^2(1-\beta) k^{2(\beta-1)} + 8 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \zeta(\beta-1) \Gamma(1-\beta) k^\beta + 4 \zeta^2(\beta-1) k^2 + o(k^3) = \\ &= c_1(\beta) k^{2(\beta-1)} + c_2(\beta) k^\beta + c_3(\beta) k^2 + o(k^3). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Nel calcolo di n_d si può ora scrivere

$$n_d = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk p k \approx \int_{-\infty}^{\infty} dk p k, \quad (1.98)$$

poiché il contributo maggiore all'integrale è dato da $k \sim 0$. Questo può essere ulteriormente approssimato come [14]

$$n_d \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(\pi c_1(\beta) \tau_Q)^{1/(2\beta-2)}} + \frac{1}{(\pi c_2(\beta) \tau_Q)^{1/\beta}} + \frac{1}{(\pi c_3(\beta) \tau_Q)^{1/2}} \right). \quad (1.99)$$

Poiché se $\beta < 2$ il contributo maggiore è dato dal termine contenente $c_1(\beta)$ si è quindi trovata la relazione di scaling desiderata

$$n_d \propto \frac{1}{\tau_Q^{1/(2\beta-2)}}, \quad (1.100)$$

pertanto $\nu = 1/(2\beta - 2)$.

Si è quindi compreso come individuare le DQPT a seguito di un quench: bisogna o calcolare le rate function, in particolare quella della Loschmidt echo, che con le loro non-analiticità ai tempi critici dati da (1.62) indicano l'avvenire di una DQPT, o calcolare la densità dei difetti in caso di slow quench e osservare il suo scaling con τ_Q . Si deve però ora capire come sono legate le DQPT al winding number definito da (1.8) in entrambi i tipi di quench.

1.4 Legame tra DQPT e winding number

Si vuole ora cercare un legame esplicito tra il winding number dei punti iniziali e finali di quench e le DQPT che si osservano. Si inizia studiando il caso di sudden quench.

Numero di DQPT e winding number

Per stabilire un legame tra winding number e DQPT si inizia ragionando sulle conseguenze matematiche dell'osservazione di una DQPT.

Si è dimostrato come l'Hamiltoniana del modello sia scrivibile nella forma (1.4) e come $\mathcal{H}(k)$ sia esprimibile nella forma (1.7). Da questa forma è possibile ricavare direttamente una scrittura per la Loschmidt amplitude come

$$\mathcal{G} = \prod_k \left[\cos(\epsilon_f(k)t) + i \hat{\mathbf{h}}^i(k) \cdot \hat{\mathbf{h}}^f(k) \sin(\epsilon_i(k)t) \right] \quad (1.101)$$

con il prodotto sui k che si estende su metà della zona di Brillouin perché si sta trattando un superconduttore. Per i risultati ottenuti nella sezione 1.3 si può dedurre che $\hat{\mathbf{h}}^i(k) \cdot \hat{\mathbf{h}}^f(k) = 1 - 2p(k)$,

utilizzando quindi (1.59) e le proprietà delle funzioni iperboliche inverse si ottiene per gli zeri di Fisher l'espressione

$$z_n(k) = \frac{i\pi}{2\epsilon_f(k)}(2n+1) - \frac{1}{\epsilon_f(k)} \operatorname{arctgh}(\hat{\mathbf{h}}^i(k) \cdot \hat{\mathbf{h}}^f(k)). \quad (1.102)$$

Poiché gli zeri fisici sono esclusivamente quelli puramente immaginari, la condizione per osservare una DQPT è che per qualche k i vettori $\mathbf{h}_k$ delle Hamiltoniane iniziali e finali siano ortogonali.

Partendo da questo risultato si fa la seguente asserzione [18]

Proposizione 1.1. *Se si opera un sudden quench tra 2 punti caratterizzati da winding number w_1 e w_2 rispettivamente, allora si osserverà un numero di DQPT N_{DQPT} dato da*

$$N_{DQPT} = |\Delta w|.$$

Dimostrazione. Un DQPT si ha quando gli zeri di Fisher sono puramente immaginari, il che avviene per $\hat{\mathbf{h}}^i(k) \cdot \hat{\mathbf{h}}^f(k) = 0$. Nel modello di Kitaev questo versore appartiene al piano yz per le simmetrie dell'Hamiltoniana. Si può definire l'angolo di rotazione ϕ_k del versore $\hat{\mathbf{h}}(k)$. Siccome lo spazio dei momenti è dato da $k \in [0, \pi]$ per definizione di winding number si ha che

$$\pi w_i = \phi_\pi^i - \phi_0^i \quad (1.103)$$

$$\pi w_f = \phi_\pi^f - \phi_0^f \quad (1.104)$$

L'angolo di rotazione $\Delta\phi_k = \phi_k^f - \phi_k^i$ cambierà di $\pi\Delta w$ nell'intervallo considerato nello spazio dei momenti, pertanto il prodotto $\hat{\mathbf{h}}^i(k) \cdot \hat{\mathbf{h}}^f(k)$ si annulla Δw volte e si hanno Δw DQPT. $\square$

Questo risultato rafforza quanto già visto, ovvero che una condizione sufficiente per osservare DQPT è che si abbia $\Delta w \neq 0$ per il quench considerato. Inoltre si è anche fornita una previsione quantitativa sul numero di DQPT attese.

Tuttavia, non sono escluse le DQPT accidentali. Infatti i due vettori $\mathbf{h}_k$ potrebbero essere ortogonali per qualche k anche se si realizzasse un quench all'interno della stessa fase: si deve ancora trovare un modo per caratterizzare completamente le transizioni accidentali. Si è però svolto un primo passo: se infatti si ha che $N_{DQPT} \neq |\Delta w|$ allora si ha necessariamente almeno una DQPT accidentale. Questa caratterizzazione verrà ora realizzata utilizzando le linee di zeri di Fisher che si formano nel piano complesso per modelli 1D.

Linee di FZ e riconoscimento transizioni robuste/accidentali

Come già evidenziato nella Sezione 1.2, in sistemi 1D gli zeri di Fisher formano una linea nel piano complesso. La forma di questa linea è inoltre robusta sotto piccole deformazione, ovvero sotto deformazioni che lasciano invariata la fase dei punti di quench iniziali e finali. Si vogliono ora utilizzare queste proprietà, insieme alla proposizione precedentemente dimostrata, per dare una completa caratterizzazione delle DQPT accidentali e robuste.

Si è visto in precedenza come nella linea di zeri di Fisher gli unici zeri fisici siano quelli puramente immaginari: disegnando quindi una linea di FZ nel piano complesso a seguito di un quench si ha DQPT solo quando questa interseca l'asse immaginario, inoltre N_{DQPT} è dato evidentemente dal numero di intersezioni. Per procedere, richiamiamo la forma degli zeri di Fisher (1.59) (consideriamo $n = 0$):

$$z(k) = \frac{1}{2\epsilon_f(k)} \left(\log \left(\frac{p(k)}{1-p(k)} \right) - i\pi \right), \quad (1.105)$$

che come già illustrato da zeri fisici solo quando $p(k) = 1/2$ per $k \in [0, \pi]$. Poiché ai bordi della zona di Brillouin si ha che $p(k) \rightarrow 0$ o $p(k) \rightarrow 1$ in generale per modelli simili a quello in esame [14], [18], si ha che per $k \rightarrow 0, \pi$

$$\operatorname{Re}(z(k)) \xrightarrow[k \rightarrow 0, \pi]{} \pm\infty \quad (1.106)$$

dove il segno dell'infinito in relazione a $k \rightarrow 0$ e $k \rightarrow \pi$ dipende dal particolare quench considerato. Pertanto la parte reale delle linee di FZ tende ad un infinito. Le linee di FZ sono continue a meno che il quench che si effettui non termini su una linea di punti critici, nel qual caso si possono presentare delle discontinuità [18] ma in questo lavoro non si è trattata questa eventualità. Essendo quindi le linee continue, se ad esempio $\text{Re}(z(k)) \rightarrow -\infty$ per $k \rightarrow 0$ e $\text{Re}(z(k)) \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow \pi$ allora si deve avere almeno una DQPT o comunque un numero dispari di esse. Viceversa, se i limiti per $k \rightarrow 0, \pi$ hanno segno concorde si può avere un numero pari di DQPT o nessuna. Infine, anche per modelli in cui $p(k)$ non tende a 0 o 1 ai bordi della zona di Brillouin essa varia comunque con continuità e quindi $\text{Re}(z(k))$ può assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$.

Si può quindi iniziare la classificazione delle linee di FZ nel seguente modo

1. Scelta dei punti di quench A (iniziale) e B (finale).
2. Calcolo degli FZ e disegno della linea.
3. Variare A (o B) e disegnare la nuova linea di FZ.

In questo modo si osserva che per ogni quench da una fase ad un'altra si ha una forma della linea di FZ ben definita. Se si considerano poi quench all'interno della stessa fase si devono avere limiti della parte reale alle estremità della zona di Brillouin con segno concorde: in generale questo fa sì che la linea di FZ non intersechi l'asse immaginario. Se però si tiene fisso il punto A e si modifica il punto B si osserva che questo comporta uno spostamento della linea di FZ che può portarla ad intersecare un numero pari di volte l'asse immaginario. Un esempio è dato dalla Figura 1.1 dove si è scelto $\Delta = 1$, $r = 2$, $\alpha = 0$ e $\beta = \infty$ e il punto $\mu = 5, \omega_0 = 0.5$ appartenete alla fase $w = 0$ come punto iniziale di quench:

Questo è decisamente un caso di DQPT accidentale, poiché i punti A e B appartengono alla stessa fase. Pertanto, una transizione accidentale è dovuta ad uno shift della linea di FZ senza che ne venga modificata la forma che determina la comparsa di un numero pari di DQPT non previste perché non dovute ad alcun Δw . Si può quindi completare la Proposizione 1.1 come

Proposizione 1.2. *Se si opera un sudden quench tra 2 punti caratterizzati da winding number w_1 e w_2 rispettivamente, allora si osserverà un numero di DQPT N_{DQPT} dato da*

$$N_{DQPT} = |\Delta w|.$$

Nel caso $\Delta w = 0$ se i punti di quench sono opportunamente scelti si ha un N_{DQPT} pari dovuto ad uno shift della linea di zeri di Fisher.

In conclusione, si è ottenuta un metodo per distinguere chiaramente tra DQPT robuste ed accidentali basato sull'analisi delle linee di zeri di Fisher di vari quench.

Non è invece possibile stabilire un risultato analogo per lo slow quench poiché:

1. In linea di principio uno slow quench tra due differenti fasi separate da una linea di punti critici potrebbe seguire un percorso tale da evitare la suddetta linea. In questo caso si potrebbe quindi avere $\Delta w \neq 0$ ma $N_{DQPT} = 0$. Intuitivamente, questo potrebbe avvenire perché uno slow quench è caratterizzato dal percorso che si va a compiere sullo spazio dei parametri e diventa pertanto possibile evitare le linee di punti critici dove si ha chiusura di gap se il percorso è scelto in maniera opportuna. Al contrario un sudden quench è caratterizzato esclusivamente dai parametri d'ordine topologici iniziali e finali e non vi è pertanto alcun percorso nello spazio dei parametri.
2. In uno slow quench una DQPT è caratterizzata a grandezze diverse rispetto agli zeri di Fisher e pertanto un'analisi come quella appena svolta non sarebbe utile.

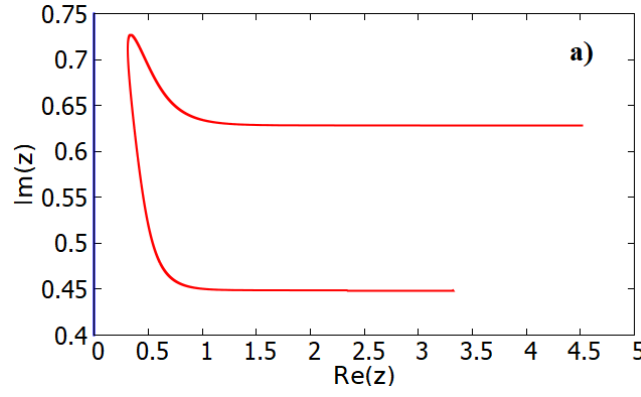


Figura 1.1 a): Linee di FZ per quench con partenza da $\Delta = 1$, $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ e $\mu = 5, \omega_0 = 0.5$ appartenete alla fase $w = 0$ e arrivo $\mu = -5, \omega_0 = -0.5$ appartenente alla fase $w = 0$. Si noti l'assenza di FZ fisici.

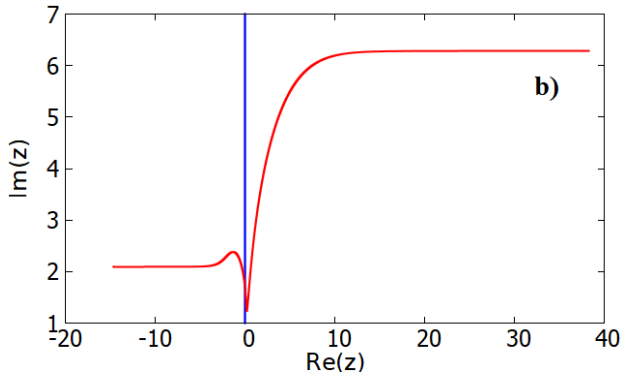


Figura 1.1 b): Linee di FZ per quench con partenza da $\Delta = 1$, $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ e $\mu = 5, \omega_0 = 0.5$ appartenete alla fase $w = 0$ e arrivo $\mu = -0.5, \omega_0 = 0.5$ appartenente alla fase $w = 1$. In questo caso un solo zero fisico è presente.

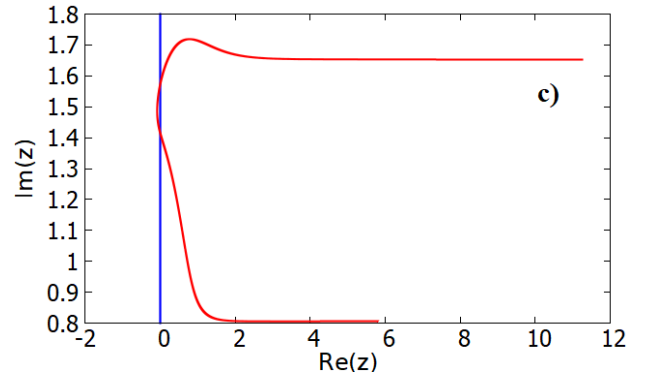


Figura 1.1 c): Linee di FZ per quench con partenza da $\Delta = 1$, $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ e $\mu = 5, \omega_0 = 0.5$ appartenete alla fase $w = 0$ e arrivo $\mu = -1.9, \omega_0 = -0.5$ appartenente alla fase $w = 0$. Si noti la presenza di 2 zeri fisici dovuti ad una DQPT accidentale.

1.5 Diagrammi di fase del modello di Kitaev

Si vanno ora ad introdurre i diagrammi di fase del modello di Kitaev. Si inizierà con i diagrammi già noti su cui si andranno ad utilizzare le grandezze e i metodi appena definiti.

Nel modello di Kitaev sono presenti 6 parametri: il potenziale chimico μ , l'ampiezza di hopping ω_0 , l'accoppiamento superconduttivo Δ , i 2 esponenti α e β e il numero di vicini r . Lo spazio dei parametri risulta pertanto esadimensionale ma per ottenere qualcosa di visualizzabile si fisseranno di volta in volta 4 parametri e si lasceranno gli altri due liberi di variare. In particolare non si svolgerà mai nessun quench in cui r cambi poiché non è in generale chiaro quale operazione fisica rende possibile cambiare r in maniera del tutto arbitraria. Inoltre si distinguono due casi diversi: quello di r finito e di r infinito. Questi due casi sono sensibilmente differenti poiché cambia sensibilmente la natura delle funzioni $g_\alpha(k)$ e $f_\beta(k)$ descritte da (1.10) e (1.11): solo nel caso di numero di vicini infinito esse assumono la forma polilogaritmica di (1.74) e (1.75).

Nel seguito, si fornisce un breve riassunto sul metodo standard di calcolo e si espongono i diagrammi di fase già noti per determinate configurazioni nello spazio dei parametri.

Numero di vicini finito

Si analizzano ora le varie possibilità legate agli esponenti α e β , partendo dal caso in cui solo l'hopping è a lungo raggio e passando poi al caso di pairing a lungo raggio ed entrambi a lungo raggio.

Hopping a lungo raggio

Si è nel caso in cui r è finito, $\beta = \infty$ e $\alpha < \infty$. Questo significa che

$$f_{\beta \rightarrow \infty} = \sin k. \quad (1.107)$$

A causa di questo fatto le uniche possibilità per avere $w \neq 0$ sono $w = \pm 1$, poiché il vettore $\mathbf{h}$ può compiere un solo giro attorno all'origine dello spazio dei momenti. Pertanto si può avere per ogni estremità un solo modo di Majorana non massivo (MZM). È possibile dimostrare che in questa situazione si può ricavare l'espressione analitica per le linee di punti critici [2]. Per $\omega_0 > 0$ queste sono date da

$$-2\omega_0 H_r^\alpha < \mu < 2\omega_0 R_r^\alpha, \quad (1.108)$$

con H_r^α numero armonico generalizzato di ordine α e $R_r^\alpha = (1 - 2^{1-\alpha})\zeta(\alpha) - \zeta(\alpha, 1+r) + 2^{1-\alpha}\zeta(\alpha, 1 + \lfloor r/2 \rfloor)$. Pertanto si ha che $w = 1$ se μ si trova nell'intervallo indicato. Nel limite in cui anche $\alpha \rightarrow \infty$ si riottengono le linee di punti critici del modello di Kitaev standard $-2\omega_0 < \mu < 2\omega_0$. In Figura 1.2 è disegnato il diagramma di fase per $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, $\Delta = 1$ e $r = 2$ al variare di μ e ω_0 .

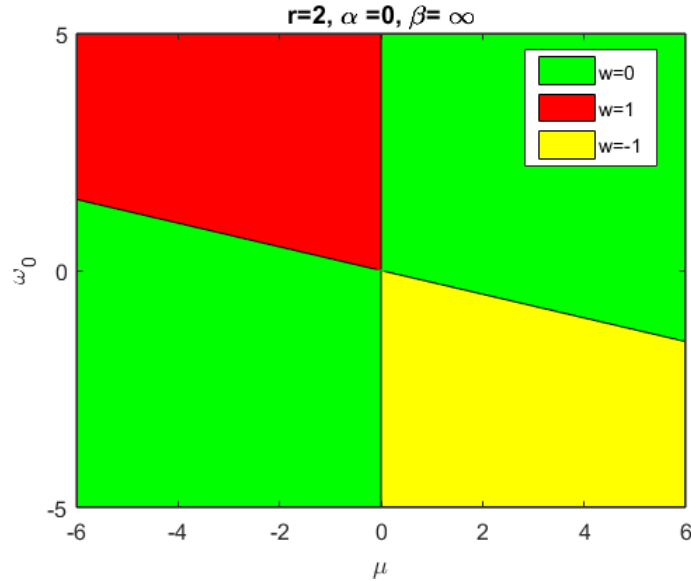


Figura 1.2: Diagramma di fase per il caso $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, $r = 2$ e $\Delta = 1$.

Pairing a lungo raggio

Questo è il caso speculare rispetto al precedente, dove si ha che $\alpha \rightarrow \infty$ e $\beta < \infty$. Anche in questo caso w oltre a 0 può assumere solamente i valori di ± 1 , ma il diagramma di fase vede un alternarsi delle regioni in cui $w = 1$ e $w = -1$ senza regioni in cui si ha $w = 0$. Questo comportamento è dovuto ai differenti nodi della funzione $f_\beta(k)$ ed è pertanto più pronunciato tanto più è grande r (purché resti finito). In Figura 1.3 è illustrato il caso con $\beta = 0$ e $r = 3$.

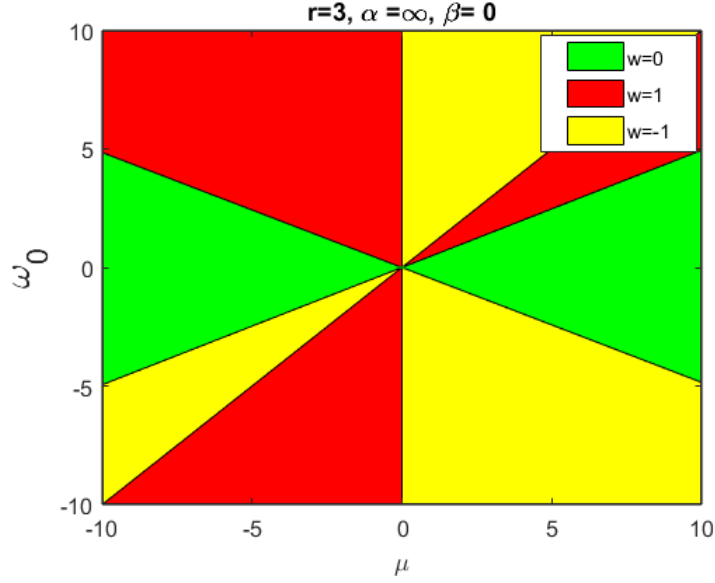


Figura 1.3: Diagramma di fase per il caso $\alpha = \infty$, $\beta = 0$, $r = 3$ e $\Delta = 1$

Hopping e pairing a lungo raggio

Finora si è considerato solo uno dei due esponenti α e β tale da indurre un comportamento a lungo raggio, ora invece li si considera entrambi. Questo fatto permetterà di ottenere $w > 1$ in certe zone dello spazio dei parametri. Per osservarlo, si consideri il caso in cui $\alpha = \beta = 0$. É possibile dimostrare che, assumendo $\omega_0 > 0$:

$$w = 1 \text{ per } -2r < \mu/\omega_0 \leq 0, \quad (1.109)$$

$$w = r \text{ per } 0 < \mu/\omega_0 < 2, \quad (1.110)$$

$$w = 0 \text{ altrove} \quad (1.111)$$

Per $r = 2$ si ha quindi $w_{max} = 2$. Per $\alpha \neq 0$ si osserva che in alcune regioni dello spazio w può assumere valori intermedi tra 0 e r ma sempre saltando di 2. Se r è pari w allora può essere 0, 1 o qualsiasi numero pari minore o uguale a r mentre se r è dispari allora w può essere 0, 1 o qualsiasi numero dispari minore o uguale ad r . Nel caso sopracitato di $\alpha = \beta = 0$ e $r = 2$ il diagramma di fase risulta essere quello rappresentato in Figura 1.4.

Numero di vicini infinito

In questo caso si studia esclusivamente il caso di pairing a lungo raggio, tralasciando il caso di hopping a lungo raggio pertanto si ha che $\alpha \rightarrow \infty$. Invece che lavorare come in precedenza sul piano $\mu - \omega_0$ si lavora sul piano $\mu - \beta$ assumendo $\Delta = 2$ e $\omega_0 = 1$.

Il diagramma di fase può essere diviso in 3 diverse regioni a seconda del comportamento di $\mathcal{H}(k)$ data da (1.9):

1. Sia l'Hamiltoniana che le sue derivate sono definite su tutta la zona di Brillouin ($\beta > 1.5$).
2. Le derivate dell'Hamiltoniana non sono definite in $k = 0$ ($1 < \beta < 1.5$).
3. Sia l'Hamiltoniana che le sue derivate non sono definite in $k = 0$ ($\beta < 1$).

A seconda delle regione in cui ci si trova i modi di edge hanno un comportamento diverso: in 1) si hanno modi di edge non massivi (MZM), in 3) si hanno modi massivi (MEM) caratterizzati da w semintero a causa della non-analiticità dell'Hamiltoniana in $k = 0$ e in 2) il comportamento non è

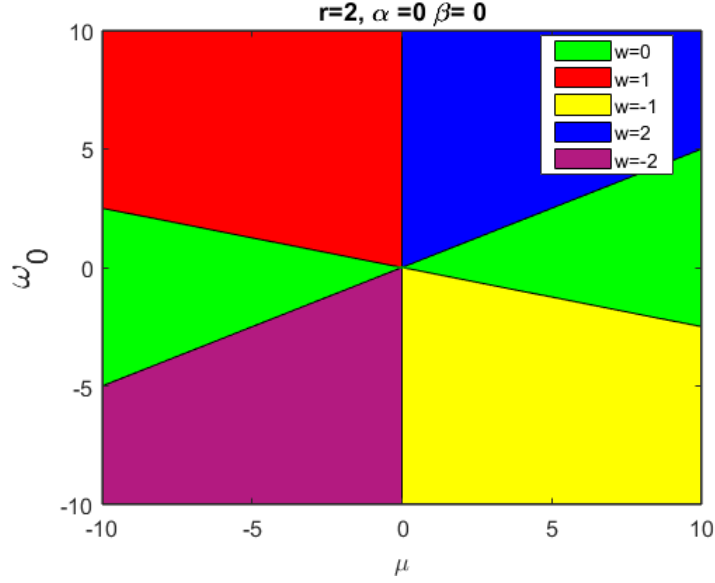


Figura 1.4: Diagramma di fase per il caso $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $r = 2$ e $\Delta = 1$

definito a prescindere. Il diagramma di fase che si ottiene è rappresentato in Figura 1.5, dove la regione indicata dalla stella rossa non ha risultati noti e sarà pertanto analizzata in seguito.

Procedimento di calcolo di w usando le DQPT

I diagrammi esposti sono risultati già noti, si vuole ora trovare un modo per studiarli con le DQPT ed in particolare utilizzando dei sudden quench perché si vogliono ottenere informazioni sul winding number. Il procedimento proposto è il seguente ed è valido sia nel caso con numero di vicini finito che infinito:

1. Scelta di un punto iniziale di quench A con winding number w_A .
2. Scelta di un punto finale di quench B con winding number w_B .
3. Conta del numero di DQPT attraverso il numero di zeri di Fisher fisici osservati per determinare Δw del caso.
4. Scelta di un nuovo B e ripetizione del punto 3)
5. Se la fase di A e B è la stessa si procede alla ricerca di una linea di punti pseudocritici che delimitano la regione dello spazio dei parametri in cui si osservano DQPT accidentali dato un certo A.
6. L'operazione viene ripetuta considerando punti B sparse in tutta la regione dello spazio dei parametri di interesse per verificare la correttezza della Proposizione 1.2.

Completata ora l'introduzione teorica del modello e gli obiettivi prefissati si procede con il calcolo delle grandezza di interesse. Poiché tuttavia questo calcolo non può essere svolto in maniera completamente analitica è necessario fornire un'implementazione numerica che viene spiegata in dettaglio nel Capitolo 2.

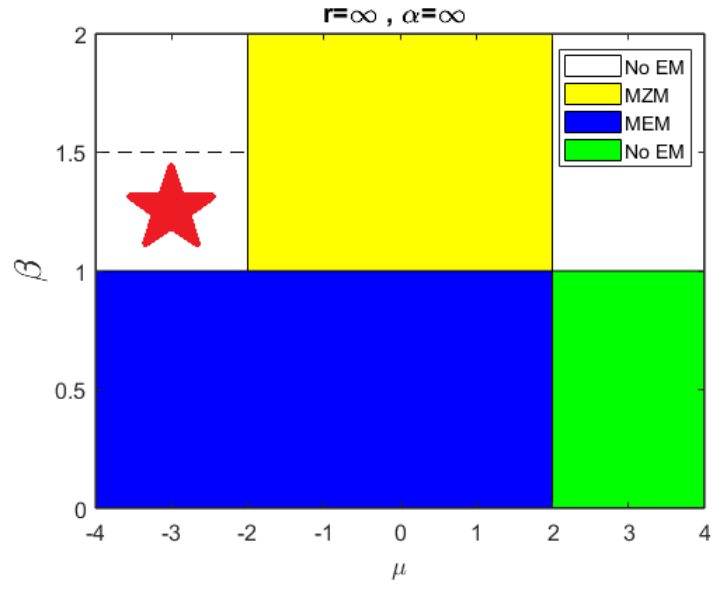


Figura 1.5: Diagramma di fase per il caso $\alpha = \infty$, $r = \infty$, $\Delta = 2$ e $\omega_0 = 1$. Al variare di β si hanno modi di edge massivi o meno. La sigla NoEM nella legende sta ad indicare una regione in cui sono assenti modi di edge.

Capitolo 2

Implementazione numerica

Si illustra ora l'implementazione numerica realizzata per il calcolo delle grandezze fisiche di interesse nei casi di sudden quench e slow quench. L'implementazione è stata realizzata attraverso la scrittura di vari codici MATLAB a seconda delle esigenze che si sono di volta in volta presentate. Si distinguono oltre ai casi di di slow e sudden quench quelli di r finito o infinito per il sudden quench.

2.1 Implementazione numerica sudden quench con r finito

L'obiettivo del codice che si va a sviluppare deve essere quello di individuare e contare le DQPT che si vanno ad osservare a seguito di un determinato sudden quench. Per fare questo si devono usare le grandezze caratteristiche teorizzate nel Capitolo 1. In particolare si è osservato come si abbia una DQPT ogni volta che esiste $k^* \in [0, \pi]$ tale che $p(k^*) = 1/2$. Inoltre si è determinata la forma esplicita di $p(k)$ che è data da (1.68) e questa dipende da tutti e 6 i parametri dei punti di quench iniziali e finali. Poichè tuttavia alcuni di questi parametri per i quench con $r < \infty$ sono fissati come descritto nella Sezione 1.5 la dipendenza di $p(k)$ nel codice si riduce a:

- μ e ω_0 dei due punti di quench
- il numero di vicini r
- k
- α e β considerate che sono le stessa per i due punti di quench.

Una volta implementata la forma funzionale di $p(k)$ si risolve numericamente l'equazione $p(k) = 1/2$: questa non è infatti in generale risolvibile in forma chiusa a causa della forma delle funzioni $g_\alpha(k)$ e $f_\beta(k)$ che sono somme di seni e coseni date da (1.10) e (1.11) e che fanno quindi sì che l'equazione $p(k) = 1/2$ diventi una trigonometrica fratta non omogenea. La risoluzione dell'equazione è affidata all'apposita libreria MATLAB `vpasolve` che fornisce tutti i valori di k^* per il quench considerato.

Una volta ottenuti i k^* cercati è possibile calcolare immediatamente i tempi critici a cui avvengono le DQPT secondo (1.38) dove è possibile scegliere fino a che ordine n si vogliono calcolare i tempi, nelle simulazioni si è calcolato sempre fino al quarto ordine di tempi critici (ovvero $n = 4$). Questo permette di controllare immediatamente l'autoconsistenza del codice se si va a calcolare la rate function della Loschmidt echo che ha espressione analitica data da (1.63) utilizzando l'algoritmo per l'integrazione numerica di Cavalieri-Simpson

$$\int_a^b dx f(x) = \frac{b-a}{3N} \sum_{j=1}^{N/2} [f(x_{2j-1}) + 4f(x_{2j}) + f(x_{2j+1})]. \quad (2.1)$$

In questo modo eseguendo per ogni istante t l'integrazione sullo spazio dei momenti è possibile tracciare il grafico di $\lambda(t)$ e verificare che esso presenti le non-analiticità attesi ai tempi critici t_n^c precedentemente

trovati. Per maggiore sicurezza si calcola anche la derivata temporale di $\lambda(t)$ anche se questa non riveste nessun particolare significato fisico: tuttavia la derivata presenta una discontinuità in prossimità dei tempi critici che fornisce un ulteriore controllo.

In Figura 2.1 seguito si fornisce un esempio per probabilità, rate function della Loschmidt echo e sua derivata per un quench con $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, $\mu_i = 0.5$, $\mu_f = -0.4$, $\omega_{0,i} = \omega_{0,f} = 0.5$.

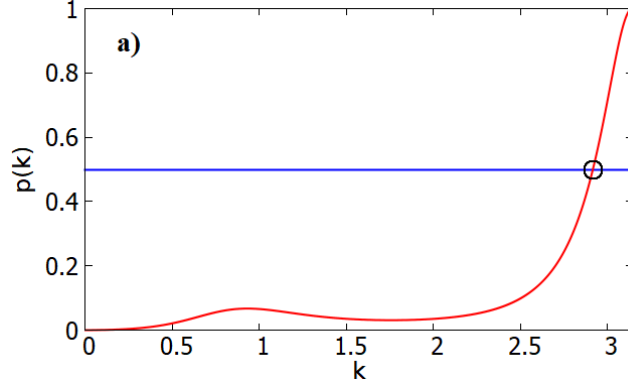


Figura 2.1 a): Probabilità di transizione con evidenziato il solo modo k^* che implica una DQPT per un quench con $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, $\mu_i = 0.5$, $\mu_f = -0.4$, $\omega_{0,i} = \omega_{0,f} = 0.5$

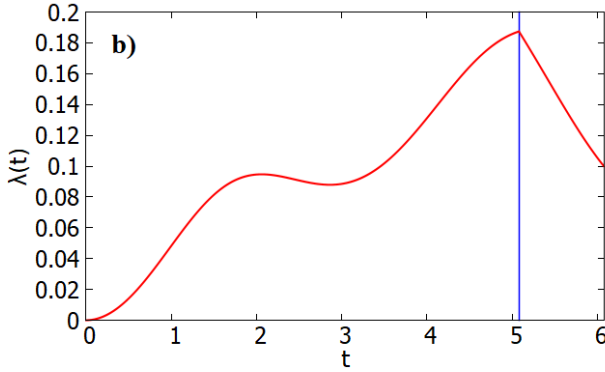


Figura 2.1 b): Rate function della Loschmidt echo con evidenziato t_c^0 per un quench con $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, $\mu_i = 0.5$, $\mu_f = -0.4$, $\omega_{0,i} = \omega_{0,f} = 0.5$, in questo caso è riportato solo il primo ordine di punti critici $n = 0$

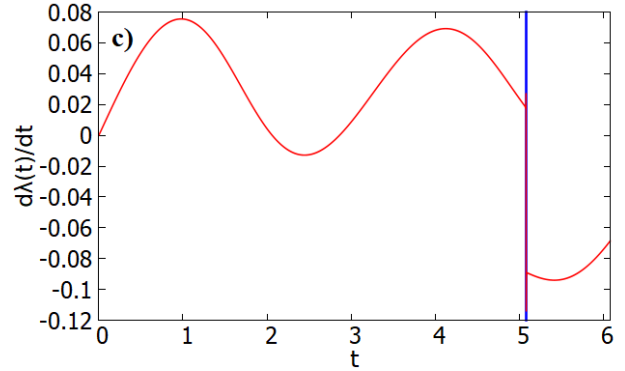


Figura 2.1 c): Derivata della rate function della Loschmidt echo con evidenziato il tempo critico per un quench con $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, $\mu_i = 0.5$, $\mu_f = -0.4$, $\omega_{0,i} = \omega_{0,f} = 0.5$

Il numero di DQPT che avvengono in seguito ad un determinato quench è dato quindi dal numero di k^* (e quindi di tempi critici ad n fissato) che si hanno. Da un punto di vista osservativo deve però essere scelto in maniera opportuna l'intervallo di osservazione temporale onde evitare di osservare tempi critici appartenenti ad ordini di n diversi e confonderli con scale temporali indipendenti.

Un'altra grandezza fisica che si usa definire per caratterizzare una DQPT è un parametro d'ordine topologico [19], [14] dinamico di natura diversa rispetto a w . Infatti mentre w è una costante del moto il nuovo parametro d'ordine che si vuole definire deve avere la proprietà di essere costante nel tempo fra due DQPT e cambiare valore dopo l'istante t_c in cui si ha avuto una DQPT. Un parametro di questo tipo è il winding number dalla fase di Berry-Pancharatnam [19], [14], indicato con $\nu_D(t)$, che ha valore intero e cambia di un'unità dopo che si ha avuto una transizione di fase. Per definirlo, si riscrive la Loschmidt amplitude a momento fissato scomposta nelle sue parti radiali e angolari in coordinate polari

$$\mathcal{G}_k(t) = r_k(t)e^{i\phi_k(t)}. \quad (2.2)$$

La fase è scrivibile come la somma diretta di un termine geometrico gauge invariante e di un termine dinamico

$$\phi_k(t) = \phi_k^{dyn}(t) + \phi_k^G. \quad (2.3)$$

Questo è importante perché direttamente legato al fatto che un DQPT ha luogo quando lo stato iniziale $|\Psi_0\rangle$ e il suo evoluto temporale sono ortogonali, pertanto la quantità che si desidera costruire deve variare analiticamente per stati non ortogonali e presentare non-analiticità solo a tempi critici quando si hanno stati ortogonali: una quantità di questo tipo è la fase di Berry-Pancharatnam (BPP) che altro non è che la quantità $\phi_k^G(t)$ soprastante. Da (2.3) è possibile ricavare direttamente la BPP se si riesce a calcolare il contributo dinamico alla fase, possibile utilizzando la scomposizione dello stato $|\Psi_0^k(t)\rangle$ sulla sfera di Bloch

$$|\Psi_0^k(t)\rangle = u_f^k e^{i\epsilon_f^k t} |1_f^k\rangle + e^{-i\epsilon_f^k t} v_f^k |2_f^k\rangle, \quad (2.4)$$

dove ϵ^f è lo spettro dell'Hamiltoniana del punto finale di quench e $|1_f^k\rangle$ e $|2_f^k\rangle$ sono rispettivamente ground state e primo stato eccitato dell'Hamiltoniana finale che compongono la sfera di Bloch. Da questo risultato si ricava che la fase dinamica è data da

$$\phi_k^{dyn}(t) = - \int_0^t ds \langle \Psi_0^k(s) | \mathcal{H}_i | \Psi_0^k(s) \rangle = \epsilon_f^k t (|u_k|^2 - |v_k|^2) = \epsilon_f^k t (1 - 2p_k), \quad (2.5)$$

dove $\mathcal{H}_i$ è l'Hamiltoniana del punto iniziale di quench. Per le simmetrie dell'Hamiltoniana si ha che a $k = 0, \pi$ si deve avere $|u_k|^2 = 0$ e $|v_k|^2 = 1$ o il contrario e pertanto la BPP è nulla per questi valori di k in quanto la Loschmidt amplitude deve avere componente angolare nulla. Pertanto per quel che riguarda la BPP l'intervallo nello spazio dei momenti $[0, \pi]$ può essere fornito con una topologia S^1 . Questo ci porta pertanto a definire $\nu_D(t)$ come

$$\nu_D(t) = \frac{1}{2\pi} \oint_0^\pi \frac{\partial \phi_k^G(t)}{\partial k}. \quad (2.6)$$

Implementando il calcolo anche questo parametro tramite l'integrazione di Cavalieri-Simpson si può osservare come effettivamente si abbiano salti di un'unità ai tempi critici e si abbiano valori interi quantizzati altrove. La Figura 2.2 è un esempio della variazione temporale di $\nu_D(t)$ per il quench precedente, dove $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, $\mu_i = 0.5$, $\mu_f = -0.4$, $\omega_{0,i} = \omega_{0,f} = 0.5$. In particolare è ben visibile il salto unitario che $\nu_D(t)$ presenta in corrispondenza del tempo critico.

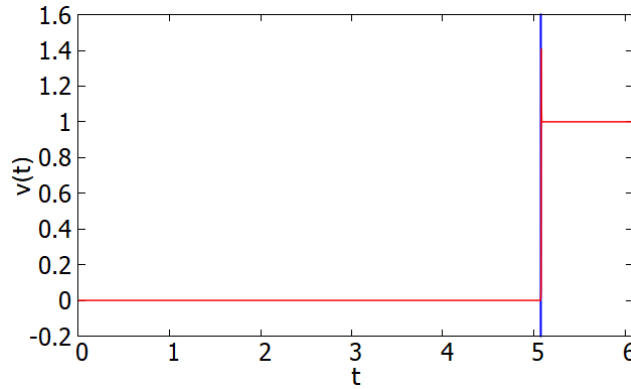


Figura 2.2: Parametro d'ordine topologico $\nu_D(t)$ al variare del tempo per un quench con $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, $\mu_i = 0.5$, $\mu_f = -0.4$, $\omega_{0,i} = \omega_{0,f} = 0.5$. Si osservi il salto unitario in corrispondenza del punto critico segno della presenza di una DQPT

Si è così implementato il codice per il calcolo di $p(k)$, $\lambda(t)$ e di tutto il necessario per osservare se una DQPT è avvenuta o meno. Si va ora ad implementare un codice molto semplice che servirà per il calcolo delle linee di zeri di Fisher partendo dall'espressione generale per un FZ nel piano complesso data nel caso $n = 0$ da (1.105). Tutte le grandezze necessarie sono già state implementate in precedenza

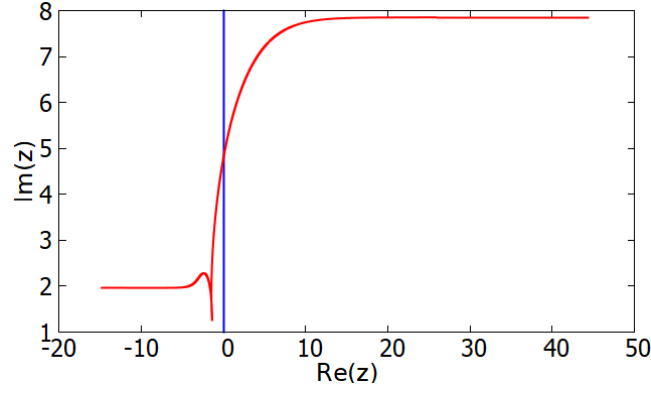


Figura 2.3: Linea di zeri di Fisher per un quench con $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, $\mu_i = 0.5$, $\mu_f = -0.4$, $\omega_{0,i} = \omega_{0,f} = 0.5$.

e pertanto non sono presenti problemi di sorta. Sempre per il quench considerato la linea di FZ è data dalla Figura 2.3. Poiché i punti iniziale e finale di quench si trovano rispettivamente nella fase $w = 0$ e $w = 1$ si osserva come predetto dalla Proposizione 1.2 una sola DQPT.

Per ottimizzare il codice è preferibile non utilizzare un solo script ma usarne diversi per definire oggetti tipici di MATLAB come le **function** quando si hanno funzioni che vengono utilizzate da più codici e più volte all'interno dello stesso codice. Le funzioni che si vanno a definire sono:

- lo spettro energetico $\epsilon(k)$ dato da (1.17), che serve ad esempio nel calcolo della probabilità stessa che è funzione dei parametri di uno solo dei due punti di quench,
- la funzione χ data da (1.72) che viene inserita nel calcolo della probabilità ed è invece funzione sia dei parametri del punto di quench iniziale che dei parametri del punto di quench finale,
- la probabilità $p(k)$ di transizione dal ground state dell'Hamiltoniana iniziale allo stato eccitato dell'Hamiltoniana finale con le dipendenze precedentemente dai parametri di quench date da (1.68).

Le funzioni $g_\alpha(k)$ e $f_\beta(k)$ vengono invece calcolate direttamente all'interno dei codici relativi a queste 3 **function**. La struttura del codice per il calcolo di rate function della Loschmidt amplitude, sua rate function e winding number dinamico è il seguente:

- definizione dei parametri dei punti di quench iniziale e finale tramite caricamento di apposito file precedentemente preparato,
- risoluzione numerica dell'equazione $p(k) = 1/2$ nell'intervallo $[0, \pi]$
- se esistono, scrittura e conta delle soluzioni e calcolo dei tempi critici associati ad ogni k^* fino al quarto ordine con scrittura su apposito file
- scrittura di un messaggio su file, se l'equazione non ha soluzione,
- definizione del tempo massimo (in maniera arbitraria) e calcolo dei vettori $p(k)$, $\epsilon_i(k)$ e $\epsilon_f(k)$ tramite le apposite **function**,
- calcolo della rate function della Loschmidt amplitude con Cavalieri-Simpson,
- calcolo della derivata della rate function della Loschmidt amplitude con algoritmo centered finite difference formula,
- calcolo di $\nu_D(t)$ con Cavalieri-Simpson,
- scrittura su file di tutte le grandezze calcolate.

Per il calcolo delle linee di zeri di Fisher si utilizza un altro codice per poter lavorare separatamente. Questo secondo codice risulta estremamente semplice non essendo altro che il calcolo diretto dell'espressione (1.105) e la scrittura delle parti reali e complesse su apposito file per la futura rappresentazione grafica. Viene inoltre contato il numero di volta che la linea di FZ interseca l'asse immaginario per determinare il numero di zeri fisici.

Con i codici così sviluppati è possibile compiere le analisi desiderate successivo sui diagrammi di fase per r finito i cui risultati si discuteranno nel capitolo.

2.2 Implementazione numerica sudden quench con $r = \infty$

Per quanto riguarda il caso con numero di vicini infinito vi sono alcune differenze strettamente legate al comportamento di $g_\alpha(k)$ e $f_\beta(k)$ che spingono ad utilizzare un metodo di indagine diversa. Poiché le suddette funzioni assumono una forma polilogaritmica nel limite $r \rightarrow \infty$ è necessario conoscere l'espressione analitica del polilogaritmo. Nelle librerie di MATLAB la funzione polilogaritmo $\text{Li}_s(x)$ ha valori tabulati solo per s intero, mentre in generale noi siamo interessati a s non interi in particolare per studiare il comportamento a lungo raggio del modello.

Non disponendo di valori tabulati le funzioni $g_\alpha(k)$ e $f_\beta(k)$ devono essere calcolate esplicitamente utilizzando un r sufficientemente grande, il che significa perlomeno maggiore o uguale a 1×10^4 . Questo rende estremamente lenta la risoluzione numerica tramite `vpasolve` di $p(k) = 1/2$ visto che per ogni k devono essere calcolate le due funzioni. Inoltre per come è costruita la libreria `vpasolve` questa si basa sulla scelta di numeri casuali appartenenti all'intervallo in cui si cerca la soluzione: non è quindi possibile preallocare vettori su cui scrivere i valori di $f_\beta(k)$ e $g_\alpha(k)$ che si useranno in futuro e utilizzarli anche per la ricerca di k^* .

Essendo il primo metodo per la ricerca del numero di soluzioni lento si utilizza direttamente il secondo basato sugli zeri di Fisher. Non si ottengono però informazioni su k^* e t_c poiché non si è interessati ai punti in cui la linea di FZ interseca l'asse immaginario ma solo al numero di volte in cui questo avviene essendo legato a Δw dalla Proposizione 1.2.

Le principali differenze a livello di codice sono nella definizione della funzione $p(k)$: poiché ora ω_0 è fissato e β è invece libero di variare cambia la dipendenza di questa funzione dai parametri. Inoltre si deve considerare che $\Delta = 2$ per questo caso. Si va quindi a ridefinire una diversa funzione per il calcolo di $p(k)$ che preveda la possibilità di avere $\beta_i \neq \beta_f$.

Per l'ultima volta si sottolinea come la principale differenza nei costi computazionali è data dal fatto di dover lavorare con r grande e dovere così spendere maggiore tempo su $f_\beta(k)$ e $g_\alpha(k)$. Pertanto risulta più efficiente l'algoritmo basato sulle linee di FZ poiché richiede meno calcoli che coinvolgono le $f_\beta(k)$ e $g_\alpha(k)$. In futuro dovrebbe essere possibile migliorare l'algoritmo per la soluzione numerica di $p(k) = 1/2$ per equiparare definitivamente i due metodi anche nel caso $r = \infty$.

2.3 Implementazione numerica slow quench

Una volta implementato con successo il sudden quench sia per il caso con numero di vicini finito e infinito si passa all'implementazione dello slow quench che risulta sensibilmente diversa. Innanzitutto si ricorda che si sta sempre lavorando con uno slow quench in cui $r = \infty$ e nel caso di pairing a lungo raggio e hopping a corto raggio, quindi la situazione rappresentata dalla Figura 1.5.

Nonostante in determinati casi si possa rimappare in un problema di Landau-Zener si è deciso di implementare un codice basato su un algoritmo di Runge-Kutta di quarto ordine (RK4) per risolvere il sistema di equazioni differenziali dato da (1.81) e (1.82) che può essere utilizzato in tutti e tre i possibili casi:

- quench su μ a β costante,
- quench su β a μ costante,
- quench su β e μ .

Il sistema di equazioni differenziali da risolvere è

$$i \frac{d}{dt} u_k(t) = - \left(\frac{\mu(t)}{2} + \omega_0 g_{\alpha,k} \right) u_k(t) - i \Delta f_{\beta(t),k} v_k(t) \quad (2.7)$$

$$i \frac{d}{dt} v_k(t) = i \Delta f_{\beta(t),k} u_k(t) + \left(\frac{\mu(t)}{2} + \omega_0 g_{\alpha,k} \right) v_k(t), \quad (2.8)$$

Riscrivibile come

$$\frac{d}{dt} u_k(t) = i \left(\frac{\mu(t)}{2} + \omega_0 g_{\alpha,k} \right) u_k(t) - \Delta f_{\beta(t),k} v_k(t) = f(t, u, v) \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} v_k(t) = \Delta f_{\beta(t),k} u_k(t) - i \left(\frac{\mu(t)}{2} + \omega_0 g_{\alpha,k} \right) v_k(t) = g(t, u, v). \quad (2.10)$$

Per questa scrittura del sistema l'algoritmo RK4 assume la forma

$$k_0 = h f(t_i, u_i, v_i) \quad (2.11)$$

$$l_0 = h g(t_i, u_i, v_i) \quad (2.12)$$

$$k_1 = h f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_0}{2}, v_i + \frac{l_0}{2}\right) \quad (2.13)$$

$$l_1 = h g\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_0}{2}, v_i + \frac{l_0}{2}\right) \quad (2.14)$$

$$k_2 = h f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_1}{2}, v_i + \frac{l_1}{2}\right) \quad (2.15)$$

$$l_2 = h g\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_1}{2}, v_i + \frac{l_1}{2}\right) \quad (2.16)$$

$$k_3 = h f(t_i + h, u_i + k_2, v_i + l_2) \quad (2.17)$$

$$l_3 = h g(t_i + h, u_i + k_2, v_i + l_2) \quad (2.18)$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6} (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad (2.19)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6} (l_0 + 2l_1 + 2l_2 + l_3), \quad (2.20)$$

dove h è lo step temporale utilizzato.

Una volta calcolata l'evoluzione temporale con RK4 si ottiene la probabilità p_k secondo la (1.83). Usando poi l'algoritmo di Cavalieri-Simpson si calcola l'integrale che fornisce la densità di difetti n_d . La struttura del codice lo slow quench è la seguente ed è costruita per lavorare nel diagramma di fase della Figura 1.5:

- definizione dei parametri α , β , r , ω_0 e Δ ,
- scelta del tempo caratteristico di quench τ_Q ,
- scelta dei tempi iniziali e finali. Nel caso $t_i = -\infty$ e $t_f = 0$ si sceglierà $t_i \ll -1$,
- costruzione dei vettori $\mu(t)$ e $\beta(t)$,
- risoluzione del sistema di equazione differenziali con RK4 e calcolo di p_k ,
- calcolo di n_d con Cavalieri-Simpson
- scelta di un nuovo τ_Q con cui poter ripetere il procedimento per verificare la legge di scaling.

É possibile costruire diversi percorsi di slow quench a seconda di come si scelgono $\mu(t)$ e $\beta(t)$. In ogni caso si deve attraversare una linea di punti critici per poter osservare un comportamento di n_d che concordi con le leggi di scaling previste: questo metodo non può essere usato per trovare linee critiche come quello basato sugli sudden quench ma fornisce una via per calcolare la densità di difetti che si verrebbe a creare nel modello a seguito di una realizzazione sperimentale di uno slow quench e di regolare quindi n_d sui propri interessi.

Capitolo 3

Presentazione dei risultati

Nel terzo capitolo si andranno a discutere i risultati ottenuti dalle simulazioni svolte usando il codice sviluppato secondo quanto descritto nel capitolo precedente. Questi risultati verranno poi confrontati con quanto si è ipotizzato nel primo capitolo discutendo eventuali deviazioni dal comportamento previsto. Verranno presentati prima i risultati nel caso di sudden quench con numero di vicini finito, poi sudden quench con infiniti vicini ed infine il caso di slow quench.

3.1 Sudden quench con $r < \infty$

Si iniziano a raccogliere risultati dal diagramma di fase di Figura 1.2, quindi con $r = 2$, $\alpha = 0$ e $\beta = \infty$. Si vanno a studiare 3 diversi tipi di quench:

- quench in cui varia solo μ ,
- quench in cui varia solo ω ,
- quench in cui variano sia μ che ω ,
- quench con i punti appartenenti alla stessa fase.

In tutti e 3 i casi si analizzano 11 diversi quench cambiando il punto di quench iniziale e tenendo fisso quello finale e si contano le transizioni osservate. Essendo questo diagramma di fase noto è possibile verificare l'algoritmo proposto.

Quench su μ

Nel caso di quench su μ si prende come punto finale $\mu = 0.5$, $\omega = 0.5$ appartenente quindi alla fase $w = 0$. I quench effettuati, con numero di DQPT osservate e Δw atteso è riportato nella seguente tabella

μ_i	$\omega_{0,i}$	w_2	$ \Delta w $	N_{DQPT}
-1.1	0.5	1	1	1
-1	0.5	1	1	1
-0.9	0.5	1	1	1
-0.8	0.5	1	1	1
-0.7	0.5	1	1	1
-0.6	0.5	1	1	1
-0.5	0.5	1	1	1
-0.4	0.5	1	1	1
-0.3	0.5	1	1	1
-0.2	0.5	1	1	1
-0.1	0.5	1	1	1

I risultati sono tutti in accordo con Proposizione 1.2 e non vi sono transizioni accidentali poiché $|\Delta w|$ e N_{DQPT} coincidono.

Quench su ω

In questo caso si prende come punto finale di quench $\mu = 0.5, \omega_0 = -0.5$ appartenente a $w = -1$. I quench effettuati con relativi risultati sono i seguenti

μ_i	$\omega_{0,i}$	w_2	$ \Delta w $	N_{DQPT}
0.5	1.1	0	1	1
0.5	1	0	1	1
0.5	0.9	0	1	1
0.5	0.8	0	1	1
0.5	0.7	0	1	1
0.5	0.6	0	1	1
0.5	0.5	0	1	1
0.5	0.4	0	1	1
0.5	0.3	0	1	1
0.5	0.2	0	1	1
0.5	0.1	0	1	1

Anche in questo caso i risultati sono in accordo con quanto previsto e non si osservano transizioni accidentali.

Quench su entrambi i parametri

Adesso si cambiano contemporaneamente sia μ che ω_0 del punto di quench iniziale, prendendo come punto finale di quench lo stesso del caso precedente, ovvero $\mu = 0.5, \omega_0 = -0.5$. I risultati ottenuti sono

μ_i	$\omega_{0,i}$	w_2	$ \Delta w $	N_{DQPT}
-1.1	1.1	1	2	2
-1	1	1	2	2
-0.9	0.9	1	2	2
-0.8	0.8	1	2	2
-0.7	0.7	1	2	2
-0.6	0.6	1	2	2
-0.5	0.5	1	2	2
-0.4	0.4	1	2	2
-0.3	0.3	1	2	2
-0.2	0.2	1	2	2
-0.1	0.1	1	2	2

Anche in questo caso i risultati ottenuti sono in accordo con le aspettative. Finora si è studiato il caso di punti di quench iniziali e finali che appartengono a fasi diverse e in cui varia un parametro o entrambi. Non si sono riscontrate differenze significative tra i vari casi, come era legittimo attendersi poiché i parametri che sono lasciati liberi di variare non modificano la natura a lungo o corto raggio del modello. Si vuole vedere cosa succede se si prendono punti appartenenti alla stessa fase.

Quench all'interno della stessa fase: studio preliminare

Si vede ora un esempio di quench all'interno della stessa fase. Procediamo come appena fatto e osserviamo i risultati ottenuti per un quench all'interno della fase $w = 0$ con punto di quench finale dato da $\mu = 5, \omega = 0.5$.

μ_i	$\omega_{0,i}$	w_2	$ \Delta w $	N_{DQPT}
1.1	0.5	0	0	0
1.01	0.5	0	0	0
0.92	0.5	0	0	0
0.83	0.5	0	0	0
0.73	0.5	0	0	0
0.64	0.5	0	0	0
0.55	0.5	0	0	0
0.46	0.5	0	0	0
0.37	0.5	0	0	0
0.28	0.5	0	0	0
0.18	0.5	0	0	2

Come si può osservare dalla cella colorata in giallo, vi è una discrepanza per l'ultima coppia di punti considerata che potrebbe essere dovuta ad una transizione accidentale. Si dovrà quindi a procedere ad una analisi sistematica che porti a stabilire quando si abbiano o meno DQPT accidentali a seguito di un quench all'interno della stessa fase.

Quench all'interno della stessa fase: approfondimento

Quello che si va ora a fare è cercare di determinare all'interno della fase $w = 0$ dato un punto di quench iniziale una linea di punti pseudocritici che separano punti che se fossero scelti come punti finali determinerebbero la comparsa di FZ dovuti a DQPT accidentali dagli altri. Per fare questo si procede nel seguente modo

1. Si sceglie un punto di quench iniziale, in questo caso $\mu = 5, \omega_0 = 0.5$.
2. Si fissa $\omega_{0,f}$ e si fa variare μ_f da -5 a 0, poiché si è interessati a trovare il primo punto per cui si osserverà una transizione nella regione in cui $w = 0$ ma $\mu < 0$.

3. Si cambia $\omega_{0,f}$ e si ripete lo stesso procedimento per μ_f .

4. Si procede così fino a quando non si trova la forma completa della linea di punti pseudocritici.

Si sottolinea che è necessario procedere in questo modo per determinare la linea di punti pseudocritici perché esse è determinata da un'equazione che non è tuttavia risolvibile analiticamente, al contrario di quanto fatto in [18].

Per quanto riguarda $\omega_{0,f}$ esso si prende nell'intervallo $[-1, 1]$ e viene fatto variare a passi di 0.1 tranne che in prossimità di 0 dove vengono considerati anche i valori di ± 0.05 . I risultati ottenuti sono illustrati nella seguente tabella, dove sono confrontati i valori di μ_f che a dato certo $\omega_{0,f}$ formano la linea di punti critici con quelli osservati per avere le prime transizioni. É inoltre anche evidenziato se si ha una transizione accidentale o meno

$\omega_{0,f}$	μ_f	μ_{crit}	DQPT accidentale
1	-3.999155	-4	N
0.9	-3.599165	-3.6	N
0.8	-3.199175	-3.2	N
0.7	-2.799185	-2.8	N
0.6	-2.399195	-2.4	N
0.5	-1.999205	-2	N
0.4	-1.599215	-1.6	N
0.3	-1.19978	-1.2	N
0.2	-0.799545	-0.8	N
0.1	-0.800209	-0.4	S
0.05	-0.904105	-0.2	S
-0.05	-1.117891	0	S
-0.1	-1.22609	0	S
-0.2	-1.445985	0	S
-0.3	-1.666875	0	S
-0.4	-1.8808	0	S
-0.5	-2.11151624	0	S
-0.6	-2.32855	0	S
-0.7	-2.5574	0	S
-0.8	-2.7763	0	S
-0.9	-3.00515	0	S
-1	-3.22405	0	S

Si può notare come si possano avere transizioni accidentali solo nell'intervallo $[-1, 0.1]$ mentre per gli altri punti si ritrova la linea di punti critici che separa la fase con $w = 0$ da quella con $w = 1$. Con i dati così raccolti è possibile disegnare la linea di punti critici sul diagramma di fase, ottenendo il risultato¹ rappresentato in Figura 3.1:

¹Si vuole sottolineare come la linea di punti critici trovata dipende dal punto iniziale scelto e come non si sia cercata quella per la fase $w = 0$ con $\mu > 0$, anche se in linea di principio ci dovrebbe essere.

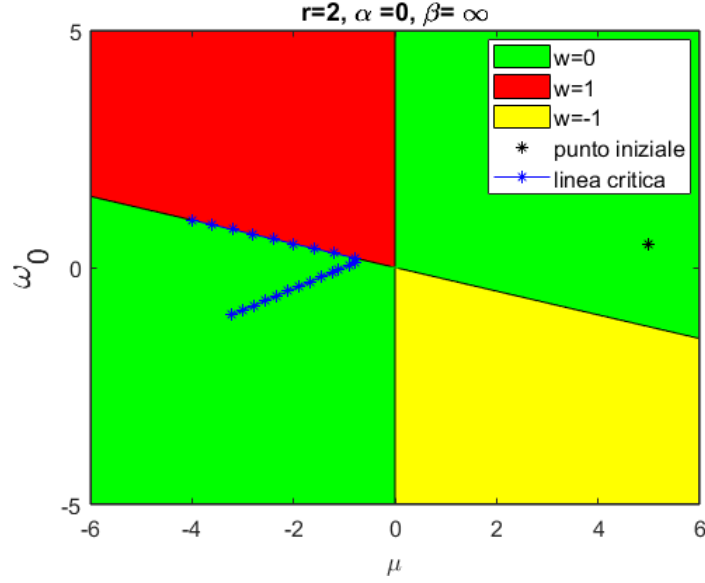


Figura 3.1: Linea critica che separa i punti finali di quench per cui non si hanno DQPT accidentali da quelli per cui invece si hanno nel caso $r = 2, \alpha = 0, \beta = \infty$ e $r = 2$ e punto iniziale di quench $\mu = 5, \omega_0 = 0.5$.

Si possono inoltre utilizzare questi risultati per vedere come lavorare con le linee di zeri di Fisher. Si può allora distinguere tra 3 diversi casi per quel che riguarda le linee di zeri di Fisher: linee per quench all'interno di $w = 0$ che non attraversano l'asse immaginario, linee all'interno di $w = 0$ che attraversano 2 volte l'asse immaginario (transizione accidentale) e linee dovute ad un quench tra le fasi $w = 0$ e $w = 1$ che attraversano l'asse immaginario solo una volta. I vari casi sono rappresentati nella Figura 3.2.

Si vede come effettivamente i due zeri di Fisher non previsti siano dovuti ad una transizione di fase accidentale che ha il solo effetto di shiftare la linea di zeri di Fisher senza modificarne la forma.

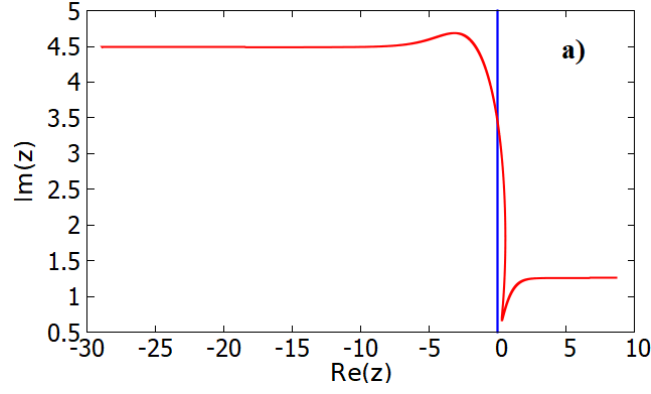


Figura 3.2 a): Linee di FZ nel caso $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $r = 2$, punto iniziale di quench $\mu = 5$, $\omega_0 = 0.5$ appartenente alla fase $w = 0$ e punto finale di quench $\mu = -2.5$, $\omega_0 = 0.8$ appartenente alla fase $w = 1$.

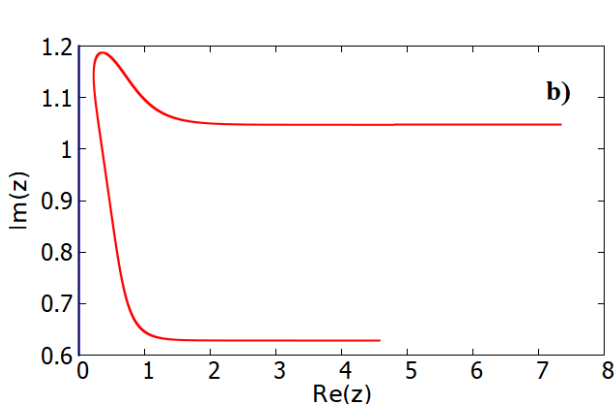


Figura 3.2 b): Linee di FZ nel caso $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $r = 2$, punto iniziale di quench $\mu = 5$, $\omega_0 = 0.5$ appartenente alla fase $w = 0$ e punto finale di quench $\mu = -3$, $\omega_0 = -0.5$ appartenente alla fase $w = 0$.

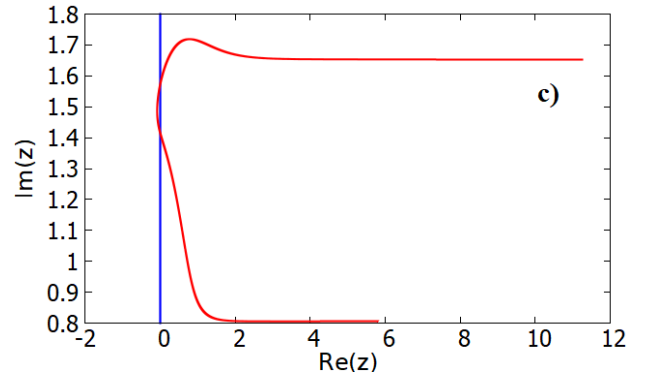


Figura 3.2 c): Linee di FZ nel caso $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $r = 2$, punto iniziale di quench $\mu = 5$, $\omega_0 = 0.5$ appartenente alla fase $w = 0$ e punto finale di quench $\mu = -1.9$, $\omega_0 = -0.5$ appartenente alla fase $w = 0$. Qui sono presenti due FZ dovuti a DQPT accidentali a differenza del caso b) dove sono assenti.

Quench all'interno della stessa fase: caso $r = 3$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$

La stessa analisi può essere effettuata anche su un diagramma di fase più complesso come quello del caso $r = 3$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$. Si procede esattamente allo stesso modo di quanto fatto in precedenza, prendendo come punto iniziale di quench $\mu_i = 4$, $\omega_{0,i} = 1$ appartenente alla fase $w = 0$ e andando a prendere punti finali di quench con $m\mu_f < 0$ e $\omega_{0,f} \in [-1.5, 1]$. I risultati ottenuti sono illustrati nella tabella alla pagina successiva

$\omega_{0,f}$	μ_f	μ_{crit}	DQPT accidentale
1	-6.02	-2.062374	S
0.9	-5.821	-1.856137	S
0.8	-5.7215	-1.649899	S
0.7	-5.5225	-1.443662	
0.6	-5.423	-1.237425	S
0.5	-5.224	-1.031187	S
0.4	-5.025	-0.82495	S
0.3	-4.9255	-0.618712	S
0.2	-4.7265	-0.412475	S
0.1	-4.627	-0.206237	S
0.05	-4.5275	0.103119	S
-0.05	-4.3285	-0.101085	S
-0.1	-4.3285	-0.20217	S
-0.2	-4.1295	-0.404339	S
-0.3	-4.03	-0.606509	S
-0.4	-3.831	-0.808679	S
-0.5	-3.632	-1.010848	S
-0.6	-3.5325	-1.213018	S
-0.7	-3.335	-1.415187	S
-0.8	-3.234	-1.617357	S
-0.9	-3.035	-1.819527	S
-1	-2.9355	-2.021696	S
-1.1	-2.7365	-2.223866	S
-1.2	-2.836	-2.426036	S
-1.3	-3.035	-2.628205	S
-1.4	-3.234	-2.830375	S
-1.5	-3.433	-3.032544	S

Come si vede, in questo intervallo di valori di $\omega_{0,f}$ è sempre possibile trovare delle transizioni di fase accidentali. Oltre a questo si osservano altri fatti interessanti andando ad analizzare ulteriormente i dati, ovvero che è possibile avere due transizioni accidentali (quattro FZ mprevisti) e transizioni accidentali sovrapposte a transizioni vere. Di seguito sono elencati per ogni valore di $\omega_{0,f}$ considerato gli eventuali valori per cui si osserva una seconda transizione accidentale o di sovrapposizione tra transizioni accidentali e robuste.

$\omega_{0,f}$	μ_f seconda accidentale	μ_f sovrapposizione
1	N	N
0.9	N	N
0.8	N	N
0.7	N	N
0.6	N	N
0.5	N	N
0.4	N	0
0.3	N	-0.1495
0.2	N	-0.3485
0.1	-0.448	-0.1495
0.05	-0.5475	0
-0.05	-0.7465	0
-0.1	-0.846	-0.1495
-0.2	-1.045	-0.3485
-0.3	-1.244	-0.5475
-0.4	-1.3435	-0.7465
-0.5	-1.5425	-0.9455
-0.6	-1.7415	-1.1445
-0.7	-1.9405	-1.3435
-0.8	-2.1395	-1.5425
-0.9	-2.3385	-1.7415
-1	-2.438	-2.04
-1.1	-2.637	-2.1395
-1.2	-2.637	-2.3385
-1.3	N	-2.438
-1.4	N	-2.3385
-1.5	N	-2.1395

Pertanto si trova che è possibile avere non solo transizioni di fase accidentali da sole ma anche transizioni accidentali in concomitanza con transizioni robuste. Si rappresenta in Figura 3.3 la situazione sul diagramma di fase con le linee di punti pseudocritici e μ_f della sovrapposizione oltre che ad esempi delle linee di FZ analizzate.

Si può invece osservare in Figura 3.4 come le linee di FZ siano diverse nei vari casi di interesse e come ancora una volta le transizioni accidentali siano dovute a shift di parte della linea di FZ senza che vi siano sensibili cambiamenti nella forma stessa.

In conclusione, si può confermare l'ipotesi secondo cui è possibile distinguere tra transizioni accidentali e robuste sulla base di un'analisi effettuata sulle linee di FZ. Inoltre è stata dimostrata la Proposizione 1.2.

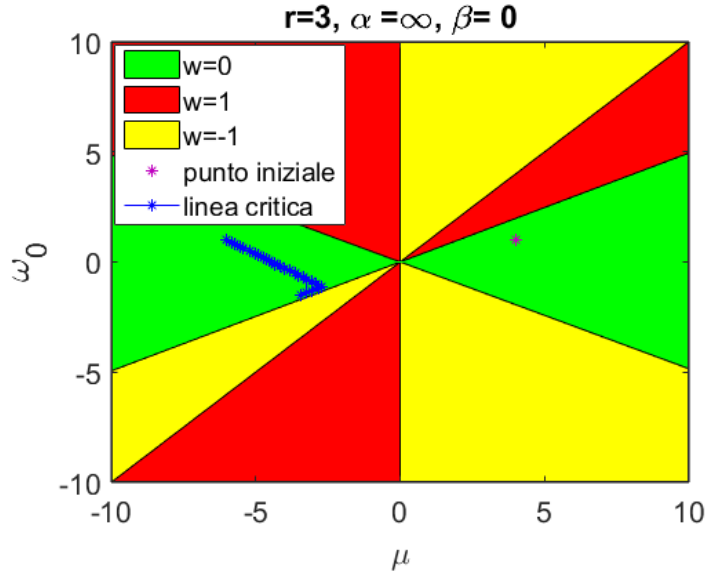


Figura 3.3 a): Prima linea di punti pseudocritici al di là dei quali si osserva una transizione accidentale per $r = 3$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ e $\Delta = 1$.

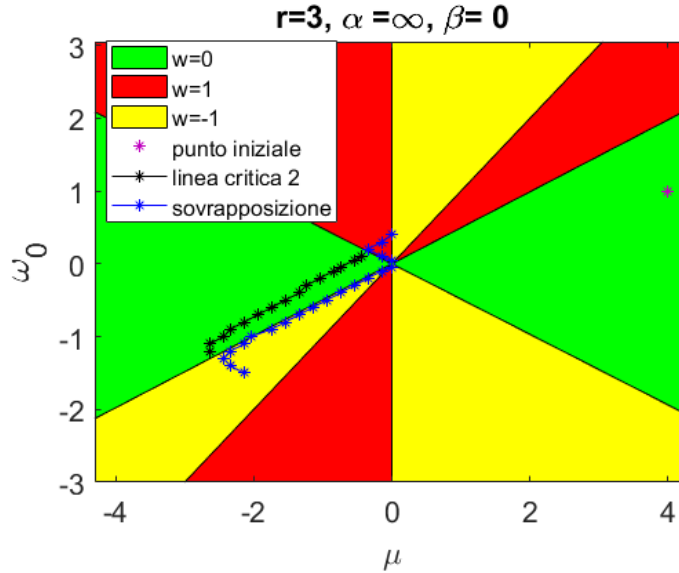


Figura 3.3 b): Diagramma di fase per $r = 3$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ e $\Delta = 1$ con seconda linea di punti pseudocritici al di là della quale si osservano 2 transizioni accidentali e linea che indica dove si ha sovrapposizione tra transizioni robuste e accidentali. Si noti come quest'ultima sia la prosecuzione della seconda linea di punti pseudocritici.

Linea di punti pseudocritici: procedimento teorico

Come più volte ripetuto, la presenza di DQPT accidentali è dovuto ad una fine tuning della Hamiltoniana, ovvero ad una scelta opportuna dei punti iniziali e finali di quench. L'idea alla base della ricerca di linee di punti pseudocritici è che, una volta scelto un punto iniziale di quench, si possa tracciare analiticamente la linea dei punti per cui si iniziano ad osservare transizioni accidentali.

L'idea è in se molto semplice: come spiegato nel Capitolo 1, la condizione necessaria e sufficiente a far avvenire una DQPT è data da (1.73). Una volta fissato il punto iniziale di quench si potrà determinare una linea di punti pseudocritici che separano la regione dove non si hanno DQPT da quella in cui si hanno DQPT accidentali. Per modelli più semplici è possibile determinare analiticamente

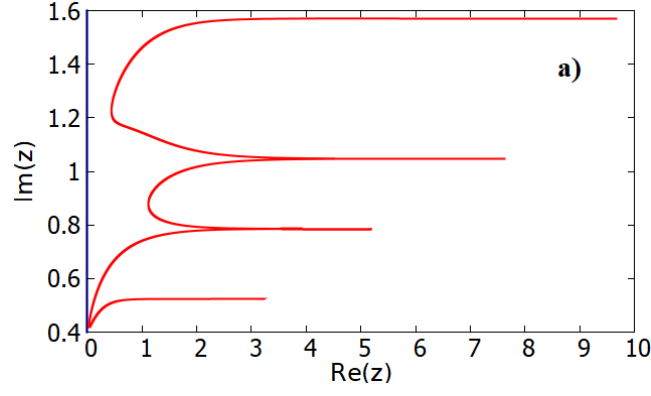


Figura 3.4 a): Linea di FZ nel caso $r = 3$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ e $\Delta = 1$ per quench da $\mu = 4$, $\omega_0 = 1$ appartenente alla fase $w = 0$ an $\mu = -4$, $\omega_0 = -1$ appartenente alla fase $w = 0$ e senza transizioni accidentali.

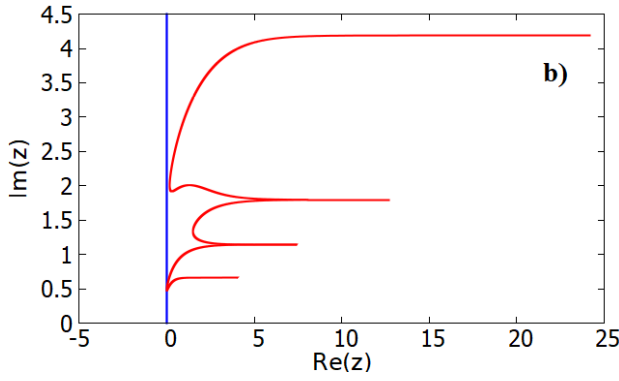


Figura 3.4 b): Linea di FZ nel caso $r = 3$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ e $\Delta = 1$ per quench da $\mu = 4$, $\omega_0 = 1$ appartenente alla fase $w = 0$ an $\mu = -2.75$, $\omega_0 = -1$ appartenente alla fase $w = 0$ e con una transizione accidentale.

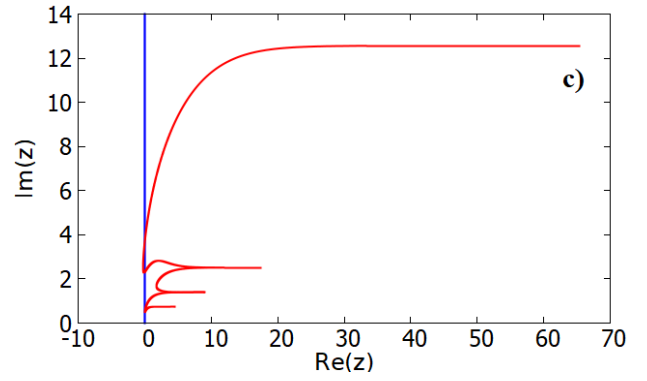


Figura 3.4 c): Linea di FZ nel caso $r = 3$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ e $\Delta = 1$ per quench da $\mu = 4$, $\omega_0 = 1$ appartenente alla fase $w = 0$ an $\mu = -2.25$, $\omega_0 = -1$ appartenente alla fase $w = 0$ e con due transizioni accidentali.

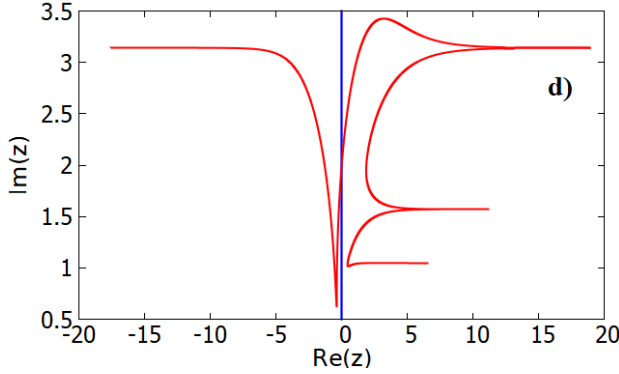


Figura 3.4 d): Linea di FZ nel caso $r = 3$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ e $\Delta = 1$ per quench da $\mu = 4$, $\omega_0 = 1$ appartenente alla fase $w = 0$ an $\mu = -1$, $\omega_0 = 1$ appartenente alla fase $w = 1$ con un solo FZ dovuto ad una DQPT robusta.

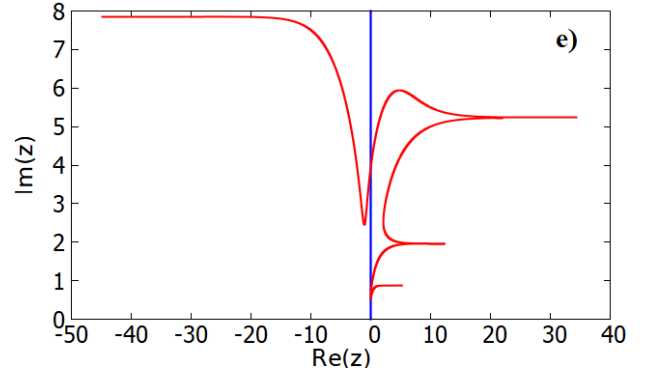


Figura 3.4 e): Linea di FZ nel caso $r = 3$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ e $\Delta = 1$ per quench da $\mu = 4$, $\omega_0 = 1$ appartenente alla fase $w = 0$ an $\mu = -1.6$, $\omega_0 = -1$ appartenente alla fase $w = -1$ con sovrapposizione tra transizioni robuste e accidentali.

questa linea[18] mentre in questo caso è necessaria una soluzione numerica. Ad esempio, nel caso $r = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ (dove è già sottointeso che $\Delta_i = \Delta_f = 1$) si ha che la condizione (1.73) diventa con la scelta di punto iniziale di quench $\mu_i = 5$, $\omega_{0,i} = 0.5$

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}(\cos k + \cos 2k)\right) \left(\frac{\mu_f}{2} + \omega_{0,f}(\cos k + \cos 2k)\right) + \sin^2 k = 0, \quad (3.1)$$

scegliendo poi ad esempio $\omega_{0,f} = -0.5$ allora l'equazione precedente diventa

$$\begin{aligned}
(5 + \cos k + \cos 2k)(\mu_f - \cos k - \cos 2k) + 4 \sin^2 k &= 0 \\
5\mu_f + (\mu_f - 5)(\cos k + \cos 2k) - (\cos k + \cos 2k)^2 + 4 - 4 \cos^2 k &= 0 \\
5\mu_f + (\mu_f - 5)(2 \cos^2 k + \cos k - 1) - (2 \cos^2 k + \cos k - 1)^2 + 4 - 4 \cos^2 k &= 0 \\
(2\mu_f - 14) \cos^2 k + (\mu_f - 5) \cos k + 9 + 4\mu_f - (4 \cos^4 k + 4 \cos^3 k - 3 \cos^2 k - 2 \cos k + 1) &= 0 \\
\cos^4 k + \cos^3 k + \frac{1 - 2\mu_f}{4} \cos^2 k + \frac{3 - \mu_f}{4} \cos k - 2 - \mu_f &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Per questa equazione non è possibile trovare in maniera analitica μ_f che divide la regione dove si hanno transizioni accidentali da quella dove non si hanno. Inoltre è evidente come le equazioni di questo tipo diventino più complesse al crescere del numero di vicini r che fa sì che appaiano potenze sempre maggiori di $\cos k$. È dunque estremamente complicato trovare analiticamente la linea pseudocritica nel piano $\mu - \omega_0$ poiché come appena visto a fissato $\omega_{0,f}$ il μ_f corrispondente deve essere ricavato dalle condizioni di esistenza della soluzione di una equazione goniometrica di quarto grado o superiore non omogenea. Quello che è più conveniente fare è quindi fissare di volta in volta sia $\omega_{0,f}$ che μ_f e verificare numericamente se l'equazione (3.2) (o la sua corrispondente di grado superiore se $r > 2$) ammette soluzione. Il primo μ_f per cui la si trova corrisponde alla linea pseudocritica se si trova ancora nella stessa fase del punto iniziale di quench mentre corrisponderà alla linea critica se apparterrà ad una fase diversa.

3.2 Sudden quench con $r = \infty$

L'analisi condotta sui diagrammi di fase noti per $r < \infty$ viene utilizzata come palestra per l'analisi del caso successivo con $r = \infty$. Viene analizzato in particolare il caso in cui oltre ad $r = \infty$ i parametri fissi sono dati da $\alpha = \infty$, $\Delta = 2$, $\omega_0 = 1$ e pertanto solo μ e β sono liberi di variare. Il caso è pertanto quello rappresentato in Figura 1.5 dove è presente una regione del diagramma di fase ignota. La logica dello studio è pertanto ribaltata rispetto al caso precedente: mentre prima le linee di FZ venivano utilizzate per confermare i risultati ottenuti come previsto da Proposizione 1.2 adesso esse vengono utilizzate per analizzare i risultati dei vari quench.

Il procedimento che si intende seguire è questo: si analizzano prima le linee di FZ nelle regioni note $\beta < 1 \vee \beta > 1.5$ per determinare la forma delle linee legata ai vari possibili quench e si utilizzano poi i risultati ottenuti per studiare la regione ignota. I risultati vengono pertanto divisi prima studiando il caso di corto raggio, poi di lungo raggio ed infine la regione di crossover.

Risultati regione a corto raggio

Come mostrato in [2], per questa configurazione del modello di Kitaev il modello di Kitaev standard in cui $\alpha = \beta = \infty$ è ripristinato per $\beta > 1.5$, pertanto si ha una regione caratterizzata dalla presenza di un solo modo di edge non massivo per $-2 < \mu < 2$ e dall'assenza di modi di edge altrove. Quello che si vuole fare è andare a studiare la forma per le linee di FZ a seguito di quench del tipo NoEM-NoEM, MEM-NoEM, MEM-MEM, dove con la dicitura NoEM si indica una regione del diagramma di fase dove non sono presenti modi di edge. I quench vengono eseguiti fissando $\beta_i = \beta_f$ e considerando per β i valori 1.55, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.95. Dopo la scelta di β viene fissato il punto finale di quench e che in un caso apparterrà alla fase MEM e nell'altro alla fase NoEM ed infine si varia il punto iniziale di quench in modo da coprire tutti gli scenari possibili. Una delle regioni analizzate con evidenziati i 2 possibili punti di arrivo in $\mu = -1.8$ e $\mu = -2.5$ è rappresentata in Figura 3.5.

I due punti di arrivo considerati hanno rispettivamente $\mu = -2.5$ per il punto nella fase NoEM e $\mu = -1.8$ per il punto di arrivo nella fase MZM. Nella seguente tabella sono riportati i punti di partenza, i punti di arrivo con i rispettivi w ed il numero di FZ osservati che viene evidenziato se

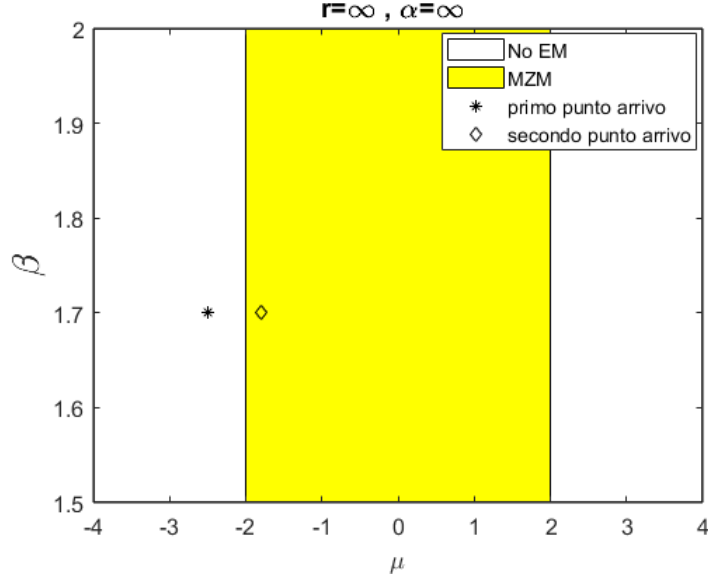


Figura 3.5: Regione che si va ad analizzare nel primo caso di studio dove sono evidenziati i 2 punti finali a $\mu = -1.8$ e $\mu = -2.5$ del quench per $\beta = 1.7$. Per gli altri possibili β considerati i punti di arrivo hanno lo stesso μ di quelli in figura.

risulta essere un candidato alla presenza di una DQPT accidentale nel caso $\beta = 1.7$. In Figura 3.6 vengono anche illustrate le varie linee di FZ.

μ_i	w_i	μ_f	w_f	FZ
-1.9	1	-2.5	0	1
-1.46	1	-2.5	0	1
-1.03	1	-2.5	0	1
-0.59	1	-2.5	0	1
-0.15	1	-2.5	0	1
0.28	1	-2.5	0	1
0.72	1	-2.5	0	1
1.15	1	-2.5	0	1
1.59	1	-2.5	0	1
2.03	0	-2.5	0	2
2.46	0	-2.5	0	2
2.9	0	-1.8	1	1
2.47	0	-1.8	1	1
2.05	0	-1.8	1	1
1.62	1	-1.8	1	0
1.19	1	-1.8	1	0
0.76	1	-1.8	1	0
0.34	1	-1.8	1	0
-0.09	1	-1.8	1	0
-0.52	1	-1.8	1	0
-0.95	1	-1.8	1	0
-1.37	1	-1.8	1	0

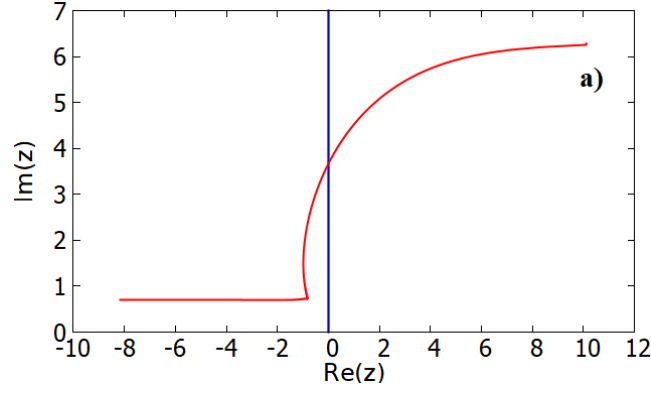


Figura 3.6 a): Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 1.7$ per quench con partenza da $\mu = -1.03$ e arrivo in $\mu = -2.5$ con un solo FZ fisico dovuto ad una DQPT robusta.

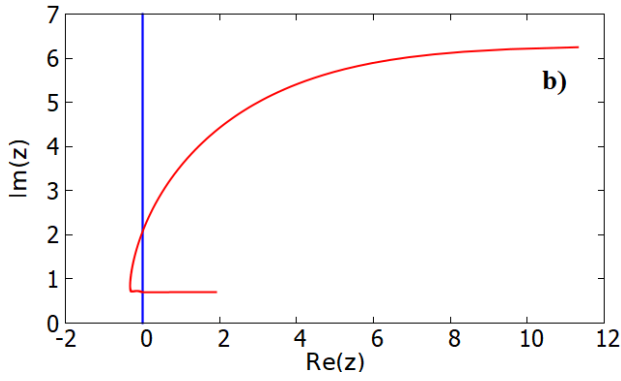


Figura 3.6 b): Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 1.7$ per quench con partenza da $\mu = 2.03$ e arrivo in $\mu = -2.5$. Si noti la presenza di una DQPT accidentale.

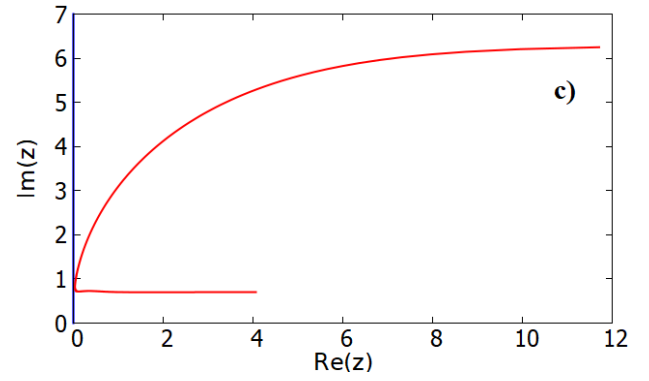


Figura 3.6 c): Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 1.7$ per quench con partenza da $\mu = 25$ e arrivo in $\mu = -2.5$ dove sono assenti le transizioni accidentali.

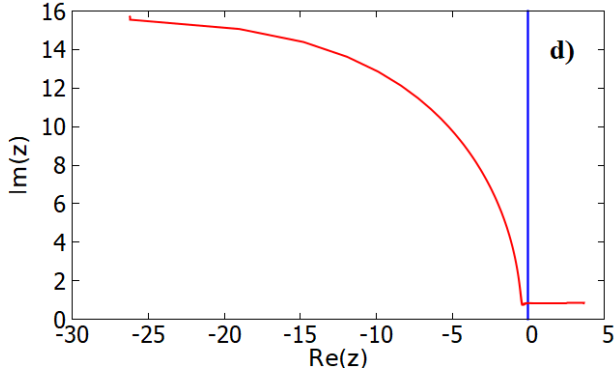


Figura 3.6 d): Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 1.7$ per quench con partenza da $\mu = 2.47$ e arrivo in $\mu = -1.8$ con un solo FZ fisico dovuto ad una DQPT robusta.

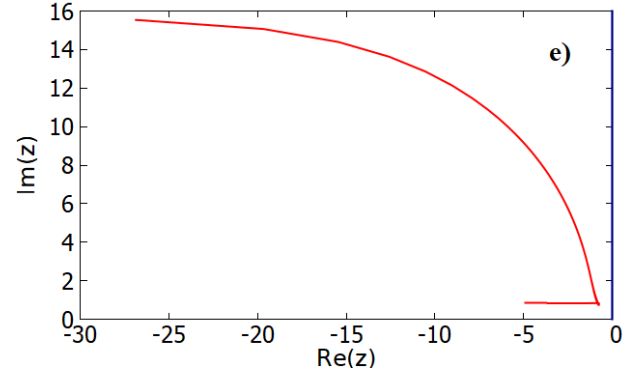


Figura 3.6 e): Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 1.7$ per quench con partenza da $\mu = -0.09$ e arrivo in $\mu = -1.8$. Si noti l'assenza di DQPT accidentali.

Risultati regione a lungo raggio

Si va ora a procedere in modo analogo per la Regione a lungo raggio rappresentata in Figura 3.7, considerando come punto di arrivo a valori di β compresi tra 0.05 e 0.95 il punto con $\mu_f = 0.8$ e cambiando μ_i in modo da coprire tutte le possibili transizioni. Nella tabella successiva sono poi riportati i risultati ottenuti.

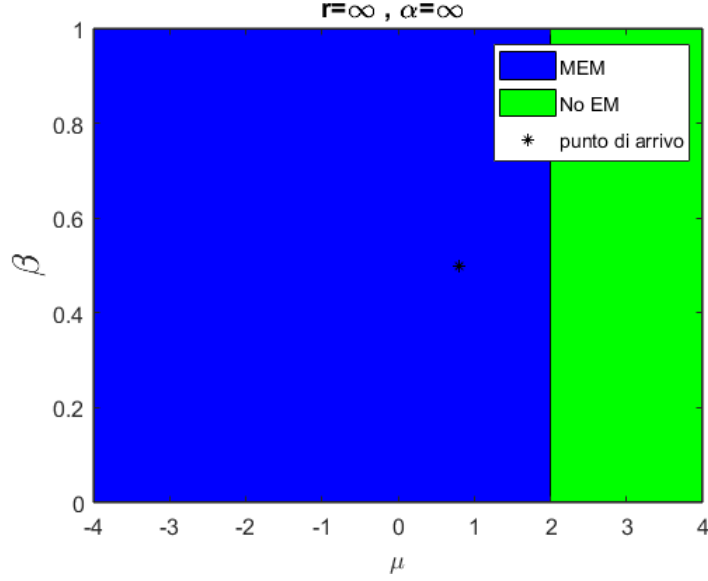


Figura 3.7: Regione che si va ad analizzare nel secondo caso di studio dove è evidenziato il punto finale del quench a $\mu = 0.8$ per $\beta = 0.5$. Per gli altri possibili β considerati il punto di arrivo ha lo stesso μ di quello in figura.

μ_i	w_i	μ_f	w_f	FZ
-2.9	1/2	0.8	-1/2	0
-2.32	1/2	0.8	-1/2	0
-1.74	1/2	0.8	-1/2	0
-1.16	1/2	0.8	-1/2	0
-0.58	1/2	0.8	-1/2	0
0	1/2	0.8	-1/2	0
0.58	1/2	0.8	-1/2	0
1.16	1/2	0.8	-1/2	0
1.74	1/2	0.8	-1/2	0
2.32	1/2	0.8	-1/2	1
2.9	1/2	0.8	-1/2	1

Infine si riportano le linee di FZ per i casi in esame. In questo caso non si sono invece osservate DQPT accidentali e le osservazioni sono in accordo con Proposizione 1.2, infatti anche se in questa regione i winding number sono seminteri si ha comunque che $\Delta w = 1$ e pertanto ci si attende di osservare un solo zero di Fisher come effettivamente accade. Si sottolinea anche come in questa regione sia necessario estendere il numero di vicini r considerati numericamente, in particolare per $\beta \in [0.05, 0.4]$. In questa regione infatti non basta più considerare $r \simeq 10^4$ come fatto finora, ma si deve perlomeno considerare $r \simeq 2 \times 10^4$ per ottenere una approssimazione soddisfacente del polilogaritmo. In figura 3.8 sono riportati le alcune delle linee di FZ ottenute.

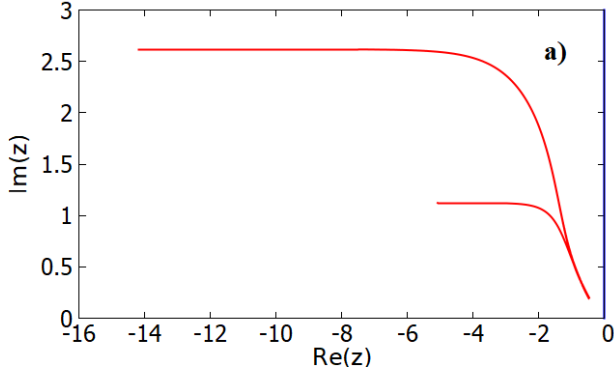


Figura 3.8 a): Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 0.9$ per quench con partenza da $\mu = 0$ e arrivo in $\mu = 0.8$. Si noti l'assenza di FZ fisici.

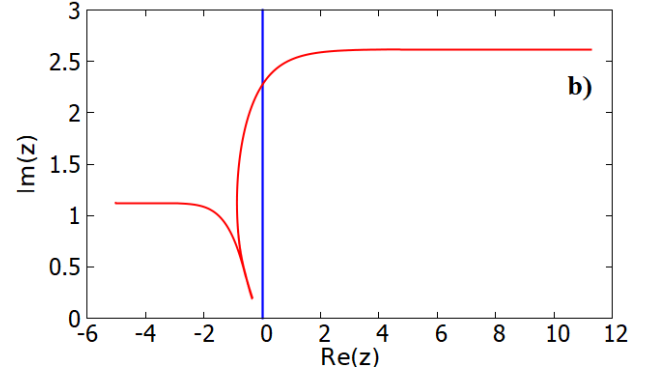


Figura 3.8 b): Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 0.9$ per quench con partenza da $\mu = 2.9$ e arrivo in $\mu = 0.8$ con la presenza di un solo FZ fisico dovuto ad una DQPT robusta.

Risultati regione di crossover

Infine si va a studiare la regione di crossover, così denominata perché pur non descrivendo più un modello a lungo raggio non descrive nemmeno un modello a corto raggio e rappresenta pertanto una via intermedia tra questi due comportamenti [20], [17]. Questa regione si estende pertanto nell'intervallo $\beta \in [1, 1.5]$ e presenta una regione ignota per $\mu < -2$. Non è infatti chiaro se in questa regione si abbia un comportamento simile a quello di un modello a corto raggio con assenza di modi di edge o se si abbia qualcosa di simile al modello a lungo raggio con presenza di modi di edge. In Figura 3.9 è illustrata la regione che si va ora ad esplorare con evidenziata la regione ignota.

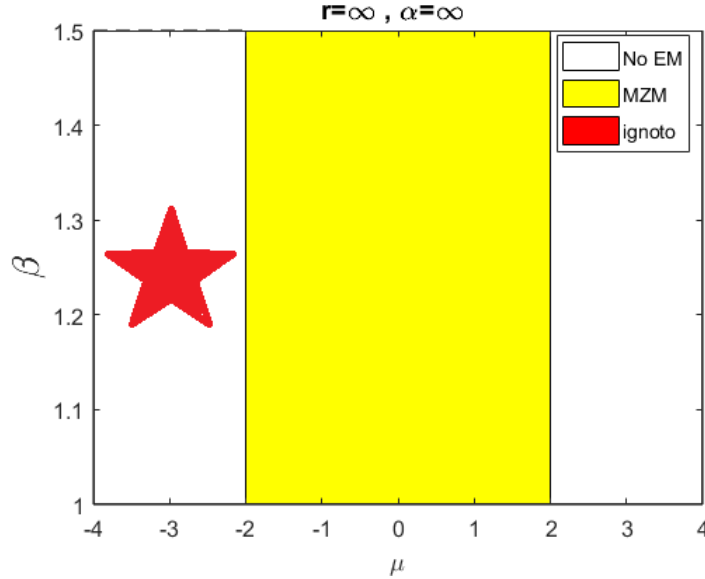


Figura 3.9: Diagramma di fase per la regione di crossover con $1 < \beta < 1.5$. Si sottolinea ancora una volta come tutta la regione con $\mu < 2$ sia ignota e non solo quella coperta dalla stella.

Si procede inizialmente in modo analogo a quanto fatto in precedenza, considerando $\beta_i = \beta_f$ entrambi appartenenti alla regione di crossover, fissando un punto finale di quench e modificando il punto iniziale. Inizialmente si considerano come punti di arrivo quelli con $\mu_f = 2.5 \vee \mu_f = 1.5$, quindi appartenenti a due regioni note rispettivamente senza e con un solo modo di edge non massivo. I punti iniziali vengono poi presi appartenenti alla regione $\mu_i \in [-1.9, 1.9]$. In tabella sono elencati i risultati ottenuti senza indicare il winding number.

μ_i	μ_f	FZ
-1.9	2.5	1
-1.52	2.5	1
-1.14	2.5	1
-0.76	2.5	1
-0.38	2.5	1
0	2.5	1
0.38	2.5	1
0.76	2.5	1
1.14	2.5	1
1.52	2.5	1
1.9	2.5	1
-1.9	1.8	0
-1.52	1.8	0
-1.14	1.8	0
-0.76	1.8	0
-0.38	1.5	0
0	1.5	0
0.38	1.5	0
0.76	1.5	0
1.14	1.5	0
1.52	1.5	0
1.9	1.5	0

Questi primi risultati sono in linea con le aspettative e forniscono delle linee di FZ dalla forma rappresentata in Figura 3.10.

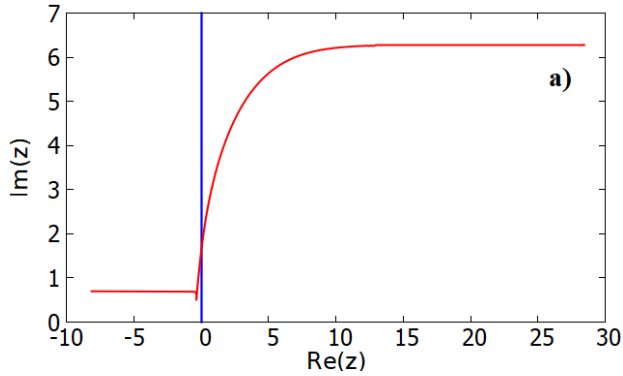


Figura 3.10 a): Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 1.3$ per quench con partenza da $\mu = -1.14$ e arrivo in $\mu = 2.5$. Si noti la presenza di un FZ fisico dovuto ad una DQPT robusta.

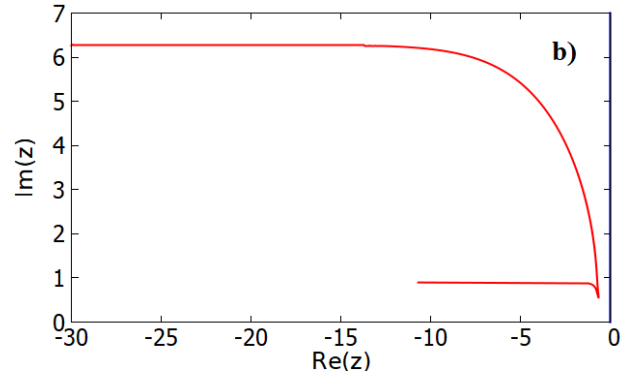


Figura 3.10 b): Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 1.3$ per quench con partenza da $\mu = -0.38$ e arrivo in $\mu = 1.5$. Si noti l'assenza di DQPT sia robuste che accidentali.

Così facendo si è trovata la forma delle linee di FZ per quench fra un punto con modo di edge e uno senza e fra due punti entrambi con un modo di edge.

Si può quindi iniziare a studiare la regione stellata. Si prende ora μ_i appartenente a questa regione e μ_f appartenente alle altre due regioni e si osservano questi risultati² per $\beta = 1.3$

²Come in precedenza le simulazioni sono state eseguite per vari β ma si esprimono i risultati e le figure solo per uno particolare senza che si perda generalità.

μ_i	μ_f	FZ
-2.9	2.5	2
-2.82	2.5	2
-2.74	2.5	2
-2.66	2.5	2
-2.58	2.5	2
-2.5	2.5	2
-2.42	2.5	2
-2.34	2.5	2
-2.26	2.5	2
-2.18	2.5	2
-2.1	2.5	2
-2.9	1	1
-2.82	1	1
-2.74	1	1
-2.66	1	1
-2.58	1	1
-2.5	1	1
-2.42	1	1
-2.34	1	1
-2.26	1	1
-2.18	1	1
-2.1	1	1

In base a quello che si è imparato studiando in precedenza il caso $r = 3$, è possibile che nel quench dalla regione stellata a quello senza modi di edge sia presente una transizione accidentale poiché il numero di FZ che si riscontra è pari. Questa eventualità è sicuramente esclusa per l'altro tipo di quench dove si ha un solo zero di Fisher che deve essere per forza robusto. Le linee ottenute sono rappresentate in Figura 3.11.

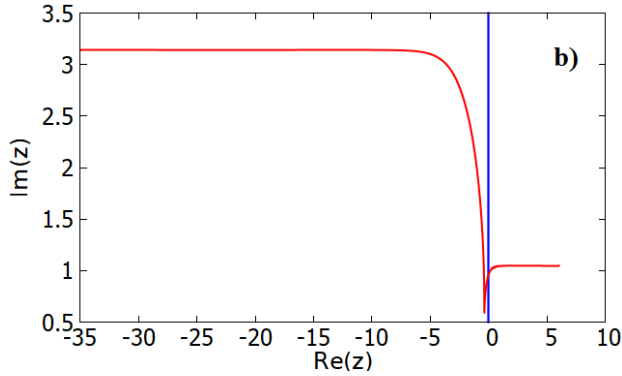


Figura 3.11 a): Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 1.3$ per quench con partenza da $\mu = -2.1$ e arrivo in $\mu = 2.5$. I due FZ presenti potrebbero essere dovuti ad una DQPT accidentale.

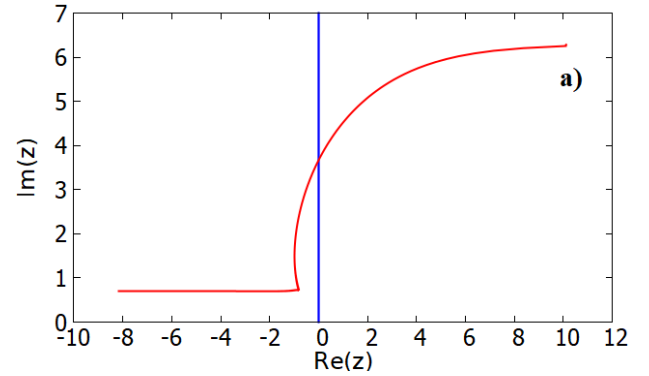


Figura 3.11 b): Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 1.3$ per quench con partenza da $\mu = -2.58$ e arrivo in $\mu = 1$. Il solo FZ presente è sicuramente dovuto ad una DQPT robusta.

Per verificare se effettivamente si ha una transizione accidentale andiamo a modificare μ_i del primo tipo di quench, cioè di quello che da la Figura 3.11 b). Così facendo per $\mu_i = -8$ si ottiene la Figura 3.12.

Da questo risultato si vede quindi che i 2 FZ trovati in precedenza erano dovuti ad una DQPT accidentale: le 2 linee nei casi $\mu_i = -8$ e $\mu_i = -2.58$ hanno la stessa forma e sono solo shiftate l'una rispetto all'altra, inoltre è nota che le uniche linee critiche possibili per il modello di Kitaev generalizzate sono quelle a $\mu = \pm 2$ già osservate³, pertanto si può ipotizzare che la regione stellata

³I valori di μ a cui si trovano le linee critiche dipendono in relata dalla normalizzazione dei parametri dell'Hamiltoniana.

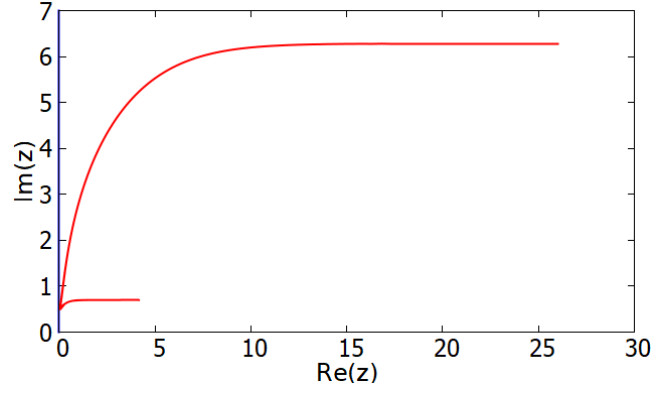


Figura 3.12: Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, $\beta_i = \beta_f = 1.3$ per quench con partenza da $\mu = -8$ e arrivo in $\mu = 2.5$. L'assenza di qualsiasi FZ indica che i punti appartengono alla stessa fase.

sia una regione in cui non si hanno edge mode in quanto non è possibile che $\mu = -8$ appartenga ad un'altra fase.

Quench con $\beta_i \neq \beta_f$

Finora si sono effettuati quench in cui si è mantenuto $\beta_i = \beta_f$. Tuttavia questo non è l'unico caso possibile, ma si possono anche utilizzare quench con β diversi. Questo tipo di quench può essere utilizzato come ulteriore conferma di Proposizione 1.2 oltre che per i risultati ottenuti nella sezione precedente. Si procede quindi andando a fissare β_f e modificando di volta in volta β_i tenendo però fissi sia μ_i che μ_f . Vengono analizzati quench di 3 diversi tipi:

- da regione a lungo raggio a regione a corto raggio,
- da regione di crossover a regione a corto raggio,
- da regione a lungo raggio a regione di crossover.

I risultati verranno analizzati separatamente per ogni regione.

Da lungo a corto raggio

In questo caso si pone $\beta_f = 2$ e $\beta_i < 1$ e si studiano poi tre tipi di quench:

- da fase senza modi di edge a fase senza modi di edge,
- da fase con modi di edge massivi (MEM) a fase senza modi di edge,
- da fase MZM a fase MEM.

In questo modo si vuole vedere cosa succede quando si va a fare un quench tra due fase caratterizzate da winding number interi e seminteri. Nel primo caso considerato si ha che $\mu_i = \mu_f = 2.5$ mentre i β seguono questo andamento:

Con la scelta fatta in questo lavoro le linee sono a $\mu = \pm 2$, ma in letteratura possono essere trovate anche a $\mu = \pm 1$, di fatto si sta solo riscaldando μ rispetto agli altri parametri senza che questo cambi la fisica del sistema.

β_i	w_i	β_f	w_f	FZ
0.05	$-\frac{1}{2}$	2	0	0
0.14	$-\frac{1}{2}$	2	0	0
0.23	$-\frac{1}{2}$	2	0	0
0.32	$-\frac{1}{2}$	2	0	0
0.41	$-\frac{1}{2}$	2	0	0
0.50	$-\frac{1}{2}$	2	0	0
0.59	$-\frac{1}{2}$	2	0	0
0.68	$-\frac{1}{2}$	2	0	0
0.77	$-\frac{1}{2}$	2	0	0
0.86	$-\frac{1}{2}$	2	0	0
0.95	$-\frac{1}{2}$	2	0	0

Se si considera come esempio il caso $\beta_i = 0.77$ si ottiene la linea di FZ rappresentata in Figura 3.13.

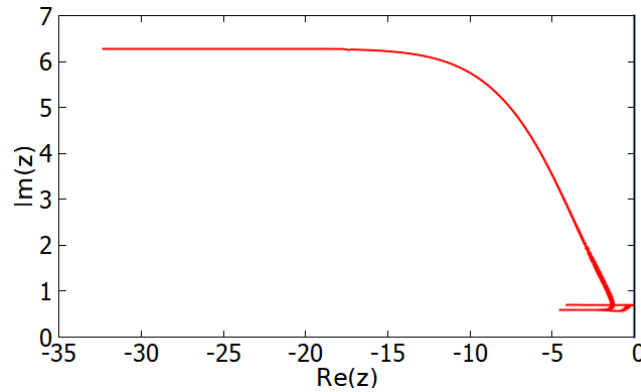


Figura 3.13: Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, per quench con partenza da $\beta = 0.77$, $\mu = 2.5$ e arrivo in $\beta = 2$, $\mu = 2.5$. SI noti l'assenza di FZ fisici.

L'assenza di FZ è in accordo con le previsioni in quanto in questo caso $\Delta w \notin \mathbb{N}$ e pertanto non si possono osservare DQPT.

Questo comportamento si dovrebbe riprodurre in maniera simile per gli altri casi considerati per questo tipo di quench, bisogna però verificare che sia effettivamente così. Per farlo, si considera ora il secondo caso dell'elenco in cui $\mu_i = \mu_f = -2.5$ e ancora $\beta_f = 2$. In questo caso pertanto si ha che mentre il punto iniziale appartiene alla fase MEM il punto finale non presenta modi di edge. I risultati sono analoghi al caso precedente e possono essere sintetizzati nella seguente tabella

β_i	w_i	β_f	w_f	FZ
0.05	$\frac{1}{2}$	2	0	0
0.14	$\frac{1}{2}$	2	0	0
0.23	$\frac{1}{2}$	2	0	0
0.32	$\frac{1}{2}$	2	0	0
0.41	$\frac{1}{2}$	2	0	0
0.50	$\frac{1}{2}$	2	0	0
0.59	$\frac{1}{2}$	2	0	0
0.68	$\frac{1}{2}$	2	0	0
0.77	$\frac{1}{2}$	2	0	0
0.86	$\frac{1}{2}$	2	0	0
0.95	$\frac{1}{2}$	2	0	0

Ancora una volta si ritrova quanto atteso. La forma delle linee di FZ per $\beta_i = 0.77$ è invece leggermente diversa dal caso precedente ed è data dalla Figura 3.14.

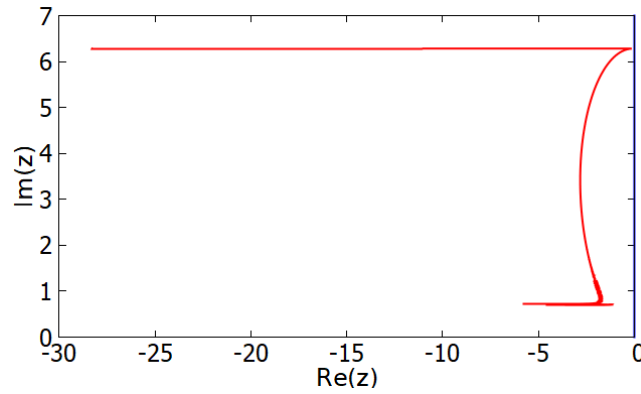


Figura 3.14: Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, per quench con partenza da $\beta = 0.77$, $\mu = -2.5$ e arrivo in $\beta = 2$, $\mu = -2.5$. Si noti l'assenza di FZ fisici.

Rimane infine da studiare l'ultimo caso in cui entrambi i punti appartengono a fasi in cui sono presenti modi di edge. In questo caso si sceglie $\mu_i = \mu_f = -1.5$, i risultati sono espressi nella seguente tabella

β_i	w_i	β_f	w_f	FZ
0.05	$\frac{1}{2}$	2	1	0
0.14	$\frac{1}{2}$	2	1	0
0.23	$\frac{1}{2}$	2	1	0
0.32	$\frac{1}{2}$	2	1	0
0.41	$\frac{1}{2}$	2	1	0
0.50	$\frac{1}{2}$	2	1	0
0.59	$\frac{1}{2}$	2	1	0
0.68	$\frac{1}{2}$	2	1	0
0.77	$\frac{1}{2}$	2	1	0
0.86	$\frac{1}{2}$	2	1	0
0.95	$\frac{1}{2}$	2	1	0

Ancora una volta si va ad osservare il caso $\beta_i = 0.77$ in Figura 3.15.

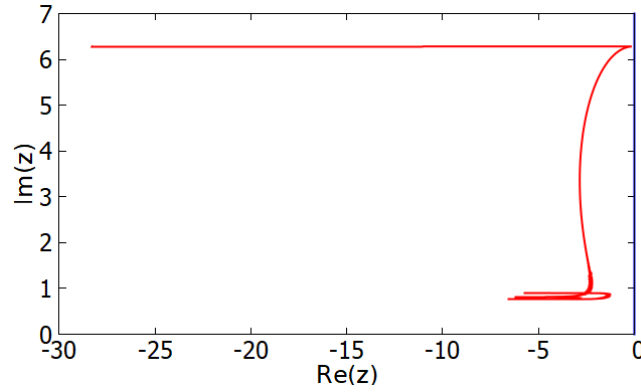


Figura 3.15: Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, per quench con partenza da $\beta = 0.77$, $\mu = -1.5$ e arrivo in $\beta = 2$, $\mu = -1.5$. Si noti l'assenza di FZ fisici.

I quench dalla regione a lungo a quella a corto raggio hanno confermato ulteriormente le previsioni di Proposizione 1.2: non solo sono predetti correttamente il numero di FZ nel caso di quench tra due fasi caratterizzate entrambe da w entrambi interi o seminteri, ma anche nel caso in cui una fase abbia w intero e l'altra semintero Proposizione 1.2 funziona. Con questo ulteriore risultato si possono affrontare i casi successivi.

Da crossover a corto raggio

Si passa ora al secondo caso, in cui questa volta il quench è fatto partendo dalla regione di crossover in cui $1 < \beta < 1.5$ e raggiungendo la regione a corto raggio. Anche in questo caso vengono analizzate tre diverse situazioni:

- da regione senza modi di edge a regione senza modi di edge,
- da regione con modi di edge a regione MZM,
- da regione stella a regione senza modi di edge.

Nel primo caso si considera $\mu_i = \mu_f = 2.5$ e si vanno ad eseguire i seguenti quench con annessi risultati (dove non è indicato il winding number di ogni punto considerato):

β_i	β_f	FZ
1.05	2	0
1.09	2	0
1.13	2	0
1.17	2	0
1.21	2	0
1.25	2	0
1.29	2	0
1.33	2	0
1.37	2	0
1.41	2	0
1.45	2	0

L'assenza di FZ è sicuramente spiegabile col fatto che si sta eseguendo un quench tra due fasi caratterizzate entrambe dall'assenza di edge mode e pertanto le uniche DQPT possibili sono quelle accidentali che evidentemente non appaiono nei quench analizzati. Un esempio di linea di FZ si ha considerando il caso con $\beta_i = 1.41$ di Figura 3.16.

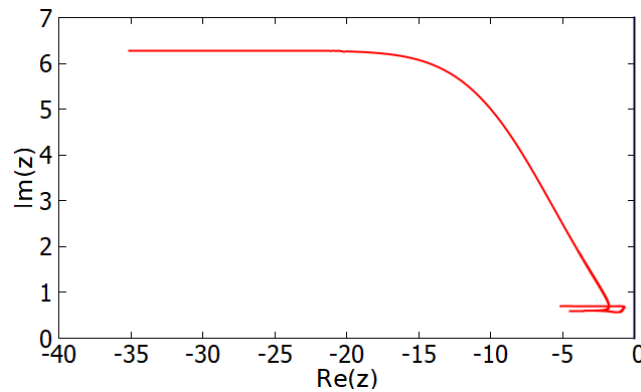


Figura 3.16: Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, per quench con partenza da $\beta = 1.41$, $\mu = 2.5$ e arrivo in $\beta = 2$, $\mu = 2.5$. Si noti l'assenza di FZ fisici.

Il caso successivo è quello in cui si parte dalla regione con modi di edge e si finisce in quella con MZM: ora si prende $\mu_i = \mu_f = -1.5$ e sempre con $\beta_f = 2$. In tabella sono riportati i quench considerati:

β_i	β_f	FZ
1.05	2	0
1.09	2	0
1.13	2	0
1.17	2	0
1.21	2	0
1.25	2	0
1.29	2	0
1.33	2	0
1.37	2	0
1.41	2	0
1.45	2	0

Anche in questo caso non si osservano transizioni. Alla luce di quanto visto per i quench di tipo lungo raggio-corto raggio questo può essere dovuto al fatto che si hanno o modi del tipo MZM nella regione di crossover e non si hanno DQPT accidentali o si hanno modi MEM che però sono caratterizzati da w semintero e quindi non si possono avere DQPT per Proposizione 1.2. Infatti è noto [2] che la regione di crossover può presentare un carattere misto tra MZM e MEM ma tuttavia questo non influenza l'analisi tramite linee di FZ. In ogni caso i risultati sono concordi con le attese. Un esempio di linea di FZ per $\beta_i = 1.25$ è fornito da Figura 3.17.

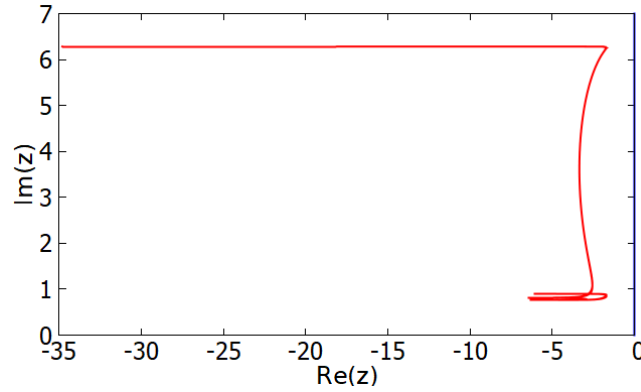


Figura 3.17: Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, per quench con partenza da $\beta = 1.25$, $\mu = -1.5$ e arrivo in $\beta = 2$, $\mu = -1.5$. Si noti l'assenza di FZ fisici.

Osservando questa figura si nota particolare somiglianza con il caso di quench tra fase MEM e fase MZM. Per verificare se effettivamente la fase con modi di edge della regione di crossover sia assimilabile alla fase MEM sono necessarie ulteriori analisi che riguardino la regione a lungo raggio.

Si può ora passare all'ultimo caso di interesse dove si esegue un quench dalla regione stella, che ci si attende essere una regione dove sono assenti i modi di edge, alla regione a corto raggio senza modi di edge. I risultati ottenuti sono elencati in tabella per $\mu_i = \mu_f = -2.5$:

β_i	β_f	FZ
1.05	2	0
1.09	2	0
1.13	2	0
1.17	2	0
1.21	2	0
1.25	2	0
1.29	2	0
1.33	2	0
1.37	2	0
1.41	2	0
1.45	2	0

Questi risultati sono identici a quelli ottenuti in precedenza. La line di FZ per $\beta_i = 1.45$ è rappresentata in Figura 3.18.

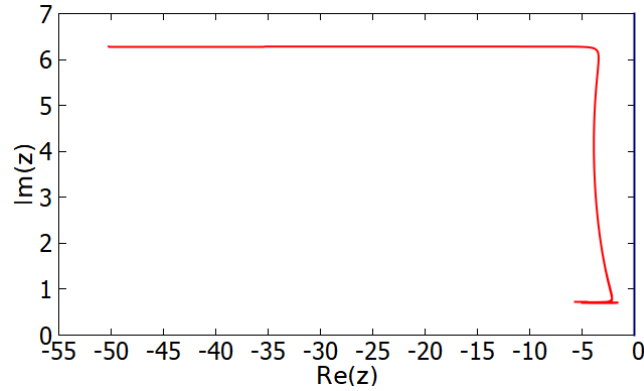


Figura 3.18: Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, per quench con partenza da $\beta = 1.45$, $\mu = -2.5$ e arrivo in $\beta = 2$, $\mu = -2.5$. Si noti ancora una volta l'assenza di FZ fisici.

Da crossover a lungo raggio

Come ultimo caso di β diversi si considerano i quench dalla regione di crossover a quella a lungo raggio. Anche in questo caso sono 3 le situazioni di interesse:

- da regione senza modi di edge a regione senza modi di edge,
- da regione con modi di edge a regione MEM,
- da regione stella a regione MEM.

Si inizia dal primo caso in cui si ha che $\mu_i = \mu_f = 2.5$. Quello che si ottiene è

β_i	β_f	FZ
1.05	0.9	0
1.09	0.9	0
1.13	0.9	0
1.17	0.9	0
1.21	0.9	0
1.25	0.9	0
1.29	0.9	0
1.33	0.9	0
1.37	0.9	0
1.41	0.9	0
1.45	0.9	0

Non si osservano pertanto transizioni, un esempio di linee di FZ si ha per $\beta_i = 1.33$ in Figura 3.19.

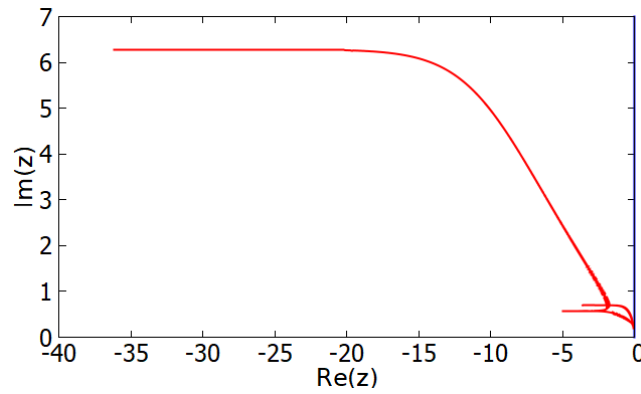


Figura 3.19: Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, per quench con partenza da $\beta = 1.33$, $\mu = 2.5$ e arrivo in $\beta = 0.9$, $\mu = 2.5$. Si noti l'assenza di zeri fisici.

Il secondo caso che riguarda i quench fra le due regioni che presentano modi di edge fornisce i seguenti risultati per $\beta_i = \beta_f = -1.5$:

β_i	β_f	FZ
1.05	0.9	0
1.09	0.9	0
1.13	0.9	0
1.17	0.9	0
1.21	0.9	0
1.25	0.9	0
1.29	0.9	0
1.33	0.9	0
1.37	0.9	0
1.41	0.9	0
1.45	0.9	0

Per $\beta_i = 1.45$ la linea di FZ che si ha in Figura 3.20 è:

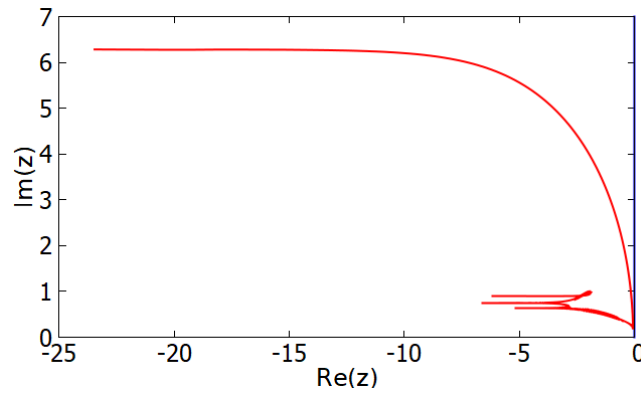


Figura 3.20: Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, per quench con partenza da $\beta = 1.45$, $\mu = -1.5$ e arrivo in $\beta = 0.9$, $\mu = -1.5$. Ancora una volta non sono presenti FZ fisici.

Infine, l'ultimo caso in esame è quello del quench tra la regione stellata e la regione MEM per $\mu_i = \mu_f = -2.5$ che fornisce questi risultati:

β_i	β_f	FZ
1.05	0.9	0
1.09	0.9	0
1.13	0.9	0
1.17	0.9	0
1.21	0.9	0
1.25	0.9	0
1.29	0.9	0
1.33	0.9	0
1.37	0.9	0
1.41	0.9	0
1.45	0.9	0

Si prende poi come esempio il caso di $\beta_i = 1.41$ di Figura 3.21.

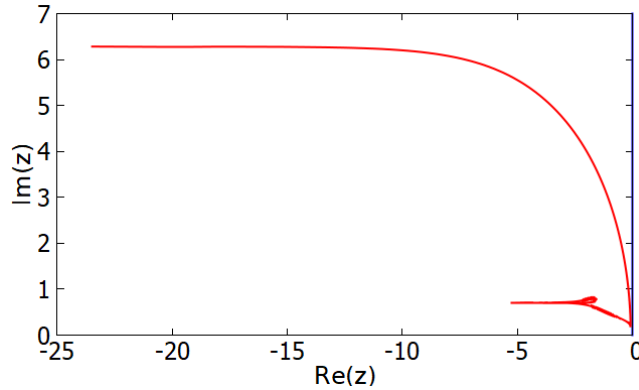


Figura 3.21: Linea di FZ nel caso $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_0 = 1$, $\Delta = 2$, per quench con partenza da $\beta = 1.41$, $\mu = -2.5$ e arrivo in $\beta = 0.9$, $\mu = -2.5$. Gli FZ fisici sono assenti.

Quanto finora osservato permette di concludere che le i valori di β che separano le varie regioni non sono linee critiche per i sudden quench: infatti esse possono essere attraversate senza che insorga alcuna DQPT robusta.

Per quanto riguarda la regione con modi di edge nella regione di crossover essa presenta un carattere misto tra MZM e MEM poiché le linee di FZ osservate per quench tra questa regione e le regioni puramente MEM o MZM presentano forme peculiari ma nessuno zero di Fisher fisico. L'assenza di zeri fisici è spiegabile anche col fatto che nella regione di crossover ci si attende [20] che i winding number non siano né interi né seminteri e questa ipotesi è confermata dai quench appena eseguiti con $\beta_i \neq \beta_f$.

Infine, si può concludere che la regione indicata dalla stella in Figura 3.9 è una regione in cui non sono presenti modi di edge: si è dunque riusciti ad utilizzare in maniera proficuo le linee di FZ per analizzare un diagramma di fase come da obiettivo prefissato. Un indizio che nella regione stellato potessero essere assenti modi di edge era dato dalla presenza della linea critica per $\mu = -2$, linea che scompare poi per $\beta < 1$ [21], [17].

3.3 Slow quench

Dopo avere concluso la discussione sui sudden quench, che ha portato a risultati come sperato, si passa ora ad analizzare i diagrammi di fase attraverso gli slow quench. Questa analisi viene condotta al contraria della precedente solo nel caso $r = \infty, \alpha = \infty$ presentato in Figura 1.5 usando però i risultati appena ottenuti attraverso i sudden quench. Il diagramma di fase diventa pertanto quello rappresentato in Figura 3.22.

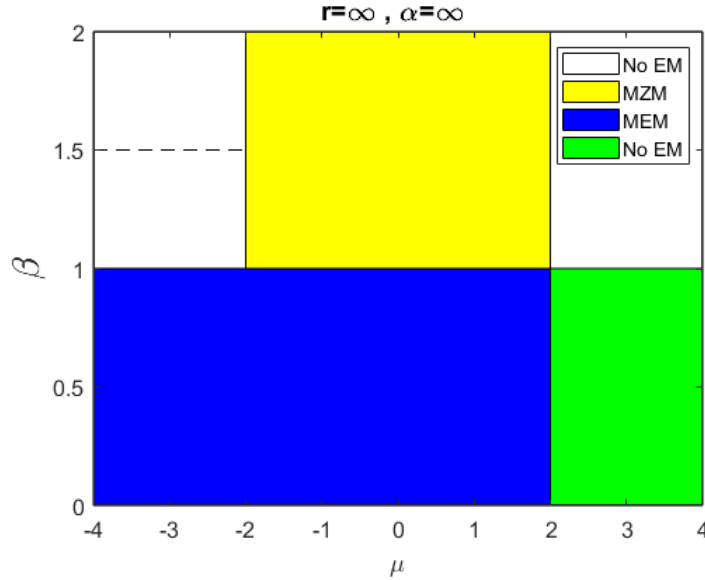


Figura 3.22: Diagramma di fase per $r = \infty, \alpha = \infty, \omega_o = 1, \Delta = 2$ dopo i risultati della Sezione 3.2

L'obiettivo che ci si pone è di verificare la relazione di scaling per modelli a lungo raggio data da (1.100). È noto come questa relazione sia valida nella regione di crossover [14] e nella regione a corto raggio valga invece (1.95) mentre devono invece essere effettuate verifiche nella regione a lungo raggio $\beta < 1$.

Oltre a questo, si vuole altresì verificare come scegliendo opportunamente lo slow quench si possa descrivere un percorso nello spazio dei parametri che eviti linee critiche⁴ ove questo è possibile. Nel diagramma di fase considerato questo dovrebbe essere possibile poiché la linea critica che si ha a $\mu = -2$ smette di essere tale per $\beta < 1$. Poiché invece la linea critica a $\mu = 2$ rimane tale anche al di sotto di $\beta = 1$, un confronto tra due opportuni slow quench dovrebbe mostrare le differenze cercate.

Per effettuare questi studi, si effettueranno quench che passino le linee critiche e β costante nelle 3 diverse regioni e si verificheranno le relazioni di scaling cercate. Pertanto si effettuano 6 diversi quench, uno partendo da $\mu < -2$ e arrivando in $\mu = 0$ e uno partendo da $\mu > 2$ e arrivando in $\mu = 0$ per ognuna delle 3 regioni.

Infine si effettua uno studio sul quench a μ costante e $\beta_i \neq \beta_f$: questo caso come già illustrato nel primo capitolo non è riconducibile ad un problema di tipo Landau-Zener e deve pertanto essere studiato attraverso la risoluzione diretta del sistema di equazioni differenziali dato da (1.81) e (1.82).

Regione a corto raggio

In questo caso si va ad effettuare il quench con $\beta = 3$ e ci si attende una relazione di scaling con $\nu = 1/2$. Per verificarlo, si calcola n_d per diversi tempi caratteristici di quench τ_q come illustrato nel Capitolo 2. Una volta fatto questo, poiché la dipendenza di n_d da τ_Q è data da (1.99) si vanno a

⁴In generale più che di linee critiche si dovrebbe parlare di iperpiani critici, in quanto la dimensione di questi è maggiore di 1 in spazio a più dimensioni come quello in esame. Dato che però solo 2 dei 6 parametri sono liberi di variare si ha che l'iperpiano critico viene effettivamente ridotto ad una linea critica.

graficare i logaritmi naturali di n_d e τ_Q e si va poi ad eseguire un fit lineare. Nella Figura 3.23 sono illustrati i risultati numerici ottenuti su scala logaritmica, dove si è poi eseguito un fit lineare per calcolare il coefficiente angolare della retta e verificare la sua consistenza col valore atteso di $\nu = 1/2$.

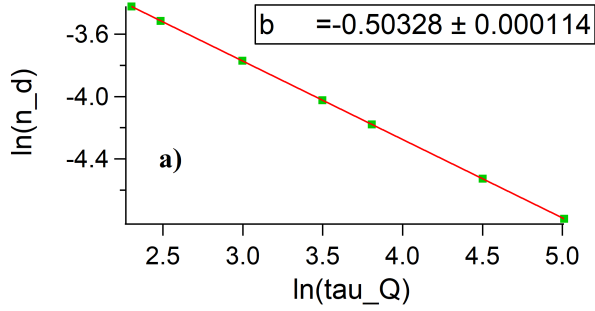


Figura 3.23 a): Risultati numerici per il calcolo della densità di difetti n_d per un quench con $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_o = 1$, $\Delta = 2$, $\beta = 3$, $\mu_i \ll -2$ e $\mu_f = 0$. Il coefficiente b indica il coefficiente angolare della retta.

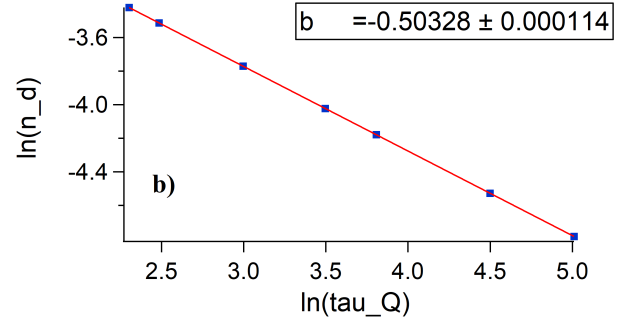


Figura 3.23 b): Risultati numerici per il calcolo della densità di difetti n_d per un quench con $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_o = 1$, $\Delta = 2$, $\beta = 3$, $\mu_i \gg 2$ e $\mu_f = 0$. Si noti come i risultati siano gli stessi del caso alternativo.

Il risultato ottenuto conferma quanto previsto, ovvero che $\nu = 1/2$ (il segno di differenza è dovuto solamente alla convenzione adottata nella definizione di ν). I due quench sono inoltre identici perché questo tipo di quench è un problema di Landau-Zener e la soluzione per questo problema nel modello scelto è data da (1.93) dove il segno di μ è indifferente per il procedimento utilizzato.

Regione di crossover

Dopo i risultati della regione a corto raggio si passa alla regione di crossover per verificare quanto trovato in [14], ovvero che lo scaling per slow quench a β costante valga la legge data da (1.100). Il procedimento seguito è lo stesso del caso a corto raggio, con due diversi quench uno fatto per valori di μ positivi e uno di μ negativi. In questo caso ci si attende che sia rispettata la relazione di scaling proposta in [14] per cui $\nu = 1/(2\beta - 2)$. In questo caso si considera $\beta = 1.3$ per cui $\nu = 5/3 = 1.\bar{6}$. Ancora ci si attende simmetria tra i due quench fatti per μ positivi e negativi.

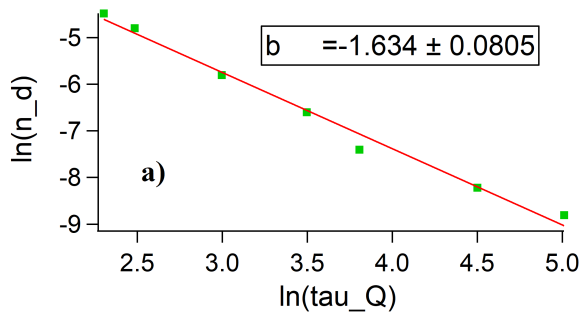


Figura 3.24 a): Risultati numerici per il calcolo della densità di difetti n_d per un quench con $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_o = 1$, $\Delta = 2$, $\beta = 1.3$, $\mu_i \ll -2$ e $\mu_f = 0$. Il coefficiente b indica il coefficiente angolare della retta.

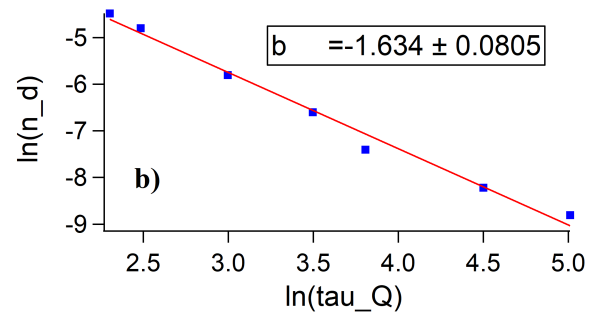


Figura 3.24 b): Risultati numerici per il calcolo della densità di difetti n_d per un quench con $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_o = 1$, $\Delta = 2$, $\beta = 1.3$, $\mu_i \gg 2$ e $\mu_f = 0$. Si noti come i risultati siano gli stessi del caso alternativo.

Anche questi risultati sono in accordo con le previsioni e mostrano simmetria tra quench a μ positivo e negativo. Si passa ora all'analisi del modello a lungo raggio, dove ci si attende differenza per i quench tra μ negativo e positivo poiché solo nel secondo caso viene attraversata una linea critica.

Regione a lungo raggio

L'ultima serie di simulazioni per cui $\beta_i = \beta_f$ è quella per un modello a lungo raggio. In questo caso la relazione di scaling non è stata dimostrata in lavori precedenti e deve pertanto essere determinata adesso. Quello che ci si attende è che si abbia $\nu = 1/\beta$, pertanto se si considera il caso con $\beta = 0.8$ ci si attende $\nu = 5/4$. I risultati ottenuti sono illustrati in Figura 3.25.

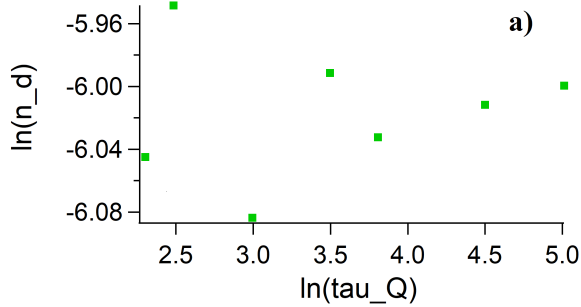


Figura 3.25 a): Risultati numerici per il calcolo della densità di difetti n_d per un quench con $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_o = 1$, $\Delta = 2$, $\beta = 0.8$, $\mu_i \ll -2$ e $\mu_f = 0$. Si noti come non sia presente un andamento preciso per n_d anche se questi posseggono un valore circa costante.

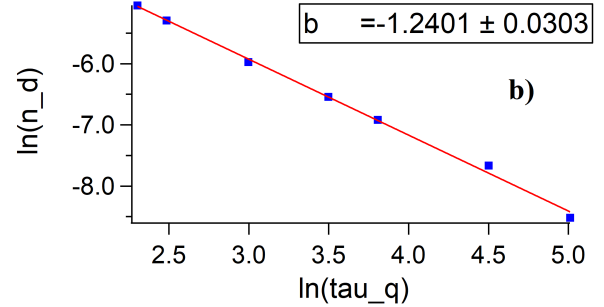


Figura 3.25 b): Risultati numerici per il calcolo della densità di difetti n_d per un quench con $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_o = 1$, $\Delta = 2$, $\beta = 0.8$, $\mu_i \gg 2$ e $\mu_f = 0$. In questo caso è invece presente una relazione di scaling tra n_d e τ_Q .

In questo caso invece si ha che la relazione di scaling è presente solo per scaling fatti da μ positivi. Questo è consistente col fatto che solo in questo caso viene attraversata una linea critica, mentre per μ negativi si osservano comunque difetti che non seguono però alcuna particolare relazione di scaling. Si osservano comunque difetti perché l'evoluzione temporale è perfettamente adiabatica solo nel limite $\tau_Q \rightarrow \infty$, pertanto per $\tau_Q < \infty$ si formano comunque dei difetti.

Caso $\beta_i \neq \beta_f$

Nell'ultimo caso in esame si vuole studiare il caso in cui $\beta_i \neq \beta_f$ e si vuole osservare cosa si ottiene. Si considera sempre $\beta_i = 3$ e $\beta_f = 0.8$ e si varia τ_Q : si vuole osservare se si ottiene una relazione di scaling per la densità di difetti o se invece non è così. I risultati ottenuti per $\mu = 1$ sono schematizzati in Figura 3.26.

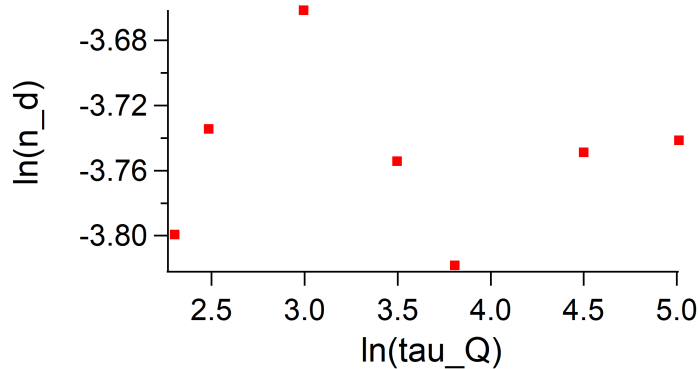


Figura 3.26: Risultati numerici per il calcolo della densità di difetti n_d per un quench con $r = \infty$, $\alpha = \infty$, $\omega_o = 1$, $\Delta = 2$, $\mu = 1$, $\beta_i = 3$ e $\beta_f = 0.8$. Si noti come non sia presente nessuna relazione di scaling ben definita tra n_d e τ_Q .

I risultati evidenziano come non sia presente alcuna relazione di scaling per i risultati ottenuti. Si noti come in questo caso n_d sia circa 10 volte maggiore del caso in cui $\beta_i = \beta_f$ e varia μ : questo risultato è spiegabile col fatto che queste simulazioni sono molto più lente delle altre e pertanto la

griglia temporale è 10 volte meno fitta. Infittendo la griglia temporale ci si attende quindi di ottenere densità di difetti compatibili in modo che sia ancora più chiara l'assenza di una relazione di scaling.

Conclusioni

Ci si erano prefissati 2 obiettivi per questo lavoro: definire il legame tra winding number e DQPT usandolo per studiare i diagrammi di fase stazionari tramite il protocollo di non equilibrio del sudden quench e l'utilizzo di slow quench per mostrarne la differenza con i sudden quench, in particolare per quel che riguarda la possibilità di scegliere un determinato cammino nello spazio dei parametri.

Per quanto riguarda il primo obiettivo, esso è stato sicuramente raggiunto: è stato stabilito il legame che esiste tra w e il numero di DQPT osservate sfruttando e completando i risultati già presenti in letteratura. Per raggiungere questo obiettivo sono stati studiati vari modelli, tutte differenti manifestazioni del modello di Kitaev generalizzato introdotto inizialmente:

- modelli con numero di vicini finito con hopping o pairing a lungo raggio e ampiezza di hopping e potenziale chimico variabili,
- modelli con numero di vicini infinito e hopping a corto raggio, con potenziale chimico e esponente di pairing variabili.

Per questi modelli si è giunti al risultato principale espresso da Proposizione 1.2 e che qui viene richiamato:

Proposizione 3.1. *Se si opera un sudden quench tra 2 punti caratterizzati da winding number w_1 e w_2 rispettivamente, allora si osserverà un numero di DQPT N_{DQPT} dato da*

$$N_{DQPT} = |\Delta w|.$$

Nel caso $\Delta w = 0$ se i punti di quench sono opportunamente scelti si ha un N_{DQPT} pari dovuto ad uno shift della linea di zeri di Fisher.

Questo risultato è stato poi utilizzato per procedere allo studio della regione ignota del diagramma di fase di Figura 1.5, portando alla conclusione che questa regione sia una regione dove devono essere assenti modi di edge. Questo risultato è stato ottenuto sfruttando il fatto che:

1. La forma delle linee di FZ che caratterizzano le transizioni da e alla regione ignota sono del tutto analoghe a quella che caratterizzano una regione in cui sono assenti modi di edge. In particolare, le transizioni verso la regione in cui non sono presenti modi di edge con $\mu > 2$ sono analoghe a quelle che si hanno per le stesse regioni con $\beta > 2$, regioni che sono note non presentare modi di edge.
2. È ancora presente una linea critica a $\mu = -2$ che deve necessariamente separare due fasi diverse.
3. Anche i quench che coinvolgono β_i e β_f diversi indicano che questa debba essere una regione in cui sono assenti i modi di edge.

Pertanto si è riusciti a realizzare una metodologia computazionalmente vantaggiosa che può essere applicata allo studio dei diagrammi di fase di modelli sia a corto che lungo raggio. Questa metodologia è efficace per verificare diagrammi già calcolati o per studiare regioni di diagrammi solo parzialmente noti come fatto qui. L'algoritmo che si utilizza per lo studio di un diagramma di fase è il seguente:

- 1) Scelta dei punti iniziali e finali di quench di cui possibilmente almeno uno dei due in una fase nota.

- 2) Disegno del grafico della linea di FZ (ed eventualmente della rate function della Loschmidt amplitude) relativa al quench scelto.
- 3) Conta degli zeri fisici e delle non-analiticità osservate per determinare il numero di DQPT presente.
- 4) Procedere ripetendo i primi 3 punti in modo da giungere a una caratterizzazione completa di tutti i possibili quench ammessi dal modello. È inizialmente conveniente iniziare dai casi in cui $\Delta w \neq 0$ per semplicità.
- 5) Caratterizzazione delle DQPT accidentali dovute a shift senza deformazione delle linee di FZ nel piano complesso.
- 6) Eventuale disegno delle linee di punti pseudocritici relative ad un punto di quench iniziale se voluto.
- 7) Scansione della/e regione/i ignota/e tramite la scelta di vari punti di quench al suo/loro interno e confronto delle linee di FZ ottenute con quelle relative a fasi già note.
- 8) Ipotesi conclusiva sul carattere delle regioni ignote del diagramma di fase.

L'obiettivo che ci si era quindi posti di trovare una metodologia alternativa e con costo computazionale ridotto per lo studio dei diagrammi di fase del modello di Kitaev è stato raggiunto grazie all'introduzione di questo metodo basato sulle DQPT successive ad un sudden quench.

Il secondo obiettivo che ci si era posti era quello di stabilire le differenze tra le relazioni di scaling per i tre differenti regimi. Questo obiettivo è stato raggiunto studiando direttamente l'evoluzione temporale tramite l'algoritmo RK4 per quench con β costante. Questo metodo è quindi sensibile alla presenza di linee critiche sottostanti a percorso di quench se $\tau_q \rightarrow \infty$, una possibile implementazione futura riguarda la possibilità di eseguire quench in cui β non è costante nel tempo. In questo modo dovrebbe essere possibile costruire percorsi sul diagramma di fase che permettano di passare da una fase all'altra senza la formazione di difetti poiché le linee critiche vengono aggirate. Un esempio potrebbe essere un quench che inizia a $\mu \ll -2$ e $\beta = 3$ e finisce in $\mu = 0$ e $\beta = 3$: se inizialmente è β a cambiare e non μ e si fa in modo che μ cambi e raggiunga il valore finale $\mu = 0$ quando $\beta < 1$ per poi riportare β al suo valore iniziale di 3 allora si dovrebbe aver realizzato un quench che connetta due fasi topologicamente differenti per il modello a corto raggio senza che però si abbia la formazione di difetti nel passaggio da una fase all'altra.

Nell'ultimo caso di slow quench si va a studiare il caso in cui $\mu_i = \mu_f$ e $\beta_i \neq \beta_f$: anche in questo caso si ottiene che non si ha una chiara relazione di scaling che legghi la densità di difetti n_d al tempo caratteristico di quench τ_Q . Questo risultato è indice del fatto che non si attraversa alcuna linea critica durante il quench, risultato in accordo con quanto trovato per sudden quench dello stesso tipo. Se quindi si va ad implementare un quench a forma di ferro di cavallo che parta da $\mu \ll -2$, $\beta = 3$, vada prima in $\mu \ll -2$, $\beta = 0.8$ poi in $\mu = 0$, $\beta = 0.8$ ed infine in $\mu = 0$, $\beta = 3$ ci si attende che non si osservi nessuna relazione di scaling perché nessuno dei tre diversi quench attraversa una linea critica. Dovrebbe quindi essere possibile utilizzare gli slow quench per passare da una fase con $w = 0$ ad una con $w = 1$ senza incorrere nella formazione di difetti purché il quench sia sufficientemente lento. Questo tipo di quench è lasciato per implementazioni future poiché risulta computazionalmente molto costoso da calcolare e il codice deve pertanto essere migliorato, inoltre si deve verificare se lo stesso tipo di percorso illustrato prima fatto però per μ positivi dia luogo ad una legge di scaling legata al β a cui si va a modificare μ come atteso.

Bibliografia

- [1] A. Y. Kitaev, Unpaired Majorana fermions in quantum wires, *Phys. Usp.* **44** (2001), 131.
- [2] A. Alecce e L. Dell’Anna, Extended Kitaev chain with longer-range hopping and pairing, *Phys. Rev. B* **95** (2017), 195160.
- [3] M. Leijnse e K. Flensberg, Introduction to topological superconductivity and Majorana fermions, *Semicond. Sci. Technol.* **27** (2012), 124003.
- [4] K. K. Nielsen, Z. Wu e G. M. Bruun, Higher Chern numbers in one dimensional Bose-Fermi mixtures, *arXiv:1710.08715* (2017).
- [5] M. Heyl, Dynamical quantum phase transitions: a review, *Rep. Prog. Phys.* **81** (2018), 054001.
- [6] C. Nayak et al., Non-Abelian anyons and topological quantum computation, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008), 1083.
- [7] Y. Oreg, G. Refael e F. von Oppen, Helical liquids and Majorana bound states in quantum wires, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010), 177002.
- [8] L. Carr, *Understanding quantum phase transitions*, CRC press, 2010.
- [9] S. Vajna e B. Dóra, Topological classification of dynamical phase transitions, *Phys. Rev. B* **91** (2015), 155127.
- [10] W. van Saarloos e D. A. Kurtze, Location of zeros in the complex temperature plane: Absence of Lee-Yang theorem, *J. Phys. A* **17** (1984), 1301.
- [11] T.W.B Kibble, Topology of cosmic domains and strings, *J. Phys. A* **9** (1976), 1387.
- [12] W. H. Zurek, U. Dorner e P. Zoller, Dynamics of a quantum phase transition, *Physical Rev. Lett.* **95** (2005), 105701.
- [13] J. Dziarmaga, Dynamics of a quantum phase transition: Exact solution of the quantum Ising model, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), 245701.
- [14] A. Dutta e A. Dutta, Probing the role of long-range interactions in the dynamics of a long-range Kitaev chain, *Phys. Rev. B* **96** (2017), 125113.
- [15] C. Zener, Non-adiabatic crossing of energy levels, *Proc. R. Soc. Lond. A* **137** (1932), 696–702.
- [16] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Quantum mechanics, vol. 3*, 1977.
- [17] L. Lepori et al., Effective theory and breakdown of conformal symmetry in a long-range quantum chain, *Ann. Phys.* **374** (2016), 35–66.
- [18] S. Vajna e B. Dóra, Disentangling dynamical phase transitions from equilibrium phase transitions, *Phys. Rev. B* **89** (2014), 161105.
- [19] J. C. Budich e M. Heyl, Dynamical topological order parameters far from equilibrium, *Phys. Rev. B* **93** (2016), 085416.
- [20] O. Viyuela et al., Topological massive Dirac edge modes and long-range superconducting Hamiltonians, *Phys. Rev. B* **94** (2016), 125121.
- [21] D. Vodola et al., Kitaev chains with long-range pairing, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014), 156402.