UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI)

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Il Paradosso di Hardy: verifica sperimentale e generalizzazione a n particelle

Relatore

Prof. Giuseppe Vallone

Correlatore

Dr. Alberto Santamato

Dr. Francesco Vedovato

Laureando

Emanuele Marconato

Anno Accademico 2017/2018

Prefazione

La Tesi ha lo scopo di approfondire il tema delle disuguaglianze di Bell, che permettono di verificare che le misure su un sistema quantistico non possono essere spiegate attraverso un modello a variabili nascoste locali. Lo strumento essenziale per violare una disuguaglianza di Bell è rappresentato dagli stati entangled. Nel panorama delle disuguaglianze di Bell, si presterà maggiore attenzione al paradosso di Hardy, paradosso che permette di mettere al vaglio una teoria a variabili nascoste locali senza utilizzare disuguaglianze. Verrà anche discussa una recente generalizzazione del paradosso di Hardy a n particelle. Nella trattazione verrà presentata anche una breve attività di laboratorio che ha portato alla violazione della disuguaglianza di Bell, per una situazione di tipo Hardy. La Tesi si inquadra nel Gruppo di Ricerca QuantumFuture, attivo nella sperimentazione della Comunicazione e dell'Informazione Quantistica.

Nel Capitolo 1 verranno presentati i principali risultati ottenuti nel dibattito sull'interpretazione della teoria quantomeccanica. In primis viene presentata la questione sollevata da Einstein sulla completezza della teoria, poi l'ipotesi delle variabili nascoste nel contesto teorico e sperimentale ed infine una considerazione finale sul paradosso EPR all'interno della Meccanica Quantistica.

Nel Capitolo 2 si discuteranno le situazioni di tipo "o tutto o niente", con particolare interesse per il paradosso di Hardy. Si darà anche una descrizione del politopo locale e di come possa essere utilizzato per valutare le disuguaglianze di Bell per un sistema a due osservatori. Nell'ultimo paragrafo verrà presentata una recente generalizzazione del paradosso di Hardy per n osservatori.

Nel Capitolo 3 si mostrerà quali siano i limiti sperimentali per la validità della violazione della disuguaglianza di Bell. Saranno brevemente trattati i loopholes e la visibilità di soglia, legata all'efficienza del rivelatore. Infine verrà presentato il lavoro sperimentale della tesi con le rispettive conclusioni.

Ma voglio dire in sostanza,
che il fatto nostro non sarà così semplicemente materiale,
come pare a prima vista che debba essere;
e che gli effetti suoi non apparterranno alla fisica solamente:
perché esso sconvolgerà i gradi delle dignità delle cose,
e l'ordine degli enti; scambierà i fini delle creature;
e per tanto farà un grandissimo rivolgimento anche nella metafisica,
anzi in tutto quello che tocca alla parte speculativa del sapere.

E ne risulterà che gli uomini,
se pur sapranno o vorranno discorrere sanamente,
si troveranno essere tutt'altra roba da quello che sono stati fin qui,
o che si hanno immaginato di essere.

G. Leopardi, Il Copernico, scena IV.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

La meccanica quantistica (MQ) è la branca della Fisica che descrive i fenomeni alle scale microscopiche. La stranezza degli effetti quantistici ha richiesto una radicale revisione dei principi della Fisica Classica per poter prevedere i fenomeni quantistici. Esistono differenti interpretazioni della natura microscopica, che differiscono nei principi e nella formulazione, ed è tuttora oggetto di ricerca quale possa essere la versione che meglio descriva la Fisica Quantistica.

Ad oggi la numerosa messe di dati sperimentali e dell'enorme precisione di misura in certi esperimenti, sembra dare conferma che la visione ortodossa sia la descrizione esatta della realtà. La meccanica quantistica a cui ci si riferisce solitamente è la cosidetta "interpretazione di Copenhagen", alla cui formazione hanno contribuito i più grandi fisici del '900.

Tra i risultati fondamentali è doveroso ricordare il principio di indeterminazione di Heisenbeg:

$$\Delta A \, \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} \frac{|\langle\psi|C|\psi\rangle|}{\langle\psi|\psi\rangle} \tag{1.1}$$

dove A, B, C sono operatori per $|\psi\rangle \in H$, spazio di Hilbert, tale per cui $C = \imath[A, B]$.

In un primo momento il principio fu formulato per le grandezze di impulso e posizione ottenendo la famosa relazione:

$$\Delta X \, \Delta P \geq \hbar$$

tuttavia come si vede dalla (1.1) il risultato è estendibile ad ogni coppia di operatori non commutanti. Laddove due operatori non commutino, la loro misura simultanea sullo stato $|\psi\rangle$ non può essere effettuata con arbitraria precisione: questo risultato segna una grande differenza tra la meccanica classica e la MQ.

Nella visione classica, lo stato della particella è caratterizzato dalla sua posizione e dal suo impulso. Quando sono note le condizioni iniziali e la Lagrangiana associata al sistema, l'evoluzione temporale è anch'essa nota. In MQ, la dualità onda-corpuscolo per le particelle quantistiche viene incorporata nella funzione d'onda ψ, che ora rappresenta lo stato. Il principio di indeterminazione mostra che per la particella quantistica, rappresentata da ψ, posizione ed impulso non esistono più contemporaneamente: la conoscenza esatta di uno preclude la conoscenza dell'altro. Non è dunque possibile conoscere in maniera esatta alcune osservabili che caratterizzano la particella, ma solo probabilisticamente.

Accettando i paradigmi di questa interpretazione, sorge spontaneo chiedersi se la MQ possa offrire una descrizione completa della realtà, se ad ogni elemento della realtà corrisponda una controparte in MQ e se essa possa prevedere la totalità, o quasi, degli eventi presenti nel mondo microscopico.

Tra i fenomeni quantistici, l'entanglement sicuramente risulta uno tra i più peculiari. Esso risulta facile da capire tramite il formalismo dell'interpretazione ortodossa.

Si considerino i sistemi composti da due particelle, essi possono essere descritti in uno spazio di Hilbert $\mathrm{H}_1 \otimes \mathrm{H}_2$ (ogni spazio di Hilbert è relativo rispettivamente alle particelle $\{1, 2\}$) da funzioni fattorizzate $\psi(x_1, x_2) = \sum_{n_1} \phi_{n_1}(x_1) \otimes \sum_{n_2} \chi_{n_2}(x_2)$, o funzioni non fattorizzabili:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n_1, n_2} c_{n_1,n_2}[\phi_{n_1}(x_1) \otimes \chi_{n_2}(x_2)]$$

dove c_{n_1,n_2} non è scomponibile in $c_{n_1,n_2} = c_{n_1} * c_{n_2}$. Lo stato non fattorizzabile viene chiamato "entangled".

Una misura per la particella in 1, con coordinate x_1, associa un autovalore K_1 per l'autovettore $\phi_{k_1}(x_1)$, ciò equivale ad applicare il proiettore $|\phi_{k_1}\rangle\langle\phi_{k_1}| \otimes \mathbb{1}_2$ che riduce la Ψ in:

$$\Psi(x_1, x_2) = \phi_{k_1}(x_1) \otimes \sum_{n_2} c_{k_1,n_2} \chi_{n_2}(x_2)$$

In altre parole effettuare una misura locale su una particella permette di conoscere quali siano gli stati permessi all'altra, eliminando parzialmente o totalmente l'ignoranza sugli esiti di una successiva misura sull'altra particella.

L'entanglement mette chiaramente in difficoltà i principi della MQ ortodossa, minando il valore ontologico della probabilità all'interno della teoria e su questo fronte Einstein mostrerà apertamente i suoi dubbi, circa la completezza dell'interpretazione ortodossa. Il contributo di John S. Bell sul problema sollevato da Einstein mette in luce gli aspetti peculiari del fenomeno, chiarendo quali siano i radicali cambiamenti del paradigma classico che si devono accettare per rispettare le previsioni della MQ.

Il paradosso di Hardy nasce nel contesto delle disuguaglianze di Bell, fornendo un esempio degli esiti paradossali previsti dalla MQ e che non possono essere riprodotti da modelli a variabili nascoste locali.

Al giorno d'oggi l'entanglement è pienamente (o quasi?) compreso ed è essenziale per lo sviluppo delle più recenti avanguardie quantomeccaniche, al cui interno, nel panorama delle disuguaglianze di Bell, si stanno maggiormente sviluppando la Quantum Criptography e la Quantum Information Theory.

1.1 Il Paradosso EPR

Nel 1935 Einstein, Podolski e Rosen, nell'articolo *"Can Quantum Mechanics be considered complete?"* [1], si chiesero se la meccanica quantistica potesse soddisfare i requisiti di una teoria fisica che intendesse spiegare i fondamenti della realtà. La domanda venne formulata direttamente tramite un *Gedanken-experiment* (esperimento mentale), dimostrando nel prosequio che i principi stessi della teoria non conducono ad una descrizione completa della MQ. Per fare chiarezza sulla domanda posta dagli autori bisogna considerare quali fossero le ipotesi formulate per caratterizzare una teoria fisica:

- **Completezza**
  In una teoria completa c'è un elemento che corrisponde ad ogni elemento della realtà.
- **Realismo**
  Se senza disturbare in alcun modo un sistema è possibile prevedere con certezza il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica che corrisponde a questa quantità.
- **Località**
  Gli elementi di realtà fisica di un sistema non possono essere influenzati istantaneamente a distanza.

L'ipotesi di **realismo** così formulata, come sottolineato dagli autori, non è da ritenersi esauriente per una definizione rigorosamente accettabile, per lo meno risulta sufficiente per la trattazione e concorde con le previsioni della meccanica classica e della meccanica quantistica. Una teoria che per ogni suo elemento sia valida questa ipotesi viene denominata *"realista"*.[1] L'ipotesi di **località** è presa nella sua versione forte, a seguito dei principi della relatività ristretta. Una teoria in cui gli elementi non possono influenzarsi in maniera non-locale, verrà denominata *"locale"*. In seguito si mostrerà che la richiesta lecita deve risultare più debole per preservare la causalità nella Fisica.

Per la trattazione del paradosso si può considerare la versione formulata da Bohm in [2], che risulta equivalente a quella degli autori.

Si consideri la situazione trattata in Figura 1.1, costituita da due particelle nei sistemi I e II non interagenti e separate spazialmente, per cui valgano le ipotesi di realismo e località formulate sopra. Si consideri la funzione d'onda di singoletto per un sistema a due elettroni, descritta da:

$$|\Psi(1,2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle^{(1)}|\downarrow\rangle^{(2)} - |\uparrow\rangle^{(2)}|\downarrow\rangle^{(1)}\} \tag{1.2}$$

dove $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ sono gli autostati riferiti ad una misura di spin lungo l'asse z[2] con autovalori rispettivamente: $\pm\hbar/2$ (gli apici (1) e (2) sono riferiti rispettivamente

[1]In questo lavoro di tesi non si ha alcuna pretesa di stabilire dei criteri validi generalmente ed esaustivi per definire una teoria "realista". Si assume, nella benevolenza del lettore, che questa definizione venga considerata "per buona" al fine di proseguire la trattazione.

[2]In generale non è necessario riferirsi all'asse z: si può dimostrare che lo stato di *"singoletto"* sopra descritto presenta la stessa scrittura per ogni direzione in R^3, per cui una misura di $S^2|\Psi\rangle = 0$.

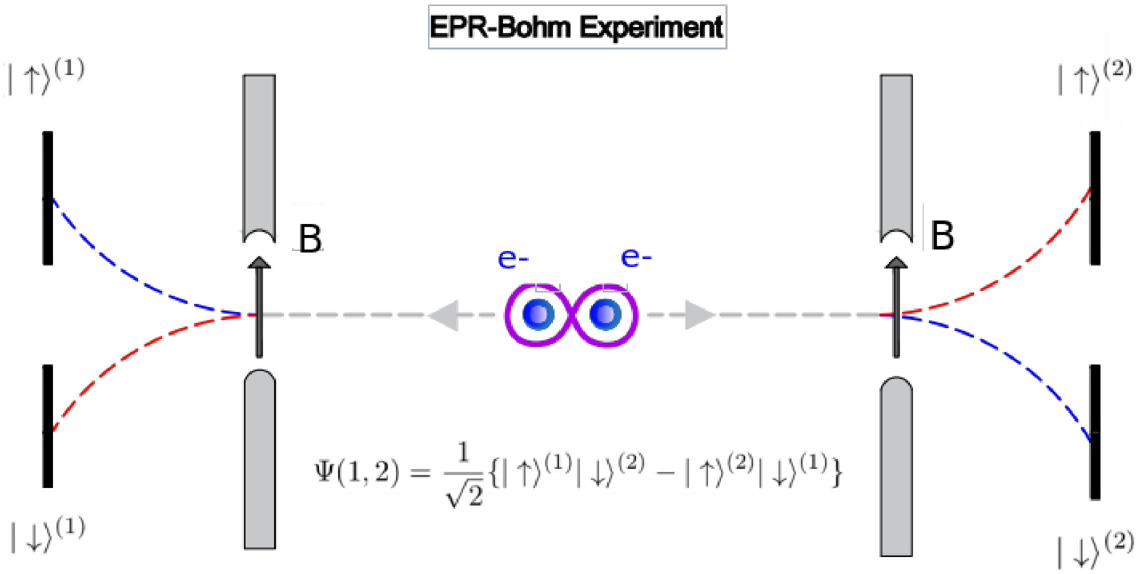

Figura 1.1: Rappresentazione schematica dell'esperimento mentale di EPR, nella versione di Bohm. Le particelle Le particelle in uno stato di singoletto (1.2), sono separate tra loro all'istante di misura. Le direzioni ottenute sono tra loro correlate, in figura rappresentate dalle linee rosse e blu.

alle particelle in I e in II).

Si supponga di effettuare una misura di spin[3], a $t = 0$, in II lungo l'asse z, misurando uno spin rivolto verso il basso. La funzione d'onda proiettata sull'autostato della misura diventa:

$$\Psi(1,2) = |\uparrow\rangle^{(1)}|\downarrow\rangle^{(2)} \tag{1.3}$$

A seguito di questa misura si può prevedere con certezza l'esito di una misura di spin per $t' > 0$ lungo l'asse z per I, ma questo sembra contraddire la visione quantomeccanica adottata fino ad ora, in quanto ogni direzione di spin risulta equivalentemente probabile prima della misura sulla particella.
Da questo esperimento mentale si deve accettare una delle due seguenti conclusioni:

1. La misura dello spin in II è tale da avere un effetto a distanza su I a velocità superluminale per cui l'ipotesi della **località** così formulata deve essere scartata.

[3]In questo caso si può pensare di effettuare una misura di spin grazie ad un magnete di Stern-Gerlach, per cui ci si aspetta che in base all'orientazione in alto o in basso del fascio si possa conoscere lo spin così misurato. La realizzazione sperimentale di un tale esperimento tuttavia non risulta rilevante per la trattazione del problema.

2. La particella possedeva a priori uno spin definito, cioè è possibile prevedere l'esito della misura in I con una variabile nascosta.

Si consideri la **1**: si può assumere che l'interazione tra le due particelle avvenga in un momento precedente alla loro misurazione cosìcché all'atto di misura le particelle non risultino più interagenti. Se ora si suppone che per la distanza $x_1 - x_2$ i tempi di misurazione t e t' siano abbastanza vicini da non permettere un segnale luce, risulta che la distanza tra i due eventi è di tipo spazio. Allora non si può in nessun modo determinare quale sia la misura su una particella che abbia effetto sull'altra, in altre parole non si avrebbe un argomento causale per descrivere il fenomeno. Poichè questa ipotesi è lontana dal senso comune adottato in ogni trattazione fisica, risulta molto azzardato sostenere che questa possa essere la soluzione valida per l'interpretazione della MQ. Gli autori la escludono, proponendo piuttosto la seconda.

Con la soluzione **2** si sostiene, in altre parole, che vi possa essere un completamento della teoria quantomeccanica dato da delle variabili aggiuntive, in letteratura chiamate *variabili nascoste*, cosicchè non si entri in conflitto con l'ipotesi di **località**. In questo modo, si ritornerebbe ad una visione più deterministica della realtà, in cui gli esiti delle eventuali misure di spin (e non solo) per i sistemi microscopici possano essere previsti.

Poiché nei principi della MQ non è permesso prevedere gli esiti di una misura di spin, dove si è mostrato nell'ipotesi della **località** che essi possono pre-esistere ad una misura, gli autori dell'articolo concludono che l'interpretazione finora utilizzata è incompleta.

È doveroso ricordare che in alcune interpretazioni alternative della meccanica quantistica, è possibile introdurre delle variabili nascoste che ristabiliscano una visione realista, le cui previsioni risultano equivalenti a quelle dell'interpretazione ortodossa. Tra queste, quella più nota fu ideata dallo stesso Bohm qualche anno dopo la scrittura del libro [2], e ad essa ci si riferisce con *"meccanica bohmiana"*. Tuttavia, fino ad oggi, ogni interpretazione capace di ristabilire l'ipotesi di realismo per ogni elemento non soddisfa alla **località** di Einstein: è infatti necessario che alcuni elementi possano influenzarsi tra di loro in maniera istantanea e l'insorgenza di eventuali fenomeni non locali, viene censurata ad hoc per mantenere la causalità nei processi fisici.

John Bell chiarì formalmente in [3] il ruolo delle variabili nascoste locali (LHV) all'interno della teoria e quali fossero i vincoli per rispettare le ragionevoli ipotesi formulate dagli autori del paradosso. Come si vedrà in seguito i vincoli necessari che le variabili nascoste locali assumeranno non permettono nemmeno un'approssimazione abbastanza vicina alle previsioni della meccanica quantistica.

1.2 L'ipotesi delle variabili nascoste ed il Teorema di Bell

Nell'articolo del 1964 *"On Einstein Podolski Rosen Paradox"* [3], John Bell deriva le condizioni generali che una teoria a variabili nascoste locali deve rispettare. Il pregio della seguente trattazione è di aver spostato il dibattito dal piano filosofico al piano fisico. Il risultato ottenuto in primis decreta l'impossibilità di utilizzare le LHV nella descrizione della MQ, ma segna anche una svolta decisiva sul significato attribuibile ad una teoria fisica, chiarendo quali siano le conclusioni inevitabili per una teoria che possa considerarsi completa nell'ambito della meccanica quantistica.

1.2.1 Le variabili nascoste

Le variabili nascoste sono delle eventuali variabili aggiuntive in una teoria, di non precisato senso fisico, che permettono al più un completamento deterministico della teoria. Seguendo l'articolo di Bell si possono introdurre delle variabili nascoste per gli esiti di una misura di spin, che assumono valore epistemico.

Si consideri una misura della quantità di spin per una singola particella, tale da avere polarizzazione lungo un vettore unitario $\vec{p}$. Nella trattazione quantomeccanica formale il valore medio della misura di spin[4] lungo un asse di misura $\vec{a}$ è dato da:

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \rangle = \cos\theta \tag{1.4}$$

dove θ è l'angolo tra $\vec{p}$ ed $\vec{a}$. Sia $\vec{\lambda}$ la variabile nascosta avente una distribuzione di probabilità uniforme e normalizzata sull'emisfero $\vec{\lambda}\cdot\vec{p} > 0$. Si assuma che il risultato di una misura di spin lungo $\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$ sia data da:

$$sign(\vec{\lambda} \cdot \vec{a'}) \tag{1.5}$$

in cui $\vec{a'}$ è un vettore che dipende da $\vec{a}$ e $\vec{p}$. Si indichi con θ' l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{p}$, allora estraendo il valore di aspettazione tramite $\vec{\lambda}$ si trova:

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \rangle = \int_{S/2} d\lambda\, sign(\vec{\lambda} \cdot \vec{a'}) = 1 - \frac{2\theta'}{\pi} \tag{1.6}$$

dove $S/2$ individua la semisfera di raggio unitaria definita da $\vec{\lambda} \cdot \vec{p} > 0$.
Si supponga che $\vec{a'}$ sia ottenuto tramite una rotazione di $\vec{a}$ verso $\vec{p}$ così che risulti:

$$1 - \frac{2\theta'}{\pi} = \cos\theta \tag{1.7}$$

che è il risultato desiderato: si è espresso il valore medio dell'osservabile di spin tramite una variabile nascosta. In generale la variabile nascosta λ può denotare un singolo parametro o un insieme di parametri, o anche funzioni di natura sia discreta che continua, tali da prevedere gli esiti di una misura.

[4] Si sottintende che ogni misura di spin può avere solo valori $\{-1, +1\}$, moltiplicati ad una frazione di $\hbar$, di cui non si terrà conto.

In maniera generale si possono caratterizzare le probabilità di una singola misura, cosicchè per ogni round[5] dell'esperimento si possano avere degli esiti prefissati per ogni misura, dati da λ. Nel caso dello spin, per un osservatore l'esito della misura può essere calcolato tramite la variabile nascosta:

$$S(+1\,|\vec{a};\lambda) \in \{0,1\} \tag{1.8}$$

dove $\vec{a}$ è la direzione di misura nella sfera di Bloch e $+1$ l'esito desiderato.

Si supponga di avere una variabile c che corrisponda all'esperimento in corso. Si avranno dunque un numero di variabile nascoste, la cui comparsa nel singolo round, è data da $p(\lambda|c)$. In linea di massima si può sempre considerare una probabilità distribuita, con densità di probabilità $\rho(\lambda|c)$, tale per cui:

$$p(\alpha\,|a) = \int d\lambda\,\rho(\lambda|c)p(\alpha\,|a;\lambda) \tag{1.9}$$

1.2.2 La formulazione CHSH

Nel 1969 Claudes, Horne, Shimony e Holt [5] riformularono il teorema di Bell adattandolo a delle disuguaglianze che si potessero inserire in un contesto sperimentabile.

Si assuma l'ipotesi di **località** per ogni elemento e ci si metta nel contesto di *Gedanken-experiment* formulato da Bohm. Siano le direzione scelte per la misura in A (B) "labellate" da $x \in \{0,1\}$ ($y \in \{0,1\}$), con esiti $a \in \{-1,+1\}$ (lo stesso vale per b). La probabilità composta, data da una LHV λ, si può scrivere:

$$p(a,b|x,y;\lambda) = p(a|x;\lambda)p(b|y;\lambda) \tag{1.10}$$

Poichè si sta mantenendo la condizione di **località**, gli esiti non possono essere tra loro correlati, dunque questa risulta essere la forma di scrittura più generale per la probabilità mista.

Considerando una densità per la variabile nascosta λ, per cui risulti $\int d\lambda\,\rho(\lambda) = 1$, si può allora scrivere:

$$p(a,b|x,y) = \int d\lambda\,\rho(\lambda)p(a|x;\lambda)p(b|y;\lambda) \tag{1.11}$$

Si consideri ora il valore di aspettazione per a_x e b_x definiti come: $\langle a_x\rangle_\lambda = \sum_{a=\pm1} a\,p(a|x;\lambda)$ e $\langle b_y\rangle_\lambda = \sum_{b=\pm1} b\,p(b|y;\lambda)$. Per un modello a variabili nascoste locali si deve avere:

$$\langle a_x b_y\rangle = \int d\lambda\,\rho(\lambda)\langle a_x\rangle_\lambda\langle b_y\rangle_\lambda \tag{1.12}$$

Se si considera l'espressione:

$$S = \langle a_0 b_0\rangle + \langle a_0 b_1\rangle + \langle a_1 b_0\rangle - \langle a_1 b_1\rangle =$$

[5] In questo caso ogni round può essere pensato come un gioco tra gli osservatori e il sistema, in cui i dati raccolti riguardano una prova a singola misura per osservatore. Nel contesto delle disuguaglianze di Bell, ci si riferisce a questa tipologia di esperimenti a single round come *"Non-local games"*, in cui vi è una chiara analogia alla teoria dei giochi (si veda [4]).

$$\int d\lambda\,\rho(\lambda)[\langle a_0\rangle_\lambda\langle b_0\rangle_\lambda+\langle a_0\rangle_\lambda\langle b_1\rangle_\lambda+\langle a_1\rangle_\lambda\langle b_0\rangle_\lambda-\langle a_1\rangle_\lambda\langle b_1\rangle_\lambda]=\int d\lambda\,\rho(\lambda)S_\lambda \quad (1.13)$$

dato che $\langle a_0\rangle_\lambda$, $\langle a_1\rangle_\lambda \in [-1,+1]$ risulta $S_\lambda \leq |\langle b_0\rangle_\lambda+\langle b_1\rangle_\lambda|+|\langle b_0\rangle_\lambda-\langle b_1\rangle_\lambda|$.

Se si assume, senza perdita di generalità che $\langle b_0\rangle_\lambda \geq \langle b_1\rangle_\lambda \geq 0$ risulta immediato verificare che $S_\lambda = 2\langle b_0\rangle_\lambda \leq 2$, cioè vale la disuguaglianza (di Bell):

$$S_\lambda=\langle a_0\rangle_\lambda\langle b_0\rangle_\lambda+\langle a_0\rangle_\lambda\langle b_1\rangle_\lambda+\langle a_1\rangle_\lambda\langle b_0\rangle_\lambda-\langle a_1\rangle_\lambda\langle b_1\rangle_\lambda \leq 2$$

in particolare:

$$S=\langle a_0b_0\rangle+\langle a_0b_1\rangle+\langle a_1b_0\rangle-\langle a_1b_1\rangle \leq 2 \quad (1.14)$$

Questo risultato è stato derivato imponendo solo la condizione di **località** per gli elementi della teoria, quindi ogni sistema fisico caratterizzato da due osservatori, da due scelte di input di misura e da due output possibili, che venga descritto tramite variabili nascoste locali deve soddisfare la disuguaglianza (1.14). Nel caso quantistico, per lo stato di singoletto (1.2), se si assume di eseguire per x una misura lungo $\vec{e_1}$ $(x=0)$ e $\vec{e_2}$ $(x=1)$ con esiti $a=\pm1$ ed una misura per y lungo $-\frac{\vec{e_1}+\vec{e_2}}{2}$ $(y=0)$ e $-\frac{\vec{e_1}-\vec{e_2}}{2}$ $(y=1)$ con esiti $b=\pm1$, i valori di aspettazione quantistici sono: $\langle a_0b_0\rangle=\langle a_0b_1\rangle=\langle a_1b_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\langle a_1b_1\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Allora $S=2\sqrt{2}$ che risulta in contraddizione con il vincolo per delle variabili nascoste locali.

Si è mostrato che le ipotesi di un modello a LHV non sono consistenti per la descrizione della fisica quantistica: a rigore di logica allora é possibile inferire che le condizioni di realismo e di località non possono essere contemporaneamente soddisfatte (la condizione di **completezza** deve essere sempre verificata). La disuguaglianza (1.14) risulta equivalente a quella originariamente ottenuta da Bell, ma di fatto migliore per una valutazione della sua violazione in un possibile contesto sperimentale. Il pregio di poter applicare le diseguaglianza di Bell ad un contesto reale, offre la possibilità di verificare se le ipotesi della meccanica quantistica sono conformi alla realtà fisica, discriminando, in maniera decisiva, un modello a LHV.

Il primo esperimento che misurò una violazione della disuguaglianza di Bell fu condotto da Alain Aspect tra il 1981 e 1982. Nonostante sia stata violata la disuguaglianza, l'esperimento non si può considerare conclusivo sulla questione se le variabili nascoste debbano essere scartate. Precisamente, in ogni esperimento, bisogna tener conto degli eventuali "loopholes" in cui ci si può imbattere. Un test, che sia conclusivo circa la questione sulle LHV, deve prevedere la chiusura degli eventuali loopholes (per questa questione si rimanda al Capitolo 3) in cui ci si può imbattere.

1.3 Conseguenze del Paradosso EPR

Il risultato di Bell mette in luce che ogni teoria fisica completa non può essere contemporaneamente realista e locale. Mentre una eventuale teoria a variabili nascoste sarebbe, in linea di principio, in grado di preservare il realismo (a scapito della località), la MQ ortodossa comporta invece un abbandono di entrambe le richieste.

In conclusione, si può con certezza affermare che il principio di località non sia valido in nessuna delle due teorie? La teoria della relatività ristretta, mette in diretta relazione la località di una teoria fisica con la causalità, per cui in ogni fenomeno fisico la causa precede sempre l'effetto. La diretta conseguenza dell'abbandono della località, comporterebbe allora una perdita della causalità per sistemi di riferimento inerziali differenti. Pur non essendo il principio di causalità necessario nella completezza della teoria, questo risulta difficile da abbandonare a causa degli evidenti paradossi logici che ne scaturirebbero.

Per evitare la problematica che ne deriverebbe, é bene riformulare l'ipotesi di **località** in due maniere distinte, per capire se si debba davvero abbandonare la causalità.

- **Località Einsteiniana**
  Due sistemi separati, non possono scambiare informazioni tra loro o influenzarsi a velocità superluminale.

- **Località alla Bell**
  Un sistema a due particelle è **locale** se esistono delle basi ortonormali in I e in II per cui si possa scrivere: $\Psi(x_1, x_2) = \psi(x_1) \otimes \phi(x_2)$, dove $\psi(x_1)$ e $\phi(x_2)$ sono esprimibili tramite combinazione lineare di stati ortonormali per H_1 e H_2. Un sistema di questo tipo é sempre esprimibile con delle LHV.[6]

In questo caso l'ipotesi di **località** einsteiniana è più debole rispetto alla precedente: essa risulta valida anche in MQ, preservando la causalità nella Fisica. Infatti, nel contesto teorico, nonostante una misura di I permetta una diretta conoscenza di II e viceversa, gli esiti delle misure, per gli osservatori, rimarranno sempre casuali, impossibilitando una qualsiasi comunicazione non classica tra due sistemi distanti (per maggiore chiarezza si veda l'appendice A.1). Per questa ragione non si ha a che fare con un fenomeno non-locale ad hoc ma con qualcosa di più sottile.

Si noti che la non-località (alla Bell), espressa da stati non fattorizzabili, è una formulazione utile per caratterizzare alcuni fenomeni nella MQ, con cui si può discriminare se essi possono essere descritti o meno da un modello a LHV. In questo senso si parlerà di non-località per sistemi quantistici.

Nonostante la formulazione ortodossa salvi la causalità inglobando effetti non-locali (alla Bell) al suo interno, è necessario ricredersi sulle ipotesi che prima si ritenevano valide per la descrizione della natura. In particolare, una teoria fisica che possa considerarsi fondamentale per la descrizione della Natura, non può soddisfare per i suoi elementi **località** e **realismo**. Ad oggi non esistono degli argomenti che possano decretare se la realtà sia realista e non locale o il contrario, tuttavia il successo della MQ ortodossa e la famosa estensione alla teoria quantomeccanica dei

[6] Da qui in poi quando si parlerà di **località** si intenderà questa formulazione.

campi, fanno intendere che l'interpretazione di Copenaghen possa essere la giusta direzione per una teoria fondamentale ed esatta.

Capitolo 2

Il paradosso di Hardy e la sua generalizzazione

Nel panorama scientifico si è cercato di adattare la disuguaglianza di Bell in differenti contesti sperimentali in cui vi fossero un numero arbitrario di particelle e di osservatori. Brunner et al., nell'articolo *Bell nonlocality* [4], hanno raccolto una vasta rassegna dei risultati finora raggiunti nella classificazione della non-località negli esperimenti. La grande messe di dati sperimentali, grazie ai recenti sviluppi tecnologici, ha permesso una catalogazione dei risultati, selezionando i criteri più adatti per stimare la non-località dei processi atomici. Per fare questo, è necessario associare al sistema delle diseguaglianze di Bell per opportune combinazioni di probabilità e verificare se le probabilità miste degli esiti violano tali disuguaglianze.
Il computo delle disuguaglianze risulta piuttosto difficile: per citare un esempio si consideri un sistema bipartito A-B con due possibili esiti per misura ($\Delta = 2$) e dieci possibili scelte di misura ($m = 10$). Le disuguaglianze stimate per il sistema in esame sono non meno di 44 368 793.
Seguendo la trattazione in [4] è possibile creare, solo per determinati casi, dei programmi iterati che permettono di calcolare i vincoli alle LHV. Nonostante sia possibile convergere a delle buone approssimazioni per le forme delle disuguaglianze di Bell in questi casi specifici, i programmi di norma sono NP, per cui, al crescere del numero delle scelte di misura e dei possibili esiti per il sistema in esame, il calcolo può risultare molto lungo.
Per confrontarsi al meglio con l'esperienza sono stati formulati dei paradossi che permettono un computo più efficiente della violazione delle disuguaglianze di Bell. Tra questi sono di notevole interesse il paradosso GHZ ed il paradosso di Hardy e ad essi ci si riferisce con "casi o tutto o niente". Nelle situazioni di tipo Hardy o GHZ è possibile discriminare gli esiti previsti da un modello a LHV, escludendo alcuni possibili esiti per l'esperimento. Tramite la formulazione ortodossa della MQ, é possibile tuttavia avere una probabilità non nulla per alcuni di questi esiti proibiti. In linea di massima, è necessaria una sola osservazione di un esito proibito per violare il modello a LHV.

2.1 Il Paradosso GHZ

Il paradosso GHZ, formulato da Greenberger et al. in *“ Bell’s theorem without inequalities”* [6], permette di verificare che un modello a LHV non può stimare gli esiti a misure non eseguite.

Si consideri un sistema misto con tre particelle, tre osservatori A-B-C e sia lo stato a tre qubit descritto da:

$$|ghz\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|000\rangle - |111\rangle\} \tag{2.1}$$

Per orientarsi nella descrizione si può pensare che per ogni particella allo stato $|0\rangle$ corrisponda una misura di spin in giù, una misura di spin in su per $|1\rangle$. Si considerino ora gli operatori di misura per la singola particella $X = \sigma_x$ e $Y = \sigma_y$ e quattro misure sullo stato: $O_{XYY} \equiv X_A \otimes Y_B \otimes Y_C$, O_{YXY}, O_{YYX} e O_{XXX}.

Si vede immediatamente che per un qualsiasi operatore lo stato $|ghz\rangle$ risulta essere un autovettore delle misure. Si consideri ad esempio:

$$O_{XXX}|ghz\rangle = X_A \otimes X_B \otimes X_C|ghz\rangle = X_A \otimes X_B \otimes I_C\, 1/\sqrt{2}\,(|001\rangle - |110\rangle) =$$
$$= X_A \otimes I_{BC}\, 1/\sqrt{2}\,(|011\rangle - |100\rangle) = -1 \cdot |ghz\rangle \tag{2.2}$$

Risultati analoghi si otterranno per gli altri operatori di misura: $O_{XXY}|ghz\rangle = +1 \cdot |ghz\rangle$, $O_{YXY}|ghz\rangle = +1 \cdot |ghz\rangle$ e $O_{YYX}|ghz\rangle = +1 \cdot |ghz\rangle$.

A questo punto si assuma che ogni esito delle misure possa essere previsto da delle LHV per ogni misura sulla particella in A,B,C. Siano allora gli esiti x_A per la misura di X in A e y_A per la misura di Y in A (per B,C sono definiti in maniera analoga). Per le prime tre misure si ricava:

$$x_A \cdot y_B \cdot y_C = y_A \cdot x_B \cdot y_C = y_A \cdot y_B \cdot x_C = 1 \tag{2.3}$$

Moltiplicando tra loro le tre equazioni ottenute segue: $x_A x_B x_C {y_A}^2 {y_B}^2 {y_C}^2 = 1$. Ma essendo tutti gli $y_{A,B,C} = \pm 1$ allora l’esito previsto per la misura in O_{XXX} è $x_A * x_B * x_C = 1$, in contraddizione con il risultato prima calcolato. Si conclude che non è dunque possibile rappresentare i risultati previsti dalla MQ con un modello a LHV.

Nell’ambito di entanglement e non-località, gli stati GHZ sono tra i più studiati e meglio capiti per quanto riguarda gli stati quantistici a molte particelle. É possibile associare, al caso a n-particelle, una disuguaglianza di Svetlichny che nel caso a 3 particelle risulta violata per il massimo valore possibile in MQ: $S_3 = 4\sqrt{2} > 4$. In generale uno stato GHZ, composto da n particelle e con d possibili esiti per misura, viene scritto:

$$|ghz\rangle_n^d = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle^{\otimes n} \tag{2.4}$$

2.2 Il Paradosso di Hardy

Il paradosso di Hardy, per due particelle, fu formulato da Hardy a cavallo degli anni 1992 ed 1993 e formalizzato nell'articolo *"Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states"* [7]. Da molti è considerato la versione più semplice del Teorema di Bell.

Si consideri un sistema a due parti I-II non comunicanti, costituito da due particelle entangled a due qubit. Si denotino gli stati a valore positivo per una misura con $|\uparrow\rangle^{(i)}$ e a valore negativo con $|\downarrow\rangle^{(i)}$, dove $i = 1, 2$. Ogni stato entangled per queste due particelle si può scrivere:

$$|\Psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle^{(1)}|\uparrow\rangle^{(2)} - \beta|\downarrow\rangle^{(1)}|\downarrow\rangle^{(2)} \tag{2.5}$$

con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Si considerino due nuovi cambi di base, dati da:

$$\begin{aligned} |u_i\rangle &= b^*|\uparrow\rangle^{(i)} - \imath a^*|\downarrow\rangle^{(i)} \\ |v_i\rangle &= -\imath a|\uparrow\rangle^{(i)} + b|\downarrow\rangle^{(i)} \\ |c_i\rangle &= +A|u_i\rangle + B|v_i\rangle \\ |d_i\rangle &= -B^*|u_i\rangle + A^*|v_i\rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

con $|a|^2 + |b|^2 = 1$, $A = \sqrt{\alpha\beta}/\sqrt{1 - |\alpha||\beta|}$ e $B = |\alpha| - |\beta|/\sqrt{1 - |\alpha||\beta|}$.

Per ottenere il paradosso di Hardy è necessario assumere che $\alpha b^2 + \beta a^2 = 0$. Questa condizione andrà ad influire sull'esito di alcune misure, fissando alcuni gradi di libertà. Dati i cambi di variabile sopra descritti, è possibile riscrivere la funzione d'onda in quattro maniere equivalenti (a meno del fattore di normalizzazione $N = (1 - |ab|)/(|a| - |b|)$):

1. $|\Psi\rangle = AB(a^2\sqrt{\alpha/\beta} + b^2\sqrt{\beta/\alpha})|u_1\rangle|u_2\rangle + AB|u_1\rangle|v_2\rangle + AB|v_1\rangle|u_2\rangle + B^2|v_1\rangle|v_2\rangle$
2. $|\Psi\rangle = |c_1\rangle[A|u_2\rangle + B|v_2\rangle] - A^2|u_2\rangle[A^*|c_1\rangle - B|d_1\rangle]$
3. $|\Psi\rangle = |c_2\rangle[A|u_1\rangle + B|v_1\rangle] - A^2|u_1\rangle[A^*|c_2\rangle - B|d_2\rangle]$
4. $|\Psi\rangle = |c_1\rangle|c_2\rangle - A^2(A^*|c_1\rangle - B|d_1\rangle)(A^*|c_2\rangle - B|d_2\rangle)$

A questo punto è possibile associare alle osservabili U_i e D_i i rispettivi operatori $U_i = |u_i\rangle\langle u_i|$ e $D_i = |d_i\rangle\langle d_i|$. Se si considera la **1** si vede che la precedente richiesta $\alpha b^2 + \beta a^2 = 0$ porge di conseguenza che una misura di $U_1U_2|\Psi\rangle = 0$.

Si supponga ora di effettuare delle misure sulle particelle I e II, nel caso particolare in cui si ottenga $D_1 = 1$ e $D_2 = 1$, con probabilità NA^2B^2 dalla **4**, risulta che a seguito di $D_1 = 1$ per un eventuale misura di U_2 si sarebbe ottenuto $U_2 = 1$ dalla **2**. Introducendo delle LHV λ che possano prevedere gli esiti dell'esperimento, si avrà allora $D_1(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$. In questo modo si sta ipotizzando che ogni esito di una misura in I non possa influenzare la misura in II, da cui $U_2(\lambda) = 1$. In maniera analoga si assume che ogni misura in II non possa influenzare gli esiti in I: a seguito di $D_2(\lambda) = 1$, dalla **2** si ottiene $U_1(\lambda) = 1$. Quindi, in questo caso, risulta chiaro che se si avesse scelto di misurare U_1 e U_2 si sarebbe ottenuto $U_1(\lambda)U_2(\lambda) = 1$.

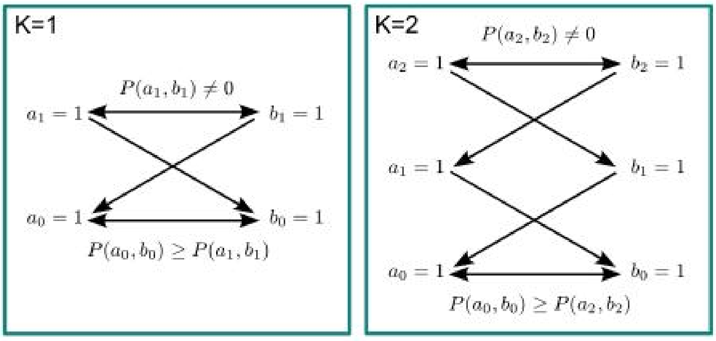

Figura 2.1: Schema del diagramma a scala degli esiti concatenati da un modello a variabili nascoste. Nel caso $K = 1$, si ottiene il paradosso di Hardy originale.

Ma questo contraddice la **1**. Ancora una volta si è mostrato che non è possibile rappresentare gli esiti della MQ con delle LHV.

Il paradosso può essere riformulato in una estensione a più scelte di misura, seguendo l'articolo di Vallone et al. *"Testing Hardy's nonlocality proof with genuine energy-time entanglement"* [8].

Siano $\{a_0, a_2, ..., a_K\}$ le misure scelte per I, $\{b_0, b_2, ..., b_K\}$ le misure scelte per II, tali che ogni misura dia valori ±1. Quando le probabilità miste sono:

$$\begin{cases} p(a_K, b_K) \neq 0 \\ p(\overline{a}_{k-1}, b_k) = 0 \quad \text{per } k = 1, .., K. \\ p(a_k, \overline{b}_{k-1}) = 0 \end{cases}$$

dove $p(a_j, b_j) = p(a_j = 1, b_j = 1)$ e $p(\overline{a}_j) = p(a_j = 0)$, per ogni j. Si ottiene, tramite una rappresentazione a scala (vedi figura 2.1), che per un modello a LHV deve risultare:

$$p(a_0, b_0) \geq p(a_K, b_K) \tag{2.7}$$

Nel caso di $K = 1$ si ottiene una situazione equivalente a quella del paradosso di Hardy del '93. Siano le osservabili $U_1 = a_0$ e $D_1 = a_1$ (le b_i sono definite in maniera analoga), si nota che le due formulazioni sono equivalenti. In particolare si otterrà che le probabilità miste saranno nulle, tranne per $p(a_1, b_1) \equiv p(D_1, D_2)$.

Si può allora associare una diseguaglianza di Bell, equivalente alla formulazione CH:

$$S_1 = P(a_1, b_1) - P(a_0, b_0) - P(\overline{a_0}, b_1) - P(a_1, \overline{b_2}) \leq 0 \tag{2.8}$$

Si noti che una sola coincidenza di (a_1, b_1) basta per violare la disuguaglianza di Bell associata, quando le altre probabilità sono nulle. Tuttavia i limiti sperimentali delle strumentazioni adottate non sempre permettono di annullare le probabilità $P(a_0, b_0)$, $P(\overline{a_1}, b_2)$ e $P(b_1, \overline{a_2})$. In un contesto sperimentale, la scelta migliore dello stato, che massimizza gli eventi non locali registrati, non è lo stato massimamente entangled. Scegliendo opportunamente stati non massimamente entangled, in base alle caratteristiche dell'esperimento, si otterrà una violazione della disuguaglianza

(2.7) fino ad un massimo di 0.09. Si mostrerà in seguito che, in un possibile contesto sperimentale a più di due particelle, si possono ottenere fino a 25% di violazioni per l'esito proibito.

2.3 La descrizione delle probabilità a Politopi

Le relazioni che intercorrono tra le probabilità in ogni esperimento ideale, possono appartenere a differenti contesti. In maniera generale si possono classificare tre tipi di probabilità miste: locali, quantistiche e no-signaling.

Il risultato di Bell evidenzia che ogni probabilità nel senso classico soddisfa ad una disuguaglianza, che non permette alcuna correlazione tra gli esiti dei risultati di misura tra parti distanti. Nel caso quantistico, tuttavia, questo non è sempre garantito. Nel caso di no signaling, l'unica restrizione per le probabilità miste è che in nessun modo un osservatore possa comunicare in maniera non locale con un altro osservatore.

La descrizione degli insiemi che contengono i particolari tipi di probabilità, sfrutta i politopi multidimensionali. Ogni politopo è chiuso e convesso ed ogni probabilità contenuta al suo interno può essere scritta:

$$\vec{p} = \mu\vec{p_1} + (1-\mu)\vec{p_2} \tag{2.9}$$

dove p_1 e p_2 sono degli elementi appartenenti al politopo, e $0 \leq \mu \leq 1$.

Si consideri un sistema a due osservatori A-B separati spazialmente, i quali possano svolgere m differenti misure sul proprio stato, con Δ possibili risultati. Per comodità si indichino con $x, y \in \{1, 2, ..., m\}$ le possibili scelte di misura rispettivamente per A e B e con $a, b \in \{1, 2, ..., \Delta\}$ i possibili esiti ottenibili per ogni misura m. Si denoti con $p(ab|xy)$ la probabilità combinata degli esiti a, b nella scelta di x, y. Ogni scenario sarà caratterizzato da $\Delta^2 m^2$ probabilità miste. Sia l'insieme $\vec{p} = \{p(ab|xy)\}$, detto andamento. Si ha allora che $\vec{p} \in \mathrm{R}^{\Delta^2 m^2}$.

Trattandosi di uno spazio di probabilità $\mathrm{P} \subset \mathrm{R}^{\Delta^2 m^2}$, vi si saranno delle naturali restrizioni. Per ogni probabilità mista si deve avere:

1. $p(ab|xy) \geq 0$;
2. $\sum_{a,b=1}^{\Delta} p(ab|xy) = 1$ per ogni x, y.

Un'altra naturale restrizione è data dal teorema di no-signaling (si veda l'Appendice A.1):

3a. $\sum\limits_{b=1}^{\Delta} p(ab|xy) = \sum\limits_{b=1}^{\Delta} p(ab|xy')$, per ogni a, x, y, y';

3b. $\sum\limits_{a=1}^{\Delta} p(ab|xy) = \sum\limits_{a=1}^{\Delta} p(ab|x'y)$, per ogni b, x, x', y.

Sia NS lo spazio delle probabilità che soddisfa le condizioni **1-3**, detto politopo di no signaling. Dai vincoli si deriva che lo spazio delle probabilità NS ha dimensione:

$$\dim \mathrm{NS} = 2(\Delta-1)m + (\Delta-1)^2 m^2 \tag{2.10}$$

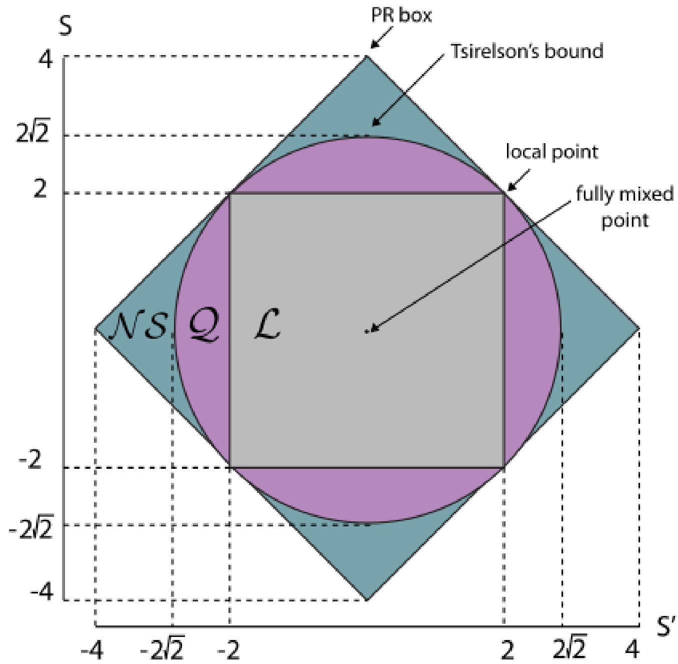

Figura 2.2: Sezione bidimensionale del politopo dino-signaling in uno scenario CHSH, per $\Delta = 2$, $m = 2$. L'asse verticale S segna i valori della disuguaglianza CHSH mentre l'asse orizzontale S' rappresenta il valore della CHSH per una simmetria nello scambio degli indici. Il politopi NS, Q e L sono allora rappresentati con i loro relativi vincoli per $|S|$ ed $|S'|$. Immagine presa da Brunner et al [4].

Per caratterizzare il politopo locale L, dalle naturali condizioni **1-3**, basta aggiungere la condizione di Bell per una teoria a LHV:

$$p(ab|xy) = \int d\lambda \rho(\lambda)\, p(a|x,\lambda)p(b|y,\lambda) \tag{2.11}$$

Da questa condizione è facile verificare che si ha L $\subset$ NS. Oltre a questi due politopi é possibile caratterizzare anche quello di tipo quantistico Q. Le probabilità miste sono date da:

$$p(ab|xy) = \langle\psi|M_{a|x} \otimes M_{b|y}|\psi\rangle \tag{2.12}$$

per opportuni proiettori, tali che $M_{a|x}M_{a'|x} = \delta_{a,a'}M_{a|x}$, $\sum_a M_{a|x} = Id_a$.

Le probabilità di tipo locale sono un sottoinsieme del politopo quantistico: ogni probabilità mista locale può essere opportunamente espressa con stati che siano separabili. Da questo risulta che L $\subset$ Q $\subset$ NS.

2.3.1 Il politopo locale

Per ogni modello stocastico a LHV descritto da (2.10), si può verificare che esso è sempre equivalente ad un modello deterministico. Ogni modello deterministico specifica gli esiti per le probabilità $p(a|x,\lambda)$ e $p(b|y,\lambda)$, tale per cui, per un'opportuna $f:\lambda\to\lambda'$, risulti $p(\lambda')\in\{0,1\}$.

Per convincersi di questo, basta ricordare che la variabile nascosta, in ogni esperimento, ha il ruolo di prevedere i possibili esiti delle misure effettuate sul sistema. Dato che abbiamo assunto di avere solo un numero finito di possibili input ed output, da cui anche un numero finito dei possibili esiti dell'esperimento, basterà un numero finito di variabili nascoste per caratterizzare l'esperimento.

Una possibile parametrizzazione di L è data dalla variabile nascosta
$\lambda=(a_1,...,a_m,b_1,...,b_m)$ per cui si pone:

$$\begin{cases} d_\lambda(ab|xy)=1, \text{ se } a_x=a\,,\, b_y=b \\ d_\lambda(ab|xy)=0, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Ogni probabilità $\vec{p}\in$ L può essere rappresentata tramite opportuni pesi q_λ per $\vec{d_\lambda}$: $\vec{p}=\sum_\lambda q_\lambda \vec{d_\lambda}$ con $\sum_\lambda q_\lambda=1$. I $\vec{d_\lambda}$, così formulati, corrispondono di fatto ai vertici del politopo. Poiché L è chiuso e convesso, per ogni probabilità contenuta in esso deve risultare:

$$s^i\cdot\vec{p}\leq S^i_\lambda \tag{2.13}$$

Il termine S_λ è il valore della disuguaglianza di Bell, associata a $\vec{p}$. Le facce $\{\vec{p}|s^i_\lambda\cdot\vec{p}=S^i_\lambda\}$ vengono chiamate in letteratura *"tight Bell inequalities"* o *"facet Bell inequalities"*. Le facet inequalities forniscono una rappresentazione minimale del politopo L: come si è visto le facce sono lineari per le probabilità miste, da cui, combinazioni lineari, positive e non nulle, delle facet inequalities definiranno altre facce del politopo locale. Inoltre, a partire dai vertici $\vec{d_\lambda}$ del politopo, é possibile determinare il valore della disuguaglianza di Bell associata ad una qualsiasi probabilità $\vec{p}\in$ L. Nel caso in cui si avesse una violazione della facet inequality per una probabilità p':

$$s^i_\lambda\cdot\vec{p'}>S^i_\lambda \tag{2.14}$$

si ha un comportamento non-locale, appartenente a Q o a NS. Al giorno d'oggi é ancora oggetto di studio se vi siano delle violazioni per qualche S^i_λ che appartengano a NS, ma non a Q. Questa rappresentazione fornisce un utile criterio per stabilire il grado di nonlocalità di un evento p':

$$\nu=\max_{\vec{s}}\frac{|\vec{s}\cdot\vec{p'}|}{\max\limits_{\vec{p}\in \mathrm{L}}|\vec{s}\cdot\vec{p}|} \tag{2.15}$$

2.4 Generalizzazione del Paradosso di Hardy

Recentemente, Jiang et al., nell'articolo *"Generalized Hardy's Paradox"* [9], hanno fornito una generalizzazione del paradosso di Hardy per sistemi a n particelle entangled.

Si consideri un sistema a n osservatori j, che possono compiere delle misure locali a_j, b_j, dove $j \in I_n = \{1,..,n\}$. Per ogni j-esimo qubit si assuma che le misure assumano solo i valori $\{0,1\}$. Siano $\alpha, \beta \subseteq I_n$ di dimensioni $|\alpha|$ e $|\beta|$. Si scrivano ora $a_\alpha = \prod_{k\in\alpha} a_k$ (in maniera equivalente anche per b_α), $\overline{b}_\beta = \prod_{k\in\beta} \overline{b}_k$, dove $\overline{b}_k = 1 - b_k$, $\overline{k} = I_n/k$, per $k \in I_n$ e $\overline{\alpha} = I_n - \alpha$. Con questa notazione si scriva: $p(x = 1, y = 1, ...) = p(xy...)$.Viene presentato il seguente teorema:

Teorema 1 (Esiti delle LHV)**.**
Per ogni $\alpha, \beta \subset I_n = \{1,2,...,n\}$, tali che $2 \le |\alpha| \le n$, $1 \le |\beta| \le |\alpha|$ e $|\alpha| + |\beta| \le n+1$, in un modello a variabili nascoste locali se si considera:

$$p(b_\alpha\, a_{\overline{\alpha}}) = p(\overline{b}_\beta\, a_{\overline{\beta}}) = 0$$

risulta:

$$p(a_{I_n}) = 0 \tag{2.16}$$

Dimostrazione. In un modello a LHV le probabilità degli esiti possono essere scritte sfruttando la rappresentazione del politopo locale, in cui i vertici assumo solo valori $\{0,1\}$. In questo modo le probabilità miste si scrivono:

$$p(b_\alpha\, a_{\overline{\alpha}}) = b_\alpha\, a_{\overline{\alpha}} = p(\overline{b}_\beta\, a_{\overline{\beta}}) = \overline{b}_\beta\, a_{\overline{\beta}} = 0 \tag{2.17}$$

Si consideri per assurdo che $p(a_{I_n}) = a_{I_n} \neq 0$. Ne consegue che:

$$b_\alpha\, a_{\overline{\alpha}} = b_\alpha = 0 \tag{2.18}$$

$$\overline{b}_\beta\, a_{\overline{\beta}} = \overline{b}_\beta = 0 \tag{2.19}$$

Dalla (2.18), per ogni dimensione $|\alpha|$ fissata, ogni sottoinsieme $\alpha \subseteq I_n$ deve avere almeno un indice $k \in \alpha$ tale per cui $b_k = 0$. Risulta allora che si devono avere almeno $n - |\beta| + 1$ elementi nulli. Dalla (2.19), per lo stesso motivo della (2.18), risulta che si dovranno avere almeno $n - |\beta| + 1$ elementi unitari. Dalla (2.18) consegue inoltre che si potranno avere al massimo $|\alpha| - 1$ elementi unitari in I_n, per cui si ha $|\alpha| - 1 \ge n - |\beta| + 1$, da cui risulta:

$$|\alpha| + |\beta| \ge n + 2$$

in contraddizione con le ipotesi del teorema.

□

Si è mostrato che la scelta delle probabilità miste (2.16), conduce necessariamente che per un modello a LHV si abbia $p(a_{I_n}) = 0$. Nel caso $n = 2$, per $|\alpha| = 2$ e $|\beta| = 1$, si ottiene il paradosso di Hardy a due qubit.
Gli esiti della MQ, violano $p(a_{I_n}) = 0$, come si vedrà nel prossimo teorema.

Teorema 2 (Esiti della MQ).
Per ogni sistema costituito da $n \geq 3$ particelle, descritto da uno stato GHZ (2.4), con $d = 2$, per ogni $\alpha, \beta \subset I_n = \{1, 2, ..., n\}$, tali che $2 \leq |\alpha| \leq n$, $1 \leq |\beta| \leq |\alpha|$ e $|\alpha| + |\beta| \leq n + 1$, per $n \geq 3$ si ottiene:

$$p(a_{I_n}) \neq 0 \tag{2.20}$$

Dimostrazione. Dalla (2.4), lo stato $|ghz\rangle$ per n-qubit entangled può essere scritto:

$$|ghz\rangle = h_0|0\rangle^{\otimes n} + h_1 e^{\imath\theta_h}|1\rangle^{\otimes n} = h_0|0...0\rangle + h_1 e^{\imath\theta_h}|1...1\rangle \tag{2.21}$$

dove h_0 e h_1 sono coefficienti reali e positivi. Si scelgano le seguenti direzioni di misura, per gli n osservatori: $|a\rangle_i = a_0|0\rangle_i + a_1 e^{\imath\theta_a}|1\rangle_i$, $|b\rangle_j = b_0|0\rangle_j + b_1 e^{\imath\theta_b}|1\rangle_j$ e $\overline{|b\rangle}_k = b_1|0\rangle_k + b_0 e^{\imath(\theta_b+\pi)}|1\rangle_k$.

Le probabilità d'interesse si ottengono tramite il calcolo diretto:

$$\begin{aligned} p(b_\alpha\, a_{\overline{\alpha}}) &= |b_0^{|\alpha|} a_0^{n-|\alpha|}|h_0| + b_1^{|\alpha|} a_1^{n-|\alpha|}|h_1|e^{\imath\theta}|^2 \\ p(\overline{b}_\beta\, a_{\overline{\beta}}) &= |b_1^{|\beta|} a_0^{n-|\beta|}|h_0| + b_0^{|\beta|} a_1^{n-|\beta|}|h_1|e^{\imath\theta'}|^2 \\ p(a_{I_n}) &= |a_0^n|h_0| + a_1^n|h_1|e^{\imath(n\theta_a-\theta_h)}|^2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

dove $\theta = (n - |\alpha|)\theta_a + |\beta|\theta_b - \theta_h$ e $\theta' = (n - |\beta|)\theta_a + |\beta|\theta_b - \theta_h + |\beta|\pi$.

La condizione $p(b_\alpha\, a_{\overline{\alpha}}) = p(\overline{b}_\beta\, a_{\overline{\beta}}) = 0$ risulta soddisfatta non banalmente quando: $\theta = (2m_1 + 1)\pi$ e $\theta' = (2m_2 + 1)\pi$, con $m_1, m_2 \in$ N. Allora per la (2.22) si ottiene:

$$\begin{aligned} b_0^{|\alpha|} a_0^{(n-|\alpha|)} h_0 &= b_1^{|\alpha|} a_1^{(n-|\alpha|)} h_1 \\ b_1^{|\beta|} a_0^{(n-|\beta|)} h_0 &= b_0^{|\beta|} a_1^{(n-|\beta|)} h_1 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Caso 1 - Sia $|\beta| < |\alpha|$. Per non appesantire la notazione, si assuma $\alpha \equiv |\alpha|$ e $\beta \equiv |\beta|$. Si può assumere senza perdita di generalità che $m_1 = m_2 = 0$.

Dalla condizione sugli angoli si ottiene: $\theta_b = (\beta\pi)/(\alpha + \beta)$, $n\theta_a - \theta_h = \pi * (1 - \alpha\beta)/(\alpha + \beta)$.

Si ponga $\gamma = h_1/h_0$, dalla (2.22) (si veda appendice B.1 per i calcoli espliciti), si ottiene un'espressione per $p(a_{I_n})$:

$$p(a_{I_n}) = \frac{\gamma^2|\kappa_0 - \kappa_1|^2}{(1 + \gamma^2)(1 + \kappa_2)^n}$$

dove $\kappa_0 = e^{\imath\pi\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}}$, $\kappa_1 = \gamma^{\frac{2\alpha\beta}{n(\alpha-\beta)} - 2\alpha\beta}$ e $\kappa_2 = \gamma^{\frac{2(\alpha+\beta)}{n(\alpha+\beta)} - 2\alpha\beta}$.

Per $\gamma = 1$ si ottiene:

$$p(a_{I_n}) = \frac{1}{2^n}\left(1 - \cos\pi\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}\right)$$

Questa probabilità risulta sempre $p(a_{I_n}) < 2^{-n}$, in quanto la frazione $\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$ non può mai essere dispari. Nel caso $\alpha = n$ e $\beta = 1$, ci si sta riferendo alla generalizzazione standard del paradosso di Hardy[1]. La probabilità prima calcolata diventa:

$$P_n^S = p(a_{I_n}) = \frac{1}{2^n}\left(1 + \cos\frac{\pi}{n-1}\right) \tag{2.24}$$

Caso 2 - Con la stessa notazione precedente, si consideri $\alpha = \beta$. Si assuma che $m_1 = 0$ e $m_2 = \frac{\beta}{2}$. Allora θ_h risulta indeterminato, si ponga $\theta_h - n\theta_a = 0$.

In questo caso si avrà $b_0 = b_1$ (si veda l'appendice B.2) e per le condizioni di normalizzazione si ottiene $b_0 = b_1 = 1/\sqrt{2}$. Inoltre risulta che $a_0/a_1 = \gamma^{1/n-\alpha}$. La probabilità desiderata vale:

$$p(a_{I_n}) = \frac{\gamma^2(1+\kappa_1')^2}{(1+\gamma^2)(1+\kappa_2')^n}$$

dove: $\kappa_1' = \gamma^{\frac{\alpha}{n}-\alpha}$ e $\kappa_2' = \gamma^{\frac{2}{n}-\alpha}$.

Nel caso in cui $\gamma = 1$ si ottiene la probabilità del paradosso di Hardy generalizzato:

$$P_n^G = p(a_{I_n})|_{\gamma=1} = \frac{1}{2^{n-1}} \tag{2.25}$$

Per entrambi i casi si è mostrato che $p(a_{I_n}) > 0$, questo conclude la dimostrazione.

$\square$

Dal Teorema 2, si vede che la scelta $|\alpha| = |\beta|$ risulta migliore per massimizzare l'esito proibito, rispetto a $|\alpha| = n$ e $|\beta| = 1$, nella generalizzazione di Cereceda [10]. Inoltre si noti che la probabilità (2.25), in condizioni ideali, per $n = 3$, vale $P_n^G = 0.25$, che confrontato con il risultato a due particelle risulta di fatto più alta. Le stesse assunzioni che permettono di derivare il seguente paradosso nel caso $|\alpha| = |\beta| = m_{even}$ sono molto semplici: il sistema è preparato in uno stato *ghz* (2.4), con $h_0 = h_1$, le misure $|a_i\rangle$ e $|b_i\rangle$ sono rispettivamente tutte orientate nella stessa direzione per i differenti osservatori j, inoltre per le condizioni di normalizzazione risulta: $b_0 = b_1 = a_0 = a_1 = 1/\sqrt{2}$. L'unica scelta che poi lo sperimentatore dovrà effettuare sul sistema sarà sulla fase data dagli angoli. Per ottenere la (2.25) si dovranno calibrare in modo opportuno gli angoli $\theta_a, \theta_b, \theta_h$ così che risulti: $\theta = \pi$, $\theta' = (|\beta| + 1)\pi$ e $\theta_h = n\theta_a$.

In uno scenario $[n, |\alpha|, |\beta|]$, si può valutare quale sia la diseguaglianza per il paradosso di Hardy generalizzato. Si considerino $x, y > 0$, la disuguaglianza si può scrivere nella forma:

$$I(n; |\alpha|, |\beta|; x, y) = F(n; \alpha, \beta; x, y)p(a_{I_n}) - x\sum_{\alpha} p(b_\alpha\, a_{\overline{\alpha}}) - y\sum_{\beta} p(\overline{b}_\beta\, a_{\overline{\beta}}) \leq 0 \tag{2.26}$$

Per convenienza si possono scegliere x, y interi positivi, e perchè possa avere un senso, ad esempio perchè si possa violare la (2.26) con degli stati quantistici, si dovrà porre $F(n; \alpha, \beta; x, y) > 0$. Tramite una diretta computazione si ottiene:

$$F(n; \alpha, \beta; x, y) = \min_{0\leq m\leq n}\left[x\binom{m}{|\alpha|} + y\binom{n-m}{|\beta|}\right] \tag{2.27}$$

[1] Una generalizzazione era già stata presentata per il caso $\alpha = n$ e $b = 1$ da Cereceda nell'articolo *"Hardy's nonlocality for generalized n-particle GHZ states"* [10].

che sarà il massimo intero positivo affinchè, per ogni strategia locale tra gli n osservatori, la (2.26) non venga violata.

Capitolo 3

Verifica Sperimentale

3.1 Loopholes

I loopholes (dall'inglese "scappatoia"), sono degli errori in cui si può incorrere nella realizzazione sperimentale di un apparato: più precisamente, ogni volta che si presenta un loophole, il risultato di una violazione di un modello a LHV non può essere considerata attendibile. Questi errori avvengono per lo più quando le condizioni in cui si svolge l'esperimento non sono ideali per verificare una violazione della disuguaglianza di Bell. In questo modo la Natura può ingannarci mascherando un fenomeno locale come non-locale.

3.1.1 Locality Loophole

Un comune loophole, detto "locality loophole", si manifesta quando non é possibile creare una distanza di tipo spazio tra gli eventi di misura. In questo caso, l'esito di una misura da una parte può influenzare in maniera locale l'esito dall'altra. Non si può pertanto escludere la possibilità di un segnale luce che viaggi da un apparato all'altro, influenzando così l'esito della misura. Qualora questa richiesta non fosse attuabile, l'altra opzione consiste nell'attuare una scelta puramente casuale sugli input di misura che, se abbastanza veloce, rende impossibile un'eventuale comunicazione tra i due apparati durante la misura. Con una tale procedura risulterebbe tuttavia questionabile se la scelta degli input possa realmente considerarsi casuale. Le condizioni necessarie alla chiusura di questo loophole possono essere scritte:

$$\begin{aligned} p(a|x,y,b;\lambda) &= p(a|x;\lambda) \\ p(b|y,x,a;\lambda) &= p(b|y;\lambda) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Un'ulteriore richiesta per l'esperimento é la "freedom of choice" per gli input scelti di misura: è necessario assumere che in nessun modo la configurazione di un apparato venga determinata da un evento precedente correlato alla misura nell'altro apparato, in particolare non dovrà essere correlato con la LHV λ. Infatti è possibile forzare la violazione di una disuguaglianza di Bell scegliendo accuratamente le misure in sequenza da compiere sul sistema. Per la chiusura di questo loophole deve risultare:

$$\rho(\lambda|x,y) = \rho(\lambda) \tag{3.2}$$

Qualora sia impossibile rispettare queste condizioni, l'esperimento non può considerarsi decisivo sull'esistenza o meno di modelli a LHV che possano descrivere la natura.

3.1.2 Detection Loophole

Questo loophole è il più comune con cui si ha che fare. In ogni esperimento bisogna tenere conto della perdita di informazione tra sorgente ed apparecchio di misura, aggiungendo che i rivelatori non hanno efficienza unitaria. In un contesto sperimentale, per un sistema a qubit, si avranno tre esiti possibili di misura: due esiti legati alla rivelazione della particella $\{-1, +1\}$ ed uno legato al no-click del rivelatore $\{\perp\}$. Ci sono molti metodi per trattare l'evento no-click all'interno dell'esperimento. Una tecnica che si può utilizzare, sfrutta precise disuguaglianze di Bell per considerare l'evento di no-click identico ad un risultato del rivelatore. In questo modo non è più necessario fare distinzioni tra l'evento k-esimo ed una non rivelazione.

Un altro errore in cui si può incorrere, é legato all'efficienza η dei rivelatori. Si può supporre che gli unici dati utili alla verifica sperimentale siano quelli in cui non compaiono eventi di no-click: in questo modo si considera solo il campione contenente delle misure. Questo loophole viene detto di "fair-sampling" o "post-selection". Nel caso a due apparati si può notare [4] che vi è una strategia vincente per forzare la violazione della disuguaglianza di Bell. Il limite inferiore all'efficienza deve essere, onde evitare questo loophole, per sistemi di tipo CHSH, $\eta > 2/3$.

In generale il limite inferiore può essere più alto. Si consideri un esperimento di tipo CHSH, sfruttando uno stato massimamente entangled (MES), per cui si abbiano le efficienze dei rivelatori $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. La probabilità di rivelazione per entrambi i rivelatori sarà allora η^2, che conduce ad una violazione $S = 2\sqrt{2}$. Nel caso in cui solo un rivelatori compia una misura con probabilità $\eta(1-\eta)$ si avranno degli esiti completamente non-correlati, che conducono a $S = 0$. Quando entrambi non segneranno nulla, con probabilità $(1-\eta)^2$, si può raggiungere un massimo $S = 2$ per una strategia di tipo locale tra gli osservatori. Per violare un modello a LHV deve allora risultare:

$$\eta^2 2\sqrt{2} + (1-\eta)^2 2 > 2$$

$$\eta > \eta^* = 2/(1+\sqrt{2}) \approx 82.8\% \tag{3.3}$$

Esistono casi in cui l'efficienza di soglia può essere abbassata considerando stati non più massimamente entangled. Seguendo [11] è possibile dimostrare che nel limite di stati prodotto $\eta^* \to 2/3$. Questo interessante risultato é strettamente legato alle condizioni sperimentali in cui si lavora: nel caso di white noise elevata lo stato che massimizza la non-località misurata è dato da MES.

3.1.3 Efficienza di soglia per il paradosso di Hardy

I rivelatori utilizzati in ogni esperimento non si possono tuttora considerare ideali, in quanto parte dell'informazione sullo stato può essere persa a causa della loro efficienza non unitaria. Da qui in poi, si assuma, per semplicità, che ogni rivelatore abbia la stessa efficienza $\eta_1 = \eta_2 = ... = \eta_n = \eta$.

Si assuma ora di svolgere un esperimento per verificare il paradosso di Hardy, a due particelle. Si possono valutare come cambino le probabilità in presenza di un'efficienza non ideale:

$$p(a_k, b_k) \to \eta^2 p(a_k, b_k) \tag{3.4}$$

$$p(\overline{a}_{k-1}, b_k) \to \eta^2 p(\overline{a}_{k-1}, b_k) + \eta(1-\eta)p(b_k) \tag{3.5}$$

La mancata rivelazione di a_k viene associata all'evento $\overline{a_k}$, tuttavia nel caso $\eta < 1$, essa sarà indistinguibile da un evento di no-click $\perp$. Nell'equazione (3.5) si nota che per a_{k-1} vi sono infatti un contributo proporzionale a η per la rivelazione di $\overline{a}_{k-1}$ ed un contributo proporzionale a $1 - \eta$ per l'evento di no-click. Se si riscrive $p(a_1) = p(a_1, b_0) + p(a_1, \overline{b_0})$, la (2.8) diventa:

$$S_1^* = \eta^2 S_1 + \eta(\eta - 1)[p(a_0, b_1) + p(\overline{a_0}, b_1) + p(a_1, b_0) + p(a_1, \overline{b_0})] \tag{3.6}$$

Da [8] sono stati ricavati lo stato ottimale e gli angoli di misura per verificare il paradosso di Hardy. Questi, dal calcolo diretto, conducono alle seguenti probabilità miste: $p(a_1, b_1) = 9\%$, $p(a_0, b_0) = 0\%$, $p(a_0, b_1) = p(a_1, b_0) = 23.2\%$ e $p(a_1, \overline{b_0}) = p(\overline{a_0}, b_1) = 0\%$. Sostituendo quanto trovato dalla (3.7) si ricava:

$$S_1^* = \eta^2[23.2 + 23.2 + 9] - \eta(23.2 + 23.2) > 0$$

$$\eta > 83.7\% \tag{3.7}$$

Nel caso in cui si consideri lo stato MES, alcune probabilità miste non svaniranno, rendendo l'efficienza di soglia più alta. In maniera analoga a quanto svolto precedentemente, si ottiene $\eta > 95\%$.

3.1.4 Efficienza e visibilità di soglia per il paradosso di Hardy generalizzato

Nel caso a 3 particelle, si ottiene una probabilità massima per l'esito proibito, pari a $p_{123} = 25\%$. Sfruttando questo risultato si possono valutare se ci sono dei vantaggi per l'efficienza di soglia dei rivelatori rispetto al caso a 2 particelle. Come si era visto nel paragrafo 2.4, lo stato considerato é MES, per cui in prima analisi non ci si può aspettare che l'efficienza di soglia sia migliore del caso a due particelle.

Si consideri la disuguaglianza associata per il paradosso di Hardy a tre particelle, nel caso $|\alpha| = |\beta| = 2$ [9] :

$$I_3 = a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - b_1a_2b_3 - a_1b_2b_3 - \overline{b_1b_2}a_3 - \overline{b_1}a_2\overline{b_3} - a_1\overline{b_2b_3} < 0 \tag{3.8}$$

In presenza di efficienza non intera le probabilità miste diventano:

$$a_1a_2a_3 \to \eta^3 a_1a_2a_3 \tag{3.9}$$

$$\overline{b_1b_2}a_3 \to \eta^3\overline{b_1b_2}a_3 + \eta(\eta-1)^2 a_3 + (1-\eta)\eta^2[\overline{b_1}a_3 + \overline{b_2}a_3] \tag{3.10}$$

L'espressione finale per I_3^*, presenterà dei termini che dipendono da varie combinazioni di a_i, b_i e $\overline{b}_i$, mentre i termini del tipo $b_\alpha a_{\overline{\alpha}}$ e $\overline{b}_\beta a_{\overline{\beta}}$ saranno nulli. Sostituendo in (3.9) le probabilità appena calcolate (3.10) e (3.11) si ottiene una disuguaglianza nella forma:

$$I_3^* = \eta^2 I_3 + \eta^2(1-\eta)J_2 + \eta(1-\eta)^2 J_1 < 0 \tag{3.11}$$

dove $J_2 = a_1(\overline{b_1} + \overline{b_2}) + a_2(\overline{b_1} + \overline{b_3}) + a_3(\overline{b_1} + \overline{b_2})$ e $J_2 = (a_1 + a_2 + a_3)$. Valutando le probabilità associate per J_2 e J_1, si ottiene:

$$\eta > -3 + \sqrt{15} \approx 87.3\% \tag{3.12}$$

Gli stessi autori di [9] hanno valutato, per via numerica, la visibilità di soglia in presenza di white noise. In questo caso lo stato cambia e si può riscrivere nel seguente modo:

$$\rho^V = V\rho + (1-V)I_{noise}$$

dove $I_{noise} = \mathbb{1}^{\otimes n}/2^n$. La visibilità di soglia viene misurata con V_{thr}, al di sotto della quale non è possibile ottenere una violazione della disuguaglianza di Bell. Minore sarà il valore, maggiore sarà la tolleranza alla white noise per il sistema.

In tabella vengono riportati i risultati ottenuti per la visibilità V_{thr}, fino a $n = 7$:

n	3	4	5	6	7
$\lvert\alpha\rvert = n$, $\lvert\beta\rvert = 1$	0.6812	0.7071	0.7374	0.7645	0.7875
$\lvert\alpha\rvert = 2$, $\lvert\beta\rvert = 1$	0.6822	0.7035	0.7037	0.7559	0.7778
$\lvert\alpha\rvert = n-1$, $\lvert\beta\rvert = 1$	0.6822	0.6714	0.7025	0.7349	0.7631
$\lvert\alpha\rvert = 2$, $\lvert\beta\rvert = 2$	0.7143	0.7142	0.6667	0.6667	0.6471

Per $n \geq 5$, si vede che la scelta migliore che minimizza la V_{thr} è data dalla scelta $|\alpha| = |\beta| = 2$: ciò mostra il vantaggio di questa scelta rispetto a quella di Cereceda [10].

3.1.5 Esperimenti loophole free

Recentemente, vi sono stati dei clamorosi progressi nel verificare più accurate violazioni delle diseguaglianze di Bell. Tra questi, nel 2016, in un esperimento coordinato da Marissa Giustina [12], si è ottenuta una violazione libera da loophole, con coppie di fotoni entangled. La calibrazione accurata dell'esperimento ha portato ad un grado di sfiducia sull'esperimento dell'ordine di 10^{-31}, associando una fiducia dello stesso ordine sulla descrizione degli esiti con un modello a LHV. L'ordine di grandezza per la possibilità di ricreare nell'ipotesi di realismo locale l'esperimento sulla disuguaglianza CHSH, segna l'assoluta inadeguatezza per la descrizione della meccanica quantistica data da un modello a LHV.

3.2 Descrizione dell'esperimento

Per verificare il paradosso di Hardy si è usata una sorgente laser a $P = 50\text{mW}$, con lunghezza d'onda $\lambda = 405\text{nm}$. Per generare uno stato non massimamente entangled, è stata usata, in primis, una lamina a mezz'onda (HWP), inclinata rispetto alla verticale V di un angolo φ. Il fascio è stato poi indirizzato su un cristallo BBO, costituito da due cristalli identici, tra loro ruotati di $\pi/2$. In questo avviene un fenomeno chiamato Spontaneus Parametric Down Conversion (SPDC) di Tipo-1, a cui ci si riferisce in letteratura con "Kwiat source". In questo processo, il raggio incidente a lunghezza d'onda ultravioletta, stimola l'emissione di due coppie di fotoni, entrambi nella stessa polarizzazione (nel nostro riferimento il primo cristallo emetterà lungo H, il secondo lungo V). Dato che la lunghezza di coerenza del fascio risulta lunga rispetto alle dimensioni del cristallo in cui avviene SPDC, non è possibile sapere se la creazione di coppie di fotoni avviene negli stati $|HH\rangle$ o $|VV\rangle$. Nello spirito quantomeccanico, essendo lo stato finale incognito, lo stato che caratterizza la coppia uscente è dato dalla sovrapposizione delle due possibile opzioni:

$$|\Psi\rangle = \cos\phi\,|HH\rangle + \sin\phi\,|VV\rangle \tag{3.13}$$

dove $\phi = 2\varphi$. I due fasci uscenti dal BBO sono stati poi guidati verso delle ulteriori HWP e verso dei PBS (Polarized Beam Splitter), in modo da selezionare la polarizzazione desiderata. Le direzioni di misura per l'esperimento sono date da una sovrapposizione dei ket $|H\rangle$ e $|V\rangle$:

$$|a_k\rangle = \cos\theta_k\,|H\rangle + \sin\theta_k\,|V\rangle \tag{3.14}$$

$$|b_k\rangle = \cos\theta_k\,|H\rangle - \sin\theta_k\,|V\rangle \tag{3.15}$$

$$|\bar{a}_k\rangle = \sin\theta_k\,|H\rangle - \cos\theta_k\,|V\rangle \tag{3.16}$$

$$|\bar{b}_k\rangle = \sin\theta_k\,|H\rangle + \cos\theta_k\,|V\rangle \tag{3.17}$$

Seguendo l'articolo [8], è possibile ricavare la relazione tra gli angoli usati per la misura e lo stato utilizzato:

$$\sin\theta_k = (-1)^k \frac{t^{k+1/2}}{\sqrt{t^{2k+1}+1}} \tag{3.18}$$

dove $t = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \approx 0.46$. In questo modo si massimizza la probabilità stimata per l'esito proibito, che risulta:

$$p(a_1, b_1) = \frac{t^2(t^2-1)^2}{(t^3+1)^2(t^2+1)^2} = 0.09 \tag{3.19}$$

Il setup sperimentale utilizzato è illustrato in Figura 3.1.

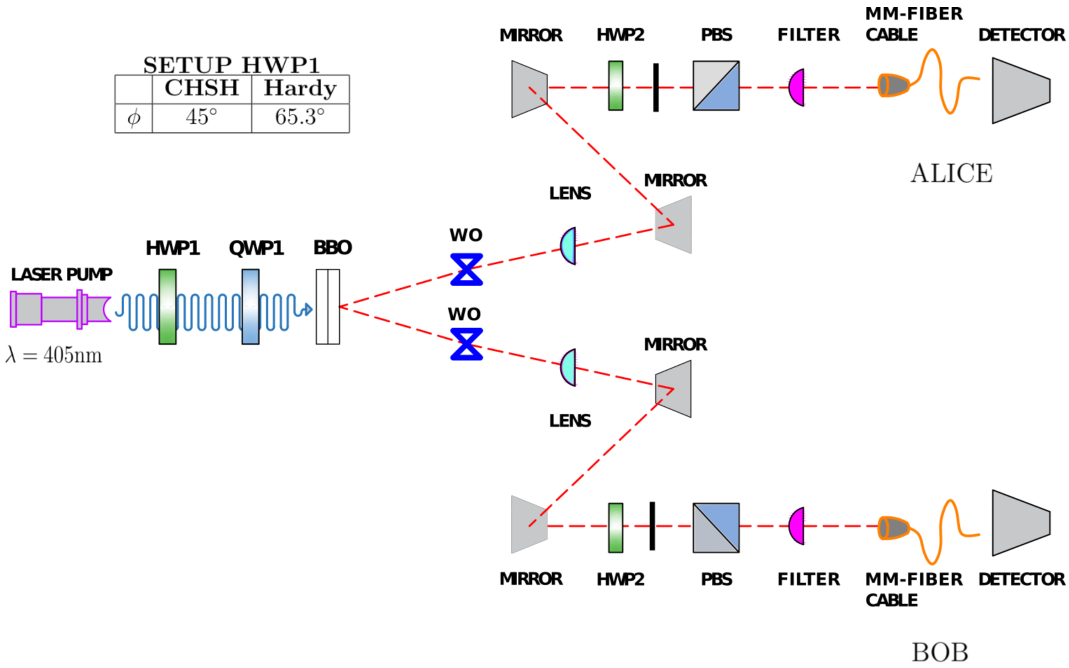

Figura 3.1: Schema dell'apparato sperimentale adoperato per la verifica del paradosso di Hardy. La rotazione di HWP1 permette di scegliere l'angolo ϕ della (3.14). L'orientazione delle lamine HWP2 imposta l'angolo di polarizzazione voluto per le misure da effettuare su ALICE o BOB. Sono state inserite inoltre: una lamina QWP per eliminare un'eventuale fase nella (3.14), per il termine $|VV\rangle$, dei cristalli di walk-off WO e delle iridi, in nero in figura, tra HWP2 e PBS,.

3.3 Risultati ottenuti

Illustriamo ora l'analisi dati ottenuta dalle coincidenze misurate per entrambi i detector, per la verifica del paradosso di Hardy. Dalla rotazione della HWP2, nei rami in Figura 3.1, è stato possibile scegliere gli angoli specifici per le misure precedentemente indicate (3.14-17). In tabella sono riportati gli angoli usati per proiettare lo stato in

$$|\psi\rangle^* = \cos\chi|H\rangle + \sin\chi|V\rangle \tag{3.20}$$

3.3.1 Violazione della CHSH

Si é svolta, in primis, una verifica del paradosso di Hardy in una configurazione CHSH. Quest'ultima permette una verifica diretta più semplice rispetto alla configurazione del paradosso di Hardy, in quanto la visibilità di soglia necessaria è minore. Mostriamo ora gli angoli utilizzati per proiettare in (3.20) :

	a_0	b_0	$\overline{a_0}$	$\overline{b_0}$	a_1	b_1
χ	$-45°$	$-22.5°$	$45°$	$67.5°$	$0°$	$22.5°$

Misurando la coppia di angoli (χ_a, χ_b), sono state ottenute le seguenti coincidenze:

coppie	a_0, b_0	$\overline{a_0}, b_1$	$a_1, \overline{b_0}$	a_1, b_1
(χ_a, χ_b)	$(-45°, -22.5°)$	$(45°, 22.5°)$	$(0°, 67.5°)$	$(0°, 22.5°)$
coincidenze	675 ± 26	663 ± 25	559 ± 23	2431 ± 49

La probabilità di ogni esito sarà data dal numero di conteggi (a, b) per la coppia in esame, normalizzata ai conteggi totali misurati in (H, H) e (V, V). Sia $N = (H, H) + (V, V)$, allora inserendo $p(a, b) = (a, b)/N$ nella (2.8), si può riscrivere:

$$S_1 = (a_1, b_1) - (\overline{a_0}, b_1) - (a_1, \overline{b_0}) - (a_0, b_0) \leq 0 \tag{3.21}$$

che conduce a $S_1 = 534 \pm 65$, cioè la (2.8) è violata fino a 8σ.

3.3.2 Verifica del paradosso di Hardy

Nel setup per la verifica del paradosso di Hardy, la HWP1 è stata ruotata di un angolo $\phi = 65.3°$ ottenendo un grado di entanglement $t^2 \approx 0.19$. Dalla (3.19) sono stati i seguenti angoli:

	a_0	b_0	$\overline{a_0}$	$\overline{b_0}$	a_1	b_1
χ	$34.1°$	$145.8°$	$124.2°$	$55.8°$	$-17.3°$	$72.6°$

Misurando la coppia di angoli (χ_a, χ_b), si sono ottenute le seguenti coincidenze:

coppie	a_0, b_0	$\overline{a_0}, b_1$	$a_1, \overline{b_0}$	a_1, b_1
(χ_a, χ_b)	$(34.1°, 145.8°)$	$(124.2°, 145.8)$	$(-17.3°, 55.8°)$	$(-17.3°, 72.6°)$
coincidenze	670 ± 26	692 ± 26	508 ± 23	2295 ± 48

Con le seguenti coincidenze, si ottiene una violazione della (3.22) $S_1 = 425 \pm 64$, con un margine di 6.5σ. Sono stati misurati anche i conteggi per le coppie di misura (H,H) e (V,V), ottenendo un totale $N = 25021 \pm 158$. La probabilità dell'esito proibito risulta:

$$p(a_1, b_1) = (a_1, b_1)/N = 0.092 \pm 0.001 \tag{3.22}$$

che risulta molto vicino alle previsioni teoriche.

Conclusioni

L'esperimento condotto non è esente da loophole che, di fatto, lo rendono inconclusivo sulla questione LHV. In primis, si è lavorato con un campione limitato dei dati totali raccolti, da cui è necessaria l'ipotesi di fair-sample. Inoltre la limitata distanza tra i detector non ha permesso la chiusura del locality loophole, situazione che non è stata presa in considerazione dall'inizio, data la sua notevole difficoltà in generale per ogni esperimento. Non sono state necessarie altre assunzioni per la riuscita dell'esperimento. Il risultato ottenuto nelle configurazioni tipo CHSH e Hardy constano di un grado di fiducia elevato per la violazione della (2.8), verificando, ancora una volta , l'inadeguatezza di una teoria a LHV nella descrizione della Fisica Quantistica. Come menzionato nella sezione 3.1.5, i risultati ottenuti, in esperimenti loophole-free [12], dimostrano in maniera definitiva che l'ipotesi di realismo locale non é sostenibile.

Il paradosso di Hardy, tra i casi "tutto o niente" risulta forse il più interessante grazie alla generalizzazione a n-particelle. Nonostante si sfrutti uno stato GHZ, il merito della violazione della disuguaglianza (2.20) non va di certo a quest'ultimo. Nel Capitolo 2 si mette in luce che la situazione di tipo Hardy può essere efficacemente sfruttata per verificare la nonlocalità dello stato. Resta tuttora da valutare se questa generalizzazione si possa estendere ad uno stato non MES, e dunque valutare se vi possano essere dei miglioramenti per l'efficienza η dei rivelatori. In tal caso si avrebbe un argomento per stabilire in diretta corrispondenza la robustezza di non-località $R = 1 - \eta$ con il grado di entanglement dello stato [11]. Tuttavia, nel caso a n particelle, data la difficoltà nel descrivere il grado di entanglement, ancora poco è noto al di fuori dei casi tipo GHZ. Si auspica che progressi di questo tipo possano avere anche risonanza nell'ambiente più ampio della Quantum Information Theory, permettendo non solo uno sviluppo della conoscenza in sè, ma anche la possibilità di avere, di qui a poco, un "futuro quantistico".

Appendice A

A.1 Il teorema di no-signaling

Nel paragrafo 1.3 la condizione di **località** è stata riformulata in una versione più adatta alla trattazione quantomeccanica. Per gli stati entangled questa ipotesi non è rispettata. Ci si può chiedere se la violazione della *località alla Bell* permetta uno scambio di informazioni tra due sistemi distanti, ad una velocità superluminale. Il teorema di no-signaling dimostra che un possibile utilizzo di stati entangled per comunicazioni non locali non é possibile:

Teorema 3 (Teorema di no-signaling)**.**
Per due sistemi A-B separati da una distanza di tipo spazio, in cui i rispettivi osservatori eseguono misure locali sul sistema condiviso, in nessun modo un osservatore può comunicare in maniera non classica con l'altro.

Dimostrazione.
Sia un sistema quantistico, condiviso tra i due osservatori, dato dalla matrice densità ρ_{AB} appartenente all'insieme delle matrici densità, a traccia unitaria, $\mathbb{D}(\mathrm{H}_1 \otimes \mathrm{H}_2)$. Una misura locale, per il sistema A(per B è definita in maniera analoga), è data da opportuni operatori M_r^A (M_s^B) agenti su H_1 (H_2), dove r (s) è il numero dei possibili esiti per una misura.

Per ogni osservatore, il proprio stato si ottiene estraendo la traccia per l'altro osservatore, infatti:

$$\rho_A = Tr_B\left(\rho_{AB}\right)$$

Con questa notazione, si può valutare la probabilità mista per gli esiti (r, s):

$$P(r, s|A, B) = Tr([M_r^A \otimes M_s^B]\rho_{AB}[M_r^A \otimes M_s^B]^\dagger)$$

La condizione di no-signaling è data da:

$$P(r|A) = \sum_s Tr\left([M_r^A \otimes M_s^B]\rho_{AB}[M_r^A \otimes M_s^B]^\dagger\right) =$$

$$= \sum_s Tr\left([M_r^{A^\dagger} M_r^A] \otimes [M_s^{B^\dagger} M_s^B]\rho_{AB}\right) =$$

$$= Tr\left((M_r^{A^\dagger} M_r^A \otimes \sum_s [M_s^{B^\dagger} M_s^B])\rho_{AB}\right) =$$

$$= Tr\Big((M_r^{A^\dagger} M_r^A \otimes \mathbb{1})\rho_{AB}\Big)$$

Dall'ultima uguaglianza si vede che l'espressione per la probabilità di una misura per A, risulta indipendente dalla scelta di misure effettuate da B. Analogamente per B si può dimostrare che $P(s|B)$ avrà una forma simile. Questo conclude la dimostrazione.

$\square$

Seguendo [13], è possibile riscrivere il teorema di no-signaling, in termini delle probabilità:

$$p(a|x) = \sum_{b=1}^{\Delta} p(ab|xy) = \sum_{b=1}^{\Delta} p(ab|xy'), \text{ per ogni } a, x, y, y'$$
$$p(b|y) = \sum_{a=1}^{\Delta} p(ab|xy) = \sum_{a=1}^{\Delta} p(ab|x'y), \text{ per ogni } b, x, x', y$$

Con questa scrittura è facile convincersi che per ogni osservatore, in cui non vi sia comunicazione con l'altro, l'esito della misura non mostra la possibile scelta dell'altro.

A.1.1 Un applicazione del Teorema di No-signaling

Consideriamo un sistema composto da due osservatori Alice e Bob, separati spazialmente e che condividano un qualunque stato quantistico. Si supponga che Alice abbia un messaggio, tra N possibilità, da trasmettere a Bob. Come prima si abbiano (r, s) possibili risultati per una misura sullo stato per A e B, in relazione uno a uno tra loro. Allora la probabilità che Bob indovini il messaggio di Alice sarà:

$$p = \sum_{x \in A} p(s = x|B, A = x)p(A = x)$$

Poichè vale il teorema di no-signaling si avrà $p(s = x|B, A = x) = p(s = x|B)$. Allora la probabilità per Bob di indovinare diventa:

$$p = \sum_{x \in A} p(s = x|B)p(A = x) = \frac{1}{N} \sum_{x \in A} p(s = x|B) = \frac{1}{N}$$

Appendice B

B.1 Teorema 2 - Caso 1

Si consideri il sistema di probabilità miste dato da:

$$\begin{aligned} p(b_\alpha\, a_{\overline{\alpha}}) &= |b_0^{|\alpha|} a_0^{n-|\alpha|} h_0 + b_1^{|\alpha|} a_1^{n-|\alpha|} h_1 e^{\imath\theta}|^2 \\ p(\overline{b}_\beta\, a_{\overline{\beta}}) &= |b_1^{|\beta|} a_0^{n-|\beta|} h_0 + b_0^{|\beta|} a_1^{n-|\beta|} h_1 e^{\imath\theta'}|^2 \\ p(a_{I_n}) &= |a_0^n h_0 + a_1^n h_1 e^{\imath(n\theta_a-\theta_h)}|^2 \end{aligned} \tag{B.1}$$

e gli angoli $\theta = (n-|\alpha|)\theta_a + |\alpha|\theta_b - \theta_h$, $\theta' = (n-|\beta|)\theta_a + |\beta|\theta_b - \theta_h + |\beta|\pi$. Siano $\alpha \equiv |\alpha|$ e $\beta \equiv |\beta|$. Per $\alpha > \beta$ si possono scegliere gli angoli $\theta = \pi$ e $\theta' = \pi$, risulterà:

$$\begin{aligned} \theta &= (n-\alpha)\theta_a + \alpha\theta_b - \theta_h = \pi \\ \theta' &= (n-\beta)\theta_a + \beta\theta_b - \theta_h + \beta\pi = \pi \end{aligned} \tag{B.2}$$

Sottraendo le due espressioni per θ e θ' si ottiene: $(\alpha-\beta)\theta_b - (\alpha-\beta)\theta_a = \beta\pi$ da cui $\theta_b = \theta_a + \beta\pi/\alpha - \beta$. Sostituendo questa espressione di θ_b nella (B.2) si ottiene:

$$(n-\alpha)\theta_a + \alpha\theta_a + \frac{\alpha\beta\pi}{\alpha-\beta} - \theta_h = \pi$$

$$n\theta_a - \theta_h = \left(1 - \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)\pi$$

Da $\theta = \theta' = \pi$, nella (B.1) dividendo la seconda equazione per la prima si ottiene:

$$b_0^{-\alpha} b_1^{\beta} a_0^{\alpha-\beta} = b_0^{\beta} b_1^{-\alpha} a_1^{\alpha-\beta}$$

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^{\alpha-\beta} = \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^{\alpha+\beta}$$

Sostituendo per b_0/b_1 nella prima equazione in (B.1), si ottiene:

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^{n-\alpha} = \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^{\alpha} \frac{h_1}{h_0}$$

Sia $\gamma = h_1/h_0$ si ha:

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^{n-\alpha+\frac{\alpha^2-\beta\alpha}{\alpha+\beta}} = \gamma$$

Si ottiene:

$$\frac{a_0}{a_1} = \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}} = \gamma^{\frac{\alpha+\beta}{n(\alpha+\beta)-2\alpha\beta}}$$

Si ponga ora $\alpha = n$ e $\beta = 1$, per ottenere la probabilità generalizzata di Cereceda [10]. Da (B.2) si ha infatti:

$$\begin{aligned} p(a_{I_n}) &= |a_0^n h_0 + a_1^n h_1 e^{-\imath\pi\frac{1}{n-1}}|^2 = a_1^{2n}|h_0|^2|\frac{a_0^n}{a_1^n} + \gamma e^{-\imath\pi\frac{1}{n-1}}|^2 = \\ &= a_1^{2n}|h_0|^2\gamma^2|\gamma^{\frac{n-1}{n+1}} + e^{-\imath\pi\frac{1}{n-1}}|^2 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Dalle condizioni di normalizzazione $a_0^2 + a_1^2 = 1$ e $h_0^2 + h_1^2 = 1$ si può scrivere: $a_1^2 = 1/1 + \gamma^{\frac{2n+2}{n^2-n}}$ e $h_0^2 = (1+\gamma^2)^{-1}$. L'espressione per $p(a_{I_n})$ diventa:

$$p(a_{I_n}) = \frac{\gamma^2|\gamma^{\frac{n-1}{n+1}} + e^{\imath\pi\frac{1}{n-1}}|^2}{(1+\gamma^2)(1+\gamma^{\frac{2n+2}{n^2-n}})^n} =$$

che nell'ipotesi $\gamma = 1$ porge:

$$= \frac{1}{4}\frac{|1 + e^{-\imath\pi\frac{1}{n-1}}|^2}{2^{n-1}}$$

Ricordando che $\cos(\phi/2) = \sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}}$ si arriva alla formula di Cereceda [10]:

$$p(a_{I_n}) = \frac{1}{2^n}\left(1 + \cos\frac{\pi}{n-1}\right)$$

B.2 Teorema 2 - Caso 2

Si consideri il sistema (B.1) del paragrafo B.1, con gli angoli $\theta = (n-|\alpha|)\theta_a + |\alpha|\theta_b - \theta_h$, $\theta' = (n-|\beta|)\theta_a + |\beta|\theta_b - \theta_h + |\beta|\pi$. Siano $\alpha \equiv |\alpha|$, $\beta \equiv |\beta|$ e $\alpha = |\beta|$. Si scelgano gli angoli $\theta = \pi$ e $\theta' = (\beta+1)\pi$. Dividendo nella (B.1) la prima equazione per la seconda si ottiene:

$$\left(\frac{b_0}{b_1}\right)^\alpha = \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^\alpha$$

da cui risulta $b_0 = b_1$ e per le condizioni di normalizzazione si avrà $b_0 = b_1 = 1/\sqrt{2}$. Dalla (B.1) dalla prima equazione si ottiene:

$$a_0^{n-\alpha}|h_0| = a_1^{n-\alpha}|h_1|$$

$$\frac{a_0}{a_1} = \gamma^{1/(n-\alpha)}$$

Si consideri nella (B.1), la terza equazione diventa :

$$p(a_{I_n}) = a_1^{2n} h_0^2 |\frac{a_0^n}{a_1^n} + \gamma|^2$$

Dalla condizione di normalizzazione per a_0 , a_1, si può ricavare a_1 in funzione di γ: $a_1^2 = 1/1 + \gamma^{\frac{2}{n-\alpha}}$. Si ottiene:

$$p(a_{I_n}) = \frac{\gamma^2|\gamma^{\frac{\alpha}{n-\alpha}} + 1|^2}{(1+\gamma^2)(1+\gamma^{\frac{2}{n-\alpha}})^n}$$

Per $\gamma = 1$ si ottiene:

$$p(a_{I_n}) = \frac{1}{2}\frac{2^2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \tag{B.4}$$

Bibliografia

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.

[2] David Bohm. *Quantum theory.* Courier Corporation, 2012.

[3] John S Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. In *John S Bell On The Foundations Of Quantum Mechanics*, pages 7–12. World Scientific, 2001.

[4] Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani, and Stephanie Wehner. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, 86:419–478, Apr 2014.

[5] John F Clauser, Michael A Horne, Abner Shimony, and Richard A Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical review letters*, 23(15):880, 1969.

[6] Daniel M Greenberger, Michael A Horne, Abner Shimony, and Anton Zeilinger. Bell's theorem without inequalities. *Am. J. Phys*, 58(12):1131–1143, 1990.

[7] Lucien Hardy. Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states. *Phys. Rev. Lett.*, 71:1665–1668, Sep 1993.

[8] Giuseppe Vallone, Ilaria Gianani, Enrique B. Inostroza, Carlos Saavedra, Gustavo Lima, Adán Cabello, and Paolo Mataloni. Testing hardy's nonlocality proof with genuine energy-time entanglement. *Phys. Rev. A*, 83:042105, Apr 2011.

[9] Shu-Han Jiang, Zhen-Peng Xu, Hong-Yi Su, Arun Kumar Pati, and Jing-Ling Chen. Generalized hardy's paradox. *Physical review letters*, 120(5):050403, 2018.

[10] José L Cereceda. Hardy's nonlocality for generalized n-particle ghz states. *Physics Letters A*, 327(5):433 – 437, 2004.

[11] Giuseppe Vallone, Gustavo Lima, Esteban S. Gómez, Gustavo Cañas, Jan-Åke Larsson, Paolo Mataloni, and Adán Cabello. Bell scenarios in which nonlocality and entanglement are inversely related. *Phys. Rev. A*, 89:012102, Jan 2014.

[12] Marissa Giustina, Marijn A. M. Versteegh, Sören Wengerowsky, Johannes Handsteiner, Armin Hochrainer, Kevin Phelan, Fabian Steinlechner, Johannes

Kofler, Jan-Åke Larsson, Carlos Abellán, Waldimar Amaya, Valerio Pruneri, Morgan W. Mitchell, Jörn Beyer, Thomas Gerrits, Adriana E. Lita, Lynden K. Shalm, Sae Woo Nam, Thomas Scheidl, Rupert Ursin, Bernhard Wittmann, and Anton Zeilinger. Significant-loophole-free test of bell's theorem with entangled photons. *Phys. Rev. Lett.*, 115:250401, Dec 2015.

[13] B Dalton and Margaret D Reid. Quantum theory and local hidden variable theory: General features and tests for epr steering and bell non-locality. 11 2016.