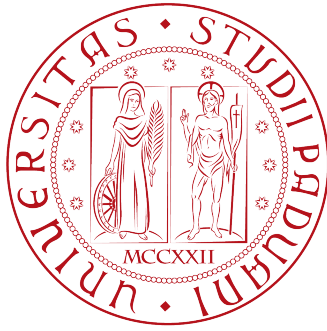




UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Magistrale in Astronomia

Tesi di Laurea

La tecnica della Pupil-Segmentation

Relatore

Prof. Sergio Ortolani

Laureando

Paris Edoardo

Correlatori

Prof. Stefano Bonora

Dr. Martino Quintavalla

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione	5
1 I principi dell'ottica adattiva	11
1.1 Sistemi Open-loop e Closed-loop	11
1.2 Correttori di fronte d'onda	12
1.3 Modale o Zonale?	14
1.3.1 Rappresentazione modale: polinomi di Zernike	15
1.4 Wavefront Sensors	18
1.4.1 Wavefront slope sensors	18
2 Image Sharpening	25
2.1 Nitidezza dell'immagine	25
2.2 Algoritmi di ricerca	27
2.2.1 Gradient descent	27
2.2.2 Simplex	28
2.2.3 Simulated annealing	29
2.2.4 Algoritmi genetici	30
3 Pupil Segmentation: simulazioni	35
3.1 Simulazione delle aberrazioni	35
3.2 Pupil-segment	40
3.3 Disposizione delle sottoaperture	44
3.4 Simulazione Pupil-segmentation	51
3.5 Ricostruzione fronte d'onda	55
3.6 Simulazioni per un campo di vista	66
4 Test di laboratorio	71
4.1 Funzionamento	71

4.1.1	La lente deformabile	72
4.1.2	La maschera	73
4.1.3	GUI matlab	74
4.2	Confronto con il sensore Shack-Hartmann	78
4.2.1	Esperimento 1	79
4.2.2	Esperimento 2	82
4.3	Closed loop: sorgente puntiforme	84
4.4	Closed loop: sorgente estesa	89
Conclusioni		93

Introduzione

L'ottica adattiva (AO) è una tecnologia in uso per migliorare le performance dei sistemi ottici, riducendo gli effetti delle distorsioni del fronte d'onda del fascio in arrivo. Questa tecnica si avvale di componenti ottici, come specchi o lenti deformabili, al fine di compensare le distorsioni presenti nel fascio.

L'ottica adattiva trova impiego in svariate applicazioni, per esempio nei telescopi astronomici e nei sistemi a comunicazione laser dove è necessario rimuovere gli effetti della turbolenza atmosferica, ed in microscopia dove le aberrazioni sono introdotte dal campione in esame.[9]

Questa tecnica nasce in ambito astronomico. Fu proprio Babcock nel 1953 a suggerire per la prima volta un sistema di correzione in tempo reale delle aberrazioni ottiche introdotte dalla turbolenza atmosferica, da utilizzare in campo astronomico. Le prime applicazioni videro però la luce solo negli anni '80 del XX secolo, con l'uso dei primi sensori di fronte d'onda come lo Shack-Hartmann ed il sensore a curvatura.

Soltanto nel 1996 l'ottica adattiva vide il suo primo utilizzo in un oftalmoscopio per osservare la retina dell'occhio umano. Stavolta le aberrazioni non erano più causate dalla turbolenza atmosferica ma da aberrazioni statiche caratteristiche dell'occhio stesso.

L'ottica adattiva è stata fondamentale in una serie di nuove scoperte: dall'osservazione diretta del moto delle stelle nei pressi del buco nero supermassiccio situato al centro della via lattea, alla prima mappa dei fotorecettori della retina.

Più di recente l'ottica adattiva sta prendendo piede anche nell'ambito della medicina, in particolare in quelle tecniche dove la risoluzione gioca un ruolo fondamentale, come ad esempio la *optical coherence tomography* (OCT), la *confocal microscopy* e la *two photon fluorescence microscopy*. [1][13]

Ottica adattiva in astronomia

La funzione dell'ottica adattiva in astronomia è quella di rimuovere le aberrazioni dal cammino ottico che separa un oggetto celeste dal sistema di imaging. Quando questo obiettivo viene raggiunto, la qualità dell'immagine è limitata solo dalla diffrazione. Ciò vuol dire che l'ampiezza angolare di una sorgente puntiforme dipende solo dalla dimensione del telescopio e dalla lunghezza d'onda della luce come λ/D . Un telescopio di diametro maggiore non solo aumenta il quantitativo di luce catturata, ma riduce anche il diametro di una sorgente non risolta. Insieme questi due fattori fanno sì che l'intensità del picco vada come la quarta potenza del diametro del telescopio, mentre la risoluzione angolare migliora con l'inverso del diametro del telescopio. L'intensità del picco inoltre aumenta anche rispetto al rumore di fondo, permettendo così di identificare sorgenti più deboli, e che non sarebbe stato possibile osservare altrimenti.

Proprio queste considerazioni hanno spinto la tecnologia ottica verso la costruzione di telescopi di diametro sempre maggiore, andando così incontro ad un nuovo inconveniente: la turbolenza atmosferica. Infatti la radiazione di una sorgente celeste viaggia quasi imperturbata per milioni di anni e, solo negli ultimi istanti del suo lungo viaggio, passa attraverso l'atmosfera terrestre prima di essere raccolta dal telescopio. L'atmosfera terrestre limita di molto la risoluzione di un telescopio, nonostante il suo indice di rifrazione sia prossimo all'unità. Infatti non è l'atmosfera terrestre in sé a limitare la risoluzione del telescopio, ma la sua turbolenza, ovvero le variazioni sia temporali sia spaziali del suo indice di rifrazione, che portano ad aberrazioni la cui intensità varia sia nello spazio che nel tempo.[27]

Se non corretta, l'immagine di una stella è diffusa in un disco di "*seeing*", grande dalle dieci fino alle cento volte il disco di diffrazione. Ciò non solo riduce la risoluzione angolare, ma limita anche l'intensità di picco di ciascuna sorgente. Già da tempo, le performance dei telescopi hanno raggiunto il limite imposto dalla turbolenza atmosferica. Ciò vuol dire che per aperture più grandi della lunghezza di coerenza (r_0), generalmente compresa tra $0.1m$ ed $1m$, la risoluzione angolare è limitata a λ/r_0 e l'intensità del picco dell'immagine aumenta solamente con il quadrato dell'apertura del telescopio.

Un sistema di ottica adattiva è in grado di misurare queste aberrazioni e di compensarle in tempo reale, riportando così la qualità dell'immagine al limite di diffrazione del telescopio. L'ottica adattiva è capace di migliorare le performance di quasi ogni strumento ottico presente in astronomia, inclusi spettrografi e interferometri come anche sistemi di imaging.

Essa non è limitata solamente alla compensazione della turbolenza atmosferica, sebbene questo sia di solito il problema più importante da correggere. Un controllo adattivo

può essere usato anche al fine di correggere errori della forma dello specchio primario, dovuti a piccole variazioni di temperatura e della direzione del vettore gravità. Queste si verificano su tempi scala che sono molto più lunghi di quelli che interessano la turbolenza atmosferica.

Per questo motivo è prassi compensare i disturbi dovuti alle variazioni di temperatura e della gravità, usando un sistema di controllo separato conosciuto come "*ottica attiva*". Così mentre l'ottica attiva si preoccupa della forma del primario, il sistema di ottica adattiva lavora alla frequenza temporale necessaria per compensare la turbolenza atmosferica, tipicamente centinaia di Hertz.

I sistemi di AO sono composti tipicamente da: un elemento ottico deformabile, che permette di correggere il fronte d'onda perturbato, un sensore in grado di misurare le aberrazioni del fronte d'onda, ed un computer di controllo che permette di comandare l'elemento deformabile sulla base della misura fatta dal sensore di fronte d'onda.

L'ottica adattiva trova applicazioni anche nei telescopi spaziali, dove è necessario un controllo della deformazione delle superfici ottiche e delle strutture a causa di variazioni termiche e cambi di assetto del telescopio stesso. Questa tecnica inoltre permette di tenere sotto controllo il moto dell'immagine causato dalla vibrazione (jitter) del veicolo spaziale che supporta questi telescopi.[28],[18]

Ottica adattiva in microscopia

Le proprietà di imaging di un microscopio soffrono anch'esse per la presenza di aberrazioni. Queste aberrazioni sono dovute a due cause principali: le imperfezioni delle ottiche del microscopio e la distribuzione non omogenea dell'indice di rifrazione nel campione sotto esame.

In generale, per garantire una qualità dell'immagine ottimale, i sistemi ottici sono progettati in modo tale che l'aberrazione complessiva sia al di sotto di una tolleranza accettabile. Tuttavia, se il sistema viene utilizzato al di fuori delle sue specifiche di progettazione, come ad esempio quando l'indice di rifrazione del campione differisce significativamente da quello del mezzo in cui si trova immerso, allora le aberrazioni possono essere importanti e portare ad una drastica riduzione della risoluzione. Il problema è esacerbato quando si vogliono esaminare i tessuti in profondità. Infatti nel tentativo di studiare il campione sempre più in profondità, si va incontro ad aberrazioni non solo di ampiezza maggiore ma anche più complesse, cioè con maggiore frequenza spaziale. Oltre che sulla risoluzione queste aberrazioni influiscono anche sul contrasto delle immagini, limitando in definitiva anche la profondità a cui è possibile studiare il campione. La correzione di queste aberrazioni è cruciale per assicurare le performance migliori.[12][17]

In ottica adattiva, un elemento adattivo, come uno specchio deformabile, compie il lavoro di introdurre un'ulteriore deformazione del fronte d'onda adatta a cancellare quella già presente nel sistema, secondo il principio della coniugazione di fase. Mentre i sistemi di ottica adattiva tradizionali, come quelli sviluppati per l'astronomia, fanno uso di un sensore di fronte d'onda per misurare le aberrazioni, le tecniche di ottica adattiva sviluppate per la microscopia tipicamente non fanno uso di un sensore di fronte d'onda, ma si basano sulla tecnica dell'image sharpening, ovvero della massimizzazione della nitidezza dell'immagine.

La motivazione è che, per molte applicazioni della microscopia, non è semplice compiere la misura diretta del fronte d'onda a causa della natura tridimensionale del campione. Al fine di un corretto funzionamento, il sensore infatti dovrebbe rilevare solo la luce emessa dalla regione focale, mentre spesso rileva tutta la luce emessa da una porzione tridimensionale del campione molto ampia. La maggior parte dei sensori di fronte d'onda non è provvista di alcun meccanismo in grado di discriminare tra la luce emessa dalla porzione a fuoco da quella sfuocata, rendendo quindi la misura del fronte d'onda ambigua, [11]. Per questa ragione, la maggior parte dei sistemi di ottica adattiva implementati in microscopia è di tipo sensorless. Si tratta di sistemi nei quali, invece di misurare e correggere il fronte d'onda, ci si concentra sulla ricerca della forma dell'elemento deformabile che massimizzi la qualità dell'immagine.

La prima applicazione riguardante la microscopia a fare uso dell'ottica adattiva è stata l'oftalmoscopia nel 1996, al fine di osservare la retina dell'occhio umano. Al giorno d'oggi anche altri ambiti della medicina dove la microscopia gioca un ruolo fondamentale, come le neuroscienze e l'embriologia sono interessati all'ottica adattiva.([32][26][6])

Pupil-segmentation

Nell'ultimo decennio è stata sviluppata una nuova tecnica di ottica adattiva, che è una via di mezzo tra la tecnica sensorless, largamente usata in microscopia, ed i sensori di fronte d'onda usati in astronomia.

Come dice il nome stesso, questa tecnica si basa sull'idea della segmentazione della pupilla. Il fronte d'onda aberrato che raggiunge l'intera apertura, è suddiviso in aperture più piccole. Su ciascuna sottoapertura il fronte d'onda è così simile ad un fronte d'onda piano, di inclinazione diversa per ognuna. Dato che ad una variazione di tilt del fronte d'onda segue il corrispettivo moto dell'immagine, dalla misura di quest'ultimo è possibile risalire al gradiente medio del fronte d'onda nella sottoapertura scelta.[21]

L'idea alla base di questa tecnica è proprio questa, è possibile convertire il sensore per imaging in un sensore di fronte d'onda, avendo l'accortezza di posizionare uno stop proprio sull'apertura del sistema per selezionare di volta in volta una sottoapertura

differente. Dal moto delle singole immagini per ogni sottoapertura, segue la ricostruzione del fronte d'onda. Infine accoppiando questo sistema con una lente deformabile, si ottiene un sistema completo di ottica adattiva.[34]

Analogamente ai sistemi sensorless, questa tecnica non ha bisogno di un sensore aggiuntivo per la misura del fronte d'onda; ma al tempo stesso permette di misurare il fronte d'onda, in modo del tutto analogo ai sensori in uso in ambito astronomico.

Dal momento che il medesimo rivelatore è utilizzato alternativamente sia per l'imaging sia come sensore di fronte d'onda, questo sistema è destinato a lavorare ad una frequenza sempre inferiore rispetto ad un sistema in cui queste due mansioni sono assegnate a due elementi diversi.

Nonostante ciò, questa tecnica presenta due vantaggi importanti; il primo è che il sistema risulta molto più compatto e necessita di meno strumentazione, il secondo, che è in grado di determinare il fronte d'onda di un'intero campo di vista, quello delimitato dal sensore stesso, diversamente da un comune sensore Shack-Hartmann, che invece determina il fronte d'onda relativo ad un'unica sorgente puntiforme.

Un'altra peculiarità è quella di spostare la complessità di un sistema di ottica adattiva dal lato hardware al lato software.

Attualmente la tecnica della pupil-segmentation è realizzata inserendo nel setup ottico un dispositivo a cristalli liquidi (LCOS), liquid crystal on silicon, a volte nominati anche modulatori di luce spaziale (SLM). Questi dispositivi sono costituiti da uno strato di cristalli liquidi poggiati su una superficie di silicio. La caratteristica fondamentale dei cristalli liquidi è la loro proprietà di birifrangenza che permette di variarne l'indice di rifrazione sottoponendoli ad un potenziale elettrico, rendendo così possibile deformare il fronte d'onda. Inoltre, modulando opportunamente i cristalli liquidi, è anche possibile utilizzarli come modulatori di intensità, ad esempio creando un reticolo di diffrazione che defletta la luce fuori dal percorso ottico. Pertanto, il modulatore a cristalli liquidi va associato ad un field stop per bloccare gli ordini diffratti e si perde la possibilità di integrare tutto in un solo dispositivo.

Lo scopo della tesi è riuscire ad applicare la tecnica della pupil-segmentation usando un approccio differente. Invece di selezionare le sottoaperture variando l'indice di rifrazione dei cristalli liquidi, si vuole ottenere lo stesso risultato con uno stop d'apertura mobile (ruota forata) montato davanti ad una lente deformabile. La motivazione è che usando un dispositivo come LSM, si è costretti a lavorare in riflessione, con luce polarizzata e ad una frequenza massima di circa 50 Hz. Invece usando uno stop d'apertura mobile ed una lente deformabile, non è più necessario che la radiazione incidente sia polarizzata, inoltre il sistema lavorerebbe in trasmissione rendendo il setup molto più

semplice, come mostrato nella figura 1. La frequenza di lavoro di questo sistema non è più limitata dalle caratteristiche dei cristalli liquidi, ma solo dall'hardware che muove la maschera, quindi potenzialmente potrebbe lavorare anche ad una frequenza superiore. Certamente questo sistema è meno flessibile di uno analogo con un SLM, poichè nel nostro caso il campionamento dell'apertura è definito dalla maschera, mentre con un SLM il campionamento è modificabile elettronicamente. Tuttavia la nostra soluzione offre la possibilità di integrare la ruota nello stesso chassis della lente creando in questo modo un dispositivo unico che possa misurare e correggere il fronte d'onda.

Pupil-segmentation

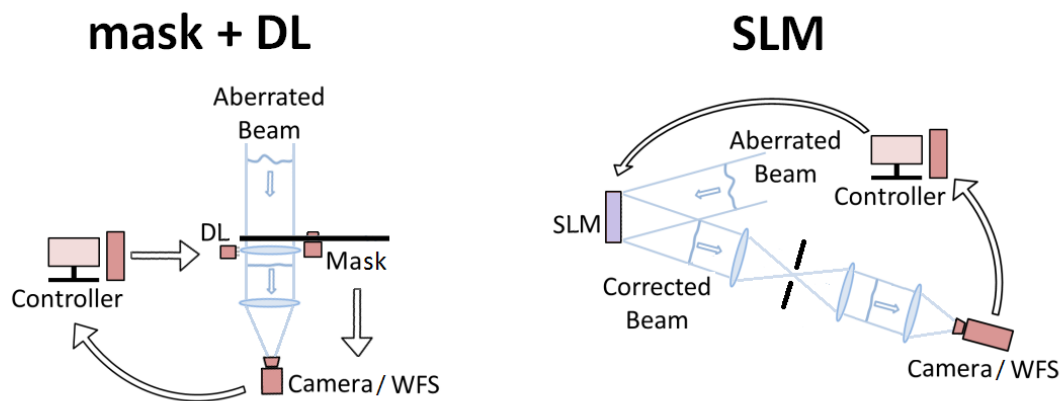


Figura 1: due sistemi diversi che applicano la stessa tecnica della pupil-segmentation: a sinistra usando una maschera ed una lente deformabile, a destra invece usando un SLM

Nei prossimi due capitoli vi è la descrizione di un classico sistema di ottica adattiva con una descrizione dei sensori più comunemente usati e la descrizione della tecnica di image sharpening. Il quarto capitolo descrive in dettaglio il codice sviluppato per la simulazione della pupil-segmentation, codice che è stato inserito all'interno di una GUI per applicare la tecnica della pupil-segmentation e controllare l'hardware coinvolto: videocamera, lente deformabile e stop di apertura. Infine nel quinto capitolo sono mostrati i risultati finali delle esperienze di laboratorio, seguito dal capitolo conclusivo.

I principi dell'ottica adattiva

Un sistema di ottica adattiva è composta da tre elementi principali, un sensore di fronte d'onda, un correttore di fronte d'onda ed un sistema di controllo. Questi tre componenti possono essere arrangiati in modo da lavorare in closed-loop (catena chiusa) oppure in open-loop (catena aperta).

Il **correttore di fronte d'onda** ha il compito di deformare il fronte d'onda in arrivo, al fine di introdurre un'aberrazione che sia il più simile possibile a quella del fronte d'onda stesso, ma cambiata di segno, in modo da cancellare le aberrazioni secondo il principio della coniugazione di fase.

Il **sensore di fronte d'onda**, come il nome stesso suggerisce, ha il compito di misurare la forma del fronte d'onda da correggere. Esistono di diverse tipologie di sensori di fronte d'onda che si possono classificare in sensori di fronte d'onda diretti, ovvero che misurano direttamente la fase dell'onda, ed in sensori di fronte d'onda indiretti, per i quali è necessario ricostruire il fronte d'onda a partire dalle misurazioni del sensore.

Il **sistema di controllo** è il vero cervello del sistema di ottica adattiva, il suo ruolo è quello di comandare il correttore a partire dalle misurazioni del sensore. Nel caso di sensori di fronti d'onda indiretti, spetta a lui il compito di ricostruire il fronte d'onda.[31]

1.1 Sistemi Open-loop e Closed-loop

Esistono due configurazioni differenti in cui un sistema di ottica adattiva può lavorare, in Open-loop (catena aperta) oppure in Closed-loop (catena chiusa). Quando in Open-loop, il sistema misura l'aberrazione del fronte d'onda e successivamente invia allo strumento di correzione gli input necessari a compensarla. Tutto questo avviene in assenza di un sistema di feedback in grado di valutare la buona riuscita della corre-

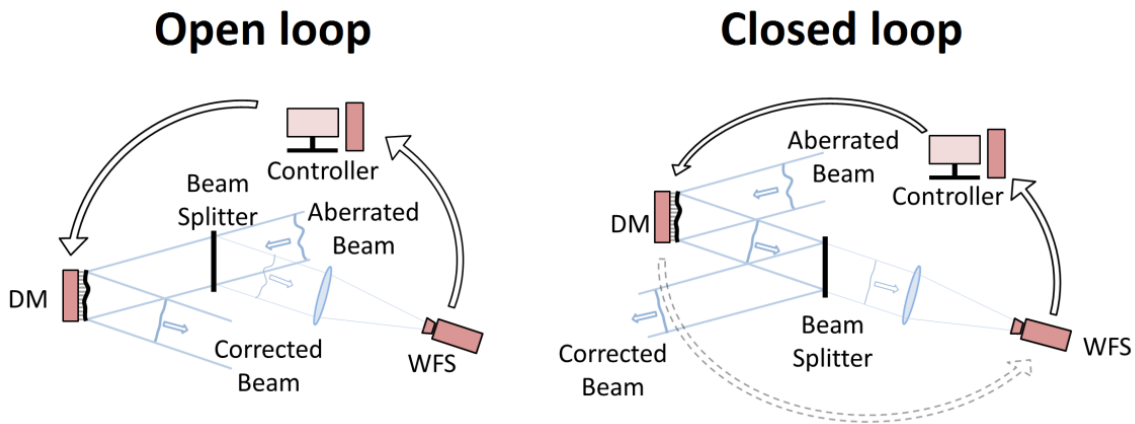


Figura 1.1: schema AO open-loop a sinistra e closed-loop a destra

zione. Per questo motivo l'efficacia di un sistema correttivo che lavora a catena aperta dipende dall'accuratezza della misura del fronte d'onda, e dalla buona calibrazione sia del sensore di fronte d'onda sia del dispositivo correttore sull'intero range dinamico. Ogni errore nella risposta di questi componenti si traduce in un errore sul fronte d'onda nell'output ottico. Per questo motivo i sistemi Open-loop sono impiegati solo quando non è possibile lavorare nella configurazione Closed-loop.

La configurazione Closed-loop è invece la più usata. In questo caso, il primo componente del sistema ottico è il dispositivo correttore, che compensa l'aberrazione del fronte d'onda prima che questa venga misurata dal sensore. Il sensore di fronte d'onda quindi vede soltanto l'aberrazione residua del fronte d'onda, ovvero la differenza tra l'aberrazione del fronte d'onda in arrivo e quella applicata dal correttore. Questa differenza è usata in seguito per aggiornare i segnali di controllo che comandano il dispositivo correttore. Stavolta, al contrario della configurazione precedente, ad ogni ciclo di correzione si ha a disposizione un feedback, che permette di guidare lo specchio deformabile fino a minimizzare l'errore residuo sul fronte d'onda. Poichè il sensore di fronte d'onda è usato solo per misurare l'errore residuo del fronte d'onda, il suo range dinamico e linearità sono relativamente meno importanti, ma risulta critica la calibrazione dello zero. I requisiti di un sistema di ottica adattiva in closed-loop sono così meno stringenti rispetto ad un equivalente sistema in Open-loop.([31],[3])

1.2 Correttori di fronte d'onda

In caso di aberrazioni in un sistema ottico, la qualità dell'immagine è degradata da distorsioni che riguardano sia la fase che l'ampiezza del fronte d'onda. In generale tuttavia l'effetto delle fluttuazioni di fase è predominante, quindi i sistemi di ottica

adattiva sono disegnati appositamente proprio per compensare queste fluttuazioni. Per questo motivo i correttori sono, tecnicamente parlando, dei correttori di fase; il loro compito cioè è quello di introdurre una differenza di cammino ottico δ a cui corrisponde una differenza di fase ϕ :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$

Dove la differenza di cammino ottico può essere espressa così:

$$\delta = \Delta(n \cdot d)$$

dove n rappresenta l'indice di rifrazione, e d il cammino geometrico.

Volendo introdurre una differenza di cammino ottico è quindi possibile intervenire su uno o entrambi questi fattori. La differenza di cammino geometrica Δd può essere introdotta per esempio deformando la superficie di uno specchio, oppure lo spessore di una lente deformabile, mentre per introdurre variazioni nell'indice di rifrazione Δn , si fa ricorso ad esempio a materiali elettro-ottici birifrangenti come i cosiddetti "*spatial light modulators*" (SLM).

Per quanto riguarda gli specchi deformabili, ne esistono di diverso tipo: segmentati, monolitici, bimorfi ed a membrana. Gli specchi segmentati sono chiamati così proprio perchè la loro superficie è suddivisa in tanti segmenti elementari. Ogni segmento è caratterizzato dal proprio quantitativo di piston, di tip e di tilt, indipendentemente da tutti gli altri. Al contrario gli specchi monolitici presentano un'unica sottile superficie riflettente, che viene deformata tramite degli attuatori tipicamente sul bordo e/o sul retro di questa.

Gli specchi bimorfi sono più complessi dei precedenti, infatti questi sono costituiti da due wafer ceramici piezoelettrici, collegati insieme e polarizzati parallelamente al loro asse ma nel verso opposto. L'applicazione di un potenziale elettrico, tramite elettrodi posti sulle superfici dei wafer, fa localmente comprimere uno dei due wafer ed espandere l'altro. Il risultato è una variazione locale della curvatura dello specchio. Un'altra tipologia di specchi sono quelli a membrana. Come dice il nome stesso, questi sono costituiti da una membrana riflettente tesa all'interno di un anello. Sotto la membrana si trovano dei pad conduttivi che permettono l'applicazione di un voltaggio a cui corrisponde una forza elettrostatica sulla membrana, tale da deformarla.

Gli specchi segmentati hanno la caratteristica che i vari elementi sono disaccoppiati, se da un lato ciò ne semplifica l'algoritmo di controllo dall'altro fa sì che la superficie complessiva dello specchio sia discontinua, amplificando il cosiddetto *fitting error*. Inoltre questi specchi presentano anche l'inconveniente di introdurre l'effetto di diffrazione legato ai gap che separano ciascun elemento dagli altri.

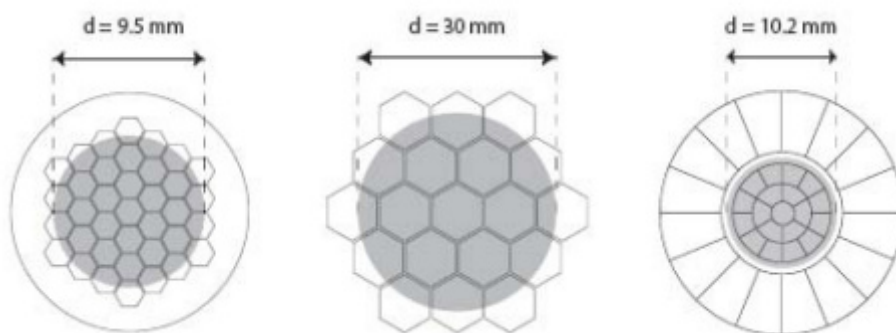


Figura 1.2: disposizione degli attuatori per tre specchi deformabili diversi, l'area grigia rappresenta la pupilla ottica.

Per gli specchi a superficie continua, come i monolitici e i bimorfi, vale l'opposto. Infatti essendo la superficie continua, l'effetto di diffrazione è completamente eliminato dato che la superficie non presenta discontinuità. Al tempo stesso però la superficie continua impone un certo grado d'influenza tra i vari attuatori dello specchio, chiamato *cross talk*, fatto che complica l'algoritmo di controllo, dato che ogni punto della superficie è influenzato in modo più o meno marcato da tutti gli attuatori dello specchio.

Anche gli specchi a membrana sono costituiti da una superficie continua, ma a differenza dei precedenti non vi è l'uso di attuatori piezoelettrici, ma è semplicemente la differenza di voltaggio presente tra i pad conduttivi e la membrana a modificarne la forma. Per questo motivo non soffrono di isteresi.

Date le loro caratteristiche di brevi tempi di risposta, differenze di cammino ottico non dipendenti dalla lunghezza d'onda, e riflettività altamente uniforme ed indipendente dalla polarizzazione della radiazione incidente, in astronomia si usano prevalentemente specchi deformabili.

1.3 Modale o Zonale?

Ci sono due modi di descrivere una quantità casuale come l'errore sul fronte d'onda su un'intera apertura bidimensionale: zonale e modale. Nell'approccio zonale, l'apertura è suddivisa in una matrice di subaperture indipendenti o zone. In ciascuna di queste zone, il fronte d'onda è descritto in termini del suo cammino ottico (piston), suo gradiente locale (tilt), oppure la sua curvatura locale. La maggior parte dei sensori e correttori usati in ottica adattiva lavorano in modo zonale, sebbene algoritmi modali possano essere usati per calcolare i segnali che guidano il dispositivo correttore.

L'analisi modale tratta invece le distorsioni del fronte d'onda come somma di funzio-

ni definite su tutta l'apertura e di complessità crescente. In ottica, in particolare, le funzioni modali maggiormente usate quando si ha a che fare con un'apertura circolare sono i polinomi di Zernike. I primi termini di Zernike corrispondono alle aberrazioni ottiche, come il tilt, il defocus, l'astigmatismo, e la coma ([22]).

In principio, un fronte d'onda degradato può essere compensato completamente sia usando l'approccio zonale che quello modale. In pratica però ci sono delle differenze significative tra questi due approcci. La prima differenza è che un sistema zonale può essere facilmente espanso fino ad una risoluzione spaziale arbitrariamente alta, semplicemente aumentando il numero di sottoaperture. Mentre per quanto riguarda l'approccio modale, i primi polinomi di Zernike rappresentano correzioni ottiche che possono essere implementate facilmente, come il tilt ed il defocus, invece i termini al di sopra Z_8 (coma) diventano di complessità crescente, diventando così non solo sempre più difficili da misurare ma anche più difficili da correggere direttamente.

Le aberrazioni di basso ordine possono essere generalmente implementate in maniera più smooth usando correttori modali piuttosto che correttori zonali, dato che quest'ultimi presentano delle piccole irregolarità dovute alla separazione tra le singole zone. Per esempio, una piccola quantità di defocus può essere compensata modificando il raggio di curvatura di uno specchio sferico con l'utilizzo di un unico attuatore. Uno specchio deformabile zonale, dal canto suo, richiede più di sei attuatori per produrre una forma che approssimi il defocus.

L'applicazione più importante dell'analisi modale la si trova nel data processing. Per ragioni pratiche i sensori di fronte d'onda ed i dispositivi correttori sono in generale costruiti usando una configurazione zonale, ma i dati zonali possono essere comunque convertiti in forma modale. L'uso dell'analisi modale permette di massimizzare le performance dell'ottica adattiva utilizzando filtri sia nel dominio temporale che spaziale.([25],[7],[8])

1.3.1 Rappresentazione modale: polinomi di Zernike

La rappresentazione modale consiste nel rappresentare un segnale come somma di funzioni ortonormali (modi) di ordine crescente. La serie di Fourier di onde armoniche sinusoidali che è usata per l'analisi della forma di un'onda unidimensionale è un esempio di questo approccio. Nei sistemi ottici, i polinomi bidimensionali di Zernike, mostrati nella figura 1.3, hanno un ruolo simile, permettendo di decomporre un fronte d'onda complesso in una base di funzioni di ordine crescente. I polinomi di Zernike di ordine inferiore corrispondono alle aberrazioni ottiche comunemente descritte come: Tilt, Defocus, Astigmatismo e Coma.

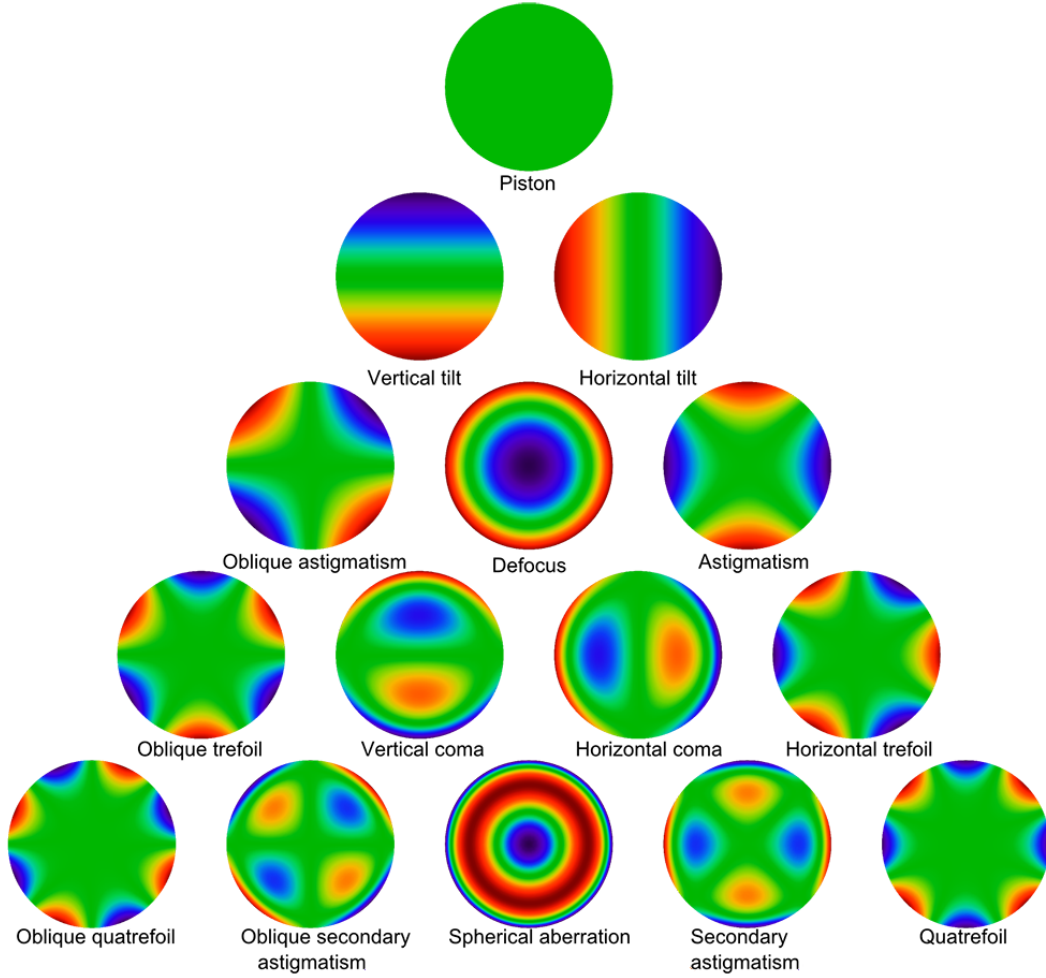


Figura 1.3: grafici dei polinomi di Zernike fino al quinto ordine

I polinomi di Zernike sono definiti in coordinate polari su una circonferenza di raggio unitario come funzioni di frequenza azimutale m e grado radiale n , dove $m < n$ e $n - m$ è pari. A ciascun polinomio è associato anche un altro indice j univoco, in modo che questi possano essere ordinati in modo tale che quelli simmetrici ($\cos(m\theta)$) abbiano valori di j pari, mentre quelli antisimmetrici ($\sin(m\theta)$) abbiano l'indice dispari. I polinomi di Zernike sono così definiti ([37], [19]):

$$Z_n^m(r, \alpha) = \sqrt{n+1} R_n^m \begin{cases} \sqrt{2} \sin(m\theta) & \text{se } m < 0 \\ 1 & \text{se } m = 0 \\ \sqrt{2} \cos(m\theta) & \text{se } m > 0 \end{cases}$$

Dove R_n^m , termine necessario per rendere i polinomi ortogonali tra loro su un'area circolare, include il termine radiale dei polinomi di Zernike e dipende solo dall'ordine

radiale n e da quello azimutale m :

$$R_n^m = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s![(n+m)/2-s]![(n-m)/2-s]!} r^{n-2s}$$

Una qualsiasi funzione di fase arbitraria $\Phi(r, \theta)$, definita su un'apertura circolare, può essere espressa come combinazione lineare di polinomi di Zernike:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_0^{\inf} a_j Z_j(r, \theta)$$

dove l'ampiezza a_j di ciascun polinomio di Zernike è ricavata come segue:

$$a_j = \int \Phi(r, \theta) Z_j(r, \theta) d^2r$$

i	n	m	Z_n^m	aberrazione
0	0	0	1	Piston
1	1	-1	$2\rho \sin(\theta)$	Tilt Y
2	1	1	$2\rho \cos(\theta)$	Tilt X
3	2	-2	$\sqrt{6}\rho^2 \sin(2\theta)$	Astigmatismo Y
4	2	0	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	Defocus
5	2	2	$\sqrt{6}\rho^2 \cos(2\theta)$	Astigmatismo X
6	3	-3	$\sqrt{8}\rho^3 \sin(3\theta)$	Trifoglio Y
7	3	-1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin(\theta)$	Coma Y
8	3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos(\theta)$	Coma X
9	3	3	$\sqrt{8}\rho^3 \cos(3\theta)$	Trifoglio X
10	4	-4	$\sqrt{10}\rho^4 \sin(4\theta)$	Quadrifoglio Y
11	4	-2	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin(2\theta)$	Astigmatismo Secondario Y
12	4	0	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	Sferica
13	4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos(2\theta)$	Astigmatismo Secondario X
14	4	4	$\sqrt{10}\rho^4 \cos(4\theta)$	Quadrifoglio X

Tabella 1.1: I primi 15 polinomi di Zernike

1.4 Wavefront Sensors

Sebbene in principio, in un sistema di ottica adattiva, si vorrebbe misurare direttamente la fase del fronte d'onda, questo in pratica non è possibile, siccome al giorno d'oggi non esistono sensori in grado di rispondere alle elevatissime frequenze temporali tipiche della radiazione visibile. I sensori disponibili sono in grado di misurare soltanto l'intensità della radiazione incidente, ed è quindi necessario ricostruire la fase del fronte d'onda in modo indiretto.

Le tecniche più popolari in uso in ottica adattiva per la misura del fronte d'onda si basano sui concetti dell'interferometria e dell'ottica geometrica. Le tecniche della prima classe sfruttano il principio di sovrapposizione per dare origine a frange d'interferenza, ed ottenere così la differenza di fase tra due fasci diversi. Diversamente, le tecniche della seconda classe sfruttano la proprietà della radiazione di propagarsi in direzione perpendicolare al fronte d'onda. [20]

1.4.1 Wavefront slope sensors

Uno dei modi per misurare il fronte d'onda, è partire dal gradiente locale o pendenza media in ciascuna sottoapertura. In questo processo, la fase relativa o componente di "piston" di ciascuna subapertura è persa; e viene ricavata dal processo noto con il nome di *ricostruzione del fronte d'onda*. Nei ricostruttori più semplici, le componenti di piston sono recuperate da un'integrazione bidimensionale, nella quale tutti i gradienti sono fittati insieme fino a dare una superficie con le minime discontinuità su ogni sottoapertura. Dal punto di vista matematico ciò corrisponde alla minimizzazione dello scarto quadratico medio tra tutte le sottoaperture. Esistono anche algoritmi più elaborati che permettono di ricostruire il fronte d'onda pesando ciascun gradiente per il suo rapporto segnale-rumore.

La ricostruzione del fronte d'onda è molto importante. Infatti se la pendenza del fronte d'onda in ciascuna sottoapertura fosse corretta senza considerare la fase relativa, il risultato sarebbe una sovrapposizione incoerente delle immagini formate da ciascuna zona.

Correggendo anche la fase di ciascuna zona, le immagini di ciascuna sottoapertura si sommano coerentemente, migliorando considerevolmente la risoluzione angolare. Per questo motivo un dispositivo correttore in grado di correggere solo il piston su ciascuna sottoapertura riesce a compensare meglio di un dispositivo che al contrario corregga solo il tilt.

La misura dei gradienti è quindi solo un primo step del processo della misura del fronte d'onda, a cui deve seguire una fase di ricostruzione di pari importanza.

L'output del ricostruttore è una mappa del fronte d'onda originale, campionato ad intervalli uguali alla dimensione delle subaperture. Variazioni del fronte d'onda su scale più piccole rispetto alla dimensione delle sottoaperture (o corrispondentemente che hanno una frequenza spaziale maggiore della frequenza di campionamento) sono perse in questo processo, e infatti il sensore agisce così come un filtro spaziale passa-basso. Ovviamente, a più piccole subaperture corrisponde una misura più accurata del fronte d'onda. L'errore relativo alla misura della pendenza del fronte d'onda è conosciuto come *fitting error*, ed è sempre presente nei sistemi di ottica adattiva.[14]

Il sensore a Quattro quadranti Il sensore a quattro quadranti (Quad-Cell) è chiamato così proprio per la modalità di misura del fronte d'onda. Questo infatti non è altro che un sensore posto nel piano focale del sistema ottico in grado di misurare l'intensità di luce raccolta da ciascuno dei quattro quadranti in cui è suddiviso (A, B, C e D). L'informazione misurata nei quattro quadranti permette non solo di ricavare la posizione sul sensore del baricentro dello spot ($\vec{\Delta S}$), ma anche di legare quest'ultima al gradiente medio del fronte d'onda su tutta l'apertura ($\nabla \vec{W}$).

$$\nabla \vec{W} = \frac{\vec{\Delta S}}{F}$$

Ciò permette di correggere il Tip e Tilt del fronte d'onda, ovvero il moto dell'immagine. Per la precisione, i quattro valori d'intensità misurati permettono di ricavare i valori di due segnali S_x ed S_y :

$$S_x = \frac{B + D - (A + C)}{A + B + C + D} \quad S_y = \frac{A + B - (C + D)}{A + B + C + D}$$

valori che sono collegati alle coordinate x ed y del baricentro.

La funzione S_x (S_y) è lineare finché lo spot si trova parzialmente sia nella parte destra (sopra) sia nella parte sinistra (sotto) del sensore, assumendo tutti i valori compresi nell'intervallo $[-1, 1]$. Quando lo spot si trova completamente in uno dei due lati del sensore, allora la funzione satura ed assume il valore costante ± 1 , dove il segno dipende da quale lato del sensore è occupato dallo spot.

L'estensione della parte lineare è pari al diametro dello spot. Ciò implica che uno spot di dimensioni inferiori rende il sensore più sensibile. Infatti se lo spot è più piccolo, le funzioni S_x ed S_y sono più ripide nel loro regime lineare, con il risultato che è sufficiente uno spostamento inferiore dello spot per ottenere un segnale rilevabile. Naturalmente le dimensioni dello spot non possono essere inferiori alla figura di diffrazione del sistema ottico, ciò comporta un limite massimo di sensibilità dello strumento.

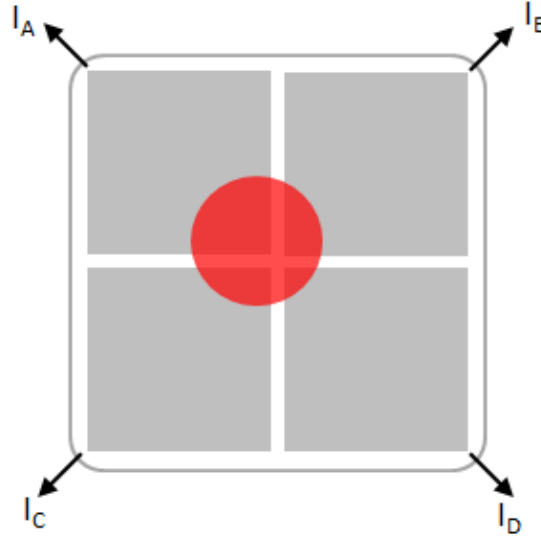


Figura 1.4: sensore quattro quadranti

Il sensore Shack-Hartmann Il sensore Shack-Hartmann è costituito da un array di microlenti posto davanti a un array bidimensionale di pixel fotosensibili. Il numero di microlenti varia da qualche decina fino a poche centinaia a seconda dell'applicazione considerata. Tutte le microlenti hanno la stessa focale e lo stesso diametro, e sono disposte a griglia. Una tipica microlente presenta un diametro compreso tra $100\mu\text{m}$ e $600\mu\text{m}$, ed una lunghezza focale che va da pochi millimetri fino a 30mm.

L'array di microlenti è situato sul piano coniugato al piano della pupilla, così da campionarla spazialmente. Sul piano focale dell'array di microlenti si genera una matrice di spot, ognuno dei quali presenta uno spostamento $\Delta\bar{S}$ rispetto all'asse ottico della rispettiva microlente. La misura di questo spostamento è legata linearmente al gradiente medio del fronte d'onda $\nabla\bar{W}$ nella corrispondente porzione della pupilla, come mostrato nella seguente equazione:

$$\Delta\bar{S} = F\nabla\bar{W}$$

Uno dei maggiori svantaggi dello Shack-Hartmann è il relativamente piccolo range dinamico ($\nabla\bar{W}_{max}$), limitato dallo spostamento massimo ($\Delta\bar{S}_{max}$) concesso ad ogni spot affinché non ci sia sovrapposizione, ossia pari alla dimensione delle microlenti:

$$\Delta\bar{S}_{max} = F\nabla\bar{W}_{max}$$

Come mostrato nell'equazione il range dinamico è sensibile sia alla dimensione delle microlenti che alla loro focale. Comunque non è possibile variare questi due parametri a piacimento, dato che la dimensione delle microlenti determina il campionamento

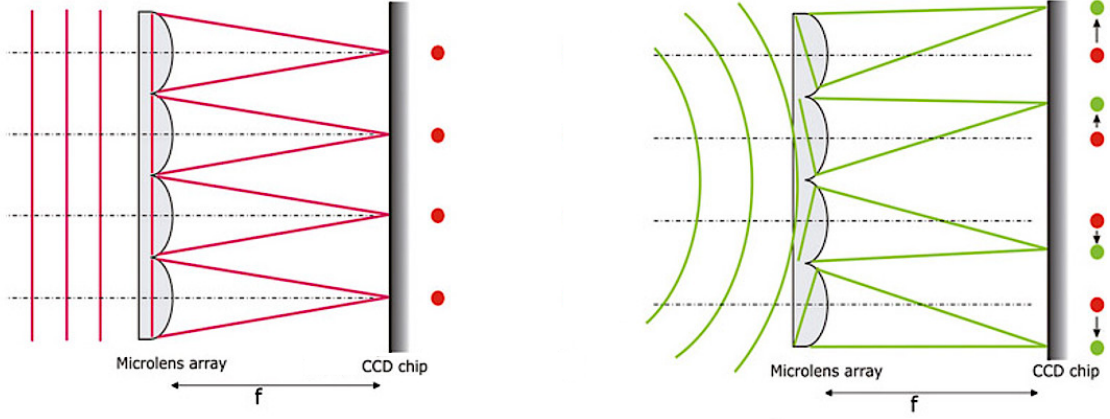


Figura 1.5: sensore Shack-Hartmann

della pupilla, mentre la focale influenza il valor minimo del gradiente del fronte d'onda ($\nabla \bar{W}_{min}$) che è possibile misurare, ossia la sensibilità dello strumento:

$$\nabla \bar{W}_{min} = \Delta \bar{S}_{min} / F$$

Ove $\Delta \bar{S}_{min}$ indica lo spostamento minimo dello spot che si è in grado di misurare, e che in genere è dato dalla dimensione dei pixel del CCD.

Per misurare la posizione dello spot con sufficiente precisione, è necessario che ad ogni sotto-apertura corrisponda almeno una griglia di pixel 4×4 . All'aumento del numero dei pixel segue anche un aumento del rumore di lettura, rumore che può sovrastare il segnale nel caso di sorgenti molto deboli. Per questo motivo alcune configurazioni prevedono che ad ogni sotto-apertura corrisponda solo una griglia di pixel 2×2 . In questo caso ogni elemento lavora come un sensore a Quattro Quadranti dove le coordinate del baricentro sono dedotte dai rapporti d'intensità.[16]

Il sensore a piramide Il sensore di fronte d'onda a piramide è stato ideato da R. Ragazzoni nel 1996. Il componente principale del sensore è un prisma di forma piramidale a base quadrata posizionato in modo che il suo apice si trovi sul fuoco nominale del telescopio. L'elemento ottico successivo è una lente posizionata in modo da essere confocale con il telescopio; ed infine è presente un sensore (e.g. CCD), in grado di misurare l'intensità della radiazione elettromagnetica su ciascuno dei suoi pixel. Il sensore si trova alla distanza dalla lente dove si forma l'immagine della pupilla del telescopio, o in questo caso, delle quattro pupille.

Considerando una sorgente puntiforme, focalizzata sulla punta della piramide, lo spot della sorgente sul piano focale del telescopio è data dall'interferenza di tutti gli spot generati dalle singole porzioni della pupilla, ciascuno di essi è spostato rispetto alla punta della piramide di una quantità direttamente proporzionale al gradiente medio

del fronte d'onda su quella particolare regione della pupilla. Ne consegue che, a seconda del gradiente del fronte d'onda, ogni spot illuminerà le quattro facce della piramide in percentuale diversa. Per questo motivo le quattro immagini della pupilla presentano intensità diverse nei singoli pixel. Proprio da questo fatto che è possibile misurare il gradiente del fronte d'onda, e successivamente ricostruire il fronte d'onda del fascio incidente.

Questo sensore è più versatile di un sensore Shack-Hartmann. Lo dimostra il fatto che il campionamento della pupilla effettuato da quest'ultimo è legato alle dimensioni fisiche delle lentine; viceversa nel sensore a piramide dipende esclusivamente dalla dimensione dei pixel del sensore, parametro che può essere modificato elettronicamente. [29],[4]

Il sensore a Curvatura Il sensore di fronte d'onda a curvatura (CWFS) fu ideato da F. Roddier nel 1988. Il CWFS è chiamato così proprio perchè a differenza degli altri sensori di fronte d'onda più comuni non misura l'inclinazione, ma appunto la curvatura del fronte d'onda.

L'informazione sulla curvatura del fronte d'onda è ottenuta a partire da due immagini sfuocate della sorgente. Le due immagini sono prese su due piani posti alla stessa distanza dal piano focale del sistema, una intrafocale e l'altra extrafocale.

La curvatura del fronte d'onda è legata alla differenza tra le due immagini normalizzata:

$$\frac{I_i(r) - I_e(r)}{I_i(r) + I_e(r)} \propto \nabla^2 W$$

Dove $I_i(r)$ ed $I_e(r)$ indicano l'intensità nella posizione r sul piano intrafocale ed extrafocale, mentre $\nabla^2 W$ indica il laplaciano del fronte d'onda.

La relazione appena esposta è giustificata dal fatto che una curvatura positiva al fronte d'onda, porta questo a convergere su un piano posizionato prima del piano focale, di conseguenza l'immagine intrafocale risulta meno sfuocata e di intensità maggiore dell'immagine extrafocale. Vale il viceversa nel caso di una curvatura negativa del fronte d'onda.

Sono stati pensati setup diversi per la realizzazione di un CWFS. Uno prevede la presenza di un beamsplitter per separare il fronte d'onda di partenza, ed usare due CCD distinti per i due fasci, uno in posizione intrafocale e l'altro in posizione extrafocale. In un'altra configurazione si fa uso di uno specchio a membrana posizionato sul piano focale, a cui segue un array di microlenti ed un CCD. Quest'ultimo è posizionato sul piano coniugato alla pupilla del sistema. Il ruolo dello specchio a membrana è quello di alternare in modo continuo tra la forma concava e convessa, in modo da spostare il piano coniugato alla pupilla in avanti ed indietro, e così permettere al CCD di alternare

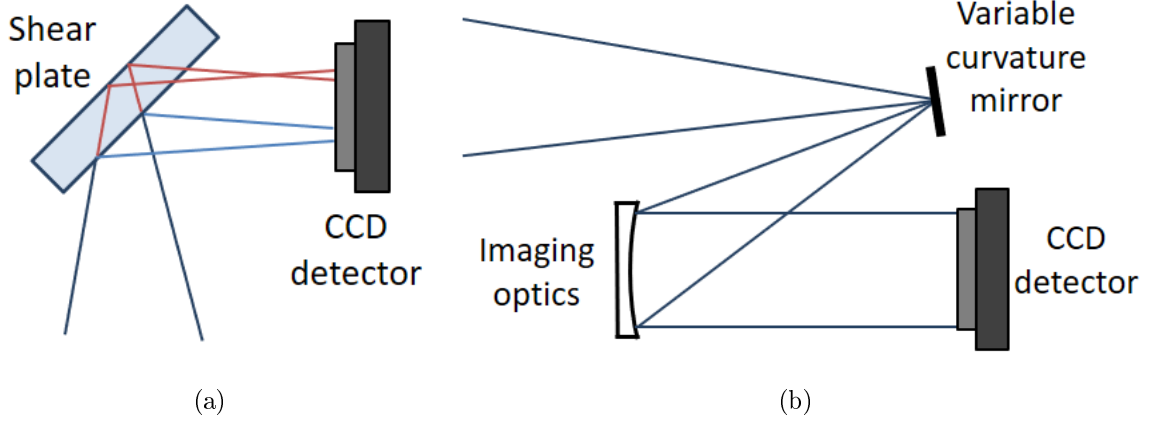


Figura 1.6: due design diversi di sensori a curvatura

tra l'immagine intrafocale ed extrafocale.

Un'altra configurazione prevede la presenza di uno shear plate inclinato di 45° , così da suddividere il fascio incidente in due, quello riflesso dalla prima superficie e quello riflesso dalla seconda. Questo metodo ha il vantaggio di essere più semplice e permettere di osservare contemporaneamente sia l'immagine intrafocale che quella extrafocale.

Lateral Shearing interferometry La lateral shearing interferometry, come dice il nome stesso, è una tecnica interferometrica. Questa, a differenza di altre, studia l'interferogramma dato dall'interferenza tra il fronte d'onda in arrivo ed una sua copia traslata di una quantità (s), detta *shear*; da cui il nome di lateral shearing interferometry.

Le frange d'interferenza che si osservano sono così una misura della differenza di fase tra due punti del medesimo fronte d'onda distanti proprio di una quantità pari ad s , lungo la direzione dello shear.

Nel piano immagine della pupilla, l'intensità risultante ha la seguente espressione:

$$I(r) = \frac{1}{2} |\exp[i\phi(r)] + \exp[i\phi(r+s)]|^2 \quad (1.1)$$

$$= 1 + \cos[\phi(r) - \phi(r+s)] \quad (1.2)$$

La formula appena scritta contiene una dipendenza implicita dalla lunghezza d'onda, dato che la fase e la lunghezza d'onda sono legate dalla seguente equazione:

$$\phi(r) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(r)$$

dove $\delta(r)$ indica la differenza di cammino ottico.

Se sia lo shear che la deformazione del WF sono piccoli, allora la differenza di fase può

essere espressa come una serie di Taylor:

$$\phi(r) - \phi(r + s) = s \frac{\partial \phi}{\partial x}(r) + \epsilon(s)$$

Dove $\epsilon(s)$ racchiude tutti i termini dell'espansione di ordine più alto, e che in prima approssimazione viene trascurato.

Ciò permette di determinare la pendenza del fronte d'onda solo in una direzione del piano, quella parallela allo shear. Per determinare completamente il WF, è necessario conoscere la pendenza del fronte d'onda anche in un'altra direzione, tipicamente ortogonale alla precedente. Per questo motivo il primo step riguarda la suddivisione del WF in due canali, e solo successivamente viene usata la shearing interferometry indipendentemente su ognuno di essi. In questo modo è possibile applicare lo shear in direzioni diverse, e così ottenere entrambe le componenti del gradiente del WF in ciascun punto della pupilla.

Accanto alla lateral shearing interferometry esistono altre varianti: la radial shearing interferometry, la rotational shearing interferometry e la reversal shearing interferometry. Nel primo caso una delle due copie del WF subisce un ingrandimento rispetto all'altra, nella *rotationally* invece è applicata una rotazione di un certo angolo sull'asse ottico del sistema; infine nella *reversal* uno dei due WF è capovolto. ([14],[20],[30])

Image Sharpening

L'ottica adattiva è stata applicata con successo per correggere le aberrazioni ottiche nell'imaging astronomico, microscopia, e laser ad alta potenza. Un sistema convenzionale di ottica adattiva impiega un sensore di fronte d'onda per misurare le aberrazioni del fascio, un elemento correttore per compensarle, ed un sistema di controllo necessario a collegare in tempo reale questi due elementi. Sebbene questo tipo di sistemi basati su un sensore di fronte d'onda si sia rivelato efficace in svariate applicazioni, ci sono alcune circostanze in cui la misura diretta della distorsione del fronte d'onda è difficile, come per esempio in microscopia multifotone ed in biologia.

L'*image sharpening* è la tecnica sviluppata per applicare l'ottica adattiva anche in quei contesti in cui, per l'appunto, la sua applicazione è risultata difficile. L'approccio di questa tecnica è molto diverso dai precedenti, tant'è che non richiede nemmeno la presenza di un sensore di fronte d'onda, infatti fa parte di una branca dell'ottica adattiva nominata: *wavefront sensorless AO*.

2.1 Nitidezza dell'immagine

Il concetto di correzione delle aberrazioni delle immagini in un sistema ottico, basato sulla metrica delle immagini, è stato proposto per la prima volta da Muller e Buffington nel 1974. Questa tecnica, a differenza di altre, non si preoccupa della ricostruzione del fronte d'onda in arrivo, ma si concentra sul calcolo di quanto l'immagine sia definita, per poi successivamente applicare una sequenza di correzioni, che portano a migliorarne la nitidezza; da qui il nome di image sharpening. In questo senso il suo funzionamento è simile a quello della vista umana: al riconoscimento di un'immagine sfuocata o poco definita segue un adattamento dell'occhio, che porta a ripristinarne la risoluzione.

Durante il processo di massimizzazione della nitidezza dell'immagine, una serie di correzioni di prova è applicata e ne viene registrato l'effetto sulla nitidezza. Infine un algoritmo di ricerca determina, a partire dalle correzioni di prova, la forma dell'elemento correttore che massimizza la nitidezza dell'immagine e di conseguenza minimizza le aberrazioni ([33],[35]).

Fondamentale per il buon funzionamento della tecnica, è quindi definire una metrica che sia in grado di stimare quanto sia definita l'immagine. Sono state date diverse definizioni della nitidezza (S) di un'immagine. Una di queste la definisce come l'integrale del quadrato dell'intensità ([10]):

$$S = \int I(x, y)^2 dx dy$$

Questa definizione è particolarmente adatta nel caso di sorgenti puntiformi, perchè la massimizzazione di questo parametro significa massimizzare l'energia raccolta da ogni singolo pixel del sensore.

Un'altra definizione è la seguente:

$$S = - \int I(x, y) \ln[I(x, y)] dx dy$$

questa, a differenza della precedente, è più adatta per immagini con un elevato range dinamico.

Una volta determinata la nitidezza di un'immagine, non resta che costruire un algoritmo in grado di sfruttare questa informazione e governare l'elemento deformabile al fine di migliorarla o di massimizzarla applicando un set di parametri ottimale. Nel caso di un elemento deformabile costituito da N attuatori, ognuno con un controllo ad 8bit, il numero di gradi di libertà è 255^N , troppo grande per un algoritmo di ricerca sistematico, cioè che provi ogni combinazione possibile. In generale quindi vengono usati algoritmi non sistematici: *gradient search*, *simplex*, *simulated annealing* e *algoritmi genetici*. [23]

2.2 Algoritmi di ricerca

In questo paragrafo verranno descritti alcuni algoritmi per la ricerca del massimo (o del minimo) di una funzione all'interno di un intervallo. Questo intervallo che coincide con il dominio della funzione da ottimizzare è detto spazio di ricerca, e potenzialmente può anche essere infinitamente grande. Per questo motivo gli algoritmi sviluppati non sono algoritmi sistematici, ovvero non valutano ogni combinazione possibile dello spazio di ricerca, ma piuttosto agiscono in modo metodico.

Saranno presentati il Gradient descent, il Simplex, il Simulated annealing e gli algoritmi Genetici.

2.2.1 Gradient descent

Gradient descent è un algoritmo iterativo di ottimizzazione al primo ordine per trovare il minimo di una funzione. Per trovare un minimo locale di una funzione usando la tecnica di discesa del gradiente, si compiono dei passi nello spazio di ricerca proporzionali al negativo del gradiente (o una sua approssimazione) della funzione al punto corrente. Se invece i passi sono proporzionali al gradiente, allora il risultato dell'algoritmo è il massimo locale della funzione; in tal caso si parla di *gradient ascent*. [24]

L'algoritmo di discesa del gradiente si basa sull'osservazione che una funzione a più variabili $F(\vec{x})$, differenziabile nell'intorno di un punto $\vec{a}$, decresce più velocemente quando ci si sposta dal punto $\vec{a}$ nella direzione negativa del gradiente:

$$\vec{a}_{n+1} = \vec{a}_n - \gamma \nabla F(\vec{a}_n)$$

per γ sufficientemente piccolo vale che $F(\vec{a}_n) \geq F(\vec{a}_{n+1})$. Quindi a partire da un punto iniziale $\vec{x}_0$ si ottiene una sequenza di punti $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ tale che:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \gamma \nabla F(\vec{x}_n), \quad n \geq 0$$

Quindi:

$$F(\vec{x}_0) \geq F(\vec{x}_1) \geq F(\vec{x}_2) \geq \dots$$

ove la sequenza (x_n) converge verso il minimo locale desiderato.

Notare che l'ampiezza del passo γ può anche cambiare ad ogni iterazione. Se $F(x)$ è una funzione convessa, allora il minimo locale coincide con il minimo globale. l'algoritmo Gradient descent può essere combinato con un algoritmo di ricerca lineare per ottimizzare l'ampiezza del passo ad ogni iterazione. Utilizzare un algoritmo di ricerca lineare richiede un tempo computazionale maggiore, tuttavia può portare ad una consistente diminuzione del tempo totale rispetto ad algoritmi in cui l'ampiezza del passo è fissata.

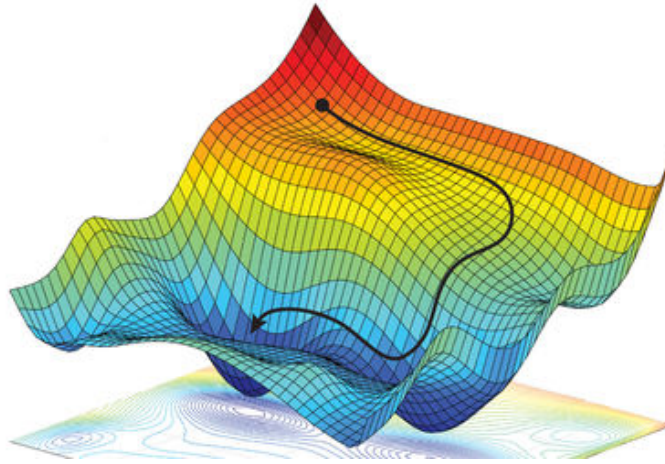


Figura 2.1: Gradient-descent

2.2.2 Simplex

Dal punto di vista geometrico, un simplex è una figura costituita da $n+1$ vertici, ove n è il numero di gradi di libertà del sistema. Per esempio in due dimensioni un simplex è un triangolo, in tre dimensioni è un tetraedro, e così via. Ogni vertice rappresenta una possibile soluzione. Inizialmente un numero di set di soluzioni pari ad $n+1$ è generato, valutandone il rispettivo valore della funzione da ottimizzare. Basandosi sui valori iniziali, il simplex tenta di adeguarsi alla superficie, con lo scopo di collassare sul vertice posizionato sul minimo globale della funzione. Ciò viene realizzato sostituendo continuamente il vertice peggiore del simplex, con uno nuovo ricavato usando le operazioni di riflessione, espansione e contrazione. Se nessuno di questi step è risultato utile, allora tutti i vertici sono contratti verso il punto migliore del simplex (vedi figura 2.2).

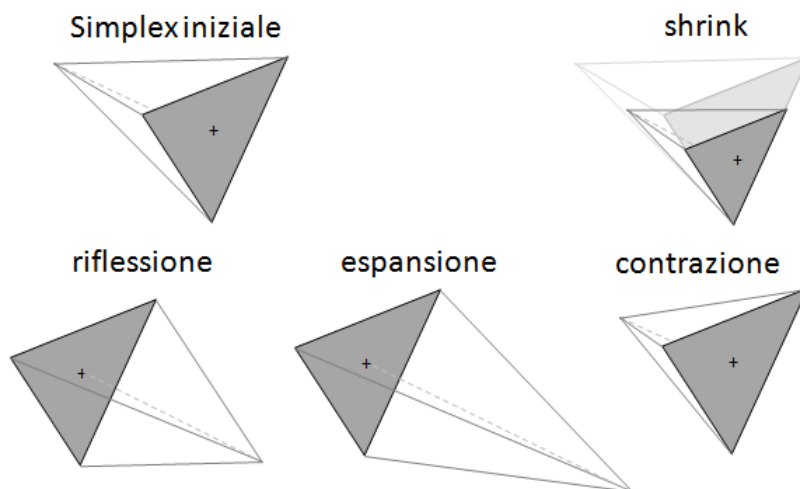


Figura 2.2: simplex in uno spazio a tre dimensioni e le relative operazioni

Il metodo è definito specificando il valore di quattro costanti: il coefficiente di riflessione (ρ), di espansione (χ), di contrazione (γ), e di shrinkage(σ). Questi parametri devono soddisfare le seguenti condizioni:

$$\rho > 1, \quad \chi > 1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 < \sigma < 1.$$

Le scelte più comuni sono:

$$\rho = 1, \quad \chi = 2, \quad \gamma = 0.5, \quad \sigma = 0.5$$

L'algoritmo può essere settato per fermarsi dopo aver raggiunto un dato numero di iterazioni, oppure al raggiungimento di un criterio di stop. Un tipico criterio di stop si basa sulla valutazione dello scarto quadratico medio del valore della funzione sui vertici del simplex. Se questo raggiunge un valore sufficientemente piccolo allora l'algoritmo si ferma.[24]

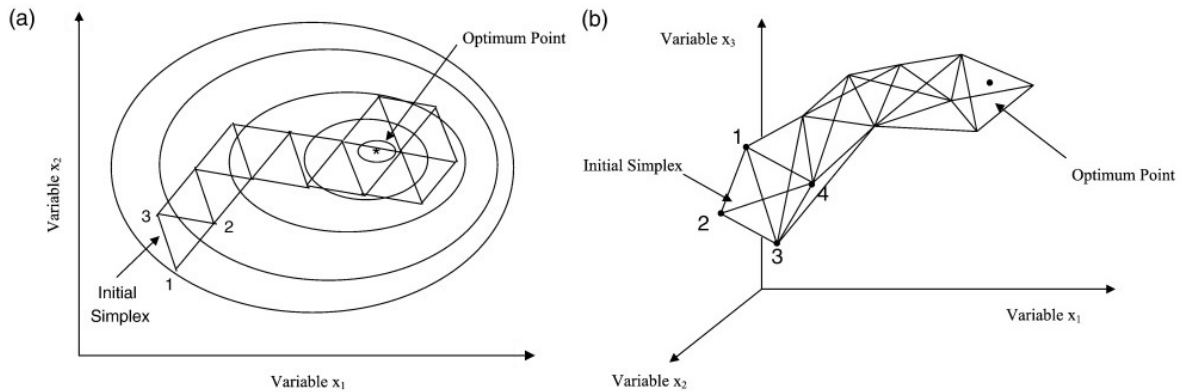


Figura 2.3: esempi di esecuzione di un algoritmo simplex: a) per una funzione di due variabili, b) per una funzione di tre variabili.

2.2.3 Simulated annealing

simulated annealing è una tecnica probabilistica per approssimare il massimo di una data funzione, quando lo spazio di ricerca è molto grande. Il nome e l'ispirazione vengono dalla procedura di tempra usata in metallurgia, tecnica basata sul riscaldamento ed il successivo raffreddamento controllato del materiale allo scopo modificarne la struttura cristallina per ottenere migliori proprietà meccaniche. La nozione di lento raffreddamento è implementata nell'algoritmo come una lenta diminuzione della probabilità di accettare soluzioni peggiori durante l'esplorazione dello spazio di ricerca.

In generale un algoritmo di simulated annealing funziona nel modo seguente. Ad ogni step, l'algoritmo seleziona una soluzione nell'intorno di quella corrente, e misura il valore della funzione nel punto prescelto per poi decidere se muoversi verso questo punto

oppure no. Se il nuovo punto è migliore del precedente, allora questo sarà certamente scelto dall'algoritmo; se invece è peggiore allora esiste solo una certa probabilità che l'algoritmo scelga quest'ultimo come il punto successivo. Con il proseguire della ricerca, la probabilità di scegliere punti peggiori scende progressivamente, fino a raggiungere lo zero. Da quel momento in poi solo le soluzioni migliori sono accettate (vedi figura 2.4).

La caratteristica dell'algoritmo di scegliere anche soluzioni peggiori ha il vantaggio di estendere l'area di ricerca, e conseguentemente ridurre la probabilità che l'algoritmo si fissi su un massimo (o un minimo) locale della funzione.

Questo algoritmo è particolarmente utile in quei contesti, in cui trovare un'approssimazione del massimo assoluto è decisamente più importante, che determinare con accuratezza un massimo locale della funzione.[15]

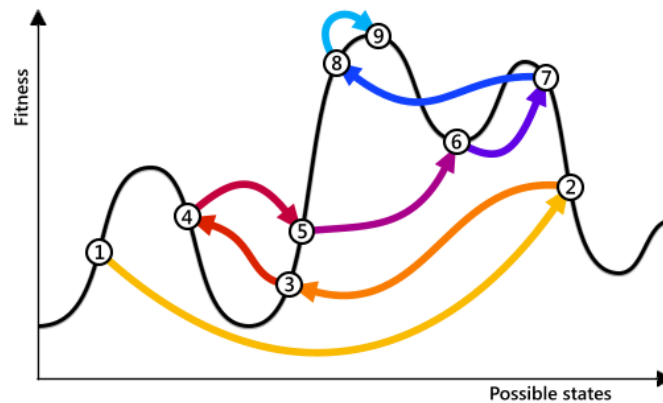


Figura 2.4: simulated annealing

2.2.4 Algoritmi genetici

Un algoritmo genetico è una metaeuristica ispirata dal processo della selezione naturale ed appartiene alla classe degli algoritmi evolutivi. Gli algoritmi genetici sono comunemente usati nella generazione di soluzioni di alta qualità per l'ottimizzazione di problemi di ricerca, affidandosi a tre operatori ispirati alla biologia: *mutazione*, *crossover*, e *selezione*.

In un algoritmo genetico, una popolazione di soluzioni candidate (chiamate in questo caso individui) ad un problema si evolvono verso soluzioni migliori. L'evoluzione di solito inizia da una popolazione di individui generati casualmente (1° generazione). L'esecuzione dell'algoritmo porta alla modifica della popolazione tramite i tre operatori principali, in un processo iterativo.

L'operatore di *selezione* si occupa di scegliere gli individui della popolazione corrente, che successivamente andranno a formare la popolazione successiva. L'operazione viene svolta basandosi sulla *fitness* dei singoli individui, una funzione definita sull'intero spazio di ricerca che definisce quanto è buona una soluzione. Tipicamente la fitness corrisponde alla funzione da ottimizzare.

Il *crossover* è un'operazione che permette la generazione di una nuova soluzione (figlio) a partire da una coppia di soluzioni (genitori), mescolando le informazioni appartenenti a quest'ultime.

La *mutazione* è un'operazione che consiste nel modificare, in modo casuale, alcune delle soluzioni scelte dall'operatore di selezione. Tipicamente, essendo le soluzioni rappresentate in forma binaria, l'operatore di mutazione si preoccupa di cambiare solo uno dei suoi bit.[5]

Dopo l'applicazione degli operatori di selezione, crossover e mutazione, si arriva alla formazione di una nuova popolazione, differente dalla precedente, che costituisce la generazione successiva. Il processo viene ripetuto fino al raggiungimento del numero prefissato di generazioni oppure quando viene soddisfatto il criterio di convergenza.

Un tipico algoritmo genetico richiede:

- una rappresentazione genetica del dominio delle soluzioni;
- la funzione fitness per valutare le soluzioni;

Inizializzazione La dimensione della popolazione dipende dalla natura del problema, tipicamente contiene svariate centinaia o migliaia di soluzioni possibili. Spesso, la popolazione iniziale è generata casualmente, permettendo così di spaziare sull'intero dominio delle soluzioni (lo spazio di ricerca). Occasionalmente, si genera la popolazione iniziale in un intorno di un punto specifico, quello dove è più probabile che si trovi la soluzione migliore.

selezione Ad ogni generazione una porzione della popolazione esistente è selezionata per dare origine alla generazione successiva. Le soluzioni sono selezionate sulla base della fitness.

Il criterio di selezione più semplice, è quello di scegliere solo la prima metà delle soluzioni migliori e gettare via le altre. Questo metodo è, sì pratico, ma non il più comune. Un motivo è che sebbene questo metodo permetta di riprodursi solo alle soluzioni migliori (e fermare le peggiori), non permette di distinguere tra quelle "buone" e quelle "molto buone". Inoltre invece di permettere alle soluzioni peggiori di procedere con minore probabilità verso la generazione successiva, brutalmente le annulla, riducendo così la

variabilità genetica della popolazione. Un metodo più comune è quello che va sotto il nome di *fitness-proportional* oppure di *roulette wheel*. In analogia alla ruota di una roulette, in cui l'intera popolazione costituisce la ruota della roulette, ed ogni settore che la compone è di dimensioni direttamente proporzionali alla fitness dell'individuo che rappresenta. Così alla rotazione della roulette ed al lancio della pallina immaginaria, la sua probabilità di fermarsi in uno slot specifico è direttamente proporzionale alla sua ampiezza, ovvero alla fitness della soluzione rappresentata. Con questo approccio, la probabilità di selezione di una soluzione è proporzionale alla sua fitness.[5]

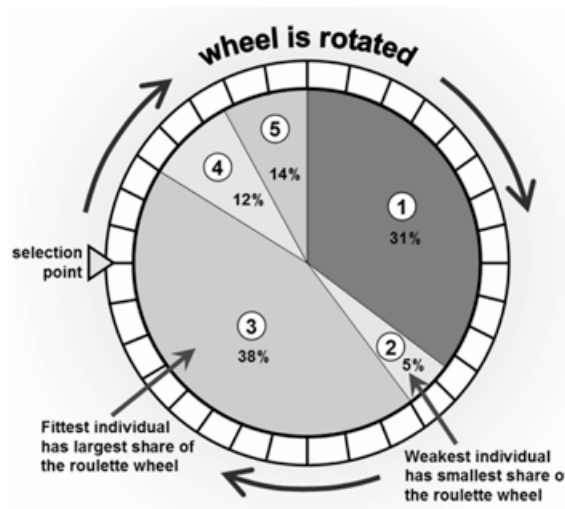


Figura 2.5: raffigurazione algoritmo di selezione: roulette wheel

Elitismo L'operatore di selezione fitness-proportional non garantisce la selezione di un individuo particolare, neanche del migliore. Quindi è possibile che la soluzione migliore al problema che sia stata scoperta venga regolarmente scartata. Sebbene questo sembri controproducente, in realtà risulta vantaggioso per alcuni problemi perchè rallenta l'algoritmo, permettendogli di esplorare meglio lo spazio di ricerca prima di arrivare a convergenza. Questo equilibrio tra *esplorazione* (exploration) dello spazio di ricerca e *sfruttamento* (exploitation) delle scoperte fatte all'interno dello spazio di ricerca è un tema ricorrente all'interno della teoria degli algoritmi genetici. Infatti una maggiore exploitation favorisce l'avanzamento dell'algoritmo, ma aumenta anche la probabilità che l'algoritmo fallisca nella ricerca del vero massimo globale. Per alcune applicazioni la velocità di ricerca può essere migliorata sensibilmente, impedendo la perdita della soluzione migliore, o *elite*, nel corso delle generazioni.[5]

Crossover Il crossover fa parte degli algoritmi di ricombinazione. Una coppia di individui selezionata ha una probabilità P_c di subire il crossover: Un numero casuale R_c è generato nell'intervallo $[0, 1]$, ed il crossover ha luogo solo se $R_c \leq P_c$. Tipici valori di P_c sono compresi tra 0.4 e 0.9 (se $P_c = 0.5$ solo metà degli individui selezionati per la generazione successiva sono sottoposti al crossover).

Senza il crossover, la fitness media della popolazione ($\bar{f}$) aumenterà finché non raggiunge quella dell'individuo migliore (f_{max}). Dopo questo punto, la fitness può migliorare solo attraverso mutazione. Il crossover è un metodo che permette di combinare tra loro le informazioni appartenenti a soluzioni diverse, esplorando nuove regioni dello spazio di ricerca.[5]

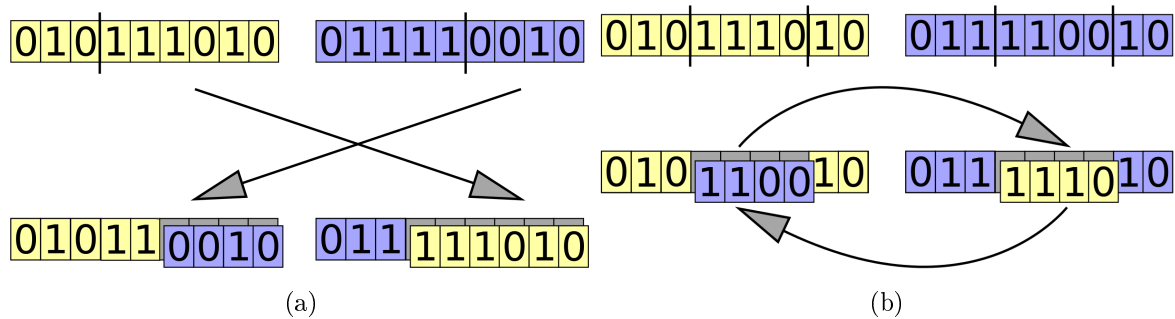


Figura 2.6: cross-over

Mutazione Nel mondo naturale, svariati processi possono causare mutazione, il più semplice è un errore durante la replicazione. La rappresentazione binaria delle soluzioni permette l'implementazione della mutazione in modo molto semplice. Ad ogni nuova generazione, vengono analizzati in sequenza tutti i bit di tutti gli individui della popolazione, e solo occasionalmente un 1 viene convertito in 0 o viceversa. La probabilità di mutazione (P_m) è tipicamente dell'ordine del 0.1%, ovvero solo un bit ogni mille viene mutato. Comunque, come ogni cosa nell'ambito degli algoritmi genetici, il valore corretto di P_m dipende dal problema considerato.[5]

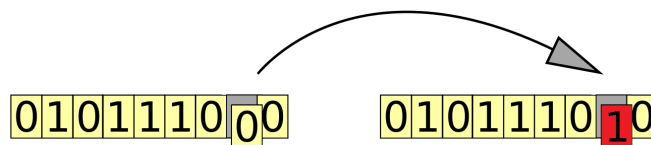


Figura 2.7: mutazione

Riproduzione Il prossimo passo è quello di dare origine alla generazione di individui successiva tramite la riproduzione. Ciò è realizzato grazie alla combinazione degli

operatori genetici appena descritti: crossover e mutazione.

Per ogni nuova soluzione da produrre, una coppia di soluzioni genitori è scelta dall'insieme di individui selezionati precedentemente. Il figlio è generato a partire dai due genitori usando i due algoritmi di crossover e mutazione. La nuova soluzione così generata tipicamente condivide con i suoi genitori molte delle caratteristiche. Il processo di riproduzione è ripetuto fino alla produzione del numero necessario di discendenti che andranno a costituire la prossima generazione. Il risultato di tale processo è una nuova generazione di individui, differente dalla precedente. In generale, la fitness media della nuova generazione è migliore della precedente, dato che solo gli individui con la fitness migliore della generazione precedente sono selezionati per la riproduzione.

Sebbene gli algoritmi di cross-over e mutazione siano i principali operatori genetici, è possibile usare anche altri operatori come: colonizzazione, estinzione oppure migrazione. A seconda del problema da risolvere, risulta utile settare in modo appropriato i parametri relativi alla probabilità di mutazione e crossover. Infatti un tasso di mutazione troppo basso può portare al cosiddetto *genetic drift*, viceversa se troppo alto può portare alla perdita di buone soluzioni. Anche il tasso di ricombinazione deve essere tarato, infatti se troppo alto può portare ad una convergenza prematura dell'algoritmo.[5]

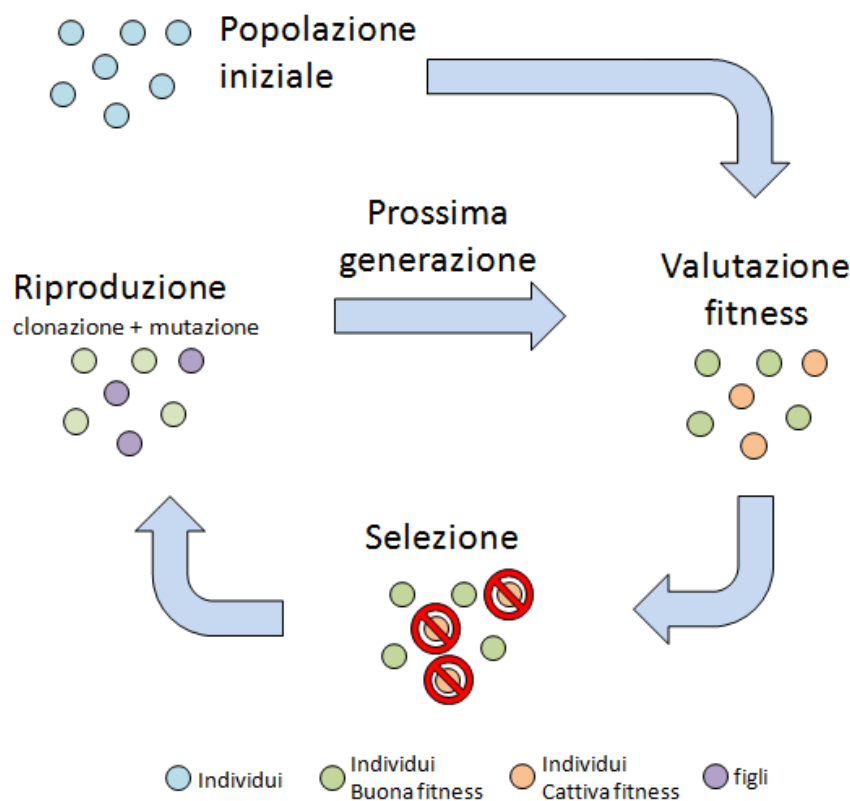


Figura 2.8

Capitolo 3

Pupil Segmentation: simulazioni

Il presente lavoro di tesi ha avuto come scopo quella della costruzione di un sistema di ottica adattiva, che si basi proprio sulla tecnica della pupil-segmentation. La prima parte del lavoro, ha riguardato delle simulazioni al computer, usando il linguaggio di programmazione matlab, il cui scopo era stabilire se il metodo avrebbe funzionato, almeno da un punto di vista teorico. Successivamente ci si è concentrati sulla parte più importante, ovvero dare vita al sistema di ottica adattiva di pupil-segmentation. In questo capitolo verrà esposto il codice e verranno mostrati i risultati delle simulazioni.

3.1 Simulazione delle aberrazioni

Ogni lente possiede la proprietà di realizzare, sul proprio piano focale, la trasformata di Fourier del fronte d'onda del fascio in arrivo. La prima parte di simulazioni si è incentrata proprio sulla sua simulazione. Nello specifico, dato un fronte d'onda, definito dai coefficienti dei polinomi di Zernike, il modulo quadro della sua trasformata di Fourier deve corrispondere alle già note aberrazioni sul piano focale.

A tale scopo sono state scritte due funzioni *Wavefront-complex* e *FocalPlane*. La prima determina il fronte d'onda complesso su tutta l'apertura del sistema ottico, a partire dai polinomi di Zernike scelti; L'altra invece determina l'aberrazione sul piano focale del sistema a partire dal fronte d'onda complesso determinato dalla prima funzione.

funzione che calcola il fronte d'onda

```

function [wavefront] = Wavefront_complex(D,pix,L,I,i,lwave)
%{
    D = diametro apertura (m)
    pix = lato pixel (m)
    L = numero pixel per lato immagine
    I = vettore riga indici polinomi di Zernike
    i = vettore riga pesi ciascun polinomio di Zernike
    lwave = lunghezza d'onda
%}
[~,m] = size(I);
r = 0.5*D/pix; %raggio apertura in pixel
wavefront = zeros(L,L);
for j = 1:L
    for k = 1:L
        d = ((j-L/2)^2 + (k-L/2)^2)^0.5 ;
        theta = 0;
        if d ~= 0
            theta = asin((L/2-j)/d);
        end
        if k < L/2
            theta = pi-theta;
        end
        if d < r
            fase = 0;
            for h = 1:m
                if I(h) <= 60
                    fase = fase+i(h)*Zernike(I(h),d/r,theta);
                else
                    fase = fase+i(h)*Zernike_2(I(h),d/r,theta);
                end
            end
            wavefront(j,k) = exp(1j*fase*2*pi/lwave);
        end
    end
end
end

```

funzione che calcola l'aberrazione di un fronte d'onda

```

function [focalplane] = FocalPlane(Wavefront)
%{
    Wavefront = array2D fronte d'onda aberrato complesso
%}

focalplane = fft2(Wavefront);
focalplane = fftshift(focalplane);
focalplane = abs(focalplane).^2;

end

```

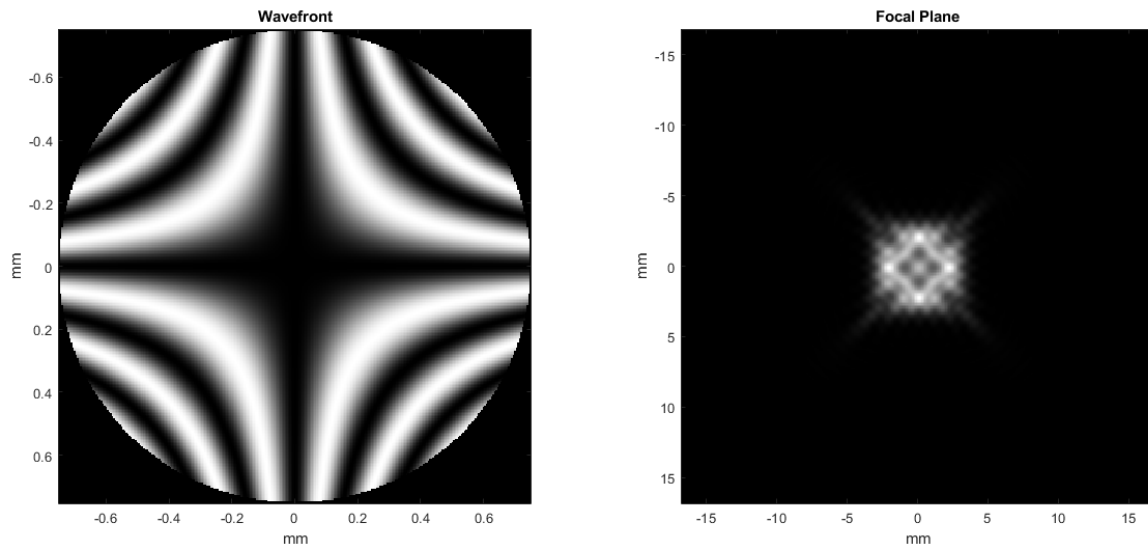


Figura 3.1: output della simulazione per l'aberrazione di astigmatismo: $D = 1.5\text{mm}$, $Z_3 = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu\text{m}$

Entrambe le funzioni sono incorporate nel seguente script per calcolare l'aberrazione sul piano focale del sistema. L'output dello script sono due immagini, di cui una è l'aberrazione calcolata e l'altra è l'interferogramma.

script simulazione di aberrazione

Contents

- INIZIALIZZAZIONE
- CALCOLO
- MOSTRA

INIZIALIZZAZIONE

```
pix = 0.0000005; %dim lato pixel (m)
L = 2000; %numero pixel immagine per lato
D = 0.0015; %dimensione diametro apertura (m)
lwave = 0.670*10^(-6); %lunghezza d'onda (m)
I = [7]; %vettore riga indici dei polinomi di Zernike
i = lwave*[0.5]; %vettore riga pesi ciascun polinomio di Zernike
f = 0.25; %focale della lente (m)
```

CALCOLO

```
Wavefront = Wavefront_complex(D,pix,L,I,i,lwave);
Focal_plane = FocalPlane(Wavefront);
interferogramma = imag(Wavefront).^2;
```

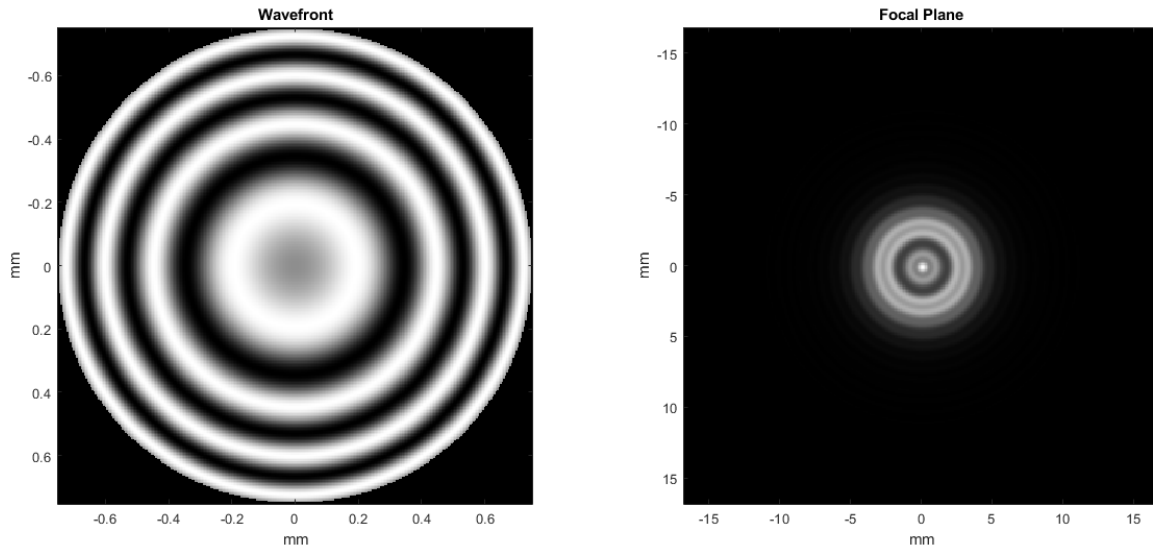


Figura 3.2: output della simulazione per l'aberrazione di defocus: $D = 1.5mm$, $Z_4 = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$

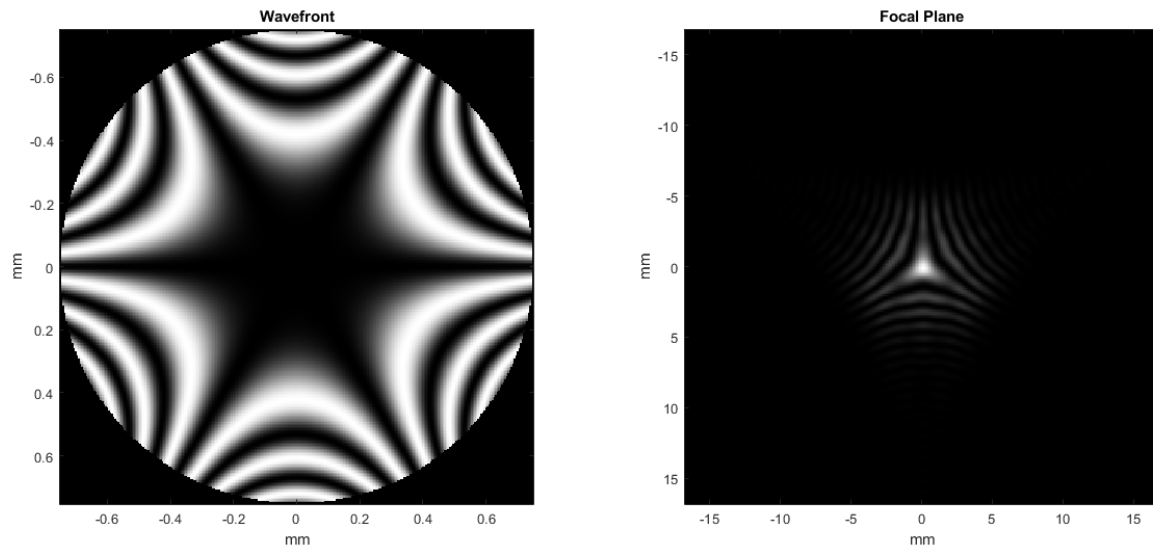


Figura 3.3: output della simulazione per l'aberrazione di trifoglio: $D = 1.5mm$, $Z_6 = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$

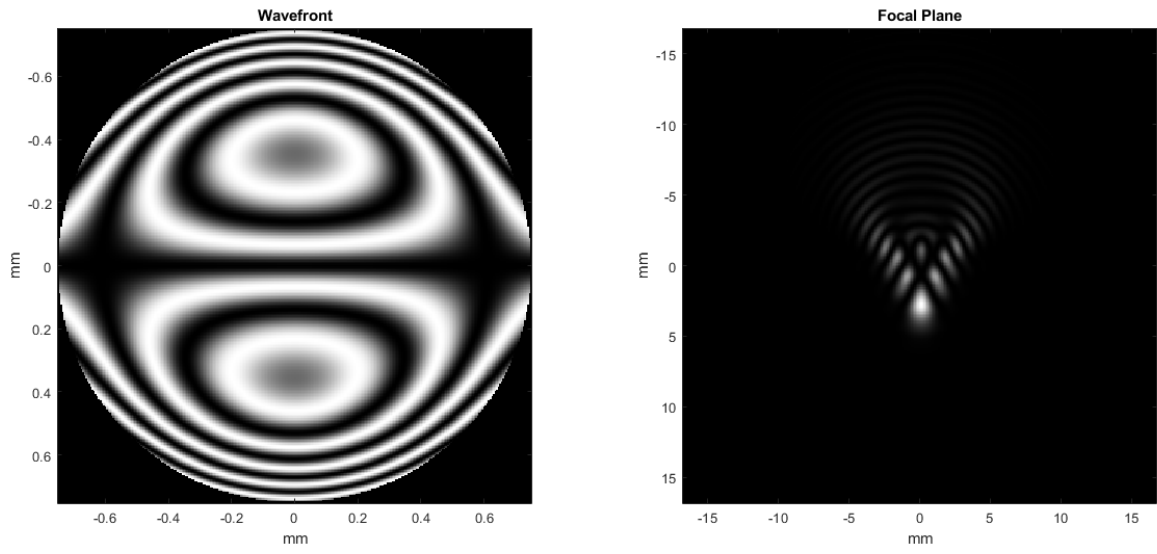


Figura 3.4: output della simulazione per l'aberrazione di coma: $D = 1.5mm$, $Z_7 = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$

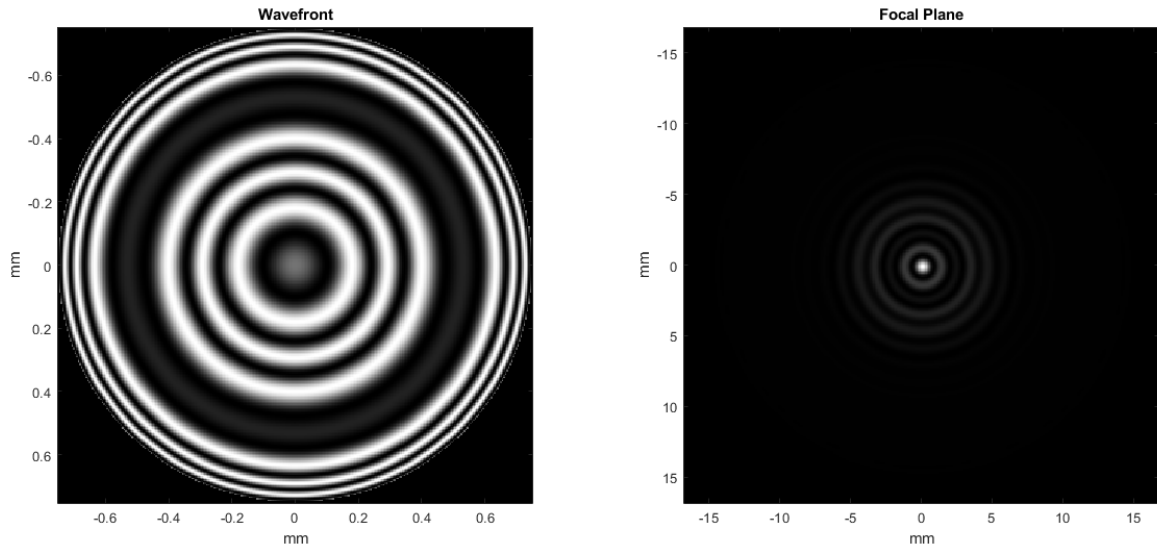


Figura 3.5: output della simulazione per l'aberrazione di sferica: $D = 1.5mm$, $Z_{12} = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$

3.2 Pupil-segment

Nella sezione precedente si è evidenziato che l'algoritmo per il calcolo dell'aberrazione sul piano focale della lente è in grado di riprodurre fedelmente le aberrazioni ottiche note. Ma cosa succede se si applica lo stesso procedimento, del passo precedente, a solo una porzione della pupilla?

Lo scopo dello step successivo della simulazione è proprio questo, e lo script riflette ciò che è stato appena detto. Richiamando la funzione *Wavefront-complex*, si costruisce il fronte d'onda complesso sull'intera apertura. Successivamente si definisce un altro fronte d'onda, *Wavefront-segment*, che è pari al fronte d'onda appena calcolato solo all'interno della porzione circolare selezionata, mentre altrove è nullo. Infine, richiamando la funzione *FocalPlane*, si ottiene l'aberrazione sul piano focale della lente, data da quella porzione del fronte d'onda che è stata selezionata.

Nel codice in figura, ciò è stato implementato definendo tre nuovi parametri, che stanno ad indicare il diametro della sottoapertura (s), e le sue coordinate (x_s, y_s) rispetto al centro dell'apertura. Infine è stato utilizzato un ciclo per valutare quali pixel dell'apertura fossero all'interno della sottoapertura. Solo in questi pixel *Wavefront_segment* è pari a *Wavefront*, mentre negli altri è nullo.

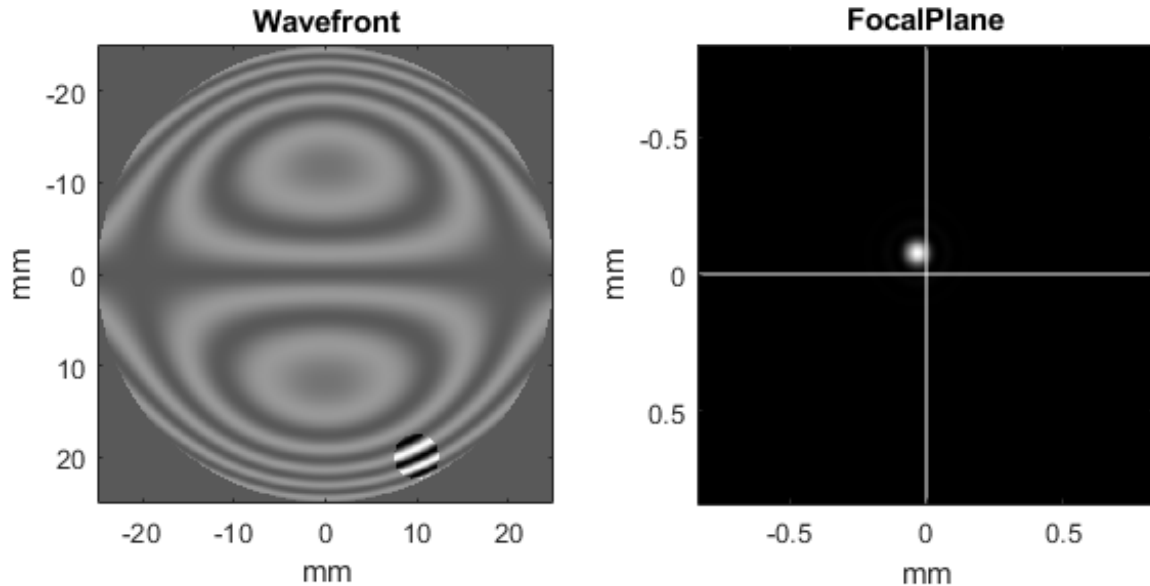


Figura 3.6: output della simulazione per un segmento dell'aberrazione di coma: $D = 5cm$, $Z_7 = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$.

la subapertura ha un diametro: $s = 5mm$

script di aberrazione per un solo segmento della pupilla

Contents

- INIZIALIZZAZIONE
- CALCOLO
- MOSTRA

INIZIALIZZAZIONE

```

pix = 0.0001; %dim lato pixel (m)
L = 1000; %numero pixel immagine per lato
D = 0.05; %diametro apertura (m)
s = 0.005; %diametro sotto-apertura (m)
r = 0.5*D/pix; %raggio apertura lente in pixel
r_s = s/2/pix; %raggio sotto-apertura in pixel
lwave = 0.670*10^(-6); %lunghezza d'onda (m)
I = [7]; %vettore riga indici dei polinomi di Zernike
i = lwave*[0.5]; %vettore riga pesi ciascun polinomio di Zernike
f = 0.25; %focale della lente (m)
% posizione in pixel di sotto-apertura
x_s = 350;
y_s = 650;

```

CALCOLO

```

Wavefront = Wavefront_complex(D,pix,L,I,i,lwave);

% calcolo segmento fronte d'onda
Wavefront_segment = zeros(L,L);

for j = max(y_s-2*r_s,1):1:min(y_s+2*r_s,L)
    for k = max(x_s-2*r_s,1):1:min(x_s+2*r_s,L)
        d = ((j-y_s)^2 + (k-x_s)^2)^0.5 ;
        if d < r_s
            Wavefront_segment(j,k) = Wavefront(j,k);
        end
    end
end

% calcolo focalplane
Focalplane = FocalPlane(Wavefront_segment);

```

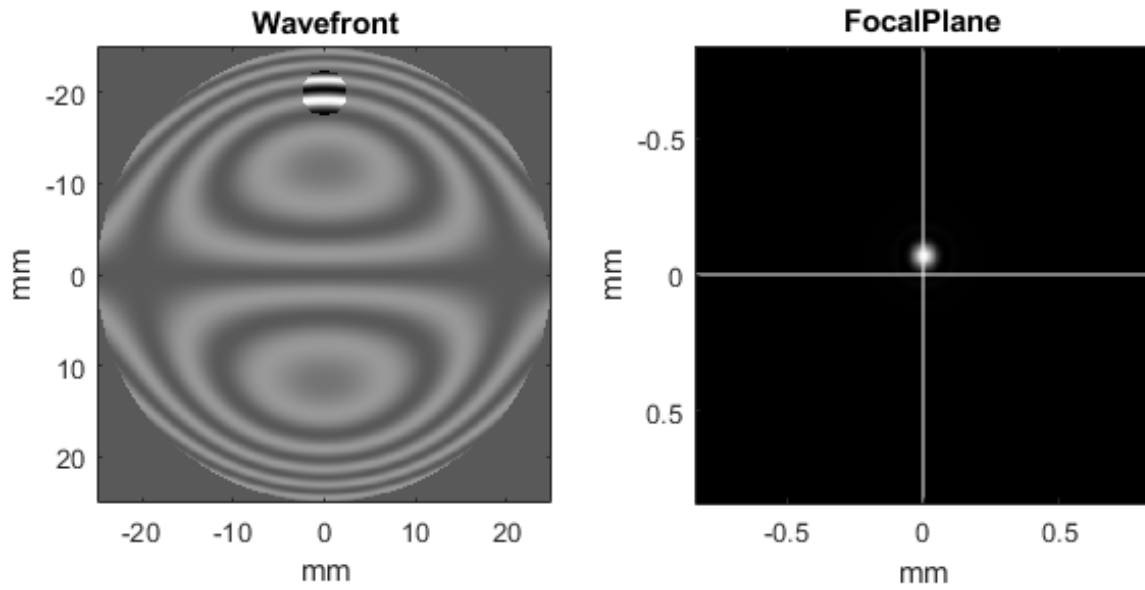


Figura 3.7: output della simulazione per un segmento dell'aberrazione di coma: $D = 5cm$, $Z_7 = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$.

la subapertura ha un diametro: $s = 5mm$

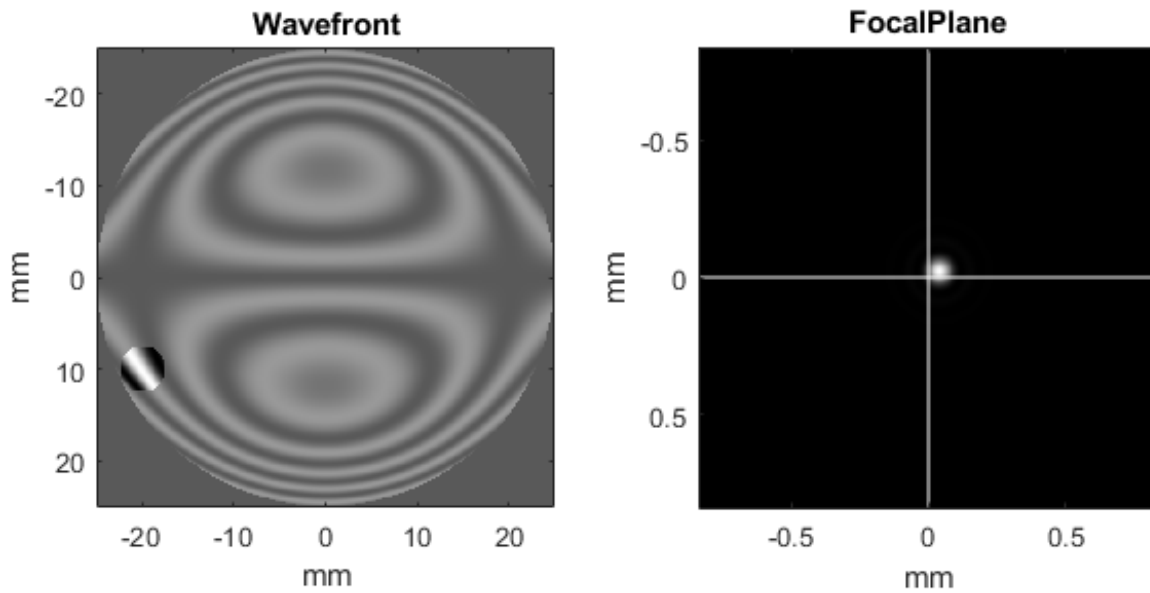


Figura 3.8: output della simulazione per un segmento dell'aberrazione di coma: $D = 5cm$, $Z_7 = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$.

la subapertura ha un diametro: $s = 5mm$

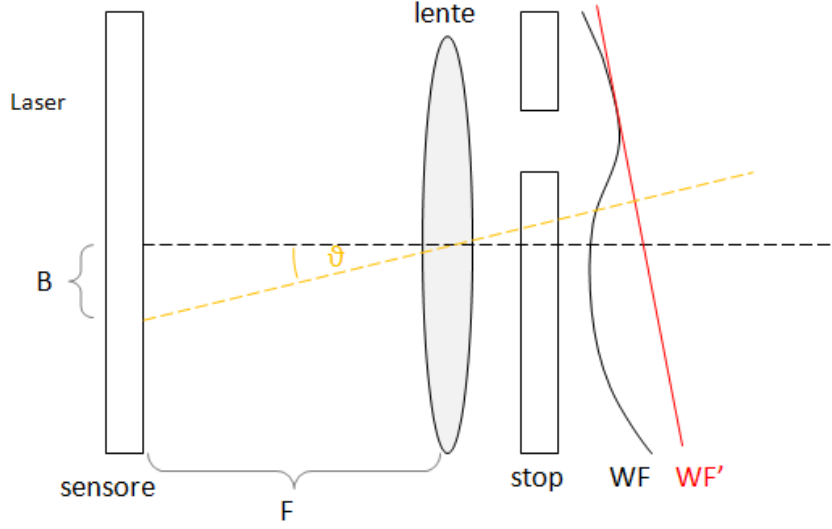


Figura 3.9: schema misura gradiente medio del fronte d'onda all'interno di una sottoapertura

Come si vede dalle immagini, sul piano focale si forma la classica figura di diffrazione. Ciò è presto spiegato, infatti selezionando solo una piccola parte dell'intero fronte d'onda, questo è localmente approssimabile con un fronte d'onda piano di pendenza pari alla pendenza media del fronte d'onda originario sull'apertura selezionata, come mostrato nella figura 3.9. Infatti si osserva che la PSF è spostata nelle varie immagini. Infine, proprio da questo shift, si ricava il gradiente medio del fronte d'onda nella subapertura, usando la seguente formula:

$$\vec{\nabla}W = \frac{\vec{B}}{F} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{F} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}$$

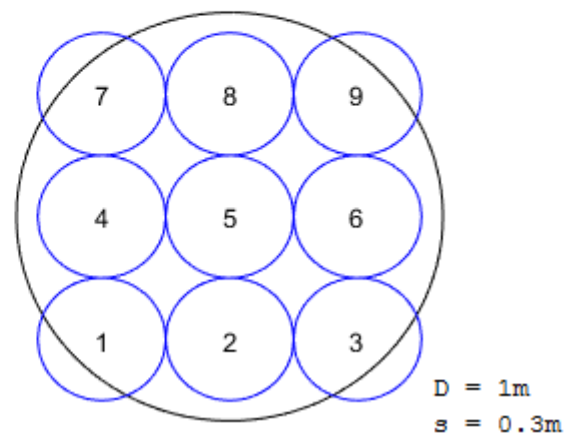
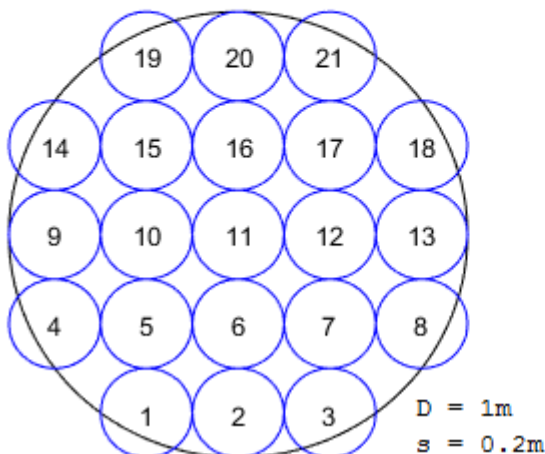
3.3 Disposizione delle sottoaperture

Nella presente sezione verranno mostrati i codici Matlab relativi a quattro disposizioni differenti delle sottoaperture: griglia, esagonale, polare ed anulare.

Le funzioni per le prime tre disposizioni necessitano solo di due input: il diametro dell'apertura (D) e la distanza tra le subaperture (s). Mentre la funzione per la disposizione anulare ha bisogno di un parametro in più (a), che indica la distanza tra il centro della pupilla ed il centro degli anelli su cui verranno disposte le sottoaperture.

funzione che dispone a griglia le sub-aperture nella pupilla

```
function [ pos ] = subAperture_position_grid(D,s)
%{
    D = diametro apertura (m)
    s = distanza tra sotto-aperture (m)
%}
pos = [0,0]; % matrice in cui memorizzare le coordinate delle posizioni
n_pos = 0; % numero posizioni calcolate
Nlines = round(D/s); % numero di righe in cui distribuire le subaperture
err_y = 0.5*(D-Nlines*s);
err_x = 0.5*(D-Nlines*s);
for r_i = 1:1:Nlines
    y_s = err_y+(-D/2+s/2+(r_i-1)*s); % posizione verticale riga i-esima in pixel
    for h = 1:1:Nlines
        x_s = err_x+(-D/2+s/2+(h-1)*s); % pos. orizz. della h-esima subapertura
        d_c = ((x_s)^2 + (y_s)^2)^0.5;
        if d_c <= 0.5*D
            n_pos = n_pos + 1;
            pos(n_pos,1) = x_s;
            pos(n_pos,2) = y_s;
        end
    end
end
end
```

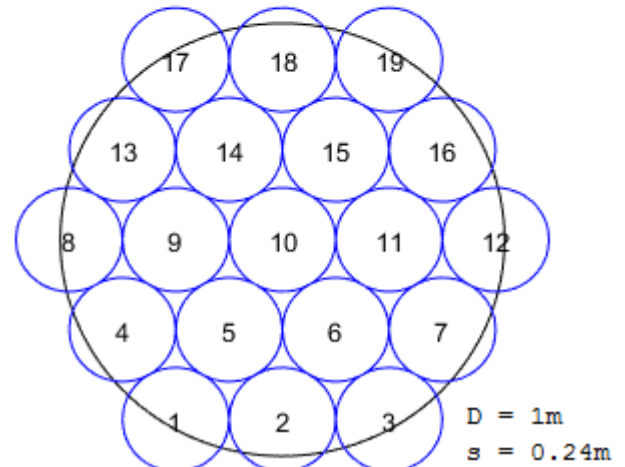
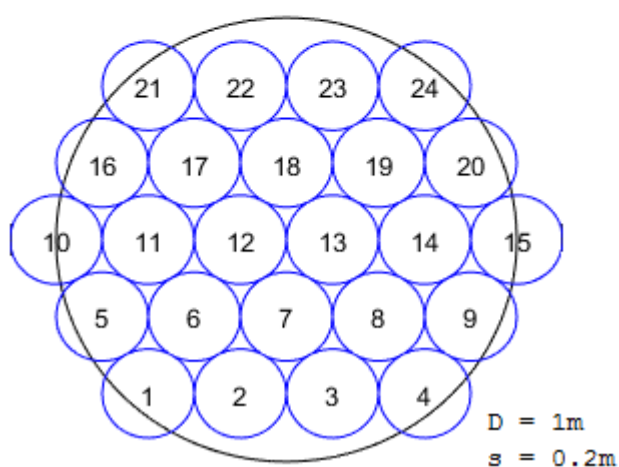


funzione che dispone esagonalmente le sub-aperture nella pupilla

```

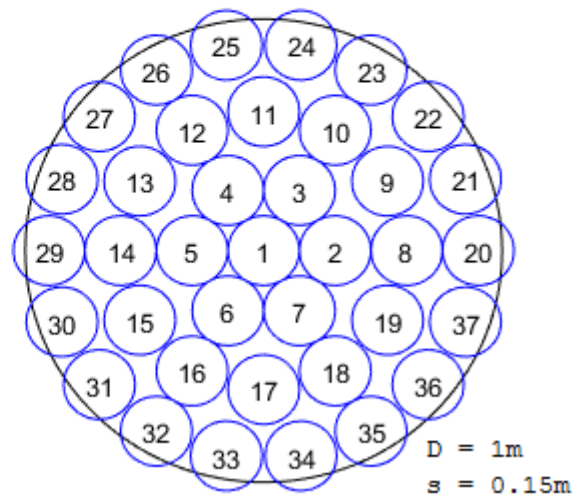
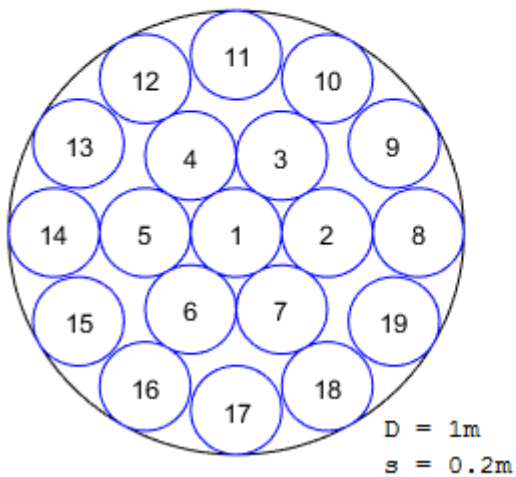
function [ pos ] = subAperture_position_exagonal(D,s)
%{
    D = diametro apertura (m)
    s = distanza tra sotto-aperture (m)
    s_x = distanza_x tra sotto-aperture (m)
    s_y = distanza_y tra sotto-aperture (m): pari a s_x*sin(60°)
%}
s_x = s;
s_y = s*sin(pi/3);
pos = [0,0]; % matrice in cui memorizzare le coordinate delle posizioni
n_pos = 0; % numero posizioni calcolate
Nlines = round(D/s_y); % numero di righe in cui distribuire le subaperture
if Nlines/2 == round(Nlines/2)
    Nlines = Nlines+1;
end
err_y = 0.5*(D-Nlines*s_y);
err_x = 0.5*(D-Nlines*s_x);
sfalsa = -0.5;
for r_i = 1:1:Nlines
    y_s = err_y+(-D/2+s_y/2+(r_i-1)*s_y); % posizione verticale riga i-esima in pixel
    if sfalsa == 0
        sfalsa = -0.5;
    else
        sfalsa = 0;
    end
    for h = 1:1:Nlines+2
        x_s = err_x+(-D/2+s_x/2+(h-1+sfalsa)*s_x); % pos. orizz. h-esima subapertura
        d_c = ((x_s)^2 + (y_s)^2)^0.5;
        if d_c <= 0.51*D
            n_pos = n_pos + 1;
            pos(n_pos,1) = x_s;
            pos(n_pos,2) = y_s;
        end
    end
end
end
end
end

```



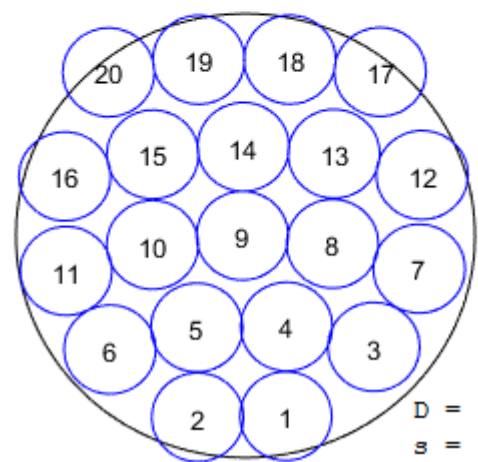
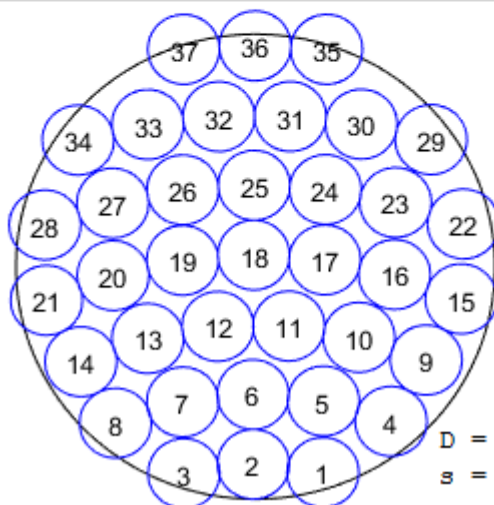
funzione che dispone su anelli le sub-aperture nella pupilla

```
function [ pos ] = subAperture_position_polar(D,s)
%{
    D = diametro apertura (m)
    s = distanza tra gli anelli delle sotto-aperture (m)
%}
pos = [0,0]; % matrice in cui memorizzare le coordinate delle posizioni
n_pos = 0; % numero posizioni calcolate
Nanelli = round(0.5*D/s+0.5); % numero anelli in cui distribuire le subaperture
for a_i = 1:1:Nanelli
    r_i = (a_i-1)*s;
    if r_i > 0
        n_pos_anello = floor(2*pi*r_i/s);
        dtheta = 2*pi/n_pos_anello;
        for t = 1:1:n_pos_anello
            theta_t = dtheta*(t-1);
            n_pos = n_pos + 1;
            pos(n_pos,1) = r_i*cos(theta_t);
            pos(n_pos,2) = r_i*sin(theta_t);
        end
    else
        n_pos = n_pos + 1;
        pos(n_pos,1) = 0;
        pos(n_pos,2) = 0;
    end
end
end
end
```



funzione che dispone su anelli decentrati le sub-aperture nella pupilla

```
function [ pos ] = subAperture_position_polar2(D,s,a)
%{
    D = diametro apertura (m)
    s = distanza tra gli anelli delle sotto-aperture (m)
    a = distanza centro disposizione polare sotto-aperture (m)
%}
R = D/2;
pos = [0,0]; % matrice in cui memorizzare le coordinate delle posizioni
n_pos = 0; % numero posizioni calcolate
Nanelli = round(D/s); % numero anelli in cui distribuire le subaperture
for s_i = 1:1:Nanelli
    r_i = a-D/2+s/2+(s_i-1)*s;
    if r_i > 0
        deltax_i = (sqrt((-R^2+r_i^2+a^2)^2/(4*a^2)+r_i^2));
        y_deltax_i = sqrt(r_i^2-deltax_i^2);
        delta_theta_i = atan(deltax_i/(y_deltax_i));
        len_i = abs(2*delta_theta_i*r_i);
        n_pos_anello = round(len_i/s);
        dtheta_err = 0.5*atan(s/r_i)*(len_i/s-round(len_i/s));
        dtheta = atan(s/r_i);
        for t = n_pos_anello:-1:1
            theta_t = dtheta_err-delta_theta_i+dtheta/2+dtheta*(t-1);
            n_pos = n_pos + 1;
            pos(n_pos,1) = r_i*sin(theta_t);
            pos(n_pos,2) = -a+r_i*cos(theta_t);
        end
    else
        n_pos = n_pos + 1;
        pos(n_pos,1) = 0;
        pos(n_pos,2) = 0;
    end
end
end
end
```



Disposizione anulare L'ultima disposizione delle sottoaperture nella pupilla, merita di essere approfondita. Infatti sarà proprio in questo modo che verrà campionato il fronte d'onda nelle esperienze di laboratorio, descritte nel capitolo successivo. Come già menzionato, la funzione *subaperture-position-polar2* ha bisogno di tre parametri per posizionare le sottoaperture nella pupilla. I primi due, comuni anche alle altre funzioni, sono il diametro dell'apertura (D) e la distanza tra le sottoaperture (s). L'ultimo parametro (a), invece indica la distanza tra il centro della pupilla ed il centro degli anelli su cui si posizionano le sottoaperture.

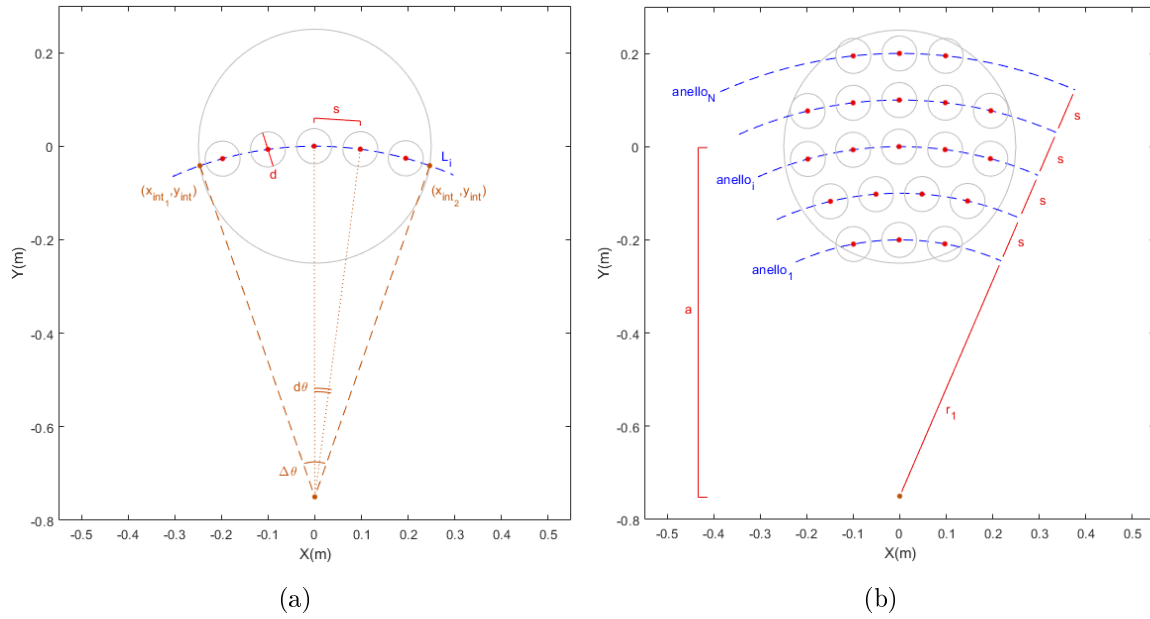


Figura 3.10: Schema disposizione anulare delle sottoaperture. $D = 0.5m$, $s = 0.1m$, $d = 0.075m$, $a = 0.75m$

Il calcolo della disposizione delle sottoaperture tiene in conto sin dall'inizio, che gli anelli su cui verranno posizionate sono centrati, non sull'origine degli assi (il centro della pupilla), ma bensì rispetto ad un punto traslato di una quantità pari ad a lungo l'asse verticale. Il raggio degli anelli varia esattamente di una quantità paria ad s , tra un anello e quello adiacente. Ne segue che il numero di anelli (N_{rings}) necessari per coprire l'intera apertura è pari a:

$$N_{rings} = \text{round}(D/s)$$

ed ogni anello ha un raggio di:

$$r_i = a - D/2 + s/2 + s(i - 1)$$

dove i è un numero intero $i \in [1 : N_{rings}]$, che identifica i vari anelli. Ora che sono stati trovati gli anelli su cui predisporre le aperture, resta un'altra domanda a cui rispondere:

come e quante sottoaperture vanno posizionate per ogni anello?

Per rispondere a questo quesito, la prima cosa da trovare è l'ampiezza dell'arco dell'anello che si trova dentro l'apertura.

Innanzitutto si identificano i due punti d'intersezione tra la circonferenza dell'apertura e l'anello considerato:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = D^2 \\ x^2 + (y + a)^2 = r_i^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pm \sqrt{D^2 - x^2} \\ y = \pm \sqrt{r_i^2 - x^2} - a \end{cases}$$

da ciò segue che:

$$\begin{aligned} \sqrt{D^2 - x^2} &= \sqrt{r_i^2 - x^2} - a \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad D^2 - x^2 &= r_i^2 - x^2 + a^2 - 2a\sqrt{r_i^2 - x^2} \quad \Rightarrow \dots \\ \dots \Rightarrow \quad x_{int} &= \pm \sqrt{-\frac{(r_i^2 - D^2 + a^2)^2}{4a^2} + r_i^2} \end{aligned}$$

ed infine applicare l'equazione dell'anello per trovare l'altra coordinata dei punti:

$$x_{int}^2 + (y_{int} + a)^2 = r_i^2 \quad \rightarrow \quad y_{int} + a = \sqrt{r_i^2 - x_{int}^2}$$

Noti punti estremi dell'arco su cui posizionare le subaperture, si calcola la lunghezza (L_i) di quest'arco:

$$\Delta\theta_i = \arctan\left(\frac{x_{int}}{y_{int} + a}\right) \quad \rightarrow \quad L_i = 2r_i * \Delta\theta_i$$

L'ultima parte di codice si limita a calcolare l'angolo di posizione di ogni subapertura sull'arco e da questo ricavare le coordinate delle loro posizioni.

Sottoaperture: numero vs dimensione

Immaginando che le sottoaperture siano tutte affiancate (la distanza che le separa è pari al loro diametro), si può stabilire il loro numero (n_{pos}) in funzione del diametro dell'apertura e della distanza tra di loro:

$$n_{pos} = \frac{\pi(D/2)^2}{\pi(s/2)^2}$$

e successivamente invertire la relazione per trovare la distanza tra le sottoaperture tale che all'interno dell'apertura ci siano n_{pos} sottoaperture. L'equazione però non tiene conto che le sottoaperture, anche se si sfiorano, non coprono perfettamente tutta l'apertura. Una migliore approssimazione del numero delle subaperture è possibile, considerandole quadrate:

$$n_{pos} = \frac{\pi(D/2)^2}{s^2}$$

Ciò è evidente in particolare disponendo le sottoaperture a griglia o anularmente, come mostrato nella prossima figura.

Questo è il procedimento da applicare se si vuole trovare la distanza tra le sottoaperture, tale da campionare l'apertura totale del numero di posizioni desiderato.

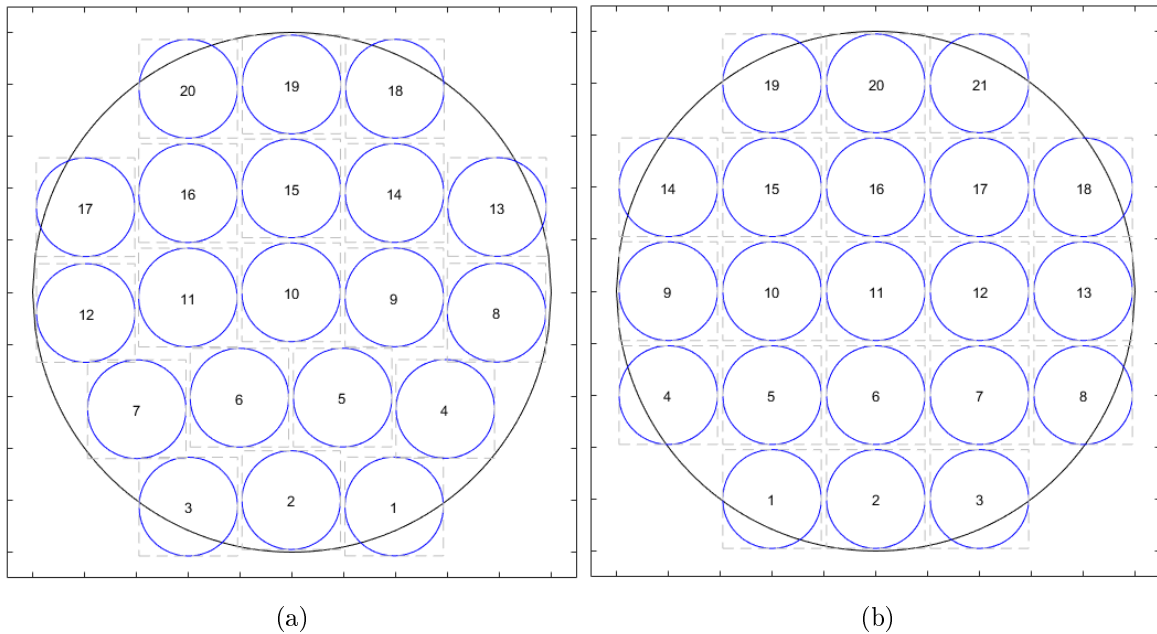


Figura 3.11: area dell'apertura completa suddivisa tra le varie sottoaperture: a sinistra con le sottoaperture disposte anularmente, a destra invece con le sottoaperture disposte a griglia

3.4 Simulazione Pupil-segmentation

Nella sezione precedente, si è messo in evidenza che se si seleziona solo una piccola parte del fronte d'onda, questo è localmente approssimabile con un fronte d'onda piano. Per questo motivo, la PSF è la classica figura di diffrazione, spostata rispetto al centro dell'apertura di una quantità pari al gradiente medio del fronte d'onda su quell'apertura moltiplicato per la focale.

E' stato realizzato un ulteriore script, chiamato *pupil-segmentation*, che ripete i passi dello script *pupil-segment* per tutte le posizioni delle sottoaperture. Il risultato è una mappa che mostra, per tutte le posizioni delle sottoaperture, quale sia il gradiente medio locale del fronte d'onda.

script simulazione pupil-segmentation

Contents

- INIZIALIZZAZIONE
- CALCOLO
- MOSTRA

INIZIALIZZAZIONE

```
D = 0.1; % diametro apertura (m)
s = 0.01; % diametro sotto-apertura (m)
d = 0.01; % distanza tra le sotto-aperture (m)
a = 0.1; % distanza centro apertura da centro disp_anelli (m)
I = [7]; %vettore riga indici dei polinomi di Zernike
i = [-0.5*10^(-6)]; %vettore riga pesi ciascun polinomio di Zernike
lwave = 10^(-6); %lunghezza d'onda (m)
f = 2.5; %focale della lente (m)
DW = [0,0]; %matrice contenente i gradienti del fronte d'onda
```

CALCOLO

```
Wavefront = Wavefront_complex(D,pix,L,I,i,lwave);

% calcolo posizioni sub-aperture
pos = subAperture_position_polar2(D,d,a); %richiamo funz. che posiziona le subaperture
n_pos = size(pos);
n_pos = n_pos(1);

% calcolo gradiente fronte d'onda
DW = Wavefront_gradient(L,pix,s,lwave,f,Wavefront,pos);
```

Nello script *pupil-segmentation*, inizialmente si richiama la funzione *wavefront-*

complex, per calcolare il fronte d'onda complesso su tutta l'apertura, successivamente si richiama una delle funzioni del paragrafo precedente che dispongono le sottoaperture su tutta l'apertura.

Infine si richiama un'altra funzione, *wavefront-gradient*, che noto il fronte d'onda di input e la disposizione delle sottoaperture, calcola la mappa del gradiente del fronte d'onda, ripetendo gli stessi passi dello script *pupil-segment* per ogni sottoapertura.

funzione per la mappa del gradiente del fronte d'onda

```
function [ DW ] = Wavefront_gradient(L,pix,s,lwave,f,Wavefront,pos)
%{
    L = numero pixel per lato immagine
    s = diametro sotto-apertura (m)
    pix = dim lato pixel (m)
    f = focale della lente (m)
    lwave = lunghezza d'onda (m)
    pos = matrice posizioni in cui è stato calcolato il gradiente del wavefront
    Wavefront = fronte d'onda complesso
%}

r_s = round(s/2/pix); %raggio sotto-apertura in pixel
n_pos = size(pos);
n_pos = n_pos(1);

for p = 1:1:n_pos
    % calcolo segmento fronte d'onda
    Wavefront_segment = zeros(L,L);
    x_p = pos(p,1);
    y_p = pos(p,2);
    for j = round(max(y_p-2*r_s,1)):1:round(min(y_p+2*r_s,L))
        for k = round(max(x_p-2*r_s,1)):1:round(min(x_p+2*r_s,L))
            d = ((j-y_p)^2 + (k-x_p)^2)^0.5 ;
            if d < r_s
                Wavefront_segment(j,k) = Wavefront(j,k);
            end
        end
    end
    % calcolo focalplane
    Focalplane = FocalPlane(Wavefront_segment);

    % calcolo gradiente medio del fronte d'onda nella sotto-apertura
    scala = f*lwave/pix/L;
    B = baricentro(Focalplane,0.1,10^3*scala,'mm');
    DW(p,1) = B(1)/(10^3*f);
    DW(p,2) = B(2)/(10^3*f);
end
end
```

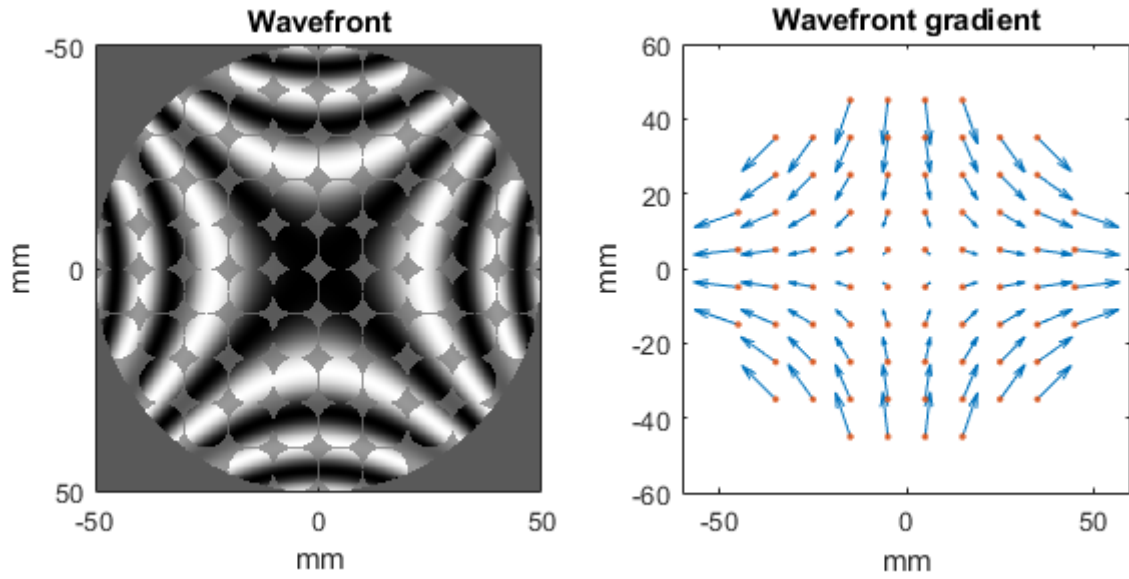


Figura 3.12: output della simulazione della segmentazione della pupilla per l'aberrazione di astigmatismo: $D = 0.1m$, $s = 0.01m$, $Z_5 = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$.

le subaperture sono disposte a griglia

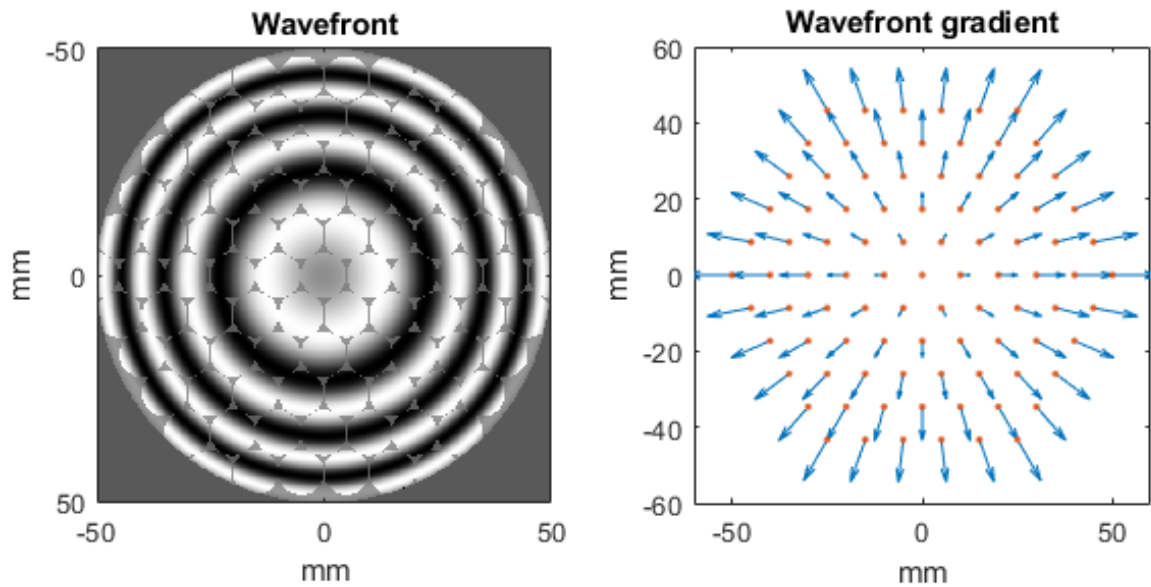


Figura 3.13: output della simulazione della segmentazione della pupilla per l'aberrazione di defocus: $D = 0.1m$, $s = 0.01m$, $Z_4 = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$.

le subaperture sono disposte esagonalmente

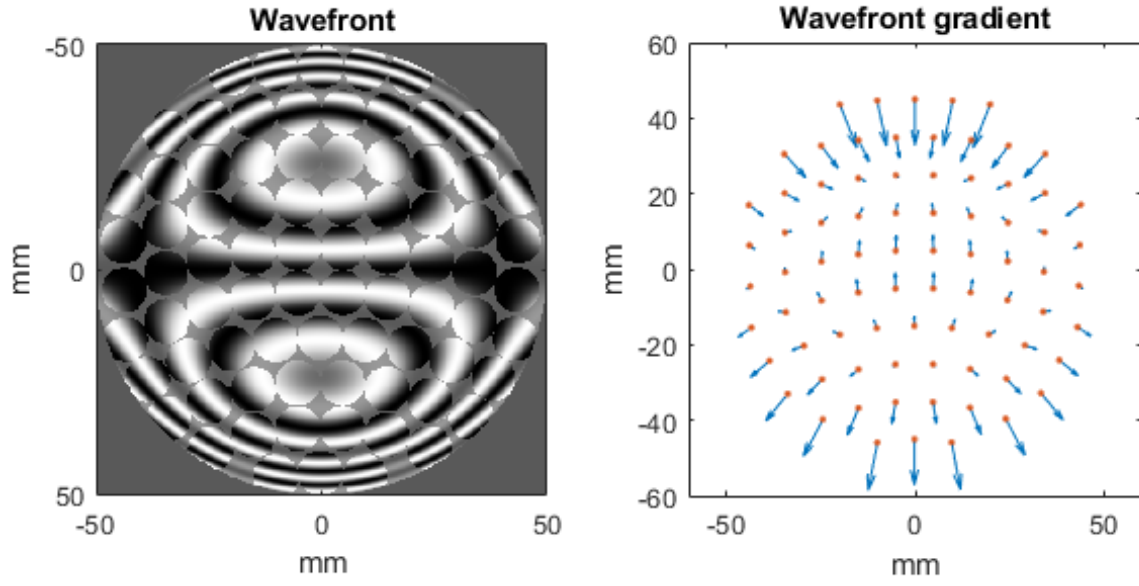


Figura 3.14: output della simulazione della segmentazione della pupilla per l'aberrazione di coma: $D = 0.1m$, $s = 0.01m$, $Z_7 = -0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$.

le subaperture sono disposte su anelli decentrati

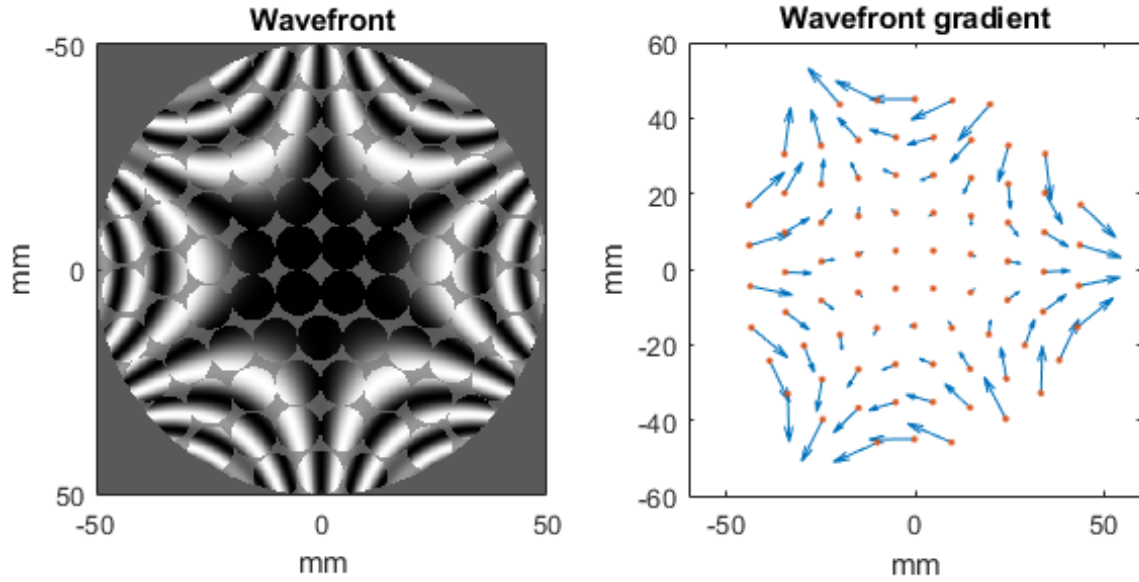


Figura 3.15: output della simulazione della segmentazione della pupilla per l'aberrazione di trifoglio: $D = 0.1m$, $s = 0.01m$, $Z_9 = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$.

le subaperture sono disposte su anelli decentrati

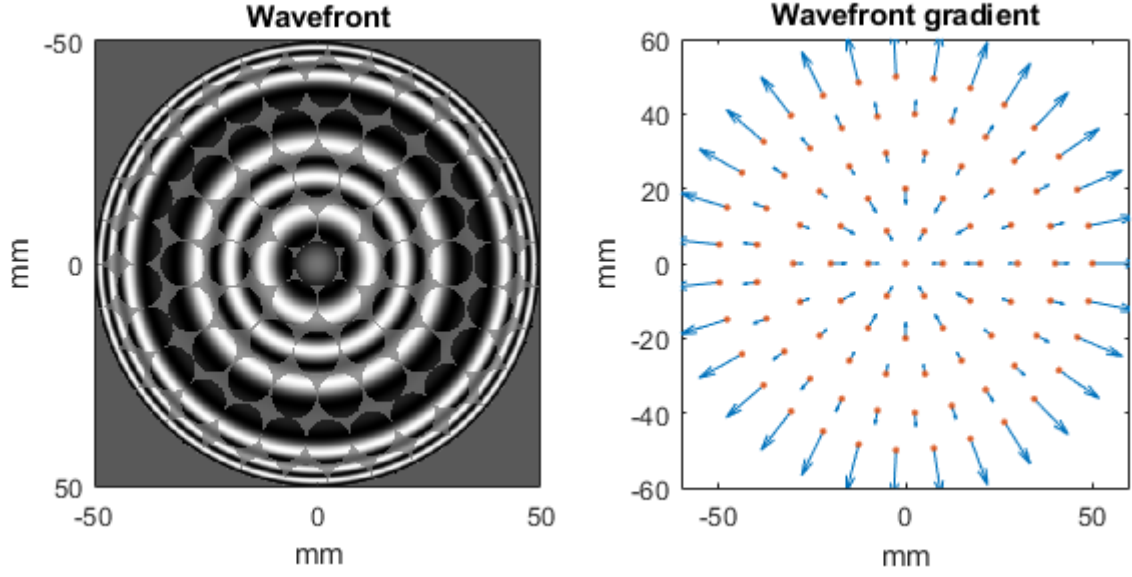


Figura 3.16: output della simulazione della segmentazione della pupilla per l'aberrazione sferica: $D = 0.1m$, $s = 0.01m$, $Z_{12} = 0.5\lambda$, dove $\lambda = 0.670\mu m$.
le subaperture sono disposte su anelli concentrici

3.5 Ricostruzione fronte d'onda

Il passo finale è riuscire a ricostruire il fronte d'onda originario a partire dalla mappa del suo gradiente. Ma cosa significa esattamente ricostruire il fronte d'onda?

Con ricostruzione del fronte d'onda si fa riferimento a quel processo di calcolo che permette di ricavare, in ogni punto della pupilla, quale sia la differenza di fase rispetto ad un fronte d'onda piano di riferimento.

Nel paragrafo precedente, è stata simulata con matlab la tecnica della pupil-segmentation su un fronte d'onda predefinito, ottenendo la mappa del suo gradiente. Il fronte d'onda era dato da un set di coefficienti di polinomi di Zernike (a_k); quindi lo scopo della ricostruzione è quello di risalire al set di coefficienti di polinomi di Zernike, corrispondente alla mappa del gradiente misurata. Set che in teoria dovrebbe corrispondere a quello usato per definire il fronte d'onda misurato.

Il ruolo di trovare il set di coefficienti dei polinomi di Zernike, a partire dalla mappa del gradiente del fronte d'onda, è affidato alla funzione *Wavefront-decomposition-2*. Il principio alla base di questo algoritmo è il seguente: Si immagini un fronte d'onda dato dalla somma di fronti d'onda di base (I polinomi di Zernike), ciascuno di essi contribuisce al gradiente del fronte d'onda su ogni punto dell'apertura; ne segue che, per ogni punto della pupilla, il gradiente del fronte d'onda è dato dalla somma dei gradienti di ciascun fronte d'onda di base.

Quindi è possibile costruire una matrice, in modo che ogni sua riga faccia riferimento ad una sottoapertura differente, e ogni colonna contenga il gradiente del rispettivo polinomio di Zernike nel centro della subapertura considerata. Naturalmente il gradiente ha due componenti, una orizzontale e l'altra verticale. Per questo motivo la matrice è sdoppiata, con la parte superiore che contiene la componente orizzontale del gradiente e la parte inferiore relativa alla componente verticale ([36], [25]).

$$B = \begin{bmatrix} (\frac{\partial Z_1}{\partial x})_{p_1} & \cdots & (\frac{\partial Z_i}{\partial x})_{p_1} & \cdots & (\frac{\partial Z_n}{\partial x})_{p_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\frac{\partial Z_1}{\partial x})_{p_j} & \cdots & (\frac{\partial Z_i}{\partial x})_{p_j} & \cdots & (\frac{\partial Z_n}{\partial x})_{p_j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\frac{\partial Z_1}{\partial x})_{p_m} & \cdots & (\frac{\partial Z_i}{\partial x})_{p_m} & \cdots & (\frac{\partial Z_n}{\partial x})_{p_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\frac{\partial Z_1}{\partial y})_{p_1} & \cdots & (\frac{\partial Z_i}{\partial y})_{p_1} & \cdots & (\frac{\partial Z_n}{\partial y})_{p_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\frac{\partial Z_1}{\partial y})_{p_j} & \cdots & (\frac{\partial Z_i}{\partial y})_{p_j} & \cdots & (\frac{\partial Z_n}{\partial y})_{p_j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\frac{\partial Z_1}{\partial y})_{p_m} & \cdots & (\frac{\partial Z_i}{\partial y})_{p_m} & \cdots & (\frac{\partial Z_n}{\partial y})_{p_m} \end{bmatrix}$$

Applicando la matrice B al vettore $(\vec{a})$ dei coefficienti dei polinomi di Zernike, si ottiene un vettore $(\vec{\nabla}W)$ che contiene tutti i gradienti del fronte d'onda in tutte le aperture (la mappa del gradiente del fronte d'onda):

$$B\vec{a} = \vec{\nabla}W$$

$$\begin{bmatrix} (\frac{\partial Z_1}{\partial x})_{p_1} & \cdots & (\frac{\partial Z_n}{\partial x})_{p_1} \\ \vdots & & \vdots \\ (\frac{\partial Z_1}{\partial x})_{p_m} & \cdots & (\frac{\partial Z_n}{\partial x})_{p_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\frac{\partial Z_1}{\partial y})_{p_1} & \cdots & (\frac{\partial Z_n}{\partial y})_{p_1} \\ \vdots & & \vdots \\ (\frac{\partial Z_1}{\partial y})_{p_m} & \cdots & (\frac{\partial Z_n}{\partial y})_{p_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial W}{\partial x})_{p_1} \\ \vdots \\ (\frac{\partial W}{\partial x})_{p_m} \\ \cdots \\ (\frac{\partial W}{\partial y})_{p_1} \\ \vdots \\ (\frac{\partial W}{\partial y})_{p_m} \end{pmatrix}$$

L'ultimo passaggio richiede l'inversione della matrice B , infatti l'obiettivo non è trovare il gradiente del fronte $(\vec{\nabla}W)$, bensì calcolare i coefficienti dei polinomi di Zernike $(\vec{a})$, noto il gradiente. Per come è costruita la matrice B , questa è quasi sempre rettangolare, perciò il risultato dell'inversione non è la vera inversa di B , che esiste solo per le matrici quadrate, ma la cosiddetta pseudo-inversa. Calcolata la matrice pseudo-inversa, ora è sufficiente applicarla alla mappa del gradiente del fronte d'onda

($\vec{\nabla}W$), e così ricavare i valori dei coefficienti dei polinomi di Zernike che costituiscono il fronte d'onda.

Questo procedimento è del tutto equivalente al metodo dei minimi quadrati, per trovare la funzione che meglio approssima i dati. In tal caso la funzione è quella data dalla combinazione lineare dei polinomi di Zernike con i coefficienti appena calcolati, il cui gradiente nelle posizioni delle subaperture, è quello che meglio approssima la mappa del gradiente del fronte d'onda.

Funzione calcolo coeff. di Zernike dal gradiente del WF

```
function [ i2 ] = Wavefront_decomposition_2(D,pos,DW,n_pol)
%{
    D = diametro apertura (m)
    pos = matrice posizioni in cui è stato calcolato il gradiente del wavefront
    DW = matrice contenente il gradiente del fronte d'onda nelle varie posizioni
    n_pol = numero polinomi usare per ricostruzione
%}

r = 0.5*D; %raggio apertura

% CALCOLO MATRICE B[] DERIVATE POLINOMI DI ZERNIKE E LA SUA INVERSA Binv[]
B = [0,0];
n_pos = size(pos);
n_pos = n_pos(1);

for j = 1:1:n_pos
    x_pos_j = (pos(j,1))/r;
    y_pos_j = (pos(j,2))/r;
    r_pos_j = sqrt(x_pos_j^2+y_pos_j^2);
    theta_pos_j = atan2(y_pos_j,x_pos_j);
    for k = 1:1:n_pol
        grad_Zernike = Zernike_grad(k,r_pos_j,theta_pos_j);
        B(j,k) = grad_Zernike(1);
        B(j+n_pos,k) = grad_Zernike(2);
    end
end

Binv = pinv(B);

% CALCOLO VETTORE A[] COEFFICIENTI POLINOMI DI ZERNIKE
S = [DW(:,1);DW(:,2)];
A = Binv*S*D/2; % tengo conto della dimensione dell'apertura

i2 = A';

end
```

SCRIPT per la ricostruzione del fronte d'onda

Contents

- INIZIALIZZAZIONE
- CALCOLO
- CONFRONTO

INIZIALIZZAZIONE

```

pix = 0.001;          % dim lato pixel (m)
L = 500;              % numero pixel immagine per lato
D = 0.5;              % dimensione diametro apertura (m)
s = 0.1;              % dimensione diametro sotto-apertura (m)
d = 0.1;              % distanza tra le sotto-aperture (m)
a = 0.5;              % distanza apertura da centro anelli disp subapert. (m)
f = 2.5;              % focale della lente (m)
lwave = 10^(-6);      % lunghezza d'onda (m)

% parametri del fronte d'onda di input
n_pol = 15;           % numero polinomi fronte d'onda di input
I = linspace(1,n_pol,n_pol); % vettore indici dei polinomi di Zernike
i = 0.1*lwave*[0,0,0.2155,0.3110,-0.6576,0.4121,0.9363,-0.4462,...
              -0.9077,-0.8057,0.6469,0.3897,-0.3658,0.9004,-0.9311];

% parametri del fronte d'onda ricostruito
n_pol_r = 15;         % numero polinomi da usare per la ricostruzione
I2 = [];
i2 = [];

```

CALCOLO

```

% calcolo fronte d'onda originale
Wavefront = Wavefront_complex(D,pix,L,I,i,lwave);

% partiziono la pupilla
pos = subAperture_position_polar2(D,d,a);
n_pos = size(pos);
n_pos = n_pos(1);

% misuro il gradiente del fronte d'onda
DW = Wavefront_gradient(L,pix,s,lwave,f,Wavefront,pos);

% ricavo i coefficienti di Zernike dal fronte d'onda
i2 = Wavefront_decomposition_2(D,pos,DW,n_pol_r);
I2 = linspace(1,n_pol_r,n_pol_r);

% annullo il tilt totale
i2(1) = 0;
i2(2) = 0;

% calcolo fronte d'onda ricostruito
Wavefront2 = Wavefront_complex(D,pix,L,I2,i2,lwave);

% calcolo differenza tra il fronte d'onda di input e quello ricostruito
Wavefront_diff = Wavefront_Diff(Wavefront,Wavefront2);

```

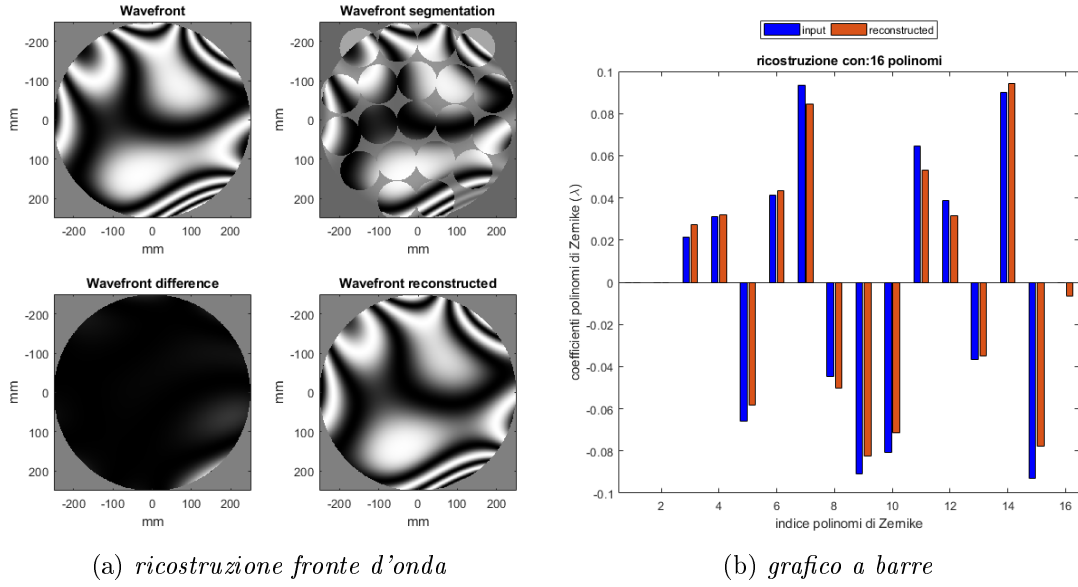


Figura 3.17: Output dello script per la ricostruzione di un fronte d'onda composto dai primi 15 polinomi di Zernike. La ricostruzione è stata eseguita campionando il fronte d'onda in 20 subaperture diverse, ed usando i primi 16 polinomi.

$$D = 0.5m, s = 0.1m, d = 0.1m, a = 0.5m, f = 2.5m, \lambda = 1\mu m$$

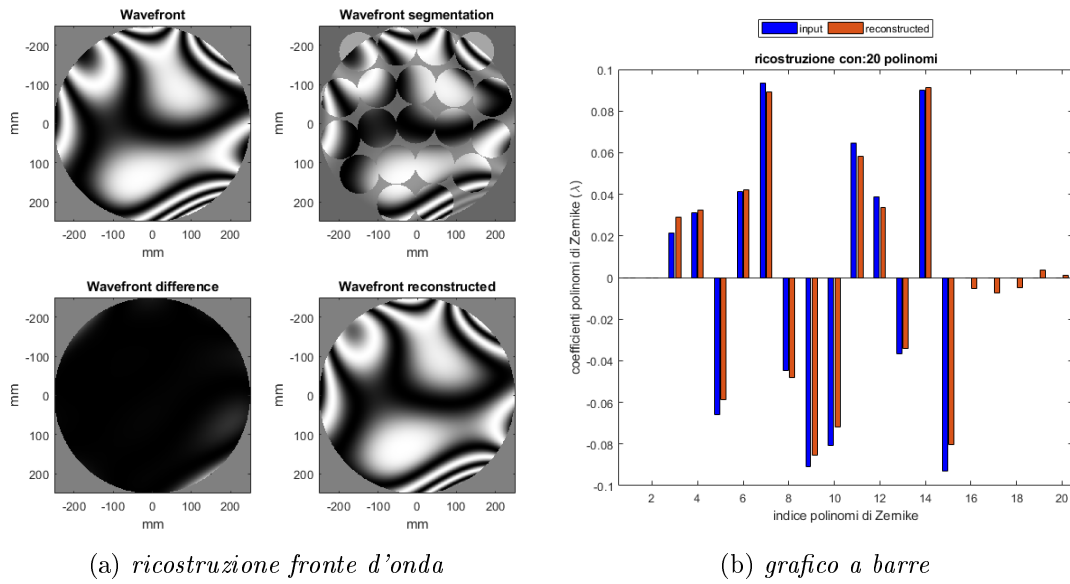


Figura 3.18: Output dello script per la ricostruzione di un fronte d'onda composto dai primi 15 polinomi di Zernike. La ricostruzione è stata eseguita campionando il fronte d'onda in 20 subaperture diverse, ed usando i primi 20 polinomi.

$$D = 0.5m, s = 0.1m, d = 0.1m, a = 0.5m, f = 2.5m, \lambda = 1\mu m$$

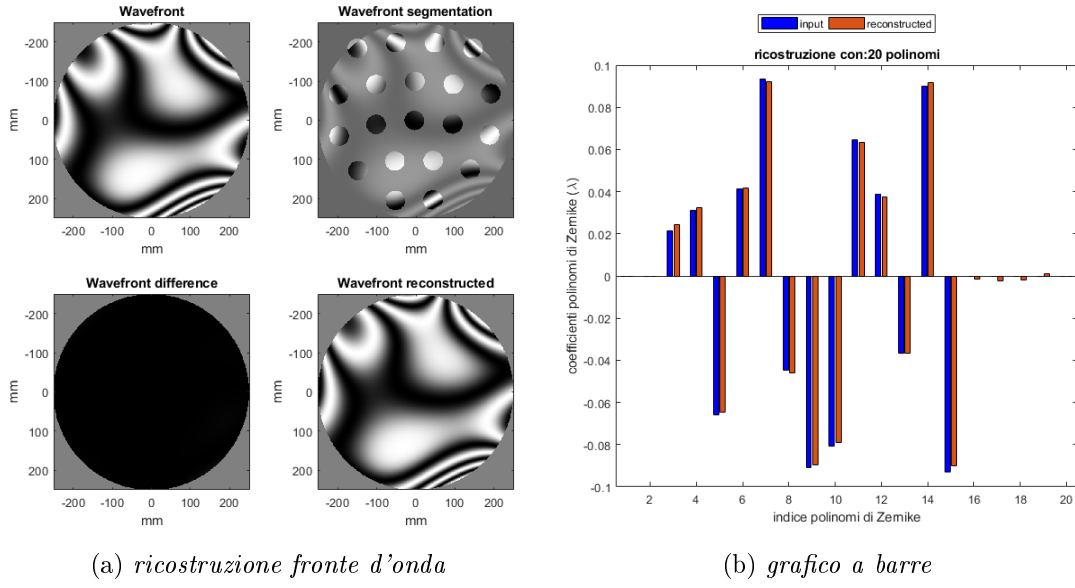


Figura 3.19: Output dello script per la ricostruzione di un fronte d'onda composto dai primi 15 polinomi di Zernike. La ricostruzione è stata eseguita campionando il fronte d'onda in 20 subaperture diverse, ed usando i primi 20 polinomi.

$$D = 0.5m, s = 0.05m, d = 0.1m, a = 0.5m, f = 2.5m, \lambda = 1\mu m$$

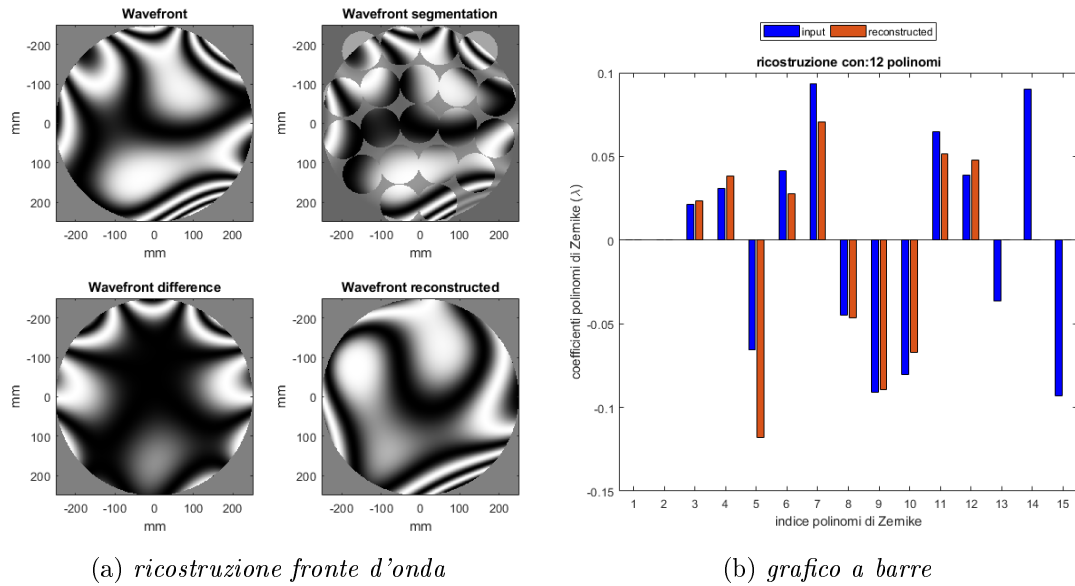


Figura 3.20: Output dello script per la ricostruzione di un fronte d'onda composto dai primi 15 polinomi di Zernike. La ricostruzione è stata eseguita campionando il fronte d'onda in 20 subaperture diverse, ed usando i primi 12 polinomi.

$$D = 0.5m, s = 0.1m, d = 0.1m, a = 0.5m, f = 2.5m, \lambda = 1\mu m$$

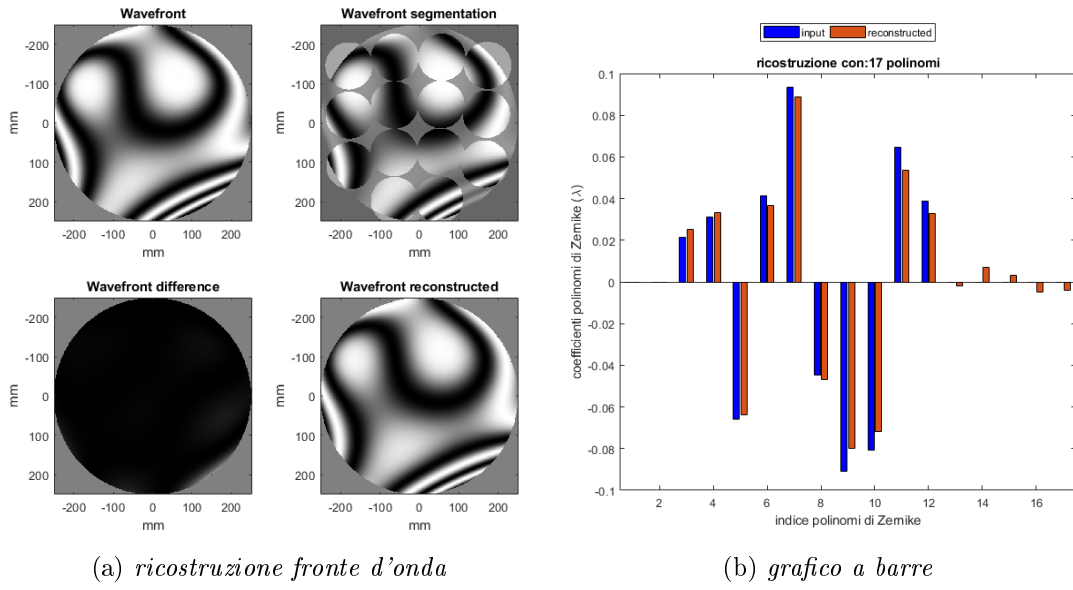


Figura 3.21: Output dello script per la ricostruzione di un fronte d'onda composto dai primi 12 polinomi di Zernike. La ricostruzione è stata eseguita campionando il fronte d'onda in 14 subaperture diverse, ed usando i primi 17 polinomi.

$$D = 0.5m, s = 0.12m, d = 0.12m, a = 0.5m, f = 2.5m, \lambda = 1\mu m$$

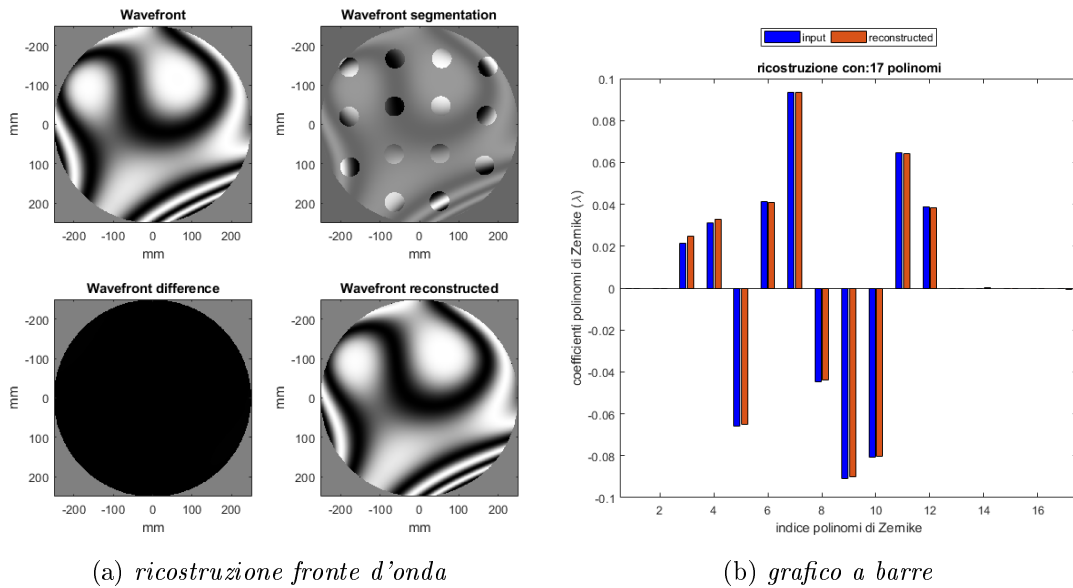


Figura 3.22: Output dello script per la ricostruzione di un fronte d'onda composto dai primi 12 polinomi di Zernike. La ricostruzione è stata eseguita campionando il fronte d'onda in 14 subaperture diverse, ed usando i primi 17 polinomi.

$$D = 0.5m, s = 0.12m, d = 0.05m, a = 0.5m, f = 2.5m, \lambda = 1\mu m$$

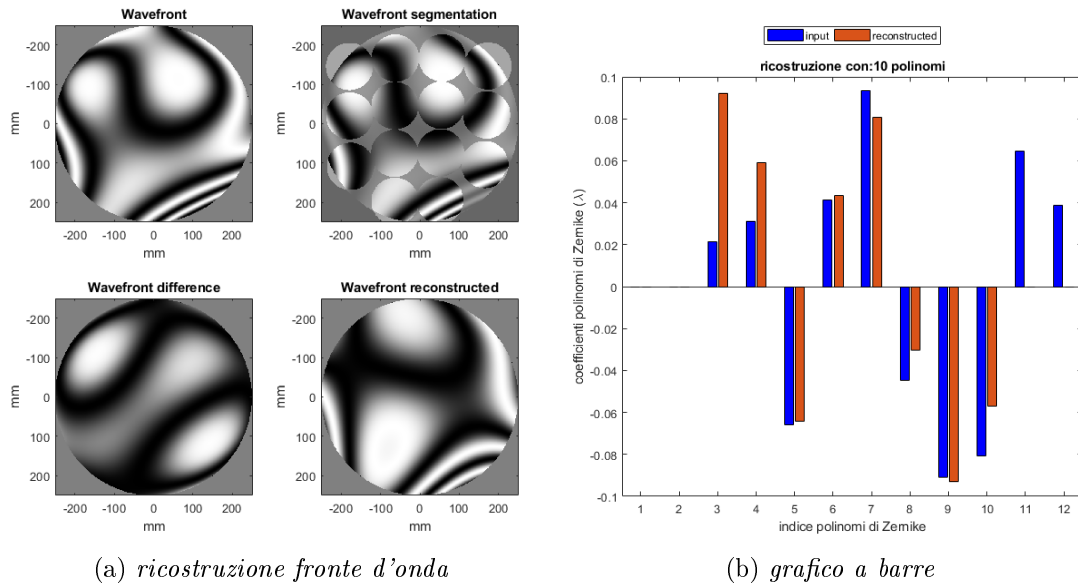


Figura 3.23: Output dello script per la ricostruzione di un fronte d'onda composto dai primi 12 polinomi di Zernike. La ricostruzione è stata eseguita campionando il fronte d'onda in 14 subaperture diverse, ed usando i primi 10 polinomi.

$$D = 0.5m, s = 0.12m, d = 0.12m, a = 0.5m, f = 2.5m, \lambda = 1\mu m$$

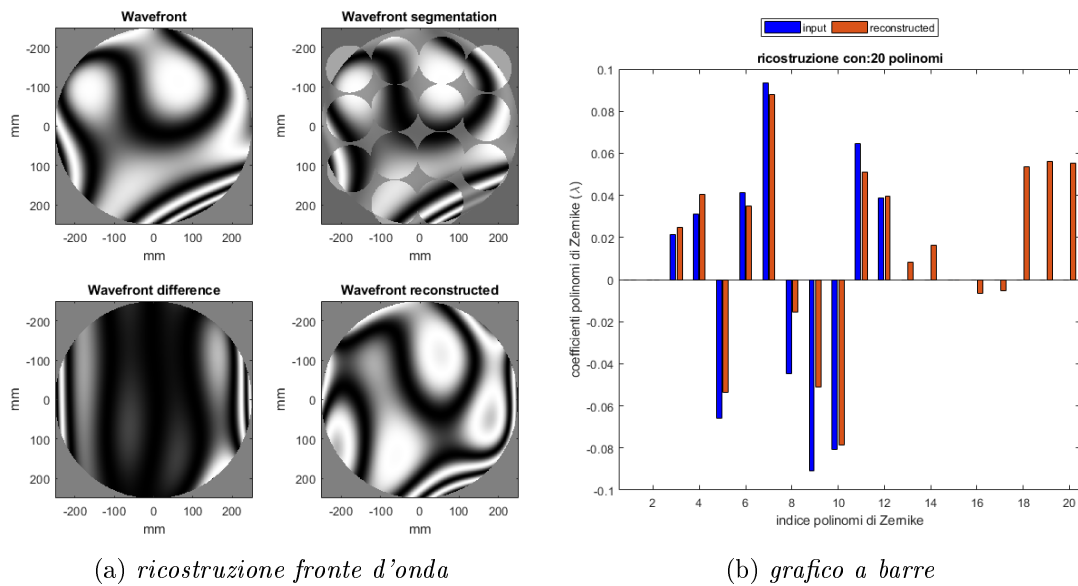


Figura 3.24: Output dello script per la ricostruzione di un fronte d'onda composto dai primi 12 polinomi di Zernike. La ricostruzione è stata eseguita campionando il fronte d'onda in 14 subaperture diverse, ed usando i primi 20 polinomi.

$$D = 0.5m, s = 0.12m, d = 0.12m, a = 0.5m, f = 2.5m, \lambda = 1\mu m$$

N_{sub}	$d(m)$	$s(m)$	$a(m)$	$N_{pol_{WF}}$	$N_{pol_{rec}}$	$RMS_{residuo} (\lambda)$
20	0.1	0.12	0.5	15	20	0.035
	0.1	0.1	0.5	15	20	0.025
	0.1	0.075	0.5	15	20	0.015
	0.1	0.05	0.5	15	20	0.0068
	0.1	0.025	0.5	15	20	0.0018
14	0.12	0.12	0.5	15	17	0.048
	0.12	0.1	0.5	15	17	0.032
	0.12	0.075	0.5	15	17	0.015
	0.12	0.05	0.5	15	17	0.0044
	0.12	0.025	0.5	15	17	0.0017

Tabella 3.1: risultati della ricostruzione del fronte d'onda al variare della dimensione delle sottoaperture.

$$D = 0.5m, f = 2.5m, \lambda = 1\mu m$$

I risultati della ricostruzione al variare della dimensione delle sottoaperture, mostrati nelle figure precedenti, sono riassunti nella tabella 3.1. Dalla tabella è evidente che sia nella segmentazione a 20 sottoaperture, che in quella a 14, la diminuzione del diametro delle sottoaperture ha permesso di ricostruire meglio il fronte d'onda. Infatti se con le aperture di dimensioni pari a $0.12m$, la ricostruzione del fronte d'onda con 20 sottoaperture ha portato ad avere un RMS residuo di 0.035λ , mentre con 14 sottoaperture ad un residuo di 0.048λ . Usando sottoaperture di $0.025m$, l'RMS residuo si è ridotto a circa 0.0018λ in entrambi i casi.

Nella tabella 3.2 sono invece riassunti i risultati, mostrati nelle figure precedenti, della ricostruzione al variare del numero di polinomi per la ricostruzione. Dalla tabella si nota che sia usare pochi polinomi, che usarne troppi danneggia il risultato della ricostruzione. Infatti ripetendo la ricostruzione con 12 e con 32 polinomi, nel caso di una segmentazione a 20 sottoaperture e per un fronte d'onda in cui solo i primi 15 polinomi sono diversi da zero, l'RMS residuo è maggiore di 0.1λ in entrambi i casi. La ricostruzione dà i risultati migliori invece usando 22 polinomi, ottenendo un RMS residuo di 0.024λ . Anche se si tenta di campionare con 14 sottoaperture un fronte d'onda in cui solo i primi 12 polinomi sono diversi da zero, si ottiene lo stesso risultato. Infatti sia ricostruendo con solo 10 polinomi, che con 20, l'RMS residuo è pari 0.11λ in entrambi i casi. Il risultato migliore, $RMS = 0.022\lambda$, lo si ottiene invece ricostruendo con 18 polinomi.

N_{sub}	$d(m)$	$s(m)$	$a(m)$	$N_{pol_{WF}}$	$N_{pol_{rec}}$	$RMS_{residuo} (\lambda)$
20	0.1	0.1	0.5	15	32	0.12
	0.1	0.1	0.5	15	26	0.028
	0.1	0.1	0.5	15	22	0.024
	0.1	0.1	0.5	15	18	0.026
	0.1	0.1	0.5	15	16	0.029
	0.1	0.1	0.5	15	12	0.15
14	0.12	0.12	0.5	12	20	0.11
	0.12	0.12	0.5	12	18	0.022
	0.12	0.12	0.5	12	16	0.025
	0.12	0.12	0.5	12	14	0.026
	0.12	0.12	0.5	12	12	0.026
	0.12	0.12	0.5	12	10	0.11

Tabella 3.2: risultati della ricostruzione del fronte d'onda al variare del numero di polinomi usati per la ricostruzione.

$$D = 0.5m, f = 2.5m, \lambda = 1\mu m$$

I risultati mostrati nelle due tabelle evidenziano, che per una ricostruzione ottimale è necessario scegliere con attenzione il numero di polinomi da usare nella ricostruzione, e la dimensione delle sottoaperture. In particolare, il numero di polinomi ottimale è fortemente correlato al numero delle sottoaperture usate nella segmentazione. Naturalmente tentare di ricostruire con pochi polinomi un fronte d'onda più complesso, porterà a ricostruire un fronte d'onda che poco somiglierà a quello reale. Invece è meno ovvio che usare troppi polinomi porti allo stesso risultato. Ciò è più collegato al procedimento matematico di inversione della matrice B . Come precedentemente spiegato, questa matrice ha un numero di colonne esattamente pari al numero di polinomi usati nella ricostruzione, mentre il numero di righe è pari al doppio del numero delle sottoaperture. Ne consegue che aumentando a dismisura il numero di polinomi nella ricostruzione, la matrice avrà un numero sempre maggiore di colonne, di fronte allo stesso numero di righe. Inevitabilmente la matrice risulta sempre più rettangolare, fino a rendere il sistema malcondizionato, e così rendere poco realistica la ricostruzione del fronte d'onda.

L'altra cosa mostrata dalle tabelle è che diminuire la dimensione delle sottoaperture, migliora i risultati della ricostruzione. La spiegazione si trova considerando che il

sistema che si vuole risolvere:

$$B\vec{a} = \vec{\nabla}W$$

considera il vettore dei gradienti ($\vec{\nabla}W$), come formato dalle derivate del fronte d'onda nei punti in cui sono disposte le sottoaperture. Invece le sottoaperture devono avere una loro estensione, quindi i valori inseriti nel vettore in realtà corrispondono ai gradienti del fronte d'onda mediati all'interno delle sottoaperture. Ne consegue che con sottoaperture più piccole, i gradienti medi misurati corrispondono di più ai gradienti veri e propri alle coordinate delle sottoaperture.

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{p_m} \sim \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{(x_{pm}, y_{pm})} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{p_m} \sim \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{(x_{pm}, y_{pm})}$$

Da ciò sembrerebbe scontato che usare sottoaperture infinitesime migliorerebbe i risultati. Ma bisogna tenere in considerazione che usare sottoaperture più piccole comporta aumentare il tempo di posa del sensore, pena la non identificazione della posizione dello spot. Inoltre anche se si aumenta il tempo di posa a sufficienza, risulterebbe più incerta la misura stessa della posizione dello spot, a causa dell'aumento del rumore di fondo.

3.6 Simulazioni per un campo di vista

Come spiegato nei paragrafi precedenti, la tecnica della pupil-segmentation prevede lo studio del gradiente del fronte d'onda a partire da una sequenza di immagini, ottenute ciascuna selezionando una porzione diversa del fronte d'onda. Nel caso di una sorgente puntiforme, ciò si traduce nella determinazione della posizione della PSF (figura di diffrazione), ovvero delle coordinate del suo baricentro.

Ma se invece di una sorgente puntiforme, si ha a disposizione un intero campo di vista? In tal caso, bisogna ricordare che l'immagine del campo di vista non è altro che la convoluzione dell'oggetto con la PSF. Così, quando si seleziona una singola sottoapertura, si osserva che l'intera immagine si muove sul sensore. Spostamento che, in modo del tutto analogo al caso di una sorgente puntiforme, corrisponde al gradiente medio del fronte d'onda sulla sottoapertura scelta.

Per questo motivo la tecnica della pupil-segmentation è applicabile anche ad un intero campo di vista, con la difficoltà aggiuntiva di dover calcolare non il baricentro di uno spot, ma lo spostamento dell'immagine.

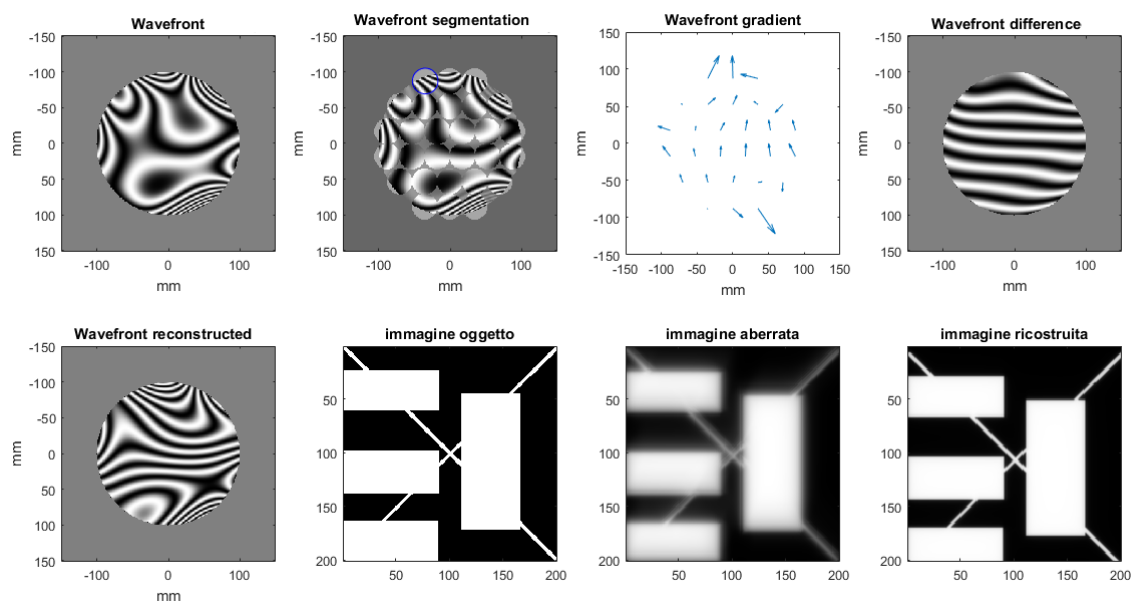


Figura 3.25: risultati della simulazione della misura del fronte d'onda con la tecnica della pupil-segmentation

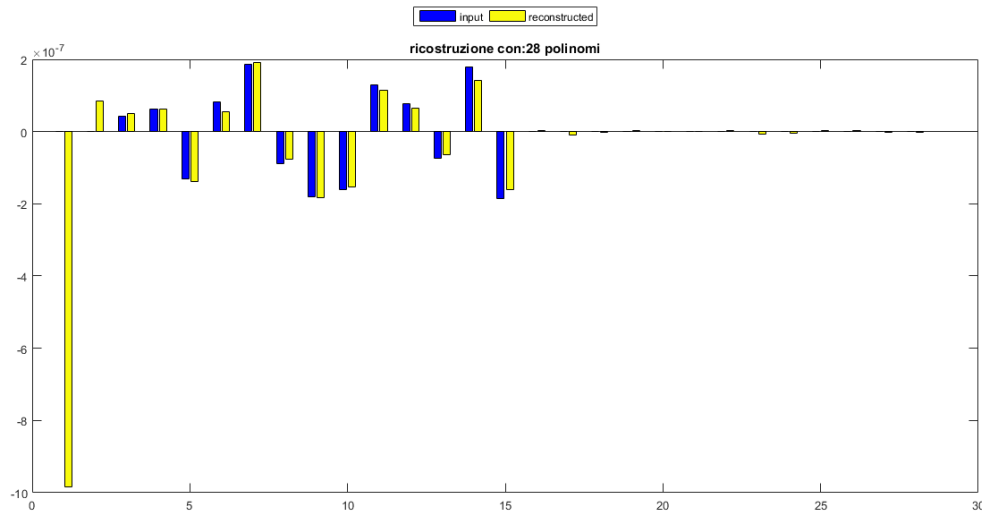


Figura 3.26: decomposizione in polinomi di Zernike del fronte d'onda misurato con la tecnica della pupil-segmentation

Spostamento dell'immagine Nel caso di una sorgente puntiforme, è sufficiente calcolare la posizione del baricentro (B_x, B_y) dello spot mediante la seguente formula:

$$B_x = \frac{\sum x_i I_i}{\sum I_i} \quad B_y = \frac{\sum y_i I_i}{\sum I_i}$$

avendo l'accortezza di restringere il calcolo solo su quei pixel del sensore in cui è presente lo spot.

Nel caso di una sorgente puntiforme, lo spot presente sull'immagine è uno solo, quindi è sufficiente selezionare solo i pixel il cui conteggio sia al di sopra di un certo valore di soglia.

Invece quando si ha a che fare con un intero campo di vista, le cose sono più complesse. Infatti non si tratta solo di stimare lo spostamento di un punto, perchè in tal caso sarebbe sufficiente anche usare lo stesso criterio, ma di misurare lo spostamento dell'intero campo di vista sul sensore. Poichè il campo di vista è necessariamente limitato (dal sistema ottico o dal sistema stesso), quando quest'ultimo si sposta, inevitabilmente il sensore ne seleziona una parte leggermente diversa dalla precedente. Questo è il motivo principale per cui applicare la tecnica del baricentro, per calcolare lo shift del campo di vista, semplicemente non ha senso. Dato che le porzioni dell'immagine entranti o uscenti al bordo del campo di vista aggiungerebbero un contributo sostanziale al calcolo del baricentro, introducendo un errore.

Dato ciò, una valida alternativa è quella che fa uso della convoluzione. Nello specifico si tratta di applicare la convoluzione tra due immagini relative a sottoaperture differenti: la prima riferita alla sottoapertura presa in considerazione, e la seconda relativa ad una

sottoapertura scelta come riferimento.

Così, scegliendo come riferimento per tutte le sottoaperture quella relativa ad una di esse, si ottiene la misura dello shift in ogni sottoapertura rispetto alla sottoapertura scelta. Infine applicando la formula che lega lo shift al gradiente, si ottiene il gradiente del fronte d'onda in ciascuna subapertura. Dato che lo shift è calcolato rispetto ad una subapertura particolare, lo stesso vale per il gradiente del fronte d'onda. Quindi il gradiente misurato in ogni sottoapertura presenta un offset, che corrisponde al gradiente dell'apertura di riferimento; infatti in questa sottoapertura la sua misura risulterà nulla per costruzione. Ciò si riflette solo sui valori di Tip e Tilt del fronte d'onda ricostruito, che per questo motivo perdono di significato concreto, nel senso che non rispecchiano i veri valori di Tip e Tilt del fronte d'onda originario.

Ovviamente dato che ci si riferisce a una particolare sottoapertura e dato che l'immagine priva di aberrazioni non è disponibile, non è possibile determinare tip/tilt iniziali tuttavia, è possibile correggere la posizione in modo relativo e quindi mantenere l'immagine fissa rispetto a un riferimento che è arbitrario.

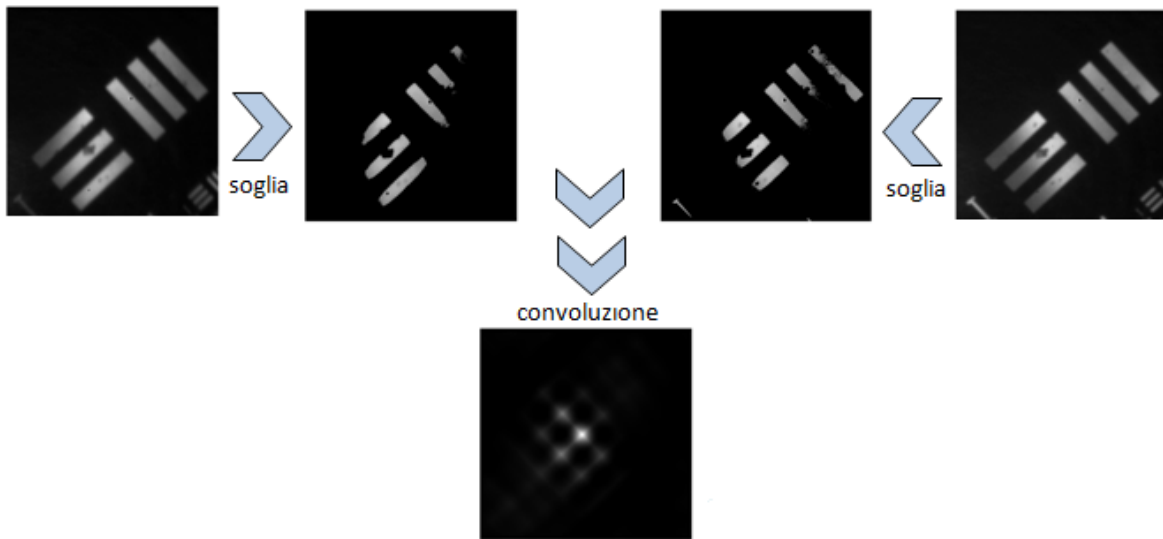


Figura 3.27: schema di come lavora lo script per il calcolo dello shift tra due immagini

Nella figura 3.27 viene mostrato come lavora il codice per il calcolo dello shift della prima immagine rispetto alla seconda. Il codice essenzialmente si preoccupa di eseguire la convoluzione tra le due immagini, la cui posizione del massimo corrisponde allo shift, ciò viene eseguito con l'uso della FFT per velocizzare l'algoritmo. Ma prima di ciò, alle due immagini viene applicato il valore di soglia di input. Questo valore deve essere compreso nell'intervallo $[0, 1]$, così solo i pixel con il valore di conteggio(c): $c > \min(Im) + soglia * (\max(Im) - \min(Im))$, preservano il loro valore, mentre il valore degli altri viene annullato.

L'applicazione di una soglia alle immagini, di solito 0.5, ha portato l'algoritmo a determinare meglio lo spostamento tra le due.

Funzione che calcola lo shift tra due immagini tramite la convoluzione

```
function [shift] = Shift(Im1,Im2,scala,label,soglia)
%{
    Im1 = immagine1
    Im2 = immagine2
    soglia = [0,1]
    scala = dimensione fisica pixel
    label = 'unità di misura'
%}
maxIm1 = max(max(Im1));
minIm1 = min(min(Im1));
sogliaIm1 = (maxIm1-minIm1)*soglia;
Im1(find(Im1<=sogliaIm1)) = 0;

maxIm2 = max(max(Im2));
minIm2 = min(min(Im2));
sogliaIm2 = (maxIm2-minIm2)*soglia;
Im2(find(Im2<=sogliaIm2)) = 0;

% calcolo FFT di Im1
Im1_fft = fft2(Im1);
Im1_fft = fftshift(Im1_fft);

% calcolo FFT di Im2
Im2_fft = fft2(Im2);
Im2_fft = fftshift(Im2_fft);

% calcolo convoluzione di Im1 e Im2 usando le loro FFT
Ic_fft = Im1_fft.*conj(Im2_fft);
Ic = ifft2(Ic_fft);
Ic = fftshift(Ic);
Ic = abs(Ic).^2;

[Ic_rows,Ic_cols] = size(Ic);
[Ic_maxy,i_maxy] = max(Ic,[],1);
[Ic_maxx,i_maxx] = max(Ic_maxy);
shift = [(i_maxx-1-Ic_cols/2)*scala,(-i_maxy(i_maxx)+1+Ic_rows/2)*scala];
end
```


Test di laboratorio

Nel capitolo precedente sono state descritte in dettaglio le simulazioni della tecnica della pupil-segmentation, eseguite con il linguaggio di programmazione Matlab. In questo capitolo verrà esposta l'applicazione di questa tecnica in laboratorio, e la sua implementazione in un sistema di ottica adattiva a loop chiuso in grado di correggere l'aberrazione del fronte d'onda.

La realizzazione di questo sistema ha richiesto l'utilizzo di hardware apposito. Costituito da un sensore, un elemento deformabile (in questo caso una lente deformabile multi attuatore) ed una maschera per la segmentazione della pupilla azionata da un motorino passo-passo. In particolare la maschera è stata realizzata, tramite una stampante 3D.

4.1 Funzionamento

Il setup ottico realizzato per applicare la tecnica della pupil-segmentation è composto dai seguenti elementi:

- un fascio laser collimato;
- la maschera a forma di disco agganciata al motorino passo-passo;
- lente deformabile (DL)
- lente di focalizzazione (L1);
- videocamera posizionata sul piano focale della lente;

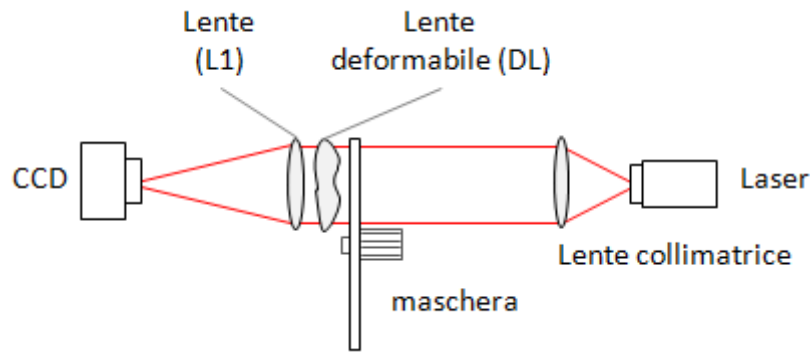


Figura 4.1: pupil-segmentation setup

4.1.1 La lente deformabile

La lente adattiva multi-attuatore è composta da due finestre di vetro sottile (spessore $150\mu m$), sopra ciascuna delle due è montato un anello di attuatori piezoelettrici, vedi figura 4.2. L'intercapedine tra le due finestre è riempita di liquido trasparente, olio minerale. La prima finestra è usata per generare defocus e astigmatismo mentre la seconda genera la coma e l'astigmatismo secondario. Gli attuatori piezoelettrici hanno un diametro esterno di $25mm$ e quello interno di $10mm$, con uno spessore di $200\mu m$. Entrambi gli anelli sono suddivisi in 8 settori che possono essere azionati indipendentemente, questi sono incollati alle finestre e agiscono come un attuatore bimorfo.[2]

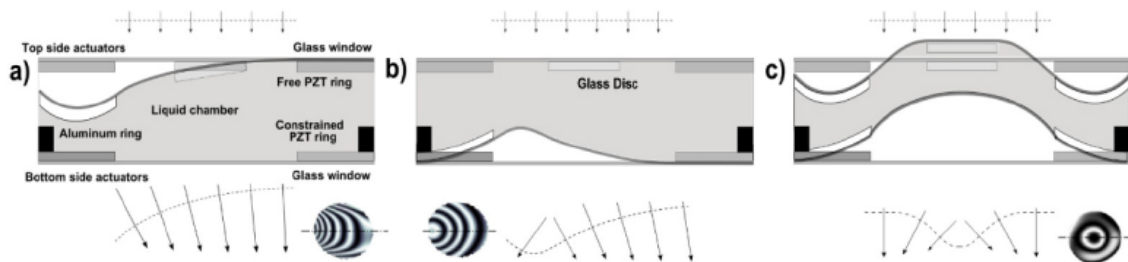


Figura 4.2: layout della lente adattiva multi-attuatore. I tre pannelli a-c) mostrano la deformazione del fronte d'onda prodotta da tre deformazioni diverse della lente: a) attivazione di un elettrodo sulla finestra superiore, b) attivazione di un elettrodo sulla finestra inferiore, c) entrambi gli attuatori attivati con lo stesso voltaggio.

4.1.2 La maschera

La maschera progettata è a forma di disco, e presenta un foro centrale per essere ancorata al motorino passo-passo. La maschera è stata pensata in modo tale da presentare un foro grande quanto l'apertura completa, che permette di osservare l'immagine corretta; e dei fori più piccoli, che permettono di campionare il fronte d'onda. La rotazione del disco permette di muovere ciascuno dei forellini, cosicchè ciascuno di loro permette di selezionare la sottoapertura desiderata all'interno di un arco disegnato sulla pupilla del sistema ottico. Infatti il numero di forellini non corrisponde al numero delle sottoaperture, ma al numero degli anelli. La disposizione delle sottoaperture all'interno dell'apertura, risulta così corrispondere alla disposizione anulare descritta nel capitolo precedente.

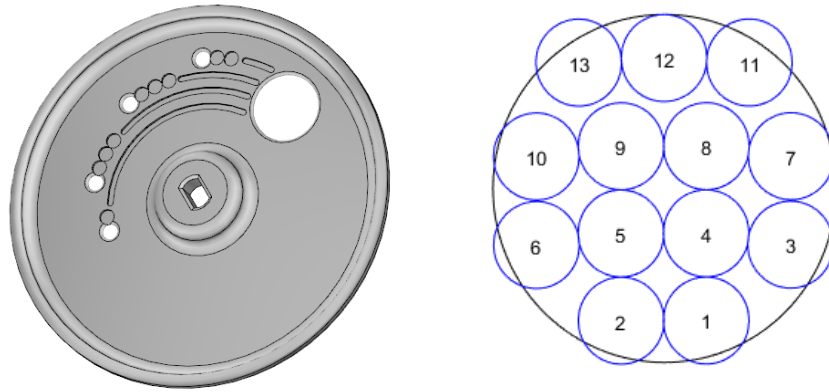


Figura 4.3: Design maschera1 a sinistra e relativo campionamento della pupilla a destra.
 $D = 10mm, a = 20mm, s = d = 2.5mm$

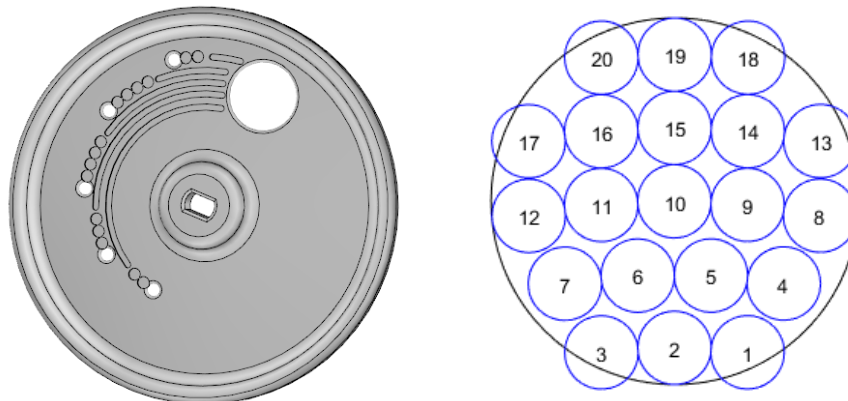


Figura 4.4: Design maschera2 a sinistra e relativo campionamento della pupilla a destra.
 $D = 10mm, a = 20mm, s = d = 2mm$

4.1.3 GUI matlab

Il cervello del sistema è la GUI (graphical user interface) realizzata in matlab. Questa è stata sviluppata appositamente per permettere di controllare il motorino, la videocamera e la lente deformabile. Inoltre richiama gli algoritmi presentati nel capitolo precedente, tra cui: le funzioni per la disposizione delle sottoaperture, quelle per la ricostruzione del fronte d'onda, quelle per il calcolo del gradiente del fronte d'onda e quelle per impartire i comandi alla lente deformabile.

Inizializzazione La fase di inizializzazione comprende l'inserimento nella GUI di tutti quei parametri che descrivono il sistema: lunghezza focale della lente ($L1$), numero di step che il motore compie per una rivoluzione completa, i parametri della maschera, il tempo di esposizione della videocamera, l'apertura di riferimento, ed il numero di polinomi per la ricostruzione.

Fondamentale è anche l'orientamento della maschera, che deve corrispondere a quello presente nella GUI. Nel caso non sia così è sufficiente far compiere al motorino il numero necessario di passi affinché ci sia corrispondenza tra l'orientazione reale della maschera e quella presente nella GUI.

Calibrazione La fase di calibrazione consiste nel determinare la matrice d'influenza degli attuatori della lente deformabile. Ovvero una matrice che contiene la mappa del gradiente del fronte d'onda per ogni attuatore della lente deformabile (DL). Per determinare la matrice d'influenza, la GUI procede eseguendo un'unica lunga scansione su tutte le sottoaperture, in modo del tutto analogo alla procedura di misura del fronte d'onda. Per ognuna di esse aziona singolarmente gli attuatori, uno alla volta, memorizzando il relativo spostamento dell'immagine.

Misura del fronte d'onda Premendo il relativo pulsante nella GUI, si avvia il procedimento di misura il fronte d'onda. La GUI procede con il comandare il motorino e la videocamera per scansionare tutte le sottoaperture. Per ciascuna sottoapertura, nell'ordine dalla prima all'ultima, il motorino compie il numero di step calcolati per orientare rispettivamente la maschera, e solo successivamente la GUI cattura un'istantanea dalla videocamera, e prosegue verso le sottoaperture seguenti. Dopo aver raccolto tutte le immagini, la GUI procede con il calcolo della posizione, usando il baricentro oppure la convoluzione, per ogni immagine, ottenendo così la mappa del gradiente del fronte d'onda. Infine esegue l'algoritmo di ricostruzione del fronte d'onda.

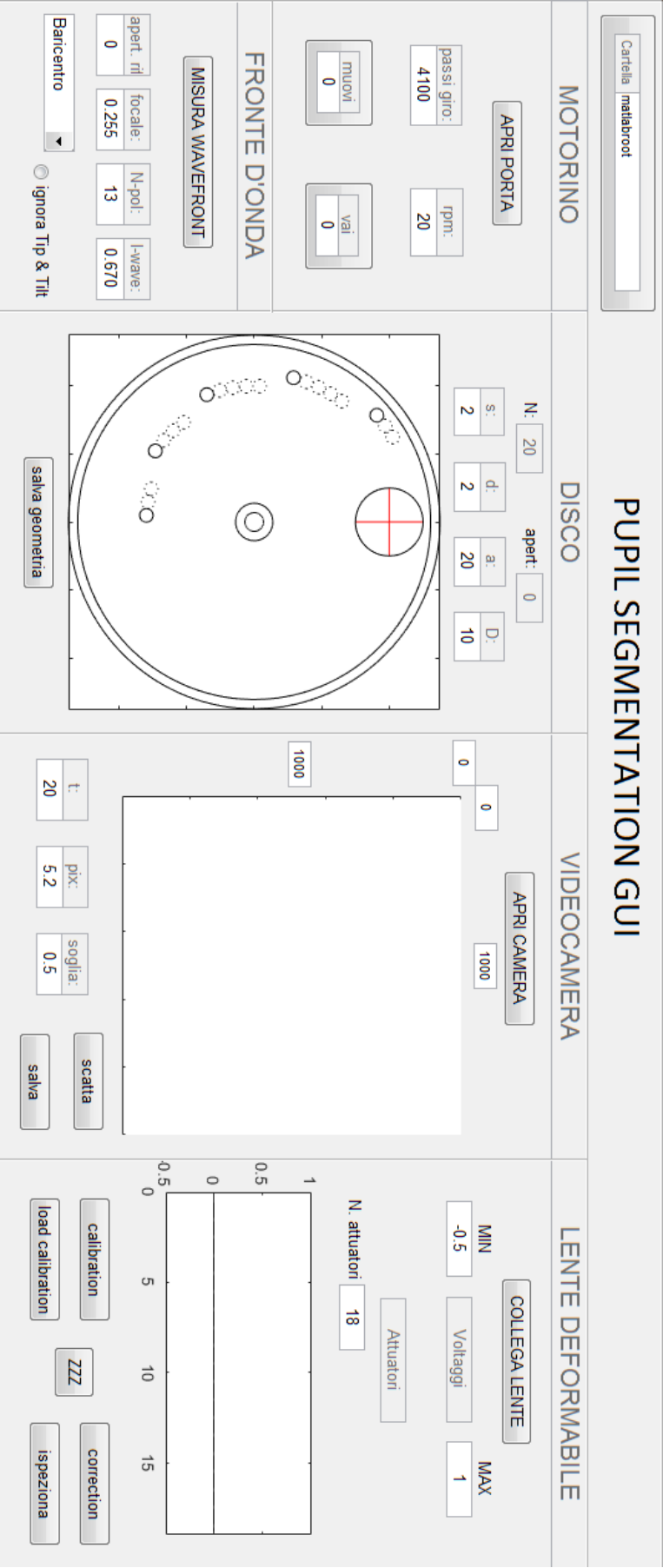


Figura 4.5: GUI

Correzione del fronte d'onda A seguito della pressione del relativo pulsante sulla GUI, questa calcola gli input da inviare alla lente deformabile applicando l'inversa della matrice d'influenza, precedentemente ottenuta dalla procedura di calibrazione, alla mappa del gradiente del fronte d'onda. Il risultato è un vettore contenente le variazioni di voltaggio da applicare a ciascun attuatore della lente deformabile. In conclusione il comando impartito alla DL è dato dalla somma tra il vettore appena calcolato, e quello inviato precedentemente.

Nella GUI è anche possibile selezionare il range di voltaggio per gli attuatori, per evitare di mandare comandi in grado di depolarizzarla. Infatti prima di inviare un qualsiasi comando alla DL, la GUI esegue un check sui valori del vettore per verificare che si trovino tutti all'interno dell'intervallo selezionato. Se così non è il rispettivo valore viene riportato all'estremo più vicino dell'intervallo.

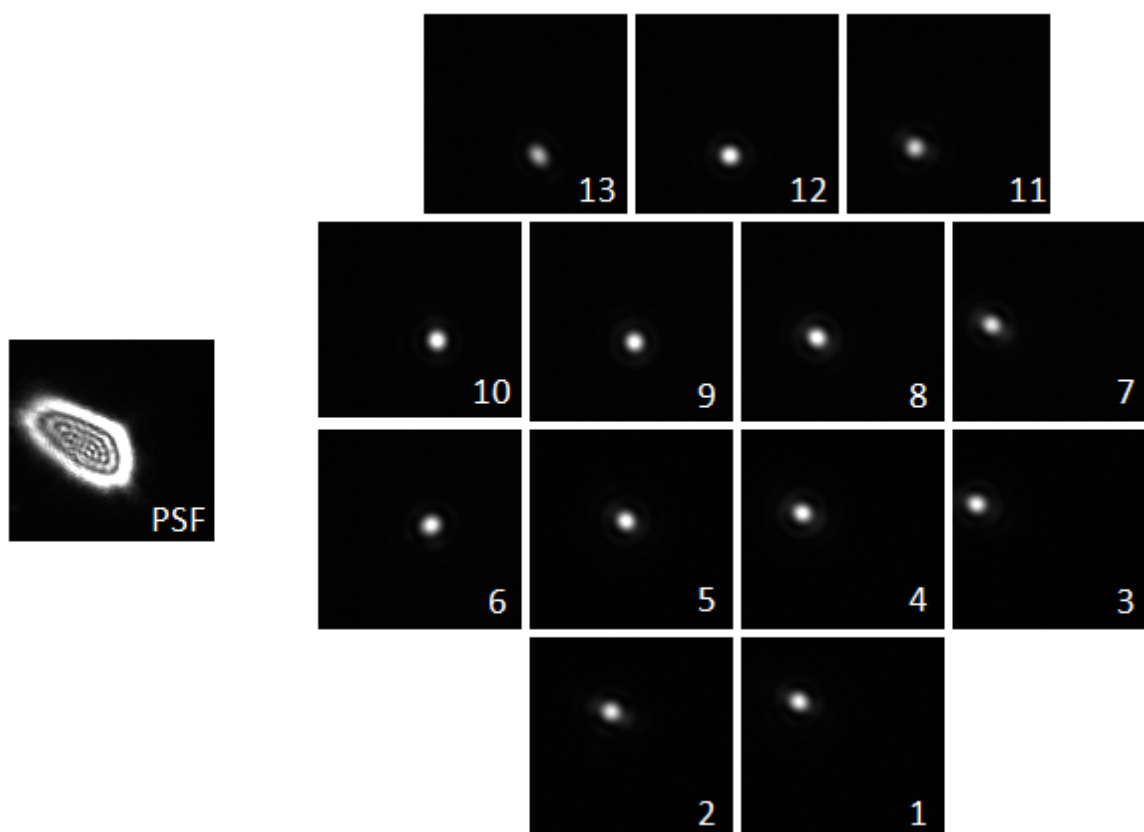


Figura 4.6: Immagini raccolte durante l'operazione di misura del fronte d'onda con la maschera1 per una sorgente puntiforme

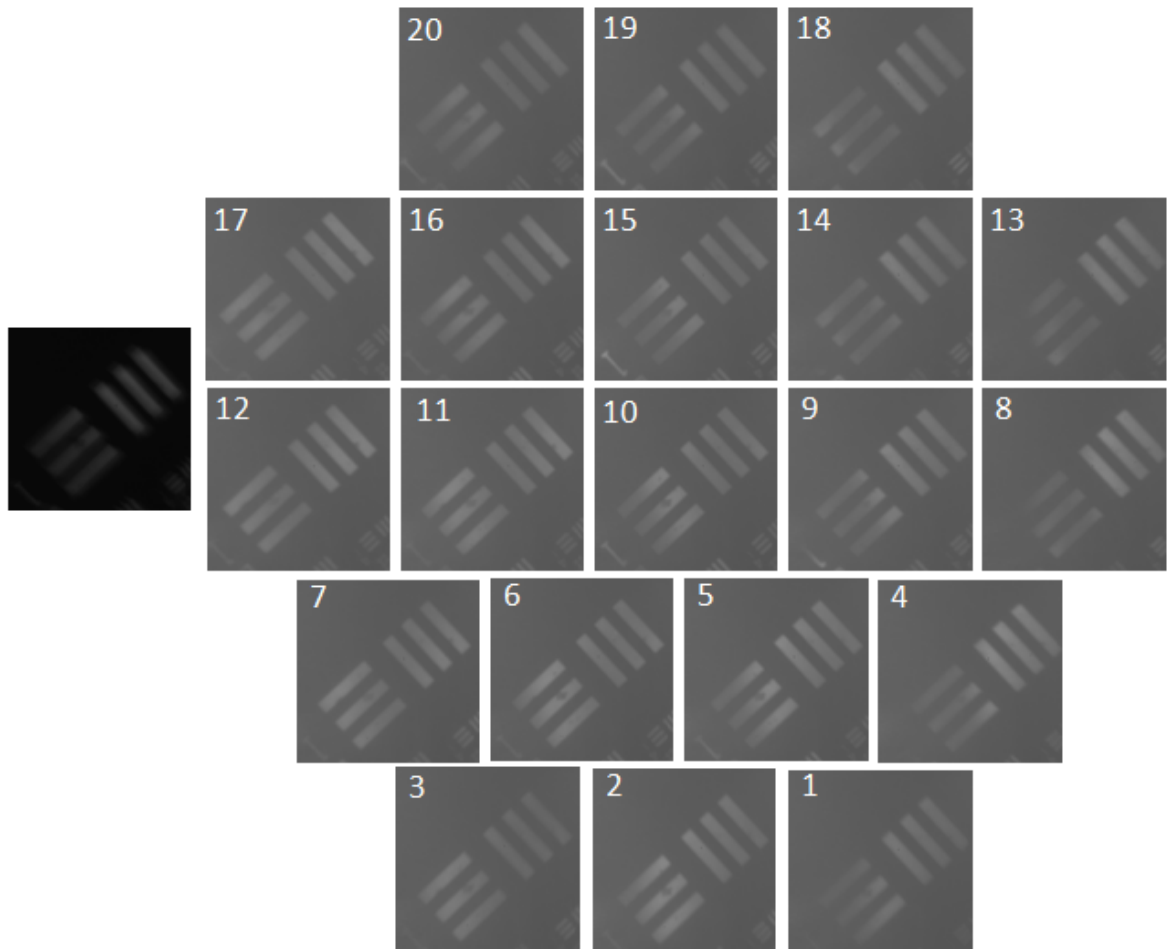


Figura 4.7: Immagini raccolte durante l'operazione di misura del fronte d'onda con la maschera2 per una sorgente estesa

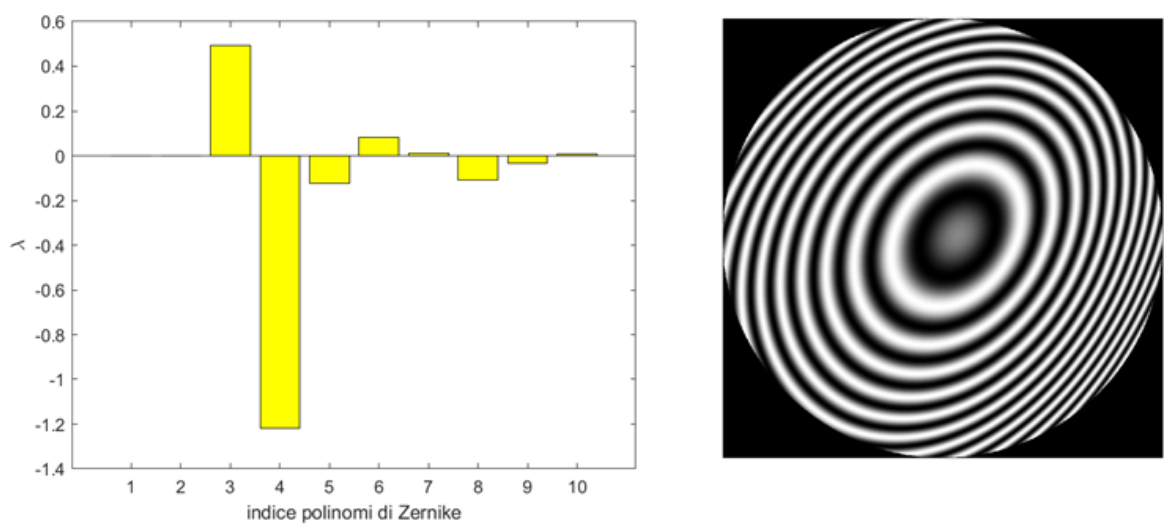


Figura 4.8: ricostruzione del fronte d'onda misurato nella figura 4.6

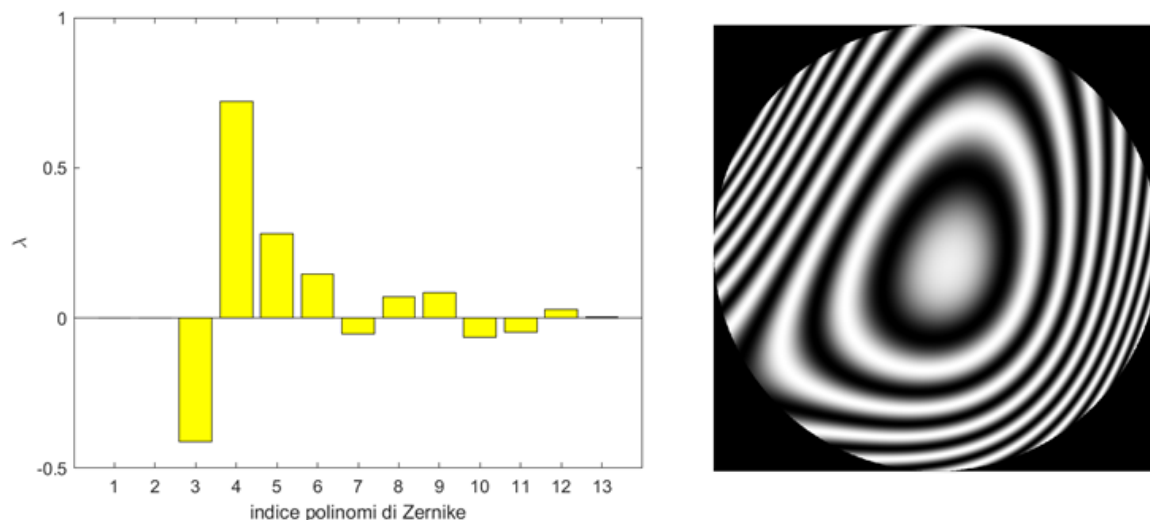


Figura 4.9: ricostruzione del fronte d'onda misurato nella figura 4.7

4.2 Confronto con il sensore Shack-Hartmann

La verifica della corretta misura del fronte d'onda, da parte del sistema pupil-segmentation, è stata eseguita misurando il medesimo fronte d'onda con un sensore di tipo Shack-Hartmann.

Il setup ottico è stato aggiornato aggiungendo i seguenti elementi:

1. un beam splitter davanti alla videocamera per sdoppiare il fascio.
2. una lente di collimazione sul nuovo braccio del setup ottico.
3. un sensore Shack-Hartmann, costituito da una videocamera con array di micro-lenti incorporato, posto ad una distanza dalla nuova lente, tale per cui si trovasse otticamente coniugato al piano della maschera per la pupil segmentation.

Usando un'apposito programma sviluppato nel laboratorio che permette di misurare il WF con lo SH e di comandare la lente deformabile, è stato possibile chiudere il loop di AO. Questo sistema permette, oltre a correggere il fronte d'onda, di aberrarlo a piacimento, ad esempio imponendo alla lente di realizzare dei polinomi di zernike. Ciò permette di confrontare il fronte d'onda riprodotto con la lente deformabile, grazie ad un sistema di misura indipendente, con quello misurato con la tecnica della pupil-segmentation.

L'obiettivo è confrontare i coefficienti di Zernike relativi al fronte d'onda di input con i coefficienti ricostruiti con la tecnica della pupil-segmentation. Se il sistema di pupil-segmentation funziona correttamente i coefficienti ricostruiti devono corrispondere a

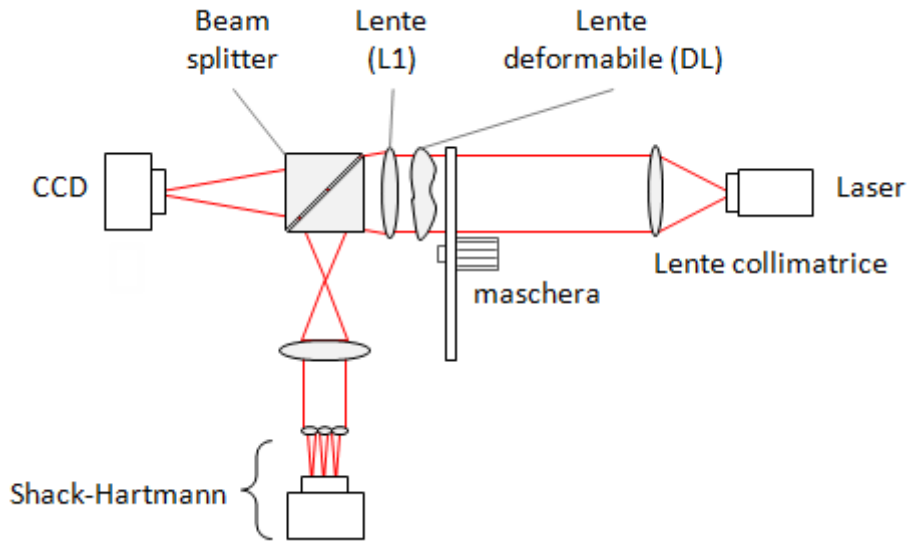


Figura 4.10: setup confronto Pupil-segmentation con Shack-Hartmann

quelli di input. Il confronto è eseguito tenendo conto di un eventuale offset presente tra i due sistemi, dovuto ad aberrazioni introdotte dalla presenza di elementi ottici diversi lungo i due bracci ottici, dette "aberrazioni di cammino non comune" o in inglese "non common path aberrations". Infatti il fascio che viene analizzato dal sensore Shack-Hartmann, deve passare attraverso una lente extra, che non interessa il fascio studiato dalla pupil-segmentation, e un beamsplitter, che potrebbe avere un effetto diverso sui due bracci.

Con questo nuovo setup sono stati eseguiti due esperimenti diversi. Nel primo si è voluto osservare il responso del sistema pupil-segmentation all'aumentare di una specifica aberrazione introdotta dalla lente deformabile. Viceversa nel secondo esperimento si è mantenuta l'aberrazione fissa, ed è stato misurato il fronte d'onda con il sistema pupil-segmentation al variare della distanza del rispettivo sensore dalla lente (L1).

4.2.1 Esperimento 1

In questo esperimento si è voluto testare il sistema pupil-segmentation all'aumentare di un'aberrazione specifica. Per tenere in considerazione un eventuale offset presente tra i due sistemi, è stato necessario ottenere un riferimento: misura del fronte d'onda con il sistema pupil-segmentation alla chiusura del loop con lo Shack-Hartmann. Successivamente, nel programma che interagisce con lo shack-Hartmann, è stata specificata quale aberrazione aggiungere al fronte d'onda, e confrontare ciò con l'output del sistema pupil-segmentation.

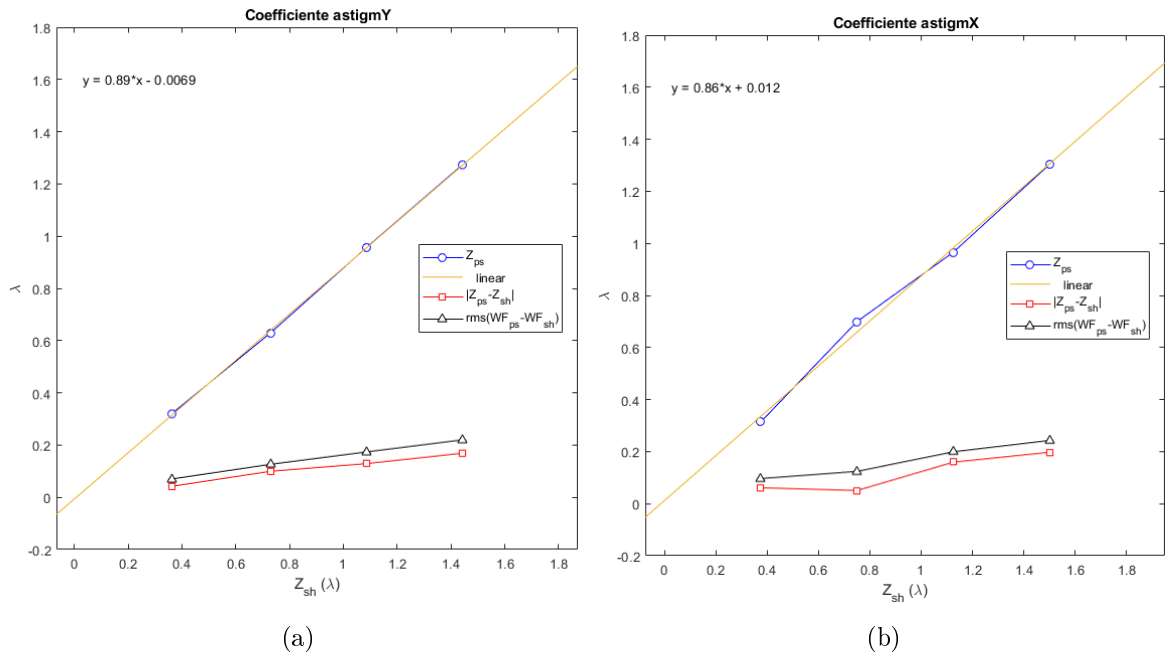


Figura 4.11: confronto tra Pupil-segmentation e Shack-Hartmann: a sinistra al variare del coefficiente di Astigmatismo-Y, a destra al variare del coefficiente di Astigmatismo-X

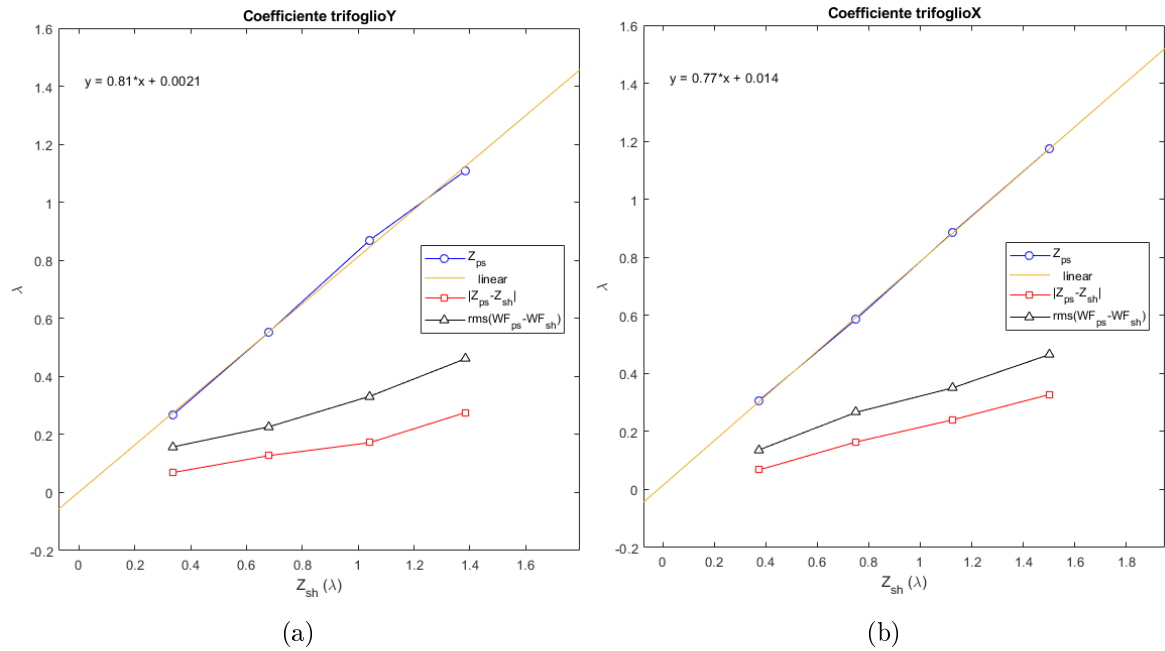


Figura 4.12: confronto tra Pupil-segmentation e Shack-Hartmann: a sinistra al variare del coefficiente di Trifoglio-Y, a destra al variare del coefficiente di Trifoglio-X

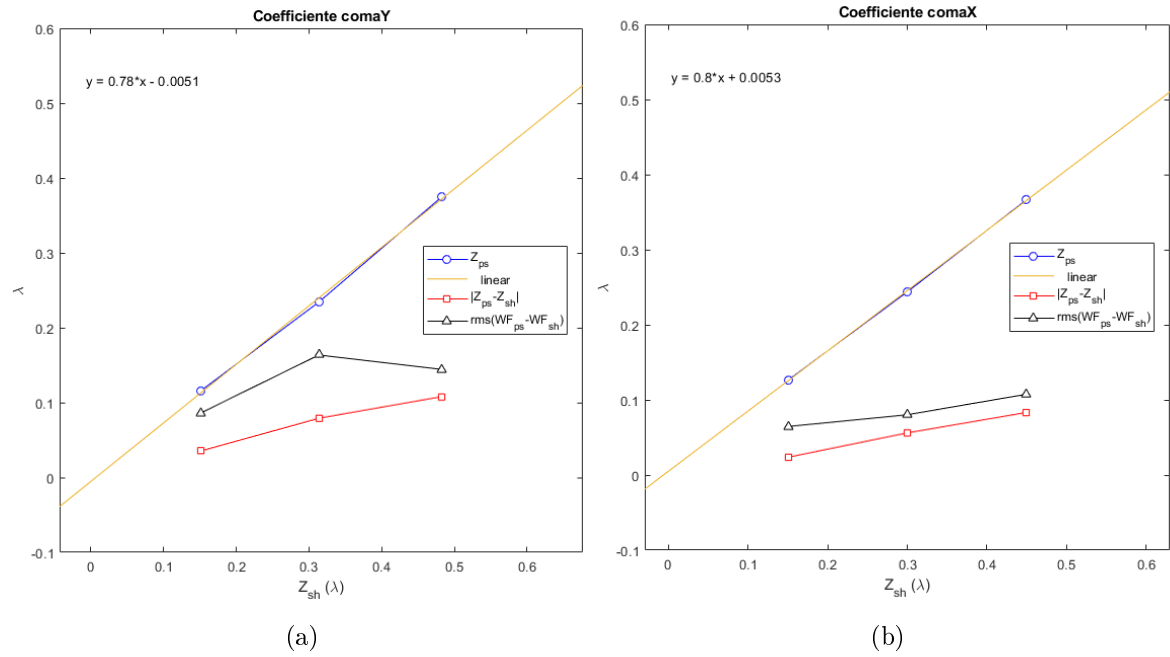


Figura 4.13: confronto tra Pupil-segmentation e Shack-Hartmann: a sinistra al variare del coefficiente di Coma-Y, a destra al variare del coefficiente di Coma-X

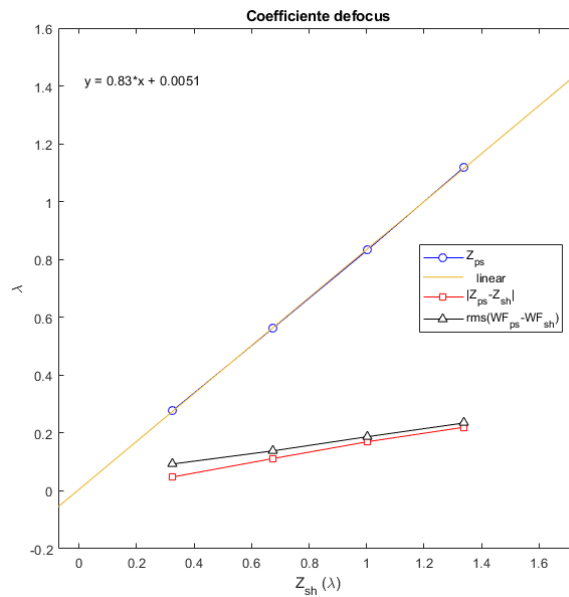


Figura 4.14: confronto tra Pupil-segmentation e Shack-Hartmann al variare del coefficiente di Defocus

I grafici mostrano per ogni coefficiente dello Shack-Hartmann: il rispettivo coefficiente relativo alla Pupil-segmentation (retta blu), la loro differenza (retta rossa) e l'RMS del fronte d'onda residuo (retta nera) tra quello ricostruito con lo Shack-

Hartmann e quello ricostruito con la pupil-segmentation. Inoltre è stato applicato un fit sui punti della retta blu.

Dal confronto risulta che la variazione nei coefficienti di Zernike, ottenuti con la pupil-segmentation, è lineare come ci si aspetta. Ma che la pendenza della retta non è unitaria, bensì oscilla tra 0.77 per l'aberrazione di trifoglioX e 0.89 per l'astigmatismoY. Ciò è sufficiente per affermare che comunque la tecnica della pupil-segmentation funziona correttamente, infatti aumentando il contributo di una specifica aberrazione con il loop-chiuso dello Shack-Hartmann, la tecnica della pupil-segmentation è in grado di rilevare un aumento proporzionale di quella stessa aberrazione.

4.2.2 Esperimento 2

Nell'esperimento precedente si è osservato che i coefficienti di Zernike, ottenuti con la tecnica della pupil-segmentation, non sono ad un rapporto unitario con quelli che caratterizzano l'aberrazione introdotta con la lente deformabile. Quindi, ci si chiede se ciò sia dovuto ad un posizionamento del sensore che non sia esattamente sul piano focale della lente, oppure che la distanza inserita nella GUI tra il sensore e la lente non corrisponde esattamente a quella reale.

Il secondo esperimento ha come obiettivo di sciogliere proprio questo dubbio. Perciò in questo esperimento è stato deciso di misurare lo stesso fronte d'onda con la tecnica della pupil-segmentation, posizionando il relativo sensore a distanze diverse dalla lente (L1). Tenendo conto, nella misura della mappa del gradiente del fronte d'onda, della vera distanza tra sensore e lente.

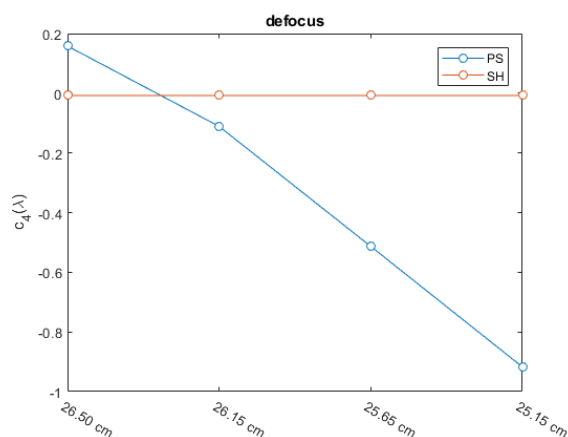


Figura 4.15: misura del coefficiente di defocus al variare della distanza del sensore dalla lente nel sistema pupil-segmentation, mantenendo costante l'aberrazione con il sistema SHack-Hartmann

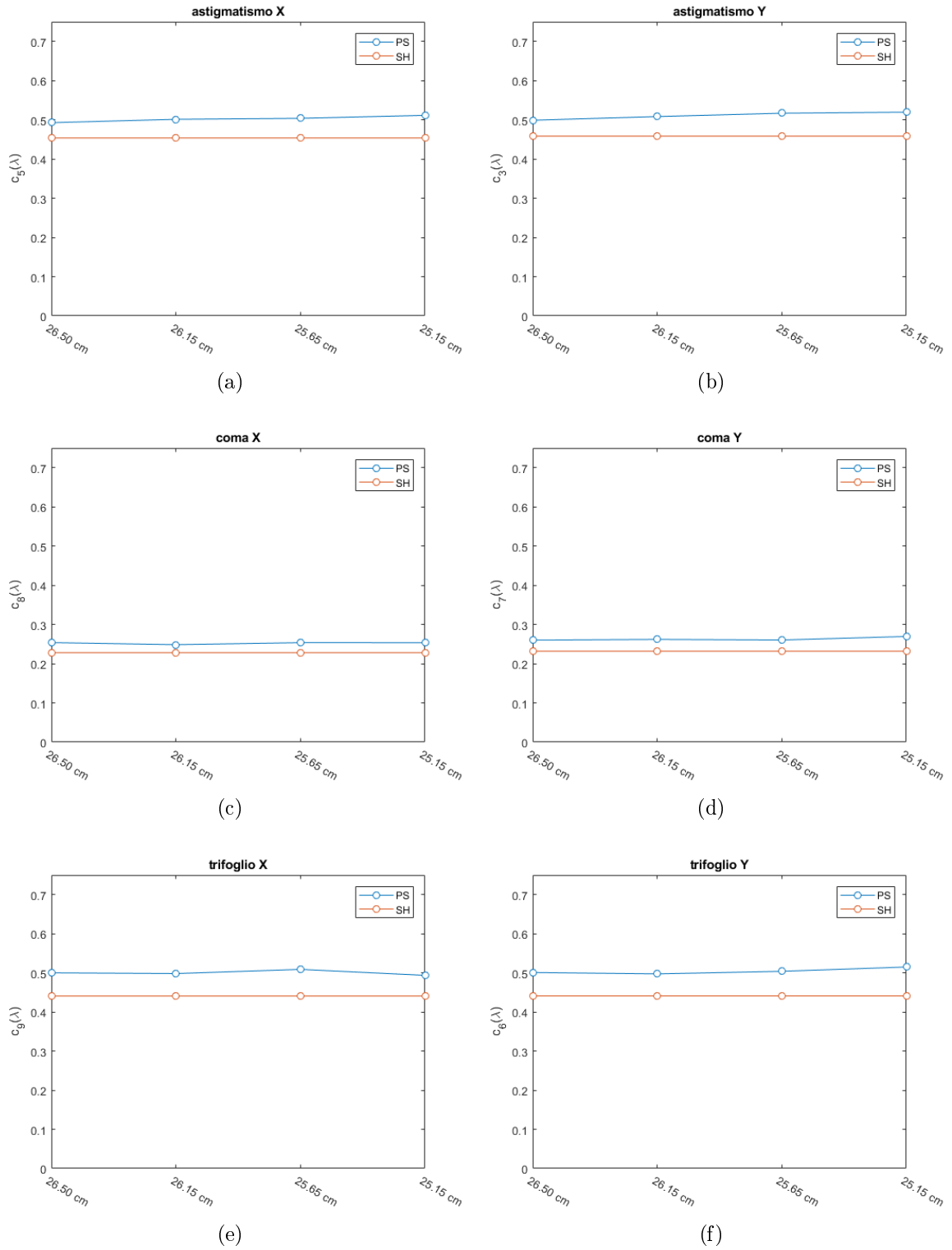


Figura 4.16: misura dei coefficienti di astigmatismo, coma e trifoglio al variare della distanza del sensore dalla lente nel sistema pupil-segmentation, mantenendo costante l'aberrazione con il sistema Shack-Hartmann

Anche stavolta i coefficienti misurati con il sistema pupil-segmentation non coincidono con quelli dello Shack-Hartmann. Però, i grafici mostrano che nonostante il sensore sia cambiato di posizione, il valore dei coefficienti per le aberrazioni di astigmatismo, di coma e di trifoglio è rimasto invariato. Mentre il coefficiente di defocus è variato in maniera lineare. Ciò significa che, a patto di conoscere la distanza vera tra lente e sensore, la misura del fronte d'onda può avvenire correttamente anche se il sensore non è posizionato sul piano focale della lente, aggiungendo però un offset alla misura di Defocus.

Quindi, si può concludere che il rapporto non unitario tra i coefficienti dello Shack-Hartmann e quelli del sistema Pupil-segmentation sono dovuti ad una misura errata della distanza tra lente (L1) e sensore.

4.3 Closed loop: sorgente puntiforme

Nella sezione precedente sono state mostrate le evidenze sperimentali a prova del funzionamento del sistema di pupil-segmentation. A questo punto non resta altro da provare se non chiudere il loop con il sistema di pupil-segmentation, e verificare che questo sia in grado di correggere il fronte d'onda, ossia cancellare le aberrazioni.

Il setup utilizzato coincide con il primo utilizzato: ad un fascio collimato seguono la maschera, la lente deformabile ed infine la lente che focalizza sulla videocamera. Stavolta non ci si è limitati soltanto alla misura dell'aberrazione, come già menzionato, ma a seguito di questa sono stati inviati alla lente deformabile i comandi necessari per correggerla. Quindi ogni step di un closed loop che si rispetti presenta le seguenti fasi:

1. misura della mappa del gradiente del fronte d'onda ($\vec{\nabla}W$)
2. ricostruzione del fronte d'onda (W)
3. calcolo ed invio degli input alla lente deformabile

Notare bene che il fronte d'onda ricostruito è il fronte d'onda residuo, infatti il fascio passa già attraverso la lente deformabile prima di raggiungere la videocamera, per definizione di closed-loop. Quindi i voltaggi calcolati per gli attuatori della lente sono in realtà la differenza di voltaggio che deve essere applicata a ciascun attuatore per correggere il fronte d'onda residuo.

Nel setup corrente l'aberrazione del fascio è dovuta alla presenza della lente deformabile stessa in condizione di riposo (ogni attuatore ha un voltaggio pari a zero). Il procedimento di correzione del fronte d'onda è stato ripetuto per tre volte.

Prima di procedere alla chiusura del loop, è stato effettuato il passaggio della calibrazione per ottenere la matrice d'influenza degli attuatori della lente deformabile (immagine 4.17) necessaria per comandarla correttamente. Matrice d'influenza che per altro è molto simile a quella del programma che controlla lo shack-Hartmann (immagine 4.18)

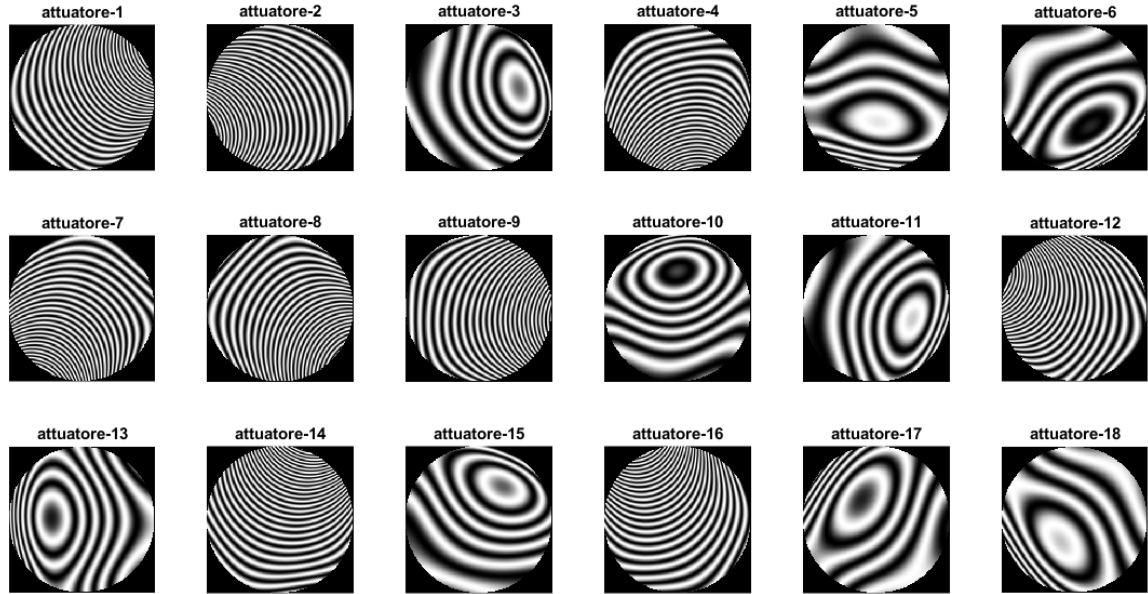


Figura 4.17: matrice d'influenza ottenuta con la pupil-segmentation

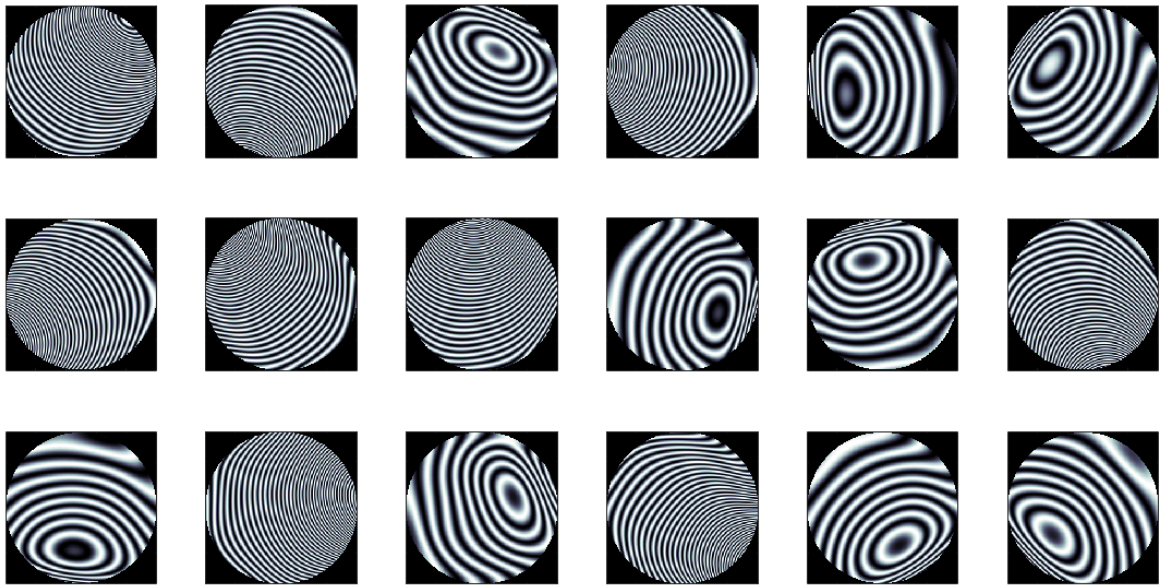


Figura 4.18: matrice d'influenza ottenuta con il programma che controlla lo Shack-Hartmann

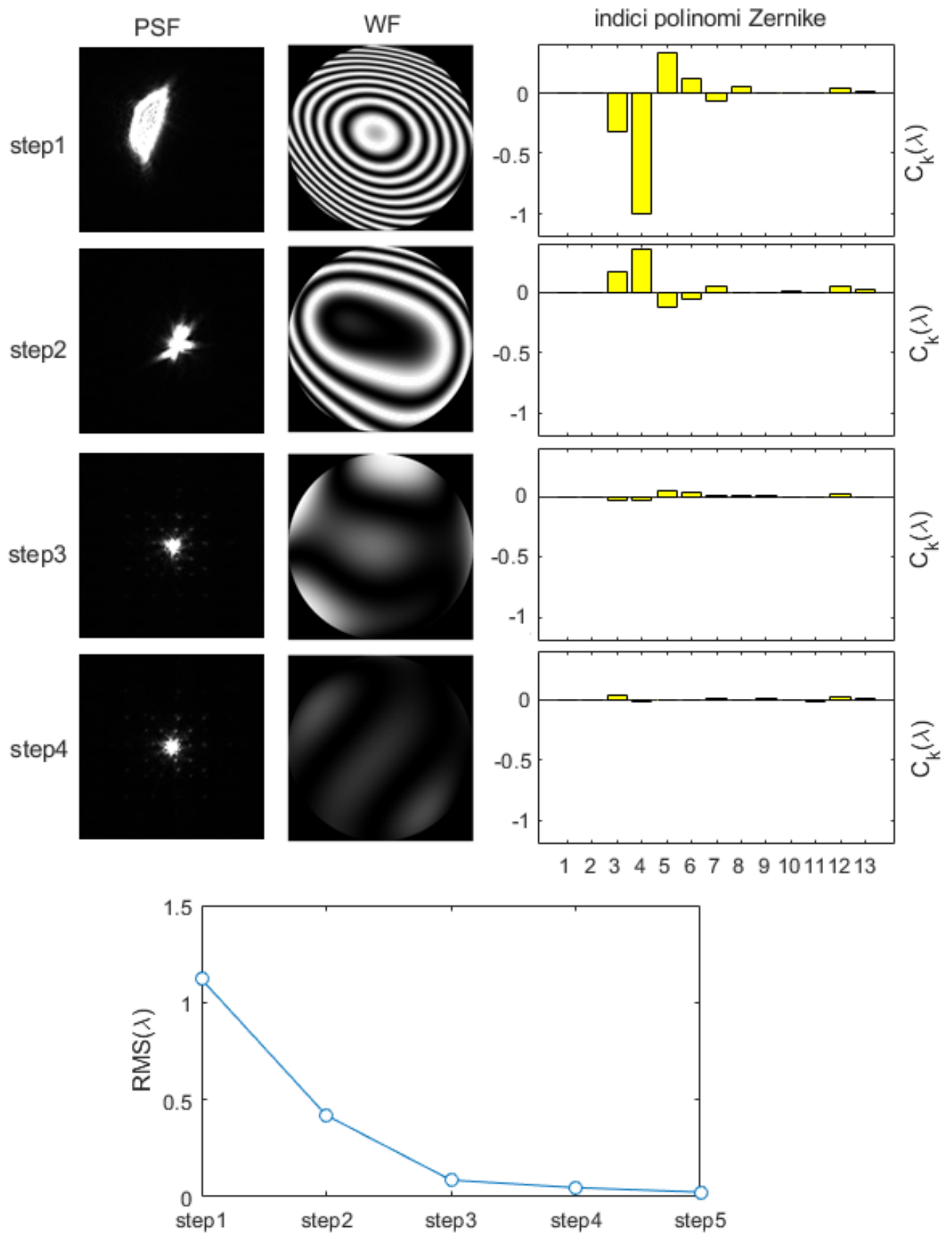


Figura 4.19: closed loop 1

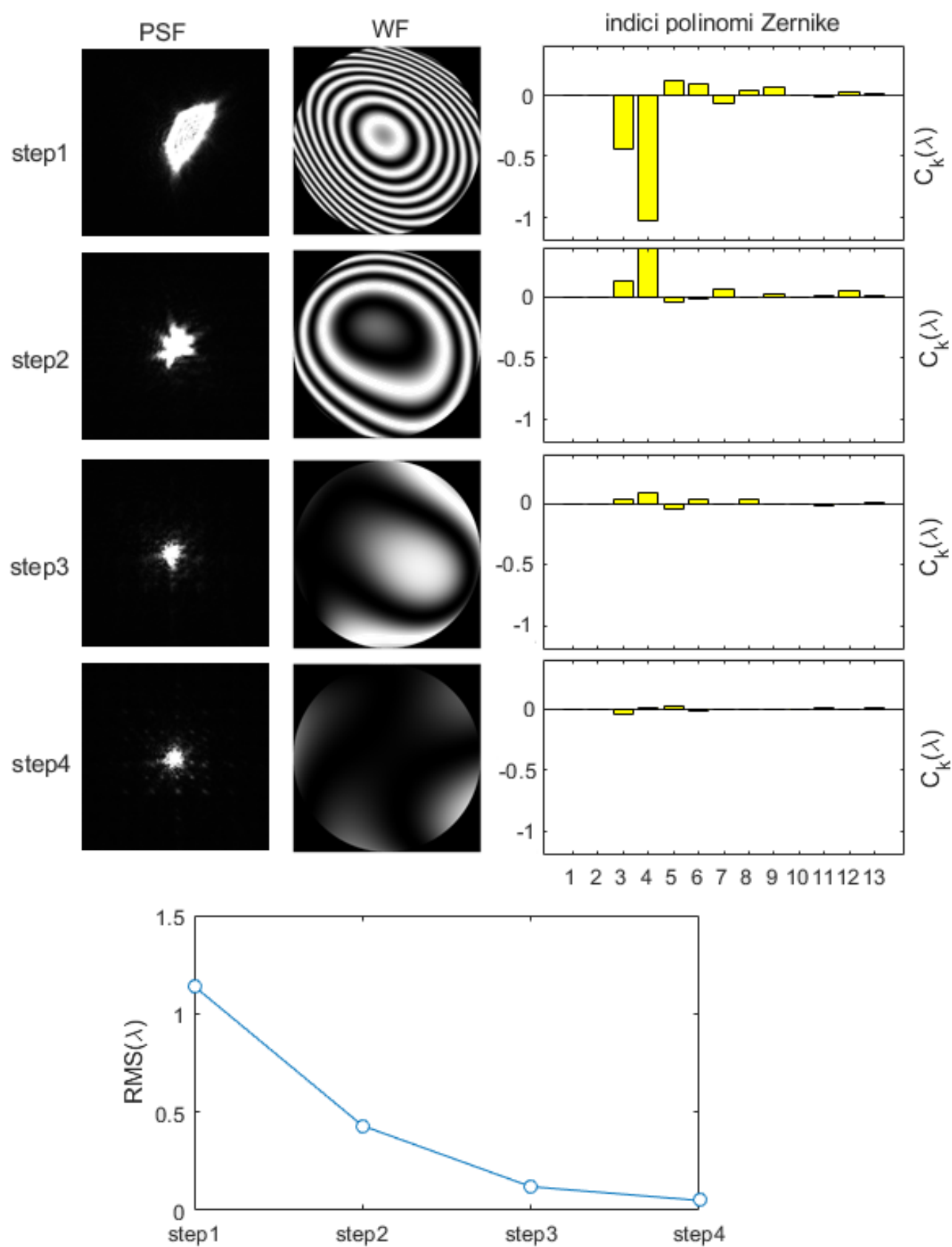


Figura 4.20: closed loop 2

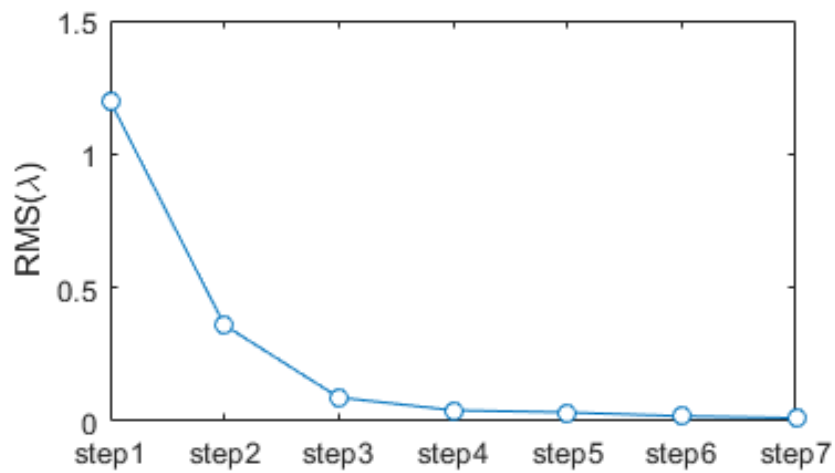
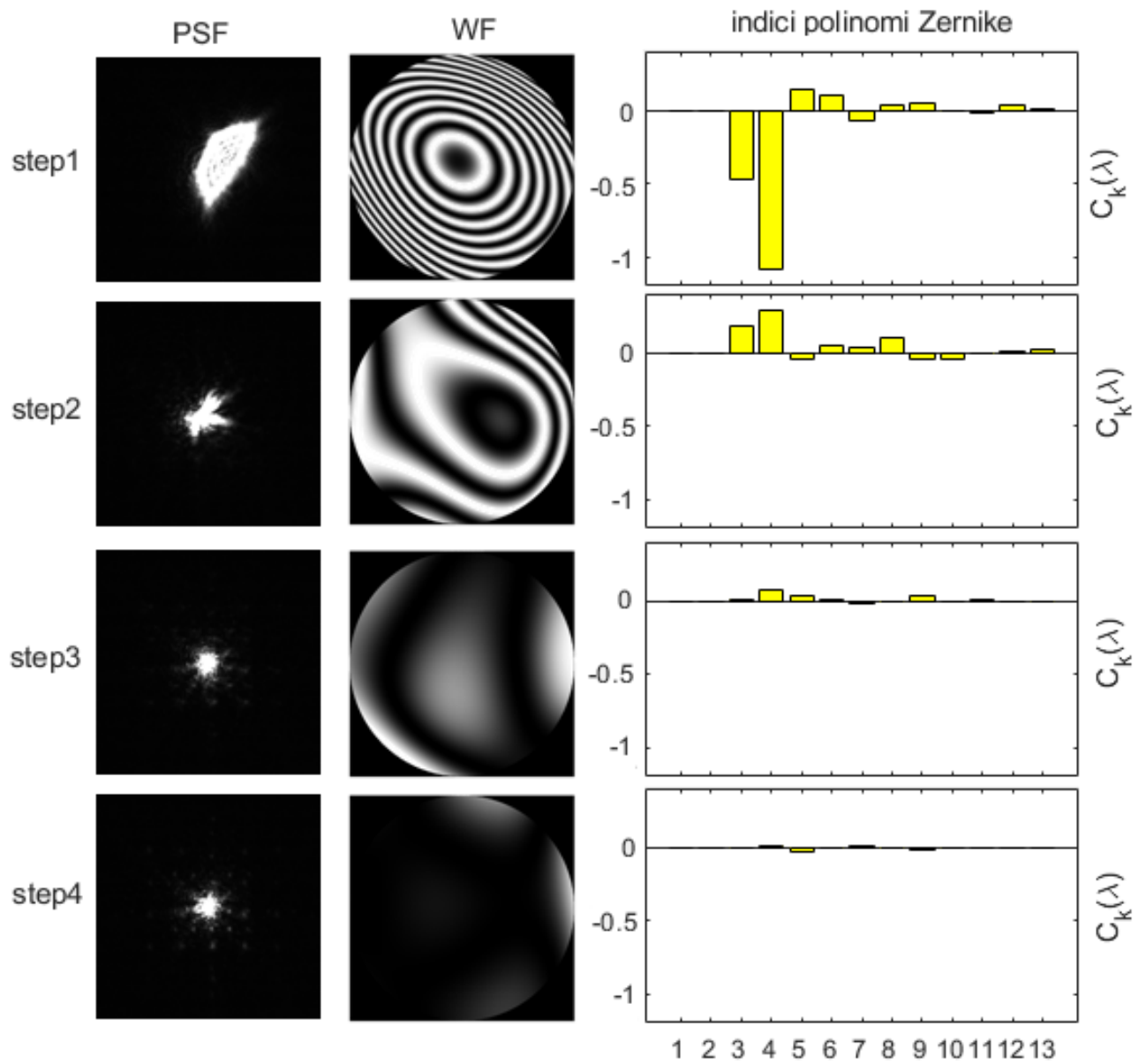


Figura 4.21: closed loop 3

Come si vede nelle immagini, il processo di correzione del fronte d'onda non è avvenuto in modo esattamente uguale in tutti i tre i loop, nonostante l'aberrazione fosse introdotta soltanto dalla presenza della lente deformabile a riposo. Questo perché gli attuatori della lente sono composti da materiale piezoelettrico, noto per la presenza di isteresi. Infatti i fronti d'onda di partenza nei tre casi sono molto simili ma non identici.

Sempre dalle immagini è possibile notare che la correzione del fronte d'onda ha richiesto più di uno step, da 3 a 6, conseguenza sia del processo di ricostruzione del fronte d'onda, sia del calcolo dei voltaggi da assegnare agli attuatori della lente. Entrambi processi ai minimi quadrati.

4.4 Closed loop: sorgente estesa

Il test finale del presente sistema di pupil-segmentation riguarda la sua applicazione ad un campo di vista. Per fare ciò è stata sostituita la sorgente laser puntiforme con una estesa, realizzata usando un campione illuminato da un led. Inoltre è stato introdotto un vetrino verticale riempito di colla, con funzione di aberratore, nei pressi della lente deformabile. L'esperimento è stato eseguito in maniera del tutto analoga a quanto già fatto nella sezione precedente per tre aberrazioni differenti del fronte d'onda, realizzate spostando l'aberratore in direzione trasversale all'asse ottico.

Naturalmente, stavolta al posto di usare il baricentro per determinare lo spostamento dell'immagine è stata usata la funzione *Shift*, descritta nel capitolo precedente, che si avvale della convoluzione.

Dalle immagini si osserva che il sistema presenta delle instabilità, infatti ci sono alcuni step in cui l'applicazione della correzione ha peggiorato l'aberrazione del fronte d'onda. Ciò è dovuto al fatto che non è stato eseguito alcuno studio riguardo al guadagno, cercando ad ogni step di correggere l'intera aberrazione misurata.

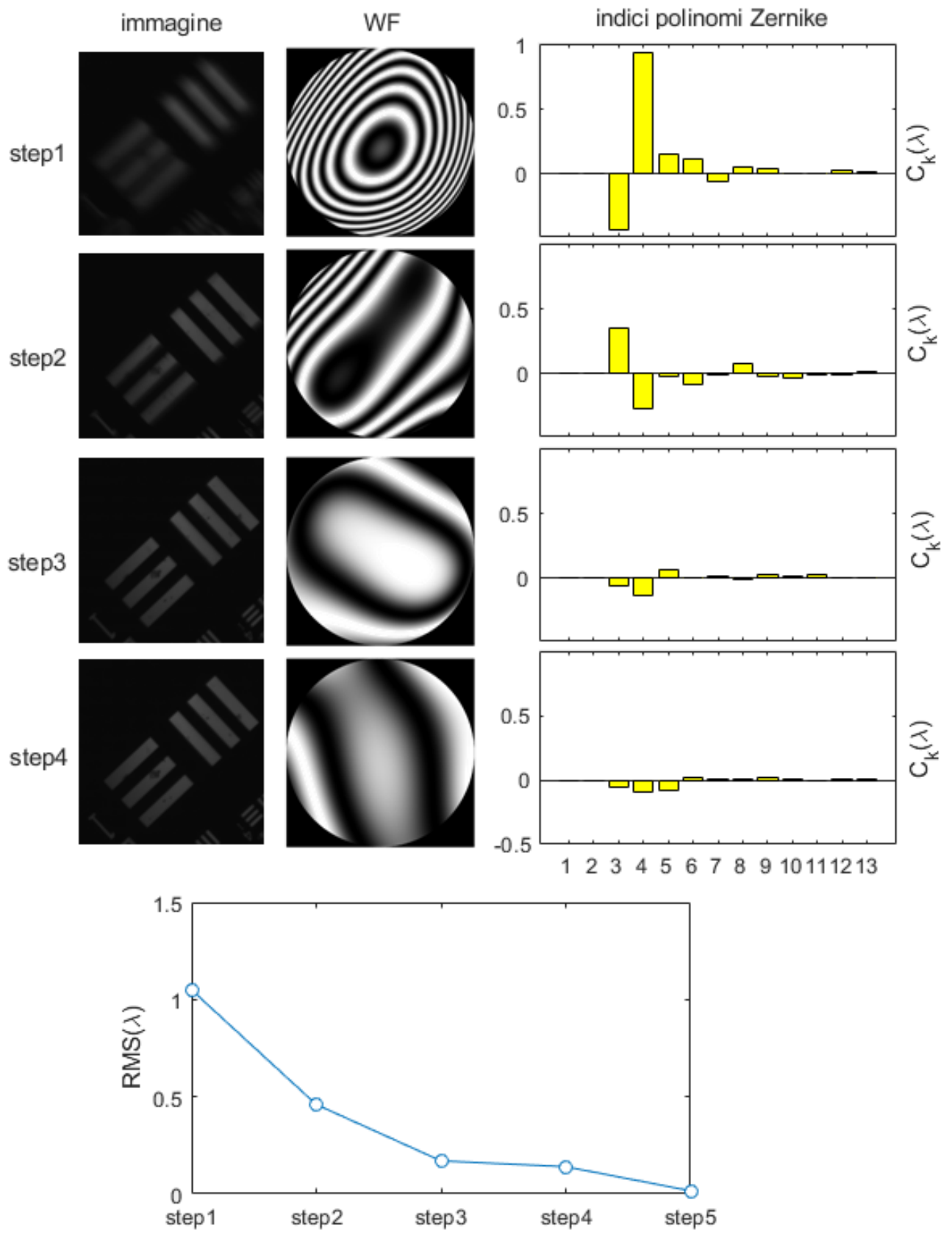


Figura 4.22: closed loop 1

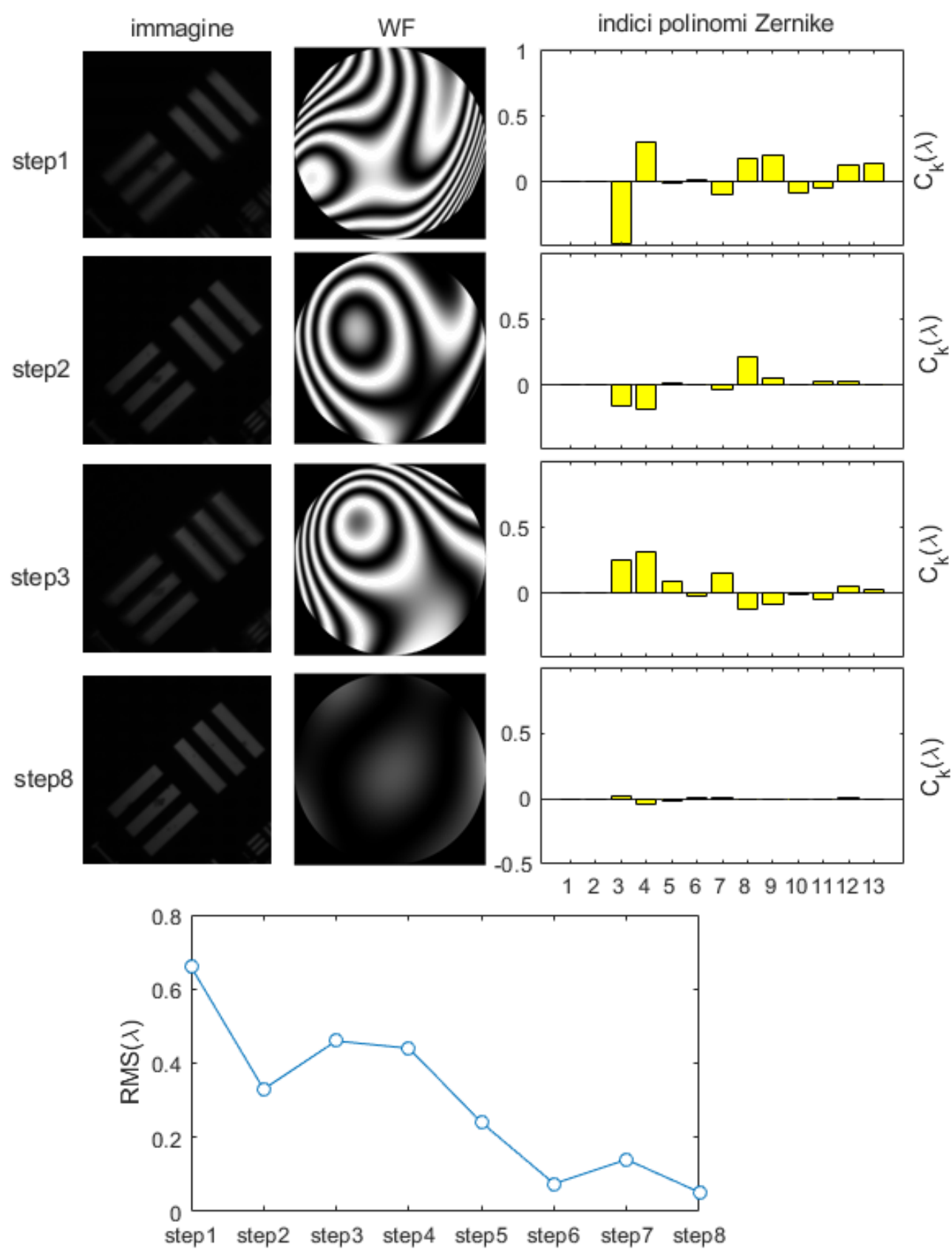


Figura 4.23: closed loop 2

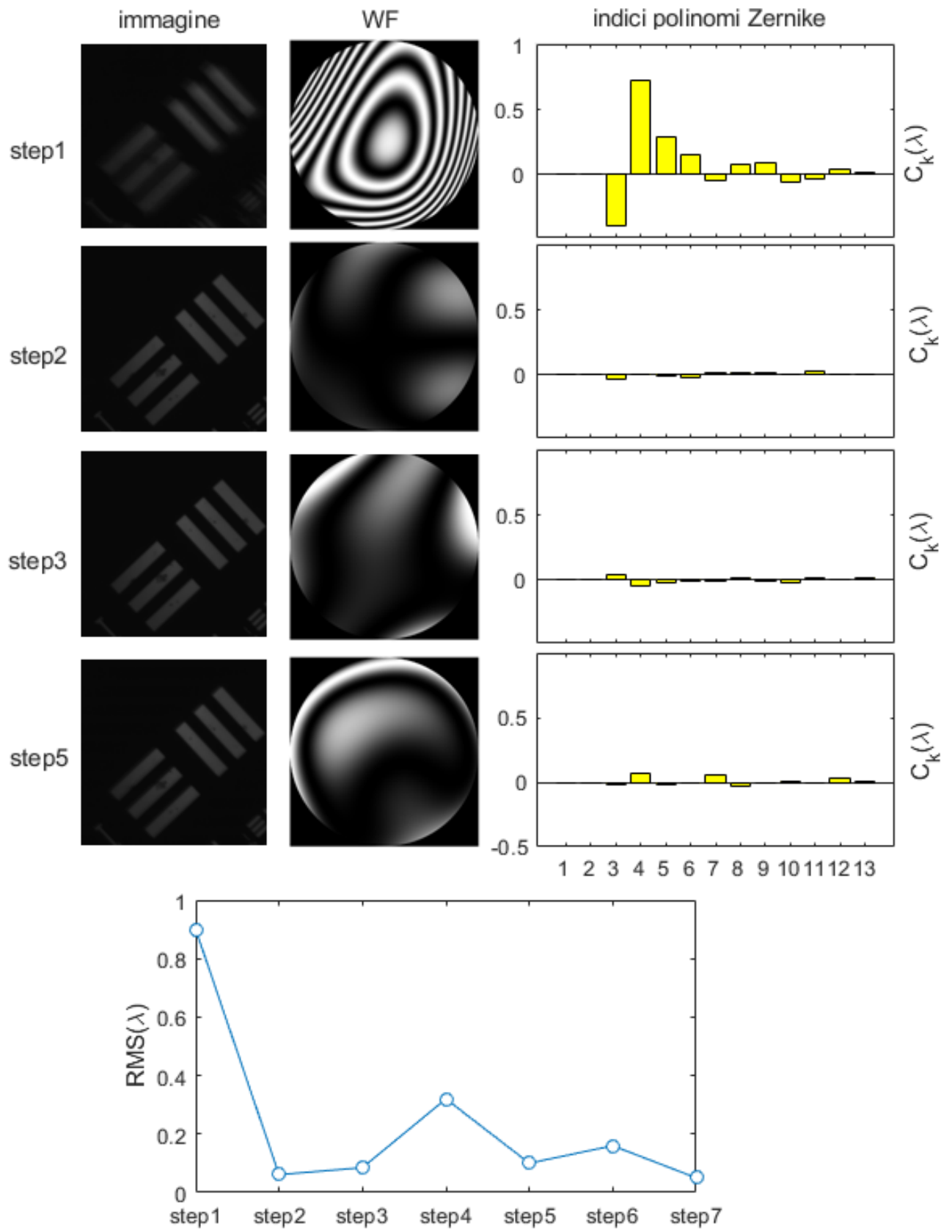


Figura 4.24: closed loop 3

Conclusioni

Il progetto di tesi ha portato alla realizzazione di un sistema di ottica adattiva coniugando in un unico dispositivo la misura del fronte d'onda e la correzione delle aberrazioni.

Il sistema è basato sulla tecnica della pupil-segmentation e dell'utilizzo di lenti deformabili.

Rispetto a sistemi di ottica adattiva basati su sensori di fronte d'onda differenti, come ad esempio il sensore Shack-Hartmann o il sensore a piramide, sono emersi sia degli svantaggi sia alcuni importanti vantaggi.

Il principale svantaggio del sistema pupil-segmentation si trova nella velocità di misura del fronte d'onda, infatti un sistema di questo tipo richiede come minimo di prendere un'immagine per ogni sottoapertura. Viceversa un sensore Shack-Hartmann ha bisogno di un'unica acquisizione per determinare la forma del fronte d'onda.

Inoltre, dato che nella tecnica della pupil-segmentation è necessario muovere lo stop d'apertura per selezionare sottoaperture differenti, questo risulta anche essere l'anello debole dell'intero sistema.

Nel nostro caso, per riuscire a utilizzare la pupil segmentation con la lente adattiva abbiamo deciso di utilizzare una ruota forata che tramite una rotazione dava la possibilità di selezionare la sottoapertura desiderata. Questa configurazione, che permetterà di integrare facilmente la ruota e la lente deformabile in un unico dispositivo, ha però lo svantaggio di essere lento, avere una frequenza spaziale di campionamento limitata, ed anche di limitare la quantità di luce che arriva alla camera.

I principali vantaggi sono che è possibile completare un sistema di ottica adattiva usando un setup molto semplice. Infatti, considerato che un qualsiasi sistema di imaging prevede già la presenza di una lente e di un sensore posto sul suo piano focale, è sufficiente aggiungere in prossimità della lente già presente una maschera ed una lente deformabile, rendendo il sistema molto compatto. Soprattutto il sistema è in grado di misurare il fronte d'onda anche in assenza di una stella artificiale, cosa che invece un

senso Shack-Hartmann non è in grado di fare.

Dalle sue caratteristiche di essere un sistema molto compatto e che lavora ad un ritmo più lento di un sensore Shack-Hartmann, il presente sistema si adatta perfettamente a tutti quei contesti in cui è richiesto un setup semplice e le aberrazioni variano lentamente nel tempo. Infatti questo sistema è stato pensato appositamente per essere applicato in microscopia dove le aberrazioni, essendo introdotte dal campione stesso, sono costanti.

Possibile utilizzo in astronomia

Come già spiegato questo sistema necessita di prendere un numero di immagini pari al numero delle sottoaperture per misurare il fronte d'onda. Ne consegue che per sorgenti deboli risulta poco adatto a correggere aberrazioni che variano rapidamente nel tempo, dato che il tempo minimo di misura del fronte d'onda è dato dal tempo d'integrazione della videocamera moltiplicato per il numero delle sottoaperture. Quindi, in questo caso il sistema realizzato potrebbe rivelarsi più utile come sistema di ottica attiva, dove si prevede di modificare attivamente la forma dello specchio per bilanciare le deformazioni indotte da fattori esterni, come il vento, la temperatura ed il suo stesso peso.

Nel caso particolare della fotometria solare, il flusso di radiazione è così elevato che anche un tempo minimo di esposizione è sufficiente. Quindi si potrebbe pensare di far ruotare il disco a velocità costante e prendere i frame a degli istanti prefissati. Nonostante il disco sia sempre in rotazione, il tempo di esposizione del sensore potrebbe essere sufficientemente breve da poter trascurare il fatto che il disco sia sempre in movimento. Forse in questo caso specifico è possibile far lavorare il sistema ad una frequenza sufficientemente alta da riuscire a correggere la turbolenza atmosferica.

Bibliografia

- [1] S Bonora e R J Zawadzki. «Wavefront sensorless modal deformable mirror correction in adaptive optics : optical coherence tomography». In: 38.22 (2013), pp. 4801–4804.
- [2] Stefano Bonora e Yifan Jian. «Wavefront correction and high-resolution in vivo OCT imaging with an objective integrated multiactuator adaptive lens». In: 23 (2015), p. 11.
- [3] Gary Chanan. «Principles of Wavefront Sensing and Reconstruction». In: ().
- [4] V Christophe. «On the nature of the measurements provided by a pyramid wavefront sensor». In: 233 (2004), pp. 27–38. DOI: 10.1016/j.optcom.2004.01.038.
- [5] David Coley. *An introduction to Genetic Algorithms for Scientist and Engineers*. 1999, p. 244.
- [6] Michelle Cua et al. «Coherence-Gated Sensorless Adaptive Optics Multiphoton Retinal Imaging». In: *Nature Publishing Group* September (2016), pp. 1–9. DOI: 10.1038/srep32223. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/srep32223>.
- [7] Ronald Cubalchini. «Modal wave-front estimation from phase derivative measurements». In: *Optical Society* 435.1972 (1979), pp. 972–977.
- [8] Fengzhao Dai et al. «Modal wavefront reconstruction based on Zernike polynomials for lateral shearing interferometry : comparisons of existing algorithms». In: 1 (2012).
- [9] Robert W Duffner. *The Adaptive Optics Revolution*, p. 486. ISBN: 9780826346919.
- [10] M T Eich et al. «Wave front sensor-less adaptive optics based on sharpness metrics for particle image velocimetry». In: ().
- [11] Alexander Jesacher e Martin J Booth. «Sensorless adaptive optics for microscopy». In: (2013).

- [12] Na Ji, Daniel E Milkie e Eric Betzig. «Adaptive optics via pupil segmentation for high-resolution imaging in biological tissues». In: december (2009). DOI: 10.1038/nmeth.1411.
- [13] Yifan Jian et al. «Lens-based wavefront sensorless adaptive optics swept source OCT». In: *Nature Publishing Group* May (2016), pp. 1–10. DOI: 10.1038/srep27620. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/srep27620>.
- [14] Geary Joseph. *Introduction to Wavefront Sensors*. SPIE, 1995, p. 177.
- [15] S. Kirkpatrick, D. Gelatt e M. P. Vecchi. «Optimization by Simulated Annealing». In: 220.4598 (2007), pp. 671–680.
- [16] Visa Korkiakoski. *improving the performance of adaptive optics systems with optimized control methods*. 2008. ISBN: 9789512294114.
- [17] Joel Kubby. *Adaptive Optics for biological Imaging*. 2013, p. 390. ISBN: 9781439850190.
- [18] Marshall Lapp, Benjamin B Snavely e Andrew C Tam. *adaptive optics for astronomical telescopes*. ISBN: 0195090195.
- [19] Patrick Y Maeda. «Zernike Polynomials and Their Use in Describing the Wavefront Aberrations of the Human Eye». In: (2003).
- [20] Daniel Malacara e A John Wiley. *Optical Shop Testing*. 3^a ed. 2007, p. 883. ISBN: 9780471484042.
- [21] Daniel E Milkie, Eric Betzig e Na Ji. «Pupil-segmentation-based adaptive optical microscopy with full-pupil illumination». In: 36.21 (2011), pp. 4206–4208.
- [22] Iacopo; Mochi e Kenneth Goldberg. «Modal wavefront reconstruction from its gradient». In: 54.12 (2015), pp. 3780–3785.
- [23] Richard A Muller e Andrew Buffington. «Real-time correction of atmospherically degraded telescope images through image sharpening». In: 64.9 (1974).
- [24] L P Murray et al. «Wavefront correction of extended objects through image sharpness maximisation». In: 6018 (2005), pp. 1–10. DOI: 10.1117/12.669380.
- [25] Sophia I Panagopoulou e Daniel R Neal. «Zernike vs . Zonal Matrix Iterative Wavefront Reconstructor Wavefront reconstruction methods». In: (), pp. 1–10.
- [26] Martino Quintavalla, Paolo Pozzi e Stefano Bonora. «easy and versatile adaptive optics add on for high resolution microscopy with deformable lens». In: 1.2000 (2016), p. 2016.
- [27] Erez Ribak. «Armospheric Turbulence, Speckle, and adaptive optics». In: 2 ().
- [28] Francois Roddier. *Adaptive optics in astronomy*. 1999, p. 420.

- [29] Publisher Taylor e Roberto Ragazzoni. «Journal of Modern Optics Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism». In: October 2013 (2009), pp. 37–41. DOI: 10.1080/09500349608232742.
- [30] Chao Tian, Xuefeng Chen e Shengchun Liu. «Modal wavefront reconstruction in radial shearing interferometry with general aperture shapes». In: 24.4 (2016), pp. 3693–3695. DOI: 10.1364/OE.24.003572.
- [31] Robert K Tyson. *Principles of Adaptive Optics*. ISBN: 0127059008.
- [32] Daniel Wahl, Christine Huang e Srefano Bonora. «Pupil segmentation adaptive optics for in vivo mouse retinal fluorescence imaging». In: 42.7 (2017), pp. 1365–1368.
- [33] Daniel Wahl et al. «Wavefront sensorless adaptive optics OCT with the DONE algorithm for in vivo human retinal imaging». In: 8.4 (2017), pp. 4380–4394.
- [34] Chen Wang e Na Ji. «Pupil-segmentation-based adaptive optical correction of a high-numerical-aperture gradient refractive index lens for two-photon fluorescence endoscopy». In: 37.11 (2012), pp. 2001–2003.
- [35] Huizhen Yang, Zhen Zhang e Jian Wu. «Performance Comparison of Wavefront-Sensorless Adaptive Optics Systems by Using of the Focal Plane». In: 2015 (2015).
- [36] Jingfei Ye et al. «Modal wavefront estimation from its slopes by numerical orthogonal transformation method over general shaped aperture». In: 23.20 (2015), pp. 998–1006. DOI: 10.1364/OE.23.026208.
- [37] Chunyu Zhao e James H Burge. «Orthonormal vector polynomials in a unit circle , Part I : basis set derived from gradients of Zernike polynomials». In: 15.26 (2007), pp. 111–114.