UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Mode-mixing delle perturbazioni cosmologiche non-lineari

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureando

Eleonora Vanzan

Anno Accademico 2018/2019

Indice

1 Introduzione **1**

1.1 Teoria delle perturbazioni . . . 1
1.2 Invarianza per diffeomorfismi . . . 1
1.3 Convenzioni . . . 2

2 Trasformazioni di gauge **3**

2.1 Formalismo . . . 3
2.1.1 Trasformazione attiva . . . 3
2.1.2 Trasformazione passiva . . . 3
2.1.3 Pull-back e espansione in serie di Taylor di campi tensoriali . . . 4
2.1.4 Caso generale: diffeomorfismo dell'alfiere . . . 5
2.2 Perturbazioni . . . 5
2.2.1 Quantità che sono per definizione gauge invarianti . . . 7
2.2.2 Trasformazioni, forma generale . . . 7

3 Decomposizione in modi scalari, vettoriali, tensoriali **9**

3.1 Scalari . . . 9
3.2 Vettori . . . 9
3.3 Tensori di rango 2 . . . 9

4 Calcolo delle perturbazioni **11**

4.1 Decomposizione delle quantità geometriche e fisiche . . . 11
4.1.1 Metrica . . . 11
4.1.2 Quantità scalari e vettoriali . . . 11
4.1.3 Generatori della trasformazione . . . 12
4.2 Calcolo esplicito . . . 12
4.2.1 Relazioni tra $v^0_{(r)}$ e $\psi_{(r)}$ . . . 12
4.2.2 Al primo ordine . . . 12
4.2.3 Al secondo ordine . . . 13

5 Come trattare la libertà di gauge **15**

5.1 Gauge sincrona . . . 15
5.2 Gauge di Poisson . . . 15
5.3 Quantità gauge invarianti . . . 16

6 Modello FLRW **17**

7 Evoluzione nella gauge sincrona **19**

7.1 Scelta della gauge sincrona e *time-orthogonal* . . . 19
7.1.1 Motivazione . . . 19
7.1.2 Gauge residua . . . 20
7.2 Dinamica relativistica della polvere irrotazionale . . . 21
7.3 Perturbazioni al primo ordine . . . 22

7.3.1 Modi tensoriali 23
7.3.2 Modi vettoriali 23
7.3.3 Modi scalari 23
7.4 Perturbazioni al secondo ordine 25

8 Da gauge sincrona a gauge di Poisson **27**
8.1 Al primo ordine 27
8.2 Al secondo ordine 29

9 Evoluzione nella gauge di Poisson **33**
9.1 Al primo ordine 33
9.2 Al secondo ordine 33

10 Mode-mixing **35**

11 Conclusioni **39**

Bibliografia **43**

Capitolo 1

Introduzione

Nella sua versione più semplice, il Modello Standard per la Cosmologia prevede che l'Universo abbia attraversato un periodo iniziale di espansione accelerata, l'inflazione, e sia stato inizialmente dominato dalla radiazione, poi dalla materia oscura, più tardi dall'energia oscura. Secondo questo modello, la spiegazione della struttura dell'Universo va ricercata in piccole fluttuazioni iniziali, poi amplificate dall'inflazione. Per studiare l'evoluzione di queste fluttuazioni viene utilizzata la teoria delle perturbazioni: si aggiungono termini perturbativi alla soluzione di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, e si studiano le equazioni che ne governano la dinamica [1].
Il problema è stato dapprima affrontato all'ordine lineare. Tuttavia, da un lato è necessario fornire predizioni più accurate di fronte a dati sperimentali sempre più precisi, dall'altro la teoria della gravitazione è intrinsecamente non lineare: pertanto è naturale chiedersi cosa accada a ordini superiori.

1.1 Teoria delle perturbazioni

L'obiettivo della teoria delle perturbazioni in Relatività Generale è la descrizione dello spaziotempo fisico tramite approssimazioni via via migliori, a partire dalle soluzioni esatte delle equazioni di Einstein che sono note per il background imperturbato.

L'approccio perturbativo si basa sull'assumere che esista una famiglia a un parametro $\mathcal{M}_\lambda$ di soluzioni delle equazioni di campo, con λ reale, e $\lambda = 0$ indica lo spaziotempo imperturbato. Rispetto al parametro λ si possono espandere le quantità geometriche e fisiche, rappresentate da campi tensoriali T_λ, su ciascun $\mathcal{M}_\lambda$.

Va evidenziata una differenza fondamentale rispetto all'applicazione della teoria delle perturbazioni in altri ambiti: nel caso della Relatività Generale si ha a che fare con perturbazioni non solo delle quantità fisiche, ma anche della geometria stessa.

1.2 Invarianza per diffeomorfismi

La Relatività Generale è invariante per diffeomorfismi, o meglio non ha una geometria data "a priori": la metrica è dinamica, quindi non esiste una scelta preferenziale di sistema di coordinate che permetta di semplificare la descrizione. Più rigorosamente, nelle equazioni di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

le componenti $0-\nu$ hanno il significato di condizioni iniziali, e le componenti $i-j$ governano l'evoluzione dinamica della metrica; ma queste ultime sono sei equazioni, mentre le componenti indipendenti di $g_{\mu\nu}$ sono dieci. Rimangono quindi quattro gradi di libertà, che corrispondono alla scelta di altrettante funzioni coordinate [2].

Questo fatto è cruciale nel definire cosa sia una perturbazione. Vorremmo descrivere la perturbazione di un campo tensoriale T come la differenza tra il valore che la quantità assume nello spaziotempo fisico e il valore di background, $\Delta T = T - T_0$. Per far questo è necessaria una prescrizione che permetta l'identificazione tra punti dello spaziotempo fisico e punti del background, serve cioè una mappa, un diffeomorfismo tra i due spazi. Questo definisce una scelta di gauge: la mappa stessa è chiamata "gauge". Una trasformazione di gauge si traduce quindi nel cambiare diffeomorfismo, mantenendo fissate le coordinate del background.

Questa ambiguità è dovuta al fatto che suddividere le variabili in una parte di background e una parte perturbata non è una procedura covariante, ma introduce una dipendenza dalle coordinate. Per costruzione però la dipendenza riguarda solo le perturbazioni: la definizione stessa di perturbazione è soggetta ad una dipendenza dalla gauge, mentre le quantità di background non sono toccate da questo problema e rimangono invariate [3].

Prima di affrontare la teoria delle perturbazioni, ci concentreremo sulla formalizzazione del problema della gauge.

1.3 Convenzioni

Gli indici greci corrono da 0 a 3, gli indici latini da 1 a 3. Si usano convenzionalmente δ^{ij} e δ_{ij} per alzare e abbassare gli indici, rispettivamente, anche nelle quantità perturbate.
Per evitare di appesantire la notazione, si usano le seguenti convenzioni sulle derivate. Le quantità primate sono derivate rispetto al tempo conforme τ, le virgole indicano derivate parziali, le barre verticali indicano derivate covarianti rispetto alla metrica spaziale tridimensionale.
Si indica con t il tempo cosmico e con τ il tempo conforme, i due sono legati dal fattore di scala $dt = a(\tau)d\tau$. Nella maggior parte delle formule $c = 1$.

Capitolo 2

Trasformazioni di gauge

2.1 Formalismo

Sarà necessario confrontare campi tensoriali in punti diversi del background, dunque tensori che vivono in spazi tangenti diversi: servirà una legge di trasporto. Ci sono due tipi di approccio a questo problema, attivo e passivo.

2.1.1 Trasformazione attiva

Una trasformazione attiva mantiene fissato il sistema di coordinate nel background, e permette di muoversi sulla varietà utilizzando un campo vettoriale ξ che genera un insieme di curve integrali. Dati un aperto di $\mathcal{M}$, un sistema di coordinate x^μ, un campo vettoriale ξ^μ, l'equazione

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \xi^\mu \tag{2.1}$$

genera una congruenza.
Dato un punto su $\mathcal{M}$, esso giacerà sempre lungo una delle curve integrali; sia dunque p corrispondente a $\lambda = 0$, un punto q a distanza λ da p lungo la stessa curva sarà dato da:

$$\tilde{x}^\mu(\lambda) = x^\mu + \lambda\xi^\mu + \dots \tag{2.2}$$

La (2.2) definisce una trasformazione infinitesima di coordinate, ed è una soluzione di (2.1) all'ordine lineare. La soluzione generale è data dalla mappa esponenziale:

$$\tilde{x}^\mu(\lambda) = e^{\lambda \pounds_\xi} x^\mu \tag{2.3}$$

dove $\pounds_\xi$ è la derivata di Lie lungo il campo vettoriale. La (2.3) forma un gruppo a un parametro di trasformazioni.

L'equazione (2.1) definisce l'operazione di *Lie dragging* di un tensore da parte di un campo vettoriale su $\mathcal{M}$[1].

2.1.2 Trasformazione passiva

Una trasformazione passiva mantiene fissato il punto nello spaziotempo fisico e cambia le coordinate nel background, ovvero definisce un nuovo sistema di coordinate tale che

$$y^\mu(q) = x^\mu(p) \tag{2.4}$$

[1]Si può apprezzare qui il fatto che la derivata di Lie è una costruzione più primitiva della derivata covariante, nel senso che non ha bisogno di una connessione, ma solamente di un campo vettoriale.

che usando la trasformazione infinitesima (2.2) diventa

$$y^\mu(q) = x^\mu(q) - \lambda\xi^\mu(x(p)) + \ldots \approx x^\mu(q) - \lambda\xi^\mu(x(q)) \tag{2.5}$$

da cui

$$y^\mu(\lambda) = x^\mu - \lambda\xi^\mu \tag{2.6}$$

e questa è una trasformazione passiva di coordinate.

Dunque l'interpretazione attiva si può pensare come una trasformazione *di* $\mathcal{M}$ (stesso sistema di coordinate, punti diversi), l'interpretazione passiva come un cambiamento della carta usata su $\mathcal{M}$ (stesso punto in due diversi sistemi di coordinate).

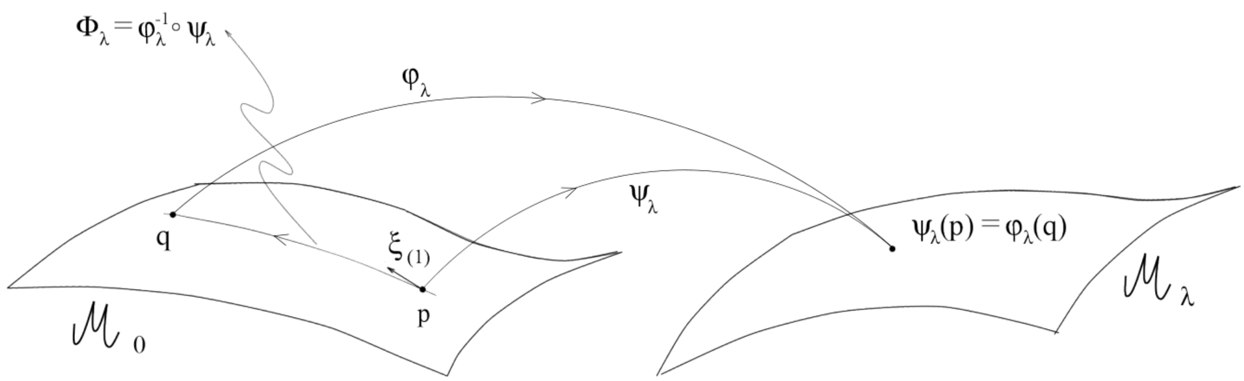


Figura 2.1: Le mappe φ_λ e ψ_λ sono due diverse gauge: lo stesso punto dello spaziotempo fisico può essere fatto corrispondere a due punti diversi sul background p e q. Una trasformazione di gauge può anche essere vista come una corrispondenza uno a uno tra punti del background, componendo le due mappe come $\Phi_\lambda = \varphi_\lambda^{-1} \circ \psi_\lambda$ e questa è una trasformazione attiva. Figura adattata da [4].

Supponiamo di avere due campi tensoriali Z e $\tilde{Z}$ tali che $Z^\mu(y(q)) = \tilde{Z}^\mu(x(p))$. Vorremmo mettere in relazione tra loro Z e $\tilde{Z}$ in un unico sistema di coordinate, diciamo x^μ. Dalle leggi di trasformazione dei tensori per cambiamento di coordinate

$$\tilde{Z}^\mu(x(p)) = Z^\mu(y(q)) = \left.\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\right|_{x(q)} Z^\nu(x(q)) \tag{2.7}$$

e dalla trasformazione passiva di coordinate (2.6) si ottiene:

$$\tilde{Z}^\mu(\lambda) = Z^\mu + \lambda \pounds_\xi Z^\mu \tag{2.8}$$

$\tilde{Z}^\mu$ è il *pull-back* di Z, definito "portando indietro" Z da q a p, e questo dà a p un nuovo tensore $\tilde{Z}$. Il nuovo tensore è dunque pari a quello vecchio più una correzione data dalla derivata di Lie lungo il campo vettoriale che genera la trasformazione.

2.1.3 Pull-back e espansione in serie di Taylor di campi tensoriali

Richiamiamo brevemente la nozione di pull-back nella Figura 2.2. Siano date $\varphi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ e $f : \mathrm{N} \to \mathbb{R}$. Il pull-back di f tramite φ è $\varphi_* f = (f \circ \varphi) : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$.

Grazie all'operazione di pull-back possiamo confrontare tra loro tensori su punti diversi di una varietà. Sfruttiamo questo fatto per scrivere l'espansione in serie di Taylor di un campo tensoriale.
Siano M una varietà differenziabile, ξ un campo vettoriale sulla varietà che genera un flusso ϕ : $\mathrm{M} \times \mathbb{R} \to \mathrm{M}$, con $\phi(0, p) = p$ e $\phi_\lambda(p) := \phi(\lambda, p)$, $\forall\ p \in \mathrm{M}$. Sia T un campo tensoriale su M, la mappa

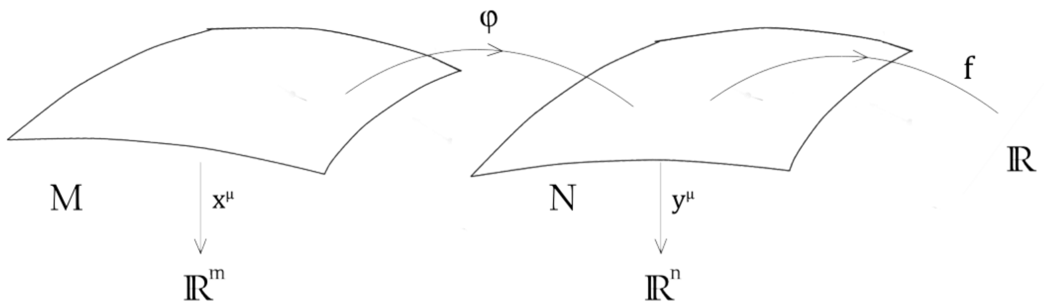


Figura 2.2: Figura adattata da [2].

ϕ^*_λ definisce un nuovo campo tensoriale $\phi^*_\lambda T$ che è funzione di λ. Il campo $\phi^*_\lambda T$ si può espandere[2] attorno a $\lambda = 0$:

$$\phi^*_\lambda T = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \pounds^k_\xi T \tag{2.9}$$

2.1.4 Caso generale: diffeomorfismo dell'alfiere

Finora abbiamo considerato il caso in cui un solo campo vettoriale è coinvolto: la (2.3) è un flusso, un gruppo a un parametro di diffeomorfismi. Se però ammettiamo più campi vettoriali, otteniamo un caso più generale in cui la struttura di gruppo viene meno: possiamo combinare i campi $\xi_{(1)}, ..., \xi_{(n)}$ per ottenere una famiglia a un parametro di diffeomorfismi $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ data da:

$$\Psi_\lambda = \psi^{(n)}_{\lambda^n/n!} \circ \ldots \circ \psi^{(2)}_{\lambda^2/2} \circ \psi^{(1)}_\lambda \tag{2.10}$$

e i campi vettoriali $\xi_{(1)}, ..., \xi_{(n)}$ sono i generatori di Ψ.
Questo è il diffeomorfismo dell'alfiere o *knight diffeomorphism.* É fondamentalmente una composizione di n flussi. Al secondo ordine, si traduce nel muoversi lungo la curva integrale di $\xi_{(1)}$ per un tratto λ, poi lungo quella di $\xi_{(2)}$ per un tratto $\lambda^2/2$, come in una scacchiera. L'idea è illustrata in Figura 2.3b.

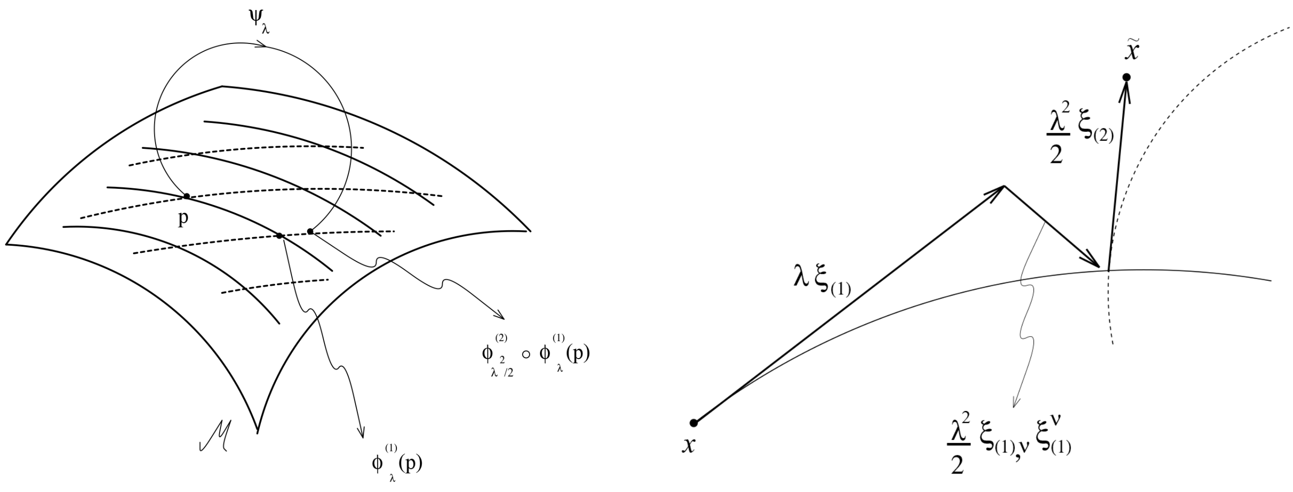
La proprietà fondamentale data dalla struttura di gruppo che qui viene meno è il fatto che ogni punto di $\mathcal{M}$ giace su una e una sola curva integrale. Caduta l'unicità, $\psi_\sigma \circ \psi_\lambda(p) \neq \psi_{\lambda+\sigma}(p)$. Il solo caso in cui Ψ forma un gruppo è quello in cui i generatori non sono indipendenti tra loro.
I diffeomorfismi dell'alfiere sono di una forma molto particolare, ma si può mostrare che ogni famiglia a un parametro di diffeomorfismi si può approssimare, bene quanto si vuole, con una famiglia a un parametro di diffeomorfismi dell'alfiere.

Al primo ordine perturbativo solo un campo vettoriale ξ è coinvolto, pertanto la situazione coincide formalmente con l'avere un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi. Salendo ad ordini più alti, però, si ha che fisicamente la descrizione si arricchisce e si introducono nuovi gradi di libertà, che corrispondono a nuovi campi vettoriali. All'ordine n sono necessari altrettanti campi $\xi_{(1)}, ..., \xi_{(n)}$.

2.2 Perturbazioni

A questo punto si può definire la perturbazione di un campo tensoriale T come la differenza tra il valore che la quantità assume nello spaziotempo fisico e il valore di background $\Delta T = T - T_0$. Vediamo per punti come formalizzare la richiesta.

[2] Nella dimostrazione di questo fatto è essenziale la struttura di gruppo del flusso generato da ξ. Per la dimostrazione e per il punto esatto in cui si fa uso della struttura di gruppo si rimanda a [4].



(a) Azione di un diffeomorfismo dell'alfiere Ψ_λ generato da $\xi_{(1)}$ e $\xi_{(2)}$. Le linee continue rappresentano alcune curve integrali di $\xi_{(1)}$, mentre quelle tratteggiate sono curve integrali di $\xi_{(2)}$.

(b) Azione di un diffeomorfismo dell'alfiere di rango 2. Entrambe le figure sono tratte da [4].

Figura 2.3

- Consideriamo una famiglia di modelli dello spaziotempo $\{(\mathcal{M}, g_\lambda, \tau_\lambda)\}$, a indicare spaziotempo, metrica, campi di materia - dove questi ultimi due soddisfano alle equazioni di campo. Inoltre $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda = 0$ identifica il background. Assumiamo che g_λ e τ_λ dipendano in modo $\mathcal{C}^\infty$ da λ, così che il parametro dia una misura di quanto un certo modello differisca dal background.

- Introduciamo una varietà $(m+1)$-dimensionale[3] $\mathcal{N}$, foliata in sottovarietà diffeomorfe a $\mathcal{M}$ e indicizzate da λ, così che $\mathcal{N} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$. La varietà $\mathcal{N}$ ha una struttura naturale di varietà differenziale, data dal prodotto di quelle di $\mathcal{M}$ e di $\mathbb{R}$.

- Scegliamo le coordinate in modo che le prime $m-1$ siano coordinate su ciascuna foglia $\mathcal{M}_\lambda$ e la m-esima coordinata corrisponda a λ.

- Dato un campo tensoriale T_λ su $\mathcal{M}_\lambda$, automaticamente abbiamo un campo T su $\mathcal{N}$ poiché $T(p,\lambda) = T_\lambda(p)$ per ogni $p \in \mathcal{M}_\lambda$. I campi tensoriali così ottenuti sono tutti tangenti a $\mathcal{M}$.

- Il confronto tra T_λ e T_0 richiede ora un diffeomorfismo $\phi_\lambda : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ in modo che valutato sul background restituisca quanto voluto $\phi_\lambda\big|_{\mathcal{M}_0} : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_\lambda$. Definiamo:

$$\Delta T_\lambda = \phi_\lambda^* T\big|_{\mathcal{M}_0} - T_0 \tag{2.11}$$

  cioè il pull-back di T al background tramite ϕ meno il valore di background. Espandendo in serie di Taylor come da (2.9) il primo termine del lato destro:

$$\Delta T_\lambda = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left[\frac{d^k \phi_\lambda^* T}{d\lambda^k} \right]_{\lambda=0} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta^k T \tag{2.12}$$

  ΔT_λ e $\delta^k T$ sono definite su $\mathcal{M}_0$, per questo si usa dire che le perturbazioni sono campi che vivono sul background.
  Le variazioni ad un ordine k arbitrario si possono calcolare iterativamente.

Supponiamo ora di avere due campi vettoriali X e Y su $\mathcal{N}$ con $X^m = Y^m = 1$. Le rispettive curve integrali definiscono due flussi φ e ψ. X e Y sono ovunque trasversali alle foglie e connettono punti su foglie diverse, perciò punti connessi dalla stessa curva integrale vanno visti come lo stesso punto (i due campi sono due scelte di gauge).

[3] Nel nostro caso ci interesserà $m = 4$.

I campi X e Y possono essere usati per "portare indietro" un generico campo tensoriale T da una foglia al background. Ora abbiamo su $\mathcal{M}_0$ tre campi tensoriali: T_0, $T_\lambda^X = \varphi_\lambda^* T\big|_{\lambda=0}$, $T_\lambda^Y = \psi_\lambda^* T\big|_{\lambda=0}$. Usando (2.11) e l'espansione in serie di Taylor (2.9) possiamo scrivere:

$$T_\lambda^X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta^k T^X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \pounds_X^k T\big|_{\lambda=0} = T_0 + \Delta^\varphi T_\lambda \tag{2.13}$$

$$T_\lambda^Y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta^k T^Y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \pounds_Y^k T\big|_{\lambda=0} = T_0 + \Delta^\psi T_\lambda \tag{2.14}$$

Abbiamo ora due casi: una quantità può essere gauge invariante oppure può dipendere dalla particolare scelta fatta.

2.2.1 Quantità che sono per definizione gauge invarianti

T è *totalmente gauge invariante* se $T_\lambda^X = T_\lambda^Y$ per ogni X, Y. Questa è una condizione molto forte, nella pratica si è interessati a richiedere che T sia *invariante all'ordine* n, cioè $\delta^k T^X = \delta^k T^Y$ per ogni X, Y e per ogni $k \leq n$. La condizione è verificata se e solo se T_0 e tutte le sue perturbazioni $\delta^k T$ di ordine inferiore a n sono, in ogni gauge, nulli o scalari costanti o combinazioni di delta di Kronecker a coefficienti costanti. Inoltre, T è totalmente gauge invariante se e solo se è una combinazione di delta di Kronecker a coefficienti che dipendono solo da λ.

É bene sottolinare la differenza tra indipendenza e invarianza. Una quantità *gauge indipendente* è la stessa in tutte le gauge, con lo stesso significato fisico – ad esempio la perturbazione tensoriale al prim'ordine della metrica. Una quantità *gauge invariante* ha un ben preciso significato fisico solo in una particolare gauge.

2.2.2 Trasformazioni, forma generale

Se invece T non è invariante, definiamo il diffeomorfismo

$$\Phi_\lambda : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_0 \qquad\qquad \Phi_\lambda = \varphi_{-\lambda} \circ \psi_\lambda \tag{2.15}$$

Va sottolineato che $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_0$ non è un gruppo a un parametro di diffeomorfismi, fondamentalmente perché in generale X e Y hanno commutatore non nullo. Tuttavia, come abbiamo visto, è sempre possibile approssimarlo con un diffeomorfismo dell'alfiere di rango opportuno.
I campi tensoriali definiti dalle gauge φ e ψ sono collegati da Φ_λ^* come segue:

$$T_\lambda^Y = \psi_\lambda^* T\big|_{\lambda=0} = \left(\psi_\lambda^* \varphi_{-\lambda}^* \varphi_\lambda^* T\right)\big|_{\lambda=0} = \Phi_\lambda^* (\varphi_\lambda^* T)\big|_{\lambda=0} = \Phi_\lambda^* T_\lambda^X \tag{2.16}$$

ovvero T_λ^Y è il pull-back tramite ψ di T sul background, inseriamo l'identità $\varphi_{-\lambda}^* \circ \varphi_\lambda^*$ e isoliamo il pull-back tramite φ di T, T_λ^X (sottolineiamo che Φ agisce su oggetti del background). Approssimando l'azione di Φ con un diffeomorfismo dell'alfiere, ci si può spostare su $\mathcal{M}_0$ da T_λ^X a T_λ^Y tramite un numero n di campi vettoriali indipendenti, seguendo le rispettive curve integrali, come in Figura 2.4.

In generale, all'ordine n:

$$T_\lambda^Y = \psi_\lambda^* T\big|_{\lambda=0} = \sum_{l_1=0}^{+\infty} \sum_{l_2=0}^{+\infty} \cdots \sum_{l_k=0}^{+\infty} \cdots \frac{\lambda^{l_1+2l_2+\cdots+kl_k+\cdots}}{2^{l_2} \cdots (k!)^{l_k} \cdots l_1! l_2! \cdots l_k! \cdots} \pounds_{\xi_{(1)}}^{l_1} \pounds_{\xi_{(2)}}^{l_2} \cdots \pounds_{\xi_{(k)}}^{l_k} \cdots T_\lambda^X \tag{2.17}$$

Esplicitamente, al terz'ordine:

$$\begin{aligned} T_\lambda^Y = \quad & T_\lambda^X + \lambda \pounds_{\xi_{(1)}} T_\lambda^X + \tfrac{\lambda^2}{2} \left(\pounds_{\xi_{(1)}}^2 + \pounds_{\xi_{(2)}}\right) T_\lambda^X \\ & + \tfrac{\lambda^3}{3!} \left(\pounds_{\xi_{(1)}}^3 + 3\, \pounds_{\xi_{(1)}} \pounds_{\xi_{(2)}} + \pounds_{\xi_{(3)}}\right) T_\lambda^X + \ldots \end{aligned} \tag{2.18}$$

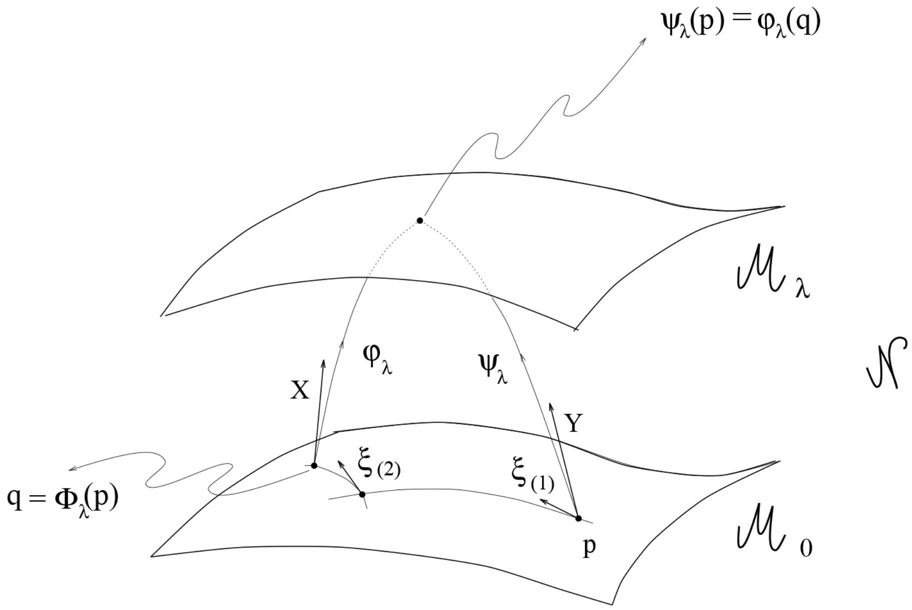


Figura 2.4: Azione di una trasformazione di gauge Φ_λ sul background, approssimata al secondo ordine. I campi X e Y sono i generatori dei flussi, i punti p e q di $\mathcal{M}_0$ sono mandati dalle due mappe nello stesso punto fisico. Sul background la trasformazione viene approssimata da un diffeomorfismo dell'alfiere con generatori $\xi_{(1)}$ e $\xi_{(2)}$. Figura tratta da [4].

Sostituendo l'espansione in serie di Taylor di parametro λ dei campi (2.13) nell'espressione esplicita fino al terz'ordine (2.18) si ottengono le relazioni tra due diverse gauge:

$$\delta T^Y - \delta T^X = \pounds_{\xi_{(1)}} T_0 \tag{2.19}$$

$$\delta^2 T^Y - \delta^2 T^X = \left(\pounds_{\xi_{(2)}} + \pounds^2_{\xi_{(1)}}\right) T_0 + 2\pounds_{\xi_{(1)}} \delta T^X \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\delta^3 T^Y - \delta^3 T^X = &\left(\pounds_{\xi_{(3)}} + 3\pounds_{\xi_{(1)}}\pounds_{\xi_{(2)}} + \pounds^3_{\xi_{(1)}}\right) T_0 \\ &+ 3\left(\pounds_{\xi_{(2)}} + \pounds^2_{\xi_{(1)}}\right) \delta T + 3\pounds_{\xi_{(1)}} \delta^2 T^X\end{aligned} \tag{2.21}$$

Si vede che, salendo di ordine, compare ogni volta un nuovo campo vettoriale.

Capitolo 3

Decomposizione in modi scalari, vettoriali, tensoriali

L'assunzione di partenza è lo splitting $(3+1)$ standard dello spaziotempo: la varietà è foliata in una famiglia a un parametro di ipersuperfici spaziali tridimensionali a tempo costante, indicizzate dal tempo conforme τ. Dopo la foliazione, si possono scomporre vettori e tensori come segue.

3.1 Scalari

Sono quantità scalari quelle che trasformano come tali su ipersuperfici spaziali.

3.2 Vettori

Possiamo spezzare ogni quadrivettore in parte temporale e parte spaziale $\omega^\mu = (\omega^0, \omega^i)$, anche dette scalare e vettoriale con notazione dovuta a Bardeen a causa di come le due parti trasformano su ipersuperfici spaziali. A sua volta, la parte spaziale può essere decomposta usando il teorema di Helmholtz in una parte a rotore nullo – che quindi scriviamo come gradiente di un campo scalare – e una parte a divergenza nulla:

$$\omega_i = \partial_i \omega^{\parallel} + \omega_i^{\perp} \tag{3.1}$$

con $\omega_i^{\perp}$ vettore solenoidale, cioè $\partial^i \omega_i^{\perp} = 0$. Va sottolineato che rotore e divergenza sono presi rispetto al background, perché le perturbazioni sono definite sul background. In trasformata di Fourier, $\omega^{\parallel}$ è parallelo al vettore d'onda ed è quindi detto parte longitudinale, $\omega^{\perp}$ è perpendicolare al vettore d'onda ed è la parte trasversale.

3.3 Tensori di rango 2

Consideriamo tensori di rango 2, richiediamo che siano:

- simmetrici, perché è questo il caso di interesse pratico, dato che la metrica si prende sempre simmetrica;
- a traccia nulla, perché la traccia è uno scalare e può essere inglobata in un modo scalare a sé stante.

Abbiamo due indici, dunque tre possibilità: entrambi gli indici sono longitudinali (modo scalare), un indice è longitudinale e uno trasverso (modo vettoriale), entrambi gli indici sono trasversi (modo tensoriale).

$$\chi_{ij} = \mathrm{D}_{ij}\chi^{\parallel} + \partial_i \chi_j^{\perp} + \partial_j \chi_i^{\perp} + \chi_{ij}^{\top} \tag{3.2}$$

dove $\chi^{\parallel}$ è una funzione, $\chi_i^{\perp}$ è un campo vettoriale solenoidale, $\chi_{ij}^{\top}$ non può essere ottenuto né da scalari né da vettori ed è tale che $\partial^i \chi_{ij}^{\top} = 0$ e $\chi_i^{\top\, i} = 0$, inoltre

$$\mathrm{D}_{ij} := \partial_i \partial_j - \frac{1}{3}\,\delta_{ij} \nabla^2 \tag{3.3}$$

Capitolo 4

Calcolo delle perturbazioni

É sempre vero a qualsiasi ordine perturbativo n che modi scalari, vettoriali e tensoriali di ordine n sono indipendenti. Ma, ad ordini superiori al primo, i modi di ordine n ricevono contributi misti dagli ordini precedenti, fino all'$(n-1)$-esimo.
Vediamo dapprima come scomporre le singole quantità coinvolte in modi, poi come ricavare le trasformazioni di gauge.

4.1 Decomposizione delle quantità geometriche e fisiche

4.1.1 Metrica

Consideriamo una metrica piatta di Robertson-Walker ($c = 1$):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= a^2(\tau)(-d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Aggiungendo le perturbazioni, le componenti possono essere scritte come:

$$g_{00} = -a(\tau)^2 \left(1 + 2\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r!}\ \psi^{(r)}\right) \tag{4.2}$$

$$g_{0i} = a(\tau)^2 \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r!}\ \omega_i^{(r)} \tag{4.3}$$

$$g_{ij} = a(\tau)^2 \left[\left(1 - 2\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r!}\ \phi^{(r)}\right)\delta_{ij} + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r!}\ \chi_{ij}^{(r)}\right] \tag{4.4}$$

con $\chi_i^{(r)i} = 0$. Le funzioni $\psi^{(r)}$, $\omega_i^{(r)}$, $\phi^{(r)}$, e $\chi_{ij}^{(r)}$ rappresentano le perturbazioni di ordine r della metrica. La parte perturbata della traccia, in quanto scalare, è tutta raccolta in $\psi^{(r)}$ e $\phi^{(r)}$.

4.1.2 Quantità scalari e vettoriali

Siano ρ la densità di energia (o un qualsiasi altro scalare che, per isotropia e omogeneità dello spazio, dipende solo da τ all'ordine zero) e u^μ la quadrivelocità della materia:

$$\rho = \rho_{(0)} + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r!}\ \delta^r \rho \tag{4.5}$$

$$u^\mu = \frac{1}{a}\left(\delta_0^\mu + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r!}\ v_{(r)}^\mu\right) \tag{4.6}$$

con la condizione di normalizzazione usuale $u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -1$. La perturbazione nella velocità $v^i_{(r)}$ potrà essere spezzata in parte scalare e parte vettoriale solenoidale: $v^i_{(r)} = \partial^i v^{\parallel}_{(r)} + v^{\perp}_{(r)}{}^i$.

4.1.3 Generatori della trasformazione

La trasformazione di gauge è determinata dai campi vettoriali indipendenti $\xi_{(r)}$. Anch'essi possono essere decomposti in parte temporale e parte spaziale, a sua volta divisa in scalare e vettoriale:

$$\xi^0_{(r)} = \alpha^{(r)} \tag{4.7}$$

$$\xi^i_{(r)} = \partial^i \beta^{(r)} + d^{(r)i} \tag{4.8}$$

con $\partial_i d^{(r)i} = 0$.

4.2 Calcolo esplicito

4.2.1 Relazioni tra $v^0_{(r)}$ e $\psi_{(r)}$

Esplicitando le espressioni per la metrica e per la quadrivelocità all'ordine voluto, e sostituendo nella condizione di normalizzazione, si ottengono le relazioni tra componente temporale $v^0_{(r)}$ e *lapse function* $\psi_{(r)}$.

Al primo e al secondo ordine, in qualsiasi gauge:

$$v^0_{(1)} = -\psi_{(1)} \tag{4.9}$$

$$v^0_{(2)} = -\psi_{(2)} + 3\psi^2_{(1)} + 2\omega^{(1)}_i v^i_{(1)} + v^{(1)}_i v^i_{(1)} \tag{4.10}$$

4.2.2 Al primo ordine

I modi tensoriali sono gauge invarianti all'ordine lineare.
Le perturbazioni al primo ordine trasformano come (2.19):

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{g}_{\mu\nu} =& \delta g_{\mu\nu} + \pounds_{\xi_{(1)}} g^{(0)}_{\mu\nu} \\
=& \delta g_{\mu\nu} + (\partial_\sigma g^{(0)}_{\mu\nu})\xi^\sigma_{(1)} + (\partial_\mu \xi^\sigma_{(1)}) g^{(0)}_{\sigma\nu} + (\partial_\nu \xi^\sigma_{(1)}) g^{(0)}_{\mu\sigma} \\
=& \delta g_{\mu\nu} + (\partial_0 g^{(0)}_{\mu\nu})\alpha_{(1)} + (\partial_i g^{(0)}_{\mu\nu})(\partial^i \beta^{(r)} + d^{(r)i}) \\
&+ (\partial_\mu \alpha_{(1)}) g^{(0)}_{0\nu} + [\partial_\mu(\partial^i \beta^{(r)} + d^{(r)i})] g^{(0)}_{i\nu} \\
&+ (\partial_\nu \alpha_{(1)}) g^{(0)}_{\mu 0} + [\partial_\nu(\partial^i \beta^{(r)} + d^{(r)i})] g^{(0)}_{\mu i}
\end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio si è esplicitata la derivata di Lie, e nel terzo si è sviluppata la sommatoria su σ, distinguendo tra la parte scalare $\sigma = 0$ data da (4.7) e la parte vettoriale $\sigma = i$ data da (4.8). Ora scegliendo ad esempio $\mu = 0 = \nu$ si ha:

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{g}_{00} = -a^2\ 2\tilde{\psi}_{(1)} &= -a^2\ 2\psi_{(1)} + \partial_0(-a^2)\alpha_{(1)} + \partial_0\alpha_{(1)}(-a^2) + \partial_0\alpha_{(1)}(-a^2) \\
&= -2a^2\psi_{(1)} - 2a(\partial_0 a)\alpha_{(1)} - 2a^2(\partial_0\alpha_{(1)})
\end{aligned}$$

da cui si ricava la legge di trasformazione per $\psi_{(1)}$. Procedendo nello stesso modo per le altre combinazioni di $\mu - \nu$, si ottengono le trasformazioni per le quantità che compaiono nella metrica perturbata

(4.2)-(4.4):

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\psi}_{(1)} &= \psi_{(1)} + \alpha'_{(1)} + \frac{a'}{a}\,\alpha_{(1)} && (4.11)\\ \tilde{\omega}_i^{(1)} &= \omega_i^{(1)} - \partial_i\alpha^{(1)} + \partial_i\beta^{(1)\prime} + d_i^{(1)\prime} && (4.12)\\ \tilde{\phi}_{(1)} &= \phi_{(1)} - \frac{1}{3}\,\nabla^2\beta_{(1)} - \frac{a'}{a}\,\alpha_{(1)} && (4.13)\\ \tilde{\chi}_{ij}^{(1)} &= \chi_{ij}^{(1)} + 2\mathrm{D}_{ij}\beta^{(1)} + \partial_j d_i^{(1)} + \partial_i d_j^{(1)} && (4.14) \end{aligned}}$$

dove le quantità primate sono derivate rispetto al tempo conforme τ.

Per uno scalare ρ scritto come (4.5), dalla regola generale (2.19) ed esplicitando la derivata di Lie:

$$\boxed{\delta\tilde{\rho} = \delta\rho + \rho'_{(0)}\alpha_{(1)}} \tag{4.15}$$

Per la quadrivelocità u^μ scritta come (4.6), dalla regola generale (2.19):

$$\delta\tilde{u}^\mu = \delta u^\mu + \pounds_{\xi_{(1)}} u^\mu_{(0)} \tag{4.16}$$

e

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{v}^0_{(1)} &= v^0_{(1)} - \frac{a'}{a}\alpha_{(1)} - \alpha'_{(1)} && (4.17)\\ \tilde{v}^i_{(1)} &= v^i_{(1)} - \partial^i\beta'_{(1)} - d^{i\prime}_{(1)} && (4.18) \end{aligned}}$$

Ma a causa di (4.9) per cui deve essere $v^0_{(1)} = -\psi_{(1)}$, (4.17) si riconduce a (4.11).

4.2.3 Al secondo ordine

Da (2.20) si ha:

$$\delta^2\tilde{g}_{\mu\nu} = \delta^2 g_{\mu\nu} + 2\pounds_{\xi_{(1)}}\delta g_{\mu\nu} + \pounds^2_{\xi_{(1)}} g^{(0)}_{\mu\nu} + \pounds_{\xi_{(2)}} g^{(0)}_{\mu\nu} \tag{4.19}$$

da cui:
lapse perturbation

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{(2)} = \;& \psi^{(2)} + \alpha^{(1)}\left[2\left(\psi'_{(1)} + 2\tfrac{a'}{a}\psi_{(1)}\right) + \alpha''_{(1)} + 5\tfrac{a'}{a}\alpha'_{(1)} + \left(\tfrac{a''}{a} + \tfrac{a'^2}{a^2}\right)\alpha_{(1)}\right]\\ & + \xi^i_{(1)}\left(2\psi^{(1)}_{,i} + \alpha^{(1)\prime}_{,i} + \tfrac{a'}{a}\alpha^{(1)}_{,i}\right) + 2\alpha'_{(1)}\left(2\psi_{(1)} + \alpha'_{(1)}\right)\\ & + \xi^{i\prime}_{(1)}\left(\alpha^{(1)}_{,i} - \xi^{(1)\prime}_i - 2\omega^{(1)}_i\right) + \alpha'_{(2)} + \tfrac{a'}{a}\alpha_{(2)} \end{aligned} \tag{4.20}$$

shift perturbation

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^{(2)}_i = \;& \omega^{(2)}_i - 4\psi^{(1)}\alpha^{(1)}_{,i} + \alpha^{(1)}\left[2\left(\omega^{(1)\prime}_i + 2\frac{a'}{a}\omega^{(1)}_i\right) - \alpha^{(1)\prime}_{,i} + \xi^{(1)\prime\prime}_i\right.\\ & \left. - 4\frac{a'}{a}\left(\alpha^{(1)}_{,i} - \xi^{(1)\prime}_i\right)\right] + \xi^j_{(1)}\left(2\omega^{(1)}_{i,j} - \alpha^{(1)}_{,ij} + \xi^{(1)\prime}_{i,j}\right)\\ & + \alpha'_{(1)}\left(2\omega^{(1)}_i - 3\alpha^{(1)}_{,i} + \xi^{(1)\prime}_i\right) + \xi^{j\prime}_{(1)}\left(-4\phi^{(1)}\delta_{ij} + 2\chi^{(1)}_{ij} + 2\xi^{(1)}_{j,i} + \xi^{(1)}_{i,j}\right)\\ & + \xi^j_{(1),i}\left(2\omega^{(1)}_j - \alpha^{(1)}_{,j}\right) - \alpha^{(2)}_{,i} + \xi^{(2)\prime}_i \end{aligned} \tag{4.21}$$

spatial metric, trace

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^{(2)} &= \phi^{(2)} + \alpha^{(1)}\left[2\left(\phi'_{(1)} + 2\frac{a'}{a}\phi_{(1)}\right) - \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2}\right)\alpha_{(1)} - \frac{a'}{a}\alpha'_{(1)}\right] \\ &+\xi^i_{(1)}\left(2\phi^{(1)}_{,i} - \frac{a'}{a}\alpha^{(1)}_{,i}\right) - \frac{1}{3}\left(-4\phi_{(1)} + \alpha_{(1)}\partial_0 + \xi^i_{(1)}\partial_i + 4\frac{a'}{a}\alpha_{(1)}\right)\nabla^2\beta_{(1)} \\ &-\frac{1}{3}\left(2\omega^i_{(1)} - \alpha^{,i}_{(1)} + \xi^{i\prime}_{(1)}\right)\alpha^{(1)}_{,i} - \frac{1}{3}\left(2\chi^{(1)}_{ij} + \xi^{(1)}_{i,j} + \xi^{(1)}_{j,i}\right)\xi^{j,i}_{(1)} \\ &-\frac{a'}{a}\alpha_{(2)} - \frac{1}{3}\nabla^2\beta_{(2)}\end{aligned} \tag{4.22}$$

spatial metric, traceless part

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}^{(2)}_{ij} &= \chi^{(2)}_{ij} + 2\left(\chi^{(1)\prime}_{ij} + 2\frac{a'}{a}\chi^{(1)}_{ij}\right)\alpha_{(1)} + 2\chi^{(1)}_{ij,k}\xi^k_{(1)} \\ &+ 2\left(-4\phi_{(1)} + \alpha_{(1)}\partial_0 + \xi^k_{(1)}\partial_k + 4\frac{a'}{a}\alpha_{(1)}\right)\left(d^{(1)}_{(i,j)} + \mathrm{D}_{ij}\beta_{(1)}\right) \\ &+ 2\left[\left(2\omega^{(1)}_{(i} - \alpha^{(1)}_{,(i} + \xi^{(1)\prime}_{(i}\right)\alpha^{(1)}_{,j)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\left(2\omega^k_{(1)} - \alpha^{,k}_{(1)} + \xi^{k\prime}_{(1)}\right)\alpha^{(1)}_{,k}\right] \\ &+ 2\left[\left(2\chi^{(1)}_{(i|k|} + \xi^{(1)}_{k,(i} + \xi^{(1)}_{(i,|k|}\right)\xi^{(1)k}_{,j)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\left(2\chi^{(1)}_{lk} + \xi^{(1)}_{k,l} + \xi^{(1)}_{l,k}\right)\xi^{k,l}_{(1)}\right] \\ &+ 2\left(d^{(2)}_{(i,j)} + \mathrm{D}_{ij}\beta_{(2)}\right)\end{aligned} \tag{4.23}$$

Per uno scalare otteniamo da (2.20):

$$\delta^2\tilde{\rho} = \delta^2\rho + \rho'_{(0)}\alpha_{(2)} + \alpha_{(1)}\left(\rho''_{(0)}\alpha_{(1)} + \rho'_{(0)}\alpha'_{(1)} + 2\delta\rho'\right) + \xi^i_{(1)}\left(\rho'_{(0)}\alpha^{(1)}_{,i} + 2\delta\rho_{,i}\right) \tag{4.24}$$

Per la quadrivelocità u^μ, dalla regola generale (2.20):

$$\delta^2\tilde{u}^\mu = \delta^2 u^\mu + \left(\pounds_{\xi_{(2)}} + \pounds^2_{\xi_{(1)}}\right)u^\mu_{(0)} + 2\pounds_{\xi_{(1)}}\delta u^\mu \tag{4.25}$$

da cui:

$$\begin{aligned}\tilde{v}^0_{(2)} &= v^0_{(2)} - \frac{a'}{a}\alpha_{(2)} - \alpha'_{(2)} + \alpha_{(1)}\left[2\left(v^{0\prime}_{(1)} - \frac{a'}{a}v^0_{(1)}\right) + \left(2\frac{a'^2}{a^2} - \frac{a''}{a}\right)\alpha_{(1)} + \frac{a'}{a}\alpha'_{(1)} - \alpha''_{(1)}\right] \\ &+\xi^i_{(1)}\left(2v^0_{(1),i} - \frac{a'}{a}\alpha^{(1)}_{,i} - \alpha^{(1)\prime}_{,i}\right) + \alpha'_{(1)}\left(\alpha'_{(1)} - 2v^0_{(1)}\right) - 2\alpha^{(1)}_{,i}v^i_{(1)} + \alpha^{(1)}_{,i}\xi^{i\prime}_{(1)}\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}^i_{(2)} &= v^i_{(2)} - \beta'^{,i}_{(2)} - d^{i\prime}_{(2)} + \alpha_{(1)}\left[2\left(v^{i\prime}_{(1)} - \frac{a'}{a}v^i_{(1)}\right) - \left(\xi^{i\prime\prime}_{(1)} - 2\frac{a'}{a}\xi^{i\prime}_{(1)}\right)\right] \\ &+\xi^j_{(1)}\left(2v^i_{(1),j} - \xi^{i\prime}_{(1),j}\right) - \xi^i_{(1),j}\left(2v^j_{(1)} - \xi^{j\prime}_{(1)}\right) + \xi^{i\prime}_{(1)}\left(2\psi_{(1)} + \alpha'_{(1)}\right)\end{aligned} \tag{4.27}$$

Di nuovo, la quadrivelocità è soggetta alla normalizzazione $u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -1$, da cui la condizione (4.10); perciò (4.26) si riduce a (4.20).

Capitolo 5

Come trattare la libertà di gauge

Il modo usuale di trattare la libertà di gauge è imporre condizioni sulla forma del tensore metrico e/o delle perturbazioni nella materia.

Il generatore ξ^μ coinvolge due scalari α, β e un vettore solenoidale d^i. Questo è vero ad ogni ordine. Perciò ci sono quattro gradi di libertà associati all'invarianza per diffeomorfismo, e una scelta di gauge si traduce in una scelta opportuna di due scalari e un vettore.
Infatti la metrica è un tensore a due indici (16 dof) simmetrico ($16 - 6 = 10$ dof), dei suoi 10 gradi di libertà 6 sono fisici e 4 sono di gauge. Abbiamo a disposizione un generatore ξ^μ per eliminare la libertà di gauge, quindi possiamo fissare due scalari e un vettore.

Risolvendo le equazioni perturbate, si trovano in generale modi fisici (o che possono essere in parte ricondotti a modi fisici) e modi di gauge, che corrispondono allo spaziotempo imperturbato scritto in coordinate differenti.

5.1 Gauge sincrona

É definita dalla scelta $\psi = 0$. Questo lascia delle ambiguità residue: mancano da fissare uno scalare e un vettore. Con le condizioni aggiuntive $\omega^\parallel = 0$ e $\omega^\perp = 0$ (o in totale equivalentemente $g_{00} = -a^2(\tau)$ e $g_{0i} = 0$) è detta gauge sincrona e *time-orthogonal.*
In questo modo, il tempo proprio nello spaziotempo fisico per osservatori a coordinate spaziali fissate corrisponde al tempo cosmico del background.

5.2 Gauge di Poisson

É definita dalla scelta $\omega^\parallel = 0$, $\chi^\parallel = 0$, $\chi_i^\perp = 0$. Questo generalizza la gauge longitudinale o Newtoniana conforme, nella quale le perturbazioni vettoriali e tensoriali non sono considerate (attenzione, questa non è una scelta di gauge ma un'affermazione sulla dinamica).
Nella gauge Newtoniana o longitudinale la metrica assume la forma $ds^2 = -(1 - 2\psi)dt^2 + a^2(t)(1 - 2\phi)dl^2$, è detta longitudinale perché la metrica è diagonale, e Newtoniana con riferimento al limite di campo debole. Il motivo per cui è necessario generalizzarla sarà chiaro in seguito, ed è legato al fatto che, quando si va oltre l'ordine lineare, anche imponendo che le perturbazioni vettoriali e tensoriali siano inizialmente assenti, esse vengono generate dinamicamente con l'evoluzione temporale.

5.3 Quantità gauge invarianti

Un'ambiguità nel fissare la gauge, ovvero eventuali libertà di gauge residue, si traduce nella comparsa di modi di gauge non fisici nella soluzione delle equazioni di Einstein. *Solo quantità che sono invarianti di gauge hanno un significato fisico.* Invece quantità che sono dipendenti dalla gauge hanno significato fisico nella misura in cui, in una certa gauge, riescano ad essere ricondotte anche approssimativamente a quantità gauge invarianti.

Allora un altro modo di affrontare il problema della gauge, che citiamo qui per completezza, è cercare quantità gauge invarianti e lavorare solo con queste. Per trovare quantità gauge invarianti si guarda a come trasforma una quantità (una perturbazione della metrica, un campo scalare, la trivelocità...) passando da una gauge all'altra, come (2.19)-(2.20), e si prendono opportune combinazioni algebriche. Affinché abbiano significato fisico, le quantità gauge invarianti si dovrebbero costruire a partire dalle variabili già presenti nel problema, evitando di introdurne *ad hoc*.
Un set di variabili gauge invarianti è stato trovato da Bardeen nel 1980, al primo ordine [5].

Capitolo 6

Modello FLRW

La metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) è una soluzione esatta delle equazioni di Einstein, e descrive un Universo omogeneo, isotropo, in espansione o in contrazione, connesso per archi ma non necessariamente semplicemente connesso. La forma generale della metrica segue dalle proprietà di omogeneità e isotropia:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\ d\phi^2)\right] \\ &= a^2(\tau)\left(-c^2d\tau^2 + \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\Omega^2\right) \end{aligned} \tag{6.1}$$

dove k rappresenta la curvatura dello spazio. Porremo $k=0$, cioè parte spaziale piatta.
Le equazioni di campo di Einstein entrano in gioco nel derivare il fattore di scala a come funzione del tempo, che caratterizza completamente la dinamica per la geometria dello spaziotempo.

Modellizziamo l'Universo come un fluido perfetto, caratterizzato dalla densità propria ρ e dalla pressione p nel sistema di riferimento di quiete istantanea[1]. Il suo tensore energia-impulso è:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \tag{6.2}$$

Dalle equazioni di campo, scritte equivalentemente come

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad\qquad R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) - \Lambda g_{\mu\nu} \tag{6.3}$$

e tenendo conto del fatto che nelle coordinate (t, r, θ, ϕ) si ha $u^\mu = (1,0,0,0) = \delta^\mu_0$, si ottengono equazioni per R_{00} e per R_{ii}, queste ultime tre equivalenti grazie all'omogeneità e isotropia dello spazio. Riarrangiando si trovano le equazioni cosmologiche di campo di Friedmann-Lemaître, o equazioni di Friedmann se $\Lambda = 0$ (il punto indica la derivata rispetto al tempo t):

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)a + \frac{1}{3}\Lambda c^2 a \\ \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{1}{3}\Lambda c^2 a^2 - c^2 k \end{aligned} \tag{6.4}$$

La conservazione dell'energia e del momento richiede $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$: nello spazio piatto, in cui la derivata covariante si riduce alla derivata parziale, esprime una legge di conservazione cui sono associate le opportune cariche Noetheriane conservate; in generale contiene anche termini legati ai coefficienti di

[1] Si rimanda a [6] per una trattazione più approfondita.

Christoffel. Da questo:

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) + \frac{p}{c^2}\nabla_\mu u^\mu = 0 \qquad \text{equazione di continuità} \tag{6.5}$$

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\mu \nabla_\mu u^\nu = \left(g^{\mu\nu} - \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}\right)\nabla_\mu p \qquad \text{equazioni del moto} \tag{6.6}$$

Le (6.6) esprimono il fatto che le galassie si muovono lungo geodetiche.
Nel limite di pressioni basse e movimento lento si ritrovano le equazioni Newtoniane:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \\ &\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} = -\vec{\nabla}p \end{aligned} \tag{6.7}$$

Dall'equazione di continuità (6.5), utilizzando che $\rho = \rho(t)$ per omogeneità e isotropia dello spazio e che $u^\mu = \delta^\mu_0$, si trova:

$$\dot{\rho} + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) 3\frac{\dot{a}}{a} = 0 \qquad \text{equazione di continuità} \tag{6.8}$$

Solo due equazioni sono indipendenti tra (6.5), (6.6), (6.8).
Assumiamo che l'equazione di stato di ciascuna delle componenti del fluido sia:

$$p = \omega\rho c^2 \qquad \text{equazione di stato} \tag{6.9}$$

con ω costante – a volte si assume $\omega = \omega(t)$ ma sono modelli piuttosto esotici. L'equazione che descrive l'evoluzione della densità in funzione del fattore di scala (ρc^2 è la densità di energia del fluido) diventa allora:

$$\frac{\partial}{\partial a}(\rho a^3) = -3\omega\rho a^2 \qquad \begin{aligned} &\rho \propto a^{-3(1+\omega)} && \\ &\omega = 0 && \text{polvere a pressione nulla} \\ &\omega = \frac{1}{3} && \text{radiazione} \\ &\omega = -1 && \text{vuoto, se } \Lambda = 0 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Ricaviamo ora l'espressione del fattore di scala in un Universo dominato dalla materia. Da qui torniamo alla convenzione $c = 1$.
Dalle equazioni di Friedmann con $\Lambda = 0$ e $k = 0$ si ha:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0 a_0^3}{a^3} \tag{6.11}$$

Risolvendo per il fattore di scala:

$$a(t) = a_0\left(\frac{8\pi G\rho_0}{3}\right)^{1/3} t^{2/3} \tag{6.12}$$

Per passare dal tempo cosmico al tempo conforme (raccogliamo i termini costanti in A):

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \qquad \tau = \int \frac{dt}{At^{2/3}} = 3At^{1/3} \qquad t = \left(\frac{\tau}{3A}\right) \tag{6.13}$$

da cui il fattore di scala (le due equazioni di sinistra sono equivalenti):

$$\begin{cases} \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{(0)}a^2 \\ 2\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad a(\tau) = \frac{1}{9a_0}\left(\frac{3}{8\pi G\rho_0}\right)^{1/3}\tau^2$$

Capitolo 7

Evoluzione nella gauge sincrona

Consideriamo un fluido irrotazionale di polvere, in coordinate sincrone $g_{00} = -a(\tau)$, $g_{0i} = 0$ e comoventi $u^\mu = \delta^\mu_0/a$. La possibilità di imporre simultaneamente queste due scelte di gauge è una particolarità propria della polvere irrotazionale ed è valida ad ogni tempo anche oltre il regime lineare.

7.1 Scelta della gauge sincrona e *time-orthogonal*

Ricordiamo che la gauge sincrona e *time-orthogonal* è definita dalle condizioni:

$$g_{00} = -a^2(\tau) \qquad\qquad g_{0i} = 0 \tag{7.1}$$

Questa gauge ha la seguente proprietà. Esiste un insieme di osservatori comoventi, detti "fondamentali", che non cambiano coordinate spaziali: il tempo proprio letto dagli orologi di questi osservatori è quello conforme $\tau = \int \frac{dt}{a(t)}$. Le coordinate x^i di ciascun osservatore fondamentale sono tenute fisse nel tempo, perciò coincidono con le coordinate Lagrangiane in questa gauge. Il fatto di poter lavorare in coordinate comoventi non va confusa con un'ulteriore scelta di gauge: in questo caso è una particolarità dinamica propria della polvere[1].

7.1.1 Motivazione

Scegliamo la gauge sincrona e *time-orthogonal* perché vogliamo uno slicing di tipo $(3+1)$ dello spaziotempo, che separi la parte spaziale e la parte temporale *ad ogni* τ.
In generale, possiamo sempre introdurre una tale suddivisione a un dato istante, ma l'evoluzione temporale mescolerà parte spaziale e parte temporale, rendendo la suddivisione inservibile. In questo caso però, grazie alle particolari ipotesi dinamiche di fluido perfetto, una volta imposto lo slicing al tempo iniziale esso sarà valido ad ogni tempo.
Quando assumiamo che il flusso del fluido sia irrotazionale, i piani ortogonali alle linee di universo di osservatori fondamentali fondono a formare ipersuperfici spaziali. Se le quadrivelocità degli osservatori definiscono una congruenza, queste ipersuperfici normali ad essa sono ipersuperfici di simultaneità.
Ma quando introduciamo la vorticità, il teorema di Frobenius impedisce l'esistenza di ipersuperfici integrabili di questo tipo. Consideriamo infatti l'ipersuperficie relativa a un osservatore: due vettori nello spazio tangente non necessariamente hanno commutatore appartenente anch'esso allo spazio tangente, a causa della vorticità. Allora le ipersuperfici relative a osservatori diversi non si uniscono più in modo liscio, non costituiscono più una foliazione tridimensionale dello spaziotempo.

[1] Osservazione. Le coordinate spaziali possono deformarsi anche molto quando le perturbazioni di densità diventano grandi. Se le traiettorie di due osservatori fondamentali si intersecano, le coordinate diventano singolari: due diversi set di coordinate x^μ etichettano lo stesso punto dello spaziotempo. Questo problema non sussiste se $\left|\frac{\rho-\rho_{0)}}{\rho_{(0)}}\right| \ll 1$, e nello studio delle perturbazioni questa condizione è soddisfatta per ipotesi [7].

La gauge sincrona, nelle ipotesi fatte, permette di definire le quantità perturbate con il formalismo precedentemente introdotto, mantenendo la suddivisione $(3+1)$ dello spaziotempo.

7.1.2 Gauge residua

Rimane un'ambiguità residua, che nasce dalla libertà di scegliere le condizioni iniziali, e questa è una particolarità propria della gauge sincrona. Se infatti scriviamo la metrica in questa gauge $ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$ vediamo che ammette qualsiasi trasformazione delle coordinate spaziali che lasci invariato il tempo, il che fisicamente corrisponde all'arbitrio nella scelta della ipersuperficie spaziale iniziale [8].

Consideriamo una generica trasformazione di coordinate infinitesima:

$$x^\mu \longmapsto \tilde{x}^\mu = x^\mu - \xi^\mu$$

La quadrivelocità e la metrica cambiano come:

$$\tilde{u}^\mu = \frac{d\tilde{x}^\mu}{dx^\nu}u^\nu \qquad\qquad \tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{dx^\alpha}{d\tilde{x}^\mu}\frac{dx^\beta}{d\tilde{x}^\nu}g_{\alpha\beta}$$

Al primo ordine per il tensore metrico si ha:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \left(\delta^\alpha_\mu + \partial_\mu\xi^\alpha\right)\left(\delta^\beta_\nu + \partial_\nu\xi^\beta\right)g_{\alpha\beta} \approx g_{\mu\nu} + g_{\mu\beta}\partial_\nu\xi^\beta + g_{\alpha\nu}\partial_\mu\xi^\alpha + O(\xi^2)$$

Imponiamo ora le condizioni di gauge (7.1) anche sulla metrica trasformata. Otteniamo:

$$\tilde{g}_{00} = -a^2 \to \partial_0\xi^0 = 0 \qquad\qquad \tilde{g}_{0i} = 0 \to -\partial_i\xi^0 + \gamma_{ij}\partial_0\xi^j = 0$$

Queste sono quattro equazioni, che corrispondono ai quattro gradi di libertà di gauge che possiamo fissare.
Per quanto riguarda la componente $i-j$, essa cambia come:

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + g_{ih}\partial_j\xi^h + g_{kj}\partial_i\xi^k$$

Selezionando la traccia $i=j$ e sfruttando (7.24) che deriva dalla condizione sul momento (7.13) si trova qualcosa del tipo $\frac{d}{d\tau}\nabla^2\tilde{\chi}^\parallel = f(\phi, \chi^\parallel, \xi)$. Vorremmo scegliere ξ in modo che $f=0$, così che $\nabla^2\tilde{\chi}^\parallel =$ costante, per poi scegliere la costante opportunamente in modo da semplificare le equazioni del moto.

Un altro modo per vedere la gauge residua è il seguente. Riprendiamo la trasformazione di $\psi_{(1)}$ (4.11): $\tilde{\psi}_{(1)} = \psi_{(1)} + \alpha'_{(1)} + \frac{a'}{a}\alpha_{(1)}$. Imponiamo che $\tilde{\psi}_{(1)} = 0$, ovvero:

$$\begin{aligned}
&\psi_{(1)} + \alpha'_{(1)} + \frac{a'}{a}\alpha_{(1)} = 0\\
&d\left(a\alpha_{(1)}\right) = -a\psi_{(1)}d\tau\\
&\alpha_{(1)} = -\frac{1}{a}\left(\int a\psi_{(1)}d\tau - \mathcal{A}(x^i)\right)
\end{aligned}$$

Ora per $\omega_i^{(1)}$, da (4.12) abbiamo $\tilde{\omega}_i^{(1)} = \omega_i^{(1)} - \partial_i\alpha^{(1)} + \partial_i\beta^{(1)\prime} + d_i^{(1)\prime}$ e chiediamo che anche $\tilde{\omega}_i^{(1)} = 0$ da cui:

$$\begin{aligned}
&\omega_i^{(1)} - \partial_i\alpha^{(1)} + \partial_i\beta^{(1)\prime} + d_i^{(1)\prime} = 0\\
&\beta^{(1)\prime} = \int\left(\partial_i\alpha^{(1)} - d_i^{(1)\prime} - \omega_i^{(1)}\right)dx^i + \mathcal{B}(\tau, x^j)\\
&\beta^{(1)} = \int\left[\alpha^{(1)} - \int\left(d_i^{(1)\prime} + \omega_i^{(1)}\right)dx^i + \mathcal{B}(\tau, x^j)\right]d\tau + \mathcal{C}(x^i, x^j)
\end{aligned}$$

Le funzioni $\mathcal{B}(\tau, x^j)$ e $\mathcal{C}(x^i, x^j)$ riguardano il labelling delle ipersuperfici spaziali iniziali. Tuttavia, la funzione $\mathcal{A}(x^i)$ riguarda perturbazioni scalari, e perciò la gauge sincrona non definisce in modo univoco lo slicing temporale dello spaziotempo [9].

7.2 Dinamica relativistica della polvere irrotazionale

Per il formalismo delineato in questa sezione si rimanda a [10].
Cominciamo dalle equazioni di Einstein e dall'equazione di continuità:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{7.2}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{7.3}$$

con tensore energia-impulso:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \tag{7.4}$$

ρ densità di massa, $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ quadrivelocità del fluido normalizzata $u_\mu u^\mu = -1$. L'elemento di linea, in coordinate spaziali che rappresentano le coordinate Lagrangiane per l'elemento di fluido, è:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + h_{\alpha\beta}(\vec{x}, t)dx^\alpha dx^\beta \tag{7.5}$$

Introduciamo il tensore gradiente di velocità, che è una quantità puramente spaziale:

$$c(\nabla_\nu u^\mu)\Sigma = \frac{1}{2}h^{\mu\lambda}\frac{d}{dt}h_{\lambda\nu} \equiv \Theta^\mu_\nu \tag{7.6}$$

Il tensore Θ^μ_ν rappresenta la curvatura estrinseca[2] di ipersuperfici spaziali ortogonali alla quadrivelocità. Calcolando i simboli di Christoffel, da questi il tensore di Riemann, contraendo una volta e poi un'altra per ottenere il tensore e lo scalare di Ricci, e sostituendo tutto nelle equazioni di Einstein si ottengono:

- dalla componente $0 - 0$ la condizione sull'energia;
- dalle componenti $i - 0$ le condizioni sul momento;
- dalle componenti $i - j$ le equazioni di evoluzione, che contengono le derivate seconde rispetto al tempo del tensore metrico e governano l'evoluzione del tensore di curvatura estrinseca.

Dalla traccia di quest'ultima e dalla condizione sull'energia si ricava l'equazione di Raychaudhuri[3].

A questo punto sottraiamo il background fattorizzando l'espansione omogenea e isotropa dell'Universo. Scriviamo l'elemento di linea per il background nella forma:

$$ds^2 = a^2(\tau)(-d\tau^2 + \gamma_{ij}(\vec{x}, t)dx^i dx^j) \tag{7.7}$$

Il fattore di scala obbedisce alle equazioni di Friedmann per un fluido perfetto di polvere, dunque $a(\tau) \propto \tau^2$.

Per sottrarre il flusso isotropo di Hubble introduciamo un tensore gradiente di velocità peculiare:

$$ac(\nabla_\nu \tilde{u}^\mu)\Sigma - \frac{a'}{a}\delta^\mu_\nu = \frac{1}{2}\gamma^{\mu\lambda}\gamma'_{\lambda\nu} \equiv \theta^\mu_\nu \tag{7.8}$$

dove $\tilde{u}^\mu = (1/a, 0, 0, 0)$. Grazie a questo nuovo tensore, e usando la curvatura conforme di Ricci dello spazio tridimensionale $\mathcal{R}^i_j(\gamma) = a^2\ R^i_j(h)$ cioè quella dello spazio tridimensionale corrispondente alla metrica γ_{ij}, possiamo riscrivere le equazioni di Einstein:

$$\theta^2 - \theta^\mu_\nu\theta^\nu_\mu + 4\frac{a'}{a}\theta + c^2\mathcal{R} = 16\pi Ga^2\rho_{(0)}\delta \tag{7.9}$$

[2]La curvatura intrinseca è quella determinabile soltanto con operazioni eseguite sull'oggetto. La curvatura estrinseca è quella posseduta dall'oggetto in relazione ad uno spazio piatto di dimensione superiore in cui è immerso, ed è determinabile solo confrontando elementi dell'oggetto in relazione ad elementi dello spazio contenitore.

[3]In generale l'equazione di Raychaudhuri descrive come si comporta un fluido lungo un flusso, cioè lungo l'insieme di curve integrali di un certo campo vettoriale. Per una derivazione si rimanda a [11] e [12].

Definiamo il *density contrast* come:

$$\delta = \frac{\rho - \rho_{(0)}}{\rho_{(0)}} \tag{7.10}$$

dove

$$\rho_{(0)}(\tau) = \frac{3}{2\pi G a^2(\tau)\tau^2} \tag{7.11}$$

Al primo ordine ad esempio $\rho \approx \rho_{(0)} + \rho_{(1)}$ e dunque $\rho_{(1)} = \rho_{(0)}\delta$.
Si ottengono:

$$\theta^2 - \theta^i_j\theta^j_i + \frac{8}{\tau} + \mathcal{R} = \frac{24}{\tau^2}\delta \qquad \text{condizione sull'energia} \tag{7.12}$$

$$\nabla_i\theta^i_j = \partial_j\theta \qquad \text{condizioni sul momento} \tag{7.13}$$

$$\theta^i_j{}' + \frac{4}{\tau}\theta^i_j + \theta\theta^i_j + \frac{1}{4}(\theta^k_l\theta^l_k - \theta^2)\delta^i_j + \mathcal{R}^i_j - \frac{1}{4}\mathcal{R}\delta^i_j = 0 \qquad \text{equazione di evoluzione della curvatura estrinseca} \tag{7.14}$$

$$\theta' + \frac{2}{\tau}\theta + \theta^i_j\theta^j_i + \frac{6}{\tau^2}\delta = 0 \qquad \text{equazione di Raychaudhuri} \tag{7.15}$$

dove la derivata covariante in (7.13) è intesa nello spazio tridimensionale con metrica γ_{ij}, e θ è lo scalare di espansione di volume peculiare, ovvero la traccia di θ^μ_ν, che evolve secondo l'equazione di Raychaudhuri[4] (7.15).
Un vantaggio di questa gauge è il fatto che *nelle equazioni compaiono solo termini geometrici*, il tensore metrico spaziale con le sue derivate temporali e spaziali. L'unica ulteriore variabile è il *density contrast*, che può essere riscritto in termini di γ_{ij} risolvendo l'equazione di continuità:

$$\delta(\vec{x}, \tau) = (1 + \delta_0(\vec{x}))\sqrt{\frac{\gamma_0(\vec{x})}{\gamma(\vec{x}, \tau)}} - 1 \tag{7.16}$$

dove $\gamma = \det\gamma_{ij}$ e lo 0 indica le quantità valutate al tempo conforme 0.

Seguendo ora [13] ricaviamo l'espressione delle quantità perturbate al primo e al secondo ordine in gauge sincrona. Poi con una trasformazione di gauge riportiamo i risultati in gauge di Poisson, e ne osserviamo le implicazioni fisiche.

7.3 Perturbazioni al primo ordine

La metrica spaziale conforme diventa:

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij} &= \delta_{ij} + \gamma^{(1)}_{ij} \\
\gamma^{ij} &= \left(\delta_{ij} + \gamma^{(1)}_{ij}\right)^{-1} \approx \delta^{ij} - \gamma^{(1)ij} \\
\gamma^{(1)}_{ij} &= -2\phi^{(1)}\delta_{ij} + \mathrm{D}_{ij}\chi^{(1)\|} + \partial_i\chi^{(1)\perp}_j + \partial_j\chi^{(1)\perp}_i + \chi^{(1)\top}_{ij}
\end{aligned} \tag{7.17}$$

I coefficienti di Christoffel, calcolati al prim'ordine nella perturbazione, sono:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a} \qquad \Gamma^0_{0i} = 0 \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{a'}{a}\gamma^{(1)}_{ij} + \frac{1}{2}\gamma^{(1)\prime}_{ij} \\
&\Gamma^i_{00} = 0 \qquad \Gamma^i_{0j} \approx \frac{a'}{a}\delta^i{}_j + \frac{1}{2}\gamma^{(1)\prime i}{}_j \qquad \Gamma^i_{jk} \approx \frac{1}{2}\left(\partial_k\gamma^{(1)\ i}{}_j + \partial_j\gamma^{(1)}{}_k{}^i - \partial^i\gamma^{(1)}{}_{jk}\right)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

[4]Un'altra forma in cui si può trovare l'equazione di Raychaudhuri è:

$$\theta' + \frac{a'}{a}\theta + \theta^\mu_\nu\theta^\nu_\mu + 4\pi G a^2\rho_{(0)}\delta = 0$$

Sostituendo le espressioni per $a(\tau)$ e $\rho_{(0)}$ ci si riconduce alla forma riportata sopra.

La curvatura estrinseca, dalla definizione (7.8) risulta:

$$\theta^j_j = \frac{1}{2}(\delta^{ik} - \gamma^{(1)ik})\frac{d}{d\tau}(\delta_{kj} + \gamma^{(1)}_{kj}) \approx \frac{1}{2}\delta^{ik}\frac{d}{d\tau}\gamma^{(1)}_{kj} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\gamma^{(1)i}_j \tag{7.19}$$

Dai coefficienti di Christoffel si ricava $\mathcal{R}$, che è riferito a ipersuperfici conformi con metrica γ_{ij} perciò non vi compare il fattore di scala. Al prim'ordine:

$$\mathcal{R}^i{}_j = \partial^i\partial_j\phi + \nabla^2\phi\delta^i{}_j + \frac{1}{6}\partial^i\partial_j\nabla^2\chi^\parallel + \frac{1}{6}\delta^i{}_j(\nabla^2)^2\chi^\parallel - \frac{1}{2}\nabla^2\chi^{\top i}{}_j \tag{7.20}$$

$$\text{traccia} \qquad \mathcal{R} = \mathcal{R}^i{}_i = 4\nabla^2\phi + \frac{2}{3}(\nabla^2)^2\chi^\parallel \tag{7.21}$$

$$i \neq j \qquad \mathcal{R}^i{}_j = \partial^i\partial_j\phi + \frac{1}{6}\partial^i\partial_j\nabla^2\chi^\parallel - \frac{1}{2}\nabla^2\chi^{\top i}{}_j \tag{7.22}$$

Essendo al prim'ordine, i modi lineari scalari, vettoriali, tensoriali evolvono indipendentemente.

7.3.1 Modi tensoriali

Per ottenere l'equazione di evoluzione dei modi tensoriali è necessario guardare alla parte a traccia nulla ($i \neq j$) dell'equazione di evoluzione (7.14) e linearizzarla. I termini che rimangono sono $\theta'^i_j + \frac{4}{\tau}\theta^i_j + \mathcal{R}^i_j = 0$. Sostituendo (7.18) e (7.19) e linearizzando si ottiene:

$$\chi^{(1)\top\prime\prime}_{ij} + \frac{4}{\tau}\chi^{(1)\top\prime}_{ij} - \nabla^2\chi^{(1)\top}_{ij} = 0 \tag{7.23}$$

É l'equazione che descrive la propagazione libera di onde gravitazionali.

7.3.2 Modi vettoriali

Nel caso di fluido irrotazionale, i modi vettoriali rappresentano modi di gauge. Possono essere messi a zero: $\chi^{(1)\perp}_i = 0$.

7.3.3 Modi scalari

Ci sono due modi scalari, uno legato alla traccia $\phi^{(1)}$ e uno no $\chi^{(1)\parallel}$. La condizione sul momento (7.13) porge:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\partial_j\left(6\phi + \nabla^2\chi^\parallel\right) = 0$$

Poiché le condizioni al bordo impongono che i campi si annullino all'infinito, le eventuali costanti di integrazione devono andare a zero. Si ottiene allora che la quantità tra parentesi è costante e pari al suo valore iniziale:

$$\phi^{(1)} + \frac{1}{6}\nabla^2\chi^{(1)\parallel} = \phi^{(1)}_0 + \frac{1}{6}\nabla^2\chi^{(1)\parallel}_0 \tag{7.24}$$

La condizione sull'energia (7.12) dà:

$$\nabla^2\left[\frac{2}{\tau}\chi^{(1)\parallel\prime} + \frac{6}{\tau^2}(\chi^{(1)\parallel} - \chi^{(1)\parallel}_0) + 2\phi^{(1)}_0 + \frac{1}{3}\nabla^2\chi^{(1)\parallel}_0\right] = \frac{12}{\tau^2}\delta_0 \tag{7.25}$$

con l'assunzione $\delta_0 \ll 1$.
L'equazione di evoluzione (7.14) dà:

$$\chi^{(1)\parallel\prime\prime} + \frac{4}{\tau}\chi^{(1)\parallel\prime} + \frac{1}{3}\nabla^2\chi^{(1)\parallel} = -2\phi^{(1)} \tag{7.26}$$

Combinando insieme le ultime due, si ricava un'equazione per $\chi^{(1)\|}$:

$$\nabla^2 \left[\chi^{(1)\|''} + \frac{2}{\tau}\chi^{(1)\|'} - \frac{6}{\tau^2}(\chi^{(1)\|} - \chi_0^{(1)\|}) \right] = -\frac{12}{\tau^2}\delta_0 \tag{7.27}$$

Linearizzando la soluzione per l'equazione di continuità si ottiene:

$$\delta^{(1)} = \delta_0 - \frac{1}{2}\nabla^2(\chi^{(1)\|} - \chi_0^{(1)\|}) \tag{7.28}$$

che sostituita in (7.27) dà l'equazione per la fluttuazione di densità:

$$\delta^{(1)''} + \frac{2}{\tau}\delta^{(1)'} - \frac{6}{\tau^2}\delta^{(1)} = 0 \tag{7.29}$$

La soluzione generale è:

$$\delta^{(1)}(\tau) = C_1(\vec{x})\tau^2 + \frac{C_2(\vec{x})}{\tau^3} \tag{7.30}$$

in cui si riconoscono un termine che cresce con τ e uno che decade.

A questo punto utilizziamo la gauge residua, e fissiamo $\chi^{(1)\|}$ in modo che $\nabla^2\chi_0^{(1)\|} = -2\delta_0$. Sostituendo nell'equazione (7.27) per l'evoluzione di $\chi^{(1)\|}$, alcuni termini si cancellano, lasciando un'equazione che ha esattamente la stessa forma di (7.29). La soluzione si può scrivere, analogamente alla fluttuazione di densità, come combinazione di un growing mode e di un decaying mode:

$$\chi^{(1)\|}(\vec{x}, \tau) = \chi_+(\vec{x})\tau^2 + \chi_-(\vec{x})\frac{1}{\tau^3} \tag{7.31}$$

con $\chi_\pm$ che danno le ampiezze dei due modi. Ci restringiamo al growing mode.
É data la seguente relazione con il potenziale gravitazionale φ:

$$\chi_+ = -\frac{1}{3}\varphi \tag{7.32}$$

che a sua volta obbedisce all'equazione di Poisson cosmologica:

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}) = \frac{6}{\tau_0^2}\delta_0(\vec{x}) \tag{7.33}$$

questa si può prendere come definizione di δ_0.
Seguono:

$$\mathrm{D}_{ij}\chi^{(1)\|} = -\frac{\tau^2}{3}\left(\partial_i\partial_j\varphi - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\varphi\right)$$

e il rimanente modo scalare:

$$\phi^{(1)}(\vec{x}, \tau) = \frac{5}{3}\varphi(\vec{x}) + \frac{\tau^2}{18}\nabla^2\varphi(\vec{x}) \tag{7.34}$$

Mettendo insieme i risultati ottenuti, la perturbazione della metrica è:

$$\gamma_{ij}^{(1)} = -\frac{10}{3}\varphi\delta_{ij} - \frac{\tau^2}{3}\partial_i\partial_j\varphi + \chi_{ij}^{(1)\top} \tag{7.35}$$

Mantenendo solo il growing mode nelle condizioni iniziali, la fluttuazione lineare di densità è:

$$\delta^{(1)} = \frac{\tau^2}{6}\nabla^2\varphi \tag{7.36}$$

7.4 Perturbazioni al secondo ordine

La metrica spaziale conforme portata al second'ordine è:

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij} &= \delta_{ij} + \gamma_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2}\gamma_{ij}^{(2)} \\
\gamma^{ij} &= \left(\delta_{ij} + \gamma_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2}\gamma_{ij}^{(2)}\right)^{-1} \approx \delta^{ij} - \gamma^{(1)ij} - \frac{1}{2}\gamma^{(2)ij} + \gamma^{(1)ik}\gamma_k^{(1)j} \\
\gamma_{ij}^{(2)} &= -2\phi^{(2)}\delta_{ij} + \chi_{ij}^{(2)}
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Prima di tutto vanno sostituite le espansioni al second'ordine nelle equazioni esatte (7.12)-(7.15). Si ottengono equazioni per i vari termini che compaiono in $\gamma_{ij}^{(2)}$, con sorgenti che contengono combinazioni quadratiche di termini di $\gamma_{ij}^{(1)}$ e altri termini contenenti δ_0. Il pedice S indica che le quantità sono calcolate in gauge sincrona.

equazione di Raychaudhuri

$$\begin{aligned}
\phi_S^{(2)\prime\prime} + \frac{2}{\tau}\phi_S^{(2)\prime} - \frac{6}{\tau^2}\phi_S^{(2)} =& -\frac{1}{6}\gamma_S^{(1)ij\prime}\left(\gamma_{Sij}^{(1)\prime} - \frac{4}{\tau}\gamma_{Sij}^{(1)}\right) + \frac{1}{6}\Bigg[2\gamma_S^{(1)ij}\left(2\gamma_{Si\ ,kj}^{(1)k} - \nabla^2\gamma_{Sij}^{(1)} - \gamma_{Sk\ ,ij}^{(1)k}\right) \\
& - \gamma_{Sk}^{(1)k}\left(\gamma_{S\ \ ,ij}^{(1)ij} - \nabla^2\gamma_{Si}^{(1)i}\right)\Bigg] - \frac{2}{\tau^2}\Bigg[-\frac{1}{4}\left(\gamma_{Si}^{(1)i} - \gamma_{S0i}^{(1)\ i}\right)^2 \\
& - \frac{1}{2}\left(\gamma_S^{(1)ij}\gamma_{Sij}^{(1)} - \gamma_{S0}^{(1)ij}\gamma_{S0ij}^{(1)}\right) + \delta_0\left(\gamma_{Si}^{(1)i} - \gamma_{S0i}^{(1)\ i}\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{7.38}$$

condizione sull'energia

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\tau}\phi_S^{(2)\prime} - \frac{1}{3}\nabla^2\phi_S^{(2)} + \frac{6}{\tau^2}\phi_S^{(2)} - \frac{1}{12}\chi_{S\ \ ,ij}^{(2)ij} = -\frac{2}{3\tau}\gamma_S^{(1)ij}\gamma_{Sij}^{(1)\prime} - \frac{1}{24}\left(\gamma_S^{(1)ij\prime}\gamma_{Sij}^{(1)\prime} - \gamma_{Si}^{(1)i\prime}\gamma_{Sj}^{(1)j\prime}\right) \\
&+ \frac{1}{6}\Bigg[\gamma_S^{(1)ij}\left(\nabla^2\gamma_{Sij}^{(1)} + \gamma_{Sk\ ,ij}^{(1)k} - 2\gamma_{Si\ ,jk}^{(1)k}\right) + \gamma_{S\ \ ,k}^{(1)ki}\left(\gamma_{Sj\ ,i}^{(1)j} - \gamma_{Si\ ,j}^{(1)j}\right) \\
&+ \frac{3}{4}\gamma_{S\ \ ,k}^{(1)ij}\gamma_{Sij}^{(1),k} - \frac{1}{2}\gamma_{S\ \ ,k}^{(1)ij}\gamma_{Si\ ,j}^{(1)k} - \frac{1}{4}\gamma_{Si}^{(1)i,k}\gamma_{Sj\ ,k}^{(1)j}\Bigg] \\
&+ \frac{2}{\tau^2}\Bigg[-\frac{1}{4}\left(\gamma_{Si}^{(1)i} - \gamma_{S0i}^{(1)\ i}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\gamma_S^{(1)ij}\gamma_{Sij}^{(1)} - \gamma_{S0}^{(1)ij}\gamma_{S0ij}^{(1)}\right) + \delta_0\left(\gamma_{Si}^{(1)i} - \gamma_{S0i}^{(1)\ i}\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{7.39}$$

condizione sul momento

$$2\phi_{S,j}^{(2)\prime} + \frac{1}{2}\chi_{Sj\ ,i}^{(2)i\ \prime} = \gamma_S^{(1)ik}\left(\gamma_{Sjk,i}^{(1)\ \ \prime} - \gamma_{Sik,j}^{(1)\ \ \prime}\right) + \gamma_{S\ \ ,i}^{(1)ik}\gamma_{Sjk}^{(1)\ \prime} - \frac{1}{2}\gamma_{S\ \ ,j}^{(1)ik}\gamma_{Sik}^{(1)\prime} - \frac{1}{2}\gamma_{Si\ ,k}^{(1)i}\gamma_{Sj}^{(1)k\prime} \tag{7.40}$$

equazione di evoluzione

$$\begin{aligned}
&-\left(\phi_S^{(2)\prime\prime} + \frac{4}{\tau}\phi_S^{(2)\prime}\right)\delta^i{}_j + \frac{1}{2}\left(\chi_{Sj}^{(2)i\prime\prime} + \frac{4}{\tau}\chi_{Sj}^{(2)i\prime}\right) + \phi_{S,j}^{(2),i} - \frac{1}{4}\chi_{S\ \ ,k\ell}^{(2)k\ell}\delta^i{}_j + \frac{1}{2}\chi_{S\ \ ,kj}^{(2)ki} + \frac{1}{2}\chi_{Sj\ \ ,k}^{(2)k,i} - \frac{1}{2}\nabla^2\chi_{Sj}^{(2)i} \\
&= \gamma_S^{(1)ik\prime}\gamma_{Skj}^{(1)\ \prime} - \frac{1}{2}\gamma_{Sk}^{(1)k\prime}\gamma_{Sj}^{(1)i\prime} + \frac{1}{8}\left[\left(\gamma_{Sk}^{(1)k\prime}\right)^2 - \gamma_{S\ell}^{(1)k\prime}\gamma_{Sk}^{(1)\ell\prime}\right]\delta^i{}_j - \frac{1}{2}\Bigg[-\gamma_{Sj}^{(1)i}\left(\gamma_{S\ell\ \ ,k}^{(1)k,\ell} - \nabla^2\gamma_{Sk}^{(1)k}\right) \\
&+ 2\gamma_S^{(1)k\ell}\left(\gamma_{Sj\ ,k\ell}^{(1)i} + \gamma_{Sk\ell\ ,j}^{(1)\ \ ,i} - \gamma_{S\ell\ ,jk}^{(1)i} - \gamma_{S\ell j\ ,k}^{(1)\ \ ,i}\right) + 2\gamma_{S\ \ ,k}^{(1)k\ell}\left(\gamma_{Sj\ ,\ell}^{(1)i} - \gamma_{S\ell\ ,j}^{(1)i} - \gamma_{Sj\ell}^{(1),i}\right) \\
&+ 2\gamma_{S\ \ ,\ell}^{(1)ki}\gamma_{Sjk}^{(1),\ell} - 2\gamma_{S\ \ ,\ell}^{(1)ki}\gamma_{Sj\ ,k}^{(1)\ell} + \gamma_{S\ \ ,j}^{(1)k\ell}\gamma_{Sk\ell}^{(1)\ \ ,i} + \gamma_{S\ell\ ,k}^{(1)\ell}\left(\gamma_{S\ \ ,j}^{(1)ki} + \gamma_{Sj}^{(1)k,i} - \gamma_{Sj}^{(1)i,k}\right) \\
&- \gamma_S^{(1)k\ell}\left(\nabla^2\gamma_{Sk\ell}^{(1)} + \gamma_{Sm\ ,k\ell}^{(1)m} - 2\gamma_{Sk\ \ ,m\ell}^{(1)m}\right)\delta^i{}_j - \gamma_{S\ \ ,\ell}^{(1)\ell k}\left(\gamma_{Sm\ ,k}^{(1)m} - \gamma_{Sk\ ,m}^{(1)m}\right)\delta^i{}_j \\
&- \frac{3}{4}\gamma_{S\ \ ,m}^{(1)k\ell}\gamma_{Sk\ell}^{(1),m}\delta^i{}_j + \frac{1}{2}\gamma_{S\ \ ,m}^{(1)k\ell}\gamma_{Sk\ \ ,\ell}^{(1)m}\delta^i{}_j + \frac{1}{4}\gamma_{Sk}^{(1)k,m}\gamma_{S\ell\ ,m}^{(1)\ell}\delta^i{}_j
\end{aligned} \tag{7.41}$$

Poi si vogliono risolvere queste equazioni per $\phi^{(2)}$ e per $\chi^{(2)}_{ij}$ in termini del potenziale gravitazionale peculiare iniziale φ e dei modi tensoriali al prim'ordine $\chi^{(1)\top}_{ij}$.
Si assume, per semplificare i conti, che le condizioni iniziali siano prese a $\tau_0 = 0$, e quindi $\delta_0 = 0$.

Nel risolvere le equazioni, si apprezzano già effetti di non linearità: è ancora vero che modi diversi del secondo ordine evolvono indipendentemente tra loro, ma ricevono contributi misti da termini del primo ordine. Questo fenomeno, detto di *mode-mixing*, emergerà ora dal punto di vista matematico nello scrivere le quantità perturbate; vedremo in seguito cosa significhi fisicamente.

Per quanto riguarda il modo scalare $\phi^{(2)}_S$, chiamiamo $\phi^{(2)}_{S(t)}$ la parte legata unicamente ai modi tensoriali del primo ordine $\chi^{(1)}_{ij}$ e isoliamo questi termini nell'equazione di Raychaudhuri. Diventa:

$$\begin{aligned}\phi^{(2)\,\prime\prime}_{S(t)} + \frac{2}{\tau}\phi^{(2)\,\prime}_{S(t)} - \frac{6}{\tau^2}\phi^{(2)}_{S(t)} =& \frac{\tau^2}{9}\varphi^{,ij}\nabla^2\chi^{(1)\top}_{ij} - \frac{1}{6}\chi^{(1)\top ij\prime}\chi^{(1)\top\prime}_{ij} + \frac{2}{3\tau}\chi^{(1)\top ij\prime}\chi^{(1)\top}_{ij} \\ & - \frac{1}{3}\chi^{(1)\top ij}\nabla^2\chi^{(1)\top}_{ij} + \frac{1}{\tau^2}\left(\chi^{(1)\top ij}\chi^{(1)\top}_{ij} - \chi^{(1)\top ij}_0\chi^{(1)\top}_{0ij}\right) \equiv \mathcal{Q}(\vec{x},\tau)\end{aligned} \tag{7.42}$$

dove il membro di destra è un termine sorgente $\mathcal{Q}(\vec{x},\tau)$ che viene solo dai termini tensoriali del primo ordine. Per mezzo del metodo di Green si ottiene:

$$\phi^{(2)}_{S(t)} = \frac{\tau^2}{5}\int_0^\tau \frac{d\tau'}{\tau'}\mathcal{Q}(\tau') - \frac{1}{5\tau^3}\int_0^\tau d\tau'\tau'^4\mathcal{Q}(\tau') \tag{7.43}$$

Sostituendo nell'equazione di Raychaudhuri completa:

$$\phi^{(2)}_{S(t)} = \frac{\tau^4}{252}\left(-\frac{10}{3}\varphi^{,ki}\varphi_{,ki} + (\nabla^2\varphi)^2\right) + \frac{5\tau^2}{18}\left(\varphi^{,k}\varphi_{,k} + \frac{4}{3}\varphi\nabla^2\varphi\right) + \phi^{(2)}_{S(t)} \tag{7.44}$$

A questo punto, noto $\phi^{(2)}_S$, si sostituisce nelle espressioni rimanenti e si determina $\chi^{(2)}_{Sij}$:

$$\begin{aligned}\chi^{(2)}_{Sij} =& \frac{\tau^4}{126}\left(19\varphi^{,k}_{,i}\varphi_{,kj} - 12\varphi_{,ij}\nabla^2\varphi + 4(\nabla^2\varphi)^2\delta_{ij} - \frac{19}{3}\varphi^{,kl}\varphi_{,kl}\delta_{ij}\right) \\ & + \frac{5\tau^2}{9}\left(-6\varphi_{,i}\varphi_{,j} - 4\varphi\varphi_{,ij} + 2\varphi^{,k}\varphi_{,k}\delta_{ij} + \frac{4}{3}\varphi\nabla^2\varphi\delta_{ij}\right) + \pi_{Sij} + \chi^{(2)}_{S(t)ij}\end{aligned} \tag{7.45}$$

dove $\chi^{(2)}_{S(t)ij}$ è la parte del tensore a traccia nulla $\chi^{(2)}_{Sij}$ che è generata dai modi tensoriali del primo ordine: include gli effetti dell'accoppiamento scalare-tensore e tensore-tensore.

Viceversa, si può individuare un contributo di natura tensoriale al secondo ordine derivante da perturbazioni iniziali scalari al prim'ordine, $\tilde{\pi}_{ij}$. Questo termine segue un'equazione delle onde non omogenea che si può risolvere con il metodo di Green.

Infine, il *density contrast* al secondo ordine dà:

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}_S \;=\;& \frac{\tau^4}{252}\left(5\left(\nabla^2\varphi\right)^2 + 2\varphi^{,ij}\varphi_{,ij}\right) + \frac{\tau^2}{36}\left(15\varphi^{,i}\varphi_{,i} + 40\varphi\nabla^2\varphi - 6\varphi^{,ij}\chi^{(1)\top}_{ij}\right) \\ & + \frac{1}{4}\left(\chi^{(1)\top ij}\chi^{(1)\top}_{ij} - \chi^{(1)\top ij}_0\chi^{(1)\top}_{0ij}\right) + \frac{3}{2}\phi^{(2)}_{S(t)}\end{aligned} \tag{7.46}$$

Si vede che modi tensoriali del primo ordine compaiono come sorgenti al secondo ordine per tutti i modi, scalari, vettoriali, tensoriali: fisicamente, onde gravitazionali possono dare origini a perturbazioni del secondo ordine di tutti questi tre tipi. Ad esempio, nella formula (7.46) per il *mass-density contrast* si legge che, anche in assenza di fluttuazioni iniziali, si hanno contributi da onde gravitazionali primordiali.

Capitolo 8

Da gauge sincrona a gauge di Poisson

La gauge di Poisson è definita da $\partial^i \omega_i^{(r)} = \partial^j \chi_{ij}^{(r)} = 0$.
Mostriamo che queste condizioni effettivamente corrispondono alla definizione data in precedenza. La prima equazione, sfruttando la decomposizione di Helmholtz, diventa

$$0 = \partial^i \omega_i^{(r)} = \partial^i \partial_i \omega^{(r)\parallel} + \partial^i \omega_i^{(r)\perp} = \partial^i \partial_i \omega^{(r)\parallel} + 0 = \nabla^2 \omega^{(r)\parallel} \;\rightarrow\; \nabla^2 \omega^{(r)\parallel} = 0$$

Date le condizioni al bordo per cui i campi devono svanire all'infinito, la soluzione è unica ed è $\omega^{(r)\parallel} = 0$.
La seconda equazione, scomponendo in modi e poi separandoli – cosa lecita, perché all'ordine r i modi evolvono sempre indipendentemente – diventa

$$\begin{aligned}
&\partial^j \left(\mathrm{D}_{ij} \chi^{(r)\parallel} + \partial_i \chi_j^{(r)\perp} + \partial_j \chi_i^{(r)\perp} + \chi_{ij}^{(r)\top} \right) = \partial^j \left(\mathrm{D}_{ij} \chi^{(r)\parallel} + \partial_j \chi_i^{(r)\perp} \right) = 0 \\
&\nabla^2 \left(\partial_j \chi^{(r)\parallel} - \frac{1}{3} \partial_i \chi^{(r)\parallel} \right) = 0 \\
&\nabla^2 \chi_i^{(r)\perp} = 0
\end{aligned}$$

Seguono anche $\chi^{(r)\parallel} = \chi_i^{(r)\perp} = 0$. Abbiamo eliminato due scalari e un vettore, i gradi di libertà di gauge sono fissati.

8.1 Al primo ordine

Riportiamo le formule per le trasformazioni al primo ordine (4.11)-(4.14), a sinistra nel caso generale e a destra in questo caso particolare:

gauge sincrona	$\psi_S = 0$	$\omega_S^{\parallel} = \omega_{Si}^{\perp} = 0$
gauge di Poisson	$\omega_P^{\parallel} = 0$	$\chi_P^{\parallel} = \chi_{Pi}^{\perp} = 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_{(1)} &= \psi_{(1)} + \alpha'_{(1)} + \frac{a'}{a} \alpha_{(1)} & \psi_P^{(1)} &= \alpha'_{(1)} + \frac{a'}{a} \alpha_{(1)} \\
\tilde{\omega}_i^{(1)} &= \omega_i^{(1)} - \partial_i \alpha^{(1)} + \partial_i \beta^{(1)\prime} + d_i^{(1)\prime} & \omega_{Pi}^{\perp} &= -\partial_i \alpha^{(1)} + \partial_i \beta^{(1)\prime} + d_i^{(1)\prime} \\
\tilde{\phi}_{(1)} &= \phi_{(1)} - \frac{1}{3} \nabla^2 \beta_{(1)} - \frac{a'}{a} \alpha_{(1)} & \phi_P^{(1)} &= \phi_S^{(1)} - \frac{1}{3} \nabla^2 \beta_{(1)} - \frac{a'}{a} \alpha_{(1)} \\
\tilde{\chi}_{ij}^{(1)} &= \chi_{ij}^{(1)} + 2\mathrm{D}_{ij} \beta^{(1)} + \partial_j d_i^{(1)} + \partial_i d_j^{(1)} & \chi_{Pij}^{(1)\top} &= \chi_{Sij}^{(1)} + 2\mathrm{D}_{ij} \beta^{(1)} + \partial_j d_i^{(1)} + \partial_i d_j^{(1)}
\end{aligned}$$

Contraendo la seconda equazione con ∂^i e ricordando le condizioni al bordo per cui i campi e le loro derivate devono annullarsi all'infinito, si ottiene $\alpha^{(1)} = \beta^{(1)\prime}$, da cui $\omega_{Pi}^{\perp} = d_i^{(1)\prime}$. Poiché siamo al prim'ordine, possiamo separare i modi scalari, vettoriali, tensoriali nella quarta equazione, che sono indipendenti. Complessivamente si ottiene il sistema:

$$
\begin{cases}
\psi_P^{(1)} = \alpha'_{(1)} + \frac{a'}{a}\,\alpha_{(1)} & (8.1a)\\
\alpha^{(1)} = \beta^{(1)\prime} & (8.1b)\\
\omega_{Pi}^{\perp} = d_i^{(1)\prime} & (8.1c)\\
\phi_P^{(1)} = \phi_S^{(1)} - \frac{1}{3}\,\nabla^2\beta_{(1)} - \frac{a'}{a}\,\alpha_{(1)} & (8.1d)\\
\mathrm{D}_{ij}\left(\chi_S^{(1)\parallel} + 2\beta^{(1)}\right) = 0 & (8.1e)\\
\partial_i\chi_{Sj}^{(1)\perp} + \partial_j\chi_{Si}^{(1)\perp} + \partial_i d_j^{(1)} + \partial_j d_i^{(1)} = 0 & (8.1f)\\
\chi_{Pij}^{(1)\top} = \chi_{Sij}^{(1)\top} & (8.1g)
\end{cases}
$$

Le equazioni (8.1b)-(8.1e)-(8.1f) determinano i parametri della trasformazione di gauge in termini delle quantità della gauge sincrona, cioè fissano $d_i^{(1)}$ da (8.1f), $\beta^{(1)}$ da (8.1e), $\alpha^{(1)}$ da (8.1b). Le restanti determinano le quantità perturbate nella gauge di Poisson. Notiamo in particolare (8.1g), che sancisce l'invarianza di gauge dei modi tensoriali al prim'ordine.

Vogliamo determinare il vettore ξ^μ, generatore della trasformazione. Da (8.1f), avendo fissato a zero i modi vettoriali, si ha:

$$
\begin{aligned}
&\partial_i d_j^{(1)} + \partial_j d_i^{(1)} = 0\\
&\partial^i(\partial_i d_j^{(1)} + \partial_j d_i^{(1)}) = 0 \qquad \text{con } \partial^i d_i^{(1)} = 0\\
&\nabla^2 d_i^{(1)} = 0\\
&\boxed{d_i^{(1)} = 0}
\end{aligned}
$$

Per il modo scalare $\chi^{(1)\parallel}$ si ha da (7.34):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_{ij}\chi_S^{(1)\parallel} &= -\frac{\tau^2}{3}\mathrm{D}_{ij}\varphi\\
\mathrm{D}_{ij}\chi_S^{(1)\parallel} &= \mathrm{D}_{ij}\left(-\frac{\tau^2}{3}\varphi\right)\\
\chi_S^{(1)\parallel} &= -\frac{\tau^2}{3}\varphi
\end{aligned}
$$

Sostituendo l'espressione in (8.1e):

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{D}_{ij}\left(\chi_S^{(1)\parallel} + 2\beta^{(1)}\right) = 0\\
&\mathrm{D}_{ij}\beta^{(1)} = -\frac{1}{2}\mathrm{D}_{ij}\chi_S^{(1)\parallel}\\
&\boxed{\beta^{(1)} = \frac{\tau^2}{6}\varphi}
\end{aligned}
$$

Infine da (8.1b), ricordando che $\varphi = \varphi(\vec{x})$ dunque tutte le sue derivate temporali sono nulle, si ha:

$$
\begin{aligned}
&\alpha^{(1)} = \beta^{(1)\prime}\\
&\boxed{\alpha^{(1)} = \frac{\tau}{3}\varphi}
\end{aligned}
$$

Ricaviamo ora le espressioni delle quantità perturbate nella gauge di Poisson. Facciamo l'assunzione semplificatrice $\tau_0 = 0$ e quindi anche $\delta_0 = 0$, cioè inizialmente non ci sono perturbazioni di densità e la quantità fisica coincide con la soluzione di background: l'equazione cosmologica porge $\nabla^2\varphi(\vec{x}) = 0$. Inoltre ricordiamo:

$$a(\tau) = \frac{1}{9a_0}\left(\frac{3}{8\pi G\rho_0}\right)^{1/3}\tau^2 \qquad \rho_{(0)}(\tau) = 162a_0^2\left(\frac{3\rho_0^2}{\pi G}\right)^{1/3}\frac{1}{\tau^6}$$

Da (8.1a), grazie a $\frac{a'}{a} = \frac{2}{\tau}$ e all'espressione per $\alpha^{(1)}$:

$$\psi_P^{(1)} = \varphi \tag{8.2}$$

Da (8.1c):

$$\omega_{Pi}^{\perp} = 0$$

Da (8.1d) e utilizzando l'espressione (7.34) per il modo scalare:

$$\phi_P^{(1)} = \varphi \tag{8.3}$$

Infine i modi tensoriali sono invarianti di gauge.
Per quanto riguarda le quantità fisiche, per la fluttuazione di densità ricorriamo a (4.15):

$$\begin{aligned}
&\delta\rho_P = \delta\rho_S + \rho'_{(0)}\alpha_{(1)}\\
&\delta_P^{(1)}\rho_{(0)} = \delta_S^{(1)}\rho_{(0)} + \rho'_{(0)}\alpha_{(1)}\\
&\delta_P^{(1)} = \delta_S^{(1)} + \frac{\rho'_{(0)}}{\rho_{(0)}}\frac{\tau}{3}\varphi\\
&\boxed{\delta_P^{(1)} = -2\varphi + \frac{\tau^2}{6}\nabla^2\varphi}
\end{aligned}$$

dove negli ultimi due passaggi si sono usate $\frac{\rho'_{(0)}}{\rho_{(0)}} = -\frac{6}{\tau}$ e l'espressione (7.36) per cui $\delta_S^{(1)} = \frac{\tau^2}{6}\nabla^2\varphi$. La quadrivelocità è data da (4.17) e (4.18), dove la variazione di entrambe le componenti in gauge sincrona è nulla:

$$\begin{aligned}
&v_P^{(1)0} = v_S^{(1)0} - \frac{a'}{a}\alpha_{(1)} - \alpha'_{(1)} &&\qquad \boxed{v_P^{(1)0} = -\varphi}\\
&v_P^{(1)i} = v_S^{(1)i} - \partial^i\beta'_{(1)} - d'^{i}_{(1)} &&\qquad \boxed{v_P^{(1)i} = -\frac{\tau}{3}\partial^i\varphi}
\end{aligned}$$

8.2 Al secondo ordine

Riportiamo (4.22)-(4.23), eliminando i termini nulli secondo le condizioni date dalle due gauge. Senza perdita di generalità, anche nella prima poniamo a zero i modi vettoriali, che sono di gauge.

gauge sincrona	$\psi_S = 0$	$\omega_S^{\parallel} = \omega_{Si}^{\perp} = 0$
gauge di Poisson	$\omega_P^{\parallel} = 0$	$\chi_P^{\parallel} = \chi_{Pi}^{\perp} = 0$

$$\begin{aligned}
\psi_P^{(2)} \;=\;& \alpha^{(1)}\left[\alpha''_{(1)} + 5\frac{a'}{a}\alpha'_{(1)} + \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2}\right)\alpha_{(1)}\right] + \xi^i_{(1)}\left(\alpha^{(1)\prime}_{,i} + \frac{a'}{a}\alpha^{(1)}_{,i}\right)\\
&+2\alpha'^2_{(1)} + \xi'^{i}_{(1)}\left(\alpha^{(1)}_{,i} - \xi^{(1)\prime}_{i}\right) + \alpha'_{(2)} + \frac{a'}{a}\alpha_{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{Pi}^{(2)\perp} &= \alpha^{(1)}\left[-\alpha_{,i}^{(1)\prime}+\xi_i^{(1)\prime\prime}-4\frac{a'}{a}\left(\alpha_{,i}^{(1)}-\xi_i^{(1)\prime}\right)\right]+\xi_{(1)}^j\left(-\alpha_{,ij}^{(1)}+\xi_{i,j}^{(1)\prime}\right)\\
&+\alpha'_{(1)}\left(-3\alpha_{,i}^{(1)}+\xi_i^{(1)\prime}\right)+\xi_{(1)}^{j\prime}\left(-4\phi_S^{(1)}\delta_{ij}+2\chi_{Sij}^{(1)}+2\xi_{j,i}^{(1)}+\xi_{i,j}^{(1)}\right)\\
&+\xi_{(1),i}^j\left(-\alpha_{,j}^{(1)}\right)-\alpha_{,i}^{(2)}+\xi_i^{(2)\prime}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_P^{(2)} &= \phi_S^{(2)}+\alpha^{(1)}\left[2\left(\phi'_{S(1)}+2\frac{a'}{a}\phi_{S(1)}\right)-\left(\frac{a''}{a}+\frac{a'^2}{a^2}\right)\alpha_{(1)}-\frac{a'}{a}\alpha'_{(1)}\right]\\
&+\xi_{(1)}^i\left(2\phi_{S,i}^{(1)}-\frac{a'}{a}\alpha_{,i}^{(1)}\right)-\frac{1}{3}\left(-4\phi_{S(1)}+\alpha_{(1)}\partial_0+\xi_{(1)}^i\partial_i+4\frac{a'}{a}\alpha_{(1)}\right)\nabla^2\beta_{(1)}\\
&-\frac{1}{3}\left(-\alpha_{(1)}^{,i}+\xi_{(1)}^{i\prime}\right)\alpha_{,i}^{(1)}-\frac{1}{3}\left(2\chi_{Sij}^{(1)}+\xi_{i,j}^{(1)}+\xi_{j,i}^{(1)}\right)\xi_{(1)}^{j,i}\\
&-\frac{a'}{a}\alpha_{(2)}-\frac{1}{3}\nabla^2\beta_{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{Pij}^{(2)\top} &= \chi_{Sij}^{(2)}+2\left(\chi_{ij}^{(1)\prime}+2\frac{a'}{a}\chi_{Sij}^{(1)}\right)\alpha_{(1)}+2\chi_{Sij,k}^{(1)}\xi_{(1)}^k\\
&+\ 2\left(-4\phi_{S(1)}+\alpha_{(1)}\partial_0+\xi_{(1)}^k\partial_k+4\frac{a'}{a}\alpha_{(1)}\right)\left(d_{(i,j)}^{(1)}+\mathrm{D}_{ij}\beta_{(1)}\right)\\
&+\ 2\left[\left(-\alpha_{,(i}^{(1)}+\xi_{(i}^{(1)\prime}\right)\alpha_{,j)}^{(1)}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\left(-\alpha_{(1)}^{,k}+\xi_{(1)}^{k\prime}\right)\alpha_{,k}^{(1)}\right]\\
&+\ 2\left[\left(2\chi_{S(i|k|}^{(1)}+\xi_{k,(i}^{(1)}+\xi_{(i,|k|)}^{(1)}\right)\xi_{,j)}^{(1)k}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\left(2\chi_{lk}^{(1)}+\xi_{k,l}^{(1)}+\xi_{l,k}^{(1)}\right)\xi_{(1)}^{k,l}\right]\\
&+\ 2\left(d_{(i,j)}^{(2)}+\mathrm{D}_{ij}\beta_{(2)}\right)
\end{aligned}$$

Si può usare il fatto che $d_i^{(1)}=0$ e $\alpha^{(1)}=\beta^{(1)\prime}$ (8.1b) per esprimere le componenti del generatore $\xi_i^{(1)}$ solo in termini di $\beta^{(1)}$.

$$\psi_P^{(2)}=\beta'_{(1)}\left[\beta'''_{(1)}+5\frac{a'}{a}\beta''_{(1)}+\left(\frac{a''}{a}+\frac{a'^2}{a^2}\right)\beta'_{(1)}\right]+\beta_{(1)}^{,i}\left(\beta_{,i}^{(1)\prime\prime}+\frac{a'}{a}\beta_{,i}^{(1)\prime}\right)+2\beta_{(1)}^{\prime\prime 2}+\alpha^{(2)\prime}+\frac{a'}{a}\alpha^{(2)} \quad (8.4)$$

$$\omega_{Pi}^{(2)}=-2\left(2\phi_S^{(1)}+\beta''_{(1)}-\frac{2}{3}\nabla^2\beta_{(1)}\right)\beta_{,i}^{(1)\prime}-2\beta_{,j}^{(1)\prime}\beta_{,i}^{(1),j}+2\chi_{ij}^{(1)\top}\beta_{(1)}^{\prime,i}-\alpha_{,i}^{(2)}+\beta_{,i}^{(2)\prime}+d_i^{(2)\prime} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned}
\phi_P^{(2)} &= \phi_S^{(2)}+\beta'_{(1)}\left[2\left(\phi_S^{(1)\prime}+2\frac{a'}{a}\phi_S^{(1)}\right)-\left(\frac{a''}{a}+\frac{a'^2}{a^2}\right)\beta'_{(1)}-\frac{a'}{a}\beta''_{(1)}\right]\\
&-\frac{1}{3}\left(-4\phi_S^{(1)}+\beta'_{(1)}\partial_0+\beta_{(1)}^{,i}\partial_i+4\frac{a'}{a}\beta'_{(1)}+\frac{4}{3}\nabla^2\beta_{(1)}\right)\nabla^2\beta_{(1)} \quad (8.6)\\
&+\beta_{(1)}^{,i}\left(2\phi_{S,i}^{(1)}-\frac{a'}{a}\beta_{,i}^{(1)\prime}\right)+\frac{2}{3}\beta_{,ij}^{(1)}\beta_{(1)}^{,ij}-\frac{2}{3}\chi_{ij}^{(1)\top}\beta_{(1)}^{,ij}-\frac{a'}{a}\alpha_{(2)}-\frac{1}{3}\nabla^2\beta_{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{Pij}^{(2)} &= \chi_{Sij}^{(2)}+2\left(\frac{4}{3}\nabla^2\beta_{(1)}-4\phi_S^{(1)}-\beta'_{(1)}\partial_0-\beta_{(1)}^{,k}\partial_k\right)\mathrm{D}_{ij}\beta_{(1)}\\
&-4\left(\beta_{,ik}^{(1)}\beta_{(1),j}^{,k}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\beta_{,lk}^{(1)}\beta_{(1)}^{,lk}\right)+2\left(\chi_{ij}^{(1)\top\prime}+2\frac{a'}{a}\chi_{ij}^{(1)\top}\right)\beta^{(1)\prime} \quad (8.7)\\
&+2\chi_{ij,k}^{(1)\top}\beta^{(1),k}+2\chi_{ik}^{(1)\top}\beta_{,j}^{(1),k}+2\chi_{jk}^{(1)\top}\beta_{,i}^{(1),k}\\
&-\frac{4}{3}\delta_{ij}\chi_{lk}^{(1)\top}\beta^{(1),lk}+2\left(d_{(i,j)}^{(2)}+\mathrm{D}_{ij}\beta^{(2)}\right)
\end{aligned}$$

A questo punto, nell'ultima equazione, si può sfruttare il fatto che $\partial^i \chi^{(2)}_{Pij} = 0$. Segue che anche $\partial^i \partial^j \chi^{(2)}_{Pij} = 0$, inoltre $\partial^i d^r_i = 0$ perciò, derivando due volte, i termini ignoti scompaiono e si trova un'equazione per $\nabla^2 \nabla^2 \beta^{(2)}$.
Noto $\beta^{(2)}$, si può sostituire nella condizione $\partial^i \chi^{(2)}_{Pij} = 0$ e ricavarne un'equazione per $d^{(2)}_i$.
Infine usando $\partial^i \omega^{(2)}_{Pi} = 0$ e sostituendo $\beta^{(2)}$ si ricava un'equazione per $\alpha^{(2)}$.

In questo modo vengono ottenuti, almeno in forma implicita, i parametri della trasformazione.

Capitolo 9

Evoluzione nella gauge di Poisson

9.1 Al primo ordine

I parametri della trasformazione sono $\alpha^{(1)} = \frac{\tau}{3}\varphi$, $\beta^{(1)} = \frac{\tau^2}{6}\varphi$ e $d^{(1)i} = 0$ poiché nelle condizioni iniziali i modi vettoriali sono assenti.

Le perturbazioni della metrica sono:

$$\begin{aligned} \psi_P^{(1)} &= \phi_P^{(1)} = \varphi, \\ \chi_{Pij}^{(1)} &= \chi_{ij}^{\top(1)} \end{aligned} \tag{9.1}$$

Il *density contrast* è:

$$\delta_P^{(1)} = -2\varphi + \frac{\tau^2}{6}\nabla^2\varphi \tag{9.2}$$

Le perturbazioni nella quadrivelocità sono:

$$v_P^{(1)0} = -\varphi \tag{9.3}$$

$$v_P^{(1)i} = -\frac{\tau}{3}\varphi^{,i} \tag{9.4}$$

9.2 Al secondo ordine

Definiamo:

$$\nabla^2\Psi_0 = -\frac{1}{2}\left((\nabla^2\varphi)^2 - \varphi_{,ik}\varphi^{,ik}\right) \tag{9.5}$$

$$\nabla^2\Theta_0 = \Psi_0 - \frac{1}{3}\varphi^{,i}\varphi_{,i} \tag{9.6}$$

Le perturbazioni nella metrica sono:

$$\begin{aligned} \psi_P^{(2)} &= \tau^2\left(\frac{1}{6}\varphi^{,i}\varphi_{,i} - \frac{10}{21}\Psi_0\right) + \frac{16}{3}\varphi^2 + 12\Theta_0, + \psi_{P(t)}^{(2)} \\ \phi_P^{(2)} &= \tau^2\left(\frac{1}{6}\varphi^{,i}\varphi_{,i} - \frac{10}{21}\Psi_0\right) + \frac{4}{3}\varphi^2 - 8\Theta_0, + \phi_{P(t)}^{(2)} \\ \nabla^2\omega_P^{(2)i} &= -\frac{8}{3}\tau\left(\varphi^{,i}\nabla^2\varphi - \varphi^{,ij}\varphi_{,j} + 2\Psi_0^{,i}\right) + \nabla^2\omega_{P(t)}^{(2)i} \\ \chi_{Pij}^{(2)} &= \tilde{\pi}_{ij} + \chi_{P(t)ij}^{(2)} \end{aligned} \tag{9.7}$$

I termini indicati con (t) sono quelli provenienti da modi tensoriali del primo ordine, e si vede che compaiono in tutti i modi di perturbazioni. Il termine $\tilde{\pi}_{ij}$ obbedisce a un'equazione delle onde non omogenea:

$$\tilde{\pi}''_{ij} + \frac{4}{\tau}\tilde{\pi}'_{ij} - \nabla^2\tilde{\pi}_{ij} = -\frac{40}{3}\mathcal{T}_{ij} \tag{9.8}$$

dove il termine sorgente è definito da:

$$\nabla^2\mathcal{T}_{ij} = \nabla^2\Psi_0\delta_{ij} + \Psi_{0,ij} + \left(\phi_{,ij}\nabla^2\phi - \phi_{,ik}\phi_{,j}^{,k}\right) \tag{9.9}$$

La sua soluzione contiene un termine costante più un termine con andamento ondulatorio della stessa forma dei modi tensoriali lineari, ma che ha come sorgente combinazioni quadratiche di termini scalari del primo ordine [14].

Il confronto tra (7.45) e (9.7) mostra che i primi termini sono scomparsi nella trasformazione di gauge, lasciando solamente una parte proveniente dai modi tensoriali lineari e una parte ondulatoria proveniente da combinazioni di modi scalari. Quest'ultima ha la stessa forma dei modi tensoriali del prim'ordine, che abbiamo interpretato come onde gravitazionali: e infatti si può vedere come onde gravitazionali generate da fluttuazioni scalari di densità o da perturbazioni di curvatura. Sottolineiamo una differenza cruciale nel passare da primo a secondo ordine: mentre al primo ordine la dinamica dei modi tensoriali è descritta da un'equazione di onda libera (7.23), al secondo ordine compaiono sorgenti. Questo significa ad esempio che, quando sono presenti perturbazioni scalari, inevitabilmente sono generate onde gravitazionali secondarie, anche quando a livello lineare sono assenti.

Avviene anche il fenomeno opposto: così come fluttuazioni scalari al prim'ordine provocano perturbazioni tensoriali al secondo, anche perturbazioni tensoriali del prim'ordine possono fare da sorgente per fluttuazioni di densità del second'ordine [13]. I primi lavori sulle perturbazioni di densità al second'ordine furono quelli di K. Tomita [15].

Infine, notiamo che sono comparsi dei modi vettoriali, che avevamo escluso nelle condizioni iniziali. Tra i termini sorgente compaiono sia modi scalari sia modi tensoriali del prim'ordine.

Capitolo 10

Mode-mixing

Prima di commentare i risultati delle sezioni precedenti, vediamo un caso più semplice di mode-mixing, che può aiutare a interpretare meglio fisicamente cosa accade quando si va oltre l'ordine lineare.

Prima di tutto precisiamo che per mode-mixing si intendono due fenomeni diversi: da un lato il mescolamento dei modi di Fourier, per cui un sistema con determinati modi normali oscilla anche a frequenze che sono somme e differenze di quelle normali; dall'altro il mescolamento dei modi scalari, vettoriali, tensoriali. Finora nel derivare le equazioni ci siamo soffermati sul secondo effetto, ma anche il primo è presente, essendo una peculiarità delle teorie non lineari.

Il mescolamento dei vettori d'onda si può vedere studiando cosa accade nell'applicare la teoria delle perturbazioni in trasformata di Fourier. L'idea di fondo è la seguente.
Consideriamo oscillazioni governate da un'equazione della forma:

$$\hat{L}\phi(t, \vec{x}) = f(t, \vec{x})$$

con $\hat{L}$ operatore differenziale lineare e f sorgente, vogliamo risolvere perturbativamente.
L'assunzione fondamentale della teoria delle perturbazioni è la possibilità di espandere un certo campo, soluzione delle equazioni del moto, attorno alle soluzioni dell'equazione lineare:

$$\phi(t, \vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{(n)}(t, \vec{x})$$

dove $\phi^{(1)}$ è lineare nel campo iniziale, $\phi^{(2)}$ è quadratico, e così via.
Per la soluzione di background si ha qualcosa del tipo oscillatore armonico $(\hat{L} + k^2)\phi = 0$: le autofunzioni evolvono indipendentemente, ciascuna con il proprio modo di oscillazione.
Al primo ordine perturbativo si scrive il campo come $\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$, si sostituisce nell'equazione originale tenendo solo termini del primo ordine e si ottiene un'equazione per $\phi^{(2)}$. Al secondo ordine si procede in modo analogo per determinare $\phi^{(3)}$, e così via. Questa procedura di linearizzazione ricorsiva porta a un'espressione per la trasformata di Fourier della perturbazione di ordine n di $\phi(t, \vec{x})$ del tipo:

$$\tilde{\phi}^{(n)}(k) = \int \frac{d^3k_1 \cdots d^3k_n}{(2\pi)^{3n}} \mathcal{K}_\phi(k_1, ..., k_n) f(\lambda) \phi^{(1)}(k_1) \cdots \phi^{(1)}(k_n) \delta_D(k - k_1 - ... - k_n)$$

dove δ_D è la delta di Dirac, e $\mathcal{K}_\phi(k_1, ..., k_n)$ è il kernel. La richiesta $\vec{k} = \vec{k}_1 + ... + \vec{k}_n$ viene dall'invarianza traslazionale in un Universo spazialmente omogeneo. Si rimanda a [16], [17], [18] per una trattazione più approfondita.
Compaiono così termini all'ordine n che oscillano come somme o differenze di frequenze proprie di termini a ordini inferiori.

Seguendo [19], riportiamo una breve trattazione dell'oscillatore anarmonico unidimensionale, in cui si può apprezzare il mode-mixing. Cominciamo aggiungendo un termine perturbativo all'equazione dell'oscillatore armonico:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \tag{10.1}$$

Sia $x^{(0)}(t) = a\, cos(\omega t)$ la soluzione di background. Al primo ordine espandiamo $x(t) = x^{(0)}(t)+x^{(1)}(t)$ e $\omega = \omega_0 + \omega_1$, sostituiamo nell'equazione (10.1) e linearizziamo:

$$\ddot{x}^{(1)}(t) + \omega_0^2 x^{(1)}(t) = 2\omega_0\omega_1 a cos(\omega t) - \frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} cos(2\omega t) \tag{10.2}$$

Per evitare la presenza di termini risonanti, è necessario richiedere $\omega_1 = 0$. Così facendo, la soluzione è:

$$x^{(1)}(t) = -\frac{\alpha a^2}{2w_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6w_0^2} cos(2\omega t) \tag{10.3}$$

Analogamente al secondo ordine $x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)$ e $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2$:

$$\ddot{x}^{(2)}(t) + \omega_0^2 x^{(2)}(t) = 2\omega_0\omega_2 a cos(\omega t) - 2\alpha a cos(\omega t) x^{(1)}(t) \tag{10.4}$$

la cui soluzione è:

$$x^{(2)}(t) = \frac{\alpha^2 a^3}{48 w_0^4} cos(3\omega t) \tag{10.5}$$

Compaiono combinazioni lineari di frequenze del sistema, sovrapposte alle oscillazioni normali, inclusa la frequenza nulla che corrisponde a una costante.
Di seguito sono riportate graficamente le soluzioni per valori arbitrari delle perturbazioni. La soluzione numerica esatta di (10.1) è riportata in rosso. Nell'ultimo grafico si è lasciato evolvere il sistema per il doppio del tempo, in modo da poterne osservare meglio il comportamento. Naturalmente, all'aumentare di α e di ω_2, l'approssimazione perturbativa perde di validità.

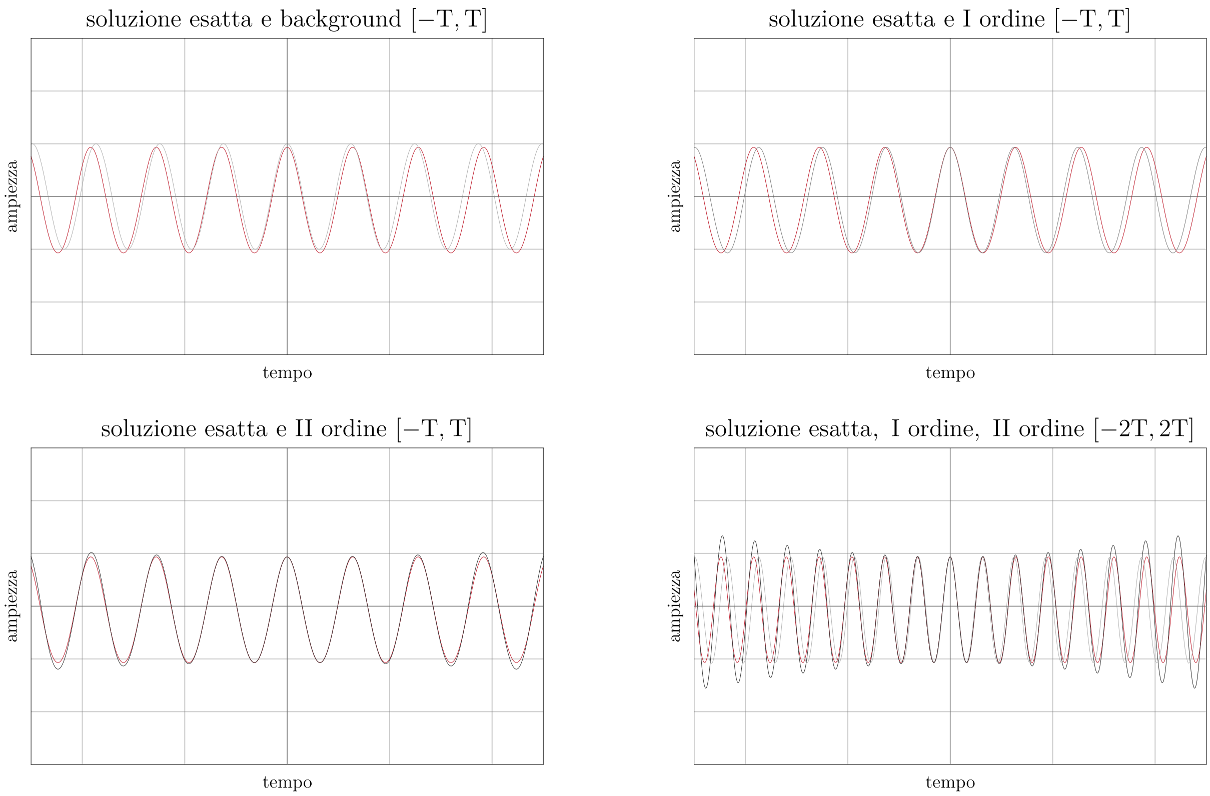


Figura 10.1: $\omega_2 = 0.01\omega_0$, $\alpha = 0.2a$.

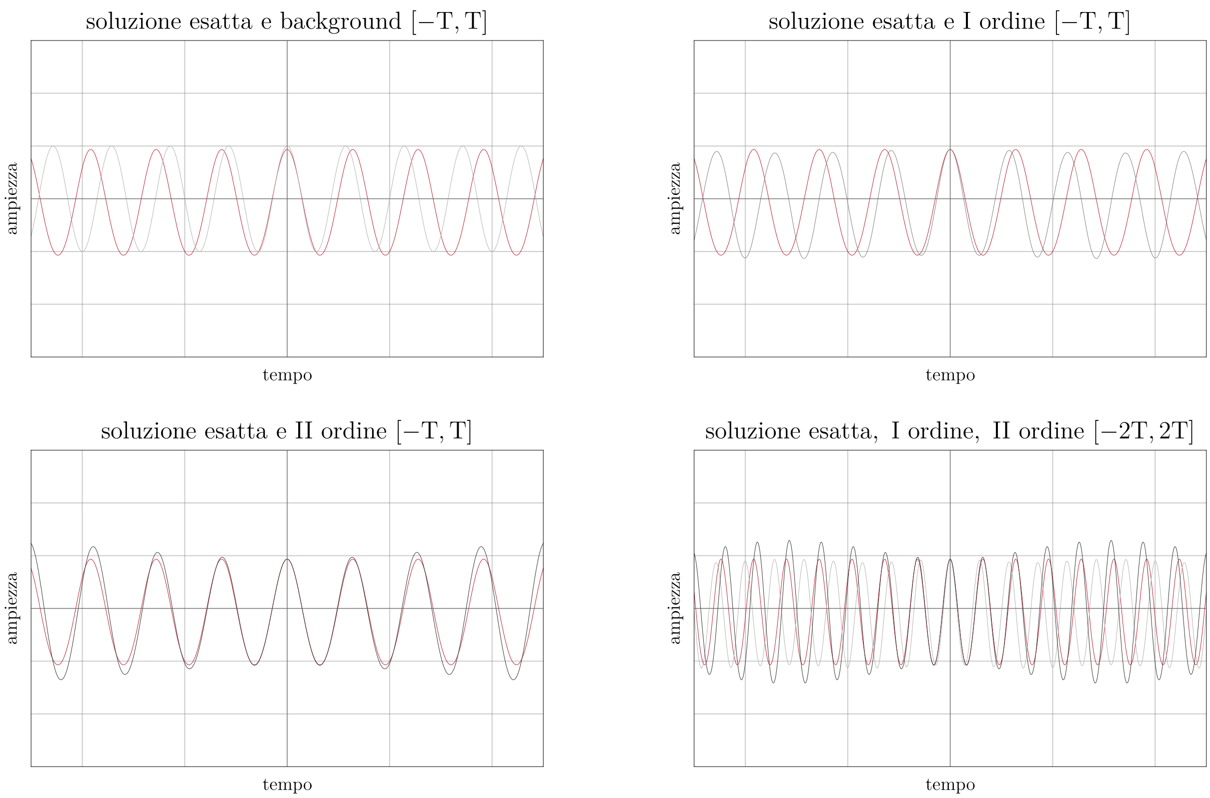


Figura 10.2: $\omega_2 = 0.1\omega_0$, $\alpha = 0.2a$.

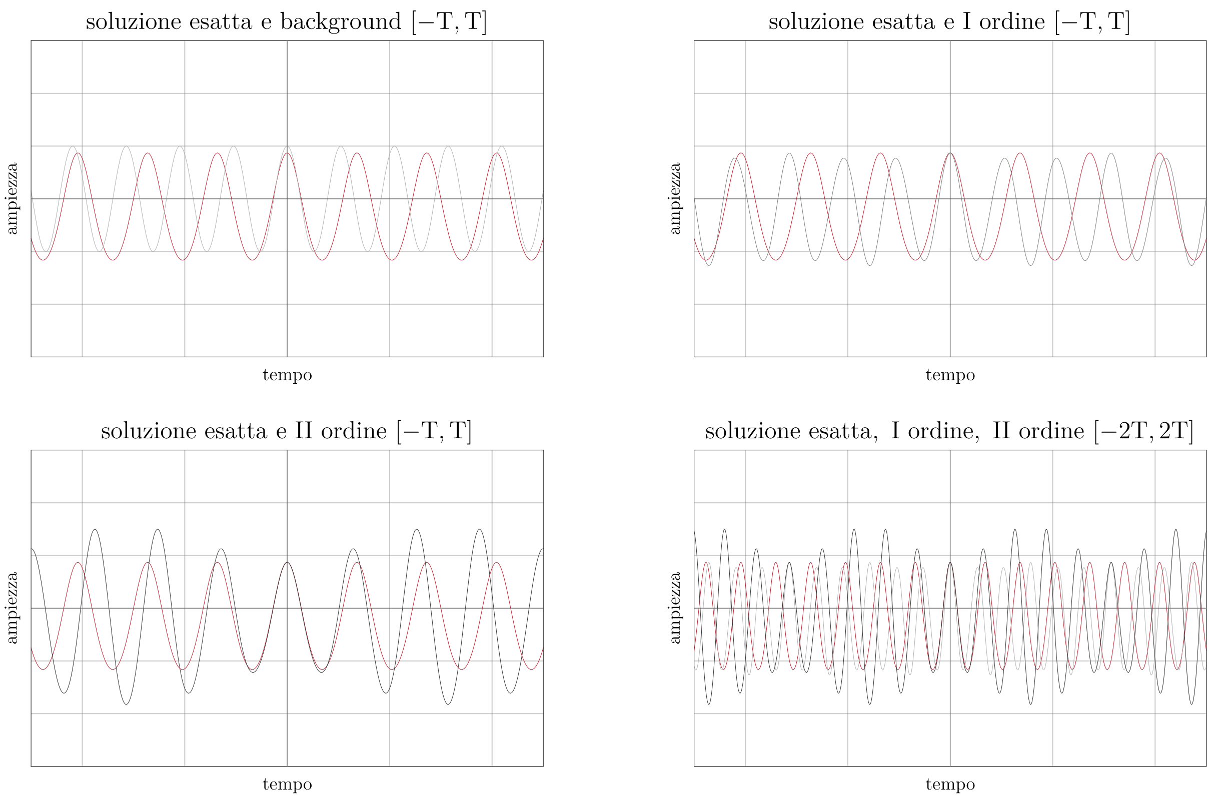


Figura 10.3: $\omega_2 = 0.2\omega_0$, $\alpha = 0.4a$.

Capitolo 11

Conclusioni

Abbiamo osservato come al second'ordine perturbazioni di densità possano dare origine a onde gravitazionali e viceversa.
Per poter rilevare modi tensoriali secondari con rivelatori terrestri o spaziali ciò che conta è la parte oscillante di $\chi_{ij}^{(2)\top}$, ovvero di $\tilde{\pi}_{ij}$: il problema principale è il fatto che la densità di energia associata a questi modi è diluita come a^{-4} all'interno del raggio di Hubble. Infatti da (6.10) si ha che la densità di materia va come $1/a^3$ mentre la densità di radiazione va come $1/a^4$. Quando l'Universo è dominato dalla radiazione, l'ampiezza dei modi tensoriali del second'ordine è circa costante rispetto al background. L'inflazione stira lunghezze d'onda sufficientemente grandi su scale oltre l'orizzonte di Hubble, in modo tale che l'ampiezza di queste onde risulta quasi "congelata": rientrando all'interno dell'orizzonte, le onde possono incontrare un Universo dominato dalla radiazione, e quindi mantenersi costanti per poi smorzarsi in seguito, oppure possono già trovarsi in un Universo dominato dalla materia, e in questa situazione oscillano con ampiezza che si riduce rapidamente [20].

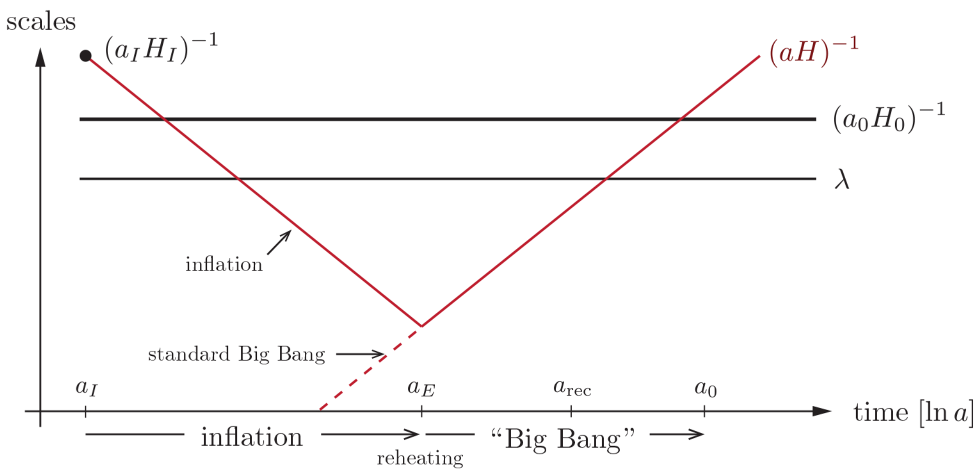


Figura 11.1: Rappresentazione grafica del processo inflazionario e dell'andamento del raggio di Hubble. Sull'asse verticale sono rappresentate le distanze comoventi: una lunghezza d'onda fissata corrisponde a una retta parallela all'asse x. Prima dell'inflazione, le scale di interesse erano minori del raggio di Hubble e soggette a processi microscopici; molto dopo l'inflazione, le scale di interesse cosmologico rientrano all'interno del raggio di Hubble. Figura tratta dalle note al corso "Cosmology" di Daniel Baumann.

La presenza di un background di onde gravitazionali primordiali è una delle previsioni centrali del modello inflazionario, la loro generazione può avere basi quantistiche (fluttuazioni del vuoto) o classiche (presenza di un termine sorgente nelle equazioni del moto, dovuto a produzione di particelle o a campi scalari). Le perturbazioni del secondo ordine sono solo una delle componenti previste. Un background di onde primordiali costituirebbe una firma del periodo inflazionario: la sua osservazione da un lato sarebbe una prova decisiva a favore del modello, dall'altro fornirebbe una gran quantità di dati preziosi. Ad esempio, le onde gravitazionali portano informazioni sul meccanismo che le ha generate, in particolare l'ampiezza permetterebbe di fissare le scale di energia di questi processi. O ancora, il rapporto tra perturbazioni tensoriali e scalari aiuterebbe a discriminare tra diversi modelli di inflazione e tra teorie quantistiche della gravità. Per maggiori dettagli sulle onde gravitazionali primordiali si rimanda a [20].

Sperimentalmente, gli interferometri che abbiamo a disposizione non hanno la sensibilità richiesta per osservare un eventuale background di onde gravitazionali primordiali, a causa dell'ampiezza ridotta e delle frequenze estremamente basse, dell'ordine di 10^{-17} Hz (Ligo e Virgo lavorano attorno ai 100 Hz, Figura 11.2).

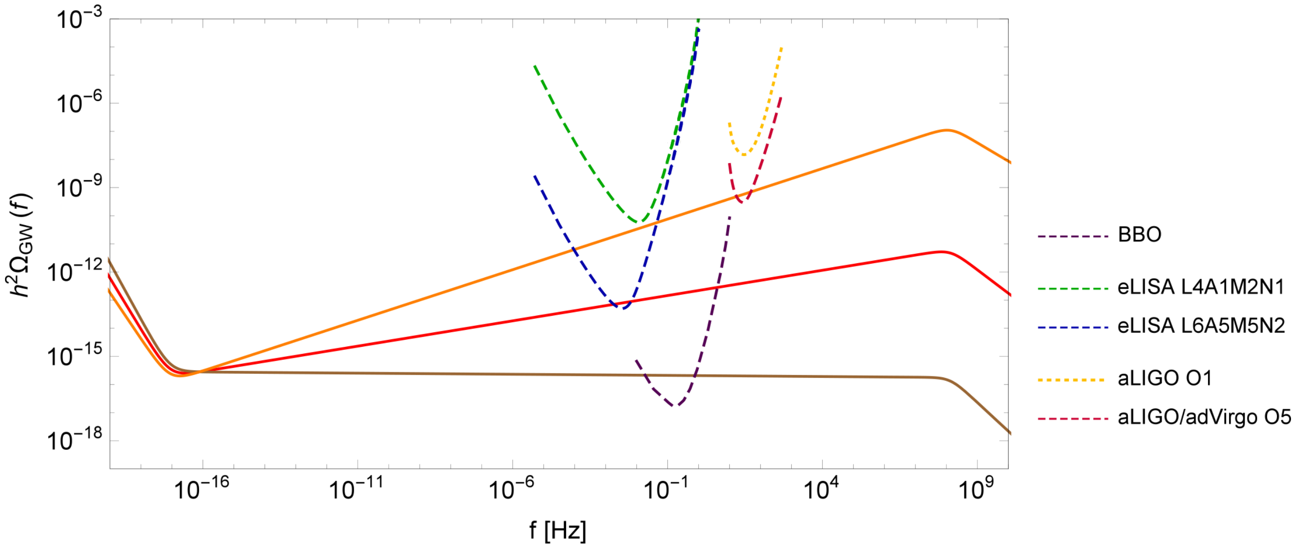


Figura 11.2: Densità di energia di onde gravitazionali in diversi modelli (curve continue) confrontata con le curve di sensibilità dei rivelatori.

Tuttavia, la ricerca di onde gravitazionali primordiali può essere effettuata in modo indiretto studiando le conseguenze sul Cosmic Microwave Background: anisotropie di temperatura e polarizzazione. Le due polarizzazioni di base sono E-mode e B-mode, parallela o perpendicolare al vettore d'onda nel primo caso, ruotata di 45° nel secondo (Figura 11.3).

I B-mode in particolare sono causati unicamente da modi tensoriali o vettoriali, poiché modi scalari possono agire solamente su anisotropie di temperatura e sugli E-mode: perciò una osservazione di B-mode primordiali nel pattern di polarizzazione rivelerebbe la presenza di un background di onde gravitazionali, e consentirebbe di separare gli effetti di perturbazioni tensoriali e scalari [21].
In realtà i B-mode sono difficili da misurare a causa della loro ampiezza ridotta, per di più il lensing gravitazionale dovuto alla distribuzione di materia tende a convertire E-mode in B-mode, ed è necessaria una correzione a posteriori molto accurata per risalire ai modi primordiali veri e propri. Fino ad ora, temperatura ed E-mode sono stati misurati con grande precisione; una certa quantità di B-mode è stata rilevata, ma è compatibile con eventuali contaminazioni e con il lensing degli E-mode [22], [23]. Un altro problema è dato dal fatto che una polarizzazione B viene inevitabilmente generata anche quando nelle condizioni iniziali sono presenti perturbazioni puramente scalari [21].

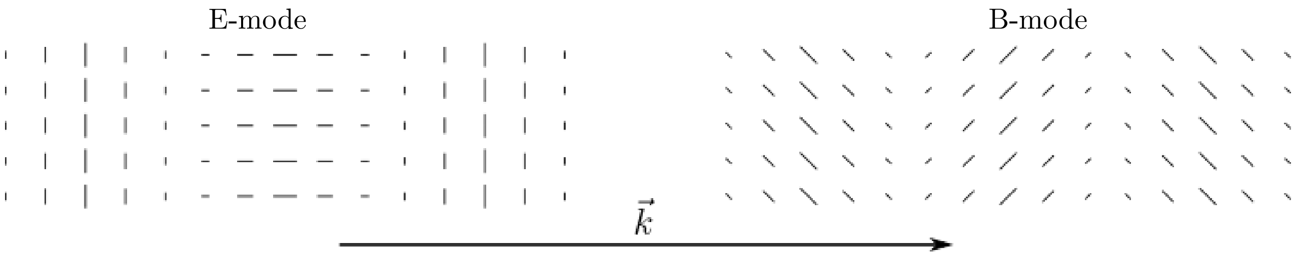


Figura 11.3

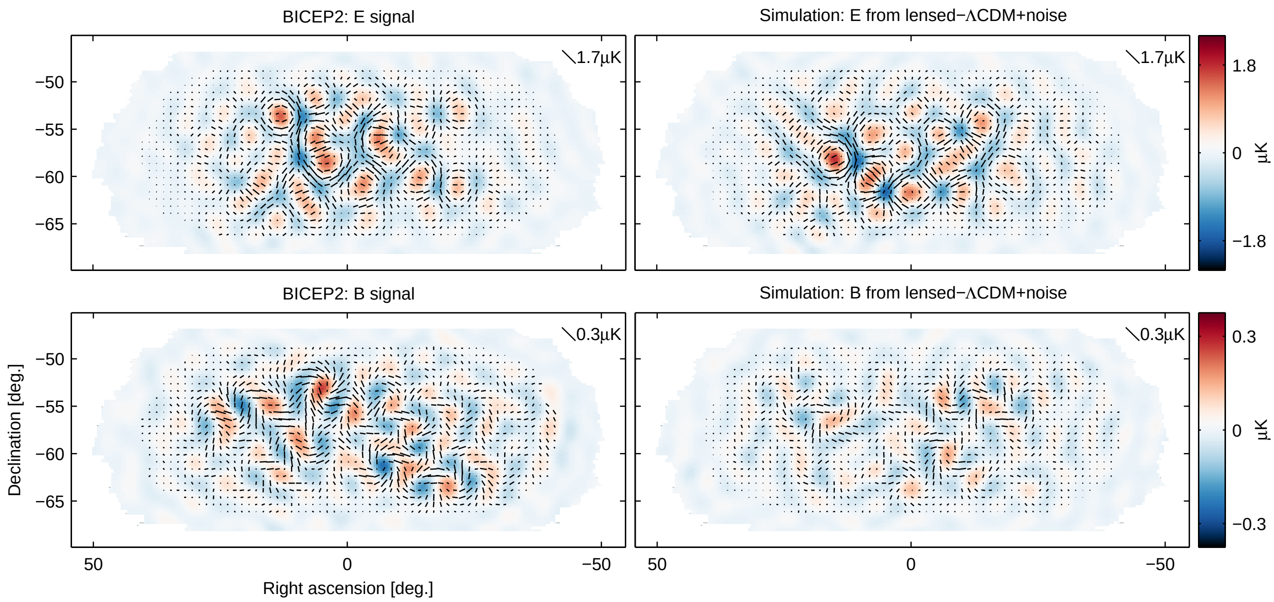


Figura 11.4: Dati da BICEP2 [22]. A sinistra le mappe di E-mode e B-mode, a destra le simulazioni in un modello ΛCDM tenendo conto del rumore. Le linee mostrano intensità e orientazione dell'equivalente polarizzazione lineare.

Per quanto riguarda perturbazioni di densità associate a modi tensoriali, si rimanda a [24], che mostra l'esistenza di una classe particolare di onde gravitazionali.

Citiamo un ultimo esempio di mode-mixing, da [25]. In molti sistemi astrofisici sono stati osservati campi magnetici, la cui origine ancora non è del tutto chiara: è possibile spiegarli attraverso effetti di non linearità.
Si possono generare correnti e quindi campi magnetici se ammettiamo che il fluido di elettroni e fotoni accoppiati e il fluido di ioni abbiano velocità angolari diverse da zero, in modo che ci sia un moto di cariche. Tuttavia va rispettato il teorema di Kelvin, per cui in un fluido perfetto in assenza di forze dissipative la vorticità è conservata. Le singole componenti possono avere una propria vorticità, purché il totale sia zero, ma se ipotizziamo che la vorticità iniziale sia nulla per tutte le componenti del fluido allora è necessario un meccanismo fisico che permetta alle singole parti di acquistare momento angolare.
Ignoriamo i modi tensoriali primordiali. Modi vettoriali lineari non sono generati durante l'inflazione. Nella gauge di Poisson la metrica perturbata assume la forma:

$$ds^2 = a^2(\tau)\left\{-(1+2\phi)d^2\tau + 2\chi_i d\tau dx^i + \left[(1-2\psi)\delta_{ij} + \chi_{ij}\right] dx^i dx^j\right\} \tag{11.1}$$

con $\phi^{(1)} = \psi^{(1)} = \varphi$, $\chi_i^{(1)} = 0$, $\chi_{ij}^{(1)} = 0$. L'evoluzione non lineare delle perturbazioni scalari primordiali genera perturbazioni vettoriali e tensoriali al secondo ordine: dalle equazioni di conservazione del momento e del momento angolare, le due componenti del fluido acquistano vorticità di segno opposto. La generazione di campi magnetici si può spiegare dunque come vorticità di particelle cariche indotta da modi gravitazionali vettoriali.

Bibliografia

[1] P. Carrilho and K. A. Malik, "Vector and tensor contributions to the curvature perturbation at second order," *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2016, no. 02, pp. 021–021, feb 2016.

[2] S. M. Carroll, "Lecture Notes on General Relativity."

[3] K. A. Malik and D. Wands, "Cosmological perturbations," *Physics Reports*, vol. 475, no. 1-4, pp. 1–51, may 2009.

[4] M. Bruni, S. Matarrese, S. Mollerach, and S. Sonego, "Perturbations of spacetime: gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 14, no. 9, pp. 2585–2606, sep 1997.

[5] J. M. Bardeen, "Gauge-invariant cosmological perturbations," *Physical Review D*, vol. 22, no. 8, pp. 1882–1905, oct 1980.

[6] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *General Relativity.* Cambridge University Press, 2015.

[7] E. Bertschinger, "Cosmological Dynamics."

[8] L. D. Landau and E. M. Lifšits, *Teoria dei campi*, ser. Fisica teorica. Editori Riuniti university press, 1976, vol. 2.

[9] A. J. Christopherson, "Applications of Cosmological Perturbation Theory."

[10] S. Matarrese and D. Terranova, "Post-Newtonian cosmological dynamics in Lagrangian coordinates," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 283, no. 2, pp. 400–418, nov 1996.

[11] N. Dadhich, "Derivation of the Raychaudhuri Equation."

[12] S. Kar and S. SenGupta, "The Raychaudhuri equations: a brief review."

[13] S. Matarrese, S. Mollerach, and M. Bruni, "Relativistic second-order perturbations of the Einstein–de Sitter universe," *Physical Review D*, vol. 58, no. 4, jul 1998.

[14] S. Matarrese and S. Mollerach, "The stochastic gravitational-wave background produced by non-linear cosmological perturbations."

[15] K. Tomita, "Non-Linear Theory of Gravitational Instability in the Expanding Universe," *Progress of Theoretical Physics*, vol. 37, no. 5, pp. 831–846, may 1967.

[16] M. H. Goroff, B. Grinstein, S.-J. Rey, and M. B. Wise, "Coupling of modes of cosmological mass density fluctuations," *The Astrophysical Journal*, vol. 311, p. 6, dec 1986.

[17] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztañaga, and R. Scoccimarro, "Large-scale structure of the Universe and cosmological perturbation theory," *Physics Reports*, vol. 367, no. 1-3, pp. 1–248, sep 2002.

[18] P. J. E. Peebles, *Large-Scale Structure of the Universe.* Princeton University Press, 1980.

[19] L. D. Landau and E. M. Lifšits, *Meccanica*, ser. Fisica teorica. Editori Riuniti university press, vol. 1.

[20] M. C. Guzzetti, N. Bartolo, M. Liguori, and S. Matarrese, “Gravitational waves from inflation.”

[21] S. Mollerach, D. Harari, and S. Matarrese, “CMB polarization from secondary vector and tensor modes,” *Physical Review D*, vol. 69, no. 6, mar 2004.

[22] P. Ade, R. Aikin, D. Barkats, S. Benton, C. Bischoff, J. Bock, J. Brevik, I. Buder, E. Bullock, C. Dowell, L. Duband, J. Filippini, S. Fliescher, S. Golwala, M. Halpern, M. Hasselfield, S. Hildebrandt, G. Hilton, V. Hristov, K. Irwin, K. Karkare, J. Kaufman, B. Keating, S. Kernasovskiy, J. Kovac, C. Kuo, E. Leitch, M. Lueker, P. Mason, C. Netterfield, H. Nguyen, R. O’Brient, R. Ogburn, A. Orlando, C. Pryke, C. Reintsema, S. Richter, R. Schwarz, C. Sheehy, Z. Staniszewski, R. Sudiwala, G. Teply, J. Tolan, A. Turner, A. Vieregg, C. Wong, and K. Y. and, “Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2,” *Physical Review Letters*, vol. 112, no. 24, jun 2014.

[23] P. Ade, N. Aghanim, Z. Ahmed, R. Aikin, K. Alexander, M. Arnaud, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. Banday, D. Barkats, R. Barreiro, J. Bartlett, N. Bartolo, E. Battaner, K. Benabed, A. Benoît, A. Benoit-Lévy, S. Benton, J.-P. Bernard, M. Bersanelli, P. Bielewicz, C. Bischoff, J. Bock, A. Bonaldi, L. Bonavera, J. Bond, J. Borrill, F. Bouchet, F. Boulanger, J. Brevik, M. Bucher, I. Buder, E. Bullock, C. Burigana, R. Butler, V. Buza, E. Calabrese, J.-F. Cardoso, A. Catalano, A. Challinor, R.-R. Chary, H. Chiang, P. Christensen, L. Colombo, C. Combet, J. Connors, F. Couchot, A. Coulais, B. Crill, A. Curto, F. Cuttaia, L. Danese, R. Davies, R. Davis, P. de Bernardis, A. de Rosa, G. de Zotti, J. Delabrouille, J.-M. Delouis, F.-X. Désert, C. Dickinson, J. Diego, H. Dole, S. Donzelli, O. Doré, M. Douspis, C. Dowell, L. Duband, A. Ducout, J. Dunkley, X. Dupac, C. Dvorkin, G. Efstathiou, F. Elsner, T. Enßlin, H. Eriksen, E. Falgarone, J. Filippini, F. Finelli, S. Fliescher, O. Forni, M. Frailis, A. Fraisse, E. Franceschi, A. Frejsel, S. Galeotta, S. Galli, K. Ganga, T. Ghosh, M. Giard, E. Gjerløw, S. Golwala, J. González-Nuevo, K. Górski, S. Gratton, A. Gregorio, A. Gruppuso, J. Gudmundsson, M. Halpern, F. Hansen, D. Hanson, D. Harrison, M. Hasselfield, G. Helou, S. Henrot-Versillé, D. Herranz, S. Hildebrandt, G. Hilton, E. Hivon, M. Hobson, W. Holmes, W. Hovest, V. Hristov, K. Huffenberger, H. Hui, G. Hurier, K. Irwin, A. Jaffe, T. Jaffe, J. Jewell, W. Jones, M. Juvela, A. Karakci, K. Karkare, J. Kaufman, B. Keating, S. Kefeli, E. Keihänen, S. Kernasovskiy, R. Keskitalo, T. Kisner, R. Kneissl, J. Knoche, L. Knox, J. Kovac, N. Krachmalnicoff, M. Kunz, C. Kuo, H. Kurki-Suonio, G. Lagache, A. Lähteenmäki, J.-M. Lamarre, A. Lasenby, M. Lattanzi, C. Lawrence, E. Leitch, R. Leonardi, F. Levrier, A. Lewis, M. Liguori, P. Lilje, M. Linden-Vørnle, M. López-Caniego, P. Lubin, M. Lueker, J. Macías-Pérez, B. Maffei, D. Maino, N. Mandolesi, A. Mangilli, M. Maris, P. Martin, E. Martínez-González, S. Masi, P. Mason, S. Matarrese, K. Megerian, P. Meinhold, A. Melchiorri, L. Mendes, A. Mennella, M. Migliaccio, S. Mitra, M.-A. Miville-Deschênes, A. Moneti, L. Montier, G. Morgante, D. Mortlock, A. Moss, D. Munshi, J. Murphy, P. Naselsky, F. Nati, P. Natoli, C. Netterfield, H. Nguyen, H. Nørgaard-Nielsen, F. Noviello, D. Novikov, I. Novikov, R. O’Brient, R. Ogburn, A. Orlando, L. Pagano, F. Pajot, R. Paladini, D. Paoletti, B. Partridge, F. Pasian, G. Patanchon, T. Pearson, O. Perdereau, L. Perotto, V. Pettorino, F. Piacentini, M. Piat, D. Pietrobon, S. Plaszczynski, E. Pointecouteau, G. Polenta, N. Ponthieu, G. Pratt, S. Prunet, C. Pryke, J.-L. Puget, J. Rachen, W. Reach, R. Rebolo, M. Reinecke, M. Remazeilles, C. Renault, A. Renzi, S. Richter, I. Ristorcelli, G. Rocha, M. Rossetti, G. Roudier, M. Rowan-Robinson, J. Rubiño-Martín, B. Rusholme, M. Sandri, D. Santos, M. Savelainen, G. Savini, R. Schwarz, D. Scott, M. Seiffert, C. Sheehy, L. Spencer, Z. Staniszewski, V. Stolyarov, R. Sudiwala, R. Sunyaev, D. Sutton, A.-S. Suur-Uski, J.-F. Sygnet, J. Tauber, G. Teply, L. Terenzi, K. Thompson, L. Toffolatti, J. Tolan, M. Tomasi, M. Tristram, M. Tucci, A. Turner, L. Valenziano, J. Valiviita, B. V. Tent, L. Vibert, P. Vielva, A. Vieregg, F. Villa, L. Wade, B. Wandelt, R. Watson, A. Weber, I. Wehus, M. White, S. White, J. Willmert, C. Wong, K. Yoon, D. Yvon, A. Zacchei, and A. Z. and, “Joint Analysis of BICEP2/Keck ArrayandPlanckData,” *Physical Review Letters*, vol. 114, no. 10, mar 2015.

[24] K. Tomita, “Cosmological second-order density perturbations associated with gravitational-wave perturbations,” *Vistas in Astronomy*, vol. 37, pp. 527–530, jan 1993.

[25] S. Matarrese, S. Mollerach, A. Notari, and A. Riotto, “Large-scale magnetic fields from density perturbations,” *Physical Review D*, vol. 71, no. 4, feb 2005.