



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI
"M.FANNO"

DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

Test di normalità: un confronto tramite un esperimento Monte Carlo

RELATORE: PROF.SSA Luisa Bisaglia

LAUREANDA: Elena Stolfo
MATRICOLA N. 1115251

ANNO ACCADEMICO 2017 – 2018

INDICE

	PAGINA
INTRODUZIONE.....	4
1. I TEST DI NORMALITÀ.....	5
(1.1) Il test di Shapiro e Wilk (WS).....	5
(1.2) Il test di Kolmogorov e Smirnov (KS).....	6
(1.3) Il test di Lilliefors (LL).....	8
(1.4) Il test di Cramer, von Mises e Smirnov (CVM).....	8
(1.5) Il test di Anderson e Darling (AD)	9
(1.6) Il test chi quadrato di Pearson (CSQ).....	10
(1.7) Il test di Jarque e Bera (JB).....	12
(1.8) Il test “mnibus” di D’Agostino e Pearson (DP).....	12
2. VALUTAZIONE DELLA POTENZA DEI TEST TRAMITE UN ESPERIMENTO	
MONTE CARLO.....	14
(2.1) Esperimento Monte Carlo.....	14
(2.2) Le distribuzioni simmetriche a code sottili.....	16
(2.3) Le distribuzioni simmetriche a code pesanti.....	18
(2.4) Le distribuzioni asimmetriche.....	21
(2.5) Risultati dell’esperimento.....	25
CONCLUSIONI.....	38
BIBLIOGRAFIA.....	44

INTRODUZIONE

L'importanza della distribuzione normale è innegabile poiché si tratta di un'assunzione di base di molte procedure statistiche ed è anche la distribuzione più frequentemente utilizzata nella teoria e nelle applicazioni. Pertanto, quando si effettuano analisi statistiche usando metodi parametrici, la convalida dell'assunzione di normalità è di fondamentale importanza. La verifica dell'assunzione di normalità dei dati avviene in base all'analisi grafica oppure in seguito alla conduzione di un test di normalità. Anche se i metodi grafici sono utili per verificare la normalità di un campione di dati, non sono in grado di fornire delle prove formali conclusive di validità delle assunzioni di normalità. Il metodo grafico rimane dunque soggettivo e richiede esperienza e una buona conoscenza statistica. Nella maggior parte dei casi, infatti, sono necessari test statistici formali per confermare la conclusione dei metodi grafici.

Nella letteratura, esiste un numero significativo di test di normalità disponibili. Di conseguenza, vi sono ancora risultati contraddittori su quale sia il test ottimale o migliore e questi possono indurre in errore e spesso confondere gli operatori su quale test debba essere usato per una data dimensione del campione.

Al fine di voler capire quale test sia migliore (in termini di potenza), in questo studio sono state condotte delle simulazioni Monte Carlo partendo da campioni estratti da distribuzioni, talvolta simili graficamente alla normale, talvolta molto diverse, e sono stati analizzati i risultati.

Per definire un test di normalità,

Si supponga di avere un campione casuale X_1, X_2, \dots, X_n di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite da una distribuzione continua, una funzione di densità $f(x, \Theta)$ sconosciuta e sia $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ un vettore di parametri a valori reali.

Un test per stabilire se il campione osservato proviene da una popolazione con una distribuzione normale può essere formulato attraverso l'ipotesi composita:

$H_0 : f(x, \Theta) \in N(\mu, \sigma^2)$ contro l'ipotesi alternativa:

$H_1 : f(x, \Theta) \notin N(\mu, \sigma^2)$

Si dice che un test è potente quando ha un'alta probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla di normalità se il campione in studio è generato da una distribuzione non normale. Nel fare il confronto, tutti i test dovrebbero avere la stessa probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando la distribuzione è veramente normale (cioè devono avere lo stesso errore di tipo 1 che è α livello di significatività).

Questo studio si concentra sulla prestazione di otto test di normalità disponibili nel software statistico R che verranno ora presentati.

1. TEST DI NORMALITÀ

I test di normalità possono essere classificati sotto diversi aspetti, test basati sulla regressione e la correlazione (test di Shapiro e Wilk), test chi-quadro (di Pearson), test basati sulla funzione di distribuzione empirica (test di Kolmogorov e Smirnov, di Lilliefors, di Anderson e Darling e il test di Cramer, von Mises e Smirnov), test basati sui momenti (test di D'Agostino e Pearson e test di Jarque e Bera), ed altri test particolari. Per alcune di queste statistiche test si conosce la distribuzione sotto l'ipotesi nulla, per altre, invece, non è stato possibile ricavare la distribuzione nemmeno asintoticamente. Quindi, nel corso degli anni, sono stati utilizzati diversi metodi per determinare i valori critici di queste ultime statistiche test, in particolare sono state utilizzate simulazioni Monte Carlo.

Vengono ora presentati gli otto test che sono stati utilizzati nell'esperimento.

(1.1) Il test di Shaphiro e Wilk (SW)

I test di regressione e correlazione si basano sul fatto che una variabile $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$ può essere espressa come $Y = \mu + \sigma X$, dove $X \sim N(0, 1)$. Il test di Shapito e Wilk (1965) è uno dei test più potenti per verificare l'ipotesi di normalità, soprattutto per piccoli campioni.

Dati:

- $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ un campione casuale ordinato di numerosità n da una distribuzione normale standardizzata ($\mu=0, \sigma=1$),
- $m' = (m_1, m_2, m_m)$ il vettore dei valori attesi della statistica d'ordine normale standard,
- $V = (v_{ij})$ la matrice $n \times n$ delle covarianze di questa statistica
- $Y' = (Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)})$ un vettore di osservazioni casuali ordinate da una popolazione arbitraria

Se gli $Y_{(i)}$ sono le osservazioni ordinate di una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2 sconosciute, allora gli $Y_{(i)}$ possono essere espressi come: $Y_{(i)} = \mu + \sigma X_{(i)}$, ($i=1, 2, \dots, n$).

Applicando i minimi quadrati generalizzati ottengo le stime di μ e σ , rispettivamente:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}, \text{ e } \hat{\sigma} = \frac{m'V^{-1}y}{m'V^{-1}m}$$

La statistica test SW viene così definita:

$$SW = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i Y_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

dove $a' = m'V^{-1}(m'V^{-1}m)^{-1/2}$.

La verifica di normalità avviene, dunque, confrontando due stimatori alternativi della varianza σ^2 :

- Uno stimatore non parametrico basato sulla combinazione lineare ottimale della statistica d'ordine di una variabile aleatoria normale al numeratore, e
- Il consueto stimatore parametrico, ossia la varianza campionaria, al denominatore

Gli a_i sono i pesi che possono essere ottenuti dalla statistica SW per un campione con numerosità $n \leq 50$, e sono disponibili nelle apposite tavole SARHAN & GREENBERG. La statistica SW assume valori compresi tra 0 e 1, poiché sotto H_0 le varianze devono essere uguali. Di conseguenza, piccoli valori di SW portano al rifiuto dell'ipotesi nulla di normalità, mentre se il valore è uguale a 1 indica normalità dei dati. La distribuzione sotto H_0 non è nota, ma per n piccolo, i valori critici sono stati tabulati.

Varianti di questa statistica test, ad esempio, sono quelle di Royston (1982).

Test di Funzione di ripartizione empirica.

I successivi test utilizzano la funzione di ripartizione empirica (EDF) per verificare l'ipotesi di normalità dei dati comparando la funzione di ripartizione empirica stimata dai dati con la funzione di distribuzione cumulativa (CDF) di una distribuzione normale per vedere se vi è una buona corrispondenza tra esse. Tra questi, i più famosi sono stati sviluppati da: Kolmogorov e Smirnov, Cramer, Von Mises e Smirnov e Anderson e Darling.

(1.2) Il test di Kolmogorov e Smirnov (KS)

La statistica test KS introdotta da Kolmogorov e Smirnov (1933) appartiene alla classe superiore delle statistiche di funzioni di ripartizione empirica. Questa classe assume come statistica la massima differenza in valore assoluto tra funzione di ripartizione empirica e funzione di ripartizione teorica (ipotizzata come vera).

Dati:

- $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ un campione casuale ordinato e

- $F(x)$ la distribuzione di X ,
- la funzione di ripartizione empirica $F_n(x)$ è definita come la frazione delle $X_{(i)}$ che sono minori o uguale a x per ogni x .

$$F_n(x) = \frac{n^\circ \text{ di osservazioni } \leq x}{n} \quad -\infty < x < \infty.$$

Il test KS richiede che la distribuzione teorica $F^*(x)$ sia completamente definita da parametri noti. Nel test, $F^*(x)$ è utilizzata come una distribuzione normale con media μ e deviazione standard σ note.

Il test statistico è definito in modo diverso per le seguenti tre ipotesi:

- Test unilaterale destro $H_0: F(x) = F^*(x)$ contro $H_1: F(x) > F^*(x)$, la statistica test è definita come:

$$KS^+ = \sup_x [F^*(x) - F_n(x)]$$

Corrispondente alla più ampia distanza verticale dove la funzione $F^*(x)$ si trova sopra la funzione $F_n(x)$

- Test unilaterale sinistro, $H_0: F(x) = F^*(x)$ contro $H_1: F(x) < F^*(x)$, la statistica test

$$KS^- = \min_x [F_n(x) - F^*(x)]$$

è la più ampia distanza verticale dove la funzione ripartizione empirica $F_n(x)$ si trova sopra la funzione di ripartizione teorica $F^*(x)$

- La statistica Kolmogorov per un test a due code, $H_0: F(x) = F^*(x)$ contro $H_1: F(x) \neq F^*(x)$ è data come

$$KS = \max(KS^+, KS^-)$$

La distribuzione campionaria di KS sotto H_0 è indipendente da $F^*(x)$: è infatti la stessa qualunque sia il modello $F^*(x)$ che specifica l'ipotesi nulla, ma è molto complicato calcolarla.

In questo studio, $F^*(x)$ è data come una distribuzione normale. Se l'ipotesi nulla è vera, c'è da attendersi che $F_n(x)$ non sia molto distante da $F^*(x)$, si dovrebbero perciò osservare piccoli valori di KS. Di conseguenza, grandi valori di KS indicano non-normalità e portano al rifiuto dell'ipotesi nulla di normalità. Anche in questo caso i valori critici della statistica test sono stati tabulati mediante simulazioni.

(1.3) Il test di Lilliefors (LL)

Il test LL è una variante del test KS. Questo test è stato sviluppato da Lilliefors (1967) ed è adatto quando i parametri sconosciuti della distribuzione sotto l'ipotesi nulla sono stimati dai dati del campione. Questo test confronta la funzione di ripartizione empirica di X con una distribuzione normale dove i parametri sconosciuti della media μ e deviazione standard σ sono stimati dai dati del campione.

Il campione casuale di numerosità n , $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ si assume che sia associato ad una funzione di ripartizione teorica $F(x)$ con parametri sconosciuti.

La statistica test LL ha la stessa forma della statistica test KS, eccetto che i valori della media μ e della deviazione standard σ usati sono la media e la deviazione standard del campione.

La differenza tra la statistica test LL e KS risiede nel fatto che la funzione di ripartizione empirica della statistica test LL, $F_n(x)$, è ottenuta da un campione normalizzato (Z_i) mentre $F_n(x)$ nella statistica test KS usa i valori X_i originari.

Come nel test KS, dunque, grandi valori di LL indicano non-normalità dei dati. I valori critici della distribuzione sotto H_0 sono stati calcolati mediante simulazioni.

(1.4) Il test di Cramer-von-Mises e Smirnov (CVM)

Il test CVM fu introdotto da Cramer (1928), von Mises (1936) e Smirnov (1931) ed è un'alternativa al test KS.

- Date $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ osservazioni ordinate di un campione casuale di numerosità n ,

il test CVM valuta la bontà di adattamento della funzione di ripartizione teorica $F^*(x)$ comparata con la funzione di ripartizione empirica $F_n(x)$.

La statistica test CVM viene così definita:

$$nw^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F^*(x)]^2 dF(x),$$

che, come la statistica test KS, è *distribution-free* quindi la sua distribuzione non dipende dalla funzione di ripartizione teorica, $F^*(x)$, ipotizzata.

La statistica test dell'equazione sopra riportata può essere calcolata:

$$CVM = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(Z_i - \frac{2i-1}{2n} \right)^2,$$

Dove:

- $Z_i = \Phi \left(\frac{X_{(i)} - \bar{X}}{S} \right)$ sono i valori percentili della distribuzione standardizzata
- $\bar{X} = \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)}{n}$ è la media campionaria
- $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ è la varianza campionaria corretta
- $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ sono le osservazioni ordinate
- $\Phi(x)$ è la funzione di ripartizione teorica dell'ipotesi nulla

Di conseguenza, per valori molto elevati di CVM rifiutiamo l'ipotesi nulla di normalità dei dati. Anche in questo caso non si conosce la distribuzione della statistica test sotto H_0 e, pertanto, i valori critici sono stati calcolati tramite simulazioni.

(1.5) Il test di Anderson e Darling (AD)

Il test AD, introdotto da Anderson e Darling (1954) è una variante del test CVM. Questo test differisce dal test CVM poiché attribuisce più peso alle code della distribuzione di quanto non faccia il test CVM. A differenza del CVM test che è *distribution-free*, il test AD fa uso di una specifica distribuzione teorica quando calcola i suoi valori critici. Lo svantaggio, risiede nel fatto che i valori critici devono essere calcolati per ogni specifica distribuzione.

La statistica test AD è così definita:

$$AD = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F^*(x)]^2 \psi(F(x)) dF(x),$$

ovvero, la media ponderata della distanza al quadrato tra la funzione di ripartizione empirica e teorica $[F_n(x) - F(x)]^2$, con peso $\Psi(F(x)) = \{F(x)(1-F(x))\}^{-1}$. $\Psi(F(x))$ è una qualche funzione di pesi non negativi scelti per accentuare i valori di $[F_n(x) - F(x)]$ dove si vuole che il test sia più sensibile.

La statistica test AD è, infatti, la statistica CVM in cui si ha una media pesata della discrepanza; se $\Psi(F(x))=1$ la statistica test si riconduce alla statistica test CVM.

- Date $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ osservazioni ordinate di un campione casuale di numerosità n .

Allora la statistica test AD viene così calcolata:

$$AD = - \sum \left[\frac{(2i - 1) \{ \log P_i + \log (1 - P_{n+1-i}) \}}{n} \right] - n ,$$

dove P_i è la funzione di distribuzione cumulativa della distribuzione specificata e il logaritmo è il logaritmo naturale.

Se la distribuzione è normale:

- $P_i = \Phi(Y_{(i)})$,
- dove $Y_{(i)} = \frac{(X_{(i)} - \bar{X})}{S}$, \bar{X} e S sono rispettivamente la media e la deviazione standard del campione.

Valori troppo elevati della statistica portano al rifiuto dell'ipotesi nulla di normalità, in quanto indicano che ci sia uno scarto troppo elevato tra le funzioni empirica e specificata di normalità.

(1.6) Il test chi quadrato di Pearson (CSQ)

Il test della bontà di adattamento più antico e meglio conosciuto è il test chi-quadro per la bontà di adattamento presentato la prima volta da Pearson (1900).

Il test chi quadro di Pearson è un test non parametrico applicato a grandi campioni quando si è in presenza di variabili nominali. Questo test, infatti, non è altamente consigliato per le distribuzioni continue dal momento che, nel calcolo della statistica, utilizza solo un conteggio di osservazioni in ogni cella piuttosto che le osservazioni stesse.

Dati:

- O_j il numero delle osservazioni nella cella j , per ogni $j = 1, 2, \dots, c$,
- sia p_j^* la probabilità di una osservazione casuale di trovarsi nella cella j , sotto l'assunzione che la nulla ipotesi sia vera
- Quindi il numero atteso delle osservazioni nella cella nel caso in cui l'ipotesi nulla fosse vera, j è definito come $E_j = p_j^* n$, dove n indica la numerosità del campione.

La statistica Test CSQ è così definita:

$$CSQ = \sum_{j=1}^c \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} .$$

Fa parte di un'ampia classe di test detti test chi quadrato in quanto hanno in comune le formule e la variabile casuale Chi Quadrato ma in questo studio specifichiamo le finalità, volendo verificare l'ipotesi nulla che il campione sia stato estratto da una popolazione con distribuzione normale.

Considerando le celle equiprobabili, $p_j = 1/c$, $j = 1, 2, \dots, c$, la statistica test sotto l'ipotesi di normalità si riduce quindi a:

$$CSQ = \frac{c}{n} \sum_{j=1}^c \left(n_j - \frac{n}{c} \right)^2 ,$$

quando n_j è il numero delle osservazioni che cadono nella j -esima cella e c è il numero delle celle equiprobabili.

Se $CSQ = 0$ le osservazioni nella cella coincidono con quelle attese

Se $CSQ > 0$ differiscono, maggiore è CSQ , maggiore è la discrepanza tra le osservazioni nella cella e quelle attese nel caso in cui l'ipotesi nulla di normalità sia vera.

Per concludere normalità dei dati dobbiamo ottenere CSQ vicino a zero.

Schorr (1974) scoprì che per un campione con numerosità molto ampia, il numero ottimale di celle c dovrebbe essere minore di $M = 4 \left(\frac{2n^2}{z_p^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{5}}$, dove z_p è il $100(1 - \alpha)$ -esimo percentile di una distribuzione normale standard. Se k parametri della distribuzione di X devono essere stimati, allora la distribuzione di CSQ segue approssimativamente una distribuzione χ^2 con $c - k - 1$ gradi di libertà.

Test basati sui momenti.

I test di normalità basati sui momenti includono i test di asimmetria e i test della curtosi, il test “omnibus” di D’Agostino e Pearson ed il test di Jarque e Bera. Le procedure per i test di asimmetria e curtosi si possono trovare in D’Agostino e Stephens (1986) e D’Agostino et al (1990). Questi due test (di asimmetria e curtosi) non sono inclusi in questo studio perché non sono disponibili nella maggior parte dei software statistici e non sono comunemente usati.

(1.7) Test di Jarque e Bera (JB)

Il test statistico Jarque e Bera (1987) per la verifica dell’ipotesi che il campione sia stato estratto da una popolazione con distribuzione normale utilizza la procedura dei moltiplicatori di Lagrange sulla famiglia delle distribuzioni di Pearson per ottenere dei test di normalità delle osservazioni e dei residui delle regressioni. Jarque e Bera hanno affermato che il test ha ottime proprietà asintotiche e buone performance in campioni finiti.

La statistica test JB è basata sugli indici di asimmetria e di curtosi campionari, ed è così definita:

$$JB = n \left(\frac{(\sqrt{b_1})^2}{6} + \frac{(b_2 - 3)^2}{24} \right)$$

Dove $\sqrt{b_1}$ è l’indice standardizzato di asimmetria e b_2 l’indice standardizzato di curtosi.

La statistica test JB è in realtà una statistica suggerita da Bowman e Shenton (1975) e si distribuisce asintoticamente come la statistica chi-quadro con due gradi di libertà. L’ipotesi nulla è un’ipotesi congiunta in cui l’asimmetria dev’essere uguale a zero e la curtosi uguale a 3. Valori dell’asimmetria troppo grandi e valori della curtosi troppo distanti da 3 portano al rifiuto dell’ipotesi nulla di normalità.

(1.8) Il test Omnibus di D’Agostino e Pearson (DP)

L’asimmetria e la curtosi del campione rispettivamente $\sqrt{b_1}$ e b_2 sono usate separatamente nei test di asimmetria e curtosi per la verifica dell’ipotesi che il campione casuale derivi da una popolazione normale.

D’Agostino e Pearson (1973), invece hanno proposto la seguente statistica test:

$$DP = Z^2(\sqrt{b_1}) + Z^2(b_2)$$

che prende in considerazione entrambi gli indici di asimmetria e curtosi, dove $Z(\sqrt{b_1})$ e $Z(b_2)$ sono rispettivamente, delle opportune trasformazioni che servono ad accelerare la convergenza delle statistiche $\sqrt{b_1}$ e b_2 alla distribuzione normale.

La statistica DP segue approssimativamente la distribuzione chi-quadro con due gradi di libertà quando la popolazione è normalmente distribuita. Spesso ci si riferisce all'omnibus test perché "omnibus" indica che è capace di identificare contemporaneamente le deviazioni dalla normalità dovute o all'asimmetria o alla curtosi.

Bowman e Shenton (1975) hanno utilizzato il sistema Johnson, S_U e S_B per l'approssimazione di campioni con numerosità compresa tra 20 e 1000.

2. VALUTAZIONE DELLA POTENZA DEI TEST TRAMITE UN ESPERIMENTO MONTE CARLO

(2.1) Esperimento di Monte Carlo

Utilizzando il metodo Monte Carlo, sono stati generati 5000 campioni per 10 diverse numerosità campionarie, $n=10, 15, 20, 30, 50, 100, 300, 500, 1000$ e 2000 prima da una distribuzione normale, per verificare il livello empirico degli otto test SW, KS, LL, AD, DP, JB, CVM, CSQ e successivamente sono stati generati 5000 campioni da dieci diverse distribuzioni non normali per calcolare le potenze empiriche dei test in entrambi i casi considerando livelli di significatività α al 5%. Per ogni campione e per ogni numerosità campionaria, si sono calcolate le otto statistiche test, quindi le percentuali di rifiuto empiriche dell'ipotesi nulla di normalità sono date dal numero di volte che il test rifiuta l'ipotesi nulla sul numero totale di simulazioni.

Nella prima parte dell'esperimento, i campioni sono stati generati da una distribuzione normale. Il *grafico 1* riporta la funzione di densità di probabilità della distribuzione normale sovrapposta all'istogramma calcolato su un campione di numerosità $n = 50000$, generato da una v.c. Normale standard.

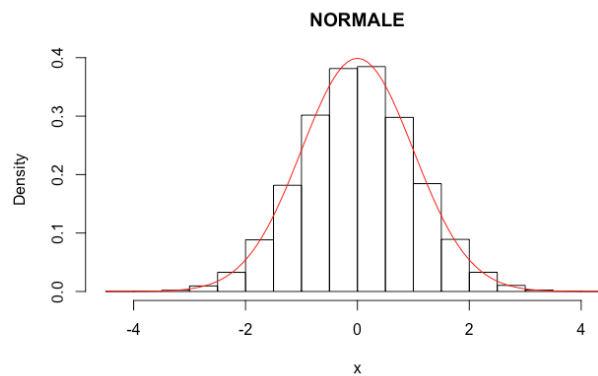


Grafico 1: Istogramma e funzione di densità della distribuzione Normale standard.

La cui funzione di densità della distribuzione normale è la seguente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Dove μ è il valore atteso. In questo studio ci si riferisce sempre alla Normale standard, di conseguenza, la media μ e la varianza σ^2 sono rispettivamente 0 ed 1. (Cicchitelli, 2002)

La *tabella 1* riporta i risultati relativi alle percentuali empiriche di rifiuto dell'ipotesi nulla quando i campioni sono generati da una distribuzione normale (quindi sotto l'ipotesi nulla):

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
Normale	10	0,0496	0,2434	0,0456	0,0484		0,0088	0,0472	0,0612
	15	0,0460	0,6188	0,0440	0,0512		0,0180	0,0484	0,0496
	20	0,0482	0,0496	0,0482	0,0464	0,0556	0,0242	0,0470	0,0452
	30	0,0538	0,0508	0,0502	0,0500	0,0638	0,0340	0,0506	0,0492
	50	0,0470	0,0478	0,0446	0,0472	0,0516	0,0336	0,0474	0,0454
	100	0,0456	0,0444	0,0540	0,0496	0,0546	0,0412	0,0528	0,0512
	300	0,0542	0,0508	0,0530	0,0504	0,0520	0,0452	0,0534	0,0532
	500	0,0522	0,0526	0,0504	0,0530	0,0554	0,0504	0,0548	0,0518
	1000	0,0566	0,0430	0,0472	0,0534	0,0524	0,0494	0,0540	0,0540
	2000	0,0546	0,0480	0,0428	0,0534	0,0508	0,0496	0,0534	0,0480

Tabella 1: risultati delle simulazioni partendo da una distribuzione Normale standard.

Avendo considerato i livelli di significatività α al 5%, i risultati di queste simulazioni confermano l'efficacia dei test nel riconoscere la distribuzione normale del campione, e si posizionano attorno al 5%. Il test di Jarque e Bera (JB) risulta il peggiore in piccoli campioni mentre il test Shapiro Wilk (SW) il più preciso, già a basse numerosità campionarie.

Successivamente al calcolo del livello empirico del test, sono stati generati 5000 campioni ognuno di numerosità $n= 10, 15, 20, 30, 50, 100, 500, 1000, 2000$ per ognuna delle distribuzioni alternative alla normale. La potenza del test è la proporzione di campioni per i quali il test ha respinto l'ipotesi nulla di normalità considerando livelli di significatività α al 5%.

In questo studio sono state utilizzate 10 distribuzioni alternative per poter utilizzare diversi valori standardizzati di asimmetria ($\sqrt{\beta_1}$) e curtosi (β_2). Vengono ora presentate le distribuzioni alternative classificate in: simmetriche a code sottili che presentano bassi valori di curtosi, simmetriche a code pesanti, che presentano alti valori di curtosi e asimmetriche. Successivamente vengono riportati i risultati delle simulazioni. Per ogni distribuzione è stato realizzato un istogramma e la funzione di densità sovrapposta applicando gli stessi parametri utilizzati nei test ad una numerosità campionaria $n = 50000$ per ottenere un riferimento grafico che metta in evidenza somiglianze e differenze con la distribuzione normale.

(2.2) Le distribuzioni simmetriche a code sottili

Di seguito le distribuzioni non normali utilizzate:

La distribuzione Uniforme:

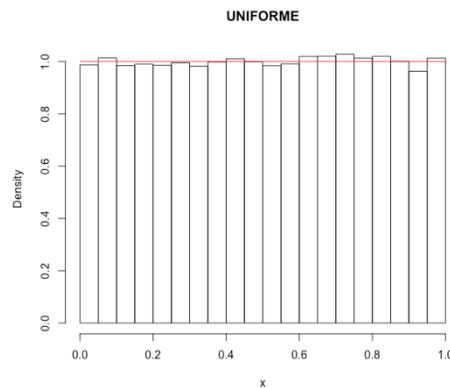


Grafico 2: Istogramma e funzione di densità della distribuzione Uniforme.

La distribuzione Uniforme è la più semplice delle funzioni di distribuzione di probabilità di variabile continua in cui si attribuisce la stessa probabilità a tutti i possibili valori di una variabile definita in un certo intervallo. (Cicchitelli, 2002)

La funzione di densità definita nell'intervallo $S[a, b] \subset \mathbb{R}$ è la seguente:

$$f(x) = \frac{1}{b - a}, \quad a \leq x \leq b$$

Ed il valore atteso:

$$E[Y] = a + (b - a)E[X] = \frac{a + b}{2}$$

In questo studio, la distribuzione uniforme è definita nell'intervallo unitario $I[0, 1]$, che può essere sempre ricondotto al caso precedente tramite una trasformazione lineare, ovvero considerando la variabile aleatoria $Y = a + (b - a)X$ al posto di X . In questo caso, come rappresentato nel *Grafico 2*, la funzione di densità di probabilità diventa:

$$f(x) = 1 \text{ su } I$$

Ed il valore atteso:

$$E[X] = \frac{1}{2}$$

La distribuzione Tukey-Lambda:

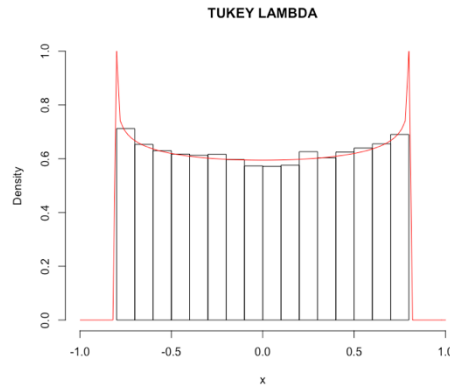


Grafico 3: Istogramma e funzione di densità della distribuzione Tukey-Lambda.

La v.c. Tukey-Lambda è una v.c. continua con funzione di distribuzione dipendente da tre parametri: λ che definisce la forma, μ che definisce la media e σ che definisce la varianza (Joiner, Brian L., Rosenblatt, Joan R., 1971). A differenza della maggior parte delle distribuzioni di probabilità non c'è una formula univoca per la funzione di densità e per la funzione di ripartizione. Solitamente viene definita dai quantili, la cui funzione è l'inverso della funzione di distribuzione ed è la seguente:

$$Q(p; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} [p^\lambda - (1-p)^\lambda], & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \log\left(\frac{p}{1-p}\right), & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza, la funzione di densità dei quantili è:

$$q(p; \lambda) = p^{(\lambda-1)} + (1-p)^{(\lambda-1)}$$

La distribuzione Tukey-Lambda utilizzata in questo studio e rappresentata nel *Grafico 3* è stata calcolata con i seguenti parametri: $\lambda = 1.25$, $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

La distribuzione Normale troncata:

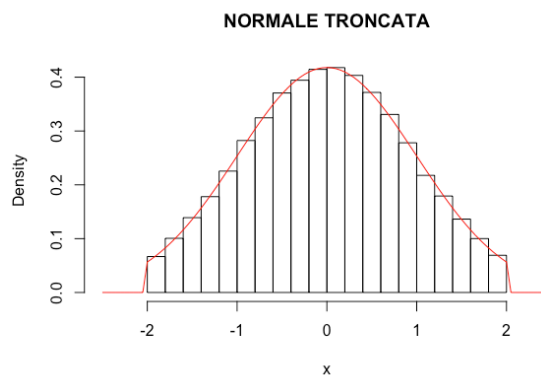


Grafico 4: Istogramma e funzione di densità della distribuzione Normale troncata.

La funzione di distribuzione della normale troncata fa parte della famiglia delle distribuzioni normali e viene definita tra due parametri, rispettivamente il valore inferiore e superiore di troncamento.

La funzione di densità, rappresentata nel *Grafico 4*, viene così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{G(b) - G(a)}, & \text{se } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove:

- $g(x)$ è la funzione di densità della Normale standard,
- $G(x)$ è la funzione di ripartizione della Normale standard.

Ed il suo valore atteso:

$$E(X) = \int_a^b x f_X(x) dx$$

Dove a e b sono rispettivamente i limiti inferiore e superiore di troncamento. In questo studio sono stati utilizzati i limiti: -2 come valore inferiore e 2 come valore superiore di troncamento.

(2.3) Le distribuzioni simmetriche a code pesanti

La distribuzione di Laplace:

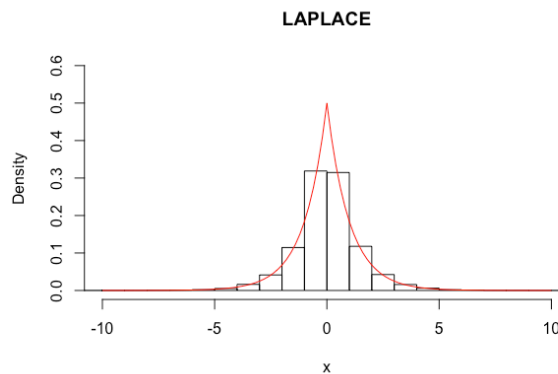


Grafico 5: Istogramma e funzione di densità della distribuzione di Laplace.

La distribuzione di Laplace (1774) è una distribuzione di probabilità continua caratterizzata da due parametri: un punto centrale di massima entropia μ e deviazione assoluta media b .

La sua funzione di densità di probabilità, visibile nel *Grafico 5*, è così definita:

$$f(x | \mu, b) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) = \frac{1}{2b} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\mu-x}{b}\right), & \text{se } x < \mu \\ \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right), & \text{se } x \geq \mu \end{cases}, \quad -\infty < x < \infty$$

Ed il valore atteso:

$$E(X) = \mu$$

In questo studio sono stati utilizzati i parametri $\mu = 0$ e $b = 1$, cosicché la parte positiva è esattamente una distribuzione esponenziale scalata a metà. Questa distribuzione ricorda la distribuzione normale, tuttavia, mentre la distribuzione normale è espressa in termini di quadrato delle differenze dalla media μ , la distribuzione di Laplace è espressa in termini di differenza assoluta dalla media.

La distribuzione Logistica:

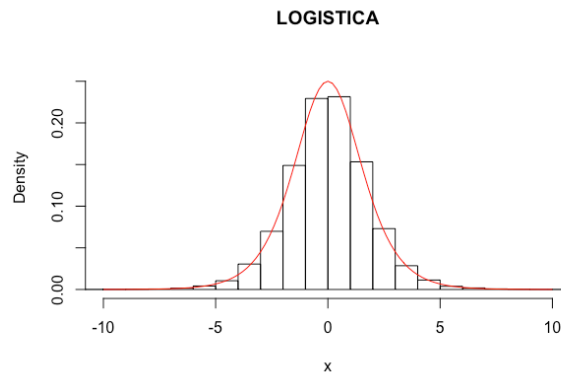


Grafico 6: Istogramma e funzione di densità della distribuzione Logistica.

La distribuzione Logistica (Verhulst, 1845) è una distribuzione di probabilità continua definita su numeri reali. Questa distribuzione viene definita dai parametri (s, μ) e ha densità di probabilità simmetrica rispetto a μ , dove assume il valore massimo.

La funzione di densità della distribuzione Logistica, rappresentata nel *Grafico 6*, è la seguente:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{s}}}{s \left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{s}}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

Ed il valore atteso:

$$E(X) = \mu$$

In questo studio sono stati utilizzati i parametri di s e μ rispettivamente 1 e 0.

La distribuzione t di Student:

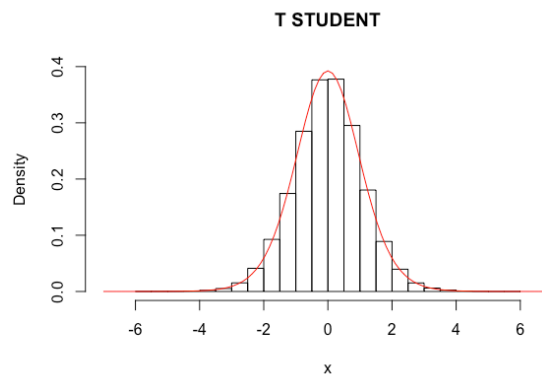


Grafico 7: Istogramma e funzione di densità della distribuzione t di Student.

La distribuzione t di Student è una distribuzione di probabilità continua che governa il rapporto tra due variabili aleatorie, la prima con distribuzione normale e la seconda, al quadrato, segue una distribuzione chi quadrato. La distribuzione t di Student con n gradi di libertà è dunque simmetrica, poiché lo è la distribuzione normale standard mentre la distribuzione chi quadrato funge da “parametro casuale di scala” e non produce effetti di distorsione di tale simmetria.

La funzione di densità della variabile aleatoria t di Student è visibile nel *Grafico 7* ed assume la seguente forma:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\sqrt{\pi r}} \left(1 + \frac{x^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Dove r rappresentano i gradi di libertà.

Ed il valore atteso:

$$E(X) = 0, \quad \text{se } r > 0$$

In questo studio è stata utilizzata la distribuzione t di Student con 15 gradi di libertà, rappresentata nel *Grafico 7*. (Cicchitelli, 2002)

(2.4) Le distribuzioni asimmetriche

La distribuzione Lognormale:

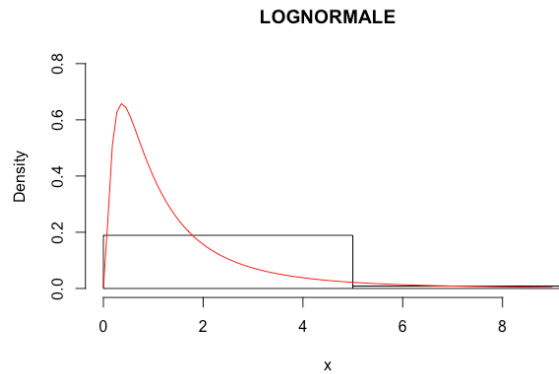


Grafico 8: Istogramma e funzione di densità della distribuzione Lognormale.

La distribuzione Lognormale è la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X il cui logaritmo $\log X$ segue una distribuzione normale.

La sua funzione di densità di probabilità, rappresentata nel *Grafico 8*, è la seguente:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{x\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad 0 < x < +\infty$$

Ed il valore atteso:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

In questo studio è stata utilizzata una distribuzione Lognormale in cui i parametri media μ e varianza σ sono rispettivamente 0 e 1.

La distribuzione di Weibull:

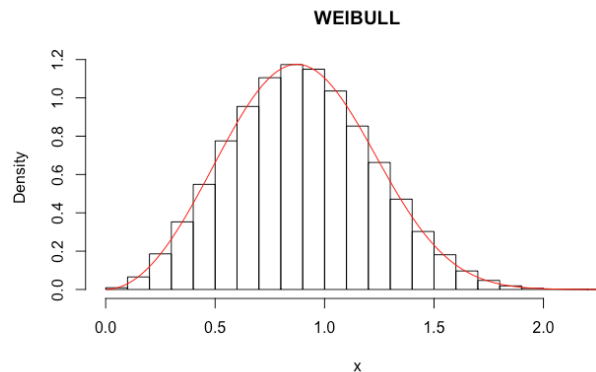


Grafico 9: Istogramma e funzione di densità della distribuzione Weibull.

La distribuzione di Weibull (1951), è una distribuzione di probabilità continua definita sui numeri reali positivi e descritta da due parametri: un parametro di scala (λ) e un parametro di forma (k) che ne definisce l'asimmetria.

La funzione di densità di probabilità, visibile nel *Grafico 9*, è così definita:

$$f(x) = \frac{k}{\lambda^k} x^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \quad 0 < x < +\infty$$

Ed il valore atteso:

$$E(X) = \frac{\lambda}{k} \Gamma\left(\frac{1}{k}\right)$$

In questo studio è stata utilizzata una distribuzione di Weibull con parametro di scala $\lambda = 1$ e un parametro di forma $k = 3$ come rappresentato nel *Grafico 9*.

La distribuzione Gamma:

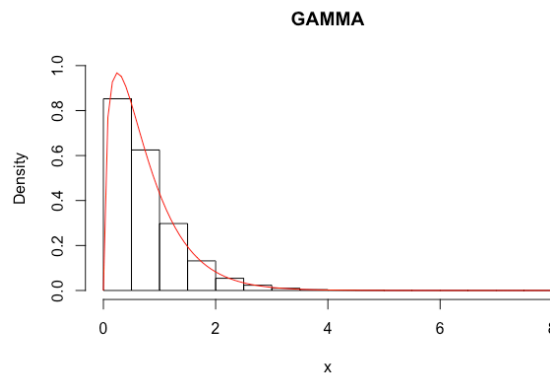


Grafico 10: Istogramma e funzione di densità della funzione Gamma,

La distribuzione Gamma è la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria definita come la somma di variabili aleatorie indipendenti e con distribuzione esponenziale. È una distribuzione di probabilità continua definita sui numeri reali positivi e generalizza diverse distribuzioni tra cui, le più note: la distribuzione chi-quadrato e la distribuzione esponenziale, a seconda dei parametri che la definiscono (k e θ). (Cicchitelli, 2002)

La funzione di densità di probabilità della funzione Gamma, rappresentata nel *Grafico 10*, è così definita:

$$f(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad 0 < x < +\infty$$

Dove $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$ è la funzione Gamma di Eulero.

Ed il valore atteso:

$$E(X) = k\theta$$

In questo studio la distribuzione gamma utilizzata ha parametri di scala $k = 2$ e di forma $\theta = 1.5$.

La distribuzione T di Student asimmetrica:

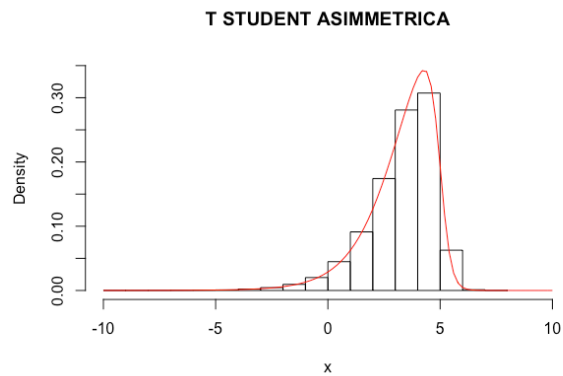


Grafico 11: Istogramma e funzione di densità della distribuzione T di Student asimmetrica.

La famiglia delle distribuzioni T di Student asimmetriche è un'estensione della famiglia T di Student (Azzalini, 2003) in cui viene introdotto il parametro α che regola l'asimmetria; quando $\alpha = 0$, la distribuzione T di Student asimmetrica si riduce alla semplice T di Student.

La funzione di distribuzione:

$$f(x; \xi, \omega, \alpha, r) = 2\omega^{-1}t(z; r)T(\alpha z r; r + 1), \quad -\infty < x < \infty$$

Dove:

- ξ è il parametro di posizione,
- ω è il parametro di scala,
- α è il parametro che regola l'asimmetria
- r sono i gradi di libertà
- $t(z; r)$ è la funzione di densità della t di Student precedentemente illustrata

In questo studio è stata utilizzata la distribuzione di Student asimmetrica con parametro di posizione $\xi = 5$, parametro di scala $\omega = 2$, parametro di asimmetria $\alpha = -5$ e $r = 8$ gradi di libertà.

La distribuzione Normale asimmetrica:

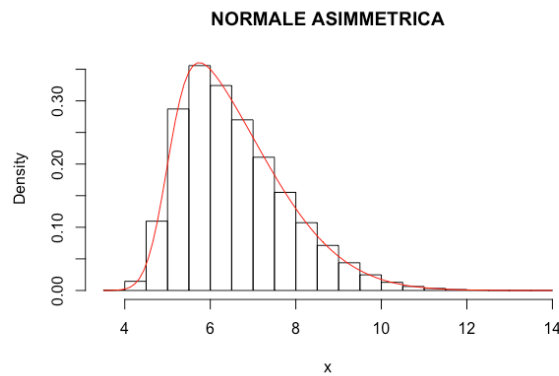


Grafico 12: Istogramma e funzione di densità della distribuzione Normale asimmetrica.

Come nel caso della distribuzione t di Student asimmetrica, la distribuzione normale asimmetrica (Azzalini, 2014) è un'estensione della distribuzione normale che avviene attraverso l'introduzione di un parametro α che regola l'asimmetria. Se $\alpha = 0$ infatti, la distribuzione normale asimmetrica si riduce a quella normale.

La funzione di densità, rappresentata nel *Grafico 12*, diventa quindi:

$$f(x) = 2\phi(x)\Phi(\alpha x), \quad -\infty < x < \infty$$

Dove:

- α è il parametro che ne definisce l'asimmetria,

- $\phi(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}$

- $\Phi(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\alpha x} \phi(t) dt$

Ed il valore atteso:

$$E(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta$$

Dove $\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

In questo studio è stata utilizzata una distribuzione normale asimmetrica con parametro $\alpha = 5$.

(2.5) Risultati dell'esperimento Monte Carlo

Vengono di seguito riportati i risultati delle 5000 simulazioni suddivisi nelle tre tipologie di distribuzioni alternative. I valori elencati rappresentano la proporzione di campioni per i quali il test ha respinto l'ipotesi nulla di normalità considerando livelli di significatività α al 5%.

Nella prima colonna vengono riportate le distribuzioni dei campioni, mentre nella prima riga la sigla che rappresenta i vari test.

Per il test Omnibus di D'Agostino e Pearson (DP) utilizzando il software statistico R, non è stato possibile condurre il test per numerosità inferiori a 20, per questo non viene riportato nei risultati.

Dai risultati riportati in forma schematica nelle tabelle è stato ricavato un grafico che illustra le potenze empiriche dei vari test.

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
Uniforme	10	0,0844	1,0000	0,0630	0,0764		0,0158	0,0712	0,0900
	15	0,1240	1,0000	0,0752	0,1156		0,0048	0,1014	0,0754
	20	0,1900	1,0000	0,0986	0,1650	0,1546	0,0016	0,1368	0,0788
	30	0,3886	1,0000	0,1432	0,3014	0,4082	0,0024	0,2334	0,1210
	50	0,7536	1,0000	0,2648	0,5720	0,8032	0,0004	0,4384	0,1954
	100	0,9974	1,0000	0,5992	0,9520	0,9966	0,5608	0,8378	0,4558
	300	1,0000	1,0000	0,9972	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9960
	500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabella 2: Risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Uniforme.

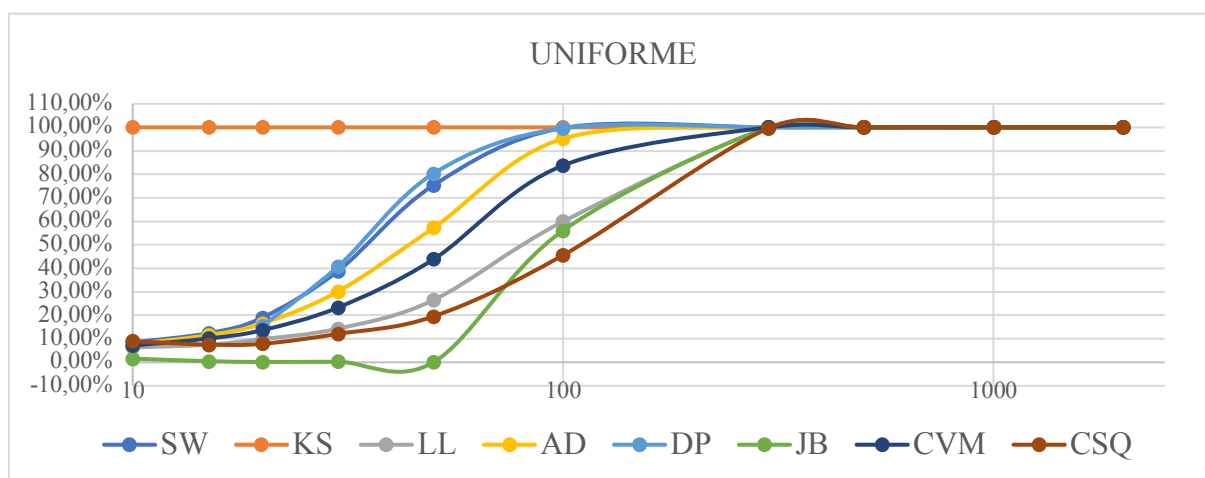


Figura 1: Grafico che riporta i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Uniforme.

La figura 1 e la tabella 2 riportano i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da una popolazione con distribuzione Uniforme. Da questi risultati si può dedurre che il test di Kolmogorov e Smirnov (KS) riconosce la non normalità del campione fin da piccole numerosità, come è evidente dal grafico, il test si posiziona al 100% fin da numerosità del campione $n = 10$. Anche i test di Shapiro e Wilk (SW) e di D'Agostino e Pearson (DP) riconoscono la non normalità del campione prima degli altri test ma soltanto in campioni di numerosità $n = 100$ riconoscono il 100% dei campioni generati, come il test di Kolmogorov e Smirnov. I test di Anderson e Darling (AD) e di Cramer, von Mises e Smirnov (CVM) hanno potenza inferiore ai primi tre seppur maggiore degli ultimi tre test: Lilliefors (LL), Jarque e Bera (JB) e chi quadrato di Pearson (CSQ) i quali riconoscono la non normalità dei campioni solo ad alte numerosità $n = 300$ mentre, a numerosità inferiori a $n = 100$ riconoscono la non normalità di solo il 50% dei campioni.

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
Tukey-Lambda	10	0,0944	0,0378	0,0644	0,0900		0,0030	0,0812	0,0936
	15	0,1522	0,0586	0,0880	0,1416		0,0012	0,1214	0,0806
	20	0,2408	0,0926	0,1068	0,2014	0,1776	0,0002	0,1640	0,0886
	30	0,4590	0,3316	0,1678	0,3584	0,4680	0,0006	0,2796	0,1364
	50	0,8130	1,0000	0,2870	0,6432	0,8446	0,0000	0,4896	0,2134
	100	0,9998	1,0000	0,6926	0,9776	0,9992	0,7028	0,9078	0,5572
	300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabella 3: Risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Tukey-Lambda.

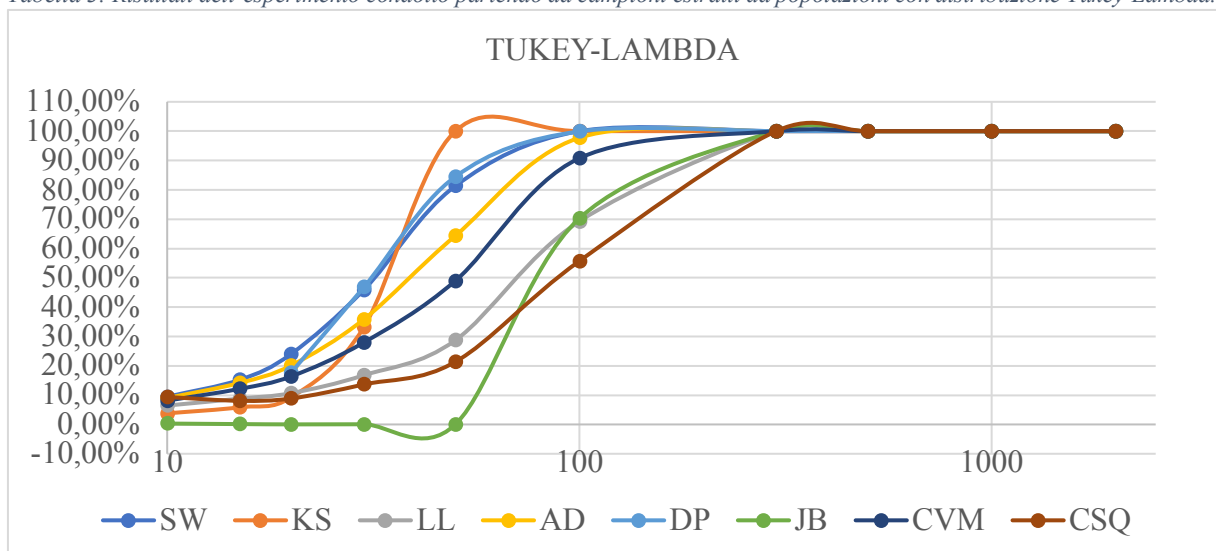


Figura 2: Grafico che riporta i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Tukey-Lambda.

La figura 2 e la tabella 3 riportano i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da una popolazione con distribuzione Tukey-Lambda. Per numerosità del campione fino a $n = 50$ i test più potenti risultano i test di Shapiro e Wilk (SW) e il test di D'Agostino e Pearson (DP). In campioni con numerosità superiore a $n = 50$ il test di Kolmogorov e Smirnov (KS) riconosce il 100% dei campioni non normali seguito dai test di Shapiro e Wilk e D'Agostino e Pearson che riconoscono il 100% dei campioni da numerosità $n = 100$. La potenza del test di Cramer, von Mises e Smirnov (CVM) si avvicina alla potenza del test di Anderson e Darling (AD), per numerosità $n = 50$, questi test riconoscono rispettivamente circa il 70% ed il 50% dei campioni non normali e solo per numerosità $n = 300$ riconoscono il 100% dei campioni. Anche in questo caso i test restanti di Lilliefors (LL), Jarque e Bera (JB) e chi quadrato di Pearson (CSQ) risultano i meno potenti: per numerosità $n = 100$ dei campioni riconoscono solo il 60% dei campioni non normali nel caso dei test LL e JB ed il 50% nel caso del test CSQ. Questi ultimi test riconoscono il 100% dei campioni con numerosità $n = 300$.

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
Normale troncata	10	0,0348	0,0472	0,0408	0,0374		0,0036	0,0374	0,0602
	15	0,0366	0,0500	0,0414	0,0412		0,0050	0,0466	0,0544
	20	0,0404	0,0470	0,0478	0,0448	0,0224	0,0020	0,0456	0,0508
	30	0,0390	0,0506	0,0450	0,0474	0,0336	0,0024	0,0470	0,0456
	50	0,0550	0,0446	0,0480	0,0530	0,0712	0,0004	0,0504	0,0546
	100	0,1188	0,0440	0,0610	0,0866	0,2238	0,0010	0,0738	0,0584
	300	0,7888	0,0598	0,1332	0,3336	0,8370	0,3888	0,2162	0,0952
	500	0,9958	0,0700	0,2194	0,6402	0,9854	0,9026	0,4038	0,1362
	1000	1,0000	0,1284	0,4912	0,9774	1,0000	1,0000	0,8032	0,3194
	2000	1,0000	0,3514	0,8968	1,0000	1,0000	1,0000	0,9960	0,8042

Tabella 4: Risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Normale troncata.

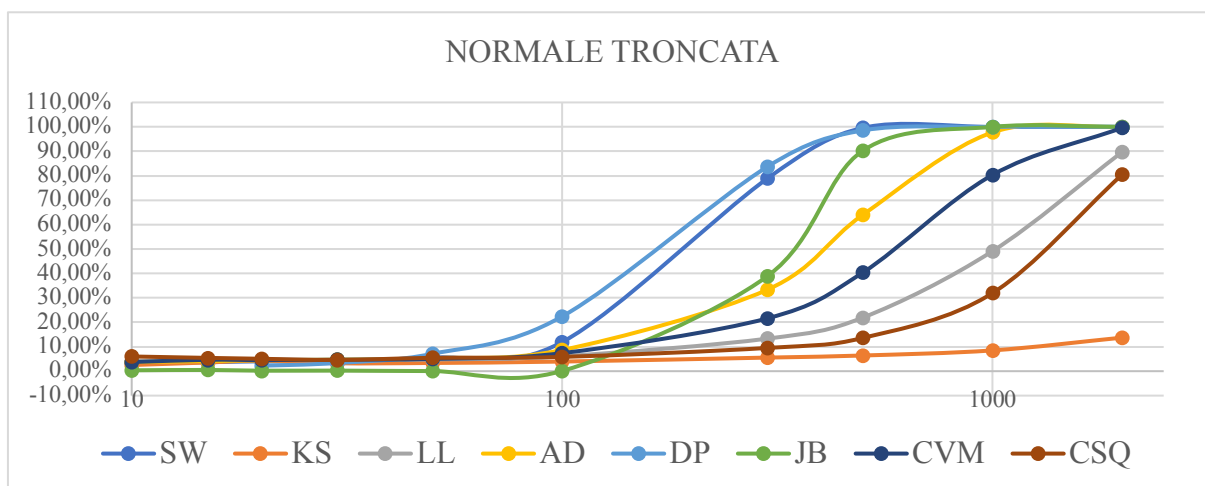


Figura 3: Grafico che riporta i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Normale troncata.

La figura 3 e la tabella 4 riportano i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da una popolazione distribuita come una Normale troncata. In questo caso, i risultati mostrano l'evidente difficoltà dei test nel riconoscere la non normalità del campione. A differenza dei casi precedenti i risultati significativi si ottengono solo per grandi numerosità: per numerosità inferiori a 100 i test presentano tutti la medesima potenza, ad eccezione del test Jarque e Bera (JB) che riporta risultati decisamente inferiori rispetto agli altri, riconoscendo circa il 2% dei campioni non normali. Per numerosità $n = 100$, il test più potente risulta il test di Shapiro e Wilk (SW) che però riconosce soltanto il 20% dei campioni non normali. Soltanto per campioni con numerosità $n = 300$ i test di Shapiro e Wilk e di D'Agostino e Pearson riconoscono circa l'80% dei campioni, mentre gli altri test riconoscono il 40% dei campioni. Per numerosità $n = 500$ il test SW e DP individuano il 100% dei campioni non normali ed il test JB, che per piccole numerosità risultava il meno potente, si avvicina ai precedenti riconoscendo circa l'80% dei campioni simulati. Il test di Anderson e Darling (AD) raggiunge il 100% solo per numerosità $n = 1000$, mentre gli altri test mantengono potenza inferiore e soltanto per numerosità $n = 2000$ anche il test di Cramer, von Mises e Smirnov (CVM) raggiunge il 100%. I restanti test di Lilliefors (LL), chi quadrato di Pearson (CSQ) e Kolmogorov e Smirnov (KS) non riconoscono tutti i campioni non normali nemmeno per numerosità molto elevate, in particolare il test KS in questo caso risulta il meno potente, perché perfino per campioni con numerosità $n = 2000$ il test riconosce la non normalità soltanto nel 35% dei campioni.

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
Laplace	10	0,1508	0,0488	0,1424	0,1570		0,0618	0,1540	0,1344
	15	0,2048	0,0556	0,1788	0,2138		0,1428	0,2108	0,1292
	20	0,2580	0,0540	0,2120	0,2648	0,2986	0,2186	0,2620	0,1408
	30	0,3596	0,0672	0,2978	0,3794	0,3844	0,3378	0,3752	0,2032
	50	0,5186	0,0630	0,4232	0,5326	0,5106	0,5174	0,5260	0,2758
	100	0,7874	0,0780	0,6960	0,8130	0,7340	0,7740	0,8126	0,4736
	300	0,9986	0,2488	0,9932	0,9998	0,9914	0,9964	0,9996	0,9236
	500	1,0000	0,5526	1,0000	1,0000	0,9998	1,0000	1,0000	0,9940
	1000	1,0000	0,9836	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabella 5: Risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Laplace.

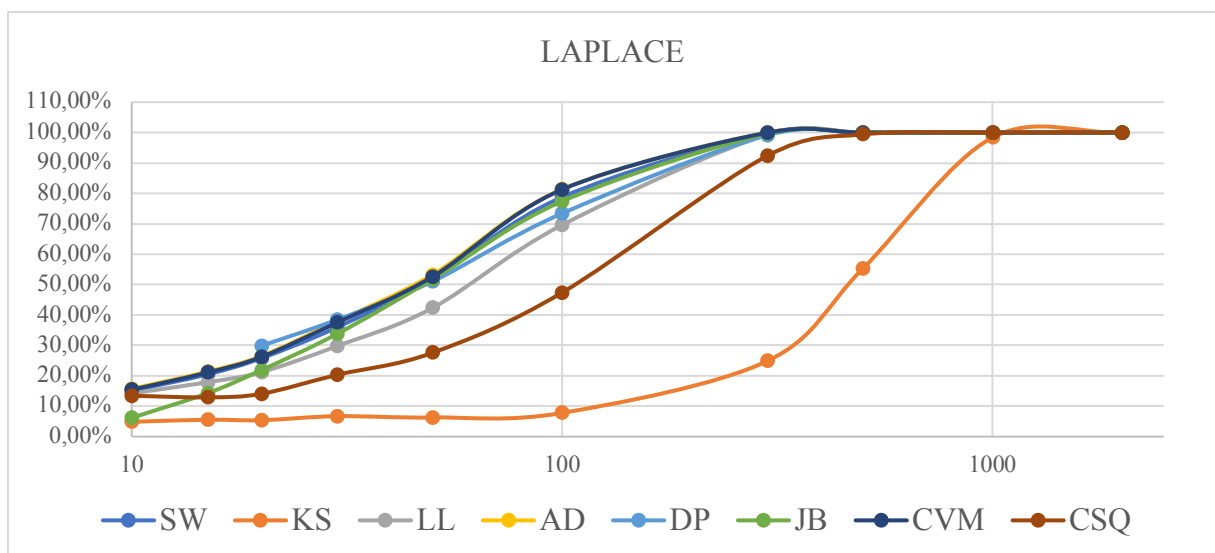


Figura 4: Grafico che riporta i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Laplace.

La figura 4 e la tabella 5 sopra riportate presentano i risultati dell'esperimento condotto partendo da un campione estratto da una popolazione con una distribuzione Laplace. In media i test presentano, in questo caso, la stessa potenza, riconoscendo tra il 60% e l'80% dei campioni non normali per numerosità $n = 100$, ed il 100% dei campioni non normali per numerosità $n = 300$. Il test Chi quadrato di Pearson (CSQ), risulta leggermente meno potente degli altri in quanto per numerosità $n = 100$ riconosce soltanto il 50% dei campioni rimanendo coerente con i risultati delle distribuzioni utilizzate precedentemente. Il test di Kolmogorov e Smirnov (KS) rappresenta l'eccezione rispetto agli altri test, in quanto, fino a numerosità dei campioni $n = 300$, riconosce circa il 25% dei campioni non normali e soltanto per numerosità $n = 2000$ individua tutti i campioni.

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
Logistica	10	0,0780	0,1564	0,0698	0,0782		0,0262	0,0772	0,0836
	15	0,0962	0,1992	0,0760	0,0898		0,0634	0,0886	0,0680
	20	0,1170	0,2330	0,0828	0,1076	0,1436	0,0916	0,1004	0,0678
	30	0,1398	0,3208	0,0942	0,1240	0,1800	0,1392	0,1160	0,0688
	50	0,1922	0,5170	0,1110	0,1546	0,2250	0,2102	0,1384	0,0782
	100	0,3022	0,8644	0,1536	0,2350	0,3340	0,3682	0,2132	0,0944
	300	0,6458	1,0000	0,3384	0,5340	0,6562	0,7140	0,4812	0,1512
	500	0,8328	1,0000	0,5116	0,7456	0,8430	0,8810	0,6868	0,2134
	1000	0,9820	1,0000	0,8208	0,9626	0,9848	0,9900	0,9382	0,4374
	2000	1,0000	1,0000	0,9918	0,9996	1,0000	1,0000	0,9994	0,7902

Tabella 6: Risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Logistica.

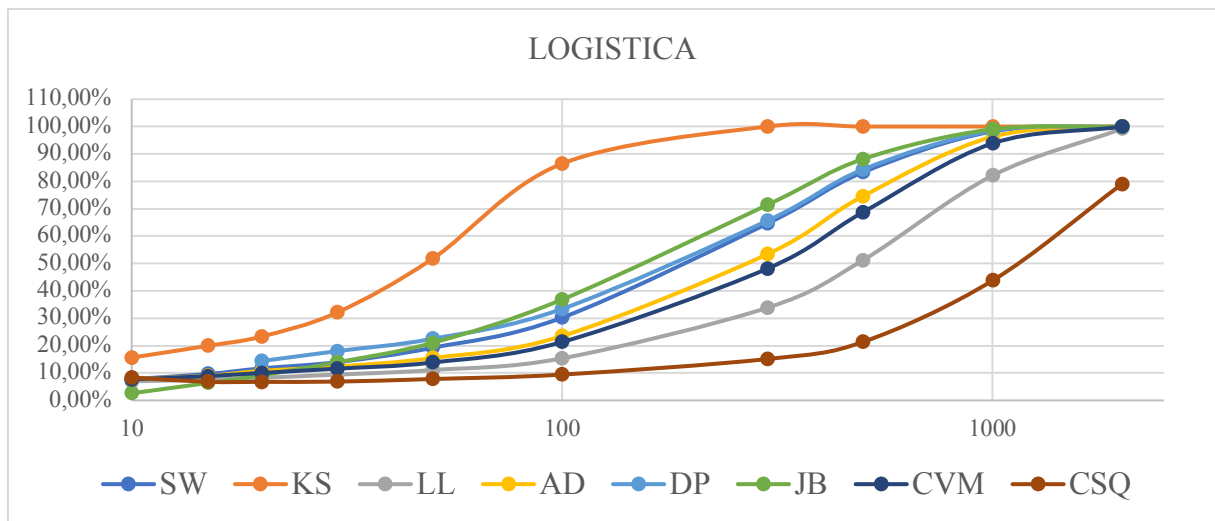


Figura 5: Grafico che riporta i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Logistica.

Nella figura 5 e nella tabella 6 si riportano i risultati delle simulazioni ottenuti da campioni estratti da una popolazione con distribuzione Logistica. Anche in questo caso, come nel caso della distribuzione normale troncata precedentemente illustrato, i test risultano potenti per alte numerosità del campione, e molto meno potenti per numerosità inferiori a $n = 100$. Il test di Kolmogorov e Smirnov (KS) rappresenta ancora una volta l'eccezione rispetto agli altri perché significativamente più potente fin da piccole numerosità campionarie. Il test KS riesce ad individuare quasi tutti i campioni non normali delle 5000 simulazioni a partire da numerosità $n = 100$. In questo caso, il test di Jarque e Bera (JB), invece, risulta il più potente dopo il test KS. I test meno potenti risultano i test di Lilliefors (LL) ed il test chi quadrato di Pearson (CSQ). Quest'ultimo in particolare, non individua tutti i campioni non normali nemmeno per numerosità campionarie $n = 2000$, soffermandosi al 79% dei campioni.

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
t di Student	10	0,0666	0,0522	0,0608	0,0650		0,0156	0,0612	0,0682
	15	0,0680	0,0542	0,0588	0,0688		0,0350	0,0662	0,0602
	20	0,0780	0,0496	0,0538	0,0642	0,1002	0,0562	0,0614	0,0514
	30	0,0874	0,0544	0,0652	0,0762	0,1156	0,0824	0,0698	0,0606
	50	0,1044	0,0464	0,0672	0,0814	0,1354	0,1172	0,0756	0,0530
	100	0,1422	0,0504	0,0724	0,1008	0,1748	0,1836	0,0888	0,0596
	300	0,2644	0,0556	0,1056	0,1594	0,3040	0,3460	0,1382	0,0720
	500	0,3790	0,0552	0,1384	0,2250	0,4248	0,4730	0,1862	0,0716
	1000	0,6056	0,0718	0,2144	0,4026	0,6638	0,7148	0,3390	0,1026
	2000	0,8676	0,0810	0,4028	0,7080	0,9062	0,9246	0,6220	0,1506

Tabella 7: Risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione T di Student.

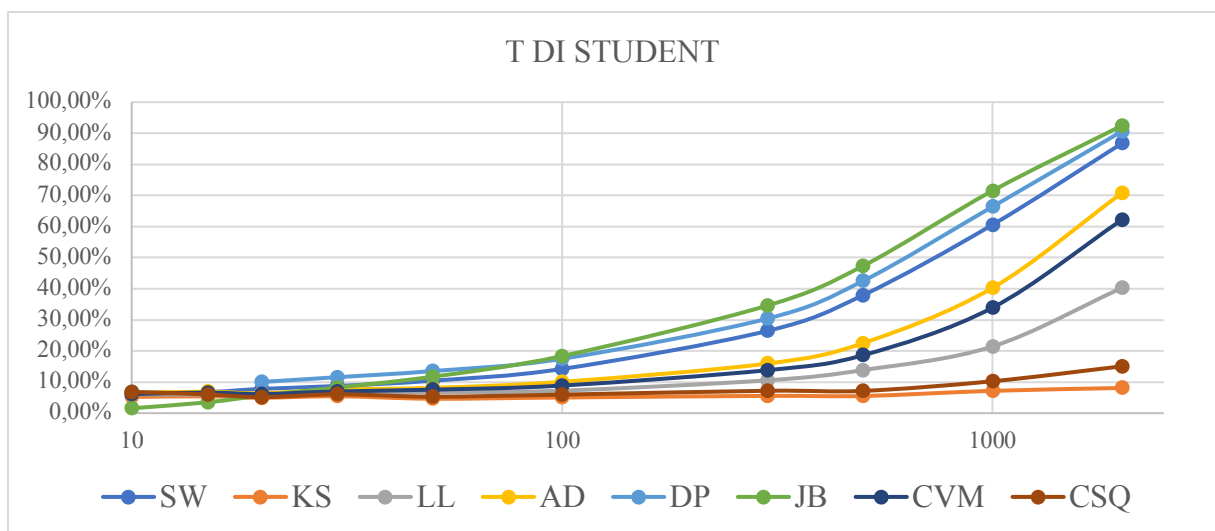


Figura 6: Grafico che riporta i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione T di Student.

I risultati dell'esperimento ottenuti partendo da una distribuzione t di Student vengono riportati nella *tabella 7* e nella relativa *figura 6*. Come emerso dalla rappresentazione grafica, la distribuzione t di Student risulta simile alla distribuzione Normale, ed i risultati dell'esperimento confermano la difficoltà nell'individuare la non normalità del campione. Basandoci sulla *figura 6*, risulta evidente nell'andamento dei test la necessità di numerosità maggiori di $n = 1000$ per individuare la non normalità dei campioni, senza comunque riuscire ad individuarne il totale. Soffermandoci sui risultati ottenuti per numerosità $n = 1000$, il test di Jarque e Bera (JB) risulta il più potente, seguito dal test di D'Agostino e Pearson (DP) e dal test di Shapiro e Wilk (SW). Gli altri test mantengono una distanza significativa dai precedenti: il test di Anderson e Darling ed il test di Cramer, von Mises e Smirnov per numerosità $n = 1000$ riconoscono tra il 30% ed il 40% dei campioni e individuano il 60% dei campioni non normali

per numerosità campionarie $n = 2000$. Il test di Kolmogorov e Smirnov (KS) ed il test chi quadrato di Pearson (CSQ) di fronte ad una t di Student potrebbero indurre in errore, i risultati dimostrano, infatti, che questi test riconoscono circa il 15% dei campioni non normali anche per numerosità elevate, risultando, dunque, i meno potenti.

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
Lognormale	10	0,6000	1,0000	0,4522	0,5732		0,2762	0,5466	0,5342
	15	0,8270	1,0000	0,6536	0,7936		0,5406	0,7650	0,6976
	20	0,9246	1,0000	0,7876	0,9014	0,8048	0,7222	0,8798	0,8244
	30	0,9916	1,0000	0,9302	0,9836	0,9364	0,9158	0,9742	0,9500
	50	0,9996	1,0000	0,9940	0,9990	0,9976	0,9960	0,9984	0,9960
	100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabella 8: Risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Lognormale.

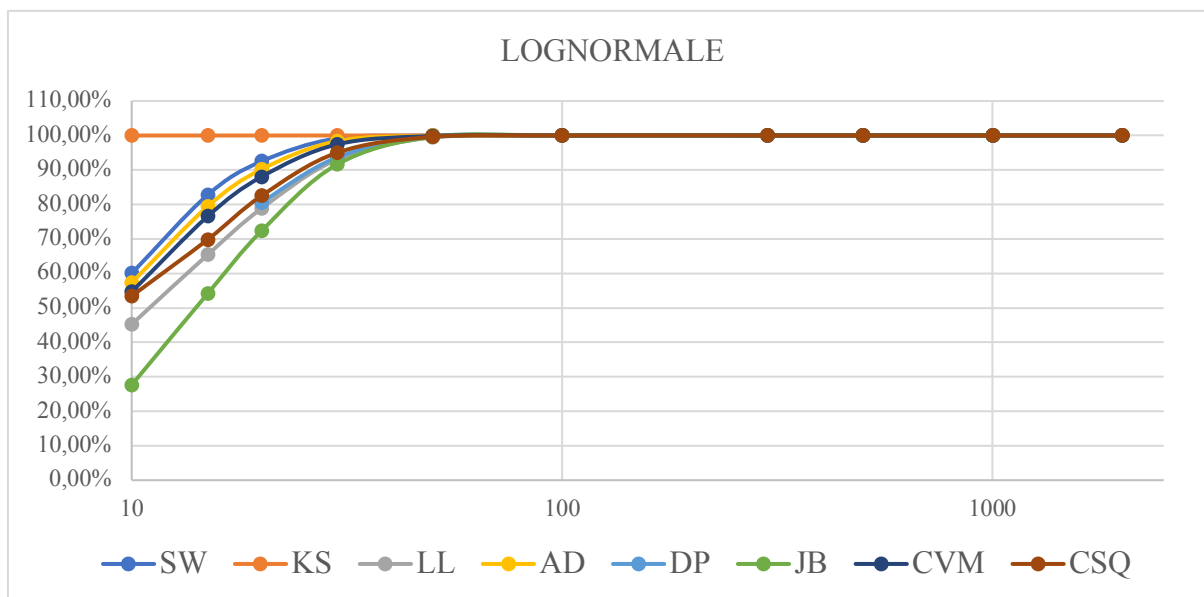


Figura 7: Grafico che riporta i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Lognormale.

I risultati ottenuti partendo da una distribuzione Lognormale sono riportati nella *figura 7* e nella *tabella 8*. Questi risultati sono molto diversi da quelli precedentemente ottenuti. I test confermano le intuizioni della non normalità di un campione distribuito come una Lognormale che possono emergere comparando il grafico della distribuzione del campione in questione e di una Normale standard. Tutti i test, infatti, fin da piccole numerosità, hanno buona potenza nel riconoscimento dei campioni non normali delle 5000 simulazioni effettuate. Per numerosità n

= 100 riconoscono tutti il 100% dei campioni non normali. Il test di Kolmogorov e Smirnov (KS), come nel caso della distribuzione Uniforme, riconosce la non normalità di tutti i campioni anche con numerosità campionarie molto piccole come $n = 10$. Anche i test di Shapiro e Wilk (SW) ed il test di Anderson e Darling (AD) presentano risultati elevati, mentre il test meno potente fra tutti in questo caso risulta il test di Jarque e Bera (JB), specialmente per numerosità più piccole.

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
Weibull	10	0,0440	1,0000	0,0460	0,0474		0,0068	0,0480	0,0624
	15	0,0394	1,0000	0,0430	0,0432		0,0120	0,0450	0,0490
	20	0,0412	1,0000	0,0428	0,0408	0,0398	0,0130	0,0422	0,0400
	30	0,0398	1,0000	0,0470	0,0446	0,0374	0,0152	0,0472	0,0516
	50	0,0478	1,0000	0,0494	0,0504	0,0530	0,0160	0,0512	0,0522
	100	0,0710	1,0000	0,0592	0,0610	0,0734	0,0210	0,0586	0,0610
	300	0,1946	1,0000	0,0848	0,1244	0,1878	0,0798	0,1026	0,0682
	500	0,3758	1,0000	0,1242	0,2072	0,3580	0,2154	0,1648	0,0884
	1000	0,8188	1,0000	0,2300	0,4426	0,7594	0,6884	0,3318	0,1392
	2000	0,9986	1,0000	0,4958	0,8376	0,9898	0,9854	0,6776	0,2872

Tabella 9: Risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Weibull.

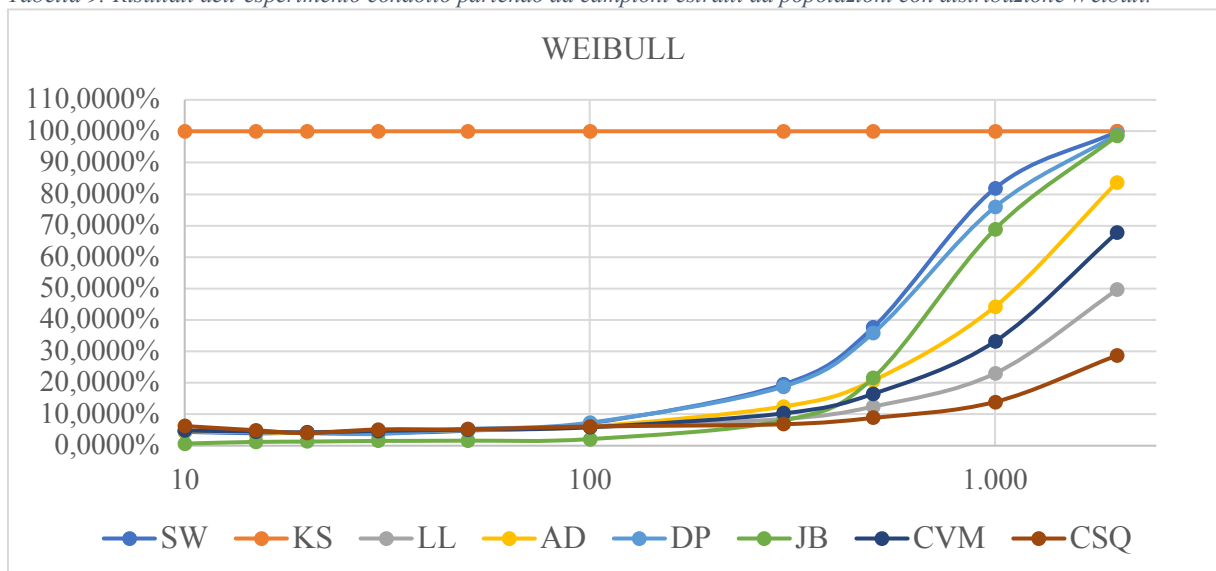


Figura 8: Grafico che riporta i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Weibull.

La tabella 7 e la relativa figura 8 riportano i risultati dei test condotti partendo da campioni estratti da popolazioni di distribuzione Weibull. Ad eccezione del test Kolmogorov e Smirnov (KS) che, come nel caso precedente, riconosce la non normalità di tutti i 5000 campioni simulati fin da piccole numerosità $n = 10$, gli altri test, presentano alcune difficoltà nel riconoscere la non normalità del campione. Seppur asimmetrica, la distribuzione Weibull in questo studio è

stata scelta con un parametro che ne definisce l'asimmetria non significativamente elevato ed il metodo grafico potrebbe indurre in errore. In questo caso l'analista, sospettando la non normalità del campione, utilizzando il test KS, non incontrerebbe difficoltà per qualsiasi numerosità campionaria. In alternativa, i test più potenti risultano i test di Shapiro e Wilk (SW), il test di D'Agostino e Pearson (DP) ed il test di Jarque e Bera (JB). Questi test, individuano il 100% dei campioni non normali per numerosità elevate $n = 2000$. Gli altri test, invece, non riescono a riconoscere la non normalità di tutti i campioni nemmeno per numerosità elevate. Tra questi il più potente è il test di Anderson e Darling (AD) che individua circa il 90% dei campioni non normali per numerosità $n = 2000$. I test meno potenti in questo caso risultano, il test di Cramer, von Mises, e Smirnov (CVM), il test di Lilliefors (LL) ed il test chi quadrato di Pearson (CSQ), quest'ultimo per numerosità $n = 2000$ individua solo il 28% dei campioni.

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
Gamma	10	0,3100	1,0000	0,2102	0,2856		0,1012	0,2594	0,2590
	15	0,4908	1,0000	0,3084	0,4390		0,2318	0,3974	0,2956
	20	0,6624	1,0000	0,4172	0,5872	0,4740	0,3560	0,5408	0,4098
	30	0,8658	1,0000	0,5868	0,7968	0,6524	0,5796	0,7374	0,5876
	50	0,9890	1,0000	0,8290	0,9620	0,8776	0,8558	0,9308	0,8472
	100	1,0000	1,0000	0,9914	1,0000	0,9998	0,9994	0,9992	0,9960
	300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabella 10: Risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Gamma.

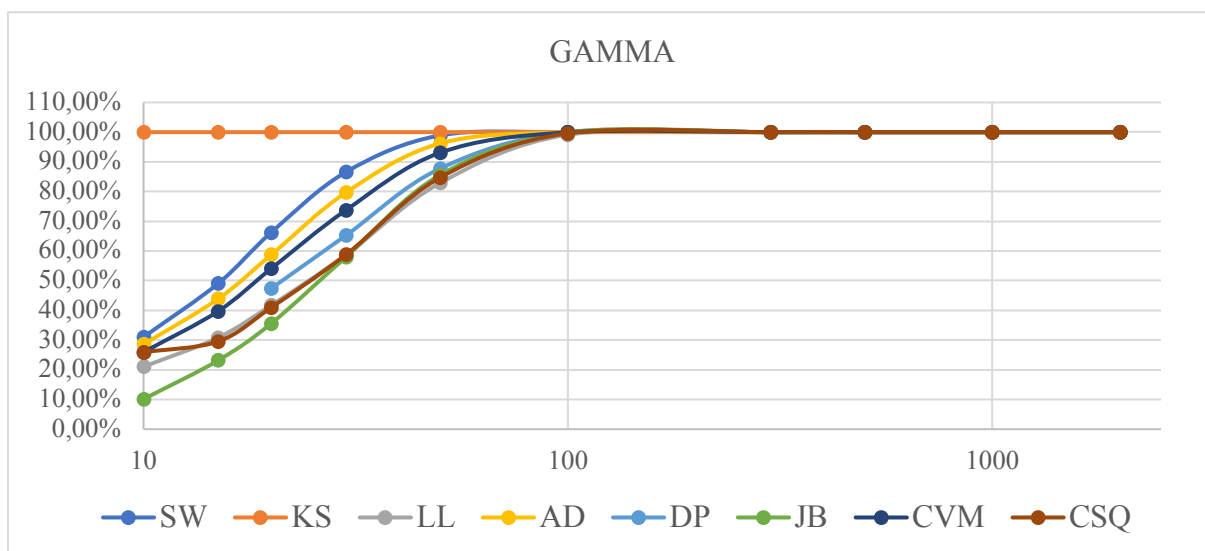


Figura 9: Grafico che riporta i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Gamma.

I risultati dell'esperimento ottenuti dai campioni generati da una distribuzione Gamma sono riportati nella *tabella 8* e nella *figura 9*. In questo caso, le prestazioni dei test risultano simili al caso della distribuzione Lognormale: fin da piccole numerosità i test individuano alte percentuali di campioni non normali. Il test di Kolomogorov e Smirnov (KS) riconosce da subito la non normalità del campione. I test che risultano più potenti dopo il test KS risultano in questo caso il test di Shapiro e Wilk (SW), seguito dal test di Anderson e Darling (AD) e, insolitamente, dal test di Cramer, von Mises e Smirnov (CVM). Quest'ultimo è da preferire al test di D'Agostino e Pearson (DP). I test meno potenti invece risultano i test di Lilliefors (LL), il test chi quadrato di Pearson (CSQ) ed il test di Jarque e Bera (JB).

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
T Student asimmetrica	10	0,2128	1,0000	0,1560	0,1992		0,0704	0,1838	0,1774
	15	0,3276	1,0000	0,2184	0,2978		0,1722	0,2710	0,1834
	20	0,4504	1,0000	0,2884	0,4032	0,3820	0,2734	0,3680	0,2354
	30	0,6428	1,0000	0,4172	0,5766	0,5120	0,4378	0,5262	0,3304
	50	0,8734	1,0000	0,6224	0,8106	0,7470	0,7100	0,7586	0,4988
	100	0,9964	1,0000	0,9150	0,9882	0,9796	0,9768	0,9762	0,8262
	300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabella 11: Risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione T di Student asimmetrica.

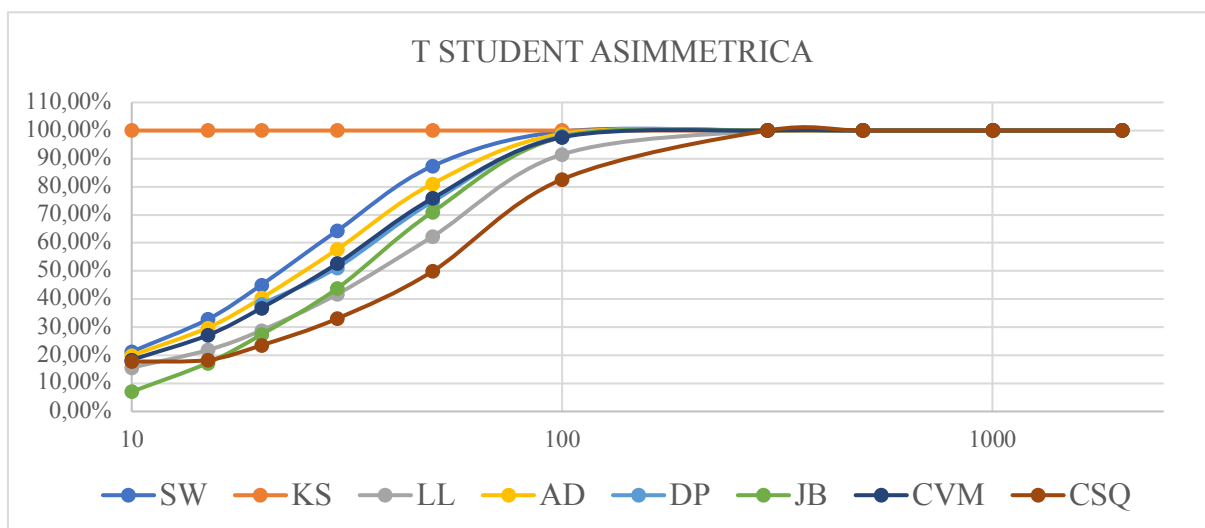


Figura 10: Grafico che riporta i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione T di Student asimmetrica.

Analizzando i risultati ottenuti partendo da campioni distribuiti come una t di Student asimmetrica riportati nella *tabella 11* e nella *figura 10*, è evidente come la situazione sia molto diversa rispetto al caso della t di Student, i test risultano più potenti quando le distribuzioni presentano parametri di asimmetria. Il test di Kolmogorov e Smirnov (KS), ancora una volta individua tutti i campioni non normali, mentre gli altri test più potenti risultano: il test di Shapiro e Wilk (SW), il test di Anderson e Darling (AD) ed il test di Cramer, von Mises e Smirnov (CVM), in linea con i risultati ottenuti precedentemente dalle diverse distribuzioni asimmetriche. Il test di Jarque e Bera (JB) in questo caso non risulta il meno potente ma si avvicina al test CVM per numerosità campionarie $n = 50$. Il test meno potente infatti risulta il test chi quadrato di Pearson (CSQ).

	n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
Normale asimmetrica	10	0,1338	1,0000	0,1064	0,1272		0,0352	0,1168	0,1240
	15	0,2000	1,0000	0,1330	0,1810		0,0806	0,1688	0,1156
	20	0,2800	1,0000	0,1770	0,2462	0,2102	0,1244	0,2186	0,1326
	30	0,4224	1,0000	0,2560	0,3670	0,2984	0,2164	0,3366	0,1990
	50	0,6694	1,0000	0,4028	0,5794	0,4622	0,3964	0,5204	0,2806
	100	0,9488	1,0000	0,7282	0,8992	0,8386	0,8164	0,8518	0,5480
	300	1,0000	1,0000	0,9970	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9872
	500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabella 12: Risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Normale asimmetrica.

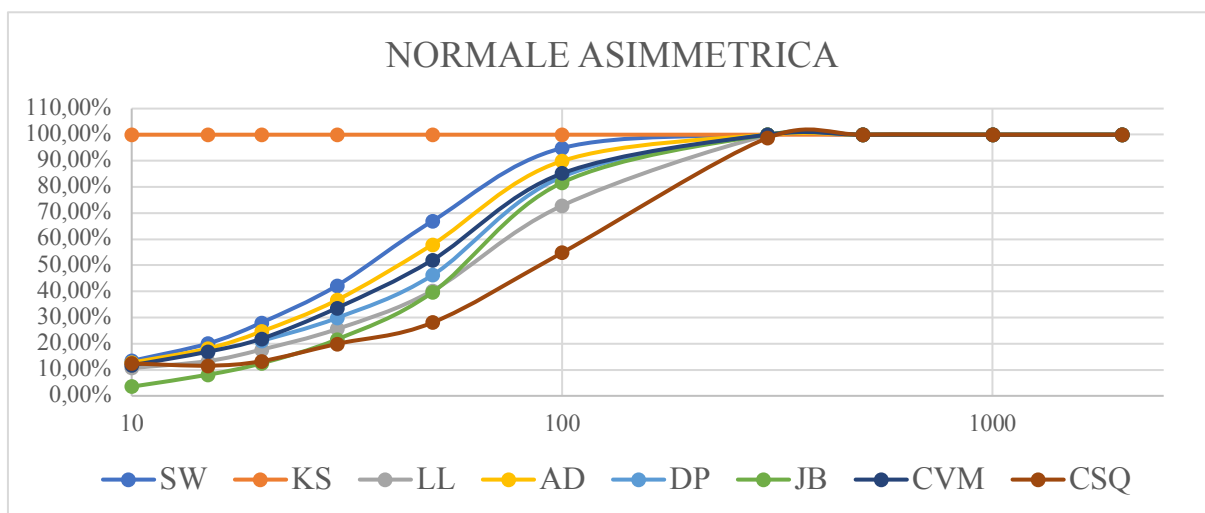


Figura 11: Grafico che riporta i risultati dell'esperimento condotto partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzione Normale asimmetrica.

Gli ultimi risultati ottenuti, che sono riportati nella *tabella 12* e nella *figura 11*, provengono da campioni generati da una distribuzione normale asimmetrica. In questo caso, dunque, è stato introdotto un parametro che regola l'asimmetria alla semplice distribuzione Normale standard con cui vogliamo confrontare le distribuzioni dei campioni. Seppure con meno evidenza del caso della distribuzione t di Student asimmetrica, anche in questo caso i test individuano il 100% dei campioni non normali ma soltanto per le distribuzioni con numerosità $n = 300$, ad eccezione del test di Kolmogorov e Smirnov (KS) che come per tutte le distribuzioni asimmetriche riconosce tutti i campioni non normali per tutte le numerosità campionarie.

CONCLUSIONI

I risultati di queste simulazioni confermano la validità dei test di normalità nel riconoscere la non normalità del campione. Tuttavia, nelle situazioni in cui la distribuzione è graficamente simile ad una normale, i test riconoscono meno frequentemente la vera distribuzione da cui vengono generate le osservazioni.

Per un'analisi più approfondita dei risultati è stato assegnato ad ogni test, per ciascuna numerosità campionaria, un punteggio compreso tra 1 e 8 che identifica la posizione del test rispetto agli altri in base ai risultati ottenuti nell'individuazione dei campioni "non normali". I punteggi sono stati sommati e sono stati realizzati dei prospetti riepilogativi in modo tale che si evidenzi quale test sia preferibile ad una data numerosità. Successivamente, i punteggi ottenuti sono stati classificati ulteriormente in base al tipo di distribuzione per poter trarre alcune conclusioni in merito a quale test sia preferibile qualora l'analista sospetti, in base al metodo grafico, che la distribuzione sia simmetrica a code sottili, a code pesanti o asimmetrica.

n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
10	7	8	17	8		21	13	10
15	6	7	15	7		21	11	17
20	6	9	18	9	10	21	13	22
30	7	9	18	10	8	20	13	23
50	8	8	20	11	8	16	14	23
100	7	10	20	11	7	14	15	24
300	7	16	18	12	6	11	15	23
500	6	16	19	13	7	8	16	23
1000	6	15	20	13	6	6	16	23
2000	6	16	19	10	6	6	16	23
Totale	66	114	184	104	58	144	142	211

Tabella 13: Somma complessiva dei punteggi attribuiti ai test per ogni numerosità utilizzata.

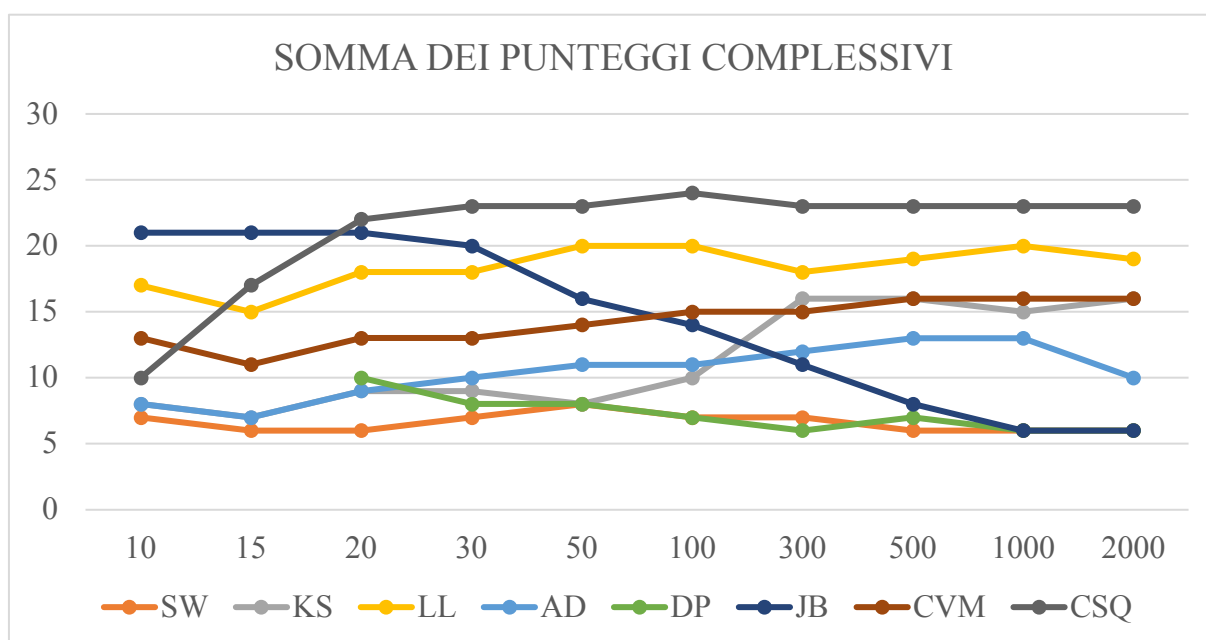


Figura 12: Somma complessiva dei punteggi attribuiti ai test per ogni numerosità utilizzata.

La *tabella 13* ed il relativo grafico riportato nella *figura 12* riportano la somma dei punteggi attribuiti ad ogni test per tutte le numerosità campionarie. Dal momento che il punteggio 1 è stato attribuito al test che ha riportato risultati maggiori rispetto agli altri test, i valori che sommati risultano bassi indicano i test più potenti per le diverse numerosità campionarie. Nello specifico, il test di Shapiro e Wilk (SW) nel grafico viene rappresentato nella posizione più bassa. A questo test, infatti, sono stati assegnati complessivamente punteggi vicino a 1 e, per numerosità campionarie $n \leq 50$, risulta indubbiamente il più potente. Un particolare andamento emerge dai punteggi attribuiti al test di Jarque e Bera (JB) il quale, se per numerosità campionarie inferiori a 30 risulta il meno potente, all'aumentare della numerosità del campione, diventa più potente raggiungendo le prime posizioni della classifica. Si può concludere che il test chi quadrato di Pearson (CSQ) per numerosità $n \geq 20$ a cui si aggiunge il test di Lilliefors (LL) per numerosità $n \geq 50$, siano i meno potenti rispetto agli altri test.

Vengono analizzate ora le prestazioni dei test suddivise in base il tipo di distribuzione: le sommatorie dei punteggi attribuiti ai test sono suddivisi per tipo di distribuzione.

n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
10	3	1	6	4		7	5	2
15	2	1	6	3		7	4	5
20	2	1	6	3	4	8	5	7
30	3	1	6	4	2	8	5	7
50	3	1	6	4	2	8	5	7
100	2	3	6	4	1	7	5	8
300	2	8	6	4	1	3	5	7
500	1	8	6	4	2	3	5	7
1000	1	8	6	4	1	1	5	7
2000	1	8	6	1	1	1	5	7
Totale	20	40	60	35	14	53	49	64

Tabella 14: Somma dei punteggi attribuiti ai test per le distribuzioni simmetriche a code sottili

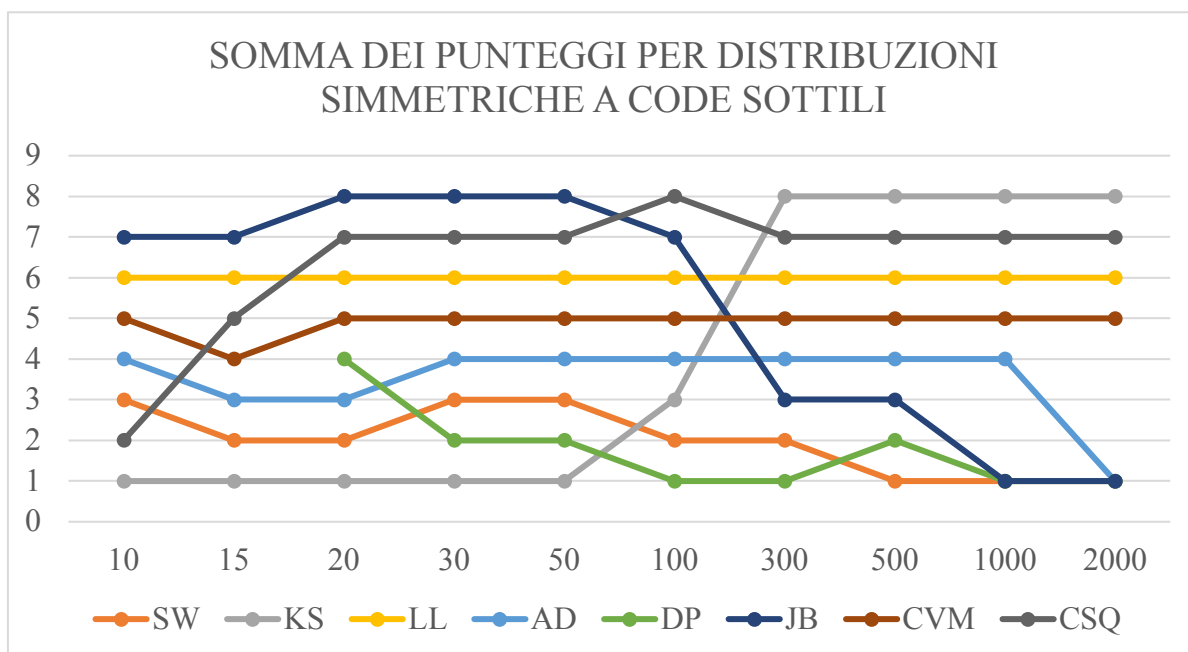


Figura 13: Somma dei punteggi attribuiti ai test per le distribuzioni a code sottili.

Dalla *tabella 14* e dal relativo grafico riportato nella *figura 13* si possono trarre alcune conclusioni in merito alla potenza dei test condotti partendo da campioni estratti da popolazioni con distribuzioni simmetriche a bassi valori di curtosi: Il test di Kolmogorov e Smirnov (KS) risulta il più potente per numerosità campionarie $n \leq 50$, mentre, per numerosità, più elevate ($n \geq 300$) risulta il meno potente. Questo risultato particolare è dovuto al fatto che, nelle simulazioni condotte partendo da campioni estratti da una popolazione con distribuzione Normale troncata, il test ha modificato molto la sua prestazione rispetto ai casi della distribuzione Uniforme e della distribuzione Tukey-Lambda, registrando potenza inferiore rispetto agli altri test. Una situazione inversa invece si riscontra per il test di Jarque e Bera (JB) che per numerosità più piccole risulta il meno potente, tuttavia, per numerosità campionarie superiori a $n = 50$, il test migliora la sua potenza rispetto agli altri test raggiungendo i test di Shapiro e Wilk (SW) ed il test di D'Agostino e Pearson (DP) che risultano i più potenti, dopo il test KS, per tutte le numerosità campionarie analizzate.

I test meno potenti, per questo tipo di distribuzioni, risultano, invece, il test di Lilliefors (LL) ed il test Chi quadrato di Pearson (CSQ).

Per le distribuzioni simmetriche con alti livelli di curtosi, i punteggi attribuiti ai test sono riepilogati nella seguente *tabella 15* e nel relativo grafico riportato nella *figura 14*. Il test più potente per numerosità campionarie inferiori a 50 risulta il test di D'Agostino e Pearson (DP), seguito dal test di Shapiro e Wilk (SW) e dal test di Anderson e Darling (AD), che, in questo caso, si avvicina ai precedenti come potenza. Per numerosità campionarie più elevate, invece,

è preferibile utilizzare il test di Jarque e Bera (JB). I test che risultano meno potenti per questo tipo di distribuzioni sono: il test chi quadrato di Pearson (CSQ), il test di Kolmogorov e Smirnov (KS) ed il test di Lilliefors (LL).

n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
10	2	6	5	1		7	3	4
15	2	5	4	1		7	3	6
20	2	7	6	3	1	5	4	8
30	2	7	6	3	1	5	4	8
50	3	6	7	4	1	2	5	8
100	3	6	7	4	2	1	5	8
300	3	7	6	4	2	1	5	8
500	3	7	6	4	2	1	5	8
1000	3	6	7	4	2	1	5	8
2000	3	7	6	4	2	1	5	8
Totale	26	64	60	32	13	31	44	74

Tabella 15: Somma dei punteggi attribuiti ai test per le distribuzioni simmetriche a code pesanti.

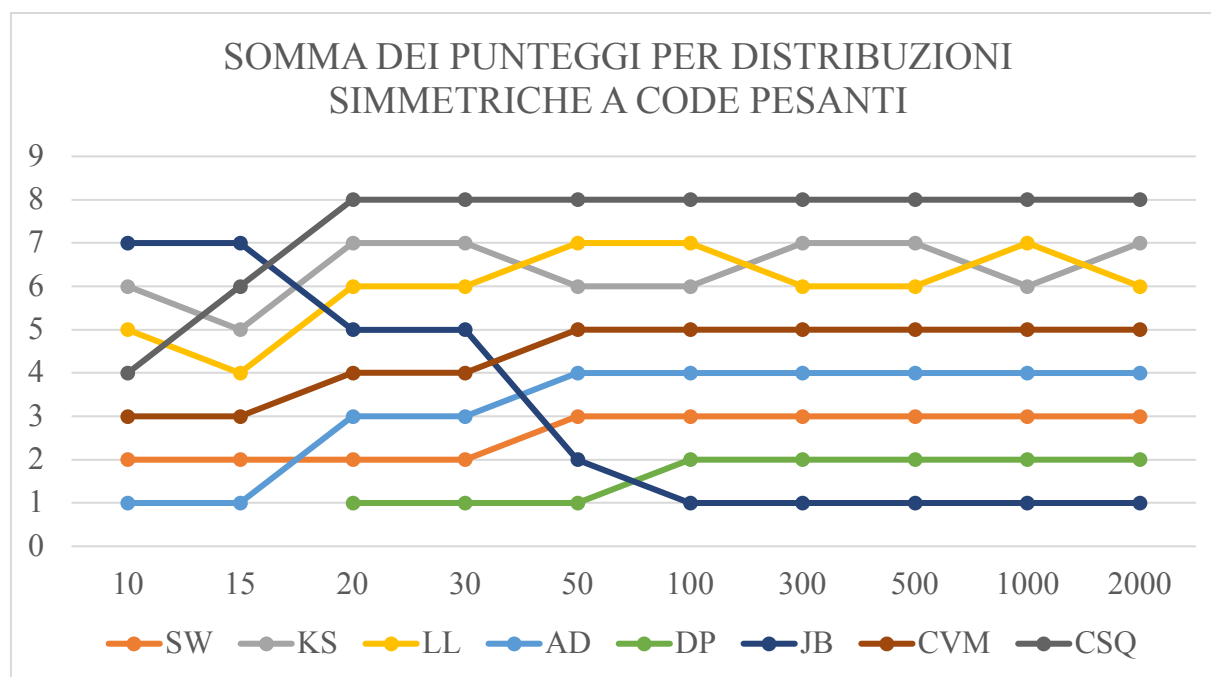


Figura 14: Somma dei punteggi attribuiti ai test per le distribuzioni simmetriche a code pesanti

Come ultima analisi vengono riportati i punteggi dei test attribuiti a seconda dei risultati ottenuti dall'esperimento condotto su campioni estratti da popolazioni con distribuzioni asimmetriche.

n	SW	KS	LL	AD	DP	JB	CVM	CSQ
10	2	1	6	3		7	5	4
15	2	1	5	3		7	4	6
20	2	1	6	3	5	8	4	7
30	2	1	6	3	5	7	4	8
50	2	1	7	3	5	6	4	8
100	2	1	7	3	4	6	5	8
300	2	1	6	4	3	7	5	8
500	2	1	7	5	3	4	6	8
1000	2	1	7	5	3	4	6	8
2000	2	1	7	5	3	4	6	8
Totale	20	10	64	37	31	60	49	73

Tabella 16: Somma dei punteggi attribuiti ai test per le distribuzioni asimmetriche.

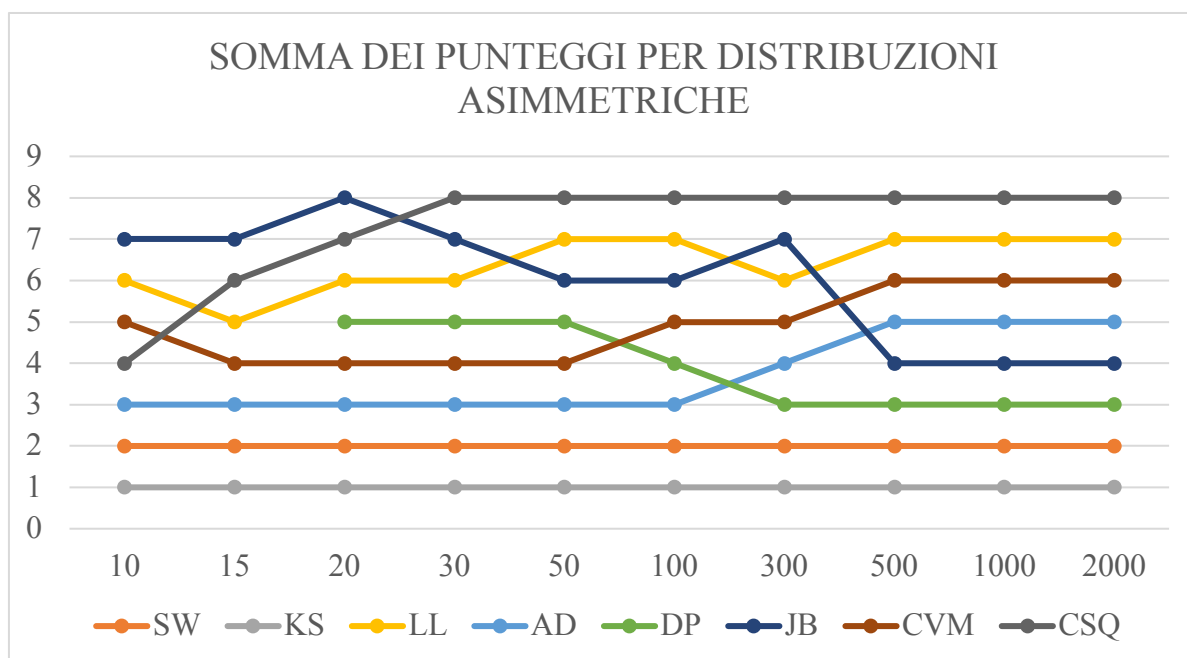


Figura 15: Somma dei punteggi attribuiti ai test per le distribuzioni asimmetriche.

Dalla *tabella 16* precedente e dalla *figura 15* emerge con evidenza che il test di Kolmogorov e Smirnov (KS) ed il test di Shapiro e Wilk (SW) risultano i più potenti per tutte le numerosità campionarie. Questi due test, infatti, registrano i punteggi più bassi per questo tipo di distribuzioni. A questi due test si aggiunge il test di Anderson e Darling (AD) per numerosità campionarie fino a $n = 100$. Per numerosità più elevate dei campioni, invece, al test AD è preferibile il test di D'agostino e Pearson (DP). Il test invece che registra punteggi più elevati e risulta dunque il meno potente è il test chi quadrato di Pearson (CSQ) per numerosità superiori a $n = 30$, per numerosità inferiori, invece, il test di Jarque e Bera (JB) risulta il meno indicato

sebbene la sua potenza rispetto agli altri test aumenti per numerosità del campione molto elevate ($n > 500$).

Per concludere, le informazioni descrittive e grafiche integrate con i test formali di normalità possono aiutare a trarre la giusta conclusione sulla distribuzione di una variabile.

I risultati di questo studio di simulazione hanno indicato che il test di Shapiro e Wilk ha buone proprietà di potenza su una vasta gamma di distribuzioni. Se il ricercatore sospetta che la distribuzione sia asimmetrica allora il test di Kolmogorov e Smirnov è il test migliore seguito dal test di Shapiro e Wilk ed il test di Anderson e Darling. Se la distribuzione è simmetrica con bassi valori di curtosi (cioè distribuzione simmetrica a coda sottile), allora i test Omnibus di D'Agostino e Pearson ed il test di Shapiro e Wilk hanno una buona potenza. Per la distribuzione simmetrica con alta curtosi del campione (simmetrica a coda pesante), il ricercatore può utilizzare il test Jarque e Bera, Shapiro e Wilk o Anderson e Darling.

BIBLIOGRAFIA

- ANDERSON T.W., DARLING D.A., 1954. *A test of goodness of fit*. Journal of the American Statistical Association, 49 (268), 765–769.
- AZZALINI A., CAPITANIO A., 2003. *Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew-t distribution*. J.Royal Statistical Society B 65, 367–389.
- AZZALINI A., CAPITANIO A., 2014. *The Skew-normal and Related Families*. Cambridge University Press: IMS Monographs series.
- BOWMAN K.O., SHENTON L.R., 1975. *Omnibus test contours for departures from normality based on $\sqrt{b_1}$ and b_2* . Biometrika, 62 (2), 243–250.
- CICCHITELLI G., *Probabilità e Statistica*. 2 ed., Dogana (Repubblica di San Marino): Maggioli Editore, 82, 83, 87, 148-149, 352–355
- CRAMER H., 1928. *On the composition of elementary errors*. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 11, 13–74, 141–180.
- D’AGOSTINO R.B., BELANGER A., D’AGOSTINO JR R.B., 1900. *A suggestion for using powerful and informative tests of normality*. The American Statistician, 44(4), 316–321.
- D’AGOSTINO R.B., PEARSON E.S., 1973. *Testing for departures from normality. I. Fuller empirical results for the distribution of b_2 and $\sqrt{b_1}$* . Biometrika 60, 613–622.
- D’AGOSTINO R.B., STEPHENS M.A., 1986. *Goodness-of-fit Techniques*. New York: Marcel Dekker.
- DALLAL G.E., WILKINSON L., 1986. *An analytic approximation to the distribution of the Lilliefors’ test statistic for normality*. The American Statistician, 40, 294–296.
- HASTINGS C., MOSTELLER F., TUKEY J.W., C.P. WINSOR C.P., 1947. *Low moments for small samples: A comparative study of statistics*. The Annals of Mathematical Statistics, 18, 113–136.
- JAMBUNATHAN, M. V., 1954. *Some Properties of Beta and Gamma Distributions*. The Annals of Mathematical Statistics, 25, 401–405.
- JARQUE C. M., BERA A. K., 1987. *A test for normality of observations and regression residuals*. Int. Stat. Rev., 55(2), 163–172.
- JOINER, BRIAN L., ROSENBLATT, JOAN R., 1971. *Some Properties of the Range in Samples from Tukey's Symmetric Lambda Distributions*. Journal of the American Statistical Association, 66 (334), 394–399.
- KOLMOGOROV A.N., 1933. *Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione*. Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari, 4, 83–91.

- LAPLACE, P-S., 1774. *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Présentés par Divers Savan. 6, 621–656.
- LILLIEFORS H.W., 1967. *On the Kolmogorov–Smirnov test for normality with mean and variance unknown*. Journal of the American Statistical Association, 62, 534–544.
- MARSHALL W., 1958. *The small sample distribution of nw^2_n* . The Annals of Mathematical Statistics, 29 (1), 307–309.
- NADARAJAH S., KOTZ S., 2006. *R Programs for Computing Truncated Distributions*. Journal of Statistical Software, 16.
- PEARSON K., 1900. *On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can reasonably be supposed to have arisen from random sampling*. Philosophical Magazine, 50(5), 157–175.
- ROYSTON J.P., 1982. *An extension of Shapiro and Wilk's W test for normality to large samples*. Applied Statistics, 31, 115–124.
- SCHORR B., 1974. *On the choice of the class intervals in the application of chi-square test*. Operations Forsch. U. Stats 5, 357–377.
- SHAPIRO S.S., WILK M.B., (1965). *An analysis of variance test for normality (complete samples)*. Biometrika, 52 (3, 4), 591–611.
- SMIRNOV N.V., 1936. *Sui la distribution de w^2 (Criterium de M.R.v. Mises)*. C.R. (Paris), 202 (6.1), 449–452.
- VERHULST P.F., 1845. *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*. Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci. Belles-Lettre. Bruxelles, 18, (1), 3-38.
- VON MISES R., 1931. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik*. 6.1 ed. Leipzig: F. Deuticke.
- WEIBULL, W., 1951. *A statistical distribution function of wide applicability*. Journal of the Applied Mechanics, Transactions of the American Society of mechanical Engineers ASME, 18 (3), 293–297.
- YAP, C. H., SIM B. W., 2011. *Comparisons of various types of normality tests*. Journal of Statistical Computation and Simulation. 81 (12), 2141–2155.