



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Un confronto tra tecniche alternative per la ricostruzione  
delle condizioni iniziali del galaxy clustering

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureanda

Anna Negro

Anno Accademico 2017/2018



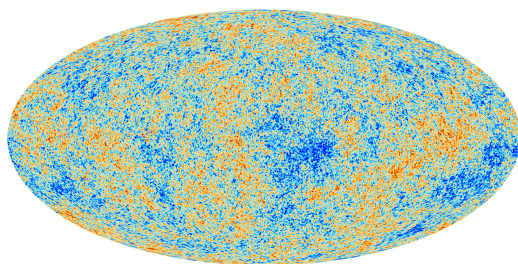
# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
Obiettivo della tesi . . . . .	v
Struttura della tesi . . . . .	vi
<b>1 Il problema di ricostruzione</b>	<b>1</b>
1.1 Il principio variazionale . . . . .	1
1.2 L'approssimazione Zel'dovich . . . . .	6
1.3 Considerazioni . . . . .	8
<b>2 Ricostruzione del campo di densità</b>	<b>11</b>
2.1 Formulazione del problema . . . . .	11
2.2 Metodo standard . . . . .	14
2.3 Metodo ZTRACE . . . . .	15
2.4 Correzione di Hada ed Eisenstein . . . . .	18
2.5 Considerazioni . . . . .	21
<b>3 Conclusioni</b>	<b>23</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>25</b>



# Introduzione

Le osservazioni attuali della struttura dell'Universo riportano la presenza di sensibili disomogeneità della struttura di quest'ultimo. L'Universo, ad oggi, è infatti costituito da strutture ad alta densità, cluster e filamenti, e vuoti. Al contrario, tramite l'osservazione della radiazione cosmica di fondo, ovvero dalla radiazione emessa al momento della ricombinazione dell'idrogeno, quando la radiazione ha smesso di interagire con la materia, si assume che, in epoca primordiale, l'Universo fosse omogeneo e isotropo.



**Figura 1.1:** *anisotropie del fondo cosmico a microonde (CMB) come osservato da Planck (2013). L'immagine mostra le piccole fluttuazioni di temperatura corrispondenti alle regioni di differenti densità presenti all'epoca primordiale. Da tali perturbazioni della distribuzione iniziale di densità segue poi la formazione delle strutture cosmiche attuali. Copyright ESA and the Planck Collaboration.*

Si presenta quindi la necessità di studiare l'evoluzione dell'Universo e viene in questo modo definito, seguendo la descrizione di Frisch, Matarrese, Mohayaee e Sobolevskii negli articoli [1], il *problema di ricostruzione*.

L'obiettivo di ricondursi alle condizioni iniziali, a partire da informazioni attuali, fa parte di una larga classe di *problemi inversi* della fisica e, per risolverlo, sono possibili due differenti approcci.

Il primo approccio, *the forward approach*, è un metodo empirico. Si propone un modello cosmologico che descriva la distribuzione di densità iniziale della materia oscura, tramite il quale, assumendo l'esistenza di un bias adeguato tra le distribuzioni di densità della materia oscura e delle galassie, è possibile ricavare una descrizione particellare del campo di densità iniziale. Si procede poi a far evolvere tramite la dinamica newtoniana la rappresentazione particellare del sistema (simulazione N-corpi) e si ferma la simulazione una volta trascorso l'intervallo di tempo voluto, dall'epoca primordiale ad oggi. Si ottiene in questo modo una ricostruzione dei dati osservabili. Si procede quindi a confrontare

statisticamente i dati simulati e osservati: se si è raggiunta una modellizzazione soddisfacente si considera risolto il problema, in caso contrario si procede a simulare nuovamente cambiando i parametri cosmologici. Tale approccio fornisce soluzioni uniche per le orbite delle particelle ma il fit con i dati osservabili è di natura puramente statistica.

Si preferisce quindi approcciarsi al problema con il secondo metodo, il metodo di ricostruzione. Quest'ultimo è basato sull'idea di partire da un fit esatto della distribuzione attuale delle galassie e risalire alla distribuzione di densità iniziale tramite l'inversione dell'evoluzione descritta dalla dinamica newtoniana. Poiché la gravità è temporalmente reversibile, conoscendo velocità e posizioni attuali, è in questo modo possibile ricavare le condizioni iniziali. Tale approccio non è però praticamente attuabile in quanto non si ha a disposizione un set completo di dati iniziali, essendo, per esempio, difficile stimare con precisione le velocità attuali delle galassie. Al posto delle velocità attuali si prende come vincolo la velocità iniziale poiché, a partire dalle osservazioni delle radiazioni cosmiche di fondo, la si può assumere nulla.

In questo modo si è delineato un problema di ricostruzione con condizioni al contorno miste.

Per risolvere tale problema, in cui una delle principali questioni è assicurare l'unicità delle orbite, vi sono numerosi possibili approcci. In questa tesi si tratta la possibilità di arrivare ad ottenere una soddisfacente ricostruzione del campo di densità iniziale e quindi si esploreranno e valuteranno dei metodi con tale obiettivo. Non vi è infatti un'unica soluzione ottimale al problema ma è necessario, in base alle specifiche necessità, valutare di volta in volta che linea di risoluzione conviene seguire.

La scelta di focalizzarsi sulla ricostruzione del campo di densità iniziale è data dal fatto che, a partire da questa, come verrà descritto nella sezione **2.2**, è possibile ottenere una buona ricostruzione delle *Baryonic Acoustic Oscillations* (BAO).

Le BAO sono fluttuazioni regolari e periodiche della materia barionica dell'Universo. Nello specifico sono onde acustiche generate da perturbazioni primordiali nel plasma fotone-barione.

Nel periodo cosmico antecedente alla ricombinazione l'Universo era infatti costituito da un plasma omogeneo ed uniforme all'interno del quale i fotoni interagivano con la materia per scattering Thomson. Successivamente, con l'espansione dell'Universo e il raffreddamento del plasma, gli elettroni e i protoni si ricombinano, formando atomi di idrogeno. In questo stadio la materia risulta trasparente poiché i fotoni interagiscono meno con la materia neutra, e quindi, al momento della ricombinazione, i fotoni si dissociano.

Si generano inoltre zone con maggiore contrasto di densità che, per interazione gravitazionale, attraggono la materia e, contemporaneamente, il calore delle interazioni tra la materia e fotoni crea una grande quantità di pressione verso l'esterno. Il contrasto gravità-pressione produce delle oscillazioni, analoghe alle onde sonore create nell'aria.

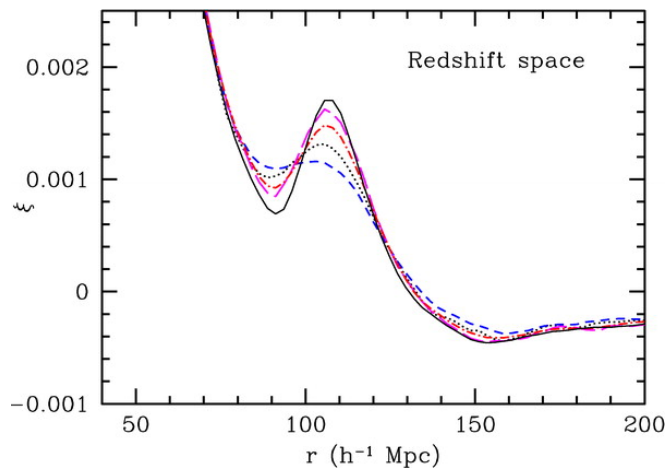
Tali onde sonore sferiche spostano barioni e fotoni verso l'esterno delle zone con maggior contrasto di densità mentre la materia oscura, che interagisce solo gravitazionalmente, rimane al centro dell'onda. Quando poi i fotoni si disaccoppiano dalla materia, rimuovendo così la pressione sul sistema, si stabilizza un guscio di materia barionica ad un raggio fisso. Tale raggio è chiamato orizzonte sonoro e continuerà ad attrarre materia per effetto gravitazionale. Ci si aspet-

terà quindi un maggior numero di galassie separate quanto l'orizzonte sonoro, rispetto a galassie separate da scale di lunghezza inferiori.

Le BAO giocano dunque un ruolo importante per le scale di misura dell'Universo (*standard ruler*) e la determinazione dei parametri cosmologici, ne consegue l'utilità di ricostruire i picchi delle oscillazioni acustiche barioniche.

A tal fine, e basandosi sul fatto che è possibile ricostruire i picchi delle BAO a partire dalla distribuzione di densità, si vuole esporre in questa tesi un metodo di ricostruzione della distribuzione di densità iniziale.

Ricavando infatti i picchi delle oscillazioni acustiche barioniche dalla distribuzione di densità attuale si ottengono misure poco precise in quanto questi risultano degradati dall'interazione gravitazionale. Al contrario, potendo ricostruire i picchi a partire dal campo di densità primordiale, si ottengono misure più soddisfacenti, da qui l'obiettivo della tesi.



**Figura 1.1:** da [6], si riportano i grafici della funzione di correlazione nello spazio dei redshift, in particolare ci si sofferma sul grafico in blu che rappresenta la funzione di correlazione per  $z = 0.3$  e in rosa la relativa funzione di correlazione a partire dalla densità ricostruita, utilizzando gli accorgimenti descritti nell'articolo da cui è tratta. Si nota come il picco della BAO trovato a partire dai dati osservati sia sensibilmente smussato mentre il picco ottenuto utilizzando il campo di densità iniziale, e quindi sfruttando i metodi di ricostruzione, sia notevolmente migliore. Per la spiegazione degli altri grafici riportati ci si riferisca all'articolo [6].

## Obiettivo della tesi

L'obiettivo di questa tesi è di esporre, scegliendo opportunamente tra più possibili approcci, una soluzione al problema di ricostruzione che garantisca di trovare in modo soddisfacente il campo di densità primordiale, così da poter ottenere, a partire da quest'ultima, una buona ricostruzione delle oscillazioni acustiche barioniche.

## Struttura della tesi

Il lavoro di tesi si articola in tre capitoli, nel primo verranno descritti due possibili approcci al problema di ricostruzione: il metodo variazionale, così come è stato presentato da Peebles negli articoli [2] e [3], e l'approssimazione di Zel'dovich, seguendo il formalismo descritto in [4], nel contesto delle equazioni di Eulero-Poisson. Verranno poi discusse problematicità e peculiarità dei due metodi, seguendo l'analisi di Susperregi e Binney in [5], così da giustificare la scelta, nel capitolo successivo, di implementare l'approccio euleriano.

Nel secondo capitolo si formalizzerà il problema di ricostruzione nel contesto euleriano, si spiegherà brevemente il metodo proposto da Eisenstein in [6] per la ricostruzione dei picchi delle BAO a partire dal campo di densità, e ci si soffermerà sui principali problemi di tale metodo. Con l'obiettivo di far fronte a tali problemi, si procederà a descrivere la soluzione al problema di ricostruzione del campo di densità iniziale tramite il metodo ZTRACE, esposto da Monaco e Efstathiou in [7], e i miglioramenti di quest'ultimo da parte di Hada ed Eisenstein presentati in [8].

Infine, dopo aver commentato la soluzione proposta in relazione ai problemi del metodo di Eisenstein, si esporranno le conclusioni nel terzo capitolo.

# Capitolo 1

## Il problema di ricostruzione

In questo capitolo in primo luogo si formalizza il metodo di ricostruzione così come fu affrontato da Peebles, il quale propose nel 1989 un approccio variazionale. Peebles fu il primo a proporre una soluzione al problema così come verrà di seguito presentata, aprendo di fatto la strada a successivi miglioramenti soprattutto per la criticità principale di tale metodo, la non unicità delle soluzioni.

Successivamente si descrive un altro possibile approccio nel quale ci si focalizza sulla risoluzione dell'equazione di Eulero sfruttando l'irrotazionalità del campo della velocità peculiare, assunzione giustificata dall'approssimazione Zel'dovich. Infine si concluderà la sezione con alcune valutazioni delle due modellizzazioni presentate così da giustificare la scelta del metodo descritto nel **Capitolo 2**, nel corso del quale si esporrà la soluzione del problema posto.

### 1.1 Il principio variazionale

Il principio variazionale (Action Variational Principle, AVP) mira a risolvere il problema di ricostruzione trovando le orbite che rendono stazionaria l'azione di Eulero-Lagrange tenendo conto della sola interazione gravitazionale.

Tale approccio, descritto da Peebles nell'articolo "*Tracing galaxy orbits back in time*" [2], risolve il problema con condizioni al contorno miste, ovvero si prefissa di trovare velocità finali, posizioni iniziali e orbite a partire dalla attuale posizione delle galassie e assumendo velocità peculiari iniziali nulle. In particolare Peebles, negli articoli [2] e [3], studia il problema di ricostruzione del Gruppo Locale con l'AVP tenendo conto degli effetti gravitazionali dei due gruppi più vicini.

Prima di descrivere nel dettaglio l'AVP è necessario precisare e giustificare le assunzioni adottate. Innanzitutto ci si pone in regime non relativistico, si assume inoltre che i campi di velocità e densità siano stati originati da fluttuazioni presenti nell'Universo primordiale e che l'evoluzione di questi avvenga in scale di tempo maggiori rispetto all'evolvere delle galassie, infine si trattano le galassie come masse puntiformi e traccianti della materia.

In particolare quindi si assume che la velocità peculiare iniziale  $v_0$  sia nulla, condizione che, unita alle posizioni attuali delle galassie, definisce il problema

hamiltoniano con condizioni al contorno miste.

L'approssimazione di considerare le galassie come oggetti puntiformi penalizza tale metodo soprattutto in scale di tempo prossime all'Universo primordiale. Si assume infatti che l'Universo fosse in origine formato da una distribuzione di materia pressochè omogenea. Inoltre, considerare che la materia sia tracciata dalle galassie, esclude un eventuale componente di materia non visibile.

Tali approssimazioni possono però essere comunque considerate valide alla luce dei risultati riportati nell'articolo "*The gravitational instability picture and the formation of the local group*" [3], nel quale si analizza il funzionamento dell'AVP nello studio della formazione del Gruppo Locale e dal quale emerge che le assunzioni precedentemente descritte non penalizzano sensibilmente la risoluzione del problema.

Si procede quindi a descrivere il metodo variazionale rifacendosi alla notazione degli articoli [2] e [3], si definisce la Lagrangiana che descrive la dinamica del sistema [4], per poi ricavarne l'azione e quindi procedere a trovare le orbite che la rendono stazionaria.

A partire dalla legge di Newton per la singola particella di massa  $m$  ci si pone in coordinate fisiche  $r$ , ovvero inerziali rispetto all'espansione del background, le quali sono espresse in funzione delle coordinate comoventi  $x$  attraverso le equazioni

$$r = a(t)x \quad \ddot{r} = -\nabla_r \Phi(x, t) \quad (1.1)$$

dove il potenziale gravitazionale è esprimibile tramite l'equazione di Poisson in funzione della costante gravitazionale  $G$  e della densità  $\rho$  come  $\nabla_r^2 \Phi(x, t) = 4\pi G\rho$  e dove si denota con  $a(t)$  il fattore di scala, di cui si omette di seguito la dipendenza dal tempo  $t$  sia per semplicità di notazione, sia perché poi verrà di fatto considerato al posto della variabile tempo, poiché nel setting in cui ci si pone risulta preferibile riferirsi a tale parametro in quanto è indice di "quanto tempo è trascorso dal Big Bang".

Ricordando inoltre che le coordinate fisiche  $r$  possono essere espresse in coordinate comoventi

$$\dot{r} = \dot{a}x + a\dot{x} \equiv H(t)r + v \quad (1.2)$$

dove  $H(t)$  è il parametro di Hubble e  $v$  la velocità peculiare, si può scrivere la Lagrangiana nelle coordinate comoventi

$$L(\dot{x}, x, t) = \frac{m}{2} (\dot{a}x + a\dot{x})^2 - m\Phi(x, t). \quad (1.3)$$

Effettuando poi la trasformazione canonica

$$\tilde{L}(\dot{x}, x, t) \longrightarrow L(\dot{x}, x, t) - \frac{d\psi(x, t)}{dt} \quad \psi = \frac{1}{2}ma\dot{a}x^2 \quad (1.4)$$

e, tenendo conto che per il principio di Hamilton il fattore  $\frac{d\psi(x, t)}{dt}$  non contribuisce al calcolo della variazione dell'azione, si ottiene la Lagrangiana

$$L(\dot{x}, x, t) = \frac{m}{2} (a^2\dot{x}^2 - a\dot{a}x^2) - m\Phi(x, t). \quad (1.5)$$

Passando infine ad un sistema di  $N$  particelle e tenendo conto dell'equazione di Friedmann, si ottiene l'azione  $S = \int_0^{t_0} L(\dot{x}, x, t) dt$

$$S(\dot{x}, x, t) = \int_0^{t_0} dt \left[ \sum_i \frac{m_i a^2}{2} \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \frac{G}{a} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|} + \frac{2}{3} \pi G \rho_b a^2 \sum_i x_i^2 \right] \quad (1.6)$$

dove  $\rho_b(t)$  è la densità media di massa.

Ci si pone quindi nelle ipotesi di Universo spazialmente piatto e pressione nulla e si considerano le condizioni al contorno precedentemente giustificate

$$\delta x_i = 0 \text{ per } t = t_0 \forall i \quad a^2 \frac{dx_i}{dt} \rightarrow 0 \text{ per } a \rightarrow 0 \forall i \quad (1.7)$$

e si ricavano le equazioni del moto annullando la variazione infinitesima dell'azione

$$\delta S(\dot{x}, x, t) = \int_0^{t_0} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right] = 0. \quad (1.8)$$

Esplicitando il termine

$$\int_0^{t_0} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right] = \int_0^{t_0} dt \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i \right] \quad (1.9)$$

(1.8) risulta

$$\begin{aligned} \delta S = \sum_i \int_0^{t_0} dt \delta x_i \left[ -\frac{d}{dt} \left( m_i a^2 \frac{dx_i}{dt} \right) + \frac{4}{3} \pi m_i G \rho_b a^2 x_i + \frac{G m_i}{a} \sum_{j, j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3} \right] \\ + \sum_i \left[ m_i a^2 \delta x_i \frac{dx_i}{dt} \right]_0^{t_0} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

dove l'ultimo termine si annulla imponendo le condizioni (1.7).

Secondo il modello di Peebles, le orbite delle galassie sono, per ogni componente spaziale  $\alpha = 1, 2, 3$ , della forma

$$x_i^\alpha(t) = x_i^\alpha(t_0) + \sum_n C_{i,n}^\alpha f_n(t) \quad (1.11)$$

dove  $f_n(t)$  sono arbitrarie funzioni prova continue e differenziabili che soddisfano le condizioni (1.7).

In particolare nel primo articolo Peebles utilizza le funzioni prova

$$f_n(a) = a^n (1 - a) \quad \text{con } 0 \leq n \leq N - 1 \quad (1.12)$$

(simili risultati, ma con convergenza più lenta, si trovano per funzioni prova del tipo  $f_0(a) = \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)$ ,  $f_n(a) = \sin\left(\frac{\pi n a}{2}\right)$ ).

Nel secondo articolo viene invece utilizzata la distribuzione di Bernoulli, per alleggerire il carico computazionale.

Sostituendo quindi in (1.11)

$$f_n(a) = \left(1 - \frac{a}{a_0}\right)^{s-n} \left(\frac{a}{a_0}\right)^n \left[ \frac{s!}{n!(s-n)!} \right] \quad \text{con } 0 \leq n < s \quad (1.13)$$

dove  $a_0$  è valore attuale del parametro di espansione  $a(t)$ , si ottengono le orbite delle galassie  $x_i^\alpha(a, C_{i,n}^\alpha)$  in funzione dei coefficienti  $C_{i,n}^\alpha$  e del fattore di scala, in sostituzione della variabile  $t$ .

Si procede infine ad individuare i coefficienti  $C_{i,n}^\alpha$  che rendono stazionaria la variazione infinitesima dell'azione ovvero che soddisfano

$$\frac{\partial S}{\partial C_{i,n}^\alpha} = 0 \quad (1.14)$$

dove

$$\frac{\partial S}{\partial C_{i,n}^\alpha} = \sum_i m_i \int_0^{t_0} dt f_n(t) \left[ -\frac{d}{dt} a^2 \frac{dx_i^\alpha}{dt} + \frac{4}{3} \pi G \rho_b a^2 dx_i^\alpha + \frac{G}{a} \sum_{j,j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3} \right]. \quad (1.15)$$

Quest'ultima equazione può essere espressa in funzione del fattore di scala esprimendo l'intervallo di tempo, sotto ipotesi di Universo spazialmente piatto e con massa costante, attraverso

$$H dt = \sqrt{\frac{a}{[\Omega + a^3(1 - \Omega)]}} da \quad (1.16)$$

dove  $\Omega$  e  $H$  sono rispettivamente i valori attuali del parametro di densità di massa e della costante di Hubble e il valore attuale del parametro di espansione  $a(t)$  è  $a_0 = a(t_0) = 1$ .

Come direzione di ricerca per minimizzare l'azione, Peebles utilizza l'opposto del gradiente di  $S$  con incrementi

$$m_i \delta C_{i,n}^\alpha \propto -\frac{\partial S}{\partial C_{i,n}^\alpha} \quad (1.17)$$

dove il primo fattore cancella  $m_i$  nell'equazione (1.15) così da rendere il metodo applicabile nel limite di orbite di particelle senza massa.

In questo modo quindi, a partire dalla posizione attuale delle galassie e assumendo nulle le velocità iniziali, è possibile predire in maniera soddisfacente le orbite della maggior parte dei membri del Gruppo Locale.

Nell'articolo [3] viene infatti discussa la validità dell'Action Variational Principle a partire dallo studio della formazione del Gruppo Locale. In prima approssimazione si constata che il metodo, così come è stato esposto, ricostruisce in maniera soddisfacente gran parte delle orbite del Gruppo Locale mentre fallisce per alcune di esse. Una successiva implementazione del metodo, che corregge tali imprecisioni, mira a studiare le orbite che stazionizzano l'azione ma che non per forza la minimizzano. Risolvendo infatti l'equazione

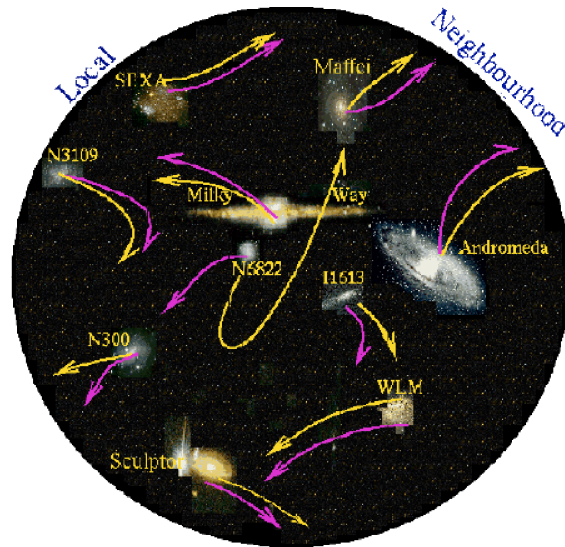
$$0 = \frac{\partial S}{\partial C_{i,n}^\alpha} + \sum_{j,m,\beta} \delta C_{j,m}^\beta \frac{\partial^2 S}{\partial C_{i,n}^\alpha \partial C_{j,m}^\beta} \quad (1.18)$$

si includono i punti di sella che permettono di descrivere le orbite di passaggio. In [3] si studia inoltre l'efficienza del metodo al variare dei parametri cosmologici. Le soluzioni del problema di ricostruzione, infatti, dipendono anche dalla scelta dei parametri cosmologici e quindi, tramite l'AVP, è possibile cercare stime

realistiche di questi ultimi in modo da ottenere un buon accordo tra le orbite stimate e quelle attese.

Risulta però evidente che tale metodo non è efficiente per galassie che si trovano ad un redshift maggiore rispetto al Gruppo Locale. L'Action Variational Principle infatti assicura l'unicità delle soluzioni solo se si conosce con sufficiente precisione l'attuale posizione delle galassie.

La possibilità di avere indeterminazione delle orbite può essere causata da più fattori, in primo luogo la mancanza di un vincolo per le posizioni iniziali provoca un'indeterminazione con la conseguente necessità di conoscere le velocità peculiari per poter scegliere tra le possibili soluzioni che minimizzano l'azione. Non essendo però facile la stima delle velocità peculiari non si è in grado di individuare l'orbita corretta. Vi è inoltre il vincolo computazionale posto dalla discretizzazione nella risoluzione dell'integrale (1.15) ma, anche ottimizzando tale aspetto scegliendo un algoritmo adatto, si viene comunque incontro alla difficoltà fisica del problema, la presenza di multistreaming. L'evoluzione della Cold Dark Matter (CDM) come fluido non collisionale senza dispersione di velocità è infatti caratterizzata dalla formazione di regioni collassate in cui la velocità non è univocamente definita.



**Figura 1.1:** da [1], schematica rappresentazione della ricostruzione delle traiettorie dei gruppi vicini, effettuata da Peebles, utilizzando l'Action Variational Principle. In molti casi sono presenti più traiettorie possibili: le orbite tracciate in rosa corrispondono alle soluzioni trovate considerando il minimo dell'azione mentre le orbite in giallo sono ottenute a partire dai punti di sella. Si noti in particolare la differenza tra le possibili orbite della galassia N6822 per la quale a priori non è possibile stabilire se attraversi o meno il Gruppo Locale. Considerando le velocità peculiari osservate è da preferire l'orbita in giallo, secondo la quale la galassia N6822 attraversa il Gruppo Locale.

## 1.2 L'approssimazione Zel'dovich

Un approccio alternativo al metodo variazionale è quello che si basa sull'attesa irrotazionalità del campo della velocità peculiare nel risolvere le equazioni di Eulero-Poisson. Verrà di seguito esposta l'approssimazione di Zel'dovich nella dinamica non lineare di particelle non collisionali autogravitanti [4].

L'assunzione di poter descrivere il campo di velocità come gradiente di un potenziale scalare è valida sotto l'approssimazione di Zel'dovich, in regime quasi lineare ( $\frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} \leq 1$ ).

Assumendo tali ipotesi e ponendosi nel modello di Universo Einstein-de Sitter ( $k = 0$ ,  $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ ), la dinamica del sistema è descritta dalle equazioni di Eulero-Poisson

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_r + \nabla_r(\rho w) &= 0 && \text{conservazione massa} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_r + (w \cdot \nabla_r) w &= -\nabla_r \Phi(r, t) && \text{conservazione momento} \\ \nabla_r^2 \Phi(r, t) &= 4\pi G \rho && \text{equazione di Poisson} \end{aligned} \quad (1.19)$$

passando poi dalle coordinate fisiche alle coordinate comoventi, dove  $w \equiv \dot{r}$  e  $v \equiv a\dot{x}$  e, definendo a partire da (1.1) e (1.2),

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_r = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x - Hx \cdot \nabla_x \quad \nabla r = \frac{1}{a} \nabla x \quad (1.20)$$

si separano i termini di background da quelli peculiari attraverso la sostituzione

$$\rho = \rho_b + \delta\rho \quad \Phi = \Phi_b + \phi \quad (1.21)$$

e si ottiene il nuovo sistema in coordinate comoventi e senza i termini di background, in quanto danno contributo nullo <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_x + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla_x \cdot (\rho v) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_x + Hv + \frac{1}{a} (v \cdot \nabla_x) v &= -\frac{1}{a} \nabla_x \phi(x, t) \\ \nabla_r^2 \phi(x, t) &= 4\pi G a^2 \delta\rho. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Si introducono infine le nuove variabili

$$\begin{aligned} \eta &:= \frac{\rho}{\rho_b} = 1 + \delta \\ u &:= \frac{dx}{da} = \frac{v}{a\dot{a}} \\ \varphi(x, t) &:= \frac{3t_*^2}{2a_*^3} \phi(x, t) \quad a(t) = a_* \left( \frac{t}{t_*} \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

<sup>1</sup>Dall'equazione di Friedmann e osservando che  $\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2$  si ottiene

$$\left( \dot{H} + H^2 \right) r + \frac{3}{4} \pi G \rho_b r = 0.$$

e le equazioni (1.19) assumono la nuova forma esatta

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Da} + \frac{3}{2a}u &= -\frac{3}{2a}\nabla_x\varphi \\ \frac{D\eta}{Da} + \eta\nabla_x \cdot u &= 0 \\ \nabla_x^2\varphi &= \frac{\delta}{a}\end{aligned}\tag{1.24}$$

dove si definisce la derivata convettiva

$$\frac{D}{Da} \equiv \frac{\partial}{\partial a} + u \cdot \nabla_x.\tag{1.25}$$

L'approssimazione introdotta da Zel'dovich consiste quindi nell'assumere

$$\frac{Du}{Da} = 0\tag{1.26}$$

ovvero, anche in regime non lineare, Zel'dovich considera valida l'espressione della velocità come gradiente di un potenziale scalare  $u \equiv \nabla_x\varphi_u$  dove, in approssimazione lineare, risulta  $\varphi_u = -\varphi$  e quindi  $u = -\nabla_x\varphi$ .

Tale espressione della velocità deriva infatti dalla soluzione ottenuta linearizzando (1.19) e l'assunzione di Zel'dovich è giustificata dal fatto che, ponendosi nello spazio di Fourier, emerge

$$\varphi_k \propto \frac{\delta_k}{k^2} \quad u_k \propto k\varphi_k \propto \frac{\delta_k}{k}\tag{1.27}$$

ovvero che la velocità evolve con un regime lineare per tempi più lunghi rispetto alle fluttuazioni della densità di materia  $\delta_k$ , grazie al peso di  $k^{-1}$ .

Si ottengono quindi le nuove equazioni utilizzate da Zel'dovich per descrivere la dinamica di particelle non collidenti sotto la sola azione gravitazionale, valide in regime quasi lineare

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Da} &= 0 \\ \frac{D\eta}{Da} + \eta\nabla_x \cdot u &= 0\end{aligned}\tag{1.28}$$

dove l'equazione di Poisson  $\nabla_x^2\varphi = \frac{\delta}{a}$  verrà utilizzata solo per determinare le condizioni iniziali.

In particolare, dalla prima equazione di (1.28) si ottiene un moto non accelerato  $u(x, a) = u_0(q)$  dove  $u_0$  è la velocità iniziale, ovvero la velocità all'istante  $a(t) = a_0$  della particella di posizione lagrangiana  $q$  che al tempo  $a(t)$  si trova nella posizione euleriana <sup>2</sup>  $x$ .

Integrando ulteriormente la prima equazione di (1.28) si ottiene la soluzione dell'equazione di Eulero

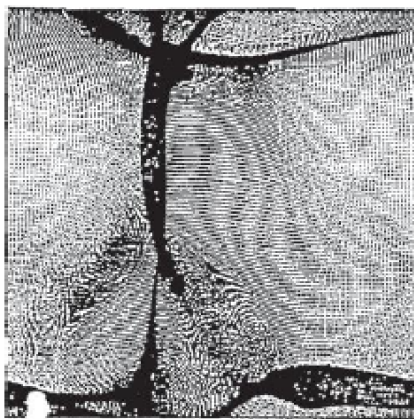
$$x(q, a) = q + (a - a_0)u_0(q) = q - (a - a_0)\nabla_q\varphi_0(q) \quad u(x(q, a), a) = \frac{x - q}{a}.\tag{1.29}$$

<sup>2</sup>Con posizioni lagrangiane si fa riferimento alle coordinate comoventi con il flusso mentre con posizioni euleriane si intendono le coordinate fisse nello spazio.

Infine, a partire dall'espressione nota del campo di velocità, è possibile risolvere la seconda equazione di (1.28) trovando la distribuzione di densità al generico istante  $a(t)$ , in particolare è quindi possibile ricavare la distribuzione iniziale.

Analizzando la soluzione trovata per l'evoluzione del campo di densità si può notare che tale metodo risulta una modellizzazione realistica del problema in quanto prevede l'alta probabilità di formazione di caustiche, zone in cui la densità è singolare, e dunque la formazione di galassie. Dal punto di vista matematico la formazione di caustiche è dovuta al fatto che una o più soluzioni lagrangiane arrivano ad una stessa posizione euleriana all'istante  $a(t)$  con la conseguenza che la mappa  $q \mapsto x$  non risulta più biiettiva.

L'approssimazione Zel'dovich, entro i limiti per cui è valida, risulta quindi un buon approccio per risolvere il problema di ricostruzione al di fuori delle regioni collassate.



**Figura 1.2:** da [4], sezioni 2D della distribuzione 3D di materia secondo l'approssimazione di Zel'dovich, in particolare si evidenzia la formazione di caustiche.

### 1.3 Considerazioni

Si procede ora a commentare, seguendo l'analisi riportata in [5], gli approcci precedentemente descritti: il metodo lagrangiano e il metodo euleriano.

Si vuole infatti giustificare perché, nel setting del metodo descritto nel **Capitolo 2**, si preferisca implementare la risoluzione delle equazioni di Eulero considerando l'approssimazione di Zel'dovich.

Nel risolvere il problema di ricostruzione si è portati ad assumere in primo luogo che velocità e densità cosmologiche evolvano su scale di tempo molto maggiori rispetto all'evolvere delle singole galassie per interazione gravitazionale e, in secondo luogo, che la struttura delle galassie, così come sono distribuite ad oggi, sia dovuta a fluttuazioni trascurabili del campo di densità all'epoca primordiale. Dalla seconda considerazione Peebles imposta l'AVP come problema hamiltoniano a condizioni al contorno miste, ma da tali assunzioni emerge anche il fatto che, analizzando il campo di densità e di velocità peculiare, una volta definito uno dei due anche l'altro risulta definito dai vincoli posti sulle condizioni pri-

mordiali.

Inoltre, nel risolvere il problema di ricostruzione, hanno rilevanza le posizioni e le velocità peculiari attuali delle galassie. Tale fatto risulta penalizzante in quanto è difficile conoscere con precisione posizione o velocità peculiare delle galassie, soprattutto a grandi redshift. Tale aspetto, come precedentemente osservato, indebolisce in particolare il metodo di Peebles rendendo impossibile scegliere con certezza l'orbita corretta di alcune galassie.

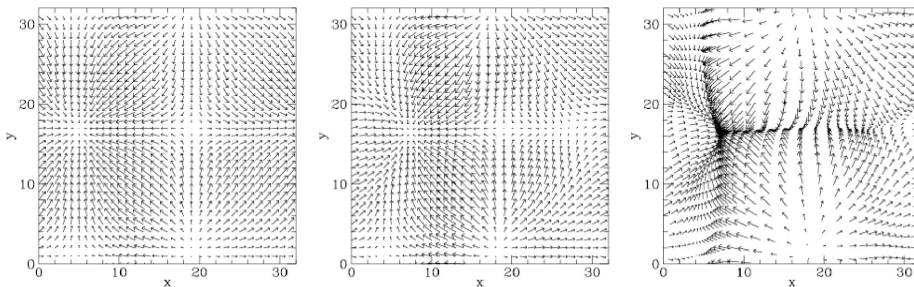
Ponendosi poi nell'ottica di questa tesi, ovvero di affrontare il problema come studio dell'evoluzione del campo di densità, risulta penalizzante l'approssimazione dell'AVP di considerare le galassie, trattate come oggetti puntiformi, come traccianti della materia. Tale assunzione porterebbe infatti a modellizzare quest'ultima in modo discreto, in contrasto con quanto ci si aspetta dalla distribuzione di densità primordiale, considerata omogenea.

Avendo come obiettivo studiare l'evoluzione, a ritroso, del campo di densità, risulta quindi preferibile porsi nel setting euleriano il quale, secondo Mikel Susperregi e James Binney [5], è da preferirsi per i seguenti motivi:

1. Il campo vettoriale di velocità può essere espresso come gradiente di un potenziale scalare, quindi di fatto il problema si riduce alla ricerca di due campi scalari.
2. L'equazione di Poisson fornisce una facile relazione tra il campo di gravità e  $\delta$ , collegandolo quindi ad uno dei due campi incogniti.
3. Gli attuali valori dei campi euleriani sono più facilmente riducibili da osservazioni incomplete e soggette ad errori.

Come precedentemente sottolineato, il principale problema a cui si va incontro utilizzando l'approccio euleriano è che il campo di densità diverge alla formazione di caustiche.

Alla luce dell'analisi riportata, a partire dalle osservazioni di Susperregi e Binney [5], emerge l'evidenza che sia preferibile ottimizzare la risoluzione del problema tramite l'approssimazione di Zel'dovich, mentre è preferibile utilizzare l'approccio variazionale limitatamente a quanto sopra descritto.



**Figura 1.3:** da [5] si riportano i campi di velocità relativi al campo di densità. A destra è rappresentato il campo relativo alla densità attuale, al centro il campo relativo alla ricostruzione della densità primordiale, a sinistra il campo predetto applicando l'approssimazione di Zel'dovich al campo iniziale.



## Capitolo 2

# Ricostruzione del campo di densità

In questo capitolo si espone la soluzione del problema posto attraverso il metodo introdotto da Monaco ed Efstathiou [7] e i miglioramenti di quest'ultimo apportati da Hada ed Eisenstein [8].

Come anticipato, ci si vuole focalizzare sulla ricostruzione del campo di densità, quindi, alla luce delle considerazioni del capitolo precedente, si implementerà l'approccio euleriano.

Nella prima sezione si introdurrà formalmente il problema con la notazione di [7] e [8] e si procederà nella seconda sezione a descrivere brevemente e a commentare la ricostruzione standard delle oscillazioni acustiche barioniche, a partire dal campo di densità primordiale ricostruito.

In seguito, con il fine di far fronte ai problemi della ricostruzione standard, verrà descritto il metodo ZTRACE e ci si focalizzerà, nella penultima sezione, sui miglioramenti di tale metodo iterativo.

Infine si concluderà il capitolo valutando la validità del metodo esposto.

### 2.1 Formulazione del problema

L'evoluzione di un fluido autogravitante può essere descritta dalla dinamica lagrangiana dei fluidi. Seguendo tale approccio la variabile dinamica è lo spostamento  $S$  che mappa le paricelle dalla posizione lagrangiana iniziale  $q$  alla posizione euleriana finale  $x$

$$x(q, t) = q + S(q, t) \quad (2.1)$$

riscrivendo le equazioni di Eulero-Poisson (1.19) in funzione dello spostamento, si ottengono equazioni non lineari in  $S$  ma, con l'obiettivo di risolvere il sistema con il metodo perturbativo, si esplicitano i primi due termini dell'espansione. Il termine lineare risulta

$$\nabla_q \cdot S^{(1)}(q) = -\delta_l(q) = -\frac{D(t)}{D(t_i)} \delta(t_i, q) \quad (2.2)$$

e in particolare tale relazione, dove si è denotato con  $\delta_l$  il contrasto lineare della densità di materia, con  $\delta(t_i) = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$  il contrasto di densità iniziale e con

$D$  il fattore di crescita lineare, corrisponde all'approssimazione di Zel'dovich in quanto si sta assumendo che la mappa di  $S$  sia irrotazionale.

Il termine dell'espansione al secondo ordine, espresso in funzione del termine lineare, risulta

$$\nabla_q \cdot S^{(2)}(q) = -\frac{3}{14} \Omega_m^{\frac{1}{143}} \left( S_{a,a}^{(1)} S_{b,b}^{(1)} - S_{a,b}^{(1)} S_{b,a}^{(1)} \right) \quad (2.3)$$

dove  $\Omega_m$  è il parametro di densità di materia, dipendente dal tempo, e dove si è denotato con  $S_{i,j} := \frac{\partial S_i}{\partial q_j}$ .

La velocità peculiare della particella con coordinata lagrangiana  $q$  è, in funzione dello spostamento  $S$ ,

$$v(q, t) = a \frac{dS}{dt} = a \frac{dD}{dt} \frac{dS}{dD} = \frac{dD}{dt} \frac{a}{D} \left( S^{(1)} + 2S^{(2)} + \dots \right) \quad (2.4)$$

con  $a(t)$  fattore di scala normalizzato ( $a(t_0) = 1$ ).

In un sistema di riferimento centrato sull'osservatore la coordinata  $s$  dello spazio dei redshift <sup>3</sup> è definita come

$$s(q, t) = x(q, t) + \frac{1}{aH} [v(q, t) \cdot \hat{z}] \hat{z} \quad (2.5)$$

dove  $H(t)$  è il parametro di Hubble e  $\hat{z}$  è il vettore unitario diretto lungo la direzione di vista.

È poi possibile definire lo spostamento  $S^s$  nello spazio dei redshift a partire da

$$s(q, t) = q + S^s(q, t) \quad (2.6)$$

e, sostituendo in (2.6) le relazioni precedentemente trovate, si ottiene

$$S^s(q, t) = S^{(1)} + S^{(2)} + \dots + f \left[ \left( S^{(1)} + S^{(2)} + \dots \right) \cdot \hat{z} \right] \hat{z} \quad (2.7)$$

con  $f = \frac{d \ln D}{d \ln a}$  tasso di crescita lineare solitamente approssimato come  $f \simeq \Omega^{0.6}$ . In particolare in [7] si nota che  $S^s$  può essere rotazionale anche se  $S$  non lo è. Dall'equazione di continuità si può inoltre esplicitare il contrasto di densità in funzione dello spostamento  $S$

$$\det [\delta_{ab}^K + S_{a,b}] = \frac{\rho(q)}{\rho(x)} = \frac{1}{1 + \delta(x)} \quad (2.8)$$

dove  $\delta_{ab}^K$  è la delta di Kronecker e  $\delta(x) = \frac{\rho(x)}{\bar{\rho}}$  è il contrasto di densità di materia in funzione delle coordinate euleriane  $x$ . Nella seconda uguaglianza di (2.8) si è sfruttato il fatto che il contrasto di densità al tempo iniziale può essere trascurato:  $\rho(q) = \bar{\rho}$ .

Usando poi gli invarianti principali  $\mu_i(S)$  del tensore delle derivate prime di  $S$  è possibile esplicitare il determinante sulla sinistra come

$$\det [\delta_{ab}^K + S_{a,b}] = 1 + \mu_1(S) + \mu_2(S) + \mu_3(S) \quad (2.9)$$

dove  $\mu_1(S) = S_{a,a} = \nabla \cdot S$ ,  $\mu_2(S) = \frac{S_{a,a} S_{b,b} - S_{a,b} S_{b,a}}{2}$  e  $\mu_3(S) = \det(S_{a,b})$ . Si nota inoltre che considerando i campi rotazionali si ha  $S_{a,b} \neq S_{b,a}$  ma l'equazione

<sup>3</sup>Lo spazio dei redshift è definito come lo spazio, in coordinate angolari, dove come distanza si usa il redshift misurato.

(2.9) è valida indipendentemente dal fatto che  $S$  sia irrotazionale o meno. Inserendo l'equazione (2.7) nell'equazione (2.8) e notando da (2.2) che  $\mu_1(S) = -\delta_l$ , si ottiene la seguente identità

$$\delta_l(q, t) = \left[ \frac{\delta_s}{1 + \delta_s} - \mu_1(S^1) + \mu_1(S^s) + \mu_2(S^s) + \mu_3(S^s) \right] \quad (2.10)$$

dove  $\delta_s$  è il contrasto di densità nello spazio dei redshift, da distinguere dal contrasto di densità dello spazio reale  $\delta_x$ .

La serie perturbativa si interrompe quando (2.1) o (2.6) non sono univocamente definite. Nello spazio reale questo corrisponde alla formazione di caustiche e quindi, in ambito lagrangiano, al fenomeno di multistreaming. Nello spazio dei redshift possono essere presenti problemi analoghi a quelli generati dal multistreaming, dovuti dalla distorsione dello stesso spazio dei redshift. In particolare, problematicità nello spazio dei redshift si traducono in indeterminazioni delle condizioni in input, e quindi compromettono in partenza i risultati.

Ponendosi nel limite lineare ci si può dunque riferire alle equazioni sopra riportate e, considerando spostamenti infinitesimi e assumendo che spostamenti tra spazio lagrangiano ed euleriano diano un contributo del secondo ordine alla densità così da poter trascurare le differenze tra i due, il contrasto di densità nello spazio reale risulta

$$\delta_x = -\frac{\nabla \cdot v}{aHf} \quad (2.11)$$

mentre nello spazio dei redshift il contrasto di densità risulta

$$\delta_s = \delta_x + Df \nabla \cdot [(\nabla \varphi \cdot \hat{z}) \hat{z}] \quad (2.12)$$

dove  $\varphi(q)$  è una versione riscalata del potenziale gravitazionale peculiare iniziale tale che  $\nabla^2 \varphi(q) = \frac{\delta(q, t_i)}{D(t_i)}$ .

Infine viene introdotta la relazione tra il campo di densità reale e lo spazio dei redshift. Nel regime lineare è possibile esprimere il campo di densità dello spazio dei redshift nello spazio di Fourier  $\tilde{\delta}_s^g$  in funzione del campo di densità nello spazio reale  $\tilde{\delta}^g$  tramite la formula di Kaiser. La modellizzazione di Kaiser traduce la deformazione a grande scala come uno schiacciamento delle strutture lungo la linea di vista

$$\tilde{\delta}_s^g = (1 + \beta \mu^2) \tilde{\delta}^g(k) \quad (2.13)$$

dove  $\mu = \frac{k_z}{k}$ , ovvero è il coseno dell'angolo fra la direzione di vista e il vettore d'onda  $k$ , e  $\beta$ , definito a partire dal bias lineare delle galassie <sup>4</sup>  $b$  e il tasso di crescita  $f$ , è dato da  $\beta = \frac{f}{b}$ .

---

<sup>4</sup>Ponendosi in approssimazione lineare, il campo di densità delle galassie può essere espresso in funzione della distribuzione di densità della materia come  $\delta_g = b\delta$ .

## 2.2 Metodo standard

L'originale metodo di ricostruzione delle oscillazioni acustiche barioniche, a cui si fa riferimento in questa tesi denotandolo con *metodo standard*, fu introdotto in [6] da Eisenstein.

In questa sezione si vuole riassumere brevemente come il metodo standard preveda la ricostruzione delle BAO a partite dal campo di densità primordiale ricostruito. Si porrà poi particolare attenzione ai punti critici del metodo standard, punti critici che si è cercato di correggere con il metodo descritto nelle sezioni successive.

Usando l'equazione (2.13) si può riassumere la tecnica di ricostruzione standard attraverso i passaggi di seguito descritti. In primo luogo si usa nell'equazione (2.2) il campo di densità finale delle galassie  $\delta_s^g$  al posto del campo di densità lineare della materia  $\delta_l$ , si può stimare quindi il campo di spostamento  $S^{(1)}$  nello spazio di Fourier come

$$\tilde{S}_{st}^{(1)}(k) = \frac{ik}{k^2} \frac{\tilde{\delta}_s^g(k)}{b(1 + \beta\mu^2)} G(k) \quad (2.14)$$

dove  $G(k)$  è il filtro smussante solitamente definito come

$$G(k) = e^{-0.5k^2\Sigma^2} \quad (2.15)$$

con  $\Sigma$  scala di smussamento.

Si dispongono le galassie con  $-S_{st}^{(s)} = -S_{st}^{(1)} - f(S_{st}^{(1)} \cdot \hat{z})\hat{z}$  (si è riadattata l'equazione (2.7)) così da formare il campo di spostamento delle galassie  $D$ , e si dispongono delle particelle casuali, distribuite uniformemente, con  $-S_{st}^{(1)}$ , così da formare il campo di spostamento casuale  $S$ .

Si procede infine a calcolare la funzione di correlazione, ovvero la probabilità di trovare due galassie ad una data distanza. Per stimare la funzione di correlazione ricostruita  $\xi_{st}$ , ovvero relativa al campo di densità iniziale, si sceglie la stima di Landy-Szalay [11]

$$\xi_{st} = \frac{DD - 2DS + SS}{SS} \quad (2.16)$$

dove  $DS$  ecc. sono il numero di coppie ad una data distanza tra i due set di punti,  $D$  ed  $S$  nel caso riportato.

Dalla funzione di correlazione è poi possibile valutare i picchi delle BAO.

La funzione gaussiana definita in (2.15) viene applicata per eliminare grandi contrasti di densità corrispondenti a modi di piccola scala e per ridurre gli effetti di shell-crossing. Questo accorgimento comporta la perdita di informazioni per gli spostamenti di scala inferiore a  $\Sigma$  ma ci si aspetta che la degenerazione dei picchi delle oscillazioni acustiche barioniche sia data da effetti di grande scala.

Il metodo standard è dunque una semplice tecnica per ricostruire la funzione di correlazione primordiale, e quindi i picchi delle oscillazioni acustiche barioniche. Ci sono però alcuni aspetti che necessitano di essere migliorati:

1. L'utilizzo del campo di densità finale al posto del campo di densità iniziale nel metodo perturbativo. Il metodo standard infatti utilizza nell'equazione (2.14) il campo di densità delle galassie finale al posto del campo di

densità iniziale per stimare lo spostamento. Sarebbe preferibile utilizzare un metodo che relaziona lo spostamento con il campo di densità iniziale.

2. Il fatto che ci si limita ad un metodo perturbativo del primo ordine: nel metodo standard si tiene conto solo del primo ordine perturbativo per stimare lo spostamento  $S$ . L'approssimazione di Zel'dovich descrive esattamente l'evoluzione non lineare di una perturbazione unidimensionale; utilizzando ordini perturbativi più alti si migliora la modellizzazione dinamica di un campo di densità asimmetrico e quindi maggiormente realistico.
3. La modellizzazione della distorsione del campo dei redshift. Finché si considera solo il primo ordine perturbativo la formula di Kaiser (2.13) è esatta. Si è però notato un andamento che devia dalla formula di Kaiser anche a grandi scale a causa delle alte dispersioni di velocità.
4. Mancato riscontro del moto dei dati e delle particelle casuali. Nel secondo step del metodo standard i dati osservati e le particelle casuali vengono spostati con diversi campi di spostamento per rimanere coerenti con la modellizzazione di Kaiser delle distorsioni del campo dei redshift. Non è però detto che tale accorgimento riproduca correttamente la distorsione dello spazio dei redshift. Si preferisce quindi un metodo che muova direttamente il campo di densità  $\delta$ , o equivalentemente muova assieme i dati e le particelle casuali.

Con il fine di risolvere tali problemi si procede alla ricostruzione del campo di densità iniziale attraverso il metodo ZTRACE e i miglioramenti proposti da Hada ed Eisenstein.

## 2.3 Metodo ZTRACE

Dato un campo di densità in una griglia dello spazio dei redshift che è evoluto nel tempo in modo omogeneo, si vuole ottenere il campo di densità iniziale  $\delta_l$  che evolvendo risulti il campo di densità in input.

L'inversione diretta delle equazioni riportate nella sezione iniziale è proibitiva ma, sfruttando l'equazione (2.10), è possibile definire un metodo iterativo per ricostruire il campo di densità iniziale.

La prima stima per il contrasto di densità lineare può essere data da  $\frac{\delta_s}{1+\delta_s}$ , dove  $\delta_s$  è il contrasto di densità nello spazio dei redshift. Avendo tale prima stima, e quindi la prima stima del campo di densità iniziale, è possibile ricavare la mappa  $S$  nello spazio reale e dei redshift utilizzando (2.2) e (2.3) e, successivamente, da (2.10), è possibile stimare un nuovo candidato per la densità lineare. È quindi possibile reiterare tali passaggi fino alla convergenza del metodo.

Il campo di densità in input deve essere reso il più omogeneo possibile per eliminare alti contrasti di densità e regioni con orbite collassate dove ci si aspetta che il metodo non funzioni.

È necessario notare che mentre il campo di densità in input  $\delta_s$  è dato in una griglia regolare dello spazio dei redshift, la ricostruzione avviene in una griglia regolare del campo lagrangiano <sup>5</sup>, e quindi dello spazio reale. In altre parole

<sup>5</sup>Si denoterà di seguito con s-spazio lo spazio dei redshift, q-spazio lo spazio lagrangiano e x-spazio lo spazio euleriano. Si ricorda che nell'approssimazione descritta nella prima sezione le differenze tra q-spazio e x-spazio possono essere trascurate al primo ordine.

la quantità  $\delta_s$  nell'equazione (2.10) è funzione di  $q$ , mentre il campo di densità in input è dato in funzione di  $s$ . Se si conosce la mappa  $S^{(s)}(q)$  nella griglia del  $q$ -spazio, è però possibile ottenere la densità del  $q$ -spazio a partire da quella nota nell' $s$ -spazio interpolando il contrasto di densità  $\delta_s$  nelle posizioni dell' $s$ -spazio corrispondenti alla griglia regolare nel  $q$ -spazio. Di fatto quindi il termine  $\frac{\delta_s(q)}{1+\delta_s(q)}$  nell'equazione (2.10) è funzione di  $S$  e cambia ad ogni passo iterativo. La prima stima della mappa  $S$  è  $S = 0$ , ovvero si assume che la densità lineare nel  $q$ -spazio sia data dalla densità evoluta nell' $s$ -spazio.

Di conseguenza la prima ipotesi per la densità lineare non è opportunamente normalizzata: la corretta normalizzazione del campo del contrasto di densità non è mai garantita poiché il catalogo di galassie a cui si fa riferimento come dato in input può non essere una rappresentazione *unbiased* dell'Universo.

Riassumendo, il metodo iterativo ZTRACE opera nel seguente modo:

1. Si inserisce in input il campo di densità dello spazio dei redshift  $\delta_s$  osservato e calcolato in una griglia di punti cubica.
2. Si assume come prima stima per la densità lineare  $\delta_l(q) = \frac{\delta_s(s)}{1+\delta_s(s)}$  e  $S^s = 0$ .
3. Si utilizza  $\delta_l$  per calcolare la stima della mappa  $S$  nell'  $x$ -spazio tramite le equazioni (2.2) e (2.3), la velocità peculiare con l'equazione (2.4) e la mappa  $S^s$  nell' $s$ -spazio con l'equazione (2.7).
4. Si stima nuovamente la densità lineare con l'equazione (2.10).
5. Si ripetono il terzo e quarto punto finché la differenza quadratica media tra la nuova stima di densità lineare e quella precedente soddisfa un criterio specificato e il campo di densità è convergente in ogni punto.

Tale schema iterativo viene utilizzato per risolvere un set di equazioni complesso e non locale. In [7] si assume che il metodo sia giunto a convergenza quando la differenza quadratica media tra la nuova stima del campo di densità lineare e quella precedente è minore dell'1% della varianza della nuova stima.

Come condizioni al contorno, poiché la geometria di un catalogo *all sky* è sferica, si procede a riempire lo spazio al di fuori della sfera con raggio maggiore inscrivibile nella griglia cubica con un campo di densità di rimpimento il cui valore viene scelto in modo da portare a zero la media del contrasto del campo di densità dell'intera griglia.

Poiché la convergenza del metodo ZTRACE non è assicurata, si implementa l'algoritmo per agevolarne la convergenza. I principali problemi sono la presenza di orbite che si intersecano in alcuni punti e la presenza di picchi di contrasto di densità negativamente densi.

Per quanto riguarda il primo problema, l'equazione (2.10) di fatto forza il sistema ad evitare l'eventualità di orbite che si sovrappongono: la densità finale rientra nel termine  $\frac{\delta_s(s)}{1+\delta_s(s)}$  quindi il contributo dell'eccesso di densità tende asintoticamente all'unità.

Al contrario i picchi negativi di contrasto di densità possono apportare un consistente contributo negativo e quindi impedire sensibilmente la convergenza del metodo.

Un ulteriore vincolo per la convergenza è la presenza di discontinuità al bordo del campo di riempimento. La presenza di discontinuità e di picchi negativi di contrasto di densità porta la soluzione a divergere in alcuni punti e, a causa del fatto che il sistema di equazioni non è locale, la singolarità si propaga in tutto il volume.

È infine da ricordare che il sistema non può convergere nella posizione dell'osservatore poiché è per definizione un punto singolare nella trasformazione tra l's-spazio e l'x-spazio.

Per agevolare la convergenza si procede in primo luogo ad assumere come nuova stima del contrasto del campo di densità, ad ogni passo iterativo, una media pesata tra la stima fornita dall'equazione (3.10) e la stima del passo precedente, così da evitare oscillazioni della soluzione. Tale procedura è equivalente ad introdurre un termine numerico di viscosità così da smorzare le oscillazioni numeriche.

Come prima stima precedente si assume un contrasto nullo del campo di densità e come pesi della media pesata inizialmente si considerano, denotando con  $w_1$  il peso per la stima fornita da (3.10) e  $w_2 = 1 - w_1$  il peso della stima precedente,  $w_1 = 0.2$  e  $w_2 = 0.8$ . Si procede poi ad incrementare il peso  $w_1$  così da raggiungere  $w_1 = 0.4$  dopo sei passi iterativi. All'inizio si vuole infatti che la nuova stima abbia un peso relativamente basso in modo da forzare piccole variazioni nelle prime iterazioni così da evitare la formazione di orbite che si intersecano. In secondo luogo, per forzare la convergenza al centro, sia la stima del campo di densità Gaussiano che la stima della velocità peculiare vengono smussate con il filtro  $e^{-\left(\frac{qcut}{q}\right)^2}$ . Di conseguenza la stima iniziale, entro i punti centrali della griglia ( $\sim 2q_{cut}$ ), non viene riportata fedelmente.

Per limitare i problemi causati dalle discontinuità del campo di riempimento la stima della densità lineare viene smorzata linearmente, introducendo ad esempio una funzione di smorzamento linearmente decrescente con il raggio, a partire da un raggio dato fino al raggio del campo di smorzamento. L'entità di tale smorzamento dipende dal valore dello stesso campo di riempimento. A sua volta il campo di riempimento dipende dal valor medio del campo di densità all'interno della sfera e quindi dallo smorzamento stesso.

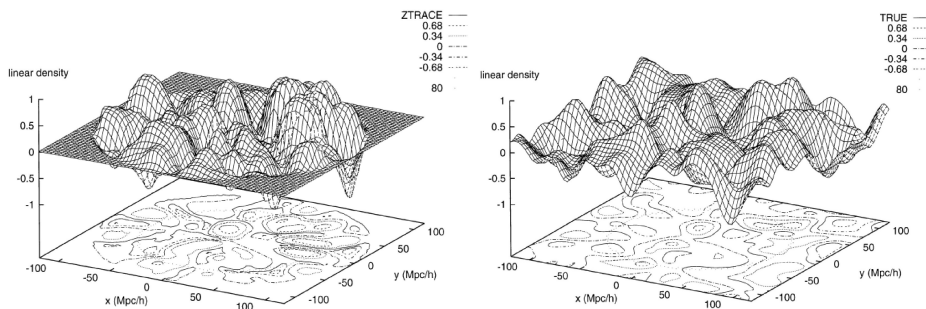
Come ultimo accorgimento vengono limitati i picchi negativi del contrasto di densità con un valore fissato impostato a  $\frac{\delta_s}{1+\delta_s} = -5$ ,  $\delta_s = -0.83$ , se si esegue il metodo iterativo in approssimazione di Zel'dovich,  $\delta_s = -0.75$ , se si utilizza anche il secondo ordine. Questo accorgimento non ha un particolare impatto sulle stime dei campi di densità poiché di fatto solo in pochi punti viene limitato il contrasto del campo di densità lineare. Dall'altro lato anche solo pochi punti possono compromettere la convergenza.

Infine il metodo esposto può essere adattato nel metodo LTRACE, nel quale ci si limita alla teoria lineare, e nel metodo XTRACE, nel quale si fornisce come campo di densità in input un campo dello spazio reale.

Nel caso del LTRACE si procede a stimare il campo di densità lineare dal campo di densità nell's-spazio utilizzando le equazioni (2.11) e (2.12), mentre la velocità peculiare viene calcolata a partire da (2.4) fermandosi ai termini del primo ordine. Sotto tale approssimazione la mappa tra x-spazio e q-spazio ha solo senso formale in quanto, come sopra precisato, le differenze tra i due spazi possono essere trascurate in approssimazione lineare. La procedura per il campo di riempimento e per lo smorzamento centrale viene lasciata invariata, non

viene posto il limite per i picchi con contrasto di densità negativa e i pesi  $w_1$  e  $w_2$  vengono impostati inizialmente a  $w_1 = 0.3$  e  $w_2 = 0.7$ , per poi arrivare a  $w_1 = w_2 = 0.5$  dopo tre iterazioni. Tale metodo converge dopo cinque iterazioni.

Per l'XTRACE si procede invece a lasciare tutte le correzioni sopra descritte fissando  $w_1 = w_2 = 0.5$ . Tale metodo converge dopo 8 – 10 iterazioni, più velocemente del ZTRACE, il quale necessita di 10 – 15 iterazioni.



**Figura 1.3:** da [7], sulla sinistra viene riportata la ricostruzione della densità lineare di un sottile settore dell's-spazio centrato nell'osservatore utilizzando il metodo ZTRACE in una sfera di raggio  $80 h^{-1} \text{ Mpc}$ . Sulla destra si riporta il campo di densità lineare atteso e sotto ad entrambi i grafici sono riportati i contorni dei livelli  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$ .

## 2.4 Correzione di Hada ed Eisenstein

Partendo dal metodo descritto nella sezione precedente si vogliono introdurre dei miglioramenti così da rendere il metodo iterativo più efficiente del metodo standard ai fini della ricostruzione delle oscillazioni acustiche barioniche, ovvero si vogliono correggere i punti 1 – 4 della sezione 2.2.

In primo luogo si nota che nel metodo ZTRACE si procede a smussare il contrasto del campo di densità nell's-spazio  $\delta_s(s)$  ad ogni passo iterativo. Tale fatto comporta la decrescita delle oscillazioni del campo di densità su piccola scala e quindi, di fatto, smorza le oscillazioni acustiche barioniche, andando contro l'obiettivo posto. Per evitare questo problema si procede ad introdurre alcuni aggiustamenti.

Si assume che il contrasto lineare di densità possa essere diviso in una componente a di grande scala  $\delta_L$  ed una componente residua  $\delta_{res}$

$$\delta_l(q, t) = \delta_L(q, t) + \delta_{res}(q, t) \quad (2.17)$$

e si considera un modello in cui lo spostamento  $S$  viene influenzato solo dalla componente di grande scala così da lasciare  $\delta_{res}$  come componente passiva della densità lineare nel corso del processo iterativo.

Poichè tale assunzione non è giustificabile se si studia la dinamica delle piccole scale, si introduce un filtro di smussamento, così da separare le due scale e quindi creare una separazione tra i due regimi. In particolare definiamo il campo a grande scala

$$\tilde{S}_L^{(1)} = \frac{ik}{k^2} \tilde{\delta}_l(k) G(k) \quad (2.18)$$

$$\delta_L(q, t) = -\nabla \cdot S_L^{(1)}(q, t) = -\mu_1(S_L^{(1)}). \quad (2.19)$$

In questo caso ci si ferma all'approssimazione al primo ordine per lo spostamento ( $S = S^{(1)}$ ), per semplicità e perché ci si aspetta che, vista la scarsa concentrazione di galassie negli esempi reali, sarà necessario utilizzare scale abbastanza larghe di smussamento, rendendo plausibile il fatto di considerare solo il primo ordine. In altre parole, poiché i picchi di oscillazione acustica barionica degenerano principalmente a causa dei campi di velocità a grande scala, si trascurano gli effetti gravitazionali nei modi più piccoli della scala  $\Sigma$ . Questo implica in particolare che si sta assumendo che  $\delta_{res}$  esistesse anche all'epoca primordiale:  $\rho(q) = \bar{\rho}(1 + \delta_{res}(q))$ .

Si modifica quindi l'equazione di continuità come di seguito per rendere la modellizzazione consistente con le modifiche introdotte

$$\det \left[ \delta_{ab}^K + S_{L|a,b}^{(s)} \right] = \frac{1 + \delta_{res}(q)}{1 + \delta_s(s)} \quad (2.20)$$

dove si esprime  $S_L^{(s)}$  in funzione di  $S_L^{(1)}$  tramite l'equazione (2.7).

Si sottolinea che considerare che all'epoca primordiale ci fosse la componente  $\delta_{res}$  non esclude successive oscillazioni su grande scala.

Nell'equazione (2.20) il numeratore si riferisce all'epoca primordiale mentre il denominatore alla densità osservata, quindi si sta di fatto applicando la gravità per valutare lo spostamento, mantenendo però l'ampiezza dei modi osservati.

Se si considera il limite in cui  $\delta_{res} \rightarrow 0$ , e quindi  $G(k) \rightarrow 1$ , l'equazione (2.20) corrisponde all'equazione precedentemente trovata (2.8), se poi non si considera il fattore di smorzamento,  $\Sigma \rightarrow 0$ , l'equazione (2.17) diviene  $\delta_l(q) = \delta_L(q)$ , ovvero si sta assumendo che il contrasto di densità varia su tutte le scale. Dall'altro lato, considerando il limite opposto,  $G(k) \rightarrow 0$ ,  $\Sigma \rightarrow \infty$ , lo spostamento a grande scala tende a zero, ovvero  $\delta_l(q) = \delta_{res}(q)$ . Segue poi da (2.20) che  $\delta_{res}(q) = \delta_s(s)$  e quindi si trova che in tale limite il campo di densità osservato non viene del tutto ricostruito. Nel metodo qui descritto si procederà a porsi tra i due limiti riportati, definendo un fattore di smorzamento intermedio.

Infine, è necessario tenere conto delle distorsioni di piccola scala dello spazio dei redshift, come ad esempio l'effetto *fingers of God* [9]. Per ridurre il peso di queste fluttuazioni sul campo di densità smussato, si introduce il parametro

$$C_{ani} = \frac{\Sigma_{\parallel}}{\Sigma_{\perp}} \quad (2.21)$$

dove  $\Sigma_{\parallel}$  e  $\Sigma_{\perp}$  sono le scale di smussamento rispettivamente parallelamente e perpendicolarmente alla linea di vista. Il fattore di smussamento risulta quindi

$$G_{ani}(k) = e^{-0.5(k_{\parallel}^2 \Sigma_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 \Sigma_{\perp}^2)} = e^{-0.5(k_{\parallel}^2 C_{ani}^2 + k_{\perp}^2) \Sigma_{\perp}^2}. \quad (2.22)$$

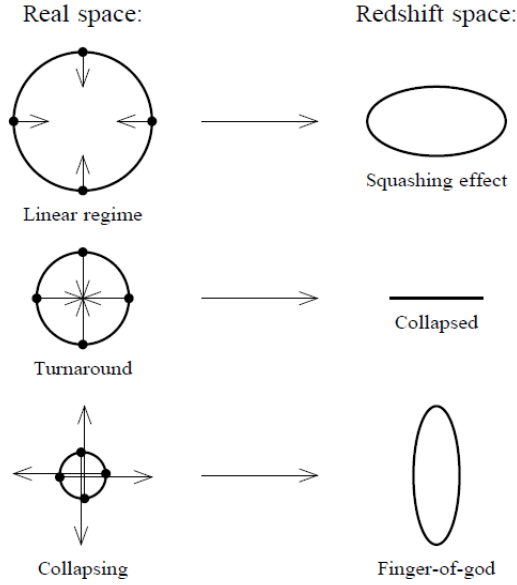
Questo implica che nel derivare lo spostamento a grande scala non si stanno usando tutte le fluttuazioni del campo di densità lungo la linea di vista.

Con il fine di trovare il campo di densità lineare  $\delta_l(q)$  che risolve l'equazione (2.20), data la densità osservata  $\delta_s(s)$  e usando le definizioni (2.17), (2.18) e (2.7), si procede ad inserire nell'equazione (2.10) i miglioramenti appena descritti ottenendo

$$\frac{1 + \delta_l(q, t) + \mu_1(S_L^{(1)})}{1 + \delta_s(s)} = \det \left[ \delta_{ab}^K + S_{L|a,b}^{(s)} \right] \quad (2.23)$$

e quindi, usando (2.9), la soluzione per  $\delta_l$  risulta

$$\delta_l(q, t) = -\mu_1(S_L^{(1)}) - 1 + (1 + \delta_s(s)) \left[ 1 + \mu_1(S_L^{(s)}) + \mu_2(S_L^{(s)}) + \mu_3(S_L^{(s)}) \right]. \quad (2.24)$$



**Figura 1.3:** da [9], si mostra come le velocità peculiari portino a distorsioni dello spazio dei redshift. Nella figura, le galassie vengono modellizzate dai punti e sono rappresentate con le rispettive velocità peculiari. In particolare si sottolinea l'effetto chiamato *fingers of God*, sopra citato, il quale comporta fluttuazioni su piccola scala che si ripercuotono su grande scala nella linea di vista, così da compromettere la corretta modellizzazione della dinamica gravitazionale.

Riassumendo, il metodo ZTRACE è stato implementato nel seguente modo:

1. Si distribuiscono le particelle delle galassie in una griglia usando il metodo TSC (triangular-shaped-cloud) e viene calcolato il campo di densità osservato  $\delta_s(s)$  in ogni cella della griglia.
2. Si assume come prima stima per la densità lineare  $\delta_l(q) = \delta_s(s)$  con  $S_L^{(s)} = 0$ .
3. Si stima lo spostamento  $S_L^{(1)}$  e  $S_L^{(s)}$  usando l'equazione (2.18) e (2.7) rispettivamente.
4. Si aggiorna la stima di  $\delta_l$  usando le equazioni (2.24).
5. Si ripetono i punti 3 e 4 fino alla convergenza del campo di densità lineare.

Poichè ci possono essere più soluzioni  $\delta_l$  dell'algoritmo o possono riferirsi a domini di convergenza non ottimali, si adottano due accorgimenti per ottimizzare la convergenza.

In primo luogo si tratta il parametro  $\Sigma$  come un parametro di *annealing*: si

assume un valore iniziale di  $\Sigma$  alto per poi ridurlo gradualmente ad ogni iterazione finchè non si raggiunge il valore di tale parametro che effettivamente ci si aspetta,  $\Sigma_{eff}$ . Si procede dunque ad assumere  $\Sigma_{\perp,n}$ , scala di smussamento lungo la direzione perpendicolare alla linea di vista dell' $n$ -esima iterazione, come  $\Sigma_{\perp,n} = \max\left(\frac{\Sigma_{ini}}{D^n}, \Sigma_{eff}\right)$  dove  $\Sigma_{ini}$  è la scala di smussamento iniziale e  $D$  è una costante maggiore di uno. In particolare si scelgono  $\Sigma_{ini} = 20h^{-1}Mpc$  e  $D = 1.2$ . Si sottolinea che il parametro di *annealing* non ha significato fisico e i risultati di convergenza devono essere indipendenti da piccole variazioni degli step dell'*annealing*.

In secondo luogo, rifacendosi al metodo ZTRACE, si prende come nuova stima della densità lineare una media pesata della stima fornita dall'equazione (2.24) e la stima precedente. In particolare, come  $n$ -esima stima di  $\delta_l$ , si assume

$$\delta_l^{(n)} = w\delta_{l[ori]}^{(n)} + (1-w)\delta_l^{(n-1)} \quad (2.25)$$

dove  $\delta_{l[ori]}^{(n)}$  è la parte a destra dell'uguale dell'equazione (2.24) all' $n$ -esima iterazione e il peso  $w \in [0, 1]$ . Questa è una tecnica standard per evitare grosse oscillazioni tra le iterazioni.

Infine è necessario definire un criterio per stabilire quando si è giunti a convergenza. Si definisce quindi  $r_{con}$  per valutare ad ogni passo quanto è cambiata la nuova stima del campo di densità rispetto a quella precedente,

$$r_{con} = \frac{\sum \left[ \delta_{l[ori]}^{(n)} - \delta_l^{(n-1)} \right]^2}{\sum \delta_s^2} \quad (2.26)$$

dove la sommatoria si riferisce alla somma sulle celle della griglia. Nelle iterazioni descritte nell'articolo di Hada ed Eisenstein si è assunto  $r_{con} = 0.01$ .

## 2.5 Considerazioni

In questa sezione si procede a valutare, attraverso i risultati riportati da Hada ed Eisenstein nell'articolo [8], le correzioni apportate al metodo ZTRACE ai fini di mitigare i problemi esposti nella sezione 2.2.

In primo luogo l'assunzione principale del metodo esposto è la separazione tra il campo di densità su grande scala  $\delta_L$ , che si modifica a causa dell'interazione gravitazionale, e il campo di densità su piccola scala  $\delta_{res}$  che, al contrario, non viene smorzata tra le iterazioni. Anche se tale assunzione non è fisicamente corretta, ci si aspetta che la modellizzazione usata descriva correttamente il campo di velocità su grande scala rispetto a quello su piccola scala.

Similmente al metodo di ricostruzione standard ci si pone l'obiettivo di ricostruire il campo di densità iniziale procedendo a livellare il campo di densità osservato. A differenza del metodo standard però, con il metodo descritto si ottiene un campo di densità iniziale che evolve nel campo di densità osservato tramite variazioni su scale più alte rispetto alla scala di smussamento. In questo modo si risolve il problema 1 poiché non si usa più il campo di densità finale come base per trovare gli spostamenti nell'approssimazione di Zel'dovich.

Poichè si divide il risultato per  $1 + \delta_s(s)$ , questo non risulta penalizzato dal campionamento come particelle finite e dalla dimensione delle celle della griglia. Si applica lo smussamento solo quando si calcola il campo di spostamento e si

può usare una griglia fitta a piacere per tracciare le informazioni del campo di densità. È preferibile mantenere il campo di densità in una griglia poiché, a livello computazionale, è più conveniente modellizzare il problema come lo studio della statistica della formazione di cluster nella griglia, al posto di modellizzarlo come lo studio del moto di un set di particelle.

Il metodo può inoltre essere facilmente riadattato per introdurre le perturbazioni al secondo ordine dell'evoluzione di  $\delta_l(q)$ , includendo le correzioni al secondo ordine dello spazio dei redshift. In questo modo si risolve il secondo problema esposto nella sezione **2.2**. Si è comunque optato per considerare solo le perturbazioni al primo ordine in quanto ci si aspetta che, applicando il metodo per studiare ampi campionamenti, questo risulti affetto dai *bias* delle galassie e dal rumore. Per ottenere risultati più accurati per simulazioni realistiche non è infatti sufficiente implementare il metodo per considerare perturbazioni del secondo ordine. A tal proposito si sottolinea che anche l'approssimazione di Zel'dovich è al primo ordine e risulta comunque più accurata della perturbazione al primo ordine delle equazioni euleriane, in quanto è una modellizzazione che ben rappresenta il flusso di massa che domina la degradazione delle oscillazioni acustiche barioniche.

Per quanto riguarda il terzo problema, dato che si parte dall'evoluzione lagrangiana di un campo di densità iniziale, i risultati includono senza interruzioni le distorsioni a grande scala dello spazio dei redshift. Si introduce inoltre la possibilità di usare lo smussamento dato dall'equazione (2.21), il quale può contenere l'effetto delle distorsioni su piccola scala.

Infine si è completamente risolto il problema 4: una volta stimata la densità finale  $\delta_s$ , a partire dal confronto tra dati e i dati casuali, non ci si riferisce più ai dati osservati e casuali separatamente.

Il metodo migliorato da Hada ed Eisenstein è inoltre vantaggioso rispetto ai metodi precedenti poiché non è necessario impostare il numero di iterazioni né il risultato dipende dal percorso numerico con cui viene raggiunta la convergenza. Il metodo descritto fornisce poi un modo semplice per incorporare nell'algoritmo la distorsione dello spazio dei redshift, senza la necessità di inserire artificiose condizioni al bordo.

Computando il metodo con  $z = 0.5$  si trova che il campo ricostruito è correlato più dell'80% con il campo atteso per scale  $k < 0.10 h^{-1} Mpc$ . Si nota infine che i risultati nello spazio dei redshift migliorano utilizzando un livellamento anisotropo in modo da giustificare la ridotta informazione delle piccole scale lungo la direzione di vista.

## Capitolo 3

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi si è proceduto ad individuare, tra i molti approcci presenti, un metodo che risolva il problema di ricostruzione miratamente alla ricostruzione dei picchi delle oscillazioni acustiche barioniche.

In primo luogo si sono esposti due possibili approcci per la risoluzione del problema: il metodo variazionale proposto da Peebles, che si basa sulla ricerca delle orbite che rendono stazionaria l'azione, e l'approssimazione di Zel'dovich, che mira ad integrare le equazioni di Eulero-Poisson assumendo che il campo di velocità sia esprimibile come gradiente di un potenziale scalare.

Una volta formalizzato il problema in entrambi i modi si sono valutate le peculiarità del principio variazionale (Action Variational Principle) e dell'approssimazione di Zel'dovich, a partire dall'analisi di Susperregi e Binney [5]. Si è giunti alla conclusione che l'AVP risulta un valido metodo di ricostruzione per il Gruppo Locale e un buon metodo per confrontare i risultati ottenuti ma che, essendo l'obiettivo di questo elaborato individuare un metodo che ricostruisca in maniera soddisfacente il campo di densità iniziale, è da preferirsi l'approccio euleriano.

Si è descritto quindi il metodo ZTRACE e ci si è soffermati sui miglioramenti apportati da Hada ed Eisenstein a quest'ultimo e, alla luce di quanto esposto in **2.5**, dove si sono discussi i miglioramenti apportati dal metodo di Hada ed Eisenstein nel contesto della ricostruzione della funzione di correlazione e dunque dei picchi BAO, si è concluso che il metodo scelto risolve in maniera soddisfacente il problema di ricostruzione entro l'obiettivo della tesi.

A partire da quanto esposto si evidenziano alcuni possibili aspetti da migliorare.

Sarebbe in primo luogo preferibile estendere il metodo descritto a campionamenti di galassie più ampi, in quanto, in questo modo, si otterrebbero picchi BAO più accurati.

Sarebbe inoltre auspicabile ridurre i tempi di computazione e i passi necessari per raggiungere la convergenza dei metodi descritti. Inoltre, come si è precisato nella descrizione del metodo di Hada ed Eisenstein, la trattazione esposta si ferma ad approssimazioni del primo ordine, non perché non sia possibile riadattare il metodo iterativo all'approssimazione ad ordini più alti, ma perché questo non apporta sensibili miglioramenti dei risultati.

Da tale fatto emerge il bisogno di ricorrere a modellizzazioni che meglio descri-

vano il problema. Se l'approssimazione di Zel'dovich risulta ottimale al primo ordine, questa non risulta attendibile se non si considerano regimi al più quasi lineari. Bisognerebbe quindi implementare la descrizione teorica del problema, per esempio introducendo la Teoria dell'Adesione nella quale si inserisce un termine di adesione nell'equazione di Eulero così da modellizzare l'attrazione gravitazionale delle particelle vicine [4]. In questo modo, essendo la presenza di tale termine viscoso resa rilevante solo nelle zone di shell-crossing, si migliora la modellizzazione dell'attuale struttura su grande scala dell'Universo.

Il lavoro di preparazione e stesura della tesi mi ha convinta dell'enorme interesse del problema alla base dell'elaborato, il problema di ricostruzione. Quest'ultimo, non solo, come ho voluto esporre nel corso della tesi, è di grande interesse perché è riconducibile ad altre questioni alla base della cosmologia, ma risulta anche appassionante di per sé. Il problema di ricostruzione infatti, presentando sia una difficoltà sperimentale nell'ottenere misure con sufficiente accuratezza, sia teorica nel trovarne una adeguata modellizzazione, non è univocamente risolto e quindi richiede di sviluppare nuovi metodi risolutivi, che si avvicinano al problema in maniera differente nonché multidisciplinare (metodo MAK [10]).

# Bibliografia

[1] U. Frisch, S. Matarrese, R. Mohayaee and A. Sobolevskii, *Back to the primordial Universe by a Monge-Ampère-Kantorovich optimization scheme*, *Astronomy & Astrophysics*, **406**, 393-401, 2003.

[1] U. Frisch, S. Matarrese, R. Mohayaee and A. Sobolevskii, *A reconstruction of the initial conditions of the Universe by optimal mass transportation*, *Nature*, **417**, 260-262, 2002.

[2] P. J. E. Peebles, *Tracing galaxy orbits back in time*, *The Astrophysical Journal*, **344**, L53-L59, 1989.

[3] P. J. E. Peebles, *The gravitational instability picture and the formation of the Local Group*, *The Astrophysical Journal*, **362**, 1-13, 1990.

[4] S. Matarrese, *Notes on gravitational instability*, Lectures given at Scuola Normale Superiore, Pisa, 2002-2005.

[5] M. Susperregi and J. Binney, *The principle of least action and clustering in cosmology*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **271**, 719-728, 1994.

[6] D. J. Eisenstein, H. Seo, E. Sirko, and D. N. Spergel, *Improving cosmological distance measurements by reconstruction of the Barion Acoustic Peak*, *The Astrophysical Journal*, **664**, 675-Y6-79, 2007.

[7] P. Monaco and G. Efstathiou, *Reconstruction of cosmological conditions from galaxy redshift catalogues*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **308**, 763-779, 1999.

[8] R. Hada and D. J. Eisenstein, *An iterative reconstruction of cosmological initial density fields*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **000**, 1-9, 2017.

[9] A. J. S. Hamilton, *Linear redshift distortions: a review*, *The Evolving Universe*, pp 185-275.

[10] Y. Brenier, U. Frisch, M. Hénon, G. Loper, S. Matarrese, R. Mohayaee and A. Sobolevskii, *Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **346**, 501-524, 2003.

[11] S. D. Landy and A. S. Szalay, *Bias and variance of angular correlation functions*, The Astrophysical Journal, **412**, 64-71, 1993.