



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA ED ASTRONOMIA
CORSO DI LAUREA IN FISICA

Rotazione Faraday ottica per la rivelazione di microonde

Laureando:

Dario SUMAN

Relatore:

Prof. Giovanni CARUGNO

Anno accademico 2015/2016

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Prefazione	3
1.2	Rivelatore ottico di microonde	3
2	Teoria del rivelatore di microonde	5
2.1	Effetto Faraday	5
2.2	Spin ed effetto Zeeman	8
2.3	Cenni sull'analisi microscopica del rivelamento ottico della popolazione di spin	9
2.4	Interazione del cristallo con le microonde	11
2.5	Potenza assorbita dalla cavità	13
2.6	Cavità risonante di Fabry-Perot	14
3	Misura dell'effetto Faraday in un cristallo di GSO	17
3.1	Apparato sperimentale di Daniels e Chang	17
3.2	Apparato sperimentale per la misura della costante di Verdet	19
3.2.1	Misura di potenza	19
3.2.2	Misura di polarimetria	20
3.2.3	Misura della rotazione di Faraday	22
4	Conclusioni	25
5	Appendice	27
5.1	Appendice A	27
6	Riferimenti	29
6.1	Bibliografia	29
6.2	Sitografia	30

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Prefazione

"Detection is defined as the finding out, or discovery, of what was concealed", così W.S.C. Chang definisce la rivelazione, come lo svelare, o togliere il velo, a ciò che prima era nascosto. Nel corso di questa trattazione si presenterà un ricevitore di microonde attraverso una misura della rotazione di Faraday ottica, prendendo spunto dal lavoro di Chang, ma migliorando l'apparato sperimentale tramite la sostituzione della sorgente di luce incoerente con una coerente, ovvero con un laser. Nel secondo capitolo si procederà con l'esposizione delle basi teoriche sottostanti al funzionamento del rivelatore, cioè principalmente l'effetto Faraday collegato all'effetto Zeeman e alla popolazione di spin; dopo aver determinato attraverso un'analisi microscopica un metodo di rivelazione della popolazione di spin si fornirà una stima della sensibilità finale del rivelatore, che risulta essere dell'ordine dei femtowatt. Nel terzo capitolo si presenterà, dopo aver brevemente introdotto la struttura del rivelatore di microonde, l'apparato sperimentale che si è utilizzato in laboratorio per misurare l'effetto Faraday in un cristallo paramagnetico di GSO, utilizzando un laser come sonda ottica, sistema che, se portato a limiti sperimentali maggiori, permette di leggere una variazione dell'angolo di rotazione di Faraday di pochi microradiani. Infine nell'appendice si troverà qualche approfondimento utile alla comprensione complessiva dell'oggetto preso in analisi.

1.2 Rivelatore ottico di microonde

Il rivelatore ottico di microonde era stato preso in considerazione da Chang^{21,22} nel 1961, riferendosi ad un lavoro di Daniels e Wesemeyer¹² del 1958, in un articolo in cui descriveva vari tipi di rivelatori e se potessero essere utilizzati nell'ambito della sicurezza e della sorveglianza; perciò era necessario disporre di una sensibilità elevata. Per arrivare a tale obiettivo si pensò di sfruttare l'effetto Faraday, che consiste nella rotazione del piano di polarizzazione della luce quando attraversa un cristallo immerso in un campo magnetico. In particolare¹⁶ sottoponendo un materiale ad un campo magnetico e facendovi passare attraverso della luce polarizzata, in modo che le linee del campo magnetico e la direzione di propagazione della

luce abbiano la stesa direzione, si trova che la rotazione della polarizzazione è proporzionale all'intensità del campo magnetico e alla lunghezza del campione, secondo una costante di proporzionalità che cambia da materiale a materiale, ovvero

$$\theta = \nu l B \quad (1.1)$$

dove θ è l'angolo di rotazione, ν è la cosiddetta costante di Verdet, caratteristica del materiale, l è la lunghezza del materiale in cui la luce ha interagito col campo magnetico mentre B è l'intensità del campo magnetico stesso. Nei cristalli paramagnetici si può ricollegare tale fenomeno alla popolazione di spin dello stato fondamentale, infatti, la rotazione dipende dal momento magnetico medio del materiale, il quale dipende a sua volta dalla concentrazione di ioni paramagnetici nel campione, dal campo magnetico esterno, dalla temperatura di spin e dalla potenza delle microonde assorbite in risonanza, se presenti. Complessivamente possiamo considerare questo rivelatore come l'unione di un polarizzatore ottico e uno spettrometro di risonanza elettronica paramagnetica (detta "EPR"), connessi dal cristallo stesso in cui avviene sia l'effetto Faraday sia il fenomeno di risonanza.

Capitolo 2

Teoria del rivelatore di microonde

In questo capitolo si esporranno le basi teoriche del rivelatore ottico di microonde; per primo si introdurrà l'effetto Faraday e la forma che assume nei cristalli paramagnetici, vedendo come esso dipenda dal campo magnetico e dalla temperatura. In seguito si vedrà come immergendo il cristallo in un campo magnetico si verifichi l'effetto Zeeman, perciò, ponendoci a temperature dell'ordine del kelvin il livello di energia maggiore sarà scarsamente popolato; quindi si collegherà la rotazione di Faraday alla temperatura di spin, la quale dipende dalla popolazione di spin stessa. Si procederà poi col fornire un metodo per la misurazione della popolazione di spin attraverso la misurazione del dicromismo circolare, e si noterà, attraverso un'analisi microscopica, che esso si verifica assieme all'effetto Faraday. Prendendo in considerazione l'interazione del cristallo con le microonde si vedrà come essa produca una variazione della popolazione di spin, che si traduce in una variazione della rotazione di Faraday, misurando la quale si potranno rivelare le microonde. Infine si fornirà una stima teorica della sensibilità del rivelatore in termini della potenza minima che devono possedere le microonde per poter essere rivelate, la quale, utilizzando un sistema ottico in grado di rivelare rotazioni di pochi microradiani, e calcolando l'effetto che può avere l'introduzione di una cavità risonante di Fabry-Perot, si calcola essere dell'ordine dei fW.

2.1 Effetto Faraday

L'effetto Faraday, come già detto nell'introduzione, consiste nella rotazione del piano di polarizzazione di un fascio di luce che passa attraverso un cristallo immerso in un campo magnetico. Esso è molto simile all'attività ottica di alcune sostanze, che producono lo stesso effetto anche in assenza di campo magnetico, ma con una differenza fondamentale: nel caso di sostanze attive la rotazione cambia di segno se l'attraversamento avviene in due versi opposti, quindi l'effetto totale dopo due passaggi è di uno spostamento di 2α , mentre nell'effetto Faraday ad una rotazione di α in un verso, corrisponde una rotazione di $-\alpha$ in verso contrario, dando in totale uno spostamento di 0 radianti. Tale effetto è direttamente collegato al fenomeno della birifrangenza, cioè alla proprietà di un materiale di possedere indici di rifrazione diversi per diversi assi ottici, e quindi di suddividere l'onda tra di essi.

Si può individuare, quindi, un *ellissoide degli indici di rifrazione del materiale* per il quale, detti n_1, n_2, n_3 gli indici di rifrazione dei tre assi dell'ellissoide, la sua equazione sarà

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1 \quad (2.1)$$

Se tutti gli indici di rifrazione sono uguali avremo una sfera, se $n_1 = n_2 \neq n_3$ il cristallo sarà detto monoassiale. Se ad una differenza in indici di rifrazione corrisponde una differenza di indici di assorbimento, allora parleremo di *bicromismo*, la cui importanza verrà ripresa in seguito. La forma macroscopica dell'effetto Faraday per sostanze paramagnetiche venne ricercata sperimentalmente da Becquerel e De Haas all'inizio del ventesimo secolo^{8,9}, quando le teorie sul paramagnetismo dei materiali erano ancora molteplici ed egualmente valide. Essi studiarono la variazione del potere ottico in un cristallo monoassiale di *tysonite*, che si ritenne ottimale per l'esperimento in quanto avente grande potere ottico, essendo trasparente ed avendo delle bande di assorbimento ben definite. Nonostante ci si aspettasse di trovare una dipendenza lineare della rotazione in $\frac{H}{T}$, i risultati apparvero subito ben diversi; abbassando la temperatura T nell'ordine di 4,2K e aumentando il campo magnetico H , la relazione non era più di proporzionalità diretta, ma tendeva a saturare per alti valori di $\frac{H}{T}$. Per interpolare i dati si provò prima con la nota funzione di Langevin

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x} \quad (2.2)$$

ottenendo scarsi risultati, e poi con la funzione *tanh*, interpolando alla perfezione i dati sperimentali (figura 2.1). Ripetendo questi esperimenti su diversi materiali concluse che "En

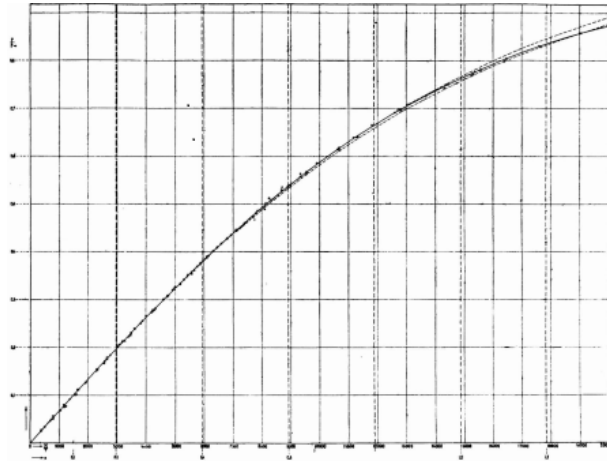


Figura 2.1: Il grafico mostra la rotazione di Faraday nella *tysonite* come misurata nell'esperimento di Becquerel. Sulle ascisse abbiamo il rapporto $\frac{H}{T}$ mentre sulle ordinate l'angolo di rotazione θ .

définitive, il est extremement probable que la rotation paramagnétique de la spessartite est représentée par une loi en forme de tangente hyperbolique, ou par une loi qui se rapproche beaucoup plus de la tangente hyperbolique que de la loi de Langevin”, ovvero “In definitiva, è estremamente probabile che la rotazione paramagnetica della spessartite sia rappresentata da una legge in forma di tangente iperbolica, o per una legge che si avvicina molto di più alla tangente iperbolica che alla legge di Langevin”.

Perciò si ottenne la formula per la rotazione di Faraday in materiali paramagnetici

$$\theta = A \tanh \frac{\mu H_a}{kT} \quad (2.3)$$

che includendo il contributo di effetti diamagnetici diventa

$$\theta = A \tanh \frac{\mu H_a}{kT} + B H_a \quad (2.4)$$

con H_a il campo magnetico applicato, μ il momento magnetico, k la costante di Boltzmann, θ la rotazione di Faraday espressa in gradi per millimetro di cammino ottico e A il valore di saturazione della rotazione. Per la maggior parte dei campioni, a basse temperature, $1,6K \leq T \leq 4,2K$, supposto $\mu H_a \ll kT$

$$A \tanh \frac{\mu H_a}{kT} \gg B H_a \quad (2.5)$$

come si nota anche dal seguente grafico.

Quindi è legittimo porre

$$\theta \approx A \tanh \frac{\mu H_a}{kT} \quad (2.6)$$

Se fosse $\mu H_a \gg kT$ allora $\tanh \frac{\mu H_a}{kT} \rightarrow 1$, e quindi $\theta \rightarrow A$, costante; ponendoci in questa approssimazione sarebbe necessario addentrarci in difficoltosi calcoli di meccanica quantistica, cosa che in questo caso non faremo. Essendo, invece, $\mu H_a \ll kT$, e sapendo che lo sviluppo di Taylor di $\tanh x$ per $x \rightarrow 0$ è

$$\tanh x \approx x + o(x^2) \quad (2.7)$$

potremmo approssimare l'angolo di rotazione di Faraday per sali paramagnetici con

$$\theta \approx A \frac{\mu H_a}{kT} \quad (2.8)$$

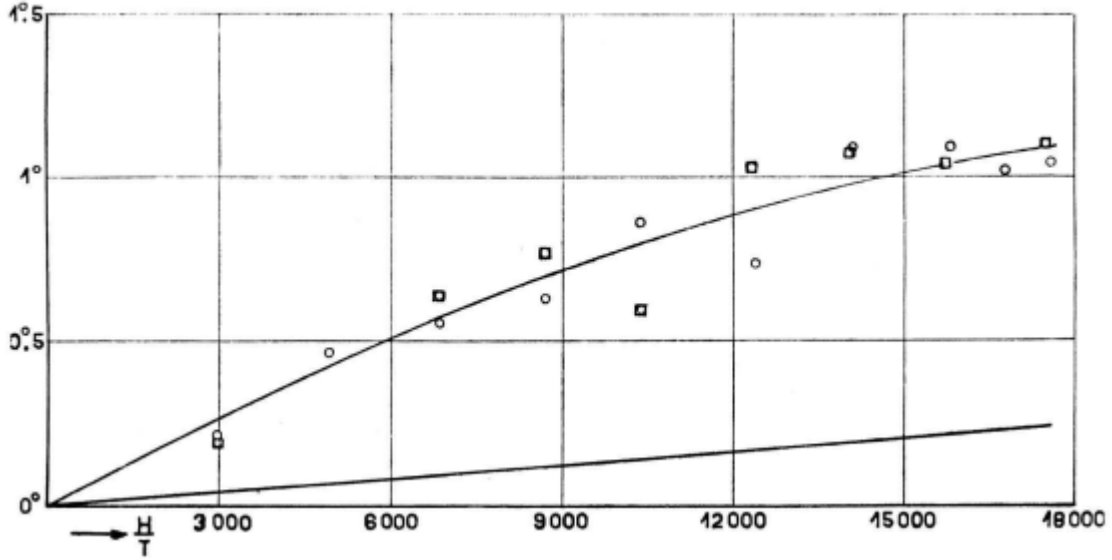


Figura 2.2: Curve sperimentali della rotazione di Faraday nella spessartite come misurate da Becquerel, Haas e Handel. La linea curva rappresenta la rotazione paramagnetica cambiata di segno, quella dritta la rotazione diamagnetica.

2.2 Spin ed effetto Zeeman

Immergendo il cristallo paramagnetico in un campo magnetico si verifica l'effetto Zeeman, cioè l'interazione tra il campo magnetico stesso e i momenti magnetici orbitale e di spin del sistema, che si traducono in una variazione di energia dello stesso. Distinguiamo due tipi di effetto Zeeman, normale ed anormale, di cui il primo è un caso particolare del secondo in cui sono coinvolti solo stati di singoletto di spin, cioè con spin totale $S = 0$, e per il quale è possibile una spiegazione classica. Nel caso più generale la variazione di energia sarà data da $\delta E = \mu_B B m_j g_j$ con $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ il magnetone di Bohr, B l'intensità del campo magnetico, $m_j = \frac{J}{\hbar}$ e

$$g_j = \left[1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \right] \quad (2.9)$$

detto fattore di Landé; nel caso $S = 0$ la formula si riduce a $\delta E = m_j \mu_B B$, come nel caso normale. Tale differenza di energia può essere riscritta in termini di frequenza di precessione di Larmor del momento angolare totale J attorno all'asse del campo magnetico esterno, ovvero $E_2 - E_1 = h\nu_L$, che corrisponderà alla frequenza delle microonde che incideranno sul cristallo (sezione 2.4). Nel nostro caso, essendo a temperature T dell'ordine del Kelvin, solo gli stati Zeeman dello stato fondamentale sono popolati, perciò possiamo sostituire la

temperatura T presente nella formula $\theta = A \tanh \frac{\mu H_a}{kT}$ con T_s ottenendo

$$\theta = A \tanh \frac{\mu H_a}{kT_s} \approx A \frac{\mu H_a}{kT_s}. \quad (2.10)$$

Nel caso in cui lo stato fondamentale sia caratterizzato da uno spin $S = \frac{1}{2}$ e sia quindi "splittato" in due stati caratterizzati dalle energie E_1 ed E_2 e, utilizzando l'usuale fattore di Boltzmann, dalle popolazioni

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{E_1}{kT_s}} \quad (2.11)$$

e

$$n_2 = n_0 e^{-\frac{E_2}{kT_s}} \quad (2.12)$$

allora essendo

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{(E_2 - E_1)}{kT_s}} \quad (2.13)$$

ricaviamo che

$$T_s = -\frac{(E_2 - E_1)}{k \ln \frac{n_2}{n_1}} \quad (2.14)$$

Nel nostro caso la differenza di energia $\Delta E = E_2 - E_1$, essendo prodotta dall'effetto Zeeman, sarà dell'ordine di $\mu_B B$, inoltre si vede che il rapporto $\frac{n_2}{n_1} \rightarrow 0$ per $T \rightarrow 0^+$ e tende ad 1 per $T \rightarrow +\infty$, questo significa che a basse temperature lo stato ad energia E_2 sarà poco popolato. Quando si verifica una inversione di popolazione, come nei laser, e quindi $n_2 > n_1$, troviamo una T_s negativa.

2.3 Cenni sull'analisi microscopica del rivelamento ottico della popolazione di spin

Da un'analisi degli anni '70 di Charles H. Anderson e Edward S. Sabisky³ emerge come per poter rivelare la popolazione di spin sia necessario che l'impurità paramagnetica del cristallo abbia bande di assorbimento che manifestino attività ottica, come dicroismo o rotazione di Faraday. Il dicroismo è associato al paramagnetismo perché le sezioni d'urto di assorbimento per la luce polarizzata circolarmente, in senso orario ed antiorario, sono diverse per gli spin allineati in una direzione o in un'altra. Per un sistema con $S = \frac{1}{2}$ i coefficienti di assorbimento per i due stati di polarizzazione possono essere scritti in questo modo:

$$\alpha_R(\nu) = \sigma_A(\nu)n_1 + \sigma_B(\nu)n_2 \quad (2.15)$$

$$\alpha_L(\nu) = \sigma_B(\nu)n_1 + \sigma_A(\nu)n_2 \quad (2.16)$$

Con n_1 ed n_2 identifichiamo le concentrazioni di spin nei due stati, con σ_A e σ_B le sezioni d'urto d'assorbimento e con α_L ed α_R i coefficienti di assorbimento per la luce con polarizzazione che ruota nei due versi. Il dicromismo circolare, cioè la differenza tra i coefficienti d'assorbimento è allora

$$\alpha_R - \alpha_L = (\sigma_A - \sigma_B)(n_1 - n_2) \quad (2.17)$$

Da questa relazione deduciamo che ad una misura del bicromismo corrisponde una misura della differenza delle popolazioni di spin tra i due stati, note le sezioni d'urto. Per associare la rotazione di Faraday al bicromismo utilizziamo le relazioni di Kramers-Kronig, ottenendo che l'angolo di rotazione per luce polarizzata linearmente è

$$\theta(\nu) = \frac{L}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\nu'[\sigma_A(\nu') - \sigma_B(\nu')]}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu' [n_1 - n_2] \quad (2.18)$$

dove L è la lunghezza del cammino della luce nel cristallo ed è presa la parte principale di Cauchy dell'integrale. Come conseguenza di questa relazione i fenomeni di bicromismo e rotazione di Faraday avvengono sempre insieme e la misurazione di uno ci fornirà il valore dell'altro. Un metodo per misurare il bicromismo circolare è quello di mandare luce non polarizzata nel campione e analizzare la frazione di luce polarizzata circolarmente trasmessa. L'intensità della luce trasmessa, polarizzata circolarmente in senso orario o antiorario, è data da

$$I_{R,L} = \frac{1}{2} I_0 \exp[-\alpha_{R,L}D] \quad (2.19)$$

in cui I_0 è l'intensità della luce incidente non polarizzata, D è la distanza compiuta dalla luce nel cristallo e $\alpha_{R,L}$ sono i coefficienti d'assorbimento presenti nelle equazioni (2.15) e (2.16). Possiamo allora definire la frazione di luce polarizzata circolarmente come

$$S = \frac{I_R - I_L}{I_R + I_L} = \tanh \left(\alpha D \cos \theta \left[\frac{\sigma_A - \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} \right] \left[\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right] \right) \quad (2.20)$$

in cui $\alpha = \frac{1}{2}(n_1 + n_2)(\sigma_A + \sigma_B)$ è il coefficiente di attenuazione del campione e θ l'angolo che la direzione di propagazione della luce forma con la direzione del campo magnetico. Nel caso in cui la differenza di popolazione di spin non sia costante lungo il tragitto, si sostituisce il termine $D(n_1 - n_2)$ con la sua integrazione lungo il cammino ottico.

$$\int_0^D [n_1(x) - n_2(x)] dx \quad (2.21)$$

Finché la concentrazione delle impurità ioniche è uniforme nel campione, il segnale di bicromismo circolare pesa la popolazione di spin equamente lungo il cammino ottico, senza badare all'attenuazione ottica. Ogniquale volta uno degli ioni assorbe un fotone, esso viene messo in uno stato eccitato e, spesso, quando decade allo stato fondamentale si assume che lo spin decada casualmente in uno dei due stati di spin. Perciò il fascio luminoso deve essere mantenuto a bassa potenza in modo da non alterare la popolazione di spin dando origine ad effetti di "pompaggio", che, ad esempio, possono essere utilizzati all'interno dei laser per ottenere l'inversione di popolazione.

2.4 Interazione del cristallo con le microonde

Finora abbiamo supposto il cristallo immerso in un bagno d'elio a temperature inferiori a quella di condensazione (4,2K), ed interagente con un campo magnetico B in grado di separare lo stato fondamentale in due stati di energia E_2 ed E_1 . Ora cercheremo di capire cosa succede facendo interagire il nostro sistema con una radiofrequenza (detta rf) avente una lunghezza d'onda dell'ordine di $10^{-1} - 10^{-3}$ metri, cioè classificata come microonda. Quando la radiofrequenza incontra il cristallo paramagnetico, si può verificare l'assorbimento dei fotoni da parte del sistema nel caso in cui la sua frequenza corrisponda alla frequenza di Larmor, dando origine al fenomeno di risonanza paramagnetica, il quale si manifesta in una variazione della popolazione di spin, e quindi della temperatura T_s del sistema. A sua volta una variazione della temperatura di spin produce una variazione della rotazione di Faraday secondo l'equazione 2.10. Questa descrizione è valida solo per ioni paramagnetici con due livelli di energia; nel caso di un numero di livelli maggiore sarà necessario mediare T_s tra le varie coppie di livelli. Consideriamo allora un cristallo paramagnetico con spin totale $S = \frac{1}{2}$ inserito all'interno di una cavità risonante e sottoposto ad una potenza di input P_{in} dovuta alle microonde. Possiamo ricavare T_s tramite le equazioni del maser (acronimo di *Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, ovvero *Amplificazione di Microonde tramite Emissione Stimolata di Radiazioni*). Definiamo anzitutto il tasso di rilassamento spin-reticolo

$$\omega_{12} = \omega_{21} \exp \left[-\frac{(E_2 - E_1)}{kT_b} \right] \quad (2.22)$$

dove ω_{12} rappresenta il tasso di rilassamento dal livello ad energia E_1 a quello ad energia E_2 (per un approfondimento si veda l'appendice A), $E_2 - E_1$ corrisponde all'energia di splitting di Zeeman e T_b rappresenta la temperatura del bagno d'elio liquido. Il tasso di rilassamento coincide con l'inverso del tempo di rilassamento spin-reticolo τ o tempo di rilassamento longitudinale T_1 . In particolare, a partire dalle equazioni di Bloch, si ricava che, se prima della perturbazione il sistema possiede momento magnetico $M_0 = M_z$, dopo la perturbazione, generalmente, avremo un momento magnetico suddiviso in due componenti, una parallela all'asse z , $M_{||} \neq M_0$ e una trasversale $M_{\perp}$. Conclusa la perturbazione rf il sistema tenderà a tornare all'equilibrio, perciò la componente trasversale tornerà a 0 con l'andamento

$$M_{\perp}(t) = M_{\perp}(0)e^{-\frac{t}{T_2}} \quad (2.23)$$

dove T_2 è il tempo di rilassamento trasversale, o tempo di rilassamento spin-spin, mentre la componente longitudinale tornerà a M_0 secondo la seguente legge

$$M_z = M_0(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \quad (2.24)$$

Il tempo T_1 è dunque il tempo richiesto per cambiare la componente longitudinale della magnetizzazione netta totale di un fattore pari a e (numero di Nepero). Quando dopo la perturbazione $M_z = 0$ parliamo di saturazione del sistema di spin, quando $M_z = 0$ ed

$M_\perp \neq 0$ parliamo di impulso a 90 gradi, invece se $M_z = -M_0$ saremo di fronte ad un impulso a 180 gradi. Riprendendo le equazioni dei maser, introduciamo la variazione delle densità di popolazione per un sistema a due livelli

$$\frac{dn_2}{dt} = n_1 w_{12} - n_2 w_{21} + (n_1 - n_2) \bar{W} \quad (2.25)$$

e

$$\frac{dn_1}{dt} = n_2 w_{21} - n_1 w_{12} + (n_2 - n_1) \bar{W} \quad (2.26)$$

dove T_b è la temperatura del bagno d'elio liquido e $\bar{W}$ è la probabilità di emissione stimolata della risonanza paramagnetica. Essendo in condizione stazionarie, $\frac{dn_1}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = 0$, inoltre $E_2 - E_1 = \mu H_a \ll kT_b$ perciò

$$\frac{n_2 - n_1}{n_1} = \frac{\mu H_a}{kT_b} \frac{\frac{\omega_{12}}{\bar{W}}}{1 + \frac{\omega_{12}}{\bar{W}}} \quad (2.27)$$

ovvero

$$T_s = T_b \frac{\bar{W} + \omega_{12}}{\omega_{12}} \quad (2.28)$$

quindi la temperatura di spin non è uguale alla temperatura del bagno d'elio, come ci si poteva aspettare. Se ora consideriamo il fatto che la probabilità di emissione stimolata dipende dalla potenza assorbita tramite la relazione

$$\bar{W} = \frac{P_{abs}}{(n_2 - n_1) \mu H_a} \quad (2.29)$$

allora possiamo ricavare la dipendenza della variazione della rotazione di Faraday dalla variazione della temperatura, infatti, considerando l'eq.(2.10) e derivando rispetto a T_s troviamo che

$$\frac{d\theta}{dT_s} = -A \frac{\mu H_a}{kT_s^2} \quad (2.30)$$

ovvero

$$\frac{\Delta\theta}{\theta_0} \propto -\frac{\Delta T_s}{T_s} = -\frac{T_s - T_b}{T_s} \quad (2.31)$$

e sostituendo nell'ultima relazione l'eq.(2.28) troviamo che

$$\frac{\Delta\theta}{\theta_0} = -\frac{P_{abs}}{\omega_{12}(n_2 - n_1) \mu H_a} \quad (2.32)$$

Questa ci fornisce la variazione della rotazione di Faraday rispetto alla potenza assorbita, dobbiamo ora ricollegare quest'ultima alla potenza di input delle microonde P_{in} .

2.5 Potenza assorbita dalla cavità

Quando le microonde interagiscono con il campione, se hanno la giusta frequenza, danno luogo a fenomeni di risonanza. Nel nostro caso la frequenza alla quale si verifica questo fenomeno coincide con la frequenza di risonanza di Larmor $\omega_0 = \gamma_e B_0$, dove γ_e è il rapporto giromagnetico elettronico, quindi deve combaciare con la spaziatura tra i livelli energetici del cristallo paramagnetico dovuta all'effetto Zeeman, ovvero

$$\nu = \frac{g\mu H_a}{h} \quad (2.33)$$

con g fattore correttivo, $g \approx 2,002$; per arrivare alla condizione di risonanza si cerca quindi di variare opportunamente la frequenza e l'intensità del campo magnetico. Per ottimizzare questo fenomeno si utilizza una cavità risonante: essa è una cavità che permette la propagazione solo di alcuni modi, che dipendono dalla geometria della cavità stessa e quindi dalle condizioni al contorno che si vanno a porre. Essa permette di migliorare la sensibilità dell'apparato focalizzando le microonde sul campione e minimizzando le perdite di energia. Si può allora definire il fattore Q del sistema

$$Q = \frac{2\pi E_{in}}{E_{diss}} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu} \quad (2.34)$$

dove E_{diss} rappresenta l'energia dissipata per un periodo dalle microonde, E_{in} l'energia immessa, ν_0 la frequenza di risonanza e $\Delta\nu$ è la larghezza a metà altezza della risonanza. Se ora consideriamo la cavità risonante come un circuito possiamo definire due nuovi Q , cioè Q con e senza carico, il primo, Q_0 , rappresenta il fattore di qualità che tiene conto delle perdite interne sulle pareti e sul campione stesso, il secondo, Q_{ext} considera la potenza che esce dalla cavità attraverso il meccanismo di accoppiamento dell'impedenza della cavità con la guida d'onda. L'accoppiamento di impedenza è descritto dal fattore $\beta = \frac{Q_0}{Q_{ext}}$, il quale è uguale a 1 per una cavità criticamente accoppiata, cioè con massimo trasferimento di potenza; finché il Q_0 resta maggiore del Q_{magn} della cavità, cioè finché l'assorbimento magnetico è maggiore delle perdite ohmiche, allora la potenza assorbita può essere considerata uguale alla potenza immessa moltiplicata per l'effetto dell'accoppiamento.

$$P_{abs} = P_{in} \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2} \quad (2.35)$$

Perciò riprendendo l'eq.(2.32) vediamo che

$$\frac{\Delta\theta}{\theta_0} = - \frac{P_{in} 4\beta}{\omega_{12}(n_2 - n_1)\mu H_a (1 + \beta)^2} \quad (2.36)$$

Questo ci suggerisce che misurando la rotazione di Faraday siamo in grado di rivelare anche piccole potenze immesse nel sistema. Infatti se consideriamo una cavità criticamente accoppiata, con $\beta = 1$, un tempo di rilassamento $\tau = \frac{1}{\omega_{12}} = 5ms$, $\mu H_a = h\nu \approx h \cdot 10GHz$

corrispondenti a $6,62 \cdot 10^{-24} \text{J}$, $n_2 - n_1 = \frac{n_0 \mu H_a}{2 kT} \approx 10^{18}$ a 4K per $N_0 \approx 10^{19}$, $\theta_0 \approx 110^\circ \frac{1}{\text{mm}}$, $\Delta\theta_{\min} \approx 1^\circ$, quindi per un campione di circa 10 mm, $\frac{\Delta\theta_{\min}}{\theta_0} \approx 10^{-3}$, allora la potenza minima rivelabile, P_{in} sarà dell'ordine di 10^{-6}W . Utilizzando un sistema ottico più "spinto"¹⁸, che impiega un laser come sonda ottica della popolazione di spin, si può arrivare a misurare angoli dell'ordine di $2 \mu\text{rad}$, cioè 10^{-4} gradi, perciò è possibile rivelare microonde di potenza $P_{in} \approx 10^{-11} \text{W}$.

2.6 Cavità risonante di Fabry-Perot

La sensibilità complessiva può essere migliorata ricoprendo le estremità del cristallo con del materiale semiriflettente, in modo da formare un interferometro di Fabry-Perot; si potrebbero così raggiungere $\Delta\theta_{\min}$ minori e quindi sensibilità maggiori. L'interferometro di Fabry-Perot è caratterizzato dalla cosiddetta *finesse*

$$F = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)} \quad (2.37)$$

dove R è il coefficiente di riflessione del campo elettrico su una delle due superfici dell'interferometro che supponiamo identiche. La precisione dell'interferometro dipende da F in modo che più esso è grande, più preciso sarà lo strumento, infatti il potere risolvete ne è inversamente proporzionale

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mF} \quad (2.38)$$

simile a

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN} \quad (2.39)$$

dei reticoli di diffrazione. Se consideriamo un fascio di luce polarizzato lungo l'asse x' e il cristallo paramagnetico avente l'asse ottico lungo z , allora ad ogni passaggio attraverso il campione corrisponde una rotazione di angolo θ , come raffigurato nella figura 2.3.

Detti allora R e T i coefficienti di riflessione e trasmissione del campo elettrico, otteniamo per il fascio di luce emergente dal punto B le seguenti relazioni

$$E_{By'} = E_0 T^2 [\sin\theta + \sin 3\theta \cdot R^2 + \sin 5\theta \cdot R^4 + \dots] \quad (2.40)$$

$$E_{Bx'} = E_0 T^2 [\cos\theta + \cos 3\theta \cdot R^2 + \cos 5\theta \cdot R^4 + \dots] \quad (2.41)$$

$$E_B = E_{By'} iy' + E_{Bx'} ix' \quad (2.42)$$

dove E_0 è l'ampiezza del campo elettrico incidente. Se ora consideriamo un nuovo piano identificato dagli assi x e y , in modo che la luce uscente sia polarizzata lungo l'asse x , allora

$$ix = \cos\psi ix' + \sin\psi iy' \quad (2.43)$$

$$iy = -\sin\psi ix' + \cos\psi iy' \quad (2.44)$$

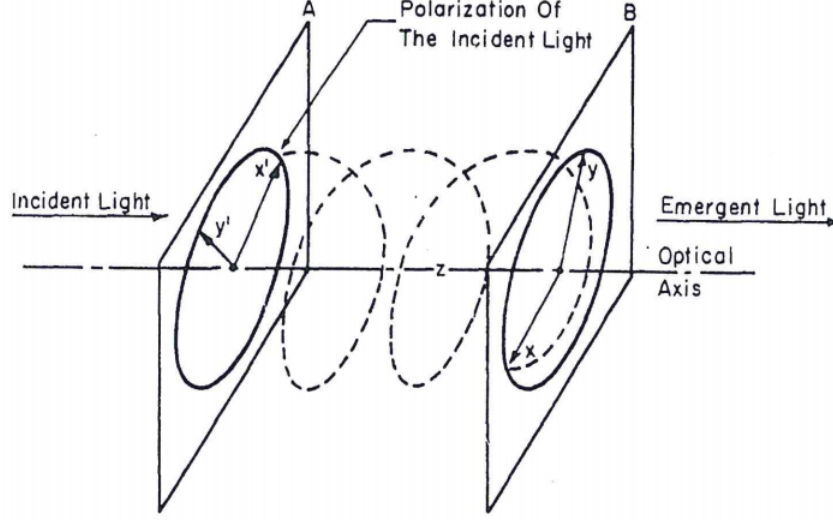


Figura 2.3: Proposta di Chang di interferometro

con

$$\psi = \arctan \frac{E_{By'}}{E_{Bx'}} \quad (2.45)$$

implica che

$$E_{Bx} = E_{Bx'} \cos \psi + E_{By'} \sin \psi = \sqrt{E_{Bx'}^2 + E_{By'}^2} \quad (2.46)$$

$$E_{By} = E_{By'} \cos \psi - E_{Bx'} \sin \psi = 0 \quad (2.47)$$

quindi ponendo un polarizzatore lungo l'asse iy esso non trasmetterebbe alcun fascio di luce, ma, se avvenisse una leggera rotazione del piano di polarizzazione della luce $\Delta\theta$ in modo che essa non sia più polarizzata lungo l'asse ix , come avviene nell'interazione con le microonde, allora

$$E_{By} \approx E_0 T^2 \Delta\theta [\cos(\theta_0 - \psi) + 3\cos(3\theta_0 - \psi) \cdot R^2 + 5\cos(5\theta_0 - \psi) \cdot R^4 + \dots] \quad (2.48)$$

che possiamo riscrivere come

$$E_{By} \approx E_0 T^2 \Delta\theta F \quad (2.49)$$

dove θ_0 rappresenta la rotazione di Faraday per un interferometro di lunghezza l_{AB} , secondo la seguente relazione

$$\theta_0 = \left(A_1 \tanh \frac{\mu H_a}{k T_b} + B_1 H_a \right) l_{AB} \quad (2.50)$$

Questo significa che l'effetto dell'interferometro di Fabry-Perot è quello di aumentare il cammino ottico in cui la luce interagisce col cristallo dando luogo all'effetto Faraday. Più in generale il significato fisico della costante di *finesse* è proprio quello di aumentare il numero

di volte in cui la luce percorre il cristallo di un fattore quasi uguale ad F . Stimiamo l'ordine di grandezza di F ; essendo $\cos(\pi) = \cos[(2n+1)\pi]$ ed assumendo che $\theta_0 = n\pi$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, allora possiamo raccogliere il coseno presente nella espressione di F , cioè

$$F = \cos(\theta_0 - \psi)[1 + 3 \cdot R^2 + 5 \cdot R^4 + \dots] \quad (2.51)$$

$$= \cos(n\pi - \psi) \left[\frac{2}{(1 - R^2)^2} - \frac{1}{1 - R^2} \right] \quad (2.52)$$

Allora per materiali molto riflettenti, ad esempio con $R = 0,99$, troviamo $F \approx 5000 \cos(n\pi - \psi)$. Perciò essendo il $\Delta\theta_{min}$ misurabile inversamente proporzionale a F , possiamo avere un miglioramento della sensibilità finale di tre ordini di grandezza solo con l'utilizzo di questo strumento. Quindi considerando la sensibilità ricavata nella sezione precedente, e l'inserimento di interferometri moderni aventi riflettività ancora maggiori, si può stimare che il rivelatore di microonde potrebbe raggiungere sensibilità dell'ordine dei fW.

Capitolo 3

Misura dell'effetto Faraday in un cristallo di GSO

In questo capitolo presenteremo una misura della costante di Verdet di un cristallo di paramagnetico di GSO, utilizzando come sonda ottica un laser, alla stregua di quanto avviene in un rivelatore ottico di microonde in cui la rotazione di Faraday viene utilizzata per rivelare la radiazione incidente. Anzitutto descriveremo brevemente il rivelatore di microonde utilizzato da Daniels e Chang per effettuare le loro misure, poi descriveremo i risultati che abbiamo ottenuto nel nostro esperimento, misurando la potenza del laser, l'*extinction ratio* del polarizzatore ed infine la costante di Verdet del cristallo.

3.1 Apparato sperimentale di Daniels e Chang

Dopo aver esposto la basi teoriche sottostanti, presentiamo una breve descrizione dell'apparato sperimentale utilizzato da Chang *et al.*²¹, prendendo spunto dai lavori di Daniels *et al.*^{12, 13} per effettuare le loro misurazioni. Questo stesso apparato, attraverso piccole modifiche, può essere utilizzato oltre che come rivelatore di microonde, anche come modulatore d'ampiezza¹⁵ ed in funzione di una misura del tempo di rilassamento spin-reticolo. Noi ci concentreremo nell'analisi della prima funzione. Come già anticipato nella parte teorica, l'angolo di rotazione di Faraday è proporzionale alla probabilità stimolata di emissione, che a sua volta dipende dalla potenza assorbita dal campione, perciò misurando θ_0 prima della interazione con le microonde e $\Delta\theta$ dopo l'interazione, possiamo stimare la potenza incidente delle microonde. Per raggiungere questo scopo Chang e i suoi collaboratori utilizzarono l'apparato sperimentale raffigurato in Figura 3.1. Sulla sinistra è presente una lampada a mercurio con un filtro, in modo da emettere luce con lunghezza d'onda di circa 546 nm, una lente per mettere a fuoco il fascio di luce sul polarizzatore che poi inciderà sul campione, simmetrica ad un'altra lente che mette a fuoco la luce uscente dalla cavità sulla seconda lamina di materiale polarizzante; la luce in uscita è poi raccolta da un fotomoltiplicatore. Questi strumenti costituiscono la parte del sistema che potremmo identificare come un polarizzatore ottico. La seconda parte dell'apparato è costituita dallo spettrometro di risonanza

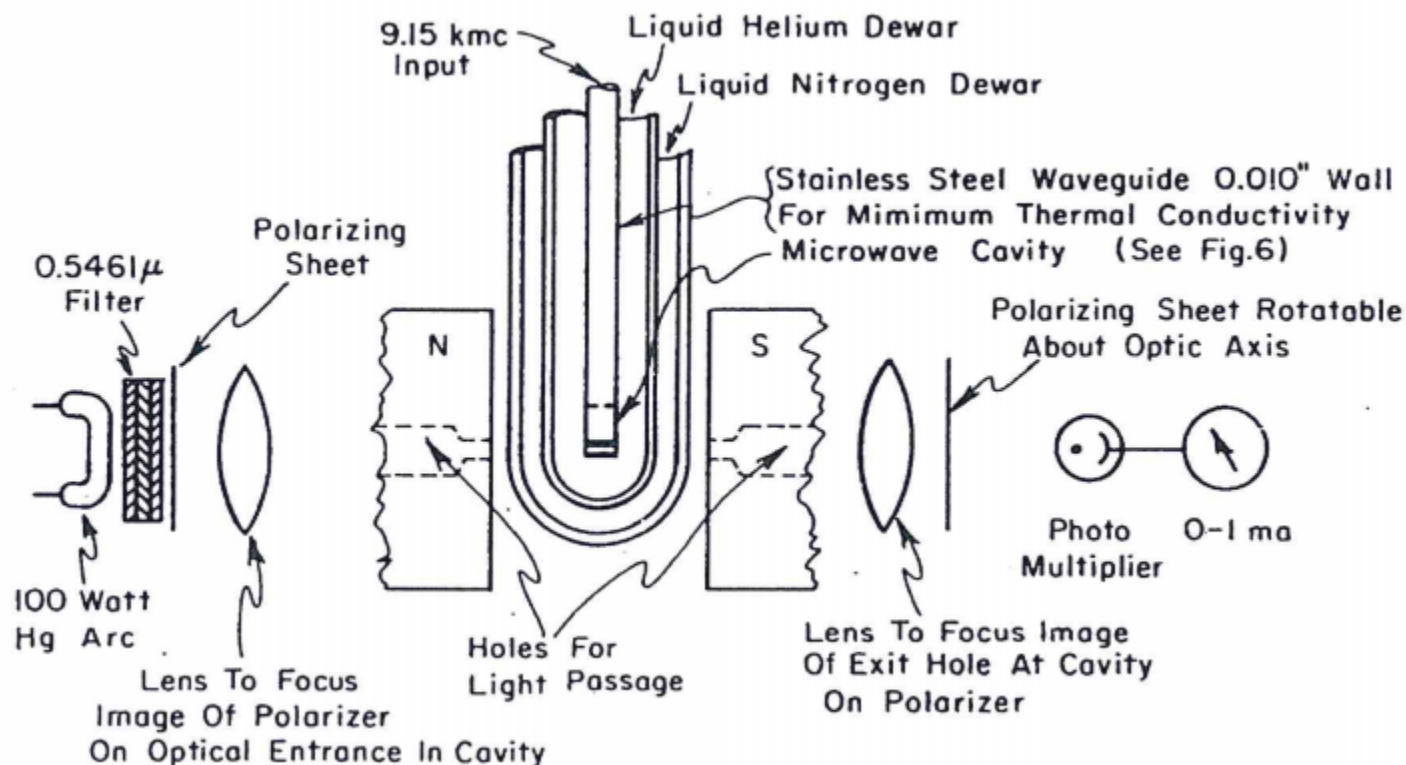


Figura 3.1: Disposizione schematica del rivelatore di microonde

paramagnetica. In particolare esso è costituito da due magneti al cui interno viene posizionato uno *dewar* contenente nell'ordine, dall'esterno all'interno: uno strato di azoto liquido (con temperatura di ebollizione a circa 77,15 K), uno strato di elio liquido (con temperatura di ebollizione di circa 4,2 K), la cavità risonante opportunamente accoppiata con le microonde a 9,15 kMc (ovvero 9,15 GHz, che corrispondono ad una lunghezza d'onda di circa 3,28 cm) all'estremità della quale si applica il campione di sale paramagnetico (in questo caso neodimio etilsolfato). Bisogna fare attenzione a porre il cristallo con l'asse ottico parallelo al campo magnetico applicato e contemporaneamente nel massimo del campo magnetico delle microonde $H_{R.F.}$. Si dovrà poi fare in modo che la luce passi attraverso le aperture nei magneti e attraverso le "finestre" degli *dewar* non ricoperte da argento (che serve per far diminuire il trasferimento di calore per irraggiamento), e che tutto ciò si trovi nel cammino ottico del polarimetro.

3.2 Apparato sperimentale per la misura della costante di Verdet

Come già detto nella parte teorica, un metodo per aumentare la sensibilità del rivelatore di microonde è di utilizzare una sorgente di luce coerente invece che incoerente, cioè un laser. L'obiettivo del nostro esperimento è di stimare la costante di Verdet di un cristallo paramagnetico di GSO, utilizzando come sonda ottica un laser He-Ne. Nella figura 3.2 è rappresentato lo schema dell'apparato sperimentale utilizzato per effettuare la misura della rotazione del piano di polarizzazione della luce. Il *set-up* sperimentale è composto da: un

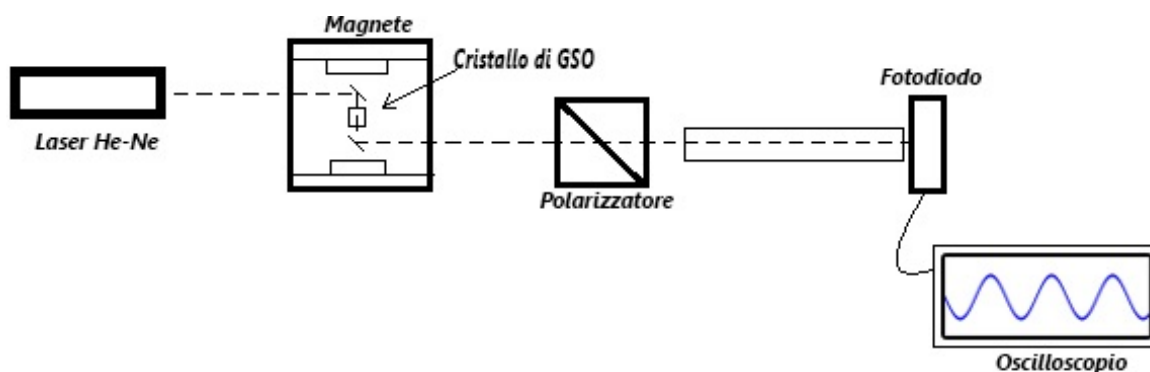


Figura 3.2: Schema sperimentale della misura della costante di Verdet

laser He-Ne polarizzato che emette luce di lunghezza d'onda $\lambda \approx 632,8\text{nm}$, due specchietti posti a 45° , un magnete permanente che nel centro esprime un campo magnetico del valore di $0,548 \pm 10^{-3}\text{T}$, il cristallo paramagnetico di GSO, un polarizzatore, un fotodiodo con apposita schermatura dalla luce esterna ed un oscilloscopio. Tale apparato può sicuramente essere migliorato e si possono ottenere misurazioni più accurate della costante di Verdet, ad esempio introducendo un ulteriore polarizzatore, oppure facendo variare il campo magnetico misurando diverse rotazioni, ed interpolando i dati trovati.

3.2.1 Misura di potenza

La prima parte dell'esperimento consiste nel misurare la potenza del laser, a tal scopo abbiamo utilizzato: un laser He-Ne, un fotorivelatore, due specchietti e un oscilloscopio. Il laser He-Ne, avente potenza nominale minore di 25 mW, emette luce monocromatica di lunghezza d'onda di 632,8 nm, che corrisponde alla transizione dal livello $3s_2$ al livello $2p_4$ del neon, quindi di colore rosso. In particolare il laser da noi utilizzato è fornito dalla Research Electro-Optics, Inc., modello numero 32734. Il fascio emergente incontra uno specchietto in modo che esso venga deviato di 90 gradi, poi incide su un altro specchio venendo deviato in direzione opposta di altri 90 gradi, quindi ritornando sulla direzione iniziale. L'utilità

di questo sistema verrà messa in risalto nella fase finale dell'esperimento, in cui dovremo posizionare un traferro che dovrà essere attraversato dalla luce emessa dal laser. Dopo le due suddette riflessioni, la luce infine incide su un fotorivelatore al silicio, il cui segnale viene visualizzato su un oscilloscopio. Il rivelatore utilizzato consiste in un fotodiodo al silicio, denominato DET36A(/M) (Figura 3.3) avente caratteristiche fornite dal costruttore. Que-



Figura 3.3: Il fotorivelatore DET36A(/M)

st'ultimo rilascia anche la responsività del dispositivo, in funzione della lunghezza d'onda della luce impattante, $R(\lambda)$; questa grandezza esprime la corrente erogata dal fotodiodo in funzione della potenza del fascio di luce incidente, ad una lunghezza d'onda fissata. Nel nostro caso disponendo di un fascio laser di ~ 633 nm di lunghezza d'onda, e conoscendo $R(\lambda)$, ricaviamo $R \approx 0,31 A/W$. Ora colleghiamo il fotorivelatore all'oscilloscopio Tektronix 2246, facendo attenzione ai fenomeni di saturazione che possono verificarsi nel caso in cui l'ampiezza del segnale superi il voltaggio della batteria interna. Per prevenire tali effetti si inserisce una resistenza di $50 \pm 0,5 \Omega$ in parallelo alla resistenza interna dell'oscilloscopio di $1 \pm 0,01 M\Omega$, così facendo la resistenza equivalente sarà, in buona approssimazione, di $50 \pm 0,5 \Omega$. Ora misurando il segnale sull'oscilloscopio saremo in grado di valutare la corrente ad esso associata: troviamo un segnale di $22,45 \pm 0,5$ mV che applicato ad una resistenza da 50Ω , secondo la legge di Ohm $V = RI$, fornisce una corrente di $(4,49 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} A$. Ora essendo $R(\lambda) = \frac{I}{P}$, la potenza della luce incidente sarà $P = \frac{4,49 \cdot 10^{-4} A}{0,31 A/W} \approx 1,45 \pm 0,03$ mW.

3.2.2 Misura di polarimetria

Dopo aver misurato la potenza del fascio di luce cerchiamo di misurare in che direzione sia polarizzato, nel caso in cui sia polarizzato. A tal fine poniamo un polarizzatore tra il secondo specchio ed il fotorivelatore; notiamo che, in realtà, attraverso tale misura non troveremo la polarizzazione del fascio di luce in uscita dal laser, ma come essa è variata dopo le riflessioni con gli specchi, in quanto il campo elettrico subisce uno sfasamento ad

ogni riflessione. Il polarizzatore da noi utilizzato è un prisma di Glan-Thompson, cioè un prisma birifrangente avente gli assi ottici in corrispondenza della giunzione dei due prismi, che sono uniti attraverso un collante, solitamente balsamo del Canada. Nello specifico il nostro polarizzatore è denominato GTH10M (Figura 3.4), ed è composto da un cristallo di calcite, che è un materiale a birifrangenza negativa, cioè con $n_o > n_e$, il quale fa riflettere internamente il raggio ordinario e lascia passare indisturbato il raggio straordinario, che risulta polarizzato.



Figura 3.4: Il polarizzatore GTH10M

Posizionando questo polarizzatore nel cammino ottico del fascio di luce, si può notare come il segnale visualizzato dall'oscilloscopio vari a seconda di quanto si faccia ruotare il dispositivo attorno all'asse orizzontale, in accordo con la legge di Malus

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (3.1)$$

dove I è l'intensità dell'onda in uscita dal polarizzatore, I_0 è l'intensità dell'onda incidente e θ rappresenta l'angolo formato dal piano di polarizzazione della luce e l'asse di trasmissione del polarizzatore. Secondo questa legge quando $\theta = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ si ha la trasmissione massima e $I = I_0$ mentre quando $\theta = \frac{n}{2}\pi$, con $n \in \mathbb{N}$, allora $I = 0$. Nella realtà entrambe queste situazioni non si verificano, ma l'intensità dell'onda trasmessa spazierà tra un valore minimo $I_{min} \neq 0$ ed un valore massimo $I_{max} \neq I_0$. Per quanto riguarda questo polarizzatore, il costruttore fornisce la percentuale di intensità luminosa massima trasmessa a seconda della lunghezza d'onda, che a 633 nm corrisponde a circa il 90%; attraverso una rapida misura con l'oscilloscopio, si rileva un segnale massimo di circa $19,80 \pm 0,5$ mV, che corrispondono a $1,28 \pm 0,03$ mW, cioè l'88% della potenza incidente. Per misurare la potenza minima, invece, possiamo togliere la resistenza da 50Ω ed usare come carico quella dell'oscilloscopio da $1M\Omega$, in quanto essendo l'intensità luminosa molto bassa non incorreremo in fenomeni di saturazione. Si misura un segnale minimo di circa $0,398 \pm 0,01$ V, che corrispondono a $1,28 \pm 0,03$ μ W e quindi ad un *extinction ratio* dell'ordine di 10^{-3} .

3.2.3 Misura della rotazione di Faraday

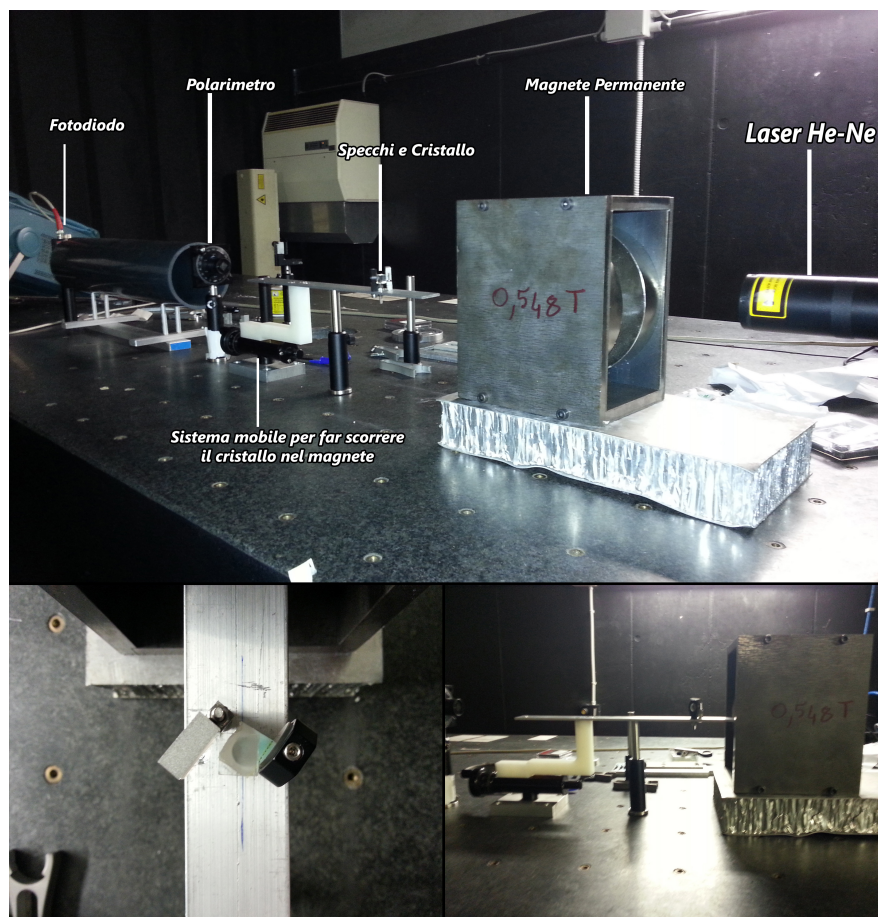


Figura 3.5: In alto una fotografia dell'apparato sperimentale utilizzato. In basso a sinistra un dettaglio degli specchi e del cristallo. In basso a destra un ingrandimento del sistema in grado di scorrere dentro al magnete.

Inserendo un cristallo paramagnetico di GSO tra i due specchietti e misurando eventuali spostamenti nella polarizzazione del fascio ottico con l'apparato sperimentale osservabile in figura 3.5 ricaviamo la costante di Verdet del cristallo. Si dovrà fare attenzione ad allineare parallelamente il fascio di luce che passa internamente al cristallo con le linee del campo magnetico, motivo per il quale si è ideato il sistema di specchi in primo luogo. Fatto questo si dovrebbe verificare una rotazione del piano di polarizzazione della luce, sperimentalmente osservabile se, dopo esserci posti sul minimo dell'intensità trasmessa dal polarizzatore, cioè con l'asse di polarizzazione ortogonale rispetto alla polarizzazione della luce, si nota un aumento del segnale rispetto al minimo, segno che la polarizzazione è cambiata. Per evitare vibrazioni che potrebbero spostare l'allineamento del sistema ottico, abbiamo posto gli specchi e il cristallo su una piastra in grado di muoversi attraverso un posizionatore micrometrico per entrare all'interno del magnete, così facendo abbiamo misurato una rotazione

dell'angolo di polarizzazione, rispetto al minimo, di $100^\circ \pm 1^\circ$. Partendo dall'equazione 1.1 ed esplicitando la costante di Verdet ν , troviamo che

$$\nu = \frac{\theta}{lB} \quad (3.2)$$

quindi, essendo la lunghezza del cristallo di $10 \pm 0,3$ mm ed essendo l'intensità del campo magnetico di $0,548 \pm 10^{-3}$ T, troviamo, per una rotazione di $100 \pm 1^\circ$ una costante di Verdet di $18,25 \pm 0,73 \frac{^\circ}{mm \cdot T}$. In esperimenti precedenti su elementi di terre rare e sali paramagnetici si erano rivelate rotazioni di ordini di grandezza simili¹⁹.

Capitolo 4

Conclusioni

In questa trattazione abbiamo presentato un rivelatore ottico di microonde che sfrutta l'effetto Faraday come metodo di rivelazione, riconducendolo alla popolazione di spin di un cristallo paramagnetico sottoposto ad un campo magnetico ed a temperature minori di quella di condensazione dell'elio. Il nostro obiettivo era quello di dimostrare come fosse possibile raggiungere una sensibilità di rivelazione, di "piccole" potenze immesse nel sistema, migliore, attraverso l'utilizzo di un laser come sonda ottica, riuscendo a rivelare potenze dell'ordine del fW. Soffermandoci su una delle diverse componenti del rivelatore abbiamo misurato la rotazione di Faraday in un cristallo paramagnetico di GSO, utilizzando un laser He-Ne polarizzato come sonda ottica, trovando un valore della costante di Verdet di circa $18,25^\circ$ paragonabile a quello di altri materiali paramagnetici. Complessivamente, quindi, il rivelatore ottico di microonde risulta essere uno strumento interessante con possibilità di essere migliorato in futuro¹⁰.

Capitolo 5

Appendice

5.1 Appendice A

I laser sono dispositivi che emettono luce coerente e che si suddividono in varie categorie, a seconda della potenza, del sistema che utilizzano per ottenere l'inversione di popolazione, dello stato dell'elemento all'interno del quale avviene l'inversione, del numero di stati che lo compongono etc. Le basi per raggiungere questo tipo di tecnologia furono poste da Einstein nel 1917, quando mostrò come fosse possibile ottenere la formula di Planck per la densità di energia considerando i fenomeni di emissione ed assorbimento. Supponiamo di avere un atomo con due livelli di energia E_1 ed E_2 , e che ci siano N_1 ed N_2 atomi associati ad essi, allora l'energia della radiazione elettromagnetica assorbita o emessa obbedirà alla seguente relazione $E = h\nu = E_2 - E_1$, dalla quale possiamo ricavare la frequenza. L'assorbimento può avvenire solo in presenza di forze esterne, se queste non sono presenti l'unico processo possibile è quello della cosiddetta *emissione spontanea* in cui un atomo di energia E_2 decade, cedendo energia sotto forma di onde elettromagnetiche di frequenza $\nu = (E_2 - E_1)/h$, in modo analogo ai fenomeni di decadimento radioattivo. Infatti in entrambi i casi sono coinvolte delle costanti di tempo che indicano con che frequenza gli atomi compiano la transizione di energia; indichiamo questa costante, per l'emissione spontanea, A_{21} , e la variazione del numero di atomi di energia N_2 sarà proporzionale ad essa, alla popolazione stessa, e al tempo trascorso, in formule

$$dN_2 = -A_{21}N_2dt \quad (5.1)$$

che, separando le variabili ed integrando, rende

$$N_2(t) = N_2(0) \exp(-A_{21}t) \quad (5.2)$$

Il coefficiente A_{21} è il noto *coefficiente A di Einstein*, ed ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, infatti esso corrisponde all'inverso del tempo di vita τ_{21} dello stato con energia E_2 . Se l'atomo interagisce con onde della giusta frequenza, si possono verificare i fenomeni dell'assorbimento e dell'emissione stimolata; il primo è proporzionale al numero di particelle ed alla densità di energia alla frequenza ν_{12} , cioè $N_1 B_{12} \rho(\omega_{12})$ dove B_{12} è un *coefficiente B di Einstein*; il secondo è molto simile come emerge dalla formula seguente, $N_2 B_{21} \rho(\omega_{21})$

che rappresenta il numero di emissioni indotte dal passaggio dell'onda. Eguagliando questi contributi supponendo una condizione di equilibrio, e posto $\frac{N_1}{N_2} = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)$, ricaviamo la legge di Planck

$$\rho(\omega_{21}) = \frac{A_{21}}{\exp((\hbar\omega_{21}/kT)B_{12} - B_{21})} \quad (5.3)$$

nel caso in cui sia $\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}$, e $B_{21} = B_{12}$. Una caratteristica importante della luce emessa tramite emissione stimolata è di avere un alto grado di coerenza, mentre la radiazione derivante dall'emissione spontanea risulta essere incoerente⁷.

Capitolo 6

Riferimenti

6.1 Bibliografia

1. A.Carnera, *Appunti di Fisica della Materia*, Padova (2014/2015)
2. Alexei M. Frolov e David M. Wardlaw, *On the classical theory of molecular optical activity*, Department of Chemistry, University of Western Ontario, Londra, Ontario N6H 5B7, Canada (2010).
3. C.H. Anderson e E.S. Sabisky, *Spin-Phonon Spectrometer*, New Jersey (1971).
4. D.S Klinger, J.W. Lewis e C.E. Randall, *Polarized light in Optics and Spetroscopy* Santa Cruz (1990).
5. IUPAC. Compendium of Chemical Terminology, 2nd ed. (the "Gold Book"). Compiled by A. D. McNaught and A. Wilkinson. Blackwell Scientific Publications, Oxford (1997).
6. J.A. Weil, J.R. Bolton e J.E. Wertz, *Electronic Paramagnetic Resonance:Elementary Theory and Applications*, New York (1994).
7. J. Hawkes e I. Latimer, *Lasers: Theory and Practice*, Londra (1995).
8. Jean Becquerel e W. J. De Haas e J. Van Den Handel, *Sur le pouvoir rotatoire paramagnetique, aux trs basses tempratures, du nitrate double de crium et de magnsium et de deux minraux contenant du manganse (spessartite et dialogite)*, Leiden (1931).
9. Jean Becquerel e W . J. De Haas, *The law of magnetisation of solid crystals. Resolution of the Faraday-effect into two effects of different origin. Diamagnetic and paramagnetic rotation of the plane of polarisation*, Leiden (1928).
10. J. Govenius, R. E. Lake, K. Y. Tan e M. Mttnen, *Detection of Zeptojoule Microwave Pulses Using Electrothermal Feedback in Proximity-Induced Josephson Junctions*, Aalto, (2016).
11. J.H. Van Vleck, *The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities* (Clarendon Press, Oxford (1932).
12. J. M. Daniels e H. Wesemeyer, *Can. J. Phys.* 36, 405, (1958).
13. K.E. Rieckhoff, *Optical Faraday Rotation Studies of Paramagnetic Resonance in Neodymium Ethysulfate*, University of British Columbia, (1958).
14. N. Bloembergen, *Proposal for a New Type Solid State Maser*, Cambridge (1956).

15. N. Bloembergen, P.S. Pershan and L.R. Wilcox, *PhysRev. Microwave Modulation of Light in Paramagnetic Crystals*, *Phys. Rev.*, **120**, 6, (1960).
16. P. Mazzoldi, M. Nigro e C. Voci, *Fisica-Volume 2*, (2001).
17. R. Bruzzese, F. Frazzoli, M. Mancini, G. Sacerdoti, G. Toraldo di Francia e F. Uccelli, *Misura del tempo di rilassamento spin-reticolo in sostanze paramagnetiche a mezzo effetto Faraday in campi magnetici pulsati*, INFN, Pisa (1966).
18. T. Kohmoto, Y. Fukuda, and T. Hashi, *Optically detected low-field ESR in the metastable state of $Tm^{2+}:SrF_2$. I. ESR signals and cross relaxation*, Kyoto (1986).
19. Weber M.J. *Crc Handbook of Laser Science*, USA, (1995). 20. W. Opechowski, *Revs. Modern Physics* 25 (1953).
21. W.S.C. Chang, *The Ohio State University Research Foundation Technical Report 1040-2* (1961).
22. W.S.C. Chang e J.Q. Burgess, *Optical Faraday Rotation in Paramagnetic Salts* (1962).

6.2 Sitografia

www.physics.rutgers.edu/grad/506/faraday.pdf
www.cis.rit.edu/htbooks/nmr/inside.htm
www.ino.it/home/pratesi/zz_Cap1,1-4.pdf
www.treccani.it
www.studentifisica.info
www.dieet.unipa.it/cali/didattica/mat_didatt/Fabry_Perot.pdf
www.cif.iastate.edu

*Ringrazio il professor Giovanni Carungo
per l'aiuto fornito durante la stesura
della tesi, e i miei genitori,
per avermi dato l'opportunità
di raggiungere questo traguardo.*