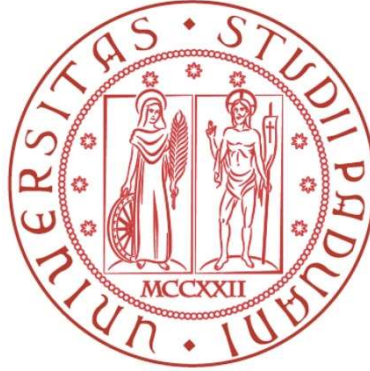


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”



CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Tesi di Laurea Magistrale

Algoritmi per Problemi di Lot-Sizing: la Gestione delle Scorte

Laureando

Erika Proietti

1128923

Relatore

Ch. mo Prof. Marco Di Summa

15 Dicembre 2017

Anno Accademico 2016/2017

*Ai miei genitori,
per essere stati un costante sostegno durante questo difficile percorso.*

*A Matteo,
per essermi stato vicino in ogni momento.*

*A chi,
nonostante tutto, continua a crederci.*

Ringraziamenti

Per la seconda volta sono arrivata a questo momento, scrivere i ringraziamenti per la mia tesi di Laurea.

Desidero innanzitutto ringraziare il Professore Marco Di Summa per i preziosi insegnamenti e le numerose ore dedicate alla mia tesi. Ciò che lo distingue è la sua professionalità, la sua serietà nel lavoro e la sua disponibilità; sempre chiaro e pronto a dirimere i miei dubbi durante la stesura di questo lavoro.

Intendo poi ringraziare il Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”, in particolare la biblioteca, per avermi fornito testi e documenti indispensabili per la realizzazione della tesi.

Inoltre, vorrei esprimere la mia sincera gratitudine e stima al mio ragazzo Matteo per essermi stato sempre vicino in questo periodo e per avermi sempre supportato e sopportato, a mia cugina Michela per i numerosi consigli durante la ricerca, e alle mie amiche Serena, Claudia e Giada per il supporto morale e psicologico.

Infine, ma non per importanza, ho desiderio di ringraziare i miei genitori, Tunia e Federico, per avermi dato la possibilità di studiare lontano da casa e per il sostegno ed il grande aiuto dato durante tutti e due gli anni di università.

Indice

Introduzione	6
1 Generalità	9
1.1 <i>Introduzione</i>	9
1.2 <i>Programmazione Lineare Intera</i>	9
1.3 <i>Geometria della Programmazione Lineare Intera</i>	11
1.3.1 <i>Combinazioni Lineari, Spazi Lineari</i>	11
1.3.2 <i>Combinazioni Affini, Spazi Affini</i>	12
1.3.3 <i>Combinazioni Convesse, Insiemi Convessi</i>	13
1.3.4 <i>Poliedri, Facce, Matrici Totalmente Unimodulari</i>	16
1.3.5 <i>Punti Estremi, Soluzioni di Base</i>	18
1.3.6 <i>Politopi, Proiezioni</i>	19
1.3.7 <i>Problema di Separazione, Piani di Taglio</i>	20
1.4 <i>Grafi, Flussi di Costo Minimo</i>	21
2 Modello Lot-Sizing	24
2.1 <i>Introduzione</i>	24
2.2 <i>Classificazione dei Modelli</i>	24
2.3 <i>Gestione delle Scorte</i>	35
3 Modello Lot-Sizing Senza Capacità	38
3.1 <i>Introduzione</i>	38
3.2 <i>Modello Lot-Sizing Senza Capacità</i>	38
3.2.1 <i>Formulazione per LS-U</i>	38
3.2.2 <i>Struttura delle Soluzioni Ottime</i>	39

<i>INDICE</i>	5
3.2.3 <i>Disuguaglianze Valide</i>	46
3.2.4 <i>Formulazione Estesa per LS-U</i>	55
3.3 <i>Costi di Wagner-Whitin</i>	56
4 ULS3	61
4.1 <i>Introduzione</i>	61
4.2 <i>Modello ULS3 e Algoritmo Risolutivo</i>	62
4.2.1 <i>Formulazioni Equivalenti per ULS3</i>	62
4.2.2 <i>Struttura delle Soluzioni Ottime</i>	67
4.2.3 <i>Algoritmo per ULS3</i>	70
4.2.4 <i>Involuppo Convesso</i>	80
4.3 <i>ULS3 con Domande Non-Negative</i>	97
4.4 <i>ULS3 con Domande Nulle e Costi di Wagner-Whitin</i>	106
Conclusioni	110
Bibliografia	112

Introduzione

Il problema di Lot-Sizing senza capacità con vendite e scorte di sicurezza e gli algoritmi per la risoluzione di questi modelli sono l'oggetto di studio di questa tesi. In particolare l'obiettivo principale è quello di andare ad analizzare e formulare un algoritmo risolutivo per i modelli di Lot-Sizing senza capacità con vendite e scorte di sicurezza, andando a studiare le relazioni tra i costi di produzione, i costi di stoccaggio e i prezzi di vendita e tenendo presente l'arbitrarietà delle domande.

Per arrivare ad ottenere dei risultati in questo contesto, è stato necessario prima studiare le caratteristiche di un modello Lot-Sizing senza capacità più generale e l'algoritmo di questo modello.

Quello dello studio delle estensioni del modello Lot-Sizing è, in realtà, un problema di ricerca operativa classico e molto attivo.

Il problema di Lot-Sizing è un problema nel quale una certa quantità viene prodotta per soddisfare delle domande sopra ad un orizzonte temporale finito. Il problema di Lot-Sizing tradizionale è definito per un sistema ad un singolo prodotto, con un costo fisso da pagare se la produzione parte o meno in un determinato periodo, e altri costi che variano in base al tipo di modello preso in considerazione. Il problema è determinare un piano di produzione che soddisfa tutte le domande senza backloging, il quale deve minimizzare i costi totali di produzione. In un lavoro, Wagner e Whitin [17] nel 1958 proposero un algoritmo di programmazione dinamica per risolvere un problema Lot-Sizing senza capacità con un singolo prodotto senza backloging, dove con il termine senza capacità si intende un problema in cui non c'è limite all'importo prodotto in ciascun periodo, mentre con il termine backloging si indica un problema Lot-Sizing in cui la domanda può essere

soddisfatta anche in periodo successivo alla richiesta. Zangwill, nel 1966, fece un tentativo iniziale di incorporare funzioni di costo concave e di consentire il backlogging, si veda [18]. Lui risolse un problema simile, formulandolo come un problema di rete di flusso con i costi sugli archi. Love (1968) considerò il problema con dei vincoli nella capacità e sviluppò una caratterizzazione parziale della struttura di una soluzione ottima. L'estensione per consentire un modello Lot-Sizing con capacità è molto importante, poiché la capacità è frequentemente incontrata nella pratica. Florian e Klein (1971), si veda [4], studiarono il problema considerando la capacità costante. Dimostrarono che il problema era polinomialmente risolvibile sfruttando la struttura speciale di sequenze di produzione ottimali. Fu dato un algoritmo di programmazione dinamica, il quale ha complessità pari a $O(T^4)$, dove con T si indica il numero di periodi nell'orizzonte temporale. Questa complessità fu successivamente ridotta a $O(T^3)$ da Van Hoesel e Wagelmans (1996), si veda [16]. Pochet, nel 1988, propose una formulazione estesa e compatta con $O(T^3)$ variabili e vincoli per questo problema, si veda [11]. Quando le capacità variano e sono non-decrescenti nel tempo, il problema è risolvibile polinomialmente sotto le condizioni che i costi siano di Wagner-Whitin e i costi di produzione siano non-decrescenti nel tempo. Una riformulazione compatta di programmazione intera mista, nella quale relazioni lineari risolvono questo problema, fu data da Pochet e Wolsey nel 2007, si veda [14]. Il problema con capacità generica è molto più difficile ed è quello che andremo a studiare in questa tesi.

Andiamo ora a presentare, in maniera più accurata e dettagliata, gli argomenti centrali di questo lavoro.

Nel primo capitolo vengono riportati Definizioni, Proposizioni e Teoremi che vanno a costruire la struttura di base di tutta la trattazione successiva. In particolare si è introdotta la programmazione lineare intera, la geometria della programmazione lineare e il concetto di grafi e flussi di costo minimo.

Nel secondo capitolo abbiamo definito le variabili e i parametri del modello Lot-Sizing generale. Abbiamo dato diverse classificazioni di tale modello, andandole a descrivere e formulare.

Nel terzo capitolo abbiamo dato la formulazione del modello Lot-Sizing senza capacità ed il concetto più importante in questo contesto, come è ben

noto in letteratura, è senz'altro la descrizione completa delle disuguaglianze lineari dell'involuppo convesso di X^{LS-U} , dove con X^{LS-U} indichiamo l'insieme delle soluzioni ammissibili del modello. Per arrivare a questo teorema fondamentale, è stato necessario prima affrontare lo studio della struttura delle soluzioni ottime nel modello Lot-Sizing senza capacità e delle disuguaglianze valide per X^{LS-U} . Infine, ma non per importanza, abbiamo esaminato il problema di Lot-Sizing ad un singolo prodotto con i costi di Wagner-Whitin.

Nel quarto ed ultimo capitolo abbiamo approfonditamente studiato il problema di Lot-Sizing senza capacità con vendita e scorte di sicurezza ad un singolo prodotto (*ULS3*). Il risultato più importante di questo capitolo, che abbiamo ottenuto dopo alcune difficoltà, è sicuramente l'algoritmo risolutivo per questo modello il quale, vedremo, ci fornirà la (o una) soluzione ottima del modello. Abbiamo poi studiato altri importanti risultati noti in letteratura, come ad esempio una famiglia di disuguaglianze valide, chiamate disuguaglianze (t, S, R) , che sono indicate per fornire una descrizione completa dell'involuppo convesso di X . Poi abbiamo considerato il caso speciale di *ULS3* nel quale i limiti inferiori L_t sono non-decrescenti nel tempo in una prima formulazione, che si vedrà sarà equivalente a dire che $d_t \geq 0$ per qualsiasi t nelle altre successive formulazioni. Infine, forniremo una formulazione estesa nel caso in cui avremo dei costi di Wagner-Whitin e $d_t = 0$ per qualsiasi t in una delle formulazioni date.

Capitolo 1

Generalità

1.1 *Introduzione*

In questo capitolo presenteremo gli aspetti generali che serviranno per l'intera trattazione. In un primo momento saranno mostrati degli aspetti di programmazione lineare intera, si veda [3] e [2], successivamente gli aspetti poliedrali quindi la geometria della programmazione lineare, si veda [1]. Infine verrà fatto un accenno sulla nozione di grafi e di problemi di flusso di costo minimo.

1.2 *Programmazione Lineare Intera*

Un problema di *Programmazione Lineare* (detto anche *programma lineare*) è un problema di ottimizzazione vincolata in cui la funzione da massimizzare (o minimizzare) è lineare e tutti i vincoli sono descritti da equazioni e/o disequazioni lineari:

$$\max \text{ (o min) } \quad c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \quad (1.1)$$

$$\text{soggetto a} \quad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \quad \sim \quad b_1 \quad (1.2)$$

$$\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad (1.3)$$

$$\quad \quad \quad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \quad \sim \quad b_m, \quad (1.4)$$

dove ciascuno dei simboli $\sim$ sta per uno degli operatori $\leq, \geq$ o $=$. Non sono ammesse disequazioni strette. Nel problema (1.1)-(1.4), $x_1, \dots, x_n$ sono le *variabili*, (1.1) è la *funzione obiettivo* e (1.2)-(1.4) sono i *vincoli*. Tutti i dati a_{ij}, b_i e c_j ($i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$) sono numeri reali noti. Le variabili $x_1, \dots, x_n$ possono prendere qualunque valore reale, purché esse soddisfino tutti i vincoli.

Si noti che l'espressione (1.1) può essere scritta in modo conciso come $c^T x$.

Definizione 1.1 (Soluzione Ammissibile). Una **soluzione ammissibile** del problema è ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa (1.2)-(1.4).

Definizione 1.2 (Valore o Costo). Il corrispondente valore $c^T x$ della soluzione ammissibile è il **valore** o **costo** della soluzione ammissibile.

Definizione 1.3 (Regione Ammissibile). L'insieme di tutte le soluzioni ammissibili di un programma lineare è detto **regione ammissibile**.

Definizione 1.4 (Soluzione Ottima). Un vettore $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è una **soluzione ottima** del programma lineare se $\bar{x}$ è ammissibile e $c^T \bar{x} \geq c^T x$ per ogni x ammissibile. Rispettivamente, se il problema è di minimizzare la condizione sarà $c^T \bar{x} \leq c^T x$.

Enunciamo un importante risultato della programmazione lineare che passa sotto il nome di *Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare*.

Teorema 1.2.1 (Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare). *Dato un programma lineare vale una e una sola delle seguenti alternative:*

1. *il problema ha almeno una soluzione ottima;*
2. *il problema non ha soluzioni ammissibili;*
3. *il problema è illimitato, cioè per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione ammissibile x tale che $c^T x \geq \alpha$ ($c^T x \leq \alpha$ se il problema è di minimizzazione).*

Definizione 1.5 (Programma Lineare Intero). Un **programma lineare intero** è un problema di ottimizzazione vincolata in cui la funzione obiettivo è lineare e la regione ammissibile è costituita dall'insieme dei vettori interi che soddisfano un dato sistema di equazioni e/o disequazioni lineari:

$$\begin{aligned}
& \max && c^T x \\
& \text{soggetto a} && Ax \sim b \\
& && x \in \mathbb{Z}^n,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

dove $Ax \sim b$ indica un sistema di equazioni e/o disequazioni lineari nella forma compatta, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 1.6 (Programma Lineare Intero Misto). Un **programma lineare intero misto** è la variante del programma lineare intero in cui la condizione di interezza è richiesta solo per un certo sottoinsieme delle variabili:

$$\begin{aligned}
& \max && c^T x \\
& \text{soggetto a} && Ax \sim b \\
& && x_i \in \mathbb{Z}, \quad i \in I,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

per un qualche assegnato sottoinsieme $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Le variabili x_i con $i \in I$ sono chiamate *variabili intere*, le altre *variabili continue*.

Questo risultato afferma sostanzialmente che in programmazione lineare non è possibile che la funzione obiettivo abbia un estremo superiore che non sia anche un massimo.

1.3 Geometria della Programmazione Lineare Intera

Andiamo ad introdurre ora alcune nozioni della teoria dei poliedri che permettono di cogliere gli aspetti geometrici della Programmazione Lineare Intera.

1.3.1 Combinazioni Lineari, Spazi Lineari

Definizione 1.7 (Combinazione Lineare). Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è una **combinazione lineare** dei vettori $x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$ se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ scalari

tale che

$$x = \sum_{j=1}^q \lambda_j x^j.$$

Definizione 1.8 (Vettori Linearmente Indipendenti). I vettori $x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente indipendenti** se $\lambda_1 = \dots = \lambda_q = 0$ è l'unica soluzione al sistema $\sum_{j=1}^q \lambda_j x^j = 0$.

Definizione 1.9 (Spazio Lineare). Un sottoinsieme L non vuoto di $\mathbb{R}^n$ è uno **spazio lineare** se L è chiuso rispetto alle combinazioni lineari, equivalentemente se qualsiasi combinazione lineare di vettori in L rimane in L .

1.3.2 Combinazioni Affini, Spazi Affini

Definizione 1.10 (Combinazione Affine). Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è una **combinazione affine** di $x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$ se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ scalari tale che

$$x = \sum_{j=1}^q \lambda_j x^j, \quad \text{dove} \quad \sum_{j=1}^q \lambda_j = 1.$$

Definizione 1.11 (Punti Affinemente Indipendenti). I punti $x^0, x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$ sono **affinemente indipendenti** se $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_q = 0$ è l'unica soluzione del sistema

$$\sum_{j=1}^q \lambda_j x^j = 0, \quad \text{dove} \quad \sum_{j=1}^q \lambda_j = 0.$$

Equivalentemente, $x^0, x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$ sono affinemente indipendenti se e solo se nessun punto tra $x^0, x^1, \dots, x^q$ può essere scritto come una combinazione affine degli altri.

Definizione 1.12 (Spazio Affine). Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ è uno **spazio affine** se A è chiuso rispetto alle combinazioni affini.

La dimensione dell'insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, denotata con $\dim(S)$, è il numero massimo di punti affinemente indipendenti in S meno uno. Così la dimensione

dell'insieme vuoto è -1 , la dimensione di un punto è 0 e la dimensione di un segmento è 1 .

Se $A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ non è vuoto, allora $\dim(A) = n - \text{rank}(A)$.

Definizione 1.13 (Inviluppo Affine). Il più piccolo insieme affine contenente $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiamato **inviluppo affine** di S ed è denotato con $\text{aff}(S)$.

Dal fatto che l'intersezione di spazi affini è uno spazio affine, l'inviluppo affine è ben definito. Notiamo che $\dim(S) = \dim(\text{aff}(S))$.

1.3.3 Combinazioni Convesse, Insiemi Convessi

Definizione 1.14 (Combinazione Convessa). Dati q punti $x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$, un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è una **combinazione convessa** di $x^1, \dots, x^q$ se può essere scritto nella forma

$$x = \sum_{j=1}^q \lambda_j x^j, \quad \text{dove} \quad \sum_{j=1}^q \lambda_j = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0. \quad (1.7)$$

Se inoltre $x \neq x^1, \dots, x^q$, allora si dice che x è **combinazione convessa propria** di $x^1, \dots, x^q$. Notiamo che in questo caso necessariamente $\lambda_j \in]0, 1[$ per $j = 1, \dots, q$.

Definizione 1.15 (Insieme Convesso). Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è un **insieme convesso** se C contiene tutte le combinazioni convesse dei punti di C .

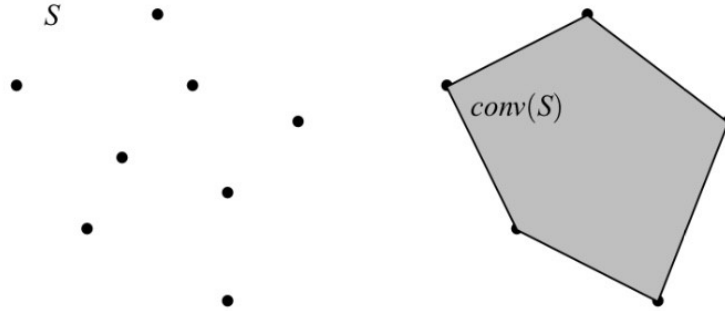
Equivalentemente, $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se per ogni coppia di punti $x, y \in C$, il segmento di retta che congiunge x e y è contenuto in C , cioè se $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ per ogni scelta di $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Definizione 1.16 (Inviluppo Convesso). Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, l'**inviluppo convesso** di S , denotato con $\text{conv}(S)$, è il più piccolo insieme convesso contenente S , nonchè l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti S .

Dato che l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso, allora $\text{conv}(S)$ esiste. Equivalentemente alla definizione di inviluppo convesso data possiamo anche definirlo come l'insieme di tutti i punti che sono

combinazioni convesse dei punti di S . Nel seguente senso

$$\text{conv}(S) = \left\{ \sum_{j=1}^q \lambda_j x^j : x^1, \dots, x^q \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0, \sum_{j=1}^q \lambda_j = 1, q \in \mathbb{N} \right\}.$$



Il risultato seguente mostra che per problemi di ottimizzazione con funzione obiettivo lineare, ottimizzare sulla regione ammissibile data o sul suo involucro convesso è essenzialmente equivalente.

Proposizione 1.3.1. *Dati un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ed un vettore $c \in \mathbb{R}^n$, i valori ottimi dei due problemi seguenti coincidono:*

$$\max\{c^T x : x \in S\} = \max\{c^T x : x \in \text{conv}(S)\}.$$

Dimostrazione. Andiamo a dimostrare l'uguaglianza partendo dalla dimostrazione delle due disuguaglianze inverse. Sappiamo dalla Definizione 1.16 che $\text{conv}(S) \subseteq S$, quindi la regione ammissibile dell'involucro convesso di S contiene quella di S . Se consideriamo un valore ottimo per

$$\max\{c^T x : x \in \text{conv}(S)\},$$

questo non potrà mai essere peggiore del valore ottimo di

$$\max\{c^T x : x \in S\}.$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\max\{c^T x : x \in S\} \leq \max\{c^T x : x \in \text{conv}(S)\}.$$

Dimostriamo la disuguaglianza inversa, cioè

$$\max\{c^T x : x \in S\} \geq \max\{c^T x : x \in \text{conv}(S)\},$$

equivalentemente possiamo definirla nel seguente modo. Fissiamo una qualunque soluzione ammissibile del secondo problema, cioè $x \in \text{conv}(S)$, e mostriamo che il primo problema ha una soluzione ammissibile $\bar{x} \in S$ tale che $c^T \bar{x} \geq c^T x$.

Se $x \in \text{conv}(S)$, per la Definizione 1.16, x è della forma (1.7), con $x^1, \dots, x^q \in S$. Ora dimostriamo che $c^T x^i \geq c^T x$ per almeno un indice i . Procediamo per assurdo, supponiamo che esiste un indice i tale che $c^T x^i < c^T x$, quindi avremmo

$$c^T x = \sum_{i=1}^q \lambda_i c^T x^i < \sum_{i=1}^q \lambda_i c^T x = c^T x,$$

dove la disuguaglianza vale poiché i λ_i sono tutti non-negativi ed almeno uno di essi è positivo. Abbiamo ottenuto

$$c^T x < c^T x,$$

che è una contraddizione, dunque $c^T x^i \geq c^T x$ per almeno un indice i . Poiché $x^i \in S$, possiamo scegliere $\bar{x} = x^i$ e abbiamo dimostrato che

$$c^T \bar{x} \geq c^T x$$

che era la disuguaglianza inversa per arrivare all'uguaglianza desiderata. $\square$

1.3.4 Poliedri, Facce, Matrici Totalmente Unimodulari

Definizione 1.17 (Poliedro). Un sottoinsieme P di $\mathbb{R}^n$ è un **poliedro** se esistono un intero positivo m , una matrice A di dimensione $m \times n$ e un vettore $b \in \mathbb{R}^m$, tale che

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

In altre parole, un poliedro è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi. Dove per semispazio chiuso si intende:

Definizione 1.18 (Semispazio Chiuso). Un **semispazio chiuso** in $\mathbb{R}^n$ è un insieme della forma $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \beta\}$, dove $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Si noti che la regione ammissibile di un qualunque programma lineare è un poliedro, eventuali vincoli scritti sotto forma di equazione possono essere sostituiti ciascuno con una coppia di disequazioni opposte.

Proposizione 1.3.2. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. ogni semispazio chiuso è convesso;
2. l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso;
3. ogni poliedro è convesso.

Dimostrazione. 1. Sia T il semispazio chiuso definito dalla disequazione $a^T x \leq \beta$ e scegliamo arbitrariamente $y, z \in T$ e $\lambda \in [0, 1]$. Dimostriamo che una qualsiasi combinazione convessa di y e z rimane in T , infatti

$$a^T(\lambda y + (1 - \lambda)z) = \lambda a^T y + (1 - \lambda)a^T z \leq \lambda \beta + (1 - \lambda)\beta = \beta,$$

dove la disuguaglianza vale poiché $y, z \in T$, $\lambda \geq 0$ e $(1 - \lambda) \geq 0$. Dunque $\lambda y + (1 - \lambda)z \in T$, da cui segue che T è convesso.

2. Siano K_1 e K_2 due insiemi convessi e definiamo $K = K_1 \cap K_2$. Scegliamo arbitrariamente $y, z \in K$ e $\lambda \in [0, 1]$. Poiché K_1 e K_2 sono insiemi convessi

da ipotesi, allora il punto $\lambda y + (1 - \lambda)z$ appartiene sia a K_1 che a K_2 e quindi appartiene anche alla loro intersezione, cioè $\lambda y + (1 - \lambda)z \in K$. Ne segue che K è convesso.

3. Poiché un poliedro è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi e abbiamo dimostrato che ogni semispazio chiuso è convesso e che l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso, allora ogni poliedro è convesso. $\square$

Teorema 1.3.3 (Meyer [9]). *Sia S la regione ammissibile di un programma lineare intero con dati razionali. Allora $\text{conv}(S)$ è un poliedro.*

Se S è un insieme limitato, l'ipotesi di razionalità dei dati può essere rimossa.

Definizione 1.19 (Disuguaglianza Valida). Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, una disequazione $a^T x \leq \beta$ è una **disuguaglianza valida** per S se è soddisfatta da tutti i punti di S .

Una disuguaglianza è valida per S se e solo se è valida per $\text{conv}(S)$.

Definizione 1.20 (Faccia). Una **faccia** di un poliedro P è un insieme della forma

$$F := P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : cx = \beta\},$$

dove $cx \leq \beta$ è una disuguaglianza valida per P .

Definizione 1.21 (Poliedro Intero). Un poliedro P si dice **intero** se qualsiasi faccia non vuota di P contiene un punto intero.

In pratica, l'insieme delle soluzioni ottime di $z = \max\{c^T x : x \in P\}$ è una faccia $F = \{x \in P : c^T x = z\}$ di P , e, se qualsiasi faccia contiene un punto intero, allora c'è una soluzione ottima la quale è anche intera. In altre parole, per poliedro intero abbiamo

$$\max\{c^T x : x \in P\} = \max\{c^T x : x \in P \cap \mathbb{Z}^n\}.$$

Risolvendo il rilassamento lineare di un programma lineare intero non si trova, in generale, una soluzione ottima intera. Studiamo ora alcune condizioni che ci serviranno in seguito e che garantiscono quanto detto.

Definizione 1.22 (Matrice Unimodulare). Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $m \leq n$, è **unimodulare** se ogni sottomatrice $m \times m$ di A ha determinante uguale a $-1, 0, +1$.

Definizione 1.23 (Matrice Totalmente Unimodulare). Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è **totalmente unimodulare** se qualsiasi sottomatrice quadrata di A è unimodulare.

Teorema 1.3.4. *Se A è totalmente unimodulare, $b \in \mathbb{Z}^m$, e $l, h \in \mathbb{Z}^n$, allora il poliedro*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, l \leq x \leq h\}$$

è intero ogni volta che non è vuoto.

1.3.5 Punti Estremi, Soluzioni di Base

Definizione 1.24 (Punto Estremo). Dato un insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $x \in C$ è un **punto estremo** di C se x non è combinazione convessa propria di due punti di C , cioè se non esistono due punti $y, z \in C \setminus \{x\}$ e $\lambda \in]0, 1[$ tali che $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$.

Consideriamo un generico sistema di equazioni e/o disequazioni lineari in $\mathbb{R}^n$:

$$a_i^T x = b_i, \quad \text{per } i = 1, \dots, k, \tag{1.8}$$

$$a_i^T x \leq b_i, \quad \text{per } i = k + 1, \dots, m. \tag{1.9}$$

Definizione 1.25 (Vincoli Linearmente Indipendenti). I vincoli (1.8)-(1.9) sono detti **linearmente indipendenti** se i vettori $\{a_i\}_{i=1, \dots, m}$ sono linearmente indipendenti.

Definizione 1.26 (Vincoli Attivi). Dati un punto $x \in \mathbb{R}^n$ e un indice $i \in \{1, \dots, m\}$, l' i -esimo vincolo è **attivo** in x se $a_i^T x = b_i$.

Definizione 1.27 (Soluzione di Base). Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è detto una **soluzione di base** del sistema di vincoli (1.8)-(1.9) se

1. $a_i^T x = b_i$ per $i = 1, \dots, k$;
2. esistono n vincoli del sistema attivi in x che sono linearmente indipendenti.

Notiamo che non è richiesto che una soluzione di base soddisfi anche tutti i vincoli di disuguaglianza (1.9); quando questo avviene, la soluzione di base è detta **soluzione di base ammissibile**.

Teorema 1.3.5. *Sia $P \subseteq \mathbb{R}^n$ il poliedro definito dal generico sistema lineare (1.8)-(1.9). Dato un punto $x \in P$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. x è un punto estremo di P ;
2. x è una soluzione di base ammissibile del sistema (1.8)-(1.9).

Per la dimostrazione del Teorema 1.3.5 si veda [2].

1.3.6 Politopi, Proiezioni

Definizione 1.28 (Politopo). Un sottoinsieme $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ è un **politopo** se Q è un involucro convesso di un insieme finito di vettori in $\mathbb{R}^n$.

Equivalentemente possiamo anche affermare che Q è un politopo se e solo se Q è un poliedro limitato.

Definizione 1.29 (Proiezione). La **proiezione** ortogonale di un insieme $P \subset \mathbb{R}^{n+p}$ in un sottospazio lineare $\mathbb{R}^n \times \{0\}^p$ è

$$proj_x(P) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists z \in \mathbb{R}^p \text{ t.c. } (x, z) \in P\}.$$

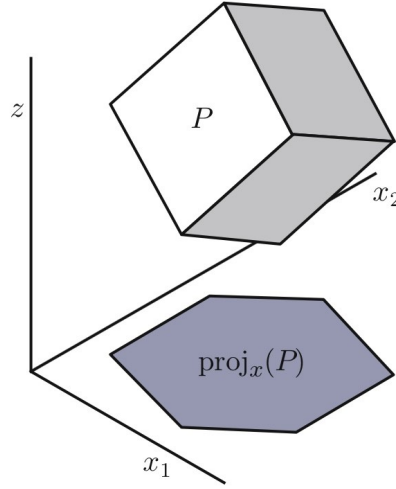


Figura 1.1: Proiezione $\text{proj}_x(P)$ di un cubo tridimensionale in uno spazio bidimensionale.

Definizione 1.30 (Formulazione Estesa). Dato un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, allora

$$Q = \{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : Cx + Dw \geq d\}$$

è una **formulazione estesa** per P se

$$P = \text{proj}_x(Q).$$

1.3.7 Problema di Separazione, Piani di Taglio

Considerata la difficoltà di trovare un sistema $Ax \leq b$ che descriva l'involuppo convesso della regione ammissibile data, possiamo pensare ad un approccio più mirato, come quello presentato di seguito, chiamato metodo dei piani di taglio. Per prima cosa definiamo il problema di separazione come segue.

Definizione 1.31 (Problema di Separazione). Dato un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ e un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$, si trovi una disequazione $\alpha^T x \geq \beta$ valida per P e violata da x^* , o si dimostri che tale disequazione non esiste (cioè che $x^* \in P$).

Teorema 1.3.6. *Il problema dell'ottimizzazione e quello della separazione sono polinomialmente equivalenti. In altre parole, dato un certo poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$, se esiste un algoritmo che risolve il problema dell'ottimizzazione di una qualsiasi funzione obiettivo lineare $c^T x$, $c \in \mathbb{R}^n$ su P , allora esiste un algoritmo che in tempo polinomiale risolve il problema della separazione definito da P e da un qualsiasi punto $x^* \in \mathbb{R}^n$.*

Per la dimostrazione si veda [5], [10], [6].

Il metodo dei piani di taglio è strettamente legato al concetto di separazione.

Definizione 1.32 (Piano di Taglio). Dato un programma lineare intero con regione ammissibile S , una disequazione $a^T x \leq \beta$ è un **piano di taglio** se è valida per S (e quindi per $\text{conv}(S)$) ma è violata da almeno un punto del rilassamento lineare del problema.

In altre parole, possiamo interpretare un piano di taglio come una disequazione che contribuisce a "tagliare via" dei punti che giacciono al di fuori dell'involucro convesso della regione ammissibile. Il rilassamento lineare si ottiene semplicemente tralasciando i vincoli di interezza; il problema così ottenuto è un programma lineare e può quindi essere risolto in modo efficiente.

1.4 Grafi, Flussi di Costo Minimo

Definizione 1.33 (Grafo Non Orientato). Un **grafo non orientato** G è una coppia ordinata $G = (V, E)$ di insiemi finiti V ed E , dove E è un insieme di coppie non ordinate di elementi distinti di V , cioè $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

Gli elementi di V si chiamano *nodi* o *vertici* di G , mentre gli elementi di E si chiamano *spigoli* o *archi* di G . Dato un grafo G indicheremo con $V(G)$ l'insieme dei suoi vertici e con $E(G)$ l'insieme dei suoi spigoli.

Un grafo non orientato è generalmente raffigurato con $|V|$ punti nel piano, che rappresentano i vertici; ogni spigolo uv è rappresentato tramite un tratto di linea continua congiungente i due punti corrispondenti ai vertici u e v .

Definizione 1.34 (Cammino). Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un **cammino** P in G è una sequenza alternata di nodi e spigoli

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k,$$

dove $k \geq 0$, $v_0, \dots, v_k$ sono nodi distinti di V ed $e_i = v_{i-1}v_i \in E$ per $i = 1, \dots, k$.

Indicheremo con $V(P)$ l'insieme $\{v_0, \dots, v_k\}$ dei nodi di P e con $E(P)$ l'insieme $\{e_1, \dots, e_k\}$ degli spigoli di P . I nodi v_0 e v_k si dicono gli **estremi del cammino** di P . La **lunghezza** di un cammino P è il numero di spigoli di P , cioè $|E(P)|$. Un cammino di estremi u e v è un cammino tra u e v . Infine, si dice che u è **connesso** a v se esiste un cammino in G che ha u e v come estremi.

Definizione 1.35 (Grafo Connesso). Un grafo $G = (V, E)$ è detto **connesso** se, per ogni coppia di vertici $(u, v) \in V$, esiste un cammino che collega u a v .

Definizione 1.36 (Ciclo). Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un **ciclo** C in G è una sequenza alternata di nodi e spigoli

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k,$$

dove $k \geq 3$, $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ sono nodi distinti di V , $e_i = v_{i-1}v_i \in E$ per $i = 1, \dots, k$ e $v_k = v_0$.

Denoteremo con $V(C)$ l'insieme $\{v_0, \dots, v_{k-1}\}$ dei nodi di C e con $E(C)$ l'insieme $\{e_1, \dots, e_k\}$ degli spigoli di C .

Definizione 1.37 (Grafo Aciclico). Un grafo che non contiene cicli si dice **aciclico**.

Definizione 1.38 (Grafo Orientato). Un **grafo orientato** D è una coppia ordinata $D = (V, A)$ di insiemi finiti V ed A , dove A è un insieme di coppie ordinate di elementi distinti di V , cioè $A \subseteq \{(u, v) \in V \times V : u \neq v\}$.

Gli elementi di V si chiamano *odi* o *vertici* di D , mentre gli elementi di A si chiamano *archi* di D . Un grafo orientato è generalmente raffigurato con

$|V|$ punti nel piano, che rappresentano i vertici; un arco (u, v) è rappresentato tramite una linea continua orientata da u verso v .

Definizione 1.39 (Rete di Flusso). Una **rete di flusso** è un grafo orientato $G = (V, E)$ tale che ad ogni arco $(i, j) \in E$ è associato un costo $c(i, j)$ che definisce il costo per unità di flusso nell'arco stesso e che varia linearmente con il flusso; un valore non-negativo $u(i, j)$, detto capacità dell'arco, che indica la massima quantità di flusso che può scorrere lungo l'arco; infine, un limite inferiore $l(i, j)$ che indica la minima quantità di flusso che deve scorrere nel medesimo arco. Ogni vertice giace su un qualche cammino dalla sorgente, vertice con esclusivamente archi uscenti, al pozzo, vertice con esclusivamente archi entranti, e gli viene associato una grandezza b_i , definita come il bilancio o flusso netto del nodo. Il grafo è quindi connesso e si ha $|E| \geq |V| - 1$.

Per formulare il nostro problema in termini di modello di ottimizzazione, introduciamo la variabile decisionale $x(i, j)$ che rappresenta la quantità di flusso che scorre nell'arco (i, j) .

Definizione 1.40 (Flusso Ammissibile). Un **flusso ammissibile** per la rete di flusso è ogni vettore che soddisfa i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} \sum_{j:(i,j) \in E} x(i, j) - \sum_{j:(j,i) \in E} x(j, i) &= b_i & \forall i \in V \\ l(i, j) &\leq x(i, j) \leq u(i, j) & \forall (i, j) \in E. \end{aligned}$$

Definizione 1.41 (Problema di Flusso di Costo Minimo). Data una rete di flusso $G = (V, E)$, intendiamo trovare, tra tutti i flussi ammissibili in G , il flusso che minimizza

$$\text{costo}(x) = \sum_{(i,j) \in E} c(i, j)x(i, j).$$

In altre parole un problema di flusso di costo minimo è un problema di decisione e ottimizzazione che consiste nel trovare il modo meno costoso possibile di far passare un certo ammontare di flusso tramite una rete di flusso.

Capitolo 2

Modello Lot-Sizing

2.1 *Introduzione*

In questo capitolo si vuole concentrare l'attenzione nella descrizione del modello Lot-Sizing, definendone variabili e parametri. Presenteremo le tre principali classificazioni per i modelli di produzione con un singolo prodotto, andandone anche a descrivere le variabili e le varie formulazioni. Per il materiale trattato in questo capitolo si veda [13].

2.2 *Classificazione dei Modelli*

Daremo ora uno schema di classificazione per modelli di pianificazione della produzione di singoli prodotti, che consente di beneficiare di questa conoscenza. La maggior parte dei problemi di pianificazione della produzione reali riguardano la produzione di più prodotti in contemporanea, di far lavorare più macchine insieme e di lavorare a più livelli, ma esistono davvero poche formulazioni di risultati per questi modelli. Quindi, il miglior approccio ottimizzativo per risolvere questi problemi è quello di integrare algoritmi esistenti e formulazioni conosciute per problemi di singoli prodotti.

Una prima classificazione che possiamo fare è la seguente:

- Lot-Sizing (LS);

- Wagner-Whitin (WW);
- Lot-Sizing Discreto con Variabile Stock Iniziale (DLSI);
- Lot-Sizing Discreto (DLS).

Lot-Sizing

Cominciamo con il descrivere il modello di Lot-Sizing generale con un singolo prodotto. Con **Lot-Sizing** si indica una famiglia di problemi di pianificazione della produzione caratterizzati dalla presenza di costi fissi. Consideriamo un orizzonte temporale di produzione finito e lo dividiamo in periodi, indicizzati da t , $1 \leq t \leq n$, dove n è la lunghezza dell'orizzonte produttivo.

Per ogni singolo prodotto si hanno i seguenti parametri:

- d_t , la domanda nota a priori che deve essere soddisfatta completamente nel periodo t ;
- p'_t , il costo di produzione di un'unità di merce nel periodo t ;
- h'_t , il costo per tenere in magazzino un'unità di merce dal periodo t al periodo $t + 1$;
- f_t , il costo fisso da pagare se nel periodo t si decida di produrre qualcosa, questo costo fisso non dipende dalla quantità prodotta;
- C_t , limite massimo di produzione o capacità nel periodo t .

Le variabili prese in considerazione sono le seguenti:

- x_t , quantità prodotta nel periodo t , per $1 \leq t \leq n$;
- s_t , quantità immagazzinata alla fine del periodo t , per $0 \leq t \leq n$;
- y_t , variabili binarie che valgono 1 se e solo se nel periodo t produciamo qualcosa.

In altre parole, vorremmo avere $y_t = 1$ se e solo se $x_t > 0$.

Si chiede di stabilire quando e quanto produrre in modo da soddisfare tutte le domande e minimizzare il costo totale.

Scriviamo il seguente programma lineare intero misto:

$$\min \quad \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t + \sum_{t=0}^n f_t y_t \quad (2.1)$$

$$\text{s. a} \quad s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

$$x_t \leq C_t y_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

$$x \in \mathbb{R}_+^n, s \in \mathbb{R}_+^{n+1}, y \in \{0, 1\}^n. \quad (2.4)$$

Nella funzione obiettivo oltre ai costi usuali abbiamo aggiunto i costi fissi f_t , che vengono conteggiati se e solo se la corrispondente variabile y_t vale 1. I vincoli (2.2) impongono la “conservazione della merce”. I vincoli (2.3) servono ad assicurare che la variabile y_t valga 1 non appena la quantità prodotta nel periodo t è positiva, cioè $x_t > 0$. In effetti, se $x_t > 0$ allora (2.3) costringe y_t a prendere un valore positivo, e dato che y_t è una variabile binaria, questo valore non può essere altro che 1. Contemporaneamente, quando $y_t = 1$ lo stesso vincolo impone anche un limite superiore C_t al valore di x_t , come richiesto dal problema.

Wagner-Whitin

Passiamo al modello **Wagner-Whitin**, questo è un problema di Lot-Sizing in cui i costi di produzione e di magazzino soddisfano

$$h'_t + p'_t - p'_{t+1} \geq 0, \quad \text{per } 0 \leq t \leq n,$$

dove $p'_0 = p'_{n+1} = 0$. Questa condizione significa che, se la produzione parte sia nel periodo t che nel periodo $t+1$, allora è più costoso produrre nel periodo t e immagazzinare fino al periodo $t+1$ piuttosto che produrre direttamente nel periodo $t+1$. In altre parole, conviene produrre più tardi possibile.

Lot-Sizing Discreto e con Variabile Stock Iniziale

Nel modello **Lot-Sizing discreto con variabile stock iniziale**, la restrizione che si applica al modello di Lot-Sizing è che in ogni periodo t o la produzione è nulla o la produzione è massima, uguale alla capacità del relativo periodo. Mentre nel modello **Lot-Sizing discreto** a differenza del precedente non si ha la variabile stock iniziale.

Un'altra classificazione dei modelli con un singolo prodotto che può essere fatta si basa sulla capacità o limite di produzione:

- modelli con capacità: in questi problemi le capacità C_t variano nel tempo;
- modelli con capacità costante: in questi casi $C_t = C$, dove C è una costante;
- modelli senza capacità: questo è il caso in cui non c'è limite all'importo prodotto in ciascun periodo, significa che la capacità C_t in qualsiasi periodo t è sufficiente a soddisfare tutte le domande fino alla fine dell'orizzonte temporale.

Wagner-Whitin con Capacità

Il modello Wagner-Whitin con capacità può essere formulato nello spazio delle variabili s e y come segue

$$\min \quad \sum_{t=0}^n h_t s_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t \quad (2.5)$$

$$\text{s. a} \quad s_{k-1} + \sum_{u=k}^t C_u y_u \geq d_{kt}, \quad 1 \leq k \leq t \leq n \quad (2.6)$$

$$s \in \mathbb{R}_+^{n+1}, y \in \{0, 1\}^n. \quad (2.7)$$

Per derivare questa formulazione, il vincolo (2.2) è usato per eliminare x_t dalla funzione obiettivo (2.1). In modo specifico,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t &= \sum_{t=1}^n p'_t (s_t - s_{t-1} + d_t) + \sum_{t=0}^n h'_t s_t \\
&= \sum_{t=1}^n p'_t s_t - \sum_{t=1}^n p'_t s_{t-1} + \sum_{t=1}^n p'_t d_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t \\
&= \sum_{t=0}^n p'_t s_t - \sum_{t=0}^n p'_{t+1} s_t + \sum_{t=1}^n p'_t d_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t \\
&= \sum_{t=0}^n (h'_t + p'_t - p'_{t+1}) s_t + \sum_{t=1}^n p'_t d_t \\
&= \sum_{t=0}^n h_t s_t + \sum_{t=1}^n p'_t d_t,
\end{aligned}$$

dove $p'_0 = p'_{n+1} = 0$. Così, definendo $h_t = h'_t + p'_t - p'_{t+1}$, la funzione obiettivo (2.1) diventa la (2.5) con dentro la costante $\sum_{t=1}^n p'_t d_t$.

Questa formulazione non è usata quando i costi non sono di Wagner-Whitin poiché se qualche $h_t < 0$, la funzione obiettivo (2.5) potrebbe non essere limitata inferiormente.

Poiché siamo nel caso in cui valgono i costi di Wagner-Whitin, abbiamo che $h_t \geq 0$ per qualsiasi t . Segue che ogni volta che i periodi di produzione sono fissati, cioè i periodi t nel quali $y_t = 1$, la quantità immagazzinata alla fine di tali periodi dovrà essere più bassa possibile compatibile con i vincoli di capacità. Basandoci su questo è possibile dimostrare che è sufficiente trovare una soluzione che soddisfa

$$s_{k-1} = \max(0, \max_{t=k, \dots, n} [d_{kt} - \sum_{u=k}^t C_u y_u]). \quad (2.8)$$

Nella formulazione (2.5)-(2.7) per WW-C, a causa della presenza dello stock iniziale s_0 , qualsiasi combinazione di periodi di produzione è ammissibile e il vincolo (2.6) impone un limite inferiore sulle variabili di stock. La funzione obiettivo (2.5), insieme alla condizione $h_t \geq 0$, garantiscono che esiste una soluzione ottima per (2.5)-(2.7), che soddisfa (2.8). Segue che la

formulazione è valida, anche se la sua regione ammissibile (s, y) non è la stessa del problema LS-C. In modo specifico (s, y) è ammissibile per (2.6)-(2.7) se e solo se esiste (x, s', y) ammissibile per (2.2)-(2.4) con $s' \leq s$.

DLSI con Capacità

Il modello Lot-Sizing discreto con variabile stock iniziale (DLSI) con capacità può essere formulato aggiungendo $x_t = C_t y_t$ alla formulazione (2.1)-(2.4). Dal vincolo (2.2) otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t s_{i-1} + \sum_{i=1}^t x_i &= \sum_{i=1}^t d_i + \sum_{i=1}^t s_i \\ \implies \sum_{i=0}^{t-1} s_i + \sum_{i=1}^t x_i &= d_{1t} + \sum_{i=1}^t s_i \\ \implies s_t &= s_0 + \sum_{i=1}^t x_i - d_{1t}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Allora, dopo aver eliminato le variabili $s_t \geq 0$ e $x_t = C_t y_t$, otteniamo una formulazione equivalente al modello DLSI-C nello spazio delle variabili s_0 e y ,

$$\min \quad h_0 s_0 + \sum_{t=1}^n f'_t y_t \quad (2.10)$$

$$\text{s. a} \quad s_0 + \sum_{u=1}^t C_u y_u \geq d_{1t}, \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.11)$$

$$s_0 \in \mathbb{R}_+, y \in \{0, 1\}^n, \quad (2.12)$$

dove h_0 e f'_t sono i nuovi coefficienti delle variabili s_0 e y_t . Vediamo come si ottiene la formulazione appena citata partendo dalla (2.1).

La funzione obiettivo (2.1), sostituendo la (2.9) e $x_t = C_t y_t$, può essere

riscritta come

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=0}^n h'_t s_t + \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t \\
&= h'_0 s_0 + \sum_{t=1}^n h'_t (s_0 + \sum_{i=1}^t C_i y_i - d_{1t}) + \sum_{t=1}^n p'_t C_t y_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t \\
&= (h'_0 + \sum_{t=1}^n h'_t) s_0 - \sum_{t=1}^n h'_t d_{1t} + \sum_{t=1}^n (f_t + (p'_t + \sum_{i=t}^n h'_i) C_t) y_t.
\end{aligned}$$

Infine definendo $h_0 = h'_0 + \sum_{t=1}^n h'_t$ e $f'_t = f_t + (p'_t + \sum_{i=t}^n h'_i) C_t$, riduciamo la (2.1) alla (2.10) eccetto per il termine costante $-\sum_{t=1}^n h'_t d_{1t}$.

DLS con Capacità

Il modello Lot-Sizing discreto (DLS) con capacità può essere formulato nello spazio delle variabili y fissando $s_0 = 0$:

$$\min \quad \sum_{t=1}^n f'_t y_t \quad (2.13)$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{u=1}^t C_u y_u \geq d_{1t}, \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.14)$$

$$y \in \{0, 1\}^n, \quad (2.15)$$

L'ultima classificazione che citiamo concerne alcune varianti o estensioni delle dodici combinazioni che abbiamo appena descritto, date dalle classificazioni precedenti.

- Backlogging (B): la domanda deve essere soddisfatta, ma è possibile soddisfarla anche in un momento successivo alla richiesta. Di solito, il backlog implica un costo di penalità proporzionale all'importo di backlog e alla durata del backlog;
- Start-Up Costs (SC): è necessario utilizzare la capacità dei modelli in modo molto accurato per ottenere piano di produzione ammissibili. Un modello di costi di start-up ad un singolo prodotto può essere riassunto

nel seguente modo. Se una sequenza di start-up partono nel periodo t , il costo di start-up g_t è sostenuto. In particolar modo può essere visto come la somma del costo di produzione più una stima di un opportuno costo del tempo di start-up o della capacità consumata;

- **Start-Up Times (ST):** questo modello è usato per modellare l'utilizzo della capacità in modo molto accurato. Se la sequenza di set-up inizia nel periodo t , la capacità C_t è ridotta ad un importo ST_t ;
- **Livello Minimo di Prouzione (LB):** in questo problema è imposto un livello minimo di produzione;
- **Sales and Lost Sales (SL):** in questo caso, le domande che devono essere soddisfatte non sono fissate in anticipo. Questo accade, per esempio, quando la capacità è troppo bassa per soddisfare tutte le potenziali domande, o quando il prezzo di vendita non copre il costo di produzione;
- **Scorte di Sicurezza (SS):** quando la domanda è frutto di un sistema di previsione se ne conosce il valore ma questo non è dato con certezza. Quindi è richiesta una quantità minima di inventario pianificato, chiamato scorte di sicurezza.

Andiamo a verificare la validità dei vari modelli.

Backlogging

Partiamo dal modello backloging, la formulazione standard come programma intero misto prende in considerazione le variabili aggiuntive:

- r_t , che indicano l'arretrato alla fine del periodo t per $t = 1, \dots, n$.

Mentre per quanto riguarda i parametri abbiamo in aggiunta a quelli già descritti il seguente:

- b'_t , che indica il costo di penalità da pagare per avere un arretrato r_t per $t = 1, \dots, n$.

Questo è descritto dalla seguente formulazione del problema LS-C-B:

$$\min \quad \sum_{t=0}^n h'_t s_t + \sum_{t=1}^n b'_t r_t + \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t \quad (2.16)$$

$$\text{s. a} \quad s_{t-1} - r_{t-1} + x_t = d_t + s_t - r_t \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.17)$$

$$x_t \leq C_t y_t, \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.18)$$

$$x, r \in \mathbb{R}_+^n, s \in \mathbb{R}_+^{n+1}, y \in \{0, 1\}^n. \quad (2.19)$$

Come semplice estensione della formulazione (2.5)-(2.7) per WW-C, si può prendere la seguente formulazione che coinvolge solo le variabili s, r, y , ed è una formulazione sufficiente per WW-C-B:

$$\min \quad \sum_{t=0}^n h_t s_t + \sum_{t=1}^n b_t r_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t \quad (2.20)$$

$$\text{s. a} \quad s_{k-1} + r_l + \sum_{u=k}^l C_u y_u \geq d_{kl} \quad 1 \leq k \leq l \leq n \quad (2.21)$$

$$r \in \mathbb{R}_+^n, s \in \mathbb{R}_+^{n+1}, y \in \{0, 1\}^n. \quad (2.22)$$

Dopo l'eliminazione delle variabili $s_1, \dots, s_n$, otteniamo il modello DLSI-C-B con regione ammissibile nello spazio (s_0, r, y) , come segue

$$s_0 + r_t + \sum_{u=1}^t C_u y_u \geq d_{1t} \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.23)$$

$$r \in \mathbb{R}_+^n, s_0 \in \mathbb{R}_+^1, y \in \{0, 1\}^n. \quad (2.24)$$

Start-Up Cost

La formulazione base per un modello LS-C-SC richiede l'introduzione di nuove variabili

- $z_t = 1$ se c'è start-up nel periodo t ma non c'era nel periodo $t - 1$;
 $z_t = 0$ altrimenti.

Mentre per quanto riguarda i parametri aggiunti abbiamo

- g_t che indica il costo di start-up nel periodo t .

La formulazione risultante è la seguente

$$\min \quad \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t + \sum_{t=1}^n g_t z_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t \quad (2.25)$$

$$\text{s. a} \quad s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.26)$$

$$x_t \leq C_t y_t \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.27)$$

$$z_t \geq y_t - y_{t-1} \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.28)$$

$$z_t \leq y_t \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.29)$$

$$z_t \leq 1 - y_{t-1} \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.30)$$

$$x \in \mathbb{R}_+^n, s \in \mathbb{R}_+^{n+1}, y, z \in \{0, 1\}^n. \quad (2.31)$$

I vincoli (2.28)-(2.30) definiscono i valori delle variabili start-up aggiunte. Questi vincoli solo una linearizzazione del vincolo $z_t = y_t(1 - y_{t-1})$, per qualsiasi t . Ci può essere uno start-up nel periodo t , cioè $z_t = 1$, solo se c'è uno start-up nel periodo t (2.29) ma non nel periodo $t - 1$ (2.30), e ci deve essere uno start-up nel periodo t se entrambe gli eventi si verificano contemporaneamente, (2.28).

Start-Up Times

La formulazione base per LS-C-ST richiede le stesse variabili di start-up z_t viste nel modello di start-up cost, LS-C-SC. La formulazione per questo modello è la stessa del precedente, si veda (2.25)-(2.31), eccetto che il vincolo (2.27) è sostituito dal seguente vincolo

$$x_t \leq C_t y_t - ST_t z_t \quad \text{per } 1 \leq t \leq n.$$

Livello Minimo di Produzione

La formulazione base per questo modello LS-C-LB non richiede l'aggiunta di nuove variabili, anzi è la stessa del modello LS-C, si veda (2.1)-(2.4),

aggiungendo il vincolo di limite inferiore di produzione

$$x_t \geq LB_t y_t \quad \text{per } 1 \leq t \leq n.$$

Vendite

La formulazione standard di LS-C-SL come programma intero misto invoca le seguenti variabili aggiuntive

- v_t , che indica l'importo venduto nel periodo t , per $t = 1, \dots, n$.

Per quanto riguarda i parametri si ha in più

- c_t , che indica il prezzo unitario di vendita nel periodo t .

La formulazione risultante è la seguente

$$\max \quad \sum_{t=1}^n (c_t v_t - p'_t x_t) - \sum_{t=0}^n h'_t s_t - \sum_{t=1}^n f_t y_t \quad (2.32)$$

$$\text{s. a} \quad s_{t-1} + x_t = d_t + s_t + v_t \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.33)$$

$$x_t \leq C_t y_t \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.34)$$

$$v_t \leq u_t \quad 1 \leq t \leq n \quad (2.35)$$

$$x, v \in \mathbb{R}_+^n, s \in \mathbb{R}_+^{n+1}, y \in \{0, 1\}^n. \quad (2.36)$$

La funzione obiettivo (2.32) in questo modello rappresenta la massimizzazione del profitto, e il vincolo di flusso bilanciato (2.33) risente della presenza delle vendite. Il vincolo (2.35) descrive il semplice limite superiore di vendita.

Scorte di Sicurezza

L'ultimo modello che andiamo a descrivere è quello con un limite inferiore sulle scorte. L'unica modifica che deve essere fatta nelle formulazioni dei modelli è l'aggiunta del seguente vincolo

$$s_t \geq SS_t,$$

per tutti i periodi t , con $1 \leq t \leq n$.

2.3 *Gestione delle Scorte*

Abbiamo visto che nei modelli Lot-Sizing si deve pianificare tutta la produzione, cioè decidere quando e quanto produrre, in modo da andare a minimizzare i costi. Quindi si può ben capire che un ruolo molto importante lo avranno le scorte in magazzino. La creazione delle scorte è dovuta ad una discrepanza temporale tra offerta e domanda. Se la fornitura di un determinato prodotto avvenisse nel momento in cui viene richiesto, quel prodotto non starebbe mai in magazzino. Quasi tutte le organizzazioni devono affrontare una discordanza tra domanda e offerta.

La gestione delle scorte ha implicazioni strategiche e manageriali allo stesso tempo e deve considerare anche le scelte e gli obiettivi delle funzioni aziendali. A grandi linee l'attività finanziaria generalmente preferisce mantenere un livello di scorte basso per risparmiare capitale, il marketing punta su alti livelli di scorte per accrescere gli sconti, mentre le operations preferiscono adeguare le scorte allo scopo di ottenere una produzione efficiente e livelli regolari di impiego. La gestione delle scorte deve bilanciare questi obiettivi contrastanti e organizzare e gestire i livelli di scorta nell'interesse dell'impresa nel suo complesso.

Si rende perciò necessaria un'analisi approfondita sui vantaggi e svantaggi di avere le scorte. Andiamo ora a vedere alcuni vantaggi nell'averle:

- Le scorte sono usate come assicurazione contro l'incertezza: nel caso la domanda non sia stata prevista adeguatamente e vi è una richiesta inaspettata le scorte garantiscono la fornitura dei prodotti;
- Le scorte possono compensare la mancanza di flessibilità: dove si offre ai clienti un'ampia gamma di opzioni, se l'organizzazione non è perfettamente flessibile, occorreranno delle scorte per assicurare la fornitura quando la produzione è impegnata in altre attività;
- Le scorte si possono usare per anticipare la domanda: nel caso la domanda presenti caratteristiche di stagionalità è necessario accumulare delle scorte per soddisfare la richiesta;

- Le scorte possono sfruttare le opportunità di breve termine: se un fornitore applica degli sconti su un certo numero di articoli per un periodo limitato di tempo si possono accumulare delle scorte anche se non c'è una domanda immediata;
- Le scorte possono ridurre i costi complessivi: ciò può accadere quando l'acquisto di grandi volumi minimizza il costo di acquisto (sconti quantità), o di amministrazione (emissione ordini), o di movimentazione dei materiali (materiali difficilmente trasportabili);
- Le scorte possono aumentare il valore: a volte i prodotti tenuti a magazzino possono aumentare di valore e quindi diventare un investimento (vini di qualità).

L'accumulo delle scorte non ha solo dei vantaggi ma ci sono anche delle ragioni per cercare di evitarlo:

- Le scorte rappresentano una immobilizzazione di denaro, sotto forma di capitale circolante, che si rende perciò indisponibile per altri impieghi;
- Le scorte rallentano la produttività: mentre giace in magazzino la risorsa non è né lavorata, né tantomeno crea valore aggiunto;
- Le scorte possono diventare obsolete;
- Le scorte nascondono i problemi: scorte elevate disaccoppiano le attività produttive e questo fa sì che i problemi restino nascosti rendendo impossibile migliorare i processi, soprattutto nell'ottica di una produzione snella;
- Le scorte si possono danneggiare;
- Le scorte possono essere voluminose e occupare spazi eccessivi rispetto al loro valore;
- Le scorte possono essere pericolose da immagazzinare per cui richiedono strutture e strumenti speciali;

- Le scorte possono comportare altri costi amministrativi e assicurativi.

Una corretta gestione delle scorte consente l'accumulo di materiali solo quando i relativi benefici superano gli svantaggi, ovvero massimizza la qualità del servizio ai clienti e minimizza i costi per l'azienda.

Capitolo 3

Modello Lot-Sizing Senza Capacità

3.1 *Introduzione*

In questo capitolo presenteremo il modello Lot-Sizing senza capacità, dando una descrizione completa delle disuguaglianze lineari dell'involuppo convesso di X^{LS-U} . Affronteremo prima lo studio delle soluzioni ottime del suddetto modello e delle disuguaglianze valide. Infine abbiamo esaminato il modello Lot-Sizing con costi di Wagner-Whitin.

3.2 *Modello Lot-Sizing Senza Capacità*

3.2.1 *Formulazione per LS-U*

Un modo naturale di vedere LS-U è come un problema di flusso di costo minimo, Definizione 1.41, con l'aggiunta di costi fissi per l'uso di alcuni archi.

Come abbiamo già visto una formulazione del problema è la seguente:

$$\min \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t \quad (3.1)$$

$$\text{s. a } s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$x_t \leq M y_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

$$s \in \mathbb{R}_+^{n+1}, x \in \mathbb{R}^n, y \in [0, 1]^n \quad (3.4)$$

$$y \in \mathbb{Z}^n \quad (3.5)$$

$$s_0 = s_0^*, s_n = s_n^*, \quad (3.6)$$

dove M è un numero positivo grande.

Denotiamo con X^{LS-U} l'insieme delle soluzioni ammissibili rispetto ai vincoli (3.2)-(3.6).

3.2.2 Struttura delle Soluzioni Ottime

Iniziamo con una osservazione che ci aiuterà a semplificare i problemi con stock iniziale e limite inferiore di stock (Safety Stock).

Osservazione 1. In un problema LS-U, se lo stock iniziale e finale sono fissati e ci sono dei limiti inferiori di stock, il problema può essere riformulato con delle domande modificate in modo che lo stock iniziale, finale e i limiti inferiori di stock siano tutti zero.

Dimostrazione. Supponiamo che i valori iniziali fissati sono $s_0 = s_0^*$, $s_n = s_n^*$ e i limiti inferiori sono $s_t \geq s_t^*$ per $1 \leq t \leq n-1$. Per trattare i limiti inferiori di stock, dobbiamo prima calcolare:

$$S_0 = s_0^*$$

e

$$S_t = \max[S_{t-1} - d_t, s_t^*] \quad \text{per } 1 \leq t \leq n.$$

Allora introduciamo delle nuove variabili stock γ_t e facciamo la sostituzione

$$\gamma_t = s_t - S_t \geq 0$$

per $t = 0, \dots, n$. Dal vincolo (3.2) si ottiene

$$\begin{aligned}\gamma_{t-1} + S_{t-1} + x_t &= d_t + \gamma_t + S_t \\ \implies \gamma_{t-1} + x_t &= (d_t + S_t - S_{t-1}) + \gamma_t,\end{aligned}$$

che sono le equazioni risultanti bilanciate.

Quindi abbiamo ottenuto un problema modificato con le domande d_t sostituite da $d_t + S_t - S_{t-1} \geq 0$ per $1 \leq t \leq n$. La funzione obiettivo è così diventata

$$\begin{aligned}\min \quad & \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t \\ &= \min \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t (\gamma_t + S_t) + \sum_{t=1}^n f_t y_t \\ &= \min \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t \gamma_t + \sum_{t=0}^n h'_t S_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Infine, poniamo $\gamma_0 = \gamma_n = 0$. □

Supponiamo ora che è stato deciso in quali periodi produrre, quindi $y \in \{0, 1\}^n$ è conosciuto. Il piano di produzione ottimo è a questo punto un flusso di costo minimo, si veda la Figura 3.1, eccetto per gli archi $(0, t)$ che sono soppressi se $y_t = 0$, cioè se la produzione non parte.

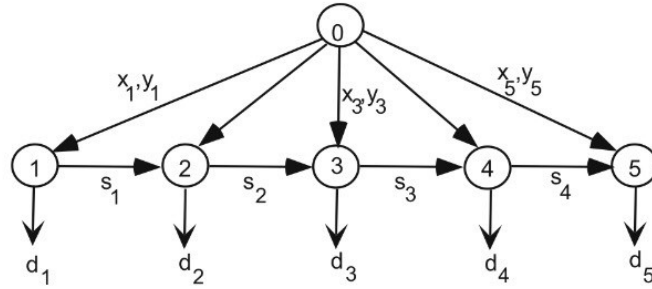


Figura 3.1: Rete di flusso con variabili associate.

Ora presentiamo una proprietà importante dei problemi di flusso di costo minimo.

Osservazione 2. Esiste una soluzione ottima, Definizione 1.4, di un problema di flusso di costo minimo, tale che gli archi corrispondenti a variabili con flussi strettamente compresi tra i loro limiti superiori e inferiori formano un grafo aciclico, Definizione 1.37.

Dimostrazione. Sia (x^*, s^*, y^*) la (o una) soluzione ottima. Supponiamo per assurdo che esista nella rete di flusso del problema, Definizione 1.39, un ciclo, Definizione 1.36, allora le variabili $x_l^*, s_l^*, s_{l+1}^*, \dots, s_{k-1}^*, x_k^*$ hanno tutte valore positivo, strettamente compreso tra i loro limiti superiori e inferiori. Per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, definiamo due soluzioni alternative $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{y})$ e (x'', s'', y'') come segue:

$$\begin{aligned} \bar{x}_l &= x_l^* + \epsilon, & \bar{s}_l &= s_l^* + \epsilon, & \dots, & & \bar{s}_{k-1} &= s_{k-1}^* + \epsilon, & \bar{x}_k &= x_k^* - \epsilon \\ x''_l &= x_l^* - \epsilon, & s''_l &= s_l^* - \epsilon, & \dots, & & s''_{k-1} &= s_{k-1}^* - \epsilon, & x''_k &= x_k^* + \epsilon. \end{aligned}$$

Se ϵ è scelto sufficientemente piccolo, le soluzioni così costruite sono ammissibili per il problema.

Indichiamo con z^* , $\bar{z}$, e z'' i costi associati alle tre soluzioni (x^*, s^*, y^*) , $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{y})$, e (x'', s'', y'') . Otteniamo le seguenti relazioni:

$$\bar{z} = z^* + (p'_l + h'_l + \dots + h'_{k-1} - p'_k)\epsilon,$$

$$z'' = z^* - (p'_l + h'_l + \dots + h'_{k-1} - p'_k)\epsilon.$$

Quindi è facilmente verificabile che

$$\bar{z} - z^* = (p'_l + h'_l + \dots + h'_{k-1} - p'_k)\epsilon = -(z'' - z^*).$$

D'altra parte, poiché z^* è il valore ottimo del problema, devono valere le disuguaglianze

$$\bar{z} - z^* \geq 0,$$

e

$$z'' - z^* \geq 0.$$

Da queste tre condizioni ne segue che

$$z^* = \bar{z} = z'',$$

cioè le tre soluzioni sono tutte ottime. In tal caso, aumentando il valore di ϵ continueremo a mantenere l'ottimalità delle soluzioni fintantoché le variabili restano non-negative.

Se consideriamo la soluzione z'' all'aumentare di ϵ , la prima variabile che tocca lo zero è s''_{k-1} . E' immediato verificare che il numero di indici t per cui $s''_t > 0$, con $t = l, \dots, k$, è diminuito di una unità rispetto alla soluzione di partenza (x^*, s^*, y^*) . Questo contraddice l'ottimalità di (x^*, s^*, y^*) . Quindi abbiamo dimostrato che per avere una soluzione ottima, gli archi corrispondenti a variabili con flussi strettamente compresi tra i loro limiti superiori e inferiori formano un grafico aciclico. $\square$

Questo risultato ci dà qualcosa di molto importante per la struttura delle soluzioni ottime di LS-U.

Proposizione 3.2.1. *Esiste una soluzione ottima di LS-U tale che $s_{t-1}x_t = 0$ per ogni t .*

Dimostrazione. Dato $y \in \{0, 1\}^n$, consideriamo una soluzione ottima ammissibile. Supponiamo $s_{t-1} > 0$. Lo stock deve essere generato dalla produzione in qualche periodo k tale che $k < t$. Così il flusso negli archi $(0, k), (k, k+1), \dots, (t-1, t)$ è positivo. Quindi questi archi insieme all'arco $(0, t)$ formano un ciclo. Dall'Osservazione 2 segue che per forza $x_t = 0$. $\square$

Di conseguenza esiste una soluzione ottima che prevede di produrre solo quando il magazzino è vuoto. Così facendo, abbiamo discretizzato l'insieme delle possibili decisioni: in ogni periodo in cui c'è produzione, la quantità prodotta sarà uguale alla domanda totale di un certo numero di periodi consecutivi.

Possiamo ora dare una descrizione completa delle soluzioni ottime.

Proposizione 3.2.2. *Esiste una soluzione ottima di LS-U caratterizzata da:*

- *un sottoinsieme di periodi $1 \leq t_1 < \dots < t_r \leq n$ nei quali la produzione parte. L'importo prodotto in t_j è $d_{t_j} + \dots + d_{t_{j+1}-1}$ per $j = 1, \dots, r$ con $t_{r+1} = n + 1$;*
- *un sottoinsieme di periodi $R \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{t_1, \dots, t_r\}$. C'è produzione nei periodi $\{t_1, \dots, t_r\} \cup R$.*

La struttura di una soluzione ottima è mostrata nella figura seguente.

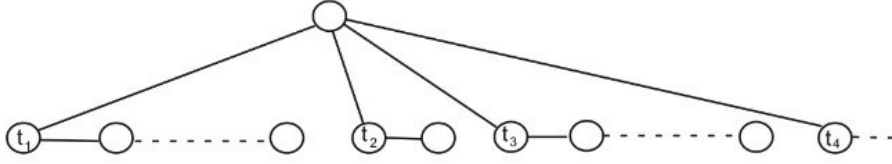


Figura 3.2: Struttura di una soluzione ottima di LS-U.

Definizione 3.1 (Intervalli di Rigenerazione). Gli intervalli $[t_1, t_2 - 1]$, $[t_2, t_3 - 1]$, $\dots$ di una soluzione con stock iniziale nullo e con produzione nel primo periodo in modo da soddisfare la domanda in tutti i periodi dell'intervallo, sono chiamati **intervalli di rigenerazione**.

Così, la Proposizione 3.2.2 mostra che una soluzione ottima può essere decomposta in una sequenza di intervalli di rigenerazione più qualche set-up senza produzione (periodi in R).

Per semplificare la notazione nelle formule che seguono, dati due periodi k e l , indichiamo con d_{kl} la domanda totale dei periodi $k, \dots, l$, cioè

$$d_{kl} = \sum_{u=k}^l d_u.$$

Terminiamo questa sezione dimostrando la seguente osservazione che servirà a semplificare i conti in un teorema successivo.

Osservazione 3. La funzione obiettivo (3.1) di LS-U può essere alternativamente scritta come segue

$$h_0 s_0 + \sum_{t=1}^n p_t x_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t + K_1, \quad (3.8)$$

dove

$$p_t = p'_t + \sum_{j=t}^n h'_j \quad \text{per } t = 1, \dots, n, \quad h_0 = \sum_{t=0}^n h'_t, \quad \text{e} \quad K_1 = - \sum_{t=1}^n h'_t d_{1t},$$

oppure come

$$\sum_{t=0}^n h_t s_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t + K_2, \quad (3.9)$$

dove

$$h_t = h'_t + p'_t - p'_{t+1} \quad \text{per } t = 0, \dots, n \quad \text{con } p'_0 = p'_{n+1} = 0 \quad \text{e} \quad K_2 = \sum_{t=1}^n p'_t d_t.$$

Dimostrazione. Usiamo i vincoli di conservazione del flusso (3.2) per eliminare dalla funzione obiettivo (3.1) o le variabili produzione x_t oppure le variabili di stock s_t . Se vogliamo eliminare le variabili di stock dalla funzione obiettivo (3.1), possiamo usare le (3.2) come segue

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{t-1} s_u + \sum_{u=1}^t x_u &= \sum_{u=1}^t d_u + \sum_{u=1}^t s_u \\ \implies s_t - s_0 + d_{1t} &= \sum_{u=1}^t x_u \\ \implies s_t &= s_0 + \sum_{u=1}^t x_u - d_{1t}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Quindi sostituendo la (3.10) nella funzione obiettivo (3.1) otteniamo

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t &= \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t (s_0 + \sum_{u=1}^t x_u - d_{1t}) \\
 &= \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_0 + \sum_{t=0}^n h'_t \sum_{u=1}^t x_u - \sum_{t=0}^n h'_t d_{1t} \\
 &= \sum_{t=0}^n h'_t s_0 + \sum_{t=1}^n (p'_t + h'_t + \cdots + h'_n) x_t - \sum_{t=0}^n h'_t d_{1t}.
 \end{aligned}$$

Ponendo

$$p_t = p'_t + \sum_{j=t}^n h'_j \quad \text{per } t = 1, \dots, n, \quad h_0 = \sum_{t=0}^n h'_t, \quad \text{e} \quad K_1 = - \sum_{t=1}^n h'_t d_{1t},$$

otteniamo

$$\sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t = h_0 s_0 + \sum_{t=1}^n p_t x_t + K_1. \quad (3.11)$$

Considerando la funzione obiettivo completa e sostituendoci la (3.11) otteniamo

$$\sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t = h_0 s_0 + \sum_{t=1}^n p_t x_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t + K_1,$$

che è proprio la (3.8).

In modo del tutto analogo si ottiene l'altra formulazione. Eliminando ora

le variabili di produzione usando $x_t = d_t + s_t - s_{t-1}$, otteniamo

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t &= \sum_{t=1}^n p'_t (d_t + s_t - s_{t-1}) + \sum_{t=0}^n h'_t s_t \\
 &= \sum_{t=1}^n p'_t d_t + \sum_{t=1}^n p'_t s_t - \sum_{t=1}^n p'_t s_{t-1} + \sum_{t=0}^n h'_t s_t \\
 &= \sum_{t=1}^n p'_t d_t + \sum_{t=0}^n p'_t s_t - \sum_{t=0}^n p'_{t+1} s_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t \\
 &= \sum_{t=1}^n p'_t d_t + \sum_{t=0}^n (h'_t + p'_t - p'_{t+1}) s_t,
 \end{aligned}$$

con $p'_{n+1} = p'_0 = 0$.

Ponendo

$$h_t = h'_t + p'_t - p'_{t+1}, \quad \text{per } t = 0, \dots, n \quad \text{e} \quad K_2 = \sum_{t=1}^n p'_t d_t,$$

e considerando la funzione obiettivo completa, otteniamo

$$\sum_{t=1}^n p'_t x_t + \sum_{t=0}^n h'_t s_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t = \sum_{t=0}^n h_t s_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t + K_2,$$

che è proprio la (3.9). □

3.2.3 Disuguaglianze Valide

Vogliamo trovare delle disuguaglianze valide, Definizione 1.19, soddisfatte da tutti i punti in X^{LS-U} , cioè quei punti che soddisfano i vincoli (3.2)-(3.5).

Una prima classe di disuguaglianze valide la possiamo trovare facendo il seguente ragionamento. Supponiamo di avere un intervallo temporale di 8 periodi, con delle domande non-negative per ogni periodo e di avere uno stock iniziale strettamente positivo, mentre tutti gli altri s_i nulli per $i = 1, \dots, 8$. Se supponiamo che il periodo 2 fosse l'ultimo periodo dell'orizzonte,

noi potremmo anche scrivere $x_2 \leq d_2 y_2$ e lo potremmo considerare come un vincolo.

Ma d_2 è un valido limite superiore di x_2 solo se il periodo 2 è l'ultimo periodo o se non c'è stock alla fine del periodo 2. Quindi un valido limite superiore di x_2 è $x_2 \leq d_2 + s_2$. Allora una valida implicazione è

$$s_2 = 0 \implies x_2 \leq d_2 y_2.$$

Questa implicazione può essere convertita nella disuguaglianza lineare valida seguente

$$x_2 \leq d_2 y_2 + s_2,$$

che è valida perchè in qualsiasi soluzione ammissibile di LS-U:

- o $y_2 = 0$ e la disuguaglianza è soddisfatta perchè $y_2 = 0$ implica $x_2 = 0$ e quindi $0 \leq s_2$;
- oppure $y_2 = 1$ e $x_2 \leq d_2 + s_2$ è un valido limite superiore per x_2 .

Usando lo stesso ragionamento e partendo da un limite superiore $x_t \leq d_{tl} + s_l$ per qualsiasi $l \geq t$, la disuguaglianza precedente può essere generalizzata come segue

$$x_t \leq d_{tl} y_t + s_l \quad \text{per tutti } 1 \leq t \leq l \leq n,$$

per arbitrari domanda e periodo dati.

Quindi un caso particolare è

$$x_t \leq d_t y_t + s_t. \tag{3.12}$$

Ora proviamo a dare un'ulteriore dimostrazione per la sua validità. Usando le (3.2) possiamo scrivere le variabili produzione come segue

$$x_t = d_t + s_t - s_{t-1}. \tag{3.13}$$

Sostituendo la (3.13) nella (3.12) si ottiene

$$\begin{aligned} -s_{t-1} + d_t + s_t &\leq d_t y_t + s_t \\ \implies s_{t-1} &\geq (1 - y_t) d_t. \end{aligned}$$

In questa forma, è facile vedere che la disuguaglianza è valida. Se $y_t = 0$, allora non c'è produzione nel periodo t , e quindi lo stock entrante s_{t-1} deve almeno contenere la domanda per il periodo t . D'altra parte, se $y_t = 1$ la disuguaglianza si riduce a $s_{t-1} \geq 0$ che è comunque valida.

Generalizziamo ora la disuguaglianza (3.12).

Proposizione 3.2.3. *Dati $1 \leq l \leq n$, $L = \{1, \dots, l\}$ e $S \subseteq L$, allora le disuguaglianze (l, S)*

$$\sum_{j \in S} x_j \leq \sum_{j \in S} d_{jl} y_j + s_l \quad (3.14)$$

sono valide per X^{LS-U} .

Dimostrazione. Consideriamo un punto $(s, y) \in X^{LS-U}$.

Se $\sum_{j \in S} y_j = 0$, allora $x_j = 0$ per $j \in S$ e quindi $s_l \geq 0$, la disuguaglianza è valida. D'altra parte, poniamo $t = \min\{j \in S : y_j = 1\}$. Allora

$$\sum_{j \in S} x_j \leq \sum_{j=t}^l x_j \leq d_{tl} + s_l \leq \sum_{j \in S} d_{jl} y_j + s_l,$$

dove la prima disuguaglianza segue dalla definizione di S , dalla non negatività delle x_j e dalla definizione di t , la seconda disuguaglianza segue dalle equazioni della conservazione del flusso, e la terza usando $y_t = 1$ e la non negatività delle y_i . $\square$

Osserviamo che la disuguaglianza (l, S) può essere riscritta in modo diverso. Usando

$$\sum_{j \in L} x_j = d_{1l} + s_l$$

e scrivendo la (3.14) nel seguente modo

$$-\sum_{j \in S} x_j \geq -\sum_{j \in S} d_{jl} y_j - s_l,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{j \in L} x_j - \sum_{j \in S} x_j &\geq -\sum_{j \in S} d_{jl} y_j - s_l + d_{1l} + s_l \\ \implies \sum_{j \in L \setminus S} x_j + \sum_{j \in S} d_{jl} y_j &\geq d_{1l}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Il teorema seguente dà una descrizione completa dell'involuppo convesso delle soluzioni ammissibili di X .

Teorema 3.2.4. *Quando $s_0 = s_n = 0$, i vincoli (3.2)-(3.4) insieme alle disuguaglianze (l, S) date dalla (3.14) danno una descrizione completa delle disuguaglianze lineari di $\text{conv}(X^{LS-U})$.*

Dimostrazione. Prima di iniziare la dimostrazione, andiamo a dare alcune linee guida per la comprensione dei ragionamenti successivi.

Supponiamo che $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ è un insieme intero e P è una formulazione per X , allora $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \geq b\}$, $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, e $\text{conv}(X) \subseteq P$. Assumiamo per semplicità che $\text{conv}(X) \neq \emptyset$, che sia $\text{conv}(X)$ che P hanno punti estremi e che $\text{conv}(X)$ non è costituito da un solo punto.

Come possiamo dimostrare che $P = \text{conv}(X)$? Iniziamo a dimostrare che $\dim(\text{conv}(X)) = \dim(P)$, e che per qualsiasi $c \in \mathbb{R}^n$ e per qualche $M(c) \neq X$ con il valore ottimo finito, allora $M(c) \subseteq \{x : a^q x = b^q\}$ per qualche disuguaglianza $a^q x \geq b^q$ definita in P , dove $P \cap \{x : a^q x = b^q\}$ è una faccia propria di P . Qui $M(c) = \arg \min \{cx : x \in X\}$ è l'insieme delle soluzioni ottime per un dato vettore costo $c \in \mathbb{R}^n$. Questa condizione è sufficiente perchè, se $\pi x \geq \pi_0$ definisce una faccia di $\text{conv}(X)$, e poniamo $c = \pi$, allora $M(\pi)$ può trovarsi solamente in questa faccia. Segue da questo che le facce di P contengono tutte le facce del $\text{conv}(X)$.

Iniziamo la dimostrazione del teorema. Assumiamo che $s_0 = s_n = 0$ e anche che le domande d_t siano strettamente positive per ogni $t = 1, \dots, n$.

Riscrivendo l'insieme delle soluzioni X^{LS-U} nello spazio (x, y) , otteniamo

$$x_t \leq My_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (3.16)$$

$$x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \{0, 1\}^n, \quad (3.17)$$

in modo diretto dai vincoli (3.3)- (3.4), mentre gli altri vincoli li ricaviamo come segue.

Consideriamo $L = \{1, \dots, n\}$, sappiamo che

$$\sum_{j \in L} x_j = d_{1n} + s_n, \quad (3.18)$$

da ipotesi abbiamo $s_n = 0$, quindi otteniamo

$$\sum_{u=1}^n x_u = d_{1n}, \quad (3.19)$$

che è il terzo vincolo di interesse. L'ultimo lo ricaviamo nel seguente modo. Consideriamo sempre la (3.18) ma con $L = \{1, \dots, t\}$ e $1 \leq t \leq n - 1$. Sappiamo che $s_i \geq 0$ per $i = 1, \dots, n - 1$, quindi dalla (3.18) otteniamo

$$\sum_{u=1}^t x_u \geq d_{1t}. \quad (3.20)$$

Quindi l'insieme X^{LS-U} nello spazio (x, y) è rappresentato dai vincoli (3.16), (3.17), (3.19) e (3.20).

Consideriamo un insieme P come formulazione per X , cioè $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \geq b\}$. Nel nostro caso P è descritto dai vincoli (3.19), (3.20), $x \in \mathbb{R}_+^n$, $y \in [0, 1]^n$ e dalle disuguaglianze (l, S) scritte nella forma (3.15).

Per prima cosa dimostriamo che $\dim(\text{conv}(X)) = \dim(P)$.

Tutti i punti di X soddisfano le equazioni (3.19) e $y_1 = 1$ quindi la sua dimensione è al massimo $2n - 2$. Dimostriamo che X contiene precisamente $2n - 1$ punti affinementemente indipendenti, Definizione 1.11.

Consideriamo la seguente matrice di dimensione $2n \times (2n - 1)$:

$$A = \begin{bmatrix} d_{1n} & d_1 & d_1 & d_1 & \dots & d_{1n} & d_{1n} & d_{1n} & d_{1n} & \dots \\ 0 & d_{2n} & d_2 & d_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_{3n} & d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & d_{4n} & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

Interpretata in questo modo: pensiamola come una matrice con 4 blocchi, i due blocchi superiori destro e sinistro riguardano la produzione quindi le x_t , mentre i due blocchi inferiori indicano quando la produzione viene attivata quindi le y_t . Sappiamo che d_t sono tutte strettamente positive, quindi a maggior ragione $d_1 > 0$, di conseguenza la produzione nel primo periodo deve essere per forza positiva, avendo per ipotesi che $s_0 = 0$. La prima colonna della matrice indica che tutte le domande d_i con $i = 1, \dots, n$ sono prodotte nel primo periodo e quindi attiviamo la produzione nel primo periodo (il 1 nella posizione $(n + 1, 1)$). La seconda colonna indica che produciamo la domanda d_1 nel primo periodo e le restanti domande nel secondo periodo e quindi attiviamo la produzione rispettivamente nei due periodi. Per n colonne possiamo fare questo ragionamento. Arrivati all' $n + 1$ -esima colonna dobbiamo cambiare modo di ragionare: si producono tutte le domande d_i con $i = 1, \dots, n$ nel primo periodo ma attiviamo la produzione non solo nel primo periodo ma anche nel secondo (infatti troviamo due 1, uno nella posizione $(n + 1, n + 1)$ l'altro nella $(n + 2, n + 1)$). Questa non sarà una soluzione ottima ma è comunque una soluzione ammissibile. E il ragionamento rimane questo fino alla fine della matrice. Quindi abbiamo costruito una matrice che se la andiamo a interpretare è costituita dalle soluzioni ammissibili di X . Ora se andiamo a sottrarre la prima colonna a tutta la matrice otteniamo

una nuova matrice con una colonna in meno così fatta:

$$B = \begin{bmatrix} -d_{2n} & -d_{2n} & -d_{2n} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ d_{2n} & d_2 & d_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_{3n} & d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_{4n} & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

Andiamo ad analizzare i blocchi della matrice B : il blocco in basso a destra, tolta la riga degli zeri, è triangolare inferiore e quindi invertibile, il blocco in alto a sinistra, tolta la prima riga, è sempre un blocco quadrato triangolare inferiore quindi invertibile. Abbiamo quindi ottenuto dalla matrice B una matrice, che tolta la prima riga e la riga degli zeri, è di dimensione $(2n - 2) \times (2n - 2)$ ed è invertibile, quindi le $2n - 2$ colonne sono linearmente indipendenti. Quindi lo sono anche le colonne della matrice B . La matrice A ha quindi $2n - 1$ punti affinemente indipendenti. Abbiamo quindi dimostrato che la dimensione del $\text{conv}(X)$ è esattamente $2n - 2$.

Ora possiamo vedere che anche P soddisfa queste equazioni poiché la sua descrizione include l'equazione (3.19), $y_1 \leq 1$ e la disuguaglianza (l, S) con $l = 1, S = \emptyset$, la quale è così descritta $x_1 \geq d_1$. Quindi abbiamo dimostrato che $\dim(\text{conv}(X)) = \dim(P)$.

Definiamo con $M(p, f)$ l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema $\text{OPT}(X^{LS-U}, (p, f))$ di minimizzare la funzione obiettivo data da (3.8) sopra l'insieme X^{LS-U} .

Osserviamo che $\sum_{t=1}^n x_t = d_{1n}$ è soddisfatta in tutti i punti, quindi possiamo aggiungere qualsiasi multiplo del primo membro del vincolo alla funzione obiettivo senza modificare $M(p, f)$. Quindi supponiamo senza perdita di generalità che $\min_t p_t = 0$. Sappiamo anche che $y_1 = 1$ quindi possiamo

assumere che $f_1 = 0$.

Se $f_t < 0$ per qualche $t \geq 2$, allora

$$M(p, f) \subseteq \{(x, y) : y_t = 1\},$$

quindi

$$P \cap \{(x, y) : y_t = 1\}$$

è una faccia propria di P .

Supponiamo, da ora in poi, che $f_t \geq 0$ per $t \geq 2$.

Poniamo $l = \arg \max_t \{p_t + f_t > 0\}$. Poiché $(p, f) \neq (0, 0)$, abbiamo $1 \leq l \leq n$. Supponiamo che $p_k = f_k = 0$ per qualche $k < l$. Allora

$$M(p, f) \subseteq \{(x, y) : x_l = 0\},$$

quindi

$$P \cap \{(x, y) : x_l = 0\}$$

è una faccia propria di P .

D'altra parte abbiamo $p_i + f_i > 0$ per $i = 1, \dots, l$ e $p_i = f_i = 0$ per $i = l + 1, \dots, n$. Siano $L = \{1, \dots, l\}$ e $S = \{t \in L : p_t > 0\}$ con $1 \in S$. Notiamo che dalla definizione di l , tutta la domanda dopo il periodo l può essere prodotta a costo zero. Dimostriamo che

$$M(p, f) \subseteq \{(x, y) : \sum_{t \in S} x_t + \sum_{t \in L \setminus S} d_{tl} y_t = d_{1l}\},$$

in modo da poter concludere anche in questo caso che

$$P \cap \{(x, y) : \sum_{t \in S} x_t + \sum_{t \in L \setminus S} d_{tl} y_t = d_{1l}\}$$

è una faccia propria di P .

Consideriamo una soluzione ottima (x^*, y^*, s^*) . Supponiamo che

$$\tau = \min\{t \in L \setminus S : y_t^* = 1\}.$$

Poiché $p_\tau = 0$, si può produrre un importo maggiore o uguale a $d_{\tau l}$ a costo zero in τ . E poiché $p_t + f_t > 0$ per tutti $t \in L$ con $t > \tau$, in una soluzione ottima si ha $x_t^* = y_t^* = 0$ per tutti $t \in L$ con $t > \tau$. Questo vale perchè altrimenti una soluzione migliore sarebbe ottenuta riducendo x_t^* e/o y_t^* e aumentando x_τ^* , il che contraddice l'ottimalità di (x^*, y^*, s^*) . Così

$$\sum_{t \in L \setminus S} d_{tl} y_t^* = d_{\tau l} y_\tau^* = d_{\tau l}$$

e

$$\sum_{t \in S: t \geq \tau} x_t^* = 0.$$

Poiché $y_t^* = x_t^* = 0$ per tutti $t \in L \setminus S$ con $t < \tau$, allora

$$\sum_{t=1}^{\tau-1} x_t^* = \sum_{t \in S: t < \tau} x_t^* \geq d_{1, \tau-1}.$$

Ma dal fatto che $p_t > 0$ per tutti i periodi $t \in S$ con $t < \tau$, una soluzione può essere ottimale solo se

$$\sum_{t \in S: t < \tau} x_t^* = d_{1, \tau-1}.$$

Questo vale perchè altrimenti una soluzione migliore può essere ottenuta riducendo $\sum_{t \in S: t < \tau} x_t^*$ e incrementando x_τ^* , ma questo è in contraddizione con l'ottimalità di (x^*, y^*, s^*) .

Così abbiamo dimostrato che

$$\sum_{t \in S: t < \tau} x_t^* + \sum_{t \in S: t \geq \tau} x_t^* + \sum_{t \in L \setminus S} d_{tl} y_t^* = d_{1, \tau-1} + 0 + d_{\tau l} = d_{1l}.$$

Nel caso speciale in cui $y_t^* = 0$ per tutti $t \in L \setminus S$, otteniamo

$$\sum_{t=1}^l x_t^* = \sum_{t \in S} x_t^* = d_{1l},$$

perchè la produzione nel periodo $l + 1$ ha costo zero.

Infine notiamo che quando $l = n$, $L \setminus S \neq \emptyset$ perchè $\min_t p_t = 0$.

Riassumiamo quello che abbiamo fatto caso per caso dicendo che se prendiamo una faccia di $\text{conv}(X)$ del tipo $\pi x \geq \pi_0$, ponendo $\pi = (p, f)$ allora $M(p, f)$ può trovarsi solo in questa faccia. Quindi le facce di P contengono tutte le facce di $\text{conv}(X)$ e la dimostrazione è conclusa. $\square$

3.2.4 Formulazione Estesa per LS-U

Consideriamo ora una formulazione per LS-U che prende in considerazione alcune variabili informative in modo molto naturale.

Prendiamo w_{ut} con $u \leq t$, come la quantità prodotta nel periodo u soddisfacendo la domanda nel periodo t . Questo porta alla seguente formulazione

$$\min \quad \sum_{u=1}^n p_u x_u + \sum_{t=1}^n f_t y_t \quad (3.21)$$

$$\sum_{u=1}^t w_{ut} = d_t \quad 1 \leq t \leq n \quad (3.22)$$

$$w_{ut} \leq d_t y_u \quad 1 \leq u \leq t \leq n \quad (3.23)$$

$$x_u = \sum_{t=u}^n d_t w_{ut} \quad 1 \leq u \leq n \quad (3.24)$$

$$y \in [0, 1]^n, w_{ut} \in \mathbb{R} \quad 1 \leq u \leq t \leq n \quad (3.25)$$

$$y \in \mathbb{Z}^n. \quad (3.26)$$

Il vincolo (3.22) dimostra che la domanda è soddisfatta in ogni periodo, e (3.23) mostra che la variabile $y_u = 1$ ogni volta che c'è produzione nel periodo u . Le equazioni (3.24) sono il collegamento tra le variabili di produzione originali x e le nuove variabili w . Notiamo che possiamo completamente eliminare le vecchie variabili x dalla funzione obiettivo usando le (3.24).

Quanto è più buona questa nuova formulazione $Q^{FL-U} = \{(x, y, w) : (3.22) - (3.25)\}$ rispetto alla (3.2)-(3.4)?

La risposta è che la formulazione non può essere migliorata.

Teorema 3.2.5. *Il programma lineare*

$$\min\{px + qy : (x, y, w) \in Q^{FL-U}\}$$

ha una soluzione ottima con y intero, e quindi risolve LS-U.

Per la dimostrazione si veda [7].

3.3 Costi di Wagner-Whitin

In questa sezione esamineremo il problema di Lot-Sizing ad un singolo prodotto con i costi di Wagner-Whitin sopra ad un orizzonte temporale di lunghezza n , si veda [12]. La presentazione del modello è così costituita: consideriamo in un primo momento la struttura delle soluzioni che rendono minimo lo stock e usiamo queste per derivare una formulazione estesa del problema, poi dimostriamo che la matrice dei vincoli risultante è totalmente unimodulare e infine che dalla proiezione si può descrivere l'involuppo convesso delle soluzioni che rendono minimo lo stock e deriviamo un algoritmo combinatorio per il problema di separazione risultante.

Definizione 3.2. Un problema di Lot-Sizing ha costi di Wagner-Whitin se $p'_t + h'_t - p'_{t+1} \geq 0$ per qualsiasi $t = 0, \dots, n-1$, dove p'_t , h'_t sono rispettivamente il costo di produzione di una unità di merce e il costo di stoccaggio di una unità di merce nel periodo t .

Denotiamo con $h_t = p'_t + h'_t - p'_{t-1}$. Come abbiamo già visto la formulazione per questo modello è data dalle (2.5)-(2.7).

Da ora in poi riscriveremo sempre i costi così che $p'_t = 0$ per qualsiasi t . Con questa normalizzazione notiamo che $p'_t = 0 \implies h_t \geq 0$ per qualsiasi t , e quindi è precisamente equivalente alla condizione dei costi di Wagner-Whitin.

Ora consideriamo la forma delle soluzioni ottime. Un punto importante è che con $h_t \geq 0$ per qualsiasi t , è sempre ottimo produrre più tardi possibile. In altre parole, dati i periodi di produzione $y \in \{0, 1\}^n$, è ottimo soddisfare la domanda del periodo t dall'ultimo periodo di produzione prima o uguale

a t . Alternativamente s_{k-1} contiene la domanda d_j per il periodo $j \geq k$ solo se non c'è un periodo di produzione nell'intervallo temporale $[k, \dots, j]$.

Quanto appena detto può essere riformulato come segue:

Proposizione 3.3.1. *Con i costi di Wagner-Whitin, se $y_i = 1$ per $i \in T$, e $y_i = 0$ altrimenti, allora esiste una soluzione ottima della forma:*

$$s_{k-1} = 0 \quad \text{se } k \in T$$

$$s_{k-1} = d_{k, \phi_T(k)} \quad \text{se } k \in N \setminus T$$

dove $\phi_T(k) = \max\{j : j \geq k, T \cap \{k, \dots, j\} = \emptyset\}$.

Alternativamente, può essere riscritta come:

$$s_{k-1} = \max_{j=k, \dots, n} [d_{kj}(1 - Y_{kj})]^+, \quad (3.27)$$

dove si è usata la notazione $Y_{kj} = \sum_{i=k}^j y_i$. In questo modo possiamo vedere che $s_{k-1} = d_{kj}$ se e solo se $y_i = 0$ per $i = k, \dots, j$ e $y_{j+1} = 1$, ed è esattamente quello che abbiamo detto sopra.

Questo immediatamente suggerisce una formulazione estesa, Definizione 1.30, per il problema LS-U con i costi di Wagner-Whitin. Poniamo:

- $\delta_{k-1}^l = 1$ se s_{k-1} è abbastanza grande da contenere la domanda d_l per $l \geq k$, e $\delta_{k-1}^l = 0$ altrimenti.

Consideriamo la seguente formulazione:

$$\min \quad \sum_{t=0}^n h_t s_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t \quad (3.28)$$

$$\text{s. a} \quad s_{k-1} = \sum_{l=k}^n d_l \delta_{k-1}^l, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

$$\delta_{k-1}^l \geq 1 - Y_{kl}, \quad 1 \leq k \leq l \leq n \quad (3.30)$$

$$\delta_k^l \in \mathbb{R}_+, 0 \leq y_k \leq 1, s \in \mathbb{R}_+^{n+1} \quad 1 \leq k \leq l \leq n \quad (3.31)$$

$$y \in \mathbb{Z}^n. \quad (3.32)$$

Consideriamo i vincoli (3.29) e (3.30), otteniamo

$$s_{k-1} \geq \sum_{j=k}^l d_j(1 - Y_{kj}). \quad (3.33)$$

Osservazione 4. La disuguaglianza (3.33), chiamata disuguaglianza (l, S, WW) ,

$$s_{k-1} \geq \sum_{j=k}^l d_j(1 - y_k - \cdots - y_j),$$

può essere riscritta come

$$s_{k-1} + \sum_{j=k}^l d_{jl}y_j \geq d_{kl},$$

o come una disuguaglianza (l, S)

$$\sum_{j=1}^{k-1} x_j + \sum_{j=k}^l d_{jl}y_j \geq d_{1l}.$$

La cosa interessante nella pratica è che questa formulazione è la migliore possibile.

Proposizione 3.3.2. *La matrice dei vincoli (3.30)-(3.31) è una matrice totalmente unimodulare, Definizione 1.23.*

Per la dimostrazione si veda [12].

Corollario 3.3.3. *Il programma lineare (4.26)-(3.31) è una formulazione estesa per LS-U in presenza dei costi di Wagner-Whitin.*

Ora consideriamo la proiezione del poliedro (3.29)-(3.31) e poniamo con X^{WW-U} l'insieme dei punti (s, y) che soddisfano i vincoli (3.29)-(3.32).

Teorema 3.3.4. *Il poliedro P^U :*

$$\begin{aligned} s_{t-1} &\geq \sum_{j=t}^k d_j(1 - Y_{tj}) & 1 \leq t \leq k \leq n \\ 0 \leq y_t &\leq 1 & 1 \leq t \leq n \end{aligned}$$

è intero, Definizione 1.21. Con i costi Wagner-Whitin, ottimizzare sopra a P^U risolve il problema LS-U. Quindi $P^U = \text{conv}(X^{WW-U})$.

Questo risultato ci dice che c'è un programma lineare con solamente $2n$ variabili e $n(n+1)/2$ vincoli che risolvono $WW-U$. Questo ci dice che il sottoinsieme (l, S, WW) delle disuguaglianze (l, S) della forma (3.33) sono sufficienti in presenza dei costi di Wagner-Whitin.

Dimostrazione Teorema 3.3.4. La matrice corrispondente ai vincoli (3.30) consiste di una matrice identità e di una matrice con tutti 1 consecutivi in qualsiasi riga, la quale conosciuta come matrice totalmente unimodulare. Quindi, dal Teorema 1.3.4, P^U è un poliedro intero.

Ora consideriamo la sua proiezione $\text{proj}_{s,y} P^U$ nello spazio (s, y) . Nella proiezione, applicando il procedimento di eliminazione di Fourier, si veda [1], vogliamo eliminare la variabile δ_t^j ; l'unico modo è di sostituirla con il suo limite inferiore $(1 - \sum_{u=t+1}^j y_u)$ oppure con il suo limite inferiore 0, dati dalla (3.30). Così, per ogni sottoinsieme T_t di $\{t+1, \dots, n\}$, otteniamo una disuguaglianza della forma

$$s_t \geq \sum_{j \in T_t} d_j \left(1 - \sum_{u=t+1}^j y_u\right).$$

Però, alcune di queste disuguaglianze sono ridondanti e possono essere eliminate. Consideriamo qualsiasi punto (s^*, y^*) che è tagliato fuori da una di queste disuguaglianze per qualche t e per qualche $T_t \subseteq \{t+1, \dots, n\}$. Supponiamo che $\sum_{u=t+1}^k y_u^* < 1 \leq \sum_{u=t+1}^{k+1} y_u^*$. Questo punto è anche tagliato

fuori dalla disuguaglianza

$$s_t \geq \sum_{j=t+1}^k d_j \left(1 - \sum_{u=t+1}^j y_u\right).$$

Segue che queste ultime disuguaglianze bastano a descrivere $\text{conv}(X^{WW-U})$.

□

Capitolo 4

Problema di Lot-Sizing Senza Capacità con Vendite e Scorte di Sicurezza

4.1 *Introduzione*

In questo capitolo presenteremo il tema principale di questa tesi, il problema di Lot-Sizing ad un singolo prodotto senza capacità con vendite e scorte di sicurezza, si veda [8]. Il problema generale, come abbiamo visto nel capitolo precedente, è di minimizzare il costo totale. In questo capitolo andremo a massimizzare il profitto, in quanto le domande non sono pre-specificate e sono presenti dei limiti superiori per le vendite e dei limiti inferiori per le scorte (safety stock). In un primo momento presenteremo il modello *ULS3* (che sta per Uncapacitated Lot-Sizing Problem with Sales and Safety Stock), e poi lo formuleremo con un programma intero misto. Quindi ricaveremo formulazioni equivalenti in cui esiste una domanda fissa (positiva o negativa). Successivamente analizzeremo la struttura delle soluzioni ottime che ci permette di concludere che la programmazione dinamica fornisce un algoritmo polinomiale per *ULS3*.

4.2 *Modello ULS3 e Algoritmo Risolutivo*

4.2.1 *Formulazioni Equivalenti per ULS3*

Nel problema *ULS3* consideriamo un orizzonte temporale di lunghezza n diviso in periodi indicizzati da t , con $1 \leq t \leq n$.

Per ogni singolo prodotto abbiamo i seguenti parametri:

- $L_0 \geq 0$, scorta iniziale;
- u_t , limite superiore di vendita nel periodo t ;
- $L_t \geq 0$, limite inferiore di scorta nel periodo t ;
- p_t , prezzo unitario di vendita nel periodo t ;
- c_t , prezzo unitario di produzione nel periodo t ;
- h_t , prezzo per tenere in magazzino un'unità di merce dal periodo t al periodo $t + 1$;
- f_t , costo fisso di produzione nel periodo t .

Le variabili prese in considerazione sono:

- x_t , quantità prodotta nel periodo t ;
- s_t , quantità immagazzinata alla fine del periodo t ;
- v_t , quantità venduta nel periodo t ;
- $y_t \in \{0, 1\}$, variabile binaria tale che $y_t = 1$ se $x_t > 0$.

Una formulazione per il problema di massimizzazione del profitto è la seguente:

$$\max \quad \sum_{t=1}^n p_t v_t - \sum_{t=1}^n c_t x_t - \sum_{t=1}^n h_t s_t - \sum_{t=1}^n f_t y_t, \quad (4.1)$$

$$\text{s. a} \quad s_{t-1} + x_t = v_t + s_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.2)$$

$$0 \leq v_t \leq u_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

$$x_t \leq M y_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

$$s_t \geq L_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.5)$$

$$s_0 = L_0, \quad (4.6)$$

$$x_t \geq 0, 0 \leq y_t \leq 1, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.7)$$

$$y_t \text{ intero}, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.8)$$

dove M è una costante positiva grande.

I vincoli (4.2) sono i soliti vincoli di conservazione della quantità del prodotto nel periodo t , i vincoli (4.3) impongono il limite superiore di vendita nel periodo t , i vincoli (4.4) impongono $y_t = 1$ quando x_t è positivo. In effetti, se $x_t > 0$ allora (4.4) costringe y_t a prendere un valore positivo; dato che y_t è una variabile binaria, questo valore non può essere altro che 1. Contemporaneamente, quando $y_t = 1$, lo stesso vincolo impone anche un vincolo superiore M al valore di x_t . Comunque c'è sempre una soluzione ottima con $x_t < M$ salvo che $c_t + \sum_{i=t}^n h_i < 0$. Qualsiasi valore di M maggiore di $\sum_{t=1}^n u_t + \max_{t=1, \dots, n} L_t$ è sufficiente. Infine i vincoli (4.5) impongono un limite inferiore di stoccaggio (scorte di sicurezza) nel periodo t .

Presentiamo ora un problema equivalente. La differenza sta nell'introduzione di domande d_t , che potrebbero anche essere negative, e di nuove variabili scorta σ_t , con limite inferiore zero.

La formulazione del problema ora ha la seguente forma:

$$\max \quad \sum_{t=1}^n p_t v_t - \sum_{t=1}^n c_t x_t - \sum_{t=1}^n h_t \sigma_t - \sum_{t=1}^n f_t y_t, \quad (4.9)$$

$$\text{s. a} \quad \sigma_{t-1} + x_t = d_t + v_t + \sigma_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.10)$$

$$0 \leq v_t \leq u_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.11)$$

$$x_t \leq M y_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.12)$$

$$\sigma_0 = 0, \sigma_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.13)$$

$$x_t \geq 0, 0 \leq y_t \leq 1, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.14)$$

$$y_t \text{ intero}, \quad t = 1, \dots, n. \quad (4.15)$$

Mostriamo come si passa dalla (4.1) alla (4.9). Poniamo

$$\sigma_t = s_t - L_t \geq 0 \quad (4.16)$$

notando che la disuguaglianza si ottiene dai vincoli (4.5) e poniamo

$$d_t = L_t - L_{t-1}, \quad (4.17)$$

per qualsiasi t . Quindi andando a sostituire nella (4.1), le s_t date dalla (4.16) si ottiene

$$\begin{aligned} & \max \quad \sum_{t=1}^n p_t v_t - \sum_{t=1}^n c_t x_t - \sum_{t=1}^n h_t (\sigma_t + L_t) - \sum_{t=1}^n f_t y_t \\ \implies & \max \quad \sum_{t=1}^n p_t v_t - \sum_{t=1}^n c_t x_t - \sum_{t=1}^n h_t \sigma_t - \sum_{t=1}^n h_t L_t - \sum_{t=1}^n f_t y_t. \end{aligned}$$

Notando che $\sum_{t=1}^n h_t L_t$ è costante, allora otteniamo

$$\max \quad \sum_{t=1}^n p_t v_t - \sum_{t=1}^n c_t x_t - \sum_{t=1}^n h_t \sigma_t - \sum_{t=1}^n f_t y_t,$$

che è proprio la (4.9).

Viceversa, per passare dalla (4.9) alla (4.1) poniamo

$$L_0 = \max\{0, \max_t [-\sum_{i=1}^t d_i]\},$$

$$L_t = L_0 + \sum_{i=1}^t d_i$$

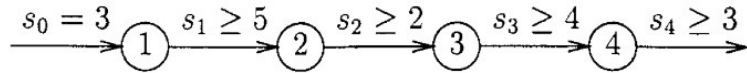
e

$$s_t = L_t + \sigma_t,$$

per qualsiasi t .

Quindi a questo punto abbiamo v_t che è una variabile che rappresenta la quantità venduta ed è distinta dalla domanda d_t fissata nel periodo t . Le domande d_t possono anche essere negative, precisamente quando $L_t < L_{t-1}$. Questo fenomeno lo possiamo interpretare come un flusso di prodotto entrante nel nodo t .

Esempio 4.2.1. *Facciamo un esempio numerico, prendiamo in considerazione il seguente caso*



Trasformiamo ora i limiti inferiori di stock in domande nel seguente modo. Sappiamo che valgono le (4.16) e (4.17). Quindi dalla (4.16) otteniamo $\sigma_t \geq 0$ per $t = 0, \dots, 4$, e dalla (4.17) otteniamo:

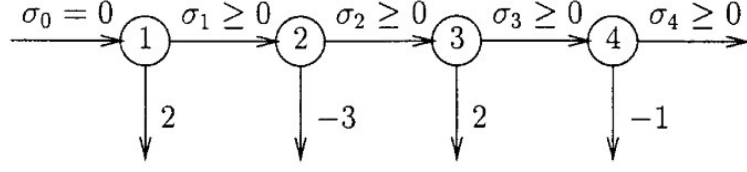
$$d_1 = L_1 - L_0 = 5 - 3 = 2,$$

$$d_2 = L_2 - L_1 = 2 - 5 = -3,$$

$$d_3 = L_3 - L_2 = 4 - 2 = 2,$$

$$d_4 = L_4 - L_3 = 3 - 4 = -1,$$

graficamente abbiamo



Siamo quindi passati da dei limiti inferiori di stock a delle domande, sia positive che negative.

Diamo una terza formulazione equivalente al problema di massimizzazione del profitto, eliminando le variabili σ_t . Definiamo $d_{ij} = \sum_{t=i}^j d_t$. Dalla (4.10) otteniamo

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + x_t - d_t - v_t.$$

$$\implies \sigma_t - \sigma_{t-1} = x_t - d_t - v_t.$$

Passando alle sommatorie, otteniamo

$$\sum_{i=1}^t \sigma_i - \sum_{i=1}^{t-1} \sigma_i = \sum_{i=1}^t x_i - \sum_{i=1}^t d_i - \sum_{i=1}^t v_i \quad (4.18)$$

$$\implies \sigma_t = \sum_{i=1}^t x_i - \sum_{i=1}^t v_i - d_{1t}.$$

Ma dalla (4.13) otteniamo

$$\sigma_t = \sum_{i=1}^t x_i - \sum_{i=1}^t v_i - d_{1t} \geq 0, \quad (4.19)$$

quindi

$$\sum_{i=1}^t x_i \geq \sum_{i=1}^t v_i + d_{1t}. \quad (4.20)$$

Otteniamo la seguente formulazione

$$\max \quad \sum_{t=1}^n p_t v_t - \sum_{t=1}^n c_t x_t - \sum_{t=1}^n f_t y_t, \quad (4.21)$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{i=1}^t x_i \geq \sum_{i=1}^t v_i + d_{1t}, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.22)$$

$$0 \leq v_t \leq u_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.23)$$

$$x_t \leq M y_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.24)$$

$$x_t \geq 0, \quad 0 \leq y_t \leq 1, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.25)$$

$$y_t \text{ intero}, \quad t = 1, \dots, n. \quad (4.26)$$

Notiamo che le tre formulazioni sono equivalenti nel senso che c'è una corrispondenza 1 : 1 tra le loro soluzioni ammissibili.

4.2.2 *Struttura delle Soluzioni Ottime*

Per derivare un algoritmo per ULS3, dobbiamo considerare la struttura delle soluzioni ottime.

Definizione 4.1. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ essere l'insieme delle soluzioni ammissibili per la terza formulazione descritta dai vincoli (4.22)- (4.25).

Supponiamo, in tutta questa sezione, per semplificare le cose che $f_t \geq 0$ e $c_t + \sum_{i=t}^n h_i \geq 0$ per qualsiasi t . Allora c'è sempre una soluzione ottima con $x_t < M$. Consideriamo, in questo momento la seconda formulazione del problema data dalle (4.9)-(4.15). Se $y^* \in \{0, 1\}^n$ è fissato, il problema diventa un problema di flusso di costo minimo mostrato nella Figura 4.1. Come abbiamo già detto nell'Osservazione 2 del Capitolo 3: in una soluzione ottima (x^*, v^*, σ^*) , le variabili relative ad essa formano un grafo aciclico. Tale soluzione ottima si decompone in modo standard in intervalli di rigenerazione, Definizione 3.1.

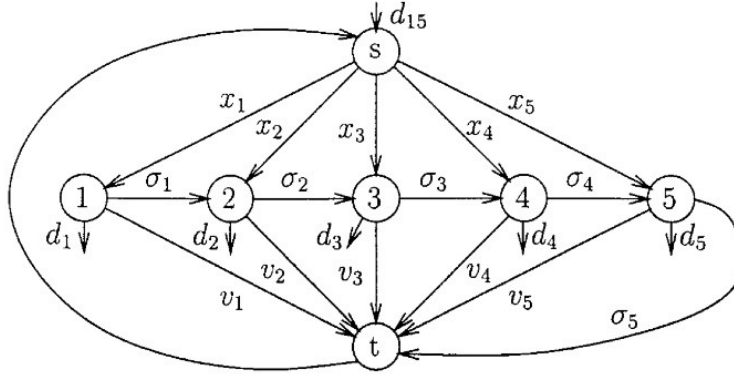


Figura 4.1: Rete di flusso di ULS3.

Guardiamo gli intervalli $[i, i+1, \dots, j]$ nei quali $\sigma_{i-1}^* = 0, \sigma_i^* > 0, \dots, \sigma_{j-1}^* > 0$, e o vale $\sigma_j^* = 0$ oppure $j = n$ e $\sigma_n^* > 0$. Consideriamo prima gli intervalli di rigenerazione nel caso in cui $\sigma_j^* = 0$, chiamati *intervalli di rigenerazione del primo tipo*, Figura 4.2. Chiaramente, se $0 < x_l^* < M$ e $0 < x_k^* < M$ con $i \leq k < l \leq j$, l'insieme delle variabili forma un ciclo. Allora dall'Osservazione 2 esiste al massimo un periodo k nell'intervallo $[i, \dots, j]$ con $x_k^* > 0$. Se $x_k^* > 0$, tutte le variabili v_l^* sono uguali a 0 oppure a u_l in modo da evitare di creare un ciclo. Alternativamente, se $x_k^* = 0$ per tutti $k = i, \dots, j$, allora al massimo una variabile v_l^* può essere $0 < v_l^* < u_l$.

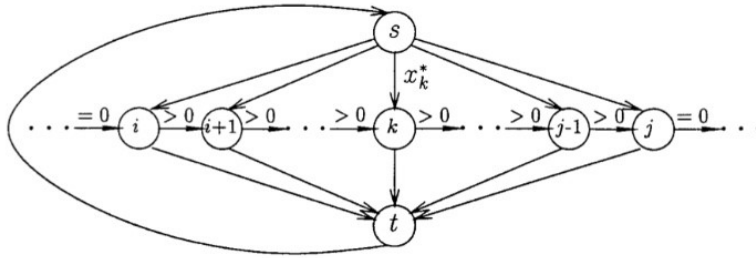


Figura 4.2: Intervalli di rigenerazione del primo tipo.

Consideriamo gli intervalli in cui $\sigma_n^* > 0$, chiamati *intervalli di rigenerazione del secondo tipo*, Figura 4.3. Allora il valore dell'arco (t, s) non può essere nullo, ma visto che non dobbiamo formare un ciclo allora avremo $x_k^* = 0$ e $v_k^* = 0$ oppure $v_k^* = u_k$ per tutti i $k = i, \dots, j$.

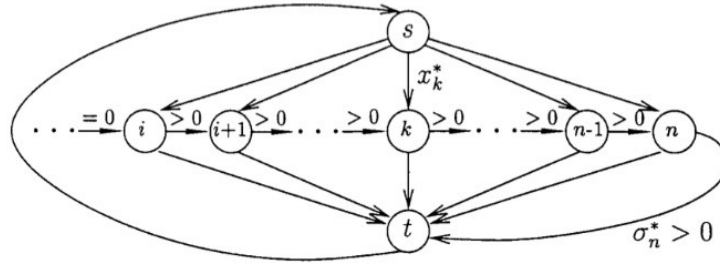


Figura 4.3: Intervalli di rigenerazione del secondo tipo.

Consideriamo un intervallo di rigenerazione nel quale $\sigma_j = 0$. Ci sono $j - i + 1$ problemi di flusso di costo minimo, uno per ogni $l = i, \dots, j$. Quindi il valore β_{ij} di una soluzione ottima in questo intervallo può essere trovato risolvendo $j - i + 2$ problemi di flusso di costo minimo.

Fissiamo l , prendiamo $x_l > 0$, quindi $y_l > 0$, e $x_t = y_t = 0$ per qualsiasi $t \neq l$. C'è anche un problema finale nel quale $x_t = 0$ per $t = i, \dots, j$, il quale corrisponde al caso in cui non c'è produzione.

Per $l \in \{i, \dots, j\}$, il problema (4.9)-(4.14) diventa

$$\beta_{ij}^l = \max \sum_{t=i}^j p_t v_t - c_l x_l - \sum_{t=i}^j h_t \sigma_t - f_l \quad (4.27)$$

$$\text{s. a } \sigma_{l-1} + x_l = d_l + v_l + \sigma_l, \quad (4.28)$$

$$\sigma_{t-1} = d_t + v_t + \sigma_t, \quad t = i, \dots, j, \quad t \neq l, \quad (4.29)$$

$$\sigma_{i-1} = 0, \quad (4.30)$$

$$\sigma_j = 0, \quad \text{se } j \neq n, \quad (4.31)$$

$$0 \leq v_t \leq u_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.32)$$

$$x_t, \sigma_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, n. \quad (4.33)$$

Con β_{ij}^0 intendiamo il valore di una soluzione ottima con $x_l = 0$, per $l = i, \dots, j$, quindi

$$\beta_{ij}^0 = \max \sum_{t=i}^j p_t v_t - \sum_{t=i}^j h_t \sigma_t.$$

Allora

$$\beta_{ij} = \max[\beta_{ij}^0, \max_{l=i, \dots, j} \beta_{ij}^l].$$

Quindi possiamo notare che non è necessario usare un algoritmo generale di programmazione lineare per calcolare β_{ij}^l .

4.2.3 Algoritmo per ULS3

Fissiamo un intervallo di rigenerazione del primo tipo, quindi un intervallo $[i, i+1 \dots, j]$ nel quale $\sigma_{i-1}^* = 0$, $\sigma_i^* > 0, \dots, \sigma_{j-1}^* > 0$, e $\sigma_j^* = 0$.

Caso 1: Partiamo dal caso più semplice, supponiamo che le domande d_k , con $k = i, \dots, j$, siano tutte positive. Allora è immediato, per come abbiamo definito l'intervallo, capire che la produzione deve partire nel primo periodo, quindi $x_l > 0$ con $l = i$.

Sia (x^*, v^*, σ^*) la (o una) soluzione ottima del problema. Dobbiamo dimostrare quando le variabili vendita v_k^* per $k = i, \dots, j$ possono essere 0 o u_k , cioè il loro limite superiore. Per fare questo dobbiamo andare a studiare le relazioni tra i costi di produzione, i costi di stoccaggio e i prezzi di vendita. Supponiamo

$$p_l > c_l,$$

andiamo a vedere quale valore deve assumere la variabile v_l^* con l fissato. Supponiamo per assurdo che $v_l^* = 0$. Per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, definiamo una soluzione alternativa $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$ tale che

$$\bar{x}_l = x_l^* + \epsilon, \quad \bar{v}_l = v_l^* + \epsilon.$$

Se ϵ è scelto sufficientemente piccolo, la soluzione così ottenuta è ammissibile per il problema.

Indichiamo con z^* e $\bar{z}$ i costi associati alle due soluzioni (x^*, v^*, σ^*) e $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$. Otteniamo la seguente relazione:

$$\bar{z} = z^* + (c_l - p_l)\epsilon.$$

Poiché z^* è il valore ottimo del problema, deve valere la seguente disugua-

gianza

$$\bar{z} - z^* \geq 0,$$

quindi otteniamo

$$(c_l - p_l)\epsilon \geq 0$$

e poiché $\epsilon > 0$ abbiamo

$$c_l \geq p_l$$

che è contro ipotesi. Quindi siamo arrivati ad un assurdo e concludiamo che se $p_l > c_l$ allora $v_l^* = u_l$.

In caso contrario, cioè se $p_l < c_l$, per vedere che valore deve assumere la variabile v_l^* basta rifare tutto il procedimento che abbiamo appena fatto supponendo per assurdo che $v_l^* = u_l$. Quindi per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, definiamo una soluzione alternativa $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$ tale che

$$\bar{x}_l = x_l^* - \epsilon, \quad \bar{v}_l = v_l^* - \epsilon.$$

Se ϵ è scelto sufficientemente piccolo, la soluzione così ottenuta è ammissibile per il problema.

Indichiamo con z^* e $\bar{z}$ i costi associati alle due soluzioni (x^*, v^*, σ^*) e $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$. Otteniamo la seguente relazione:

$$\bar{z} = z^* + (-c_l + p_l)\epsilon.$$

Poiché z^* è il valore ottimo del problema, deve valere la seguente disuguaglianza

$$\bar{z} - z^* \geq 0,$$

quindi otteniamo

$$(-c_l + p_l)\epsilon \geq 0$$

e poiché $\epsilon > 0$ abbiamo

$$c_l \leq p_l$$

che è contro ipotesi. Quindi siamo arrivati ad un assurdo e concludiamo che se $p_l < c_l$ allora $v_l^* = 0$.

Ora vogliamo generalizzare il caso appena fatto, cioè decidiamo di vendere in un periodo k fissato, con $k = i, \dots, j$, e supponiamo che

$$p_k > c_l + \sum_{s=l}^{k-1} h_s.$$

Supponiamo per assurdo che $v_k^* = 0$. Per ϵ sufficientemente piccolo, definiamo una soluzione alternativa $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$ tale che

$$\bar{x}_l = x_l^* + \epsilon, \quad \bar{v}_k = v_k^* + \epsilon, \quad \bar{\sigma}_l = \sigma_l^* + \epsilon, \quad \dots, \quad \bar{\sigma}_{k-1} = \sigma_{k-1}^* + \epsilon.$$

Se ϵ è scelto sufficientemente piccolo, la soluzione così ottenuta è ammissibile per il problema.

Indichiamo con z^* e $\bar{z}$ i costi associati alle due soluzioni (x^*, v^*, σ^*) e $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$. Otteniamo la seguente relazione:

$$\bar{z} = z^* + (c_l + h_l + \dots + h_{k-1} - p_k)\epsilon.$$

Poiché z^* è il valore ottimo del problema, deve valere la seguente disuguaglianza

$$\bar{z} - z^* \geq 0,$$

quindi otteniamo

$$\left(c_l + \sum_{s=i}^{k-1} h_s - p_k \right) \epsilon \geq 0$$

e poiché $\epsilon > 0$ abbiamo

$$c_l + \sum_{s=i}^{k-1} h_s \geq p_k$$

che è contro ipotesi. Quindi siamo arrivati ad un assurdo e concludiamo che $v_k^* = u_k$.

Se si verifica il caso contrario, cioè se

$$p_k < c_l + \sum_{s=l}^{k-1} h_s,$$

basta supporre per assurdo che $v_k^* = u_k$ e procedere come prima. Per ϵ sufficientemente piccolo, definiamo una soluzione alternativa $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$ tale che

$$\bar{x}_l = x_l^* - \epsilon, \quad \bar{v}_k = v_k^* - \epsilon, \quad \bar{\sigma}_l = \sigma_l^* - \epsilon, \quad \dots, \quad \bar{\sigma}_{k-1} = \sigma_{k-1}^* - \epsilon.$$

Se ϵ è scelto sufficientemente piccolo, la soluzione così ottenuta è ammissibile per il problema.

Indichiamo con z^* e $\bar{z}$ i costi associati alle due soluzioni (x^*, v^*, σ^*) e $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$. Otteniamo la seguente relazione:

$$\bar{z} = z^* + (-c_l - h_l - \dots - h_{k-1} + p_k)\epsilon.$$

Poiché z^* è il valore ottimo del problema, deve valere la seguente disuguaglianza

$$\bar{z} - z^* \geq 0,$$

quindi otteniamo

$$\left(-c_l - \sum_{s=i}^{k-1} h_s + p_k\right)\epsilon \geq 0$$

e poiché $\epsilon > 0$ abbiamo

$$c_l + \sum_{s=i}^{k-1} h_s \leq p_k$$

che è contro ipotesi. Quindi siamo arrivati ad un assurdo e concludiamo che $v_k^* = 0$.

Caso 2: Supponiamo ora che le domande siano arbitrarie sempre nell'intervallo di rigenerazione $[i, \dots, j]$ sopra descritto. Procediamo per casi, se $d_i > 0$, questo caso può essere ricondotto al Caso 1. Supponiamo $d_i < 0$, quindi per avere $\sigma_i > 0$ non è necessario far partire la produzione nel periodo i . Supponiamo che la produzione si attivi in un periodo l fissato, con $l \in \{i+1, \dots, j\}$. Allora per studiare tutto quello che succede dal periodo l in poi basta ricondurci al Caso 1, mentre per quanto riguarda cosa succede prima del periodo l lo andiamo a studiare nel seguito.

Supponiamo di vendere nel primo periodo e che

$$p_i + \sum_{s=i}^{l-1} h_s > c_l.$$

Supponiamo per assurdo che $v_i^* = 0$. Per ϵ sufficientemente piccolo, definiamo una soluzione alternativa $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$ tale che

$$\bar{x}_l = x_l^* + \epsilon, \quad \bar{v}_i = v_i^* + \epsilon, \quad \bar{\sigma}_i = \sigma_i^* - \epsilon, \quad \dots, \quad \bar{\sigma}_{l-1} = \sigma_{l-1}^* - \epsilon.$$

Se ϵ è scelto sufficientemente piccolo, la soluzione così ottenuta è ammissibile per il problema.

Indichiamo con z^* e $\bar{z}$ i costi associati alle due soluzioni (x^*, v^*, σ^*) e $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$. Otteniamo la seguente relazione:

$$\bar{z} = z^* + (c_l - h_i - \dots - h_{l-1} - p_i)\epsilon.$$

Poiché z^* è il valore ottimo del problema, deve valere la seguente disuguaglianza

$$\bar{z} - z^* \geq 0,$$

quindi otteniamo

$$\left(c_l - \sum_{s=i}^{l-1} h_s - p_i \right) \epsilon \geq 0$$

e poiché $\epsilon > 0$ abbiamo

$$c_l \geq \sum_{s=i}^{l-1} h_s + p_i$$

che è contro ipotesi. Quindi siamo arrivati ad un assurdo e concludiamo che $v_i^* = u_i$.

Supponiamo ora che valga la disuguaglianza opposta, cioè se

$$p_i + \sum_{s=i}^{l-1} h_s < c_l.$$

Supponiamo per assurdo che $v_i^* = u_i$. Per ϵ sufficientemente piccolo, definia-

mo una soluzione alternativa $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$ tale che

$$\bar{x}_l = x_l^* - \epsilon, \quad \bar{v}_i = v_i^* - \epsilon, \quad \bar{\sigma}_i = \sigma_i^* + \epsilon, \quad \dots, \quad \bar{\sigma}_{l-1} = \sigma_{l-1}^* + \epsilon.$$

Se ϵ è scelto sufficientemente piccolo, la soluzione così ottenuta è ammissibile per il problema.

Indichiamo con z^* e $\bar{z}$ i costi associati alle due soluzioni (x^*, v^*, σ^*) e $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$. Otteniamo la seguente relazione:

$$\bar{z} = z^* + (-c_l + h_i + \dots + h_{l-1} + p_i)\epsilon.$$

Poiché z^* è il valore ottimo del problema, deve valere la seguente disuguaglianza

$$\bar{z} - z^* \geq 0,$$

quindi otteniamo

$$\left(-c_l + \sum_{s=i}^{l-1} h_s + p_i\right)\epsilon \geq 0$$

e poiché $\epsilon > 0$ abbiamo

$$c_l \leq \sum_{s=i}^{l-1} h_s + p_i$$

che è contro ipotesi. Quindi siamo arrivati ad un assurdo e concludiamo che $v_i^* = 0$.

Possiamo generalizzare il caso appena fatto supponendo che la vendita non avvenga nel primo periodo ma in un periodo k con $k < l$ e $k \in \{i, \dots, l\}$. Si ripercorre tutto il procedimento appena fatto solo che invece di avere una vendita v_i avremo una vendita v_k e invece di far partire la sommatoria dei costi di stoccaggio da i partirà da k .

Supponiamo ora di avere un intervallo di rigenerazione in cui non si attiva mai la produzione, vediamo che valore possono avere le variabili v_k^* .

Fissiamo $l = i$ e $v_l^* = u_l$ e supponiamo che

$$p_k > \sum_{s=i}^{k-1} h_s + p_l$$

per $k = l + 1, \dots, j$ fissato.

Supponiamo per assurdo che $v_k^* = 0$. Per ϵ sufficientemente piccolo, definiamo una soluzione alternativa $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$ tale che

$$\bar{v}_k = v_k^* + \epsilon, \quad \bar{\sigma}_i = \sigma_i^* + \epsilon, \quad \dots, \quad \bar{\sigma}_{k-1} = \sigma_{k-1}^* + \epsilon, \quad \bar{v}_l = v_l^* - \epsilon.$$

Se ϵ è scelto sufficientemente piccolo, la soluzione così ottenuta è ammissibile per il problema.

Indichiamo con z^* e $\bar{z}$ i costi associati alle due soluzioni (x^*, v^*, σ^*) e $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$. Otteniamo la seguente relazione:

$$\bar{z} = z^* + (h_i + \dots + h_{k-1} - p_k + p_l)\epsilon.$$

Poiché z^* è il valore ottimo del problema, deve valere la seguente disuguaglianza

$$\bar{z} - z^* \geq 0,$$

quindi otteniamo

$$\left(\sum_{s=i}^{k-1} h_s - p_k + p_l \right) \epsilon \geq 0$$

e poiché $\epsilon > 0$ abbiamo

$$\sum_{s=i}^{k-1} h_s + p_l \geq p_k$$

che è contro ipotesi. Quindi siamo arrivati ad un assurdo e concludiamo che $v_k^* = u_k$.

Supponiamo che avvenga il caso contrario, cioè fissiamo $l = i$ e $v_l^* = u_l$ e supponiamo che

$$p_k < \sum_{s=i}^{k-1} h_s + p_l$$

per $k = l + 1, \dots, j$ fissato.

Supponiamo per assurdo che $v_k^* = u_k$. Per ϵ sufficientemente piccolo, definiamo una soluzione alternativa $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$ tale che

$$\bar{v}_k = v_k^* - \epsilon, \quad \bar{\sigma}_i = \sigma_i^* - \epsilon, \quad \dots, \quad \bar{\sigma}_{k-1} = \sigma_{k-1}^* - \epsilon, \quad \bar{v}_l = v_l^* + \epsilon.$$

Se ϵ è scelto sufficientemente piccolo, la soluzione così ottenuta è ammissibile per il problema.

Indichiamo con z^* e $\bar{z}$ i costi associati alle due soluzioni (x^*, v^*, σ^*) e $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{\sigma})$. Otteniamo la seguente relazione:

$$\bar{z} = z^* + (-h_i - \cdots - h_{k-1} + p_k - p_l)\epsilon.$$

Poiché z^* è il valore ottimo del problema, deve valere la seguente disuguaglianza

$$\bar{z} - z^* \geq 0,$$

quindi otteniamo

$$\left(-\sum_{s=i}^{k-1} h_s + p_k - p_l \right) \epsilon \geq 0$$

e poiché $\epsilon > 0$ abbiamo

$$\sum_{s=i}^{k-1} h_s + p_l \leq p_k$$

che è contro ipotesi. Quindi siamo arrivati ad un assurdo e concludiamo che $v_k^* = 0$.

Ora, mettendoci nel caso in cui la produzione si attiva, conoscendo i valori delle singole variabili v^* , possiamo trovare una soluzione esplicita per x_l^* . Partendo dal vincolo (4.28) e sostituendoci ricorsivamente il vincolo (4.29) otteniamo:

$$x_l = d_l + v_l + \sigma_l - \sigma_{l-1}$$

con

$$\sigma_{l-1} = \sigma_{l-2} - v_{l-1} - d_{l-1}$$

$$\sigma_l = \sigma_{(l+1)-1} = d_{l+1} + v_{l+1} + \sigma_{l+1},$$

$$\implies x_l = d_l + v_l + d_{l+1} + v_{l+1} + \sigma_{l+1} - \sigma_{l-2} + v_{l-1} + d_{l-1}.$$

$$\vdots$$

$$x_l = d_l + d_{l+1} + d_{l-1} + d_{l+2} + d_{l-2} + \cdots + d_{i+1} + d_{j-1} + \\ + v_l + v_{l+1} + v_{l-1} + \cdots + v_{i+1} + v_{j-1} + \sigma_j - \sigma_i,$$

con $\sigma_i = \sigma_{i-1} - d_i - v_i$ e $\sigma_j = 0$, $\sigma_{i-1} = 0$.

Quindi otteniamo

$$x_l^* = \sum_{k=i}^{j-1} d_k + \sum_{k=i}^{j-1} v_k^*.$$

Abbiamo visto finora il procedimento risolutivo per *ULS3* quando abbiamo un intervallo di rigenerazione fissato, quindi quando conosciamo i valori di i, j e l . Proviamo ora a generalizzare questi concetti, cioè proviamo a cercare la (o una) soluzione ottima quando conosciamo solo i costi fissi di produzione, i costi di stoccaggio, i prezzi di vendita, le domande e i limiti superiori delle vendite.

Algoritmo risolutivo per *ULS3*

Input: p_t, c_t, h_t, d_t per $t = 1, \dots, n$ e u_t considerato come il limite superiore della vendita v_t per $t = 1, \dots, n$.

Output: (x^*, v^*, σ^*) che sia la (o una) soluzione ottima del problema *ULS3*. Consideriamo dei generici i, j e l , quindi andiamo a considerare tutti i possibili intervalli di rigenerazione del tipo $[i, j]$, per qualsiasi $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i < j$. Per ogni intervallo di rigenerazione trovo la (o una) soluzione ottima nel seguente modo.

Supponiamo di avere un intervallo di rigenerazione $[i, j]$ appena descritto, procediamo per casi provandoli tutti.

Caso 1: attiviamo la produzione in i quindi fissiamo $i = l$, cioè $x_l > 0$. Allora per $k = i, \dots, j$ abbiamo

- Se $p_k > c_l + \sum_{s=i}^{k-1} h_s$ allora $v_k^* = u_k$.
- Altrimenti $v_k^* = 0$.
- $\sigma_k^* = x_l^* - \sum_{s=i}^k d_s - \sum_{s=i}^k v_s^*$.

Caso 2: attiviamo la produzione in $i+1$ quindi fissiamo $i+1 = l$, cioè $x_l > 0$. Sappiamo che questo può succedere solo se $d_i < 0$, altrimenti avremmo $\sigma_i = 0$

e l'intervallo di rigenerazione partirebbe da $i + 1$.

Quindi $x_l > 0$, quello che succede da $i + 1$ compreso in poi si veda il **caso 1**, quello che succede prima di $i + 1$ lo vediamo ora:

- Se $p_i + h_i > c_l$ allora $v_i^* = u_i$.
- Altrimenti $v_i^* = 0$.
- $\sigma_i^* = -d_i - v_i^*$.

Facciamo questo ragionamento per ogni **caso** k per $k = i + 2, \dots, j - 2$.

Caso $j - i$: attiviamo la produzione in $j - 1$ quindi fissiamo $j - 1 = l$, cioè $x_l > 0$. Quello che succede da $j - 1$ compreso in poi si veda il **caso 1**, quello che succede prima di $j - 1$ è la generalizzazione del **caso 2** per $k = i, \dots, j - 2$:

- Se $p_k + \sum_{s=k}^{j-2} h_s > c_l$ allora $v_k^* = u_k$.
- Altrimenti $v_k^* = 0$.
- $\sigma_k^* = -\sum_{s=i}^k d_s - \sum_{s=i}^k v_s^*$.

Caso $j - i + 1$: attiviamo la produzione in j quindi fissiamo $j = l$, cioè $x_l > 0$. Quello che succede in j si veda il **caso 1**, mentre quello che succede prima si veda il **caso $j - 1$** per $k = i, \dots, j - 1$.

Caso $j - i + 2$: non attiviamo mai la produzione. Quindi fissiamo $l = i$ e $v_l^* = u_l$, per $k = i + 1, \dots, j$ abbiamo che

- Se $p_k > \sum_{s=i}^{k-1} h_s + p_l$ allora $v_k^* = u_k$.
- Altrimenti $v_k^* = 0$.
- $\sigma_k^* = -\sum_{s=i}^k d_s - \sum_{s=i}^k v_s^*$.

A questo punto andiamo a fissare la produzione nel periodo in cui ottengo la soluzione ottima e calcoliamo il costo ottimale dell'intervallo nel seguente modo:

$$costo(i, j - 1) = f_l + \left(c_l + \sum_{s=i}^{j-1} h_s \right) (d_{i,j-1} + v_{i,j-1}^*).$$

Facciamo questo ragionamento appena descritto per ogni intervallo di rigenerazione $[i, j]$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $i < j$. Andiamo in questo modo a conoscere il valore ottimo ristretto di tutti i possibili intervalli di rigenerazione.

Ora costruiamo il grafo orientato con i nodi $1, \dots, n+1$, dove qualsiasi arco (i, j) con $i < j$ corrisponde a un intervallo di rigenerazione $[i, j-1]$ e ad ogni arco (i, j) assegniamo come costo il $costo(i, j-1)$ ottimale dell'intervallo (i, j) . Risolvendo il problema del cammino minimo dal nodo 0 al nodo $n+1$ troviamo quali sono gli intervalli di rigenerazione, corrispondenti quindi agli archi del cammino minimo, e troviamo il valore ottimo del problema globale che non è altro che il costo del cammino minimo.

4.2.4 *Involuppo Convesso*

In questa sezione diamo alcuni importanti risultati, tra cui la descrizione formale di una famiglia di disuguaglianze valide, chiamate disuguaglianze (t, S, R) . Dimosteremo che queste insieme ai vincoli (4.22)-(4.25) descrivono in modo completo l'involuppo convesso delle soluzioni di ULS3.

Definizione 4.2. Definiamo per $R \subseteq \{1, \dots, n\}$:

1. $d_{ij} = \sum_{i \leq k \leq j} d_k$, per $1 \leq i \leq j \leq n$, $d_{ij} = 0$, se $i > j$;
2. $u_{ij}^R = \sum_{k \in R, i \leq k \leq j} u_k$, per $1 \leq i \leq j \leq n$, $u_{ij}^R = 0$, se $i > j$;
3. $\bar{b}_i^R = \max_{t=0, \dots, i} (u_{1t}^R + d_{1t})$, per $i = 0, \dots, n$;
4. $\theta(R, i) = \min\{t \in \{0, \dots, i\} : (u_{1t}^R + d_{1t}) = \bar{b}_i^R\}$, per $i = 0, \dots, n$;
5. $\bar{b}_{ij}^R = \bar{b}_j^R - \bar{b}_{i-1}^R \geq 0$, per $1 \leq i \leq j \leq n$.

Notiamo che, se $\tau = \theta(R, i)$ allora

$$u_{t+1, \tau}^R + d_{t+1, \tau} \geq 0, \text{ per } 0 \leq t < \tau, \quad (4.34)$$

e che

$$u_{\tau+1, t}^R + d_{\tau+1, t} \leq 0, \text{ per } \tau < t \leq i. \quad (4.35)$$

Esempio 4.2.2. Consideriamo la disuguaglianza seguente:

$$x_1 + x_2 + 4y_3 + 1y_4 \geq 6 + v_1 + v_3,$$

con $n = 4$, $R = \{1, 3\}$, $u = (1, 1, 1, 1)$ e $d = (3, -2, 4, 1)$. Vogliamo calcolare $\bar{b}_{34}^R$.

Dal punto 5 abbiamo:

$$\bar{b}_{34}^R = \bar{b}_4^R - \bar{b}_2^R \quad (4.36)$$

Calcoliamo i singoli termini, considerando la formula nel punto 3:

$$\bar{b}_4^R = \max_{t=0,\dots,4} (u_{1t}^R + d_{1t}), \quad (4.37)$$

ma

$$u_{1t}^R = \sum_{k \in R, 1 \leq k \leq t} u_k.$$

Andiamo a studiare i diversi casi:

- se $t = 0 \implies u_{10}^R = 0$;
- se $t = 1 \implies u_{11}^R = 1$;
- se $t = 2 \implies u_{12}^R = 1$;
- se $t = 3 \implies u_{13}^R = 2$;
- se $t = 4 \implies u_{14}^R = 2$.

Sappiamo anche che

$$d_{1t} = \sum_{k=1}^t d_k$$

e quindi

- se $t = 0 \implies d_{10} = 0$;
- se $t = 1 \implies d_{11} = 3$;
- se $t = 2 \implies d_{12} = 1$;

- se $t = 3 \implies d_{13} = 5$;
- se $t = 4 \implies d_{14} = 6$.

Andando a sostituire questi valori nella (4.37) otteniamo

$$\bar{b}_4^R = \max_{t=0,\dots,4} (0, 4, 2, 7, 8) = 8, \quad (4.38)$$

e

$$\theta(R, 4) = \min\{t \in \{0, \dots, 4\} : (u_{1t}^R + d_{1t}) = \bar{b}_4^R = 8\} = 4.$$

Calcoliamo

$$\bar{b}_2^R = \max_{t=0,\dots,2} (u_{1t}^R + d_{1t}) = (0, 4, 2) = 4 \quad (4.39)$$

e

$$\theta(R, 2) = 1,$$

andiamo a sostituire la (4.38) e la (4.39) nella (4.36) e otteniamo

$$\bar{b}_{34}^R = \bar{b}_4^R - \bar{b}_2^R = 8 - 4 = 4.$$

Osserviamo che $\bar{b}_i^R$ rappresenta l'importo che deve essere prodotto per soddisfare sia la domanda per tutti i periodi fino ad i che l'importo massimo che può essere venduto per i periodi in $R \cap \{1, \dots, i\}$. Notiamo che, poiché la domanda potrebbe essere negativa, questo importo deve a volte essere prodotto prima del periodo i .

Proposizione 4.2.3. *Le disuguaglianze (t, S, R)*

$$\sum_{j \in T \setminus S} x_j + \sum_{j \in S} \bar{b}_{jt}^R y_j \geq \sum_{j \in R} v_j + d_{1t}, \quad (4.40)$$

sono valide per X per qualsiasi $1 \leq t \leq n$, $T = \{1, \dots, t\}$, $S \subseteq T$ e $R \subseteq T$, tale che $t = \theta(R, t)$.

Dimostrazione. Sia $(x^*, y^*, v^*) \in X$, con X definito in (4.1).

Supponiamo $y_i^* = 0$, per qualsiasi $i \in S$. Allora $x_i^* = 0$ per $i \in S$ e otteniamo

$$\sum_{j \in T \setminus S} x_j^* + \sum_{j \in S} \bar{b}_{jt}^R y_j^* = \sum_{j \in T} x_j^*$$

ma

$$\sum_{j \in T} x_j^* \geq \sum_{j \in T} v_j^* + d_{1t} \geq \sum_{j \in R} v_j^* + d_{1t},$$

dove la prima disuguaglianza segue dai vincoli (4.22), e la seconda dalla non negatività delle v_j^* e dalla definizione di $R \subseteq T$. Quindi abbiamo dimostrato che la (4.40) è soddisfatta ogni qualvolta si abbia $y_i^* = 0$ per qualsiasi $i \in S$.

Supponiamo ora di avere almeno una $y_i^* = 1$. Dato

$$k = \min\{i \in S : y_i^* = 1\}, \quad (4.41)$$

indice che indica la prima volta nell'insieme S in cui si avvia la produzione, e dato

$$\tau = \theta(R, k-1) = \min\{t \in \{0, \dots, k-1\} : (u_{1t}^R + d_{1t}) = \bar{b}_{k-1}^R\},$$

si ha che $\tau \leq k-1$ e $x_j^* = 0$ per $j \in S$ tale che $j \leq \tau \leq k-1 < k$, con k dato dalla (4.41). Allora

$$\sum_{j \in T \setminus S} x_j^* \geq \sum_{j \in T \setminus S, j \leq \tau} x_j^* = \sum_{j \leq \tau} x_j^* \geq \sum_{j \leq \tau} v_j^* + d_{1\tau} \geq \sum_{j \in R, j \leq \tau} v_j^* + d_{1\tau}, \quad (4.42)$$

dove la prima disuguaglianza segue dalla non negatività delle x_j^* e dal restringimento del dominio, la seconda uguaglianza segue dal fatto che tutte le x_j^* sono nulle in S con $j \leq \tau$, la terza disuguaglianza dai vincoli (4.22) e la quarta dalla non negatività delle v_j^* e dalla definizione di $R \subseteq T$.

Abbiamo anche

$$\sum_{j \in S} \bar{b}_{jt}^R y_j^* \geq \bar{b}_{kt}^R \quad (4.43)$$

$$= \bar{b}_t^R - \bar{b}_{k-1}^R \quad (4.44)$$

$$= \max_{i=0, \dots, t} (u_{1i}^R + d_{1i}) - [\max_{j=0, \dots, k-1} (u_{1j}^R + d_{1j})] \quad (4.45)$$

$$= u_{1t}^R + d_{1t} - (u_{1\tau}^R + d_{1\tau}) \quad (4.46)$$

$$= \sum_{j \in R, 1 \leq j \leq t} u_j - \sum_{j \in R, 1 \leq j \leq \tau} u_j + \sum_{1 \leq j \leq t} d_j - \sum_{1 \leq j \leq \tau} d_j \quad (4.47)$$

$$= \sum_{j \in R, \tau+1 \leq j \leq t} u_j + \sum_{\tau+1 \leq j \leq t} d_j \quad (4.48)$$

$$\geq \sum_{j \in R, \tau+1 \leq j \leq t} v_j^* + d_{\tau+1, t}. \quad (4.49)$$

La (4.43) la otteniamo dalla (4.41).

La (4.44) segue dalla definizione di $\bar{b}_{ij}^R$ data nel punto 5 della Definizione 4.2.

La (4.45) segue sempre dalla Definizione 4.2 punto 3.

La (4.46) dalla definizione di τ e di t .

La (4.47) dalla Definizione 4.2 punto 2.

La (4.48) segue dal fatto che $1 \leq \tau < \tau + 1 \leq t$.

Infine la (4.49) segue dai vincoli (4.23).

Addizionando la (4.42) e la (4.43)-(4.49) otteniamo

$$\sum_{j \in T \setminus S} x_j^* + \sum_{j \in S} \bar{b}_{jt}^R y_j^* \geq \sum_{j \in R, j \leq \tau} v_j^* + d_{1\tau} + \sum_{j \in R, \tau+1 \leq j \leq t} v_j^* + d_{\tau+1, t} = \sum_{j \in R} v_j^* + d_{1t},$$

che è precisamente la (4.40). $\square$

Il seguente teorema dà una descrizione completa dell'involuppo convesso di X .

Teorema 4.2.4. *Le disuguaglianze (4.40) insieme ai vincoli (4.23)-(4.25) descrivono il $\text{conv}(X)$.*

Definizione 4.3. Denotiamo con $M(c, f, p) \subseteq X$ l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n (-c_i x_i - f_i y_i + p_i v_i) : (x, y, v) \in X \right\}.$$

Per dimostrare il Teorema 4.2.4 si ha bisogno di due lemmi caratterizzanti le soluzioni di $M(c, f, p)$, i quali valgono sotto certe condizioni.

In questo momento possiamo considerare solo costi non-negativi, poiché, come vedremo nella dimostrazione del teorema, quando si hanno costi negativi non ci serviranno le condizioni che stiamo per dimostrare. Quindi consideriamo un costo non-negativo (c, f, p) , una soluzione ottima $(x^*, y^*, v^*) \in M(c, f, p)$ e un intero $q \in \{1, \dots, n+1\}$. Definiamo $R = \{j : p_j > 0\}$ e $\tau = \theta(R, q-1)$.

Le condizioni sono:

Condizione A: $q \in \{1, \dots, n+1\}$ soddisfa la Condizione A se

1. $q = n+1$;
oppure
2. $q \neq n+1, c_q = 0$ e $\{f_q = 0$ oppure $y_q^* = 1\}$.

Condizione B: $q \in \{1, \dots, n+1\}$ soddisfa la Condizione B se, per ogni $j \in \{1, \dots, \tau\}$,

1. $c_j > 0$;
oppure
2. $y_j^* = 0$.

Data (x^*, y^*, v^*) , se q soddisfa la Condizione A allora la produzione nel periodo q può essere aumentata a costo zero. Perciò, poiché (x^*, y^*, v^*) è ottima, non è mai conveniente produrre nel periodo $j \in \{q+1, \dots, n\}$ nel quale il costo c_j o f_j è positivo. Inoltre, si cerca di vendere il più possibile in tutti i periodi $j \in \{q, \dots, n\}$ con il prezzo unitario di vendita p_j positivo. Dalla definizione di $\theta(R, q-1)$, questo argomento può essere esteso ai periodi $\{\tau+1, \dots, q-1\}$. Tutto questo è formalizzato nel Lemma seguente.

Lemma 4.2.5. *Se q soddisfa la Condizione A, allora*

1. *per $j = \tau + 1, \dots, n$, $j \neq q$, $x_j^* = 0$ ogni volta che $c_j > 0$;*
2. *per $j = \tau + 1, \dots, n$, $j \neq q$, $y_j^* = 0$ ogni volta che $f_j = 0$; e*
3. *per $j = \tau + 1, \dots, n$, $v_j^* = u_j$ ogni volta che $p_j > 0$.*

Dimostrazione. In ogni caso noi assumeremo il contrario e produrremo una soluzione (x', y', v') la quale avrà un valore più alto di (x^*, y^*, v^*) , contraddicendo l'assunzione di ottimalità per (x^*, y^*, v^*) .

1. Supponiamo di avere $j \neq q$, $\tau + 1 \leq j \leq n$, e per assurdo $c_j > 0$ e $x_j^* > 0$.

Poniamo $x'_j = 0$ e di conseguenza $y'_j = 0$ per $\tau + 1 \leq j \leq n$ e $j \neq q$. Inoltre $v'_k = 0$ per $k \notin R$ e $v'_k \leq v_k^*$ per $\tau + 1 \leq k \leq n$ con $k \in R$, sapendo che $v'_k \leq u_k$ per qualsiasi k .

Se $q \neq n + 1$, poniamo $x'_q = x_q^* + x_j^*$ e $y'_q = 1$.

Per verificare che $(x', y', v') \in X$, noi dobbiamo dimostrare che soddisfa la disuguaglianza (4.22) per qualsiasi t .

Se $t < j$ oppure $t \geq q$ questo è immediato:

$$\sum_{k=1}^t x'_k = \sum_{k=1}^t x_k^* \geq \sum_{k=1}^t v_k^* + d_{1t} \geq \sum_{k=1}^t v'_k + d_{1t}$$

dove la prima disuguaglianza vale poiché (x^*, y^*, v^*) è valida per i vincoli (4.22), la seconda segue dal fatto che $v'_k \leq v_k^*$ per qualsiasi k . Quindi la (4.22) è soddisfatta per (x', y', v') .

D'altra parte, se $j \leq t \leq q - 1$, sappiamo che $\tau < \tau + 1 \leq j \leq t$, e segue

che

$$\sum_{k=1}^t x'_k \geq \sum_{k=1}^{\tau} x'_k \quad (4.50)$$

$$= \sum_{k=1}^{\tau} x_k^* \quad (4.51)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* + d_{1\tau} \quad (4.52)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* + u_{\tau+1,t} + d_{1t} \quad (4.53)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\tau} v'_k + u_{\tau+1,t} + d_{1t} \quad (4.54)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\tau} v'_k + \sum_{k=\tau+1, k \in R}^t v'_k + d_{1t} \quad (4.55)$$

$$= \sum_{k=1}^t v'_k + d_{1t}. \quad (4.56)$$

La (4.50) segue dal fatto che $\tau < t$.

La (4.51) poiché $\tau < j$.

La (4.52) è conseguenza diretta del fatto che (x^*, y^*, v^*) è valida per i vincoli (4.22).

La (4.53) segue dalla (4.35), in quanto quest'ultima implica che $u_{\tau+1,t} + d_{1t} \leq d_{1\tau}$ ed è proprio quella usata.

La (4.54) segue dal fatto che $v'_k \leq v_k^*$ per qualsiasi k .

La (4.55) segue da $v'_k \leq u_k$ per qualsiasi k .

Infine, l'ultima uguaglianza, si ha poiché $v'_k = 0$ per qualsiasi $k \notin R$.

Quindi abbiamo dimostrato che la (4.22) è valida.

La soluzione (x', y', v') è di valore $c_j x_j^*$ maggiore di (x^*, y^*, v^*) , in quanto avevamo posto $x'_q = x_q^* + x_j^*$ quando $q \neq n+1$. Abbiamo contraddetto l'ottimalità di (x^*, y^*, v^*) , quindi ogni volta che $c_j > 0$ si ha $x_j^* = 0$.

2. Supponiamo di avere qualche $j \neq q$, $\tau+1 \leq j \leq n$, e per assurdo $f_j > 0$ e $y_j^* = 1$. Costruiamo (x', y', v') come segue: $y'_j = 0$ e $v'_k = 0$ per

$k \notin R$, se $q \neq n+1$ allora $x'_q = x_q^* + x_j^*$ e $y'_q = 1$. La (x', y', v') soddisfa la (4.22), la dimostrazione è la stessa del punto 1.

La soluzione (x', y', v') è di valore $c_j x_j^* + f_j$ maggiore di (x^*, y^*, v^*) . Quindi la soluzione ottima si ottiene per $y_j^* = 0$ ogni volta che $f_j > 0$.

3. Supponiamo di avere qualche j , $\tau + 1 \leq j \leq n$, e per assurdo $p_j > 0$ e $v_j^* < u_j$. Costruiamo (x', y', v') ponendo: $v'_j = u_j$ e $v'_k = 0$ per $k \notin R$. Se $q \neq n+1$ allora poniamo $x'_q = x_q^* + u_j - v_j^*$ e $y'_q = 1$. (x', y', v') soddisfa la (4.22), la dimostrazione è la stessa del punto 1.

La soluzione (x', y', v') ha un valore $p_j(u_j - v_j^*)$ maggiore di (x^*, y^*, v^*) . Quindi la soluzione ottima si ha quando $v_j^* = u_j$ ogni volta che $p_j > 0$, cioè quando vendo il più possibile se il prezzo unitario di vendita è strettamente positivo. $\square$

In modo del tutto analogo, se q soddisfa la Condizione B allora qualsiasi importo prodotto nei periodi $\{1, \dots, \tau\}$ nella soluzione (x^*, y^*, v^*) ha costo positivo. Perciò, poiché (x^*, y^*, v^*) è ottima, nel caso in cui q soddisfa sia la Condizione A che la Condizione B non è conveniente produrre nei periodi $\{1, \dots, \tau\}$ qualsiasi quantità di prodotto usata per soddisfare le domande o le vendite dei periodi $\{q, \dots, n\}$, perchè tale importo può essere prodotto nel periodo q a costo zero. Così la produzione nei periodi $\{1, \dots, \tau\}$ è usata solo per soddisfare le domande o le vendite riguardanti questo periodo. Inoltre, poiché la produzione nel periodo $\{1, \dots, \tau\}$ ha costo positivo, conviene non vendere in questo periodo quando il prezzo unitario è nullo.

Tutto questo è formalizzato nel seguente Lemma.

Lemma 4.2.6. *Se q soddisfa la Condizione A e B allora*

1. $\sum_{k=1}^{\tau} x_k^* = \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* + d_{1\tau}$, e
2. per $j = 1, \dots, \tau$, $v_j^* = 0$ ogni volta che $p_j = 0$.

Dimostrazione. Procediamo nella stessa maniera della dimostrazione del Lemma precedente. Partiamo da un assurdo per dimostrarne la falsità.

1. Supponiamo che

$$s = \sum_{k=1}^{\tau} x_k^* - \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* - d_{1\tau} \quad (4.57)$$

sia positivo. Allora, se $\sum_{k=1}^{\tau} x_k^* = 0$, dalla (4.57) otteniamo

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{\tau} v_k^* - d_{1\tau} &> 0. \\ \implies \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* &< -d_{1\tau}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Dalla (4.34) segue che

$$\begin{aligned} u_{1\tau}^R + d_{1\tau} &\geq 0 \\ \implies u_{1\tau}^R &\geq -d_{1\tau}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Unendo la (4.58) con la (4.59) ed insieme al fatto che $v_k^* \geq 0$ per qualsiasi k , otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1, k \in R}^{\tau} v_k^* &< -d_{1\tau} < u_{1\tau}^R \\ \implies \sum_{k=1, k \in R}^{\tau} v_k^* &< u_{1\tau}^R. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Quindi si ha $\sum_{k=1}^{\tau} x_k^* > 0$ oppure $\sum_{k=1, k \in R}^{\tau} v_k^* < u_{1\tau}^R$.

Segue che esiste $j \in \{1, \dots, \tau\}$ tale che $x_j^* > 0$, oppure $j \in R$ tale che $v_j^* < u_j$.

Scegliamo il più grande tale j .

Allora per $k = j + 1, \dots, \tau$ si ha

$$x_k^* = 0, \quad (4.61)$$

e

$$v_k^* = u_k \quad (4.62)$$

quando $k \in R$.

Caso 1: Supponiamo prima che $x_j^* > 0$ e poniamo $\epsilon = \min\{s, x_j^*\}$.

Poniamo anche $v'_k = 0$ per $k \notin R$, $x'_j = x_j^* - \epsilon$, e $x'_q = x_q^* + \epsilon$ nel caso in cui $q \neq n + 1$. Vogliamo dimostrare che $(x', y', v') \in X$, verificando che è soddisfatta la (4.22).

Per $t = j, \dots, \tau$, abbiamo

$$\sum_{k=1}^t x'_k = \sum_{k=1}^t x_k^* - \epsilon \quad (4.63)$$

$$= \sum_{k=1}^{\tau} x_k^* - \epsilon \quad (4.64)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* + d_{1\tau} \quad (4.65)$$

$$\geq \sum_{k=1}^t v_k^* + \sum_{k=t+1, k \in R}^{\tau} v_k^* + d_{1\tau} \quad (4.66)$$

$$= \sum_{k=1}^t v_k^* + u_{t+1, \tau}^R + d_{1\tau} \quad (4.67)$$

$$\geq \sum_{k=1}^t v_k^* + d_{1t} \quad (4.68)$$

$$\geq \sum_{k=1}^t v'_k + d_{1t}. \quad (4.69)$$

La (4.63) vale poiché siamo nel periodo $j \leq t$ in cui diminuiamo la produzione, quindi $x'_j = x_j^* - \epsilon$ ma dalla definizione di ϵ otteniamo che $x'_j = x_j^* - \epsilon \geq 0$, quindi $x_j^* \geq \epsilon$ e $q > j$.

La (4.64) segue dalla (4.61).

La (4.65) deriva dal fatto che $s \geq \epsilon$, questo è immediato dalla definizione di ϵ , cioè

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\tau} x_k^* - \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* - d_{1\tau} &\geq \epsilon \\ \implies \sum_{k=1}^{\tau} x_k^* - \epsilon &\geq \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* + d_{1\tau} \end{aligned}$$

che è proprio la (4.65).

La (4.66) segue dal fatto che $t \leq \tau$ e $v_k^* \geq 0$.

La (4.67) segue dalla (4.62), poiché vale per qualsiasi $k \in R$ e $k = t+1, \dots, \tau$ ma t parte da j , quindi per $k = j+1, \dots, \tau$ che sono le ipotesi della (4.62).

La (4.68) segue dalla (4.34), poiché andando ad aggiungere la stessa quantità positiva ad ambo i membri si ottiene

$$\begin{aligned} u_{t+1,\tau}^R + d_{t+1,\tau} + d_{1t} &\geq d_{1t} \\ \implies u_{t+1,\tau}^R + d_{1\tau} &\geq d_{1t} \end{aligned}$$

che è proprio quella che volevamo.

La (4.69) segue dal fatto che $v'_k \leq v_k^*$ per qualsiasi k .

Caso 2: Supponiamo ora che $v_j^* < u_j$, con $j \in R$ e poniamo $\epsilon = \min\{s, u_j - v_j^*\}$.

Poniamo anche $v'_j = v_j^* + \epsilon$ e $v'_k = 0$ per $k \notin R$, $x'_q = x_q^* + \epsilon$ e $y'_q = 1$ se $q \neq n+1$. Vogliamo dimostrare che $(x', y', v') \in X$, verificando che è soddisfatta la (4.22).

Per $t = j, \dots, \tau$, abbiamo

$$\sum_{k=1}^t x'_k = \sum_{k=1}^t x_k^* \tag{4.70}$$

$$= \sum_{k=1}^{\tau} x_k^* \tag{4.71}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* + d_{1\tau} + \epsilon \tag{4.72}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\tau} v'_k + d_{1\tau} \tag{4.73}$$

$$= \sum_{k=1}^t v'_k + \sum_{k=t+1, k \in R}^{\tau} v'_k + d_{1\tau} \tag{4.74}$$

$$= \sum_{k=1}^t v'_k + u_{t+1,\tau}^R + d_{1\tau} \tag{4.75}$$

$$\geq \sum_{k=1}^t v'_k + d_{1t}. \tag{4.76}$$

La (4.70) deriva dal fatto che $t < q$.

La (4.71) segue dalla (4.61).

La (4.72) vale poiché $s \geq \epsilon$, cioè

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\tau} x_k^* - \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* - d_{1\tau} &\geq \epsilon \\ \implies \sum_{k=1}^{\tau} x_k^* &\geq \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* + d_{1\tau} + \epsilon, \end{aligned}$$

che è proprio la (4.72).

La (4.73) segue da come abbiamo definito v'_j , cioè $v'_j = v_j^* + \epsilon$, e $v'_k \leq v_k^*$ per qualsiasi $k \neq j$. Quindi

$$\sum_{k=1}^{\tau} v_k^* + d_{1\tau} + \epsilon = \sum_{k=1, k \neq j}^{\tau} v_k^* + v_j^* + d_{1\tau} + \epsilon \geq \sum_{k=1, k \neq j}^{\tau} v'_k + v'_j + d_{1\tau} = \sum_{k=1}^{\tau} v'_k + d_{1\tau}.$$

La (4.74) è conseguenza del fatto che $v'_k = 0$ per qualsiasi $k \notin R$.

La (4.75) segue dalla (4.62), in cui si ha $v'_k = v_k^* = u_k$ per qualsiasi $k \in R$ e $k = j + 1, \dots, \tau$.

La (4.76) segue dalla (4.34), come abbiamo fatto per la (4.68).

In entrambe i casi abbiamo dimostrato la validità della (4.22) per $t = j, \dots, \tau$.

Per $t < j$ oppure per $t \geq q$ la validità della (4.22) è immediata. Rimane da verificare per $t = \tau + 1, \dots, q - 1$

$$\sum_{k=1}^t x'_k \geq \sum_{k=1}^{\tau} x'_k \tag{4.77}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\tau} v'_k + d_{1\tau} \tag{4.78}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\tau} v'_k + u_{\tau+1,t}^R + d_{1t} \tag{4.79}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\tau} v'_k + \sum_{k=\tau+1, k \in R}^t v'_k + d_{1t} \tag{4.80}$$

$$= \sum_{k=1}^t v'_k + d_{1t}. \tag{4.81}$$

La (4.77) segue dal fatto che $\tau < t$.

La (4.78) è conseguenza delle dimostrazioni precedenti, cioè la validità della (4.22) per $t = 1, \dots, \tau$.

La (4.79) segue dalla (4.35), per lo stesso ragionamento fatto nella (4.68).

La (4.80) è conseguenza del fatto che $v'_k \leq u_k$ per qualsiasi k .

La (4.81) deriva dalla $v'_k = 0$ per $k \notin R$.

Nel **caso 1** la soluzione (x', y', v') ha un valore ϵc_j maggiore di (x^*, y^*, v^*) , perchè q soddisfa la Condizione A. Poiché $x_j^* > 0$ allora $y_j^* = 1$ e quindi, dalla Condizione B, $c_j > 0$.

Nel **caso 2** la soluzione (x', y', v') ha un valore ϵp_j maggiore di (x^*, y^*, v^*) , e $p_j > 0$ poiché $j \in R$.

In entrambe i casi abbiamo ottenuto soluzioni migliori, quindi l'assunzione iniziale $s > 0$ è errata. Allora $s = 0$ e quindi

$$\sum_{k=1}^{\tau} x_k^* = \sum_{k=1}^{\tau} v_k^* + d_{1\tau}$$

che è proprio la tesi.

2. Supponiamo per assurdo che $v_j^* > 0$ con $1 \leq j \leq \tau$ e $p_j = 0$. Ma torniamo al caso in cui $s > 0$ e abbiamo già dimostrato che non è una soluzione ottima. Quindi $v_j^* = 0$ per $j = 1, \dots, \tau$ ogni volta che $p_j = 0$. In quanto è logico che non conviene vendere ogni volta che il prezzo unitario di vendita sia nullo. $\square$

Dimostrazione Teorema 4.2.4. Per una arbitraria funzione obiettivo diversa da zero del tipo

$$\max \sum_{i=1}^n (-c_i x_i - f_i y_i + p_i v_i)$$

dimostriamo caso dopo caso che tutti i punti in $M(c, f, p)$, definito in (4.3), soddisfano una delle disuguaglianze (4.40), (4.23), (4.24) o (4.25). Questo prova che la descrizione dell'involuppo convesso è completa, poiché quando la funzione obiettivo è parallela a una faccia del poliedro la corrispondente disuguaglianza che definisce la faccia è l'unica disuguaglianza valida che viene soddisfatta come uguaglianza da tutte le soluzioni ottimali.

Se $c_i < 0$ per qualche i , allora

$$M(c, f, p) \subseteq \{(x, y, v) : x_i = My_i\},$$

in quanto se il prezzo unitario di produzione è strettamente negativo è conveniente produrre più quantità di prodotto possibile, quindi è logico che le soluzioni ottime dovranno soddisfare questo vincolo.

Se $f_i < 0$ per qualche i , allora

$$M(c, f, p) \subseteq \{(x, y, v) : y_i = 1\},$$

lo stesso ragionamento vale anche in questo caso, se il costo fisso di produzione è strettamente negativo è conveniente produrre in quel periodo e quindi l'insieme delle soluzioni ottime dovrà soddisfare questo vincolo.

Se $p_i < 0$ per qualche i , allora

$$M(c, f, p) \subseteq \{(x, y, v) : v_i = 0\},$$

in questo caso non conviene vendere quando il prezzo unitario di vendita del prodotto è negativo, quindi anche in questo caso le soluzioni ottime dovranno soddisfare questo vincolo.

Supponiamo ora che c , f , e p siano non-negative. Poiché $(-c, -f, p) \neq (0, 0, 0)$, possiamo definire l come l'ultimo periodo in cui c_l , f_l e p_l non sono tutte zero.

Siano $t = \theta(R, l)$, $T = \{1, \dots, t\}$, $S = \{i \in T : c_i = 0\}$ e $R = \{i : p_i > 0\}$.

Supponiamo ci sia un $k \leq l$ tale che $c_k = f_k = 0$. Allora il Lemma 4.2.5 può essere applicato con $q = k$, poiché per come abbiamo definito k soddisfa la Condizione A, e usando l come valore di j .

Se $p_l > 0$ allora

$$M(c, f, p) \subseteq \{(x, y, v) : v_l = u_l\}.$$

Se $p_l = 0$ e quindi $k < l$ vale $c_l > 0$ oppure $f_l > 0$. Segue che

$$M(c, f, p) \subseteq \{(x, y, v) : x_l = 0\},$$

oppure

$$M(c, f, p) \subseteq \{(x, y, v) : y_l = 0\}.$$

Supponiamo da ora in poi che non esiste tale k e così $f_i > 0$ per qualsiasi $i \in S$.

Supponiamo che $p_i > 0$ per qualche $i > t$. Allora il Lemma 4.2.5 può essere applicato con $q = l + 1$ e dal punto 3 si ha

$$M(c, f, p) \subseteq \{(x, y, v) : v_i = u_i\}.$$

Così da ora in poi possiamo assumere che $R \subseteq T$.

Consideriamo una soluzione ottima (x^*, y^*, v^*) in $M(c, f, p)$. Dimostriamo ora che la (4.40) vale come uguaglianza.

Supponiamo che $y_i^* = 0$ per qualsiasi $i \in S$. Allora

$$\sum_{j \in T \setminus S} x_j^* = \sum_{j \in T} x_j^* \quad (4.82)$$

e

$$\sum_{j \in S} \bar{b}_{jl}^R y_j^* = 0. \quad (4.83)$$

Dal fatto che $l = n$ oppure $c_{l+1} = f_{l+1} = 0$, e per $i \in T$ tale che $y_i^* = 1$ implica che $i \notin S$ e quindi, per come è definito S si ha che $c_i > 0$ per $i < \theta(R, l) = t$ tale che $y_i = 1$. Il Lemma 4.2.6 può essere applicato con $q = l + 1$, che soddisfa sia la Condizione A che la Condizione B, e si ha

$$\sum_{j \in T} x_j^* = \sum_{j \in T} v_j^* + d_{1t}, \quad (4.84)$$

dal punto 1 del Lemma, e

$$\sum_{j \in T} v_j^* = \sum_{j \in R \cap T} v_j^* = \sum_{j \in R} v_j^*, \quad (4.85)$$

segue dal fatto che abbiamo definito $R = \{i : p_i > 0\}$, quindi dal punto 2 del Lemma segue la prima disuguaglianza, la seconda vale poiché abbiamo visto

che $R \subseteq T$.

Così, andando a sostituire il valore della (4.85) nella (4.84), e il valore della (4.84) nella (4.82), otteniamo

$$\sum_{j \in T \setminus S} x_j^* + \sum_{j \in S} \bar{b}_{jt}^R y_j^* = \sum_{j \in T} x_j^* = \sum_{j \in T} v_j^* + d_{1t} = \sum_{j \in R} v_j^* + d_{1t}$$

e la disuguaglianza (4.40) vale come uguaglianza.

D'altra parte poniamo $k = \min\{i \in S : y_i^* = 1\}$ e $\tau = \theta(R, k - 1)$. Applicando il Lemma 4.2.5 con $q = k$, $y_k^* = 1$ e $c_k = 0$ otteniamo dal punto 1:

$$\sum_{j \in T, j > \tau} x_j^* = 0, \quad (4.86)$$

dal punto 2 e dalla definizione (4.2):

$$\sum_{j \in S} \bar{b}_{jt}^R y_j^* = \bar{b}_{k,t}^R = \bar{b}_t^R - \bar{b}_{k-1}^R, \quad (4.87)$$

e infine dal punto 3 sempre del Lemma 4.2.5:

$$\sum_{j \in R, j > \tau} v_j^* = u_{\tau+1,t}^R. \quad (4.88)$$

Dalla definizione di k abbiamo $c_k = 0$, $y_k^* = 1$, e $c_j > 0$ per tutti $1 \leq j \leq k - 1$ con $y_j^* = 1$. Così applicando il Lemma 4.2.6 con $q = k$, otteniamo dal punto 1:

$$\sum_{j \leq \tau} x_j^* = \sum_{j \leq \tau} v_j^* + d_{1\tau} \quad (4.89)$$

mentre dal punto 2 abbiamo

$$\sum_{j \leq \tau} v_j^* = \sum_{j \in R, j \leq \tau} v_j^*. \quad (4.90)$$

Ora, usando la (4.87) otteniamo

$$\sum_{j \in T \setminus S} x_j^* + \sum_{j \in S} \bar{b}_{jt}^R y_j^* = \sum_{j \in T \setminus S} x_j^* + \bar{b}_t^R - \bar{b}_{k-1}^R. \quad (4.91)$$

Dal fatto che $\bar{b}_{k-1}^R = \bar{b}_\tau^R$, $x_j^* = 0$ se $j \in S$ e $j \leq \tau \leq k-1$, e dalla (4.86), abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{j \in T \setminus S} x_j^* + \bar{b}_t^R - \bar{b}_{k-1}^R &= \sum_{j \in T \setminus S, j \leq \tau} x_j^* + \sum_{j \in T \setminus S, j > \tau} x_j^* + \bar{b}_t^R - \bar{b}_{k-1}^R \\ &= \sum_{j \leq \tau} x_j^* + \bar{b}_t^R - \bar{b}_\tau^R. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Dalla (4.89), (4.90) e dalla Definizione 4.2 di $\bar{b}_i^R$, abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq \tau} x_j^* + \bar{b}_t^R - \bar{b}_\tau^R &= \sum_{j \in R, j \leq \tau} v_j^* + d_{1\tau} + u_{1t}^R + d_{1t} - (u_{1\tau}^R + d_{1\tau}) \\ &= \sum_{j \in R, j \leq \tau} v_j^* + u_{\tau+1,t}^R + d_{1t}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Infine, sostituendo la (4.88) nella (4.93), otteniamo

$$\sum_{j \in R, j \leq \tau} v_j^* + u_{\tau+1,t}^R + d_{1t} = \sum_{j \in R} v_j^* + d_{1t}$$

e quindi la disuguaglianza (4.40) vale come uguaglianza anche in questo caso. Questo completa la dimostrazione del teorema. $\square$

4.3 ULS3 con Domande Non-Negative

Supponiamo che $d_t \geq 0$ per qualsiasi t , vedremo che il modello ULS3 si semplifica in molti modi.

E' naturale fissare $\sigma_n = 0$, e non è interessante in un intervallo di rigenerazione considerare una soluzione con $0 < v_t^* < u_t$ poiché sarebbe possibile solo se $x_k^* = 0$ per tutti k nell'intervallo, e allora sarebbe impossibile produrre una quantità $v_t^* > 0$. Così restringiamo l'attenzione all'insieme

$$\bar{X} = X \cap \{(x, v, y, \sigma) : \sigma_n = 0\},$$

e la corrispondente faccia

$$\text{conv}(\bar{X}) = \text{conv}(X) \cap \{(x, v, y, \sigma) : \sigma_n = 0\}.$$

Le disuguaglianze $x_t \leq My_t$ non sono necessarie per descrivere $\text{conv}(\bar{X})$. Anche il valore $\bar{b}_{ij}^R$ usato nella descrizione delle facce è dato direttamente da $\bar{b}_{ij}^R = u_{ij}^R + d_{ij}$ per $1 \leq i \leq j \leq n$.

Non avendo né stock iniziale né stock finale possiamo scrivere $\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n v_j + d_{1n}$, e cerchiamo di derivare una formulazione estesa per $\text{conv}(\bar{X})$. In questo caso i punti estremi, vedi Definizione 1.24, del $\text{conv}(\bar{X})$ sono chiaramente caratterizzati.

Proposizione 4.3.1. *Qualsiasi punto estremo è caratterizzato da tre insiemi $I, J, K \subseteq \{1, \dots, n\}$, dove $I \subseteq J$, e $I = \{t_1, \dots, t_q\}$ con $t_1 < t_2 < \dots < t_q$. Il corrispondente punto estremo è:*

$$y_t = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in J, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$v_t = \begin{cases} u_t, & \text{se } t \in K, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$x_t = \begin{cases} \sum_{i=t_j}^{t_{j+1}-1} (v_i + d_i), & \text{se } t = t_j \in I, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove poniamo $t_{q+1} = n + 1$.

Ora è semplice derivare una formulazione estesa generalizzando la formulazione data in (3.21)-(3.25) per LS-U.

Poniamo

$$b_t = u_t + d_t$$

per qualsiasi t e introduciamo due variabili binarie:

- $\beta_{ij} = 1$ se la domanda d_t è prodotta nel periodo $i \leq j$;
- $\alpha_{ij} = 1$ se la quantità $d_t + u_t$ è prodotta nel periodo $i \leq j$.

La formulazione risultante è:

$$\max \quad \sum_{t=1}^n p_t v_t - \sum_{t=1}^n c_t x_t - \sum_{t=1}^n f_t y_t \quad (4.94)$$

$$\text{s. a} \quad x_i = \sum_{j \geq i} (b_j \alpha_{ij} + d_j \beta_{ij}), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.95)$$

$$v_j + d_j = \sum_{i \leq j} (b_j \alpha_{ij} + d_j \beta_{ij}), \quad j = 1, \dots, n \quad (4.96)$$

$$\sum_{i \leq j} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.97)$$

$$(\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \leq y_i, \quad 1 \leq i \leq j \leq n \quad (4.98)$$

$$x, v \in \mathbb{R}_+^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^{n(n+1)/2}, \quad (4.99)$$

$$y_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.100)$$

Il vincolo (4.96) è equivalente a

$$v_j = u_j \sum_{i \leq j} \alpha_{ij} \quad \text{per } j = 1, \dots, n,$$

possiamo darne una dimostrazione come segue:

$$\begin{aligned} v_j &= \sum_{i \leq j} (b_j \alpha_{ij} + d_j \beta_{ij}) - d_j \\ &= \sum_{i \leq j} [(u_j + d_j) \alpha_{ij} + d_j \beta_{ij}] - d_j \\ &= \sum_{i \leq j} u_j \alpha_{ij} + \sum_{i \leq j} d_j \alpha_{ij} + \sum_{i \leq j} d_j \beta_{ij} - d_j \\ &= \sum_{i \leq j} u_j \alpha_{ij} + \sum_{i \leq j} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) d_j - d_j \\ &= u_j \sum_{i \leq j} \alpha_{ij} + d_j - d_j \\ &= u_j \sum_{i \leq j} \alpha_{ij}, \end{aligned}$$

per $j = 1, \dots, n$.

Sia P^* il politopo, si veda la Definizione 1.28, costituito dai vincoli (4.95)-

(4.100).

Proposizione 4.3.2. $proj_{x,y,v}P^* = \text{conv}(\bar{X})$.

Dimostrazione. I punti in P^* con α, β, y interi sono punti di $\bar{X}$, allora P^* è una formulazione estesa valida per $\bar{X}$, e si ha $\text{conv}(\bar{X}) \subseteq proj_{x,y,v}P^*$.

Ora dimostriamo l'altra inclusione per poter concludere che valga l'uguaglianza.

Consideriamo un punto $(x, y, v, \alpha, \beta) \in P^*$ e dimostriamo che $(x, y, v) \in \text{conv}(\bar{X})$. E' sufficiente dimostrare che (x, y, v) soddisfa le disuguaglianze che descrivono $\text{conv}(X)$ e che soddisfa $\sigma_n = 0$ con σ_n dato dalla (4.19), quindi $\sigma_n = \sum_{t=1}^n x_t - \sum_{t=1}^n v_t - d_{1n} = 0$. Infatti,

$$\sum_{t=1}^n x_t = \sum_{t=1}^n \sum_{j \geq t} (b_j \alpha_{tj} + d_j \beta_{tj}) = \sum_{j=1}^n \sum_{t \leq j} (b_j \alpha_{tj} + d_j \beta_{tj}) = \sum_{j=1}^n v_j + d_{1n},$$

dove la prima uguaglianza è data dalla (4.95), la seconda è facilmente verificabile e la terza dalla (4.96). Quindi otteniamo che $\sigma_n = 0$.

Abbiamo anche che

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^t x_k &= \sum_{k=1}^t \sum_{j=k}^n (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) \\ &\geq \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^j (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) = \sum_{j=1}^t (v_j + d_j), \end{aligned} \tag{4.101}$$

dove la prima uguaglianza vale sempre dalla (4.95), la seconda abbiamo già detto che vale come uguaglianza quindi significa che vale contemporaneamente sia come " $\geq$ " che come " $\leq$ ", e la terza segue sempre dalla (4.96).

Poi abbiamo

$$v_t = \sum_{i \leq t} (b_t \alpha_{it} + d_t \beta_{it}) - d_t \leq b_t \sum_{i \leq t} (\alpha_{it} + \beta_{it}) - d_t = b_t - d_t = u_t, \tag{4.102}$$

e

$$v_t = \sum_{i \leq t} (b_t \alpha_{it} + d_t \beta_{it}) - d_t \geq d_t \sum_{i \leq t} (\alpha_{it} + \beta_{it}) - d_t = d_t - d_t = 0, \quad (4.103)$$

dove la prima uguaglianza della (4.102) e della (4.103) segue dalla (4.96), la seconda disuguaglianza della (4.102) vale poiché

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq t} (b_t \alpha_{it} + d_t \beta_{it}) &= \sum_{i \leq t} b_t \alpha_{it} + \sum_{i \leq t} d_t \beta_{it} = b_t \sum_{i \leq t} \alpha_{it} + d_t \sum_{i \leq t} \beta_{it} \\ &= b_t \sum_{i \leq t} \alpha_{it} + (b_t - u_t) \sum_{i \leq t} \beta_{it} \leq b_t \sum_{i \leq t} (\alpha_{it} + \beta_{it}), \end{aligned} \quad (4.104)$$

mentre la seconda disuguaglianza della (4.103) segue da

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq t} (b_t \alpha_{it} + d_t \beta_{it}) &= \sum_{i \leq t} b_t \alpha_{it} + \sum_{i \leq t} d_t \beta_{it} = b_t \sum_{i \leq t} \alpha_{it} + d_t \sum_{i \leq t} \beta_{it} \\ &= (u_t + d_t) \sum_{i \leq t} \alpha_{it} + d_t \sum_{i \leq t} \beta_{it} \geq d_t \sum_{i \leq t} (\alpha_{it} + \beta_{it}), \end{aligned} \quad (4.105)$$

ed entrambe sfruttano il fatto che $b_t = u_t + d_t$ e che $u_t \geq 0$ per qualsiasi t . Per ultima la terza uguaglianza della (4.102) e della (4.103) segue dalla (4.96).

Infine abbiamo

$$x_t = \sum_{j \geq t} (b_j \alpha_{tj} + d_j \beta_{tj}) \leq \sum_{j \geq t} b_j (\alpha_{tj} + \beta_{tj}) \leq \sum_{j \geq t} b_j y_t \leq M y_t,$$

dove la prima uguaglianza segue dalla (4.95), la seconda disuguaglianza per la (4.104), e la terza disuguaglianza segue dalla (4.98).

Così le disuguaglianze (4.21)-(4.23) sono soddisfatte. Chiaramente anche la (4.24) è soddisfatta. Completiamo la dimostrazione verificando se valgono le disuguaglianze (t, S, R) date dalla (4.40).

Usando la definizione (4.2) e il fatto che $b_t = d_t + u_t$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{kt}^R &= \bar{b}_t^R - \bar{b}_{k-1}^R \\
&= u_{1t}^R + d_{1t} - u_{1,k-1}^R - d_{1,k-1} \\
&= \sum_{j \in R, 1 \leq j \leq t} u_j - \sum_{j \in R, 1 \leq j \leq k-1} u_j + d_{kt} \\
&= \sum_{j \in R, j \geq k} u_j + d_{kt} \\
&= \sum_{j \in R, j \geq k} u_j + \sum_{j \in R, j \geq k} d_j + \sum_{j \in T \setminus R, j \geq k} d_j \\
&= \sum_{j \in R, j \geq k} b_j + \sum_{j \in T \setminus R, j \geq k} d_j.
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Quindi usando la (4.95) e la (4.106) abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in S} x_k + \sum_{k \in T \setminus S} \bar{b}_{kt}^R y_k &= \\
&= \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{k \in T \setminus S} \left(\sum_{j \geq k, j \in R} b_j y_k + \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j y_k \right).
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Ora, usando le proprietà delle sommatorie, dalla (4.107) otteniamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in S} \sum_{j \geq k} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{k \in T \setminus S} \left(\sum_{j \geq k, j \in R} b_j y_k + \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j y_k \right) = \\
&= \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in R} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \\
&+ \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in R} b_j y_k + \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j y_k.
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Andando a sostituire la (4.98) nella (4.108) e sapendo che vale la (4.105)

otteniamo

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in R} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \\
& + \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in R} b_j y_k + \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j y_k \\
& \geq \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in R} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j (\alpha_{kj} + \beta_{kj}) + \\
& + \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in R} b_j (\alpha_{kj} + \beta_{kj}) + \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j (\alpha_{kj} + \beta_{kj}).
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Ora, sapendo che vale la (4.104), dalla (4.109) possiamo ottenere

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in R} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j (\alpha_{kj} + \beta_{kj}) + \\
& + \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in R} b_j (\alpha_{kj} + \beta_{kj}) + \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j (\alpha_{kj} + \beta_{kj}) \\
& \geq \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in R} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j (\alpha_{kj} + \beta_{kj}) + \\
& + \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in R} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j (\alpha_{kj} + \beta_{kj}).
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Usando le proprietà delle sommatorie, dalla (4.110) otteniamo

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in R} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{k \in S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j (\alpha_{kj} + \beta_{kj}) + \\
& + \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in R} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{k \in T \setminus S} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j (\alpha_{kj} + \beta_{kj}) \\
& = \sum_{k \in T} \sum_{j \geq k, j \in R} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{k \in T} \sum_{j \geq k, j \in T \setminus R} d_j (\alpha_{kj} + \beta_{kj}) \\
& = \sum_{j \in R} \sum_{k \leq j} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{j \in T \setminus R} d_j \sum_{k \leq j} (\alpha_{kj} + \beta_{kj}).
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Utilizzando la (4.96) e la (4.97), dalla (4.111) otteniamo

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in R} \sum_{k \leq j} (b_j \alpha_{kj} + d_j \beta_{kj}) + \sum_{j \in T \setminus R} d_j \sum_{k \leq j} (\alpha_{kj} + \beta_{kj}) \\
&= \sum_{j \in R} (v_j + d_j) + \sum_{j \in T \setminus R} d_j \\
&= \sum_{j \in R} v_j + d_{1t}.
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Quindi, unendo le (4.107)-(4.112), otteniamo

$$\sum_{k \in S} x_k + \sum_{k \in T \setminus S} \bar{b}_{kt}^R y_k \geq \sum_{j \in R} v_j + d_{1t},$$

dimostrando che valgono le disuguaglianze (t, S, R) . $\square$

Ora consideriamo il problema di separazione, Definizione 1.31, per $\text{conv}(\bar{X})$. Supponiamo che un punto (x^*, y^*, v^*) soddisfa (4.21)-(4.24), e $\sigma_n^* = 0$, ma non è nel $\text{conv}(\bar{X})$. Allora dal Teorema 4.2.4 almeno una delle disuguaglianze

$$\sum_{j \in T \setminus S} x_j + \sum_{j \in S} \bar{b}_{jt}^R y_j \geq \sum_{k \in R} v_k + d_{1t}$$

è violata. Il fatto che $d_t \geq 0$ per qualsiasi t implica $\bar{b}_{ij}^R = u_{jt}^R + d_{jt}$, per un fissato t , e $T = \{1, \dots, t\}$ il problema di separazione può essere risolto minimizzando sopra $R, S \subseteq \{1, \dots, t\}$, la differenza

$$\sum_{j \in T \setminus S} x_j^* + \sum_{j \in S} (u_{jt}^R + d_{jt}) y_j^* - \sum_{k \in R} v_k^*,$$

la quale può essere riscritta come

$$\sum_{j \in T \setminus S} x_j^* + \sum_{j \in S} y_j^* \left(\sum_{k \in R, j \leq k \leq t} u_k \right) + \sum_{j \in S} d_{jt} y_j^* - \sum_{k \in R} v_k^*.$$

Per minimizzare questa espressione prendiamo λ e μ rispettivamente come i vettori caratteristici di S e $\bar{R} = T \setminus R$.

Ora minimizziamo sopra λ e μ

$$\sum_{j=1}^t x_j^*(1 - \lambda_j) + \sum_{j=1}^t \sum_{k=j}^t u_k y_j^* \lambda_j (1 - \mu_k) + \sum_{j=1}^t d_{jt} y_j^* \lambda_j - \sum_{k=1}^t v_k^* (1 - \mu_k),$$

la quale è equivalente a minimizzare

$$\sum_{j=1}^t \left(\sum_{k=j}^t (u_k + d_k) y_j^* - x_j^* \right) \lambda_j + \sum_{k=1}^t v_k^* \mu_k - \sum_{j=1}^t \sum_{k=j}^t u_k y_j^* \lambda_j \mu_k, \quad (4.113)$$

poiché

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^t x_j^*(1 - \lambda_j) + \sum_{j=1}^t \sum_{k=j}^t u_k y_j^* \lambda_j (1 - \mu_k) + \sum_{j=1}^t d_{jt} y_j^* \lambda_j - \sum_{k=1}^t v_k^* (1 - \mu_k) = \\ &= \sum_{j=1}^t x_j^* - \sum_{j=1}^t x_j^* \lambda_j + \sum_{j=1}^t \sum_{k=j}^t u_k y_j^* \lambda_j - \sum_{j=1}^t \sum_{k=j}^t u_k y_j^* \lambda_j \mu_k \\ &+ \sum_{j=1}^t d_{jt} y_j^* \lambda_j - \sum_{k=1}^t v_k^* + \sum_{k=1}^t v_k^* \mu_k = \\ &= \sum_{j=1}^t x_j^* + \sum_{j=1}^t (-x_j^* + \sum_{k=j}^t u_k y_j^* + d_{jt} y_j^*) \lambda_j - \sum_{j=1}^t \sum_{k=j}^t u_k y_j^* \lambda_j \mu_k + \\ &- \sum_{k=1}^t v_k^* + \sum_{k=1}^t v_k^* \mu_k = \\ &= \sum_{j=1}^t x_j^* + \sum_{j=1}^t \left(\sum_{k=j}^t (u_k + d_k) y_j^* - x_j^* \right) \lambda_j - \sum_{j=1}^t \sum_{k=j}^t u_k y_j^* \lambda_j \mu_k \\ &- \sum_{k=1}^t v_k^* + \sum_{k=1}^t v_k^* \mu_k. \end{aligned}$$

Quindi possiamo notare che quest'ultima si differenzia dalla (4.113) per due costanti $\sum_{j=1}^t x_j^*$ e $\sum_{k=1}^t v_k^*$, e di conseguenza se andiamo a minimizzare sopra λ e μ le due formulazioni sono equivalenti tra loro.

La (4.113) è una funzione quadratica booleana nella quale tutti i termini quadratici hanno coefficienti non-positivi, sappiamo che minimizzare una

funzione del genere si riduce a massimizzare un problema di flusso, si veda [15]. Quindi risolvendo per qualsiasi $t = 1, \dots, n$ si arriva ad un algoritmo polinomiale.

4.4 *ULS3 con Domande Nulle e Costi di Wagner-Whitin*

Con $d_t \geq 0$ per qualsiasi t come nella precedente sezione, le disuguaglianze che definiscono le facce dipendono ancora dai sottoinsiemi S e R . Qui, quando $d_t = 0$ per qualsiasi t , dimostriamo che il numero di facce, anche se ancora esponenziale, decresce in presenza dei costi di Wagner-Whitin. Per vedere questo introduciamo una formulazione estesa.

La formulazione generica con i costi di Wagner-Whitin l'abbiamo già vista nella sezione 3.5, quindi assumiamo che i costi h_t, c_t soddisfano la condizione di Wagner-Whitin

$$c_t + h_t - c_{t+1} \geq 0 \quad \text{per } t = 1, \dots, n-1.$$

Alternativamente eliminando le variabili produzione dalla funzione obiettivo, il costo risultante è

$$h'_t = c_t + h_t - c_{t+1} \geq 0.$$

Questa restrizione, come abbiamo già visto, dice che è meglio produrre più tardi possibile. Poiché, in una soluzione estrema ottima, la quantità venduta nel periodo t è 0 oppure u_t , possiamo definire le seguenti variabili:

- $w_t = 1$ se $v_t = u_t$ nel periodo t , e $w_t = 0$ se $v_t = 0$;
- $\delta_k^l = 1$ se $v_l = u_l$ e la quantità immagazzinata alla fine del periodo k contiene la corrispondente vendita u_l .

Chiaramente $\delta_k^l = \max(0, w_l - \sum_{t=k+1}^l y_t)$ a causa della proprietà di Wagner-Whitin.

La risultante formulazione è:

$$\max \quad \sum_{t=1}^n p_t u_t w_t - \sum_{t=1}^n f_t y_t - \sum_{t=1}^n h'_t \sigma_t \quad (4.114)$$

$$\text{s. a} \quad \sigma_k = \sum_{l=k+1}^n u_l \delta_k^l, \quad 1 \leq k < t \quad (4.115)$$

$$\delta_k^l - w_l + \sum_{i=k+1}^l y_i \geq 0, \quad 1 \leq k < l \leq t \quad (4.116)$$

$$\delta_k^l \geq 0, \quad 1 \leq k < l \leq t \quad (4.117)$$

$$0 \leq w_k \leq 1, 0 \leq y_k \leq 1, \quad 1 \leq k \leq t \quad (4.118)$$

$$y_k \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq k \leq t. \quad (4.119)$$

Proposizione 4.4.1. *Il poliedro Q definito dai vincoli (4.116)-(4.118) è intero.*

Per la dimostrazione si veda [8].

Ora consideriamo la proiezione di Q nello spazio (σ, v, y) delle variabili originali. Usando $v_t = u_t w_t$ per qualsiasi t , e eliminando le variabili δ_k^l nel vincolo (4.115) usando la (4.116) o la (4.117) otteniamo

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sum_{l=k+1}^n u_l \delta_k^l \\ &\geq \sum_{l=k+1}^n u_l \left(w_l - \sum_{i=k+1}^l y_i \right) \\ &= \sum_{l=k+1}^n u_l w_l - \sum_{l=k+1}^n u_l \sum_{i=k+1}^l y_i \\ &= \sum_{l=k+1}^n v_l - \sum_{l=k+1}^n u_l \sum_{i=k+1}^l y_i \\ &= \sum_{l=k+1}^n \left(v_l - u_l \sum_{i=k+1}^l y_i \right). \end{aligned}$$

e conduce direttamente alla proiezione dando anche una dimostrazione

della seguente proposizione.

Proposizione 4.4.2. *Il poliedro*

$$\sigma_k \geq \sum_{l \in U} \left(v_l - u_l \sum_{i=k+1}^l y_i \right), \quad \forall U \subseteq \{k+1, \dots, n\}, \forall k, \quad (4.120)$$

$$0 \leq v_k \leq u_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.121)$$

$$0 \leq y_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.122)$$

$$0 \leq \sigma_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.123)$$

ha y intero ad ogni suo punto estremo.

Notiamo che le disuguaglianze (k, U) (4.120) formano un sottoinsieme speciale delle disuguaglianze (t, S, R) . In modo specifico, ponendo

$$t = \max\{i : i \in U\},$$

la (4.120) può essere riscritta come

$$\sum_{j=1}^k x_j + \sum_{i=k+1}^t y_i \left(\sum_{i \leq j \leq t, j \in U} u_j \right) \geq \sum_{l \in U} v_l + \sum_{j=1}^k v_j, \quad (4.124)$$

poiché dalla (4.18) abbiamo

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^k x_j - \sum_{j=1}^k v_j,$$

applicando la (4.120) otteniamo

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sum_{j=1}^k x_j - \sum_{j=1}^k v_j \geq \sum_{l \in U} \left(v_l - u_l \sum_{i=k+1}^l y_i \right) \\ \implies \sum_{j=1}^k x_j + \sum_{i=k+1}^t y_i \left(\sum_{i \leq j \leq t, j \in U} u_j \right) &\geq \sum_{j=1}^k v_j + \sum_{l \in U} v_l, \end{aligned}$$

che è proprio la (4.124).

Oppure, ponendo $T = \{1, \dots, t\}$, $R = U \cup \{1, \dots, k\}$ e $S = \{k+1, \dots, t\}$, la (4.120) può essere riscritta come

$$\sum_{j \in T \setminus S} x_j + \sum_{j \in S} \bar{b}_{jt}^R y_j \geq \sum_{j \in R} v_j,$$

poiché basta proiettare sugli insiemi appena definiti la (4.124).

Conclusioni

Moltissime estensioni del tipo che abbiamo studiato nel Capitolo 4 per i modelli di Lot-Sizing senza capacità sono importanti. Possiamo pensare di avere un modello con vendite e scorte di sicurezza ma nel caso in cui la capacità è costante oppure in un orizzonte con backlogging o variabili di start-up, sono tutti esempi che si trovano quotidianamente nella vita reale.

Il significativo risultato a cui siamo arrivati è l'aver dato una procedura risolutiva per il problema di Lot-Sizing con vendite e scorte di sicurezza. Abbiamo dimostrato che ogni variabile vendita vale zero o il suo limite superiore, e che quale delle due sia l'opzione migliore dipende dal prezzo di vendita, dal costo di produzione e dai costi di magazzino. Quindi una volta stabiliti i valori delle variabili vendita si ricavano i valori delle variabili produzione e stoccaggio. Per arrivare a questo siamo partiti dal caso più semplice in cui le domande erano tutte positive per poi generalizzarlo al caso delle domande arbitrarie. Abbiamo prima studiato una procedura risolutiva in cui erano noti gli estremi dell'intervallo di rigenerazione e era noto il periodo in cui sarebbe partita la produzione, poi abbiamo cercato di generalizzare il tutto scrivendo un vero e proprio algoritmo risolutivo per *ULS3* nel quale gli unici dati conosciuti erano i costi fissi di produzione, i prezzi di vendita, i costi di stoccaggio, le domande arbitrarie e i limiti superiori di vendita.

Poi abbiamo anche visto come nel modello Lot-Sizing con vendite e scorte di sicurezza si semplificano le cose quando le domande sono tutte non-negative. Ma abbiamo comunque visto che le disuguaglianze che definiscono le facce dipendono ancora dai sottoinsiemi S e R . Cosa che non succede nel caso in cui le domande siano tutte nulle e ci sia la presenza dei costi di Wagner-Whitin. Anzi, in questo caso abbiamo visto che il numero di facce

descresce in presenza di questi costi. Per fare questo abbiamo prima dovuto introdurre una formulazione estesa del problema.

Bibliografia

- [1] M. Conforti, G. Cornuéjols, G. Zambelli, “Integer Programming”, Springer, 2014, pp. 89-102.
- [2] M. Di Summa, Note del Corso di Ottimizzazione Discreta, Università degli Studi di Padova, 2017.
- [3] M. Di Summa, Note del Corso di Ricerca Operativa, Università degli Studi di Padova, 2012.
- [4] M. Florian, M. Klein, “Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints”, Management Science 18, 1971, pp. 12-20.
- [5] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, “The Ellipsoid Method and Its Consequences in Combinatorial Optimization”, Combinatorica 1, 1981, pp. 169-197.
- [6] R.M. Karp, C.H. Papadimitriou, “On Linear Characterization of Combinatorial Optimization Problems”, 21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1980.
- [7] J. Krarup, O. Bilde, “Plant Location, Set Covering and Economic Lot Sizes: An $O(mn)$ Algorithm for Structured Problems”, Optimierung Bei Graphentheoretischen und Ganzzahligen Probleme, 1977, pp.155-180.
- [8] M. Loparic, Y. Pochet, L.A. Wolsey, “The Uncapacitated Lot-Sizing Problem with Sales and Safety Stock”, Mathematical Programming 89, 2001, pp. 487-504.

- [9] R.R. Meyer, "On the Existence of Optimal Solutions to Integer and Mixed Integer Programming Problems", *Mathematical Programming* 7, 1974, pp. 223-235.
- [10] M. Padberg, M.R.Rao, "The Russian Method for Linear Inequalities III: Bounded Integer Programming", Preprint, New York University, 1981.
- [11] Y. Pochet, "Valid Inequalities and Separation for Capacitated Economic Lot-Sizing", *Operations Research Letters* 7, 1988, pp. 109-116.
- [12] Y. Pochet, L.A. Wolsey, "Polyhedra for Lot-Sizing with Wagner-Whitin Costs", *Mathematical Programming* 67, 1994, pp. 297-324.
- [13] Y. Pochet, L.A. Wolsey, "Production Planning by Mixed Integer Programming", Springer, 2006.
- [14] Y. Pochet, L.A. Wolsey, "Single Item Lot-Sizing with Non-Decreasing Capacities", CORE Discussion Paper 48, 2007.
- [15] J.M.W. Rhys, "A Selection Problem of Shared Fixed Cost and Network Flows", *Management Science* 17, 1970, pp.200-207.
- [16] C. Van Hoesel, A. Wagelmans, "An $O(T^3)$ Algorithm for the Economic Lot-Sizing Problem with Constant Capacities", *Management Science* 42 (1), 1996, pp. 142-150.
- [17] H.M. Wagner, T.M. Whitin, "Dinamic Version of the Economic Lot Size Model", *Management Science* 5, 1958, pp. 89-96.
- [18] W.I. Zangwill, "A Deterministic Multi-Period Production Scheduling Model with Backlogging", *Management Science* 13, 1966, pp. 105-119.