



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA G. GALILEI

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Formula di Baker-Campbell-Hausdorff e ampiezze di transizione

Relatore:

Prof. Marco Matone

Candidato:

Pietro Oreglia

Matricola 1100942

Indice

1	Introduzione	4
2	BCH per generatori di algebre di Lie	7
2.1	Algebre di SU(2) e SU(1,1)	7
2.2	Commutatore $[X, Y]$ proporzionale a X e Y	10
2.2.1	BCH per commutatori $[X, Y] = uX + vY + cI$	10
2.2.2	Estensione a tre operatori	14
2.2.3	BCH per l'algebra di Virasoro	16
2.2.4	Ulteriore generalizzazione dell'algoritmo	19
2.2.5	Classificazione delle algebre	21
3	Fattorizzazione dell'operatore di evoluzione temporale	30
3.1	Oscillatore armonico	31
3.1.1	Azione di $\exp(-i\gamma PX/\hbar)$ sull'autostato del momento	31
3.1.2	Fattorizzazione per potenziale armonico	32
3.1.3	Propagatore nel caso armonico	34
4	Conclusione	37
	Bibliografia	38

1 Introduzione

Il concetto di *ampiezza di probabilità di transizione* è un concetto di grande rilevanza in fisica. Consideriamo un sistema di una particella in una dimensione con hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

e sia $|q, t\rangle$ l'autostato dell'operatore posizione X al tempo t con autovalore q , cioè

$$X |q, t\rangle = q |q, t\rangle$$

Si definisce come ampiezza di transizione dallo stato $|q\rangle$ allo stato $|q'\rangle$ la quantità

$$K(q, 0; q', \tau) = \langle q' | e^{-iH\tau/\hbar} | q \rangle \quad (1.1)$$

dove $\exp(-iH\tau/\hbar)$ è l'operatore di evoluzione temporale. Tale grandezza, dal momento in cui l'hamiltoniana non è funzione del tempo, è indipendente dall'origine dei tempi, nel senso che

$$K(q', \tau + t; q, t) \equiv K(q', \tau; q, 0) := K(q', q; \tau)$$

e prende il nome di *propagatore dallo stato iniziale $(q, 0)$ allo stato finale (q', τ)* .

Il calcolo di tale propagatore può risultare proibitivo, dato che l'effetto dell'azione di $\exp(-iH\tau/\hbar)$ sull'autostato della posizione non è noto in generale, mentre sono note le azioni degli esponenziali di operatore posizione e momento, il che rende dunque importante il problema di fattorizzare tale esponenziale.

La fattorizzazione dell'esponenziale è una questione molto delicata se si opera con algebre non commutative (come effettivamente avviene in meccanica quantistica) e viene risolto dal cosiddetto *teorema di Baker-Campbell-Hausdorff* (detto *teorema BCH* o semplicemente BCH, come verrà chiamato d'ora in poi). Per introdurre tale formula dobbiamo prima introdurre la seguente notazione (non convenzionale [2]): sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie in considerazione, definiamo anzitutto la *rappresentazione aggiunta* ad_X , con $X \in \mathfrak{g}$, come la funzione

$$\begin{aligned} ad_X : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\mapsto ad_X Y := [X, Y] \end{aligned}$$

Ora se $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $(h_1, k_1, \dots, h_n, k_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2n} \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 0)\}$, poniamo

$$[X^{h_1} Y^{k_1} \dots X^{h_n} Y^{k_n}] := (ad_X)^{h_1} \circ (ad_Y)^{k_1} \circ \dots \circ (ad_X)^{h_n} \circ (ad_Y)^{k_n-1}(Y)$$

Tale espressione prende il nome di *commutatore annidato* e può essere riscritto, in maniera più esplicita, come

$$[X^{h_1} Y^{k_1} \dots X^{h_n} Y^{k_n}] = \underbrace{[X, \dots [X, [Y, \dots [Y, \dots [X, \dots [X, [Y, [\dots, Y]]]]]]]}_{h_1 \text{ volte}} \underbrace{\quad}_{k_1 \text{ volte}} \underbrace{\quad}_{h_n \text{ volte}} \underbrace{\quad}_{k_n \text{ volte}}$$

A questo punto, detti $X, Y \in \mathfrak{g}$ si dimostra che $Z(X, Y) = \ln(e^X e^Y) \in \mathfrak{g}$, e risulta

$$\begin{aligned} Z(X, Y) &= \ln(e^X e^Y) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^j \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{(h_1, k_1), \dots, (h_n, k_n) \neq (0, 0) \\ h_1 + k_1 + \dots + h_n + k_n = j}} \frac{(\sum_{i=1}^n (h_i + k_i))^{-1}}{h_1! \dots h_n! k_1! \dots k_n!} [X^{h_1} Y^{k_1} \dots X^{h_n} Y^{k_n}] \end{aligned} \quad (1.2)$$

L'espressione (1.2) prende il nome di formula di Baker-Campbell-Hausdorff (nella formulazione di Dynkin). Una forma più maneggevole di tale espressione, che verrà utilizzata in seguito, è la cosiddetta *forma integrale* che risulta essere

$$\begin{aligned} Z(X, Y) &= \ln(e^X e^Y) = X + \int_0^1 dt \psi(e^{ad_X} e^{t \cdot ad_Y}) Y = \\ &= X + Y - \int_0^1 dt \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(I - e^{ad_X} e^{t \cdot ad_Y})^n}{n(n+1)} Y \end{aligned} \quad (1.3)$$

con

$$\psi(u) := \frac{u \ln u}{u - 1} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - u)^n}{n(n+1)}$$

La formula BCH, essendo una somma infinita, può presentare problemi di convergenza. Diventa quindi importante trovare casi in cui si abbia una *forma chiusa* della BCH, cioè un'espressione riducibile ad un numero finito di operazioni. Non esiste alcun metodo generale per ottenere un risultato da (1.3), e si deve dunque andare a studiare caso per caso. Nel corso di questo lavoro presenteremo due diversi metodi di studio del problema

1. Considerare le relazioni di commutazione delle algebre di interesse in alcuni campi della fisica. Se quindi i commutatori dei generatori del

gruppo in questione soddisfano determinate caratteristiche, sarà possibile calcolare la forma di Z . Questo metodo ha un certo grado di generalità, ma non è sempre facilmente applicabile al calcolo del propagatore (1.1). In questo caso infatti risulterebbe necessario esprimere l'hamiltoniana del sistema H come combinazione lineare degli operatori posizione e momento e dei loro commutatori (cosa che evidentemente non è sempre così immediata).

2. Fattorizzare l'esponenziale utilizzando un lemma che deriva naturalmente da (1.3), che prende il nome di *lemma di Hadamard*, per il quale

$$e^A B e^{-A} = C \quad (1.4)$$

dove A , B e C sono operatori, e

$$C = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (1.5)$$

valida per ogni A e B . L'utilizzo di tale forma permette un calcolo diretto del propagatore (permette di fattorizzare l'esponenziale dell'hamiltoniana moltiplicandola per opportuni operatori), però risulta essere molto più specifico e dipendere fortemente dalla forma del potenziale. Per presentare tale tipologia di studio verrà preso in considerazione il caso di hamiltoniana con potenziale armonico.

2 BCH per generatori di algebre di Lie

Per definire le caratteristiche di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è sufficiente conoscere le regole di commutazione dei generatori del gruppo di Lie in considerazione. Più precisamente, detti L_i i generatori del gruppo, le regole di commutazione sono definite da

$$[L_i, L_j] = if_{ij}^k L_k \quad (2.1)$$

dove le costanti f_{ij}^k sono dette *costanti di struttura* e sono indipendenti dalla scelta della rappresentazione del gruppo (anche per quanto riguarda i generatori è in realtà possibile dare una definizione indipendente dalla rappresentazione definendoli come elementi di base dello spazio tangente nell'origine del gruppo di Lie). Data dunque l'importanza che le algebre di Lie ricoprono nella fisica teorica è di particolare interesse studiare la formula BCH per diverse regole di commutazione.

2.1 Algebre di SU(2) e SU(1,1)

In generale a partire da un'algebra con le regole di commutazione (2.1) si possono ottenere gli elementi del gruppo G esponenziando gli elementi dell'algebra di Lie. Due parametrizzazioni che vengono comunemente usate sono

$$U_1(\alpha) = \exp(\alpha^i L_i)$$

oppure

$$U_2(\beta) = \prod_{j=1}^n \exp(\beta^j L_j)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. La formula BCH dunque esprime la connessione tra queste due rappresentazioni di G . Applichiamo questa relazione al caso delle algebre di SU(2) e SU(1,1) [6]. Questi due casi vengono trattati contestualmente dato che vale

$$[L_-, L_+] = 2\epsilon L_0 \quad [L_0, L_{\pm}] = \pm L_{\pm} \quad (2.2)$$

dove $\epsilon = +1$ per $su(1,1)$ e $\epsilon = -1$ per $su(2)$.

Definiamo ora la prima rappresentazione nel seguente modo

$$U_1(\lambda) = \exp(\lambda(\tau L_+ - \bar{\tau} L_- + i\alpha L_0)) \quad U_1(0) = I \quad (2.3)$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ e (τ, α) dette *coordinate canoniche del primo tipo* con $\tau \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. La seconda rappresentazione invece può essere espressa come

$$U_2(\lambda) = \exp(p_2(\lambda)L_+)\exp(p_0(\lambda)L_0)\exp(p_1(\lambda)L_-) \quad (2.4)$$

alla quale va imposto, per avere $U_2(0) = I$, la condizione $p_j(0) = 0$ per $j = 0, 1, 2$. I parametri (p_0, p_1, p_2) prendono il nome di *coordinate canoniche del secondo tipo*.

Ciò che bisogna fare ora è trovare le espressioni di $p_j(\lambda)$ affinché le due rappresentazioni siano uguali.

Iniziamo differenziando le equazioni (2.3) e (2.4) e imponendo $U_1(\lambda) = U_2(\lambda)$

$$\begin{aligned} (\tau L_+ - \bar{\tau} L_- + i\alpha L_0)U_1 &= (\tau L_+ - \bar{\tau} L_- + i\alpha L_0)U_2 \\ &= p'_2 L_+ \exp(p_2 L_+) \exp(p_0 L_0) \exp(p_1 L_-) \\ &\quad + p'_0 \exp(p_2 L_+) L_0 \exp(p_0 L_0) \exp(p_1 L_-) \\ &\quad + p'_1 \exp(p_2 L_+) \exp(p_0 L_0) L_1 \exp(p_1 L_-) \end{aligned}$$

Moltiplicando a destra per

$$U_2^{-1} = \exp(-p_1 L_-) \exp(-p_0 L_0) \exp(-p_2 L_+)$$

si ottiene

$$\tau L_+ - \bar{\tau} L_- + i\alpha L_0 = p'_2 L_+ + p'_0 e^{p_2 L_+} L_0 e^{-p_2} + p'_1 e^{p_2 L_+} e^{p_0 L_0} L_- e^{-p_0} e^{-p_2 L_+} \quad (2.5)$$

Dal lemma di Hadamard (1.4) e (1.5) e dalle relazioni di commutazione (2.2) si ha

$$\tau L_+ - \bar{\tau} L_- + i\alpha L_0 = \left[p'_1 e^{-p_0} \right] L_- + \left[p'_0 - 2\epsilon p'_1 p_2 e^{-p_0} \right] L_0 + \left[p'_2 - p'_0 p_2 + \epsilon p'_1 p_2^2 e^{-p_0} \right] L_+ \quad (2.6)$$

Eguagliando i coefficienti dei due lati dell'equazione (2.6) si giunge al seguente sistema di equazioni differenziali accoppiate

$$p'_1 e^{-p_0} = -\bar{\tau} \quad (2.7a)$$

$$p'_0 - 2\epsilon p_2 p'_1 e^{-p_0} = i\alpha \quad (2.7b)$$

$$p'_2 - p'_0 p_2 + \epsilon p_2^2 p'_1 e^{-p_0} = \tau \quad (2.7c)$$

con $p_j(0) = 0$ per $j = 0, 1, 2$. Sostituendo l'equazione (2.7a) in (2.7b) risulta

$$p'_0 + 2\epsilon \bar{\tau} p_2 = i\alpha \quad (2.8)$$

Dalle equazioni (2.7a), (2.7c) e (2.8) si ottiene

$$p'_2 - i\alpha p_2 + \epsilon \bar{\tau} p_2^2 = \tau \quad (2.9)$$

Infatti a partire da (2.7c)

$$\begin{aligned}\tau &= p'_2 - p'_0 p_2 + \epsilon p_2^2 p'_1 e^{-p_0} = p'_2 - p'_0 p_2 - \epsilon p_2^2 \bar{\tau} \\ &= p'_2 - p_2(i\alpha - 2\epsilon \bar{\tau} p_2) - \epsilon p_2^2 \bar{\tau} \\ &= p'_2 - i\alpha p_2 + \epsilon \bar{\tau} p_2^2\end{aligned}$$

Per risolvere (2.9) facciamo due sostituzioni. Come prima cosa $p_2 \mapsto y/\epsilon \bar{\tau}$ con $y(0) = 0$ e quindi $y \mapsto u'/u$ con $u'(0) = 0$. Per cui

$$\begin{aligned}p'_2 - i\alpha p_2 + \epsilon \bar{\tau} p_2^2 &= \tau \rightarrow \frac{1}{\epsilon \bar{\tau}} y' - \frac{i\alpha}{\epsilon \bar{\tau}} y + \frac{1}{\epsilon \bar{\tau}} y^2 = \tau \\ \implies y' - i\alpha y + y^2 &= \epsilon |\tau|^2 \rightarrow \frac{u''}{u} - \frac{(u')^2}{u^2} - i\alpha \frac{u'}{u} + \frac{(u')^2}{u^2} = \epsilon |\tau|^2\end{aligned}$$

che implica

$$u'' - i\alpha u' - \epsilon |\tau|^2 u = 0$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene arriva alla soluzione

$$u(\lambda) = A e^{i\alpha\lambda/2} \left(\cosh(\hat{\sigma}_\epsilon \Delta_\epsilon \lambda) - \frac{i\alpha}{2\hat{\sigma}_\epsilon \Delta_\epsilon} \sinh(\hat{\sigma}_\epsilon \Delta_\epsilon \lambda) \right)$$

dove A è una costante di integrazione e

$$\Delta_\epsilon^2 = \left| \epsilon |\tau|^2 - \frac{\alpha^2}{4} \right| \quad \sigma_\epsilon = \operatorname{sgn} \left[\epsilon |\tau|^2 - \frac{\alpha^2}{4} \right] \quad \hat{\sigma}_\epsilon = \sqrt{\sigma_\epsilon}$$

Applicando le sostituzioni inverse giungiamo all'espressione

$$p_2(\lambda) = \frac{\tau \sinh(\hat{\sigma}_\epsilon \Delta_\epsilon \lambda)}{\hat{\sigma}_\epsilon \Delta_\epsilon \cosh(\hat{\sigma}_\epsilon \Delta_\epsilon \lambda) - (i\alpha/2) \sinh(\hat{\sigma}_\epsilon \Delta_\epsilon \lambda)}$$

A questo punto è possibile differenziare i due casi imponendo:

- per $SU(2)$ si ha $\epsilon = -1 \implies \Delta_-^2 := \theta^2 = |\tau|^2 + \alpha^2/4 \geq 0$ (dato che $|\tau|$ e $|\alpha|$ sono reali) $\implies \hat{\sigma}_- = i$
- per $SU(1,1)$ si ha $\epsilon = +1 \implies \Delta_+^2 := \mu^2 = ||\tau|^2 - \alpha^2/4|$ e allora $\hat{\sigma}_+ := \hat{\sigma}_\epsilon = +1$ se $|\tau|^2 > \alpha^2/4$ oppure $\hat{\sigma}_+ := \hat{\sigma}_\epsilon = i$ se $|\tau|^2 < \alpha^2/4$

e quindi dalle equazioni (2.7a) e (2.8) si possono calcolare i valori di p_0 e p_1 rispettivamente e ponendo $\lambda = 1$ si ottiene la BCH, come si voleva. Di seguito sono riportate le espressioni dei coefficienti nei due casi:

- SU(2)

$$\begin{aligned}
p_2(\lambda) &= \frac{\tau \sin(\theta\lambda)}{\theta \cos(\theta\lambda) - (i\alpha/2) \sin(\theta\lambda)} \\
p_0(\lambda) &= -2 \ln \left(\cos(\theta\lambda) - \frac{i\alpha}{\theta} \sin(\theta\lambda) \right) \\
p_1(\lambda) &= \frac{-\bar{\tau} \sin(\theta\lambda)}{\theta \cos(\theta\lambda) - (i\alpha/2) \sin(\theta\lambda)}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

- SU(1,1)

$$\begin{aligned}
p_2(\lambda) &= \frac{\tau \sinh(\hat{\sigma}_+\mu\lambda)}{\hat{\sigma}_+\mu \cosh(\hat{\sigma}_+\mu\lambda) - (i\alpha/2) \sinh(\hat{\sigma}_+\mu\lambda)} \\
p_0(\lambda) &= -2 \ln \left(\cosh(\hat{\sigma}_+\mu\lambda) - \frac{i\alpha}{2\mu\hat{\sigma}_+} \sinh(\hat{\sigma}_+\mu\lambda) \right) \\
p_1(\lambda) &= \frac{-\bar{\tau} \sinh(\hat{\sigma}_+\mu\lambda)}{\hat{\sigma}_+\mu \cosh(\hat{\sigma}_+\mu\lambda) - (i\alpha/2) \sinh(\hat{\sigma}_+\mu\lambda)}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

2.2 Commutatore $[X, Y]$ proporzionale a X e Y

In questa sezione partiremo discutendo il caso in cui si abbia $[X, Y] = uX + vY + cI$ [7], per poi generalizzarlo al caso del prodotto di tre esponenziali $\exp(X)\exp(Y)\exp(Z) = \exp(W)$ con regole di commutazione analoghe. [3] Quindi vedremo che tali relazioni possono essere iterate e generalizzate ulteriormente [5] e infine classificheremo le algebre a seconda dei comportamenti secondo la forma che ricaveremo [4]

2.2.1 BCH per commutatori $[X, Y] = uX + vY + cI$

Iniziamo considerando il caso in cui, dati due operatori X e Y , si abbia [7]

$$[X, Y] = uX + vY + cI \tag{2.12}$$

Dunque

$$ad_X[X, Y] = v[X, Y] \quad ad_Y[X, Y] = -u[X, Y]$$

il che implica, nella (1.3), che i commutatori annidati diventano

$$e^{ad_X}[X, Y] \rightarrow e^v[X, Y] \quad e^{t \cdot ad_Y}[X, Y] \rightarrow e^{-tu}[X, Y]$$

Allora

$$Z(X, Y) = \ln(e^X e^Y) = X + Y + \int_0^1 dt \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^v e^{-tu})^{n-1}}{n(n+1)} \cdot \frac{e^v - 1}{v} [X, Y] \tag{2.13}$$

L'equazione (2.13) permette di dire che

$$Z(X, Y) = \ln(e^X e^Y) = X + Y + f(u, v)[X, Y] \quad (2.14)$$

dove $f(u, v)$ è la funzione da determinare. Per farlo notiamo innanzitutto che tale funzione è simmetrica, infatti

$$(e^X e^Y)^{-1} = e^{-Y} e^{-X}$$

ciò indica che

$$Z(-Y, -X) = -Z(X, Y)$$

Invertendo il commutatore (2.12) vediamo che

$$[-Y, -X] = v(-Y) + u(-X) - cI$$

Inoltre

$$\begin{aligned} ad_{-Y}[-Y, -X] &= u[-Y, -X] \\ ad_{-X}[-Y, -X] &= -v[-Y, -X] \end{aligned}$$

Combinando questi risultati

$$\begin{aligned} X + Y + f(u, v)[X, Y] &= Z(X, Y) = -Z(-Y, -X) \\ &= -[(-X) + (-Y) + f(v, u)[-Y, -X]] = X + Y + f(v, u)[X, Y] \end{aligned}$$

Dalla (2.13) segue che la forma esplicita della funzione risulta

$$f(u, v) = \frac{e^v - 1}{v} \int_0^1 dt \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^v e^{-tu})^{n-1}}{n(n+1)} \quad (2.15)$$

che può essere risolta ottenendo

$$f(u, v) = \frac{(u - v)e^{u+v} - (ue^u - ve^v)}{uv(e^u - e^v)} \quad (2.16)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^v e^{-tu})^{n-1}}{n(n+1)} &= \frac{1}{1 - e^v e^{-tu}} \left(1 - \frac{e^v e^{-tu} \ln(e^v e^{-tu})}{e^v e^{-tu} - 1} \right) \\ &= \frac{(1 - e^{v-tu}) + (v - tu)e^{v-tu}}{(1 - e^{v-tu})^2} \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n(n+1)} = \frac{z \ln(z)}{z-1}$$

Sostituendo in (2.15) (si scriverà $x := -u$)

$$\begin{aligned} f(x, v) &= \frac{e^v - 1}{v} \int_0^1 dt \left(\frac{(1 - e^{v+tx}) + (v + tx)e^{v+tx}}{(1 - e^{v+tx})^2} \right) \\ &= \frac{e^v - 1}{v} \int_{t=0}^{t=1} \left(\frac{(1 - e^{v+tx}) + (v + tx)e^{v+tx}}{(1 - e^{v+tx})^2} \right) \frac{1}{x} d(v + tx) \\ &= \frac{e^v - 1}{xv} \int_{t=0}^{t=1} d \left(\frac{v + tx}{1 - e^{v+tx}} \right) \\ &= \frac{e^v - 1}{xv} \left(\frac{v + x}{1 - e^{v+x}} - \frac{x}{1 - e^v} \right) \\ &= \frac{e^v - 1}{xv} \cdot \frac{(v + x)e^{-x}(1 - e^v) - v(e^{-x} - e^v)}{(e^{-x} - e^v)(1 - e^v)} \end{aligned}$$

e sostituendo nuovamente $x \mapsto -u$ si ottiene (2.16). Citiamo ora alcune semplici proprietà di tale funzione:

1. Applicando il teorema di de l'Hopital è facile vedere che

$$f(0, 0) = \frac{1}{2}$$

- 2.

$$Z(\alpha X, \beta Y) = \ln(e^{\alpha X} e^{\beta Y}) = \alpha X + \beta Y + \alpha \beta f(\beta u, \alpha v)[X, Y] \quad (2.17)$$

Infatti

$$[\alpha X, \beta Y] = \alpha \beta (uX + vY + \alpha \beta cI) = \beta u(\alpha X) + \alpha v(\beta Y) + \alpha \beta cI$$

dalla quale deriva (2.17).

- 3.

$$f(0, v) = \frac{ve^v - e^v + 1}{v(e^v - 1)}$$

che può essere riscritta come

$$f(0, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{1}{v}$$

4. Lungo la diagonale risulta

$$f(u, u) = \frac{e^u - 1 - u}{u^2} = \frac{1}{2} + \frac{e^u - (1 + u + u^2/2)}{u^2}$$

Esempio 1 (stati *squeezed*). Quanto appena verificato permette di ottenere risultati interessanti nell'ambito degli stati *squeezed*. Essi sono stati tali per cui si abbia una minima incertezza, cioè il principio di indeterminazione di Heisenberg, in un generico stato squeezed ψ , risulti

$$(\Delta X)_\psi (\Delta P)_\psi = \frac{\hbar}{2}$$

Possono essere generati dall'operatore unitario squeezed definito come

$$S(\epsilon) := \exp\left(\frac{\epsilon^* a^2}{2} - \frac{\epsilon (a^\dagger)^2}{2}\right)$$

Partiamo quindi dal commutatore degli operatori di creazione/distruzione

$$[a, a^\dagger] = I$$

dal quale si ottengono facilmente le relazioni

$$\begin{aligned} [a^2, (a^\dagger)^2] &= 4(a^\dagger a) + 2I = 4N + 2I \\ [a^2, (a^\dagger a)] &= [a^2, N] = 2a^2 \\ [(a^\dagger)^2, (a^\dagger a)] &= [(a^\dagger)^2, N] = -2(a^\dagger)^2 \end{aligned}$$

Le ultime due rispettano le regole di commutazione (2.12). É dunque possibile calcolare tramite (2.14) e (2.16)

$$\begin{aligned} Z(sa^2, tN) &= \ln(e^{sa^2} e^{tN}) \\ &= sa^2 + tN + 2stf(2t, 0)a^2 \\ &= \frac{2ste^{2t}}{e^{2t} - 1}a^2 + tN \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Z(s(a^\dagger)^2, tN) &= \ln(e^{s(a^\dagger)^2} e^{tN}) \\ &= s(a^\dagger)^2 + tN - 2stf(-2t, 0)(a^\dagger)^2 \\ &= \frac{2ste^{-2t}}{e^{-2t} - 1}(a^\dagger)^2 + tN \end{aligned}$$

Consideriamo ora il commutatore

$$\begin{aligned}
& [|w|N + \bar{w}a^2, |w|N + w(a^\dagger)^2] \\
&= 2|w|\bar{w}a^2 + 2|w|w(a^\dagger)^2 + w\bar{w}(4N + 2I) \\
&= 2|w|(|w|N + \bar{w}a^2) + 2|w|(|w|N + w(a^\dagger)^2) + 2|w|^2I
\end{aligned}$$

con $w \in \mathbb{C}$, che ancora soddisfa (2.12) con $u = 2|w| = v$ e $c = 2|w|^2$. Allora

$$\begin{aligned}
& Z(|w|N + \bar{w}a^2, |w|N + w(a^\dagger)^2) \\
&= (1 + 2|w|f(2|w|, 2|w|))(2|w|N + \bar{w}a^2 + w(a^\dagger)^2) + 2|w|^2f(2|w|, 2|w|)I \\
&= \frac{e^{2|w|} - 1}{2|w|}(2|w|N + \bar{w}a^2 + w(a^\dagger)^2) + \frac{e^{2|w|} - (1 + 2|w|)}{2}I
\end{aligned}$$

2.2.2 Estensione a tre operatori

Estendiamo dunque l'espressione (2.14) al caso in cui si abbiano tre operatori X, Y, Z [3]. Si vuole ottenere cioè un nuovo operatore W tale che

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(Z) = \exp(W) \quad (2.18)$$

dove sono rispettate le seguenti relazioni dai commutatori

$$[X, Y] = uX + vY + cI \quad [Y, Z] = wY + zZ + dI \quad (2.19)$$

Scegliamo α e β tali che $\alpha + \beta = 1$ e consideriamo l'identità

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(Z) = \exp(X)\exp(\alpha Y)\exp(\beta Y)\exp(Z)$$

Allora dalle relazioni di commutazione (2.19) e dalla (2.14) si ottiene

$$\begin{aligned}
\exp(X)\exp(\alpha Y) &= \exp(\tilde{X}) \\
\exp(\beta Y)\exp(Z) &= \exp(\tilde{Y})
\end{aligned}$$

dove abbiamo definito

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &:= g_\alpha(u, v)X + h_\alpha(u, v)Y + l_\alpha(u, v)cI \\
\tilde{Y} &:= h_\beta(z, w)Y + g_\beta(z, w)Z + l_\beta(z, w)dI
\end{aligned} \quad (2.20)$$

con

$$\begin{aligned}
g_\alpha(u, v) &:= 1 + \alpha u f(\alpha u, v) & h_\alpha(u, v) &:= \alpha(1 + v f(\alpha u, v)) \\
l_\alpha(u, v) &:= \alpha f(\alpha u, v)
\end{aligned} \quad (2.21)$$

Infatti da (2.17)

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= X + \alpha Y + \alpha f(\alpha u, v)[X, Y] = X + \alpha Y + \alpha f(\alpha u, v)(uX + vY + cI) \\ &= (1 + \alpha u f(\alpha u, v))X + (\alpha(1 + v f(\alpha u, v)))Y + (\alpha f(\alpha u, v))cI \\ \tilde{Y} &= \alpha Y + Z + \alpha f(\alpha z, w)[Y, Z] = \alpha Y + Z + \alpha f(\alpha z, w)(wY + zZ + dI) \\ &= (\alpha(1 + v f(\alpha z, w)))Y + (1 + \alpha z f(\alpha z, w))Z + (\alpha f(\alpha z, w))dI\end{aligned}$$

Imponendo allora

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \tilde{u}\tilde{X} + \tilde{v}\tilde{Y} + \tilde{c}I \quad (2.22)$$

si possono fissare le costanti $\alpha, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{c}$. Mettendo tutto insieme si giunge a

$$\exp(X) \exp(Y) \exp(Z) = \exp(\tilde{X}) \exp(\tilde{Y}) = \exp(\tilde{X} + \tilde{Y} + f(\tilde{u}, \tilde{v})[\tilde{X}, \tilde{Y}]) \quad (2.23)$$

Risulta evidente in questa situazione che il commutatore tra X e Z può contenere anche un termine proporzionale a Y

$$[X, Z] = mX + nY + pZ + eI \quad (2.24)$$

e considerando l'identità di Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

si pongono delle restrizioni sui coefficienti m, n, p, e , si ottiene, cioè, il seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned}uw + mz &= 0 \\ vm - wp + n(z - u) &= 0 \\ pu + zv &= 0 \\ c(w + m) + e(z - u) - d(p + v) &= 0\end{aligned} \quad (2.25)$$

Calcoliamo ora le relazioni per i coefficienti $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{c}$. Per farlo consideriamo le definizioni (2.20) e le regole di commutazione (2.19), (2.22) e (2.24), allora (nei prossimi conti scriveremo $g_\alpha := g_\alpha(u, v)$ e $g_\beta := g_\beta(z, w)$ e analogamente per le funzioni in (2.21))

$$\begin{aligned}[\tilde{X}, \tilde{Y}] &= \tilde{u}\tilde{X} + \tilde{v}\tilde{Y} + \tilde{c}I = \tilde{u}(g_\alpha X + h_\alpha Y + l_\alpha cI) + \tilde{v}(h_\beta Y + g_\beta Z + l_\beta dI) + \tilde{c}I \\ &= (\tilde{u}g_\alpha)X + (\tilde{u}h_\alpha + \tilde{v}h_\beta)Y + (\tilde{v}g_\beta)Z + (\tilde{u}cl_\alpha + \tilde{v}dl_\beta + \tilde{c})I\end{aligned}$$

ma anche

$$\begin{aligned}[\tilde{X}, \tilde{Y}] &= \left[(g_\alpha X + h_\alpha Y + l_\alpha cI), (h_\beta Y + g_\beta Z + l_\beta dI) \right] \\ &= g_\alpha h_\beta [X, Y] + g_\alpha g_\beta [X, Z] + h_\alpha g_\beta [Y, Z] \\ &= g_\alpha h_\beta (uX + vY + cI) + g_\alpha g_\beta (mX + nY + pZ + eI) + h_\alpha g_\beta (wY + zZ + dI) \\ &= (ug_\alpha h_\beta + mg_\alpha g_\beta)X + (vg_\alpha h_\beta + ng_\alpha g_\beta + wh_\alpha g_\beta)Y + \\ &\quad + (pg_\alpha g_\beta + zh_\alpha g_\beta)Z + (cg_\alpha h_\beta + eg_\alpha g_\beta + dh_\alpha g_\beta)I\end{aligned}$$

Eguagliando le due espressioni e notando da (2.21) che

$$g_\alpha - ul_\alpha = g_\beta - zl_\beta = 1$$

si ottengono le seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\tilde{c} &= (h_\beta - mg_\beta l_\alpha)c + (h_\alpha - pg_\alpha l_\beta)d + eg_\alpha g_\beta \\ \tilde{u} &= uh_\beta + mg_\beta \\ \tilde{v} &= pg_\alpha + zh_\alpha \\ \tilde{u}h_\alpha + \tilde{v}h_\beta &= vg_\alpha h_\beta + ng_\alpha g_\beta + wh_\alpha g_\beta\end{aligned}\tag{2.26}$$

In questo modo con le prime tre equazioni si fissano i coefficienti $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ e $\tilde{c}$ in funzione di α . Quindi sostituendo i valori così trovati nell'ultima delle (2.26) si arriva ad un'equazione per α

$$h_\alpha \left[h_\beta(u + z) + g_\beta(m - w) \right] + g_\alpha \left[h_\beta(p - v) - g_\beta n \right] = 0 \tag{2.27}$$

2.2.3 BCH per l'algebra di Virasoro

Un'algebra importante in fisica che rientra nella casistica appena descritta è l'*algebra di Virasoro* [3]. Si definisce come algebra di Virasoro quella che soddisfa le seguenti regole di commutazione

$$[L_j, L_k] = (k - j)L_{j+k} + \frac{c}{12}(k^3 - k)\delta_{j+k,0}I \tag{2.28}$$

con $j, k \in \mathbb{Z}$. Notiamo inoltre che l'algebra $sl_2(\mathbb{C})$, definita da

$$[L_j, L_k] = (k - j)L_{j+k}$$

con $j, k = -1, 0, 1$, è una sottoalgebra di (2.28). Passiamo ora a calcolare la forma della BCH. Per farlo definiamo

$$X := \lambda_{-k}L_{-k} \quad Y := \lambda_0 L_0 \quad Z := \lambda_k L_k$$

e andiamo a calcolare l'operatore W tale che

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(Z) = \exp(W)$$

E' evidente come per questi operatori valgano regole di commutazione del tipo (2.19) e (2.24), infatti

$$[X, Y] = k\lambda_0 X \quad [Y, Z] = k\lambda_0 \quad [X, Z] = \lambda_{-k}\lambda_k \left(\frac{2k}{\lambda_0}Y + \frac{c}{12}(k^3 - k) \right)$$

Ciò significa che gli unici coefficienti non nulli (sempre in riferimento alle equazioni (2.19) e (2.24)) sono

$$\begin{aligned} u &= z = k\lambda_0 \\ n &= \lambda_{-k}\lambda_k \frac{2k}{\lambda_0} \\ e &= \lambda_{-k}\lambda_k \frac{c}{12}(k^3 - k) \end{aligned}$$

Inserendo questi coefficienti nell'equazione (2.27) si ottiene

$$ng_\alpha(u, 0)g_\beta(u, 0) = 2uh_\alpha(u, 0)h_\beta(u, 0) \quad (2.29)$$

Sfruttando ora il fatto che

$$h_\alpha(u, 0) = \alpha \quad g_\alpha(u, 0) = \frac{\alpha u}{1 - e^{-\alpha u}}$$

e definendo $\lambda_- := \lambda_0\alpha$ e $\lambda_+ := \lambda_0\beta$ si giunge a

$$e^{-k\lambda_\pm} = \frac{1 + e^{-k\lambda_0} - k^2\lambda_{-k}\lambda_k \pm \sqrt{(1 + e^{-k\lambda_0} - k^2\lambda_{-k}\lambda_k)^2 - 4e^{-k\lambda_0}}}{2} \quad (2.30)$$

Infatti partendo da (2.29)

$$\begin{aligned} 0 &= ng_\alpha(u, 0)g_\beta(u, 0) - 2uh_\alpha(u, 0)h_\beta(u, 0) = n \frac{\alpha u}{1 - e^{-\alpha u}} \cdot \frac{\beta u}{1 - e^{-\beta u}} - 2u\alpha\beta \\ &= \lambda_{-k}\lambda_k \frac{2k}{\lambda_0} \cdot \frac{k\alpha\lambda_0}{1 - e^{-k\alpha\lambda_0}} \cdot \frac{k\beta\lambda_0}{1 - e^{-k\beta\lambda_0}} - 2k\lambda_0\alpha\beta \\ &= \lambda_{-k}\lambda_k \frac{2k}{\lambda_0} \cdot \frac{k^2\lambda_-\lambda_+}{(1 - e^{-k\lambda_+})(1 - e^{-k\lambda_-})} - 2k\lambda_+\beta \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{-k}\lambda_k k^2}{1 - (e^{-k\lambda_+} + e^{-k\lambda_-}) + e^{-k\lambda_0}} - 1 &= 0; \\ e^{-k\lambda_+} + e^{-k\lambda_-} - (1 - k^2\lambda_{-k}\lambda_k + e^{-k\lambda_0}) &= 0 \end{aligned}$$

moltiplicando per $e^{-k\lambda_+}$ si arriva all'equazione di secondo grado

$$(e^{-k\lambda_+})^2 - (1 + e^{-k\lambda_0} - k^2\lambda_k\lambda_{-k})e^{-k\lambda_+} + e^{-k\lambda_0} = 0$$

dalla quale è banale calcolare $e^{-k\lambda_+}$. La soluzione con λ_- la si ottiene moltiplicando per $e^{-k\lambda_-}$ anziché per $e^{-k\lambda_+}$.

A questo punto da (2.26) si ricavano i coefficienti

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= k\lambda_+ \\ \tilde{v} &= k\lambda_-\end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned}c_k &:= \tilde{c} = eg_\alpha(k\lambda_0, 0)g_\beta(k\lambda_0, 0) \\ &= \frac{\lambda_- \lambda_{-k}}{1 - e^{-k\lambda_-}} \cdot \frac{\lambda_+ + \lambda_k}{1 - e^{-k\lambda_+}} \cdot \frac{c}{12}(k^5 - k^3)\end{aligned}$$

che, grazie all'equazione (2.30), è equivalente a

$$c_k = \frac{\lambda_{-k}\lambda_k}{\lambda_+ - \lambda_-} \left(\frac{\lambda_+}{1 - e^{-k\lambda_+}} - \frac{\lambda_-}{1 - e^{-k\lambda_-}} \right) \frac{c}{12}(k^4 - k^2)$$

Si sono in questo modo calcolati tutti i coefficienti necessari in (2.23) e risulta

$$\begin{aligned}&\exp(\lambda_{-k}L_{-k}) \exp(\lambda_0L_0) \exp(\lambda_kL_k) \\ &= \exp\left(\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{e^{-k\lambda_-} - e^{-k\lambda_+}} \left[k\lambda_{-k}L_{-k} + (2 - e^{-k\lambda_+} - e^{-k\lambda_-})L_0 + k\lambda_kL_k + c_kI \right]\right)\end{aligned}\tag{2.31}$$

Riportiamo di seguito due applicazioni di (2.31) in ambito fisico.

Applicazione 1. L'algoritmo viene utilizzato in [8] per regolarizzare, in una teoria di campo conforme a due dimensioni, un'hamiltoniana con una deformazione proporzionale al seno al quadrato. Viene infatti dimostrato che gli autostati di tale hamiltoniana non hanno norma finita, se non per lo stato ad energia zero. Utilizzando quindi una trasformazione unitaria corrispondente alla quantizzazione di Möbius è possibile calcolare in maniera sistematica lo stato ad energia zero e i valori di aspettazione degli operatori in tale stato. Per esprimere tale trasformazione viene usata la (2.31).

Applicazione 2. Un'altra applicazione la si può trovare in [9] dove viene presentato un metodo generale per la covariantizzazione di operatori differenziali arbitrari. In particolare viene mostrato, mediante l'utilizzo di (2.31), come gli operatori differenziali che rappresentano i generatori dell'algebra $sl_2(\mathbb{R})$, generano a loro volta, tramite esponenziazione, la trasformazione conforme in due dimensioni.

2.2.4 Ulteriore generalizzazione dell'algoritmo

E' possibile trovare un algoritmo che generalizzi il caso di (2.18) con (2.19) [5]. Per farlo consideriamo

$$\exp(X) \exp(Z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \exp(X) \exp(\lambda Y) \exp(Z) \quad (2.32)$$

che permette dunque di scrivere le relazioni di commutazione (2.19) come

$$\begin{aligned} [X, Z] &= mX + \left(\frac{n}{\lambda}\right)(\lambda Y) + pZ + eI \\ [X, (\lambda Y)] &= (\lambda u)X + v(\lambda Y) + (\lambda c)I \\ [(\lambda Y), Z] &= w(\lambda Y) + (\lambda z)Z + (\lambda d)I \end{aligned} \quad (2.33)$$

In (2.32) è facilmente riconoscibile il prodotto di esponenziali nella forma (2.18), ed è quindi possibile applicare il metodo già verificato. In questo caso si ha

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= g_\alpha(\lambda u, v)X + h_\alpha(\lambda u, v)(\lambda Y) + l_\alpha(\lambda u, v)(\lambda c)I \\ \tilde{Y} &= h_\beta(\lambda z, w)(\lambda Y) + g_\beta(\lambda z, w)Z + l_\beta(\lambda z, w)(\lambda d)I \end{aligned}$$

e grazie a (2.23)

$$\exp(X) \exp(Z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \exp(\tilde{X} + \tilde{Y} + f(\tilde{u}, \tilde{v})[\tilde{X}, \tilde{Y}]) \quad (2.34)$$

Calcolando ora tale limite per $\lambda \rightarrow 0$ (si noti che da (2.21) risulta $g_\alpha(\lambda u, v) \rightarrow 1$) otteniamo $\tilde{X} = X$, $\tilde{Y} = Y$ e $\tilde{u} = m$, $\tilde{v} = p$, e se sostituiamo a (2.34) tali valori giungiamo all'espressione

$$\exp(X) \exp(Z) = \exp(X + Z + f(m, p)[X, Z]) \quad (2.35)$$

Abbiamo così esteso la (2.14) a un caso meno restrittivo in cui i commutatori siano del tipo (2.33). In maniera più generale possiamo dire che se

$$[X, Z] = mX + nY + pZ + eI \quad (2.36)$$

con

$$[X, Y] = uX + vY + cI \quad [Y, Z] = wY + zZ + dI \quad (2.37)$$

allora vale (2.35). E' evidente che tale costruzione può essere iterata rendendo le richieste sempre meno restrittive. Per farlo è sufficiente ripetere quanto è stato appena fatto, partendo però da regole di commutazione del tipo di (2.36) e (2.37), cioè sia la decomposizione

$$\exp(X) \exp(Y) \exp(Z) = \exp(X) \exp(\alpha Y) \exp(\beta Y) \exp(Z)$$

dove $\alpha + \beta = 1$, e per le quali valgono le regole sopra citate, se esistono degli operatori Y' e Y'' per i quali

$$\begin{aligned} [X, Y] &= uX + vY + v'Y' + aI \\ [X, Y'] &= b_X X + b'_Y Y' + bI \\ [Y', Y] &= c'_Y Y' + c_Y Y + cI \end{aligned} \quad (2.38)$$

e

$$\begin{aligned} [Y, Z] &= wY + w''Y'' + zZ + dI \\ [Y, Y''] &= e_Y Y + e''_Y Y'' + eI \\ [Y'', Z] &= f''_Y Y'' + f_Z Z + fI \end{aligned} \quad (2.39)$$

allora si ottengono degli operatori $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ tali che

$$\begin{aligned} \tilde{X} &:= \ln(e^X e^{\alpha Y}) = X + \alpha Y + f(\alpha u, v)[X, \alpha Y] \\ \tilde{Y} &:= \ln(e^{\beta Y} e^Z) = \beta Y + Z + f(w, \beta z)[\beta Y, Z] \end{aligned}$$

che possono essere riscritti come

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= g_\alpha(u, v)X + h_\alpha(u, v)Y + l_\alpha(u, v)(v'Y' + aI) \\ \tilde{Y} &= h_\beta(w, z)Y + g_\beta(w, z)Z + l_\beta(w, z)(w''Y'' + dI) \end{aligned} \quad (2.40)$$

A questo punto sia $\tilde{Y}'$ tale che

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}] &= \tilde{u}\tilde{X} + \tilde{v}\tilde{Y} + \tilde{v}'\tilde{Y}' + \tilde{a}I \\ [\tilde{X}, \tilde{Y}] &= b_{\tilde{X}}\tilde{X} + b_{\tilde{Y}}\tilde{Y}' + \tilde{b}I \\ [\tilde{Y}', \tilde{Y}] &= c_{\tilde{Y}'}\tilde{Y}' + c_{\tilde{Y}}\tilde{Y} + \tilde{c}I \end{aligned} \quad (2.41)$$

da (2.38), (2.39), (2.40) e (2.41) segue che X e Z soddisfano la seguente regola di commutazione

$$[X, Z] = mX + nY + pY' + qY'' + r\tilde{Y}' + sZ + tI \quad (2.42)$$

che è ancora meno restrittiva di (2.36). Quindi, riassumendo, se valgono (2.42) e (2.38), (2.39) e (2.41), si può scrivere

$$\exp(X)\exp(Z) = \exp(X + Z + f(m, p)[X, Z])$$

Il processo presentato è iterabile.

2.2.5 Classificazione delle algebre

Come abbiamo visto in 2.2.2 e 2.2.4 è possibile, dati X , Y e Z tali che siano soddisfatti

$$[X, Y] = uX + vY + cI \quad [Y, Z] = wY + zZ + dI$$

scrivere le seguenti relazioni

$$\exp(X) \exp(Y) \exp(Z) = \exp(AX + BY + CZ + DI)$$

e

$$\exp(X) \exp(Z) = \exp(A'X + B'Y + C'Z + D'I)$$

per opportuni $A, B, C, D, A', B', C, D'$. A seconda dei valori che assumono tali coefficienti è possibile fare una classificazione delle algebre [4]. Per farlo è innanzitutto necessario scrivere esplicitamente le funzioni in (2.21). Detti

$$s(a) := \frac{\sinh(a/2)}{a/2} \quad s_\alpha(a) := \frac{\sinh(\alpha a/2)}{a/2}$$

si ottiene dalla definizione (2.16)

$$\begin{aligned} g_\alpha(u, v) &= e^{\alpha u/2} \frac{s(v)}{s(v - \alpha u)} \\ h_\alpha(u, v) &= e^{v/2} \frac{s_\alpha(u)}{s(v - \alpha u)} \\ l_\alpha(u, v) &= \frac{1}{u} \left(e^{\alpha u/2} \frac{s(v)}{s(v - \alpha u)} - 1 \right) \end{aligned} \tag{2.43}$$

Quindi, dati X , Y e Z che soddisfano le regole di commutazione (2.19) si ha

$$\begin{aligned} &\exp(X) \exp(Y) \exp(Z) \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{s(\tilde{v} - \tilde{u})} \left[\frac{e^{\frac{\tilde{u} + \alpha u}{2}} s(\tilde{v}) s(v)}{s(v - \alpha u)} X \right. \right. \\ &\quad + \left(\frac{e^{\frac{\tilde{u} + v}{2}} s(\tilde{v}) s_\alpha(u)}{s(v - \alpha u)} + \frac{e^{\frac{\tilde{v} + w}{2}} s(\tilde{u}) s_\beta(z)}{s(w - \beta z)} \right) Y \\ &\quad + \frac{e^{\frac{\tilde{v} + \beta z}{2}} s(\tilde{u}) s(w)}{s(w - \beta z)} Z \\ &\quad + \left[\frac{e^{\frac{\tilde{u}}{2}} s(\tilde{v})}{u} \left(\frac{e^{\frac{\alpha u}{2}} s(v)}{s(v - \alpha u)} - 1 \right) c + \frac{e^{\frac{\tilde{v}}{2}} s(\tilde{u})}{z} \left(\frac{e^{\beta z} s(w)}{s(w - \beta z)} - 1 \right) d \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\tilde{u}} \left(e^{\frac{\tilde{u}}{2}} s(\tilde{v}) - s(\tilde{v} - \tilde{u}) \right) \tilde{c} \right] I \right\} \end{aligned} \tag{2.44}$$

dove (da (2.27)) α è soluzione di

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(v - \alpha u)s(w - \beta z)} & \left(e^{\frac{v}{2}} s_\alpha(u) \left[e^{\frac{w}{2}} s_\beta(z)(u + z) + e^{\frac{\beta z}{2}} s(w)(m - n) \right] \right. \\ & \left. + e^{\frac{\alpha u}{2}} s(v) \left[e^{\frac{w}{2}} s_\beta(z)(p - v) - e^{\frac{\beta z}{2}} s(w)n \right] \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

e (da (2.26))

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{e^{\frac{w}{2}} s_\beta(z)u + e^{\frac{\beta z}{2}} s(w)m}{s(w - \beta z)} \\ \tilde{v} &= \frac{e^{\frac{\alpha u}{2}} s(v)p + e^{\frac{v}{2}} s_\alpha(u)z}{s(v - \alpha u)} \\ \tilde{c} &= \left(e - \frac{cm}{u} - \frac{pd}{z} \right) \frac{e^{\frac{\alpha u}{2}} s(v)}{s(v - \alpha u)} \cdot \frac{e^{\frac{\beta z}{2}} s(w)}{s(w - \beta z)} \\ &+ \left[\left(\frac{w}{z} + \frac{m}{u} \right) \frac{e^{\frac{\beta z}{2}} s(w)}{s(w - \beta z)} + \beta - \frac{w}{z} \right] c + \left[\left(\frac{v}{u} + \frac{p}{z} \right) \frac{e^{\frac{\alpha u}{2}} s(v)}{s(v - \alpha u)} + \alpha - \frac{v}{u} \right] d \end{aligned} \quad (2.46)$$

Infine i parametri e, m, n, p fissano il commutatore $[X, Z] = mX + nY + pZ + eI$ e sono dati dal sistema di equazioni (2.25) che deriva dall'identità di Jacobi. Notiamo anche che, detto $x := e^\alpha$, se

$$v - \alpha u \neq 2k\pi i \quad \text{e} \quad w - \beta z \neq 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (2.47)$$

l'equazione (2.27) è equivalente a

$$\begin{aligned} & x^{u+z} e^{\frac{w-2z}{2}} \left(\frac{u+z}{uz} e^{\frac{v}{2}} + \frac{p-v}{z} s(v) \right) \\ & + x^u \left(ns(v)s(w) - \frac{u+z}{uz} e^{\frac{v+w}{2}} - \frac{m-w}{u} s(w) e^{\frac{v}{2}} - \frac{p-v}{z} s(v) e^{\frac{w}{2}} \right) \\ & - x^z \frac{u+z}{uz} e^{\frac{v+w-2z}{2}} + \frac{u+z}{uz} e^{\frac{v+w}{2}} + \frac{m-w}{u} s(w) e^{\frac{v}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Quindi risolvendo il sistema (2.25) e le equazioni (2.45) prima e (2.46) poi, si ottiene la forma esplicita della (2.44). A seconda delle relazioni che intercorrono tra i vari coefficienti è possibile classificare le algebre in tredici diversi

tipi (d'ora in poi assumeremo vera (2.47)):

1	$u = z = 0$	$cw \neq dv$ $cw = dv \neq 0$ $cw = dv = 0$
2	$u = 0, z \neq 0$	$w = 0$ $w \neq 0$
3	$u \neq 0, z = 0$	$v = 0$ $v \neq 0$
4	$u = z \neq 0$	
5	$u \neq z, uz \neq 0$	

Per descrivere al meglio i vari casi introduciamo la seguente notazione

$$\left[\text{caso} \mid \text{restrizioni da Jacobi} \mid \text{parametri non fissati di } [X, Z] \right]_D$$

dove D è il numero di parametri non fissati dall'identità di Jacobi nei commutatori di X, Y e Z . Inoltre per distinguere i casi ci riferiremo al vettore (c, d, u, v, w, z) scrivendo solamente i termini non nulli. Il primo caso si ha quando $u = z = 0$, che applicato a (2.45) e (2.46), fornisce

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{s(v)(ns(w) - e^{\frac{w}{2}}(p - v))}{e^{\frac{v}{2}}s(w)(m - w) - e^{\frac{w}{2}}s(v)(p - v)} \\ \tilde{u} &= m \\ \tilde{v} &= p \\ \tilde{c} &= \alpha \left(\frac{vd - cm}{1 - e^{-v}} + \frac{cm}{v} \right) + \beta \left(\frac{cw - pd}{1 - e^{-w}} + \frac{pd}{w} \right) + e \end{aligned} \tag{2.49}$$

Quindi dal sistema (2.25) si ottiene

$$\begin{aligned} vm &= wp \\ c(w + m) &= d(p + v) \end{aligned}$$

mentre e e n rimangono non fissati. Con queste condizioni risultano tre tipi di algebre che identificheremo con *tipo 1a*, *tipo 1b* e *tipo 1c* il quale si divide a sua volta in cinque sottotipi.

Tipo 1a.

$$\begin{aligned} &\left[u = z = 0, cw \neq dv \mid m = -w, p = -v \mid e, n \right]_6 \\ [X, Y] &= vY + cI \quad [Y, Z] = wY + dI \quad [X, Z] = -wX + nY - vZ + eI \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{s(v)}{2} \frac{2e^{\frac{w}{2}}v + ns(w)}{e^{\frac{w}{2}}vs(v) - e^{\frac{v}{2}}ws(w)}$$

$$\tilde{u} = -w$$

$$\tilde{v} = -v$$

$$\tilde{c} = \left(\frac{\alpha}{1 - e^{-v}} + \frac{\beta}{1 - e^{-w}} \right) (cw + dv) - \alpha \frac{w}{v}c - \beta \frac{v}{w}d + e$$

Tipo 1b.

$$\left[u = z = 0, cw = dv \neq 0 \middle| p = \frac{vm}{w} \middle| e, m, n \right]_6$$

$$[X, Y] = vY + cI \quad [Y, Z] = w\left(Y + \frac{c}{v}I\right) \quad [X, Z] = mX + nY + \frac{v}{w}mZ + eI$$

$$\alpha = s(v) \frac{e^{\frac{w}{2}}v(w - m) + nws(w)}{(m - w)(e^{\frac{v}{2}}ws(w) - e^{\frac{w}{2}}vs(v))}$$

$$\tilde{u} = m$$

$$\tilde{v} = \frac{mv}{w}$$

$$\tilde{c} = \left[\left(\frac{\alpha}{1 - e^{-v}} - \frac{\alpha}{v} \right) (w - m) + \left(\frac{\beta}{1 - e^{-w}} - \frac{\beta}{w} \right) (v - m) + \left[1 + \alpha \left(\frac{w}{v} - 1 \right) \right] c + e \right]$$

Il caso seguente risulta essere $u = z = 0$ con $cw = dv = 0$ che, da (2.25), presenta cinque sottotipi

Tipo 1c-i.

$$\left[(v, w) \middle| p = \frac{mv}{w} \middle| e, m, n \right]_5$$

$$[X, Y] = vY \quad [Y, Z] = wY \quad [X, Z] = mX + nY + \frac{mv}{w}Z + eI$$

$$\alpha = \frac{ns(v)ws(w) - e^{\frac{w}{2}}vs(v)(m - w)}{(m - w)(w - v)s(w - v)}$$

$$\tilde{u} = m$$

$$\tilde{v} = \frac{mv}{w}$$

$$\tilde{c} = e$$

Tipo 1c-ii.

$$\left[(c, d) \middle| p = \frac{cm}{d} \middle| e, m, n \right]_5$$

$$[X, Y] = cI \quad [Y, Z] = dI \quad [X, Z] = mX + nY + \frac{cm}{d}Z + eI$$

$$\alpha = \frac{dn - cm}{m(d - c)}$$

$$\tilde{u} = m$$

$$\tilde{v} = \frac{cm}{d}$$

$$\tilde{c} = \frac{dn}{m} + e$$

Tipo 1c-iii.

$$\begin{aligned} [X, Y] = 0 \quad [Y, Z] = wY + dI \quad [X, Z] = mX + nY + eI \\ \left[(d, w) \circ (d) \circ (w) \middle| p = 0 \right]_{e, m, n} \Big|_{4 \circ 5} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{n}{m - w}$$

$$\tilde{u} = m$$

$$\tilde{v} = 0$$

$$\tilde{c} = \frac{dn}{m - w} + e$$

Tipo 1c-iv.

$$\begin{aligned} [X, Y] = vY + cI \quad [Y, Z] = 0 \quad [X, Z] = nY + pZ + eI \\ \left[(c, v) \circ (c) \circ (v) \middle| m = 0 \right]_{e, n, p} \Big|_{4 \circ 5} \end{aligned}$$

$$\alpha = 1 - \frac{n}{p - v}$$

$$\tilde{u} = 0$$

$$\tilde{v} = p$$

$$\tilde{c} = \frac{nc}{p - v} + e$$

Tipo 1c-v.

$$\begin{aligned} [X, Y] = 0 \quad [Y, Z] = 0 \quad [X, Z] = mX + nY + pZ + eI \\ \left[(0, 0, 0, 0, 0, 0) \right]_{e, m, n, p} \Big|_4 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{n - p}{m - p}$$

$$\tilde{u} = m$$

$$\tilde{v} = p$$

$$\tilde{c} = e$$

Quindi il caso successivo è caratterizzato da $u = 0$, $z \neq 0$ che presenta due sottotipi con $w = 0$ e $w \neq 0$

Tipo 2a.

$$\left[u = w = 0, z \neq 0 \middle| m = n = v = 0, e = \frac{pd}{z} \middle| p \right]_4$$

$$[X, Y] = cI \quad [Y, Z] = zZ + dI \quad [X, Z] = p\left(Z + \frac{d}{z}\right)I$$

$$\alpha = -\frac{p}{z}$$

$$\tilde{u} = 0$$

$$\tilde{v} = 0$$

$$\tilde{c} = \left(1 + \frac{p}{z}\right)c$$

Tipo 2b.

$$\left[u = 0, w \neq 0, z \neq 0 \middle| m = v = 0, p = \frac{nz}{w}, e = \frac{dn}{w} - \frac{cw}{z} \middle| n \right]_5$$

$$[X, Y] = cI \quad [Y, Z] = wY + zZ + dI \quad [X, Z] = nY + \frac{nz}{w}Z + \left(\frac{dn}{w} - \frac{cw}{z}\right)I$$

$$\alpha = -\frac{n}{w}$$

$$\tilde{u} = 0$$

$$\tilde{v} = 0$$

$$\tilde{c} = \left(1 + \frac{n}{w} - \frac{w}{z}\right)c$$

Il terzo tipo corrisponde a $u \neq 0$ e $z = 0$ e presenta due sottotipi con $v = 0$ e $v \neq 0$

Tipo 3a.

$$\left[v = z = 0, u \neq 0 \middle| n = p = w = 0, e = \frac{cm}{u} \middle| m \right]_4$$

$$[X, Y] = uX + cI \quad [Y, Z] = dI \quad [X, Z] = m\left(X + \frac{c}{u}\right)I$$

Dall'equazione (2.45) si ottiene

$$s_\alpha(u)(\beta u + m) = 0$$

Dalla quale sono escluse le soluzioni $\alpha_k = 2\pi ki/u$, $k \in \mathbb{Z}$
 $\{0\}$ per (2.47) e quindi si ha

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{m+u}{u} \\ \tilde{u} &= 0 \\ \tilde{v} &= 0 \\ \tilde{c} &= \frac{m+u}{u}d\end{aligned}$$

Tipo 3b.

$$\left[z = 0, u \neq 0, v \neq 0 \middle| p = w = 0, m = \frac{nu}{v}, e = \frac{cn}{v} - \frac{dv}{u} \middle| n \right]_5$$

$$[X, Y] = uX + vY + cI \quad [Y, Z] = dI \quad [X, Z] = \frac{nu}{v}X + nY + \left(\frac{cn}{v} - \frac{dv}{u} \right) I$$

Con queste condizioni l'equazione (2.45) porta a

$$e^{\alpha u} = e^v$$

che sempre considerando (2.47) impone $\alpha = v/u$ e dunque

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{v}{u} \\ \tilde{u} &= u - v + \frac{nu}{v} \\ \tilde{v} &= 0 \\ \tilde{c} &= \left(1 - \frac{v}{u} + \frac{n}{v} \right) c\end{aligned}$$

Tipo 4.

$$\left[u = z \neq 0 \middle| m = -w, p = -v \middle| e, n \right]_8$$

$$[X, Y] = uX + vY + cI \quad [Y, Z] = wY + zZ + dI \quad [X, Z] = -wX + nY - vZ + eI$$

L'equazione (2.48) conduce ad un'equazione di secondo grado in x^u (ricordiamo che $x := e^\alpha$)

$$x^{2u} + x^u \left(\frac{nu}{2} s(v)s(w) e^{\frac{u+v-w}{2}} - e^u - e^v + e^{u+v} - e^{u+v-w} \right) + e^{u+v-w} = 0,$$

che ha come soluzione

$$x_\pm^u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4e^{u+v-w}}}{2}, \quad (2.50)$$

dove abbiamo definito

$$b := \frac{nu}{2} s(v)s(w)e^{\frac{u+v-w}{2}} - e^u - e^v + e^{u+v} - e^{u+v-w} .$$

quindi da (2.46)

$$\tilde{u} = \beta u - w$$

$$\tilde{v} = \alpha u - v$$

$$\tilde{c} = \left(e + \frac{cw + dv}{u} \right) \frac{e^{\frac{u}{2}} s(v)s(w)}{s(v - \alpha u)s(w - \beta u)} - \frac{cw + dv}{u} + \beta c + \alpha d \quad (2.51)$$

Tipo 5.

$$\left[u \neq z, uz \neq 0 \middle| m = -\frac{uw}{z}, n = -vw \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{z} \right), p = -\frac{vz}{u}, e = -\frac{cw}{z} - \frac{dv}{u} \right]_6$$

$$[X, Y] = uX + vY + cI \quad [Y, Z] = wY + zZ + dI$$

$$[X, Z] = -\frac{uw}{z}X - vw \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{z} \right)Y - \frac{vz}{u}Z - \left(\frac{cw}{z} + \frac{dv}{u} \right)I$$

Da (2.48)

$$(x^u - e^v)(x^z - e^{z-w}) = 0$$

e da (2.47) si hanno le possibili soluzioni

$$\alpha = \frac{v}{u} \quad \text{e} \quad \alpha = 1 - \frac{w}{z}$$

Applicando ciò a (2.46)

$$\tilde{u} = (\beta z - w) \frac{u}{z}$$

$$\tilde{v} = (\alpha u - v) \frac{z}{u}$$

$$\tilde{c} = \left(\beta z - w \right) \frac{c}{z} + \left(\alpha u - v \right) \frac{d}{u} = \tilde{u} \frac{c}{u} + \tilde{v} \frac{d}{z}$$

In conclusione dunque abbiamo due possibili insiemi di soluzioni equivalenti

$$\alpha = \frac{v}{u}$$

$$\tilde{u} = u - v - \frac{uw}{z}$$

$$\tilde{v} = 0$$

$$\tilde{c} = \left(1 - \frac{v}{u} - \frac{w}{z} \right) d$$

e

$$\alpha = 1 - \frac{w}{z}$$

$$\tilde{u} = 0$$

$$\tilde{v} = z - w - \frac{vz}{u}$$

$$\tilde{c} = \left(1 - \frac{v}{u} - \frac{w}{z}\right)d$$

3 Fattorizzazione dell'operatore di evoluzione temporale

Attraverso l'utilizzo della formula BCH è possibile fattorizzare un esponenziale, e quindi esprimere l'evoluzione temporale, come prodotto di esponenziali di operatori che permettono una trattazione più elementare [1]. Prima di applicarlo ad un caso specifico di hamiltoniano vanno fatte alcune osservazioni preliminari. Utilizziamo innanzitutto la formula BCH nella forma fornita dal lemma di Hadamard

$$e^A B e^{-A} = C \quad (3.1)$$

dove A , B e C sono operatori e si ha

$$C = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (3.2)$$

valida per ogni A e B . L'equazione (3.2) può essere iterata nel modo seguente

$$\begin{aligned} C^2 &= (e^A B e^{-A})(e^A B e^{-A}) = e^A B^2 e^{-A} \\ &\vdots \\ C^n &= e^A B^n e^{-A} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Quindi espandendo $\exp(C)$ e identificando ogni potenza C^n con l'equazione (3.3) si ottiene

$$e^C = e^A e^B e^{-A} \quad (3.4)$$

che può essere invertita e diventare

$$e^B = e^{-A} e^C e^A \quad (3.5)$$

Così dato $B = -i\tau H/\hbar$ (di modo che e^B sia l'operatore di evoluzione temporale) e scelto opportunamente A (a seconda della forma esplicita dell'hamiltoniana H) si riesce ad ottenere una forma di C che rende il calcolo molto più agevole. Sono infatti note le azioni degli operatori $\exp(\alpha X^n)$ e $\exp(\beta P^n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) sull'autostato $|x\rangle$ (il primo è banale, mentre per il secondo è sufficiente ricordare la relazione di completezza $1 = \int dp |p\rangle \langle p|$), il che permette di calcolare il propagatore una volta espresso l'operatore C e scelto A dipendenti dagli operatori X e P e loro potenze. Studieremo quindi il caso in cui il potenziale sia armonico.

3.1 Oscillatore armonico

Prima di iniziare con la trattazione della fattorizzazione del operatore di evoluzione temporale, dobbiamo vedere come agisce $\exp(-i\gamma PX/\hbar)$ (con $\gamma \in \mathbb{R}$) sull'autostato del momento $|p\rangle$ (il motivo di tale calcolo sarà chiaro in seguito). Si dimostrerà che

$$\langle p' | \exp(-i\gamma PX/\hbar) | p \rangle = e^{-\gamma} \delta(p' - e^{-\gamma} p) \quad (3.6)$$

3.1.1 Azione di $\exp(-i\gamma PX/\hbar)$ sull'autostato del momento

L'equazione (3.6) può essere riscritta banalmente nella forma

$$\exp(-i\gamma PX/\hbar) | p \rangle = e^{-\gamma} | e^{-\gamma} p \rangle$$

Deriveremo dunque quest'ultima espressione. Partiamo innanzitutto dal fatto (ovvio) che

$$\exp(-i\gamma PX/\hbar) P | p \rangle = p \exp(-i\gamma PX/\hbar) | p \rangle$$

Possiamo riscrivere l'equazione come

$$[\exp(-i\gamma PX/\hbar) P \exp(i\gamma PX/\hbar)] \exp(-i\gamma PX/\hbar) | p \rangle = p \exp(-i\gamma PX/\hbar) | p \rangle \quad (3.7)$$

Usando ora le relazioni (3.1) e (3.2) possiamo scrivere

$$\exp(-i\gamma PX/\hbar) P \exp(i\gamma PX/\hbar) = (1 + \gamma + \frac{1}{2!}\gamma^2 + \frac{1}{3!}\gamma^3 + \dots) P = e^\gamma P$$

Infatti si ha (con riferimento alla notazione delle (3.1) e (3.2))

$$[A, B] = [-\frac{i}{\hbar}\gamma PX, P] = -\frac{i}{\hbar}\gamma [X, P]P = -\frac{i}{\hbar}\gamma i\hbar P = \gamma P$$

e

$$[A, [A, B]] = [-\frac{i}{\hbar}\gamma PX, \gamma P] = -\frac{i}{\hbar}\gamma^2 [X, P]P = -\frac{i}{\hbar}\gamma^2 i\hbar P = \gamma^2 P$$

e così via.

Sostituendo tale risultato in (3.7) si ottiene

$$\begin{aligned} e^\gamma P \exp(-i\gamma PX/\hbar) | p \rangle &= p \exp(-i\gamma PX/\hbar) | p \rangle \\ \Downarrow \\ P(\exp(-i\gamma PX/\hbar) | p \rangle) &= e^{-\gamma} p (\exp(-i\gamma PX/\hbar) | p \rangle) \end{aligned}$$

il che dimostra che $\exp(-i\gamma PX/\hbar) |p\rangle$ è autovettore di P con autovalore $e^{-\gamma}p$. Tale autostato può essere riscritto come

$$\exp(-i\gamma PX/\hbar) |p\rangle = C_\gamma |e^{-\gamma}p\rangle \quad (3.8)$$

con C_γ costante da determinare. Per fare ciò notiamo che

$$\langle p' | \exp(i\gamma PX/\hbar) \exp(-i\gamma PX/\hbar) | p \rangle = |C_\gamma|^2 \langle e^{-\gamma}p' | e^{-\gamma}p \rangle$$

(dove si è fatto agire il primo esponenziale sul bra $\langle p' |$ e il secondo sul ket $|p\rangle$). Inoltre

$$\begin{aligned} [XP, PX] &= P[XP, X] + [XP, P]X \\ &= PX[P, X] + P[X, X]P + X[P, P]X + [X, P]PX \\ &= -i\hbar PX + i\hbar PX = 0 \end{aligned}$$

e usando l'equazione (3.5) si ottiene

$$\langle p' | \exp(i\gamma[X, P]/\hbar) | p \rangle = |C_\gamma|^2 \delta(e^{-\gamma}(p' - p))$$

Allora poichè $\exp(i\gamma[X, P]/\hbar) = \exp(i\gamma i\hbar/\hbar) = e^{-\gamma}$ e $\langle p' | p \rangle = \delta(p' - p)$

$$\begin{aligned} e^{-\gamma} \delta(p' - p) &= |C_\gamma|^2 e^\gamma \delta(p' - p) \\ \implies C_\gamma &= e^{-\gamma} \end{aligned}$$

e sostituendo in (3.8) si giunge a

$$\exp(-i\gamma PX/\hbar) |p\rangle = e^{-\gamma} |e^{-\gamma}p\rangle$$

come si voleva.

3.1.2 Fattorizzazione per potenziale armonico

Passiamo ora ad applicare tale metodo di fattorizzazione ad un potenziale armonico. Si abbia dunque l'hamiltoniana

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

che genera un operatore di evoluzione temporale

$$U(\tau) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\tau\left(\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2\right)\right]$$

Applichiamo il metodo esposto scegliendo $A = \alpha X^2$ con α da determinare e $B = -i\gamma H/\hbar$. Si ottiene così da (3.4)

$$\begin{aligned} & \exp(\alpha X^2) \exp(-i\gamma H/\hbar) \exp(-\alpha X^2) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\tau\left[\frac{P^2}{2m} + \frac{i\hbar\alpha}{m}(XP + PX) + \frac{m}{2}(\omega^2 - (\frac{2\alpha\hbar}{m})^2)X^2\right]\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Infatti da (3.2)

$$\begin{aligned} [A, B] &= -\frac{i\tau\alpha}{\hbar} \left[X^2, \left(\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 \right) \right] = -\frac{i\tau\alpha}{\hbar} \frac{1}{2m} [X^2, P^2] \\ &= -\frac{i\tau\alpha}{\hbar} \frac{1}{2m} \left(X[X, P^2] + [X, P^2]X \right) \\ &= -\frac{i\tau\alpha}{\hbar} \frac{1}{2m} \left(X[X, P]P + XP[X, P] + P[X, P]X + [X, P]PX \right) \\ &= -\frac{i\tau\alpha}{\hbar} \frac{1}{2m} (2i\hbar(XP + PX)) = \frac{\tau\alpha}{m} (XP + PX) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [A, [A, B]] &= [\alpha X^2[A, B]] = \frac{\tau\alpha^2}{m} [X^2, XP + PX] \\ &= \frac{\tau\alpha^2}{m} ([X^2, X]P + X[X^2, P] + [X, P]X^2 + P[X^2, X]) \\ &= \frac{\tau\alpha^2}{m} (X^2[X, P] + X[X, P]X + X[X, P]X + [X, P]X^2) \\ &= \frac{\tau\alpha^2}{m} (4i\hbar X^2) = \frac{4i\hbar\tau\alpha^2}{m} X^2 \end{aligned}$$

Il che ovviamente implica che $[A, [A, [A, B]]]$ e tutti i termini successivi siano nulli. Da qui si ottiene (3.9).

A questo punto è necessario fare in modo che il termine in X^2 nella forma di C sia nullo. Ciò è possibile se si sceglie

$$\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar} \quad (3.10)$$

Così facendo

$$\begin{aligned} C &= -\frac{i}{\hbar}\tau \left(\frac{P^2}{2m} + \frac{i}{2}\omega(XP + PX) \right) \\ &= -\frac{i}{\hbar}\tau \left(\frac{P^2}{2m} + \frac{i}{2}\omega(PX + [X, P] + PX) \right) \\ &= -\frac{i}{\hbar}\tau \left(\frac{P^2}{2m} + i\omega PX \right) + \frac{i\tau\omega}{2} \end{aligned}$$

che applicato a (3.5) permette di scrivere

$$\exp\left(-\frac{i\tau H}{\hbar}\right) = e^{i\tau\omega/2} e^{-\alpha X^2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\tau\left[\frac{P^2}{2m} + i\omega PX\right]\right) e^{\alpha X^2} \quad (3.11)$$

Ripetiamo lo stesso procedimento, scegliendo in questo caso $B = P^2/(2m) + i\omega PX$ e $A = \beta P^2$. Calcoliamo la forma di C (vedi (3.2))

$$\begin{aligned} [A, B] &= \left[\beta P^2, \frac{P^2}{2m} + i\omega PX\right] = i\beta\omega[P^2, PX] \\ &= i\beta\omega P[P^2, X] = i\beta\omega P(P[P, X] + [P, X]P) \\ &= -i\beta\omega(i\hbar)P(2P) = 2\beta\omega\hbar P^2 \end{aligned}$$

e ovviamente si ha che $[A, [A, B]]$ e i termini successivi sono tutti nulli. In questo modo risulta

$$C = \frac{P^2}{2m} + i\omega PX + 2\beta\omega\hbar P^2 = \left(\frac{1}{2m} + 2\omega\hbar\beta\right)P^2 + i\omega PX \quad (3.12)$$

Affinché dunque il termine proporzionale a P^2 in (3.12) sia nullo, si deve scegliere

$$\beta = -\frac{1}{4\omega\hbar m} \quad (3.13)$$

Sempre da (3.5) si ottiene dunque

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\tau\left[\frac{P^2}{2m} + i\omega PX\right]\right) = e^{-\beta P^2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(i\omega\tau)PX\right) e^{\beta P^2}$$

la quale inserita in (3.11) da come risultato ciò che si cercava, cioè

$$\exp\left(-\frac{i\tau H}{\hbar}\right) = e^{i\tau\omega/2} e^{-\alpha X^2} e^{-\beta P^2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(i\omega\tau)PX\right) e^{\beta P^2} e^{\alpha X^2}$$

3.1.3 Propagatore nel caso armonico

Finora si è fattorizzato l'operatore di evoluzione temporale in esponenziali di operatori dei quali si conosce l'azione sugli autostati di posizione e momento. Fatto ciò è dunque possibile calcolare il propagatore $K(x'', x'; \tau)$. Si ha

$$\begin{aligned} K(x'', x'; \tau) &= \langle x'' | e^{i\tau\omega/2} e^{-\alpha X^2} e^{-\beta P^2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(i\omega\tau)PX\right) e^{\beta P^2} e^{\alpha X^2} | x' \rangle \\ &= e^{-\alpha(x''^2 - x'^2) + \frac{i\omega\tau}{2}} \int \frac{dp' dp}{2\hbar\pi} e^{-\beta(p'^2 - p^2) + \frac{i}{\hbar}(p'x'' - px')} \langle p' | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(i\omega\tau)PX\right) | p \rangle \end{aligned}$$

Ricordando ora l'equazione (3.6) e ponendo $\gamma = i\omega\tau$ e utilizzando (3.10) e (3.13) si ottiene

$$\begin{aligned}
K(x'', x'; \tau) &= \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x''^2 - x'^2) + \frac{i\omega\tau}{2}\right) \\
&\times \int \frac{dp' dp}{2\hbar\pi} \exp\left(\frac{p'^2 - p^2}{4m\omega\hbar} + \frac{i}{\hbar}(p'x'' - px')\right) e^{-i\omega\tau} \delta(p' - e^{-\gamma}p) \\
&= \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x''^2 - x'^2) + \frac{i\omega\tau}{2} - i\omega\tau\right) \\
&\times \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{(e^{-2\gamma} - 1)p^2}{4m\hbar\omega} + \frac{i}{\hbar}(e^{-\gamma}x'' - x')p\right] \\
&= \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x''^2 - x'^2) - \frac{i\omega\tau}{2}\right) \\
&\times \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{1 - e^{-2i\omega\tau}}{4m\hbar\omega}\left(p^2 - 4im\omega\frac{e^{-i\omega\tau}x'' - x'}{1 - e^{-2i\omega\tau}}p\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Notiamo adesso che

$$\begin{aligned}
p^2 - 2 \cdot 2im\omega \frac{e^{-i\omega\tau}x'' - x'}{1 - e^{-2i\omega\tau}}p \\
= \left(p - 2im\omega \frac{e^{-i\omega\tau}x'' - x'}{1 - e^{-2i\omega\tau}}\right)^2 + 4m^2\omega^2 \frac{(e^{-i\omega\tau}x'' - x')^2}{(1 - e^{-2i\omega\tau})}
\end{aligned}$$

e sostituendo nell'esponenziale di (3.14)

$$\begin{aligned}
&\exp\left[-\frac{1 - e^{-2i\omega\tau}}{4m\hbar\omega}\left(\left(p - 2im\omega \frac{e^{-i\omega\tau}x'' - x'}{1 - e^{-2i\omega\tau}}\right)^2 + 4m^2\omega^2 \frac{(e^{-i\omega\tau}x'' - x')^2}{(1 - e^{-2i\omega\tau})^2}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1 - e^{-2i\omega\tau}}{4m\hbar\omega}\left(p - 2im\omega \frac{e^{-i\omega\tau}x'' - x'}{1 - e^{-2i\omega\tau}}\right)^2\right] \exp\left[\frac{m\omega}{\hbar} \cdot \frac{(e^{-i\omega\tau}x'' - x')^2}{1 - e^{-2i\omega\tau}}\right]
\end{aligned}$$

che fa sì che (3.14) diventi

$$\begin{aligned}
K(x'', x'; \tau) &= \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left((x''^2 - x'^2) + 2\frac{(e^{-i\omega\tau}x'' - x')^2}{1 - e^{-2i\omega\tau}}\right) - \frac{i\omega\tau}{2}\right] \\
&\times \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{1 - e^{-2i\omega\tau}}{4m\hbar\omega}\left(p - 2im\omega \frac{e^{-i\omega\tau}x'' - x'}{1 - e^{-2i\omega\tau}}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

L'integrale in (3.15) è un integrale gaussiano di cui si conosce la soluzione. Inoltre sfruttiamo il fatto che $(1 - e^{-2i\omega\tau}) = 2ie^{-i\omega\tau} \sin(\omega\tau)$. Allora

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{4m\hbar\omega}{2ie^{-i\omega\tau} \sin(\omega\tau)}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left((x''^2 - x'^2) + 2\frac{(e^{-i\omega\tau}x'' - x')^2}{2ie^{-i\omega\tau} \sin(\omega\tau)}\right) - \frac{i\omega\tau}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m\omega}{2i\pi\hbar \sin(\omega\tau)}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar i \sin(\omega\tau)}\left((x''^2 + x'^2) \cos(\omega\tau) - 2x''x'\right)\right]
\end{aligned}$$

Si giunge così al risultato per il propagatore

$$K(x'', x'; \tau) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m\omega}{2i\pi\hbar \sin(\omega\tau)}} \exp \left[\frac{im\omega}{2\hbar \sin(\omega\tau)} \left((x''^2 + x'^2) \cos(\omega\tau) - 2x''x' \right) \right]$$

4 Conclusione

Lo studio della formula BCH e delle sue implicazioni in ambito matematico e fisico è iniziato verso la fine dell'Ottocento grazie ai contributi di Campbell e ha portato nel corso degli anni ad una sempre maggior completezza nella sua descrizione, ma è uno studio che ancora non si è esaurito e che, in particolare negli ultimi anni, sta ricevendo numerosi sviluppi in ambito fisico. In [2.2.4](#), ad esempio, abbiamo presentato un'estensione dell'algoritmo descritto da Visser e Van-Brunt e Matone (trattati in [2.2.1](#) e [2.2.2](#)), che permette il calcolo di $W = \ln(e^X e^Z)$ nel caso in cui il commutatore abbia una forma via via più generale, ma non è ancora noto quale sia il risultato di tale iterazione. Quindi nonostante in questo lavoro abbiamo utilizzato tale formula per il calcolo del propagatore in meccanica quantistica, il campo di applicazione è evidentemente molto più generale.

Infine in [3](#) abbiamo descritto un metodo molto diretto per il calcolo del propagatore studiando il caso di potenziale armonico. Questo metodo assicura un risultato esplicito di tale grandezza ma per ora, data l'assenza di una generalizzazione, ha un'applicabilità limitata.

Bibliografia

- [1] F.A Barone, H. Boschi-Filho e C. Farina, "Three Methods for Calculating the Feynman Propagator", Am. J. Phys. ,71 (2003) pp.483-491. arXiv:quant-ph/0205085v2
- [2] A. Bonfiglioli e R. Fulci, "Topics in Noncommutative Algebra: The Theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin". Springer-Verlag, 2012
- [3] M. Matone, "An algorithm for the Baker-Campbell-Hausdorff formula," JHEP **1505** (2015) 113, arXiv:1502.06589.
- [4] M. Matone, "Classification of commutator algebras leading to the new type of closed Baker–Campbell–Hausdorff formulas', J. Geom. Phys. **97**, 34 (2015) doi:10.1016/j.geomphys.2015.06.016 [arXiv:1503.08198 [math-ph]].
- [5] M. Matone, "Closed form of the Baker–Campbell–Hausdorff formula for the generators of semisimple complex Lie algebras", Eur. Phys. J. C **76**, no. 11, 610 (2016) doi:10.1140/epjc/s10052-016-4455-4 [arXiv:1504.05174 [math-ph]].
- [6] D. Rodney Truax, "Baker-Campbell-Hausdorff relations and unitarity of SU(2) and SU(1,1) squeeze operators", Phys. Rev. D **31**, 8 (1988)
- [7] A. Van-Brunt e M. Visser, "Special-case closed form of the Baker-Campbell-Hausdorff formula," J. Phys. A **48** (2015) 225207, arXiv:1501.02506.
- [8] S. Tamura e H. Katsura, "Zero-energy states in conformal field theory with sine-square deformation', arXiv:1709.06238 [cond-mat.stat-mech].
- [9] M. Matone and P. Pasti, "Wilson Loops on Riemann Surfaces, Liouville Theory and Covariantization of the Conformal Group", JHEP **1506** (2015) 010 doi:10.1007/JHEP06(2015)010 [arXiv:1505.02569 [hep-th]].