

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA GALILEO GALILEI

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

**Trattamento unificato delle perturbazioni cosmologiche dalle
piccole alle grandi scale**

Candidato:

Raffaele Giusti

Relatore:

Prof. Sabino Matarrese

Anno Accademico 2016 - 2017

Sommario

In questa tesi verranno presentate le principali teorie utilizzate per studiare le perturbazioni cosmologiche e verrà illustrata una teoria unificata valida per studiare le disomogeneità della materia dell'universo dalle piccole alle grandi scale. Nella prima parte della tesi saranno discusse le equazioni di Einstein lineari e l'approccio Post-Newtoniano, mentre nella seconda parte saranno discusse le teorie perturbative nell'ambito della cosmologia. In particolare saranno introdotte le equazioni di Friedmann e la teoria perturbativa lineare, e infine sarà presentato l'approccio unificato delle perturbazioni dove si ricaveranno delle equazioni per le perturbazioni scalari, vettoriali e tensoriali.

Queste equazioni hanno molte applicazioni in cosmologia come ad esempio lo studio di anisotropie secondarie della CMB, dell'effetto delle lenti gravitazionali causate da disomogeneità della materia, oppure delle onde gravitazionali prodotte da strutture altamente non lineari.

Indice

1	INTRODUZIONE	1
2	Equazioni di Einstein e Onde gravitazionali	3
2.1	Equazioni di Einstein linearizzate e limite Newtoniano	3
2.2	Onde Gravitazionali	5
3	Teoria Post-Newtoniana	7
3.1	Approccio Post-Newtoniano	8
3.2	Fluidodinamica e Applicazioni	11
4	Equazioni di Friedmann e teoria perturbativa lineare	14
4.1	Metrica FRW ed Equazioni di Friedmann	14
4.2	Teoria perturbativa lineare	15
5	Trattazione unificata delle perturbazioni	19
5.1	Equazioni del modello	20
5.2	Sorgenti delle perturbazioni della metrica	22
5.3	Limite delle equazioni	24
5.3.1	Limite lineare relativistico	25
5.3.2	Limite Newtoniano	25
5.3.3	Limite Post-Newtoniano	26
5.4	Modi tensoriali e vettoriali	27
5.5	Momenti di quadrupolo e onde gravitazionali	29
6	Conclusione	31

Capitolo 1

INTRODUZIONE

Esaminando la struttura dell'universo oggi risulta che esso è fortemente disomogeneo essendo composto da strutture che vanno dalle galassie isolate, agli ammassi di galassie fino ad arrivare ai superammassi di galassie e a grandi vuoti. Andando su scale più grandi la struttura dell'universo diviene sempre più omogenea anche se contiene ancora significative fluttuazioni non casuali. Si ritiene però, dall'analisi della radiazione cosmica di fondo (CMB), che la struttura dell'universo primordiale fosse omogenea anche se con piccole fluttuazioni di densità. La CMB che vediamo oggi, infatti, proviene dall'epoca di ricombinazione (quando si sono formati i primi elementi, in larga parte Idrogeno) e contiene informazioni sulle proprietà dell'universo quando aveva l'età di 370 mila anni. In questa epoca le perturbazioni di densità di materia $\frac{\delta\rho}{\rho}$ erano dell'ordine di 10^{-5} e quindi molto piccole. Queste perturbazioni, tramite l'instabilità gravitazionale, hanno dato origine alle strutture cosmiche che vediamo oggi.

La teoria Inflazionaria è il modello più plausibile per la spiegazione dell'origine di queste perturbazioni essendo in accordo con tutti i dati cosmologici disponibili. La sorgente di queste perturbazioni, comunque, non è particolarmente rilevante per lo studio della formazione delle strutture cosmologiche.

La rapida crescita delle perturbazioni di densità di materia è avvenuta quando la materia non relativistica è diventata la parte dominante dell'universo circa 80 mila anni dopo il Big Bang. A quell'epoca le perturbazioni di densità erano molto piccole ($\frac{\delta\rho}{\rho}$ dell'ordine di 10^{-3} - 10^{-5}) e le regioni con densità più alta hanno attratto la materia circostante aumentando così la propria densità. Le perturbazioni esistenti durante il periodo della ricombinazione hanno dato vita ad anisotropie della temperatura e della polarizzazione della CMB e quindi dal suo studio può essere determinante lo spettro dell'universo primordiale [1].

L'instabilità gravitazionale è governata dalle equazioni della Relatività Generale (GR), ma per molti casi si può usare l'approssimazione Newtoniana, limite della GR per campi deboli e velocità molto basse (non relativistiche). Queste condizioni sono verificate su piccole scale, molto più piccole del raggio di Hubble, dove il potenziale gravitazionale φ_g diviso per il quadrato della velocità della luce c^2 rimane molto più piccolo dell'unità, mentre le velocità peculiari sono non relativistiche. Il potenziale gravitazionale è legato alla fluttuazione di densità di materia δ attraverso l'equazione cosmologica di Poisson $\nabla^2\varphi_g=4\pi Ga^2\rho_b\delta$ dove ρ_b è la densità di materia di background che deriva dal modello di Friedmann-Robertson-Walker (FRW), $\delta = \frac{(\rho-\rho_b)}{\rho_b}$ è il contrasto di densità e $a(t)$ è il fattore

di scala che obbedisce alle equazioni di Friedmann.

L'approssimazione di campo debole non implica necessariamente piccole fluttuazioni di densità, ma dipende dal rapporto tra la scala della perturbazione e il raggio di Hubble e questo è il motivo per cui l'approccio Newtoniano è utilizzato per studiare la formazione delle strutture su piccole scale, anche in regimi non lineari. L'approssimazione Newtoniana delle equazioni della Relatività Generale, che consiste nella perturbazione della parte temporale della metrica spazio-temporale di una quantità $\frac{2\rho_g}{c^2}$ fallisce però quando si studiano effetti come le lenti gravitazionali o le traiettorie dei fotoni. In questo caso bisogna considerare il limite di GR per moti 'lenti' delle sorgenti del campo gravitazionale ma che permette alle particelle test di essere relativistiche. La relativa metrica è perturbata anche nella componente spaziale di una quantità $\frac{-2\rho_g}{c^2}$. Su scale più ampie, all'incirca del raggio di Hubble, l'approccio Newtoniano non è più valido ed è necessaria una trattazione relativistica per studiare la crescita delle strutture cosmiche e analizzare le osservazioni cosmologiche su queste scale. La teoria più usata è quella perturbativa relativistica troncata al primo o al secondo ordine. Considerare il secondo ordine perturbativo è essenziale perchè i modi lineari ne generano altri non lineari che non sono considerati in una teoria Newtoniana ma sono importanti per lo studio ad esempio delle lenti gravitazionali e di anisotropie di temperatura e polarizzazione nella CMB. L'analisi Newtoniana può essere migliorata con una approssimazione Post-Newtoniana (PN) che fornisce una prima correzione relativistica per un sistema di particelle non relativistiche legate assieme da forze gravitazionali e può essere usata per considerare effetti mediamente non lineari del campo gravitazionale.

Lo scopo di questa tesi è quella di illustrare i principali approcci perturbativi (Newtoniano, PostNewtoniano, Relativistico fino al primo ordine) e successivamente illustrare un trattamento unificato capace di seguire l'evoluzione delle perturbazioni cosmologiche da regimi lineari fino a regimi altamente non lineari. Questa Teoria è stata ottenuta tramite una 'ibrida approssimazione' delle equazioni di campo di Einstein ed unisce PN e tecniche perturbative del secondo ordine. Deriveremo un nuovo set di equazioni che descrivono le disomogeneità della materia in tutti gli stadi della loro evoluzione. Inoltre vedremo che queste equazioni su piccole scale convergono alle equazioni di PN, mentre su scale più ampie convergono alle equazioni della teoria perturbativa relativistica al primo e secondo ordine [2].

La tesi sarà suddivisa in due parti: nella prima parte saranno discusse le teorie perturbative utilizzando la metrica di Minkowsky mentre nella seconda parte saranno trattate le perturbazioni in cosmologia e quindi sarà considerata la metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW). In particolare il piano di questa tesi è il seguente: nel secondo capitolo riporteremo i risultati delle equazioni di Einstein linearizzate considerando la metrica di Minkowsky con l'aggiunta di una piccola perturbazione. Nel terzo capitolo discuteremo (utilizzando la metrica di Minkowsky) la teoria Post-Newtoniana (PN). Nel quarto capitolo riporteremo le equazioni del modello di Friedmann (che descrivono un universo omogeneo, isotropo e in espansione) e illustreremo la teoria lineare delle perturbazioni cosmologiche seguendo l'approccio Newtoniano con cenni alla teoria lineare relativistica. Infine nell'ultimo capitolo presenteremo il modello unificato delle perturbazioni cosmologiche, principale risultato della tesi.

Capitolo 2

Equazioni di Einstein e Onde gravitazionali

In questo capitolo si linearizzeranno le equazioni di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

dove $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ la curvatura scalare (la traccia del tensore di Ricci), $g_{\mu\nu}$ il tensore metrico, $T_{\mu\nu}$ il tensore Energia-Impulso legato alla distribuzione delle sorgenti e G la costante di gravitazione. Si troveranno inoltre le soluzioni più generali delle equazioni di Einstein linearizzate che sono rappresentate dalle onde gravitazionali [3].

2.1 Equazioni di Einstein linearizzate e limite Newtoniano

Si vogliono calcolare le soluzioni delle equazioni di Einstein linearizzate per poi considerarne il limite Newtoniano trovando prima le soluzioni nel vuoto e poi con sorgenti.

Nelle coordinate di Minkowsky (t, x, y, z) possiamo scrivere la metrica di uno spaziotempo leggermente deformato rispetto a quello piano ($g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$) come

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x) \quad (2.2)$$

dove $h_{\alpha\beta}$ sono *perturbazioni della metrica* e sono quantità molto piccole. Le equazioni di Einstein linearizzate nel vuoto ($T_{\mu\nu} = 0$) si ottengono inserendo la metrica perturbata (2.2) nell'equazione $R_{\alpha\beta} = 0$ dove $R_{\alpha\beta}$ è il tensore di Einstein (si dimostra che nel vuoto la curvatura scalare R che compare nelle equazioni di Einstein (2.1) è nulla) ed espandendo poi le soluzioni fino al primo ordine in $h_{\alpha\beta}(x)$. L'equazione di Einstein linearizzata che bisogna risolvere è quindi

$$\delta R_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.3)$$

che è un set di 10 equazioni differenziali lineari in $h_{\alpha\beta}(x)$. Si riportano le equazioni del tensore di Einstein in relazione ai coefficienti di Christoffel e questi in relazione alla metrica:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\delta}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\delta}^{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\delta} \quad (2.4)$$

$$\Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\delta\sigma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\delta}} \right) \quad (2.5)$$

Perturbando al primo ordine (2.5) troviamo

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\delta} \left(\frac{\partial h_{\delta\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\delta\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}} \right) \quad (2.6)$$

$$\delta R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} \quad (2.7)$$

Sostituendo (2.6) in (2.7) l'equazione linearizzata di Einstein nel vuoto diventa

$$\delta R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [-\square h_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} V_{\beta} + \partial_{\beta} V_{\alpha}] = 0 \quad (2.8)$$

Le quantità che appaiono in questa espressione sono le seguenti: l'operatore $\square$ è l'operatore d'Alambertiano

$$\square = \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \quad (2.9)$$

∂_{α} è una abbreviazione di $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$, e il vettore V_{α} è una particolare combinazione di perturbazioni

$$V_{\alpha} = \partial_{\sigma} h_{\alpha}^{\sigma} - \frac{1}{2} \partial_{\alpha} h_{\sigma}^{\sigma} \quad (2.10)$$

dove $h_{\alpha}^{\sigma} = \eta^{\sigma\delta} h_{\delta\alpha}$.

La metrica Newtoniana valida per un campo statico e debole possiamo scriverla come (inserendo la velocità della luce c)

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.11)$$

Una prima applicazione delle equazioni della relatività generale linearizzate è verificare che la metrica (2.11) soddisfi le equazioni di Einstein linearizzate nel vuoto quando Φ è indipendente da t e soddisfa l'equazione di Newton nel vuoto

$$\nabla^2 \Phi(x^i) = 0 \quad (2.12)$$

Confrontando la metrica (2.11) con la metrica di Minkowsy perturbata (2.2) si trova ($c=1$)

$$h_{00} = -2\Phi \quad h_{i0} = h_{0i} = 0 \quad h_{ij} = -2\delta_{ij}\Phi \quad (2.13)$$

$$h_j^i = -2\delta_j^i \Phi \quad h_{\beta}^{\beta} = -4\Phi \quad (2.14)$$

e segue direttamente dall'espressione (2.10) che il vettore $V_\alpha = 0$ e le equazioni di Einstein linearizzate (2.8) si riducono all'equazione newtoniana $\nabla\Phi = 0$.

Consideriamo ora l'equazione di Einstein con sorgenti

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi GT_{\alpha\beta} \quad (2.15)$$

Supponiamo ora che le sorgenti del tensore energia impulso siano costituiti da materia non relativistica la cui velocità V sia molto più piccola della velocità della luce e che la densità di energia μ sia piccola in modo che essa produca una leggera deformazione dello spaziotempo in maniera consistente con la metrica Newtoniana $ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ con un piccolo potenziale Φ . Infine assumiamo che l'energia cinetica della materia, proporzionale a μV^2 , e l'energia potenziale, proporzionale a $\mu\Phi$, siano trascurabili. Con queste ipotesi al primo ordine l'unica componente non trascurabile del tensore energia-impulso è

$$T^{00} = \mu + (\text{termini di ordine } \mu\Phi \text{ e } \mu V^2) \quad (2.16)$$

e quindi, essendo trascurabili i termini di ordine superiore, $T^{00} \approx \mu$.

Al primo ordine per piccoli valori di Φ , valutando $G_{\alpha\beta}$ per la metrica Newtoniana, risulta

$$G_{00} = 2\nabla^2\Phi \quad (2.17)$$

con le altre componenti di $G_{\alpha\beta}$ di ordine in Φ^2 e quindi trascurabili. Sostituendo (2.16) e (2.17) nell'equazione di Einstein con sorgenti (2.15) si ottiene

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\mu \quad (2.18)$$

che è l'equazione di campo Newtoniano relativo a una densità di massa μ e a un potenziale gravitazionale Φ (G costante di gravitazione). Questo dimostra che la gravità Newtoniana è una approssimazione della relatività generale per piccole curvature e sorgenti di materia non relativistiche.

2.2 Onde Gravitazionali

Vogliamo riportare ora la soluzione più generale delle equazioni linearizzate di Einstein. La soluzione è relativa all'equazione di Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (2.19)$$

Con tensore energia-impulso relativo ad una massa in moto che provoca leggere increspature nello spaziotempo.

Assumiamo che le onde gravitazionali prodotte dalla sorgente di $T_{\alpha\beta}$ siano così deboli che la metrica possa essere considerata, come nella sezione precedente, la metrica di Minkowsy $\eta_{\alpha\beta}$ più una piccola perturbazione $h_{\alpha\beta}$ tale che il suo modulo sia molto minore dell'unità per ogni valore di α e β . Assumendo, come nella sezione precedente, che le velocità delle sorgenti siano piccole rispetto alla velocità della luce risulta che

$$T_{\alpha\beta} = \mu u^\alpha u^\beta \quad (2.20)$$

dove μ è la densità di massa.

Per definire univocamente la perturbazione $h_{\alpha\beta}(x)$ utilizziamo la gauge di Lorentz individuata dalla condizione

$$V_\alpha(x) = \partial_\beta h_\alpha^\beta(x) - \frac{1}{2} \partial_\alpha h_\beta^\beta(x) = 0 \quad (2.21)$$

Ponendo ora

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x) = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \quad (2.22)$$

dove $h = h_\sigma^\sigma$, possiamo riformulare la condizione di gauge di Lorentz in maniera più semplice come

$$\frac{\partial \bar{h}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (2.23)$$

In questo modo l'equazione (2.8) diventa $\delta R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \square h_{\alpha\beta}$ e $\delta R = -\frac{1}{2} h$ e quindi le equazioni di Einstein linearizzate diventano

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta} \quad (2.24)$$

La soluzione di questa equazione è

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = 4 \int d^3x' \frac{[T_{\alpha\beta}(t', \vec{x}')]_{ret}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.25)$$

dove $\vec{x}'$ e $\vec{x}$ sono rispettivamente le coordinate della sorgente del campo gravitazionale e le coordinate del punto in cui si valuta il campo, $[\dots]_{ret}$ significa che l'argomento è valutato al tempo ritardato $t' = t_{ret} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$ dove il ritardo $\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$ uguaglia il tempo che la luce impiega per passare dal punto $\vec{x}'$, in cui è situata la sorgente, al punto $\vec{x}$ in cui si valuta il campo. L'equazione (2.25) rappresenta la soluzione più generale delle equazioni della relatività generale linearizzate.

Capitolo 3

Teoria Post-Newtoniana

Come detto nell'introduzione lo studio dell'evoluzione delle perturbazioni cosmologiche ha una importanza fondamentale per capire le proprietà delle strutture su larga scala dell'universo e come si sono formate.

Per scale che sono molto più piccole del raggio di Hubble si utilizza la trattazione Newtoniana che consiste nell'aggiunta del termine perturbativo $\frac{2\varphi_g}{c^2}$ all'elemento di linea della metrica FRW. Il potenziale gravitazionale φ_g è determinato dal contrasto di densità $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho}$ attraverso l'equazione di Poisson $\nabla^2\varphi_g = 4\pi G a^2 \rho_b \delta$, dove ρ_b è la densità di materia di Background e $a(t)$ è il fattore di scala. La fluidodinamica è poi ottenuta utilizzando le leggi di conservazione di energia e momento tramite l'equazione $T_{\beta;\alpha}^\alpha = 0$.

Questa procedura fornisce risultati accurati su scale più grandi del raggio di Schwarzschild di oggetti collassati ma molto più piccolo del raggio di Hubble dove $\frac{\varphi_g}{c^2}$ è molto più piccolo dell'unità. Dimosteremo inoltre che la trattazione Newtoniana delle perturbazioni coincide con quella lineare relativistica.

In questo capitolo si illustrerà l'approccio non lineare Post-Newtoniano (PN) che può essere considerato come una teoria perturbativa al secondo ordine. Nella teoria PN viene aggiunto un ulteriore termine perturbativo $\frac{-2\varphi_g}{c^2}$ nella parte spaziale della metrica FRW. L'aggiunta di questo ulteriore termine permette la comparsa di nuove componenti nelle equazioni che permettono per esempio un trattamento più preciso della traiettoria dei fotoni in una geometria deformata dalle perturbazioni di materia come richiesto nello studio dell'effetto del Gravitational Lensing provocato dalle strutture cosmologiche.

Lo studio delle anisotropie di temperatura della radiazione cosmica di fondo (CMB) su larga scala è trattata oggi con la teoria perturbativa relativistica lineare. Comunque su piccole e medie scale la descrizione al primo ordine perturbativo non è più accurato e perturbazioni della metrica al secondo ordine sono richieste dato che determinano nuovi contributi come per esempio l'effetto Rees-Sciama. Inoltre la teoria perturbativa relativistica al secondo ordine consente di trattare l'instabilità gravitazionale su scale di tempo grandi e include fenomeni non lineari su tutte le scale.

In questa tesi sarà trattato solo l'approccio PN. Per una trattazione completa della teoria perturbativa relativistica al secondo ordine si guardi [4].

Il metodo Post-Newtoniano viene utilizzato in cosmologia per tenere conto degli effetti non lineari prodotti da un campo gravitazionale moderatamente forte generato durante il collasso e consiste nell'espansione delle equazioni della rela-

tività generale aggiungendo il termine perturbativo $\frac{2\varphi}{c^2}$ nella parte spaziale della metrica FRW.

In questo capitolo si presenterà la teoria Post-Newtoniana nel caso di due corpi tenuti assieme da forza gravitazionali e quindi tratteremo l'approccio PN nel caso della metrica di Minkowsky perturbata [5]. Nel quinto capitolo tratteremo l'approccio più generale considerando la metrica FRW e unendo l'approccio PN alla teoria perturbativa relativistica del secondo ordine.

3.1 Approccio Post-Newtoniano

Consideriamo un sistema di particelle legate assieme da attrazione gravitazionale. Assumendo M , $\vec{r}$ e $\vec{v}$ rispettivamente la massa delle particelle, la distanza relativa tra i due corpi e la velocità della particella soggetta a campo gravitazionale, risulta dalla meccanica Newtoniana che la tipica energia cinetica di quest'ultima $E = \frac{1}{2}Mv^2$ è dello stesso ordine di grandezza dell'energia potenziale $\frac{GM^2}{r}$, cioè $v^2 \sim \frac{GM}{r}$.

L'approssimazione Post-Newtoniana consiste di approssimare il moto del sistema in ordine dei parametri $\frac{GM}{r}$ e v^2 (si è posto $c = 1$). L'equazione del moto del sistema è

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = -\Gamma_{\nu\lambda}^i \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} + \Gamma_{\nu\lambda}^0 \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^i}{dt} \quad (3.1)$$

$$= -\Gamma_{00}^i - 2\Gamma_{0j}^i \frac{dx^j}{dt} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + [\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{0j}^0 \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{jk}^0 \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}] \frac{dx^i}{dt} \quad (3.2)$$

Nell'approssimazione Newtoniana possiamo considerare trascurabili tutte le velocità e considerare solamente i termini al primo ordine della differenza tra la metrica perturbata $g_{\mu\nu}$ e quella di Minkowsky $\eta_{\mu\nu}$. Con questa approssimazione si trova

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Gamma_{00}^i \approx \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \quad (3.3)$$

Da cui $\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} = -\nabla \phi$ con $h_{00} = -2\phi + \text{const}$ e quindi $g_{00} = -(1+2\phi)$ e quindi si ottengono gli stessi risultati del capitolo precedente.

Questa soluzione però è dell'ordine di v^2/r e si vuole utilizzare l'approssimazione Post-Newtoniana per calcolare l'equazione del moto in ordine di v^4/r . Si dimostra che è sempre possibile trovare un sistema di coordinate nelle quali il tensore metrico è approssimabile con quella di Minkowsky con correzioni espandibili in potenze di v^2 . In particolare

$$g_{00} = -1 + g_{00}^{(2)} + g_{00}^{(4)} + \dots \quad (3.4)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + g_{ij}^{(2)} + g_{ij}^{(4)} + \dots \quad (3.5)$$

$$g_{i0} = g_{i0}^{(3)} + g_{i0}^{(5)} + \dots \quad (3.6)$$

Dove $g_{\mu\nu}^{(n)}$ indica il termine in $g_{\mu\nu}$ di ordine v^n . Analogamente espandendo in serie di $\frac{v^n}{r}$ i coefficienti di Christoffel considerando fino all'opportuno ordine utilizzando la relazione dei simboli di Christoffel con la metrica si trovano le seguenti espressioni per i coefficienti della connessione:

$${}^{(2)}\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^i} \quad {}^{(4)}\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}^{(4)}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i0}^{(3)}}{\partial t} + \frac{1}{2} g_{ij}^{(2)} \frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^j} \quad (3.7)$$

$${}^{(3)}\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{i0}^{(3)}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial g_{j0}^{(3)}}{\partial x^i} \right] \quad {}^{(2)}\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ij}^{(2)}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}^{(2)}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}^{(2)}}{\partial x^i} \right] \quad (3.8)$$

$${}^{(3)}\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial t} \quad {}^{(2)}\Gamma_{0i}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^i} \quad {}^{(1)}\Gamma_{ij}^0 = 0 \quad (3.9)$$

dove, analogamente a prima, ${}^{(n)}\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ indica il termine in $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ di ordine $\frac{v^n}{r}$.

Per semplificare le equazioni successive ci si può porre in un sistema di coordinate, dette Armoniche, che soddisfano la condizione

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad (3.10)$$

Considerando ora le equazioni di Einstein ed espandendo allo stesso modo il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ all'opportuno ordine di $\frac{v^n}{r^2}$, si trovano le seguenti relazioni tra la metrica e il tensore energia-impulso

$$\nabla^2 g_{00}^{(2)} = -8\pi G {}^{(0)}T^{00} \quad (3.11)$$

$$\nabla^2 g_{00}^{(4)} = \frac{\partial^2 g_{00}^{(2)}}{\partial t^2} + g_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2 g_{00}^{(2)}}{\partial x^i \partial x^j} - \left(\frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^i} \right)^2 - 8\pi G [{}^{(2)}T^{00} - 2g_{00}^{(2)} {}^{(0)}T^{00} + {}^{(2)}T^{ii}] \quad (3.12)$$

$$\nabla^2 g_{i0}^{(3)} = +16\pi G {}^{(1)}T^{i0} \quad \nabla^2 g_{ij} = -8\pi G \delta_{ij} {}^{(0)}T^{00} \quad (3.13)$$

dove T^{00} , T^{i0} e T^{ij} rappresentano rispettivamente la densità di energia, momento e flusso di momento lungo j.

Dalla prima di queste equazioni risulta come ci aspettiamo

$$g_{00}^{(2)} = -2\phi \quad (3.14)$$

dove ϕ è il potenziale newtoniano definito dall'equazione $\nabla^2 \phi = 4\pi G T^{00(0)}$. Se assumiamo che g_{00} si annulli all'infinito la soluzione è

$$\phi(\vec{x}, t) = -G \int d^3 x' \frac{{}^{(0)}T^{00}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.15)$$

Dalla seconda delle (3.13) troviamo che la soluzione per g_{ij} che si annulla all'infinito è

$$g_{ij}^{(2)} = -2\delta_{ij}\phi \quad (3.16)$$

D'altra parte la prima delle (3.13) rappresenta un nuovo potenziale vettoriale $\vec{\varsigma}$ tale che

$$g_{i0}^{(3)} = \varsigma_i \quad (3.17)$$

e la soluzione della prima delle (3.13) è

$$\varsigma_i(\vec{x}, t) = -4G \int d^3x' \frac{{}^{(1)}T^{i0}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.18)$$

Semplificando (3.12) con i risultati ottenuti si ottiene

$$g_{00}^{(4)} = -2\phi^2 - 2\psi \quad (3.19)$$

dove ψ è un secondo potenziale scalare che soddisfa

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 4\pi G [{}^{(2)}T^{00} + {}^{(2)}T^{ii}] \quad (3.20)$$

Ancora, g_{00} deve annullarsi all'infinito e quindi la soluzione per il potenziale ψ è

$$\psi(\vec{x}, t) = - \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}', t)}{\partial t^2} + G {}^{(2)}T^{00}(\vec{x}', t) + G {}^{(2)}T^{ii}(\vec{x}', t) \right] \quad (3.21)$$

Inoltre si dimostra che la condizione per le coordinate armoniche $g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ vincola i potenziali ϕ e $\vec{\varsigma}$ a soddisfare l'equazione

$$4 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\varsigma} = 0 \quad (3.22)$$

A questo punto mettendo insieme i risultati ottenuti si trovano delle equazioni per le componenti della connessione in relazione ai potenziali

$${}^{(2)}\Gamma_{00}^i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad {}^{(4)}\Gamma_{00}^i = \frac{\partial}{\partial x^i} (2\phi^2 + \psi) + \frac{\partial \varsigma_i}{\partial t} \quad (3.23)$$

$${}^{(3)}\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varsigma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varsigma_j}{\partial x^i} \right) - \delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad {}^{(2)}\Gamma_{jk}^i = -\delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} - \delta_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} + \delta_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (3.24)$$

$${}^{(3)}\Gamma_{00}^0 = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad {}^{(2)}\Gamma_{0i}^0 = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (3.25)$$

$${}^{(3)}\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varsigma_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \varsigma_j}{\partial x^i} \right) - \delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.26)$$

$${}^{(4)}\Gamma_{i0}^0 = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \quad {}^{(5)}\Gamma_{00}^0 = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{\varsigma} \cdot \vec{\nabla} \phi \quad (3.27)$$

Inserendo i coefficienti della connessione calcolati nell'equazione del moto (3.2) si ottiene l'equazione

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}(\phi + 2\phi^2 + \psi) - \frac{\partial \vec{\varsigma}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\varsigma}) + 3\vec{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + 4\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\phi - v^2 \vec{\nabla} \phi \quad (3.28)$$

dove $v^i = \frac{dx^i}{dt}$.

3.2 Fluidodinamica e Applicazioni

Si considerino ora nella teoria perturbativa Post-Newtoniana corpi costituiti da un fluido perfetto. Il tensore energia-impulso è quindi dato da

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)u^u u^v \quad (3.29)$$

Dove p e ρ sono la pressione e la densità del fluido misurati da un osservatore comovente col fluido e u^u è la quadrivelocità $\frac{dx^\mu}{dx^\tau}$ con τ tempo proprio dell'osservatore. Le equazioni della fluidodinamica Newtoniana sono

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\rho \vec{\nabla} \phi - \vec{\nabla} p \quad (3.30)$$

con p data in funzione di ρ tramite l'equazione di stato, e ϕ determinato attraverso l'equazioni di Poisson $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$. Queste equazioni si possono ricavare attraverso l'equazione $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ computando le componenti del tensore energia-impulso

$$^{(0)}T^{00} = \rho \quad ^{(1)}T^{i0} = \rho v_i \quad ^{(2)}T^{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j \quad (3.31)$$

Utilizzando (3.29) per calcolare le altre componenti e applicando le equazioni di conservazione dell'energia e del momento si ricavano le equazioni della fluidodinamica Post-Newtoniana

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(1 - v^2 - 2\phi)] + \vec{\nabla} \cdot [\vec{v}(\rho + p + v^2 \rho - 2\phi \rho)] = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}[\vec{v}(\rho + p + v^2 \rho - 2\phi \rho)] + \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{v}(p + \rho - 2\phi \rho + \phi v^2)] \\ &= -\vec{\nabla}[p(1 + 2\phi)] - \rho \vec{\nabla}(\phi + 2\phi^2 + \psi) - \rho \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} \\ & \quad - \rho(v^2 - 2\phi) \vec{\nabla} \phi + \rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\zeta}) + 4\rho \vec{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ & \quad - (3p + \rho v^2) \vec{\nabla} \phi + 4p \vec{\nabla} \phi + 4\rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi) \end{aligned} \quad (3.33)$$

dove i potenziali $\vec{\zeta}$ e ψ sono calcolati attraverso le equazioni (3.18) e (3.21).

Una importante applicazione dell'approssimazione Post-Newtoniana è il calcolo del campo gravitazionale per una arbitraria finita distribuzione di energia e momento.

Supponiamo che $T^{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ si annulli per $r > R$, dove $r = |\vec{x}|$ ed espandiamo i denominatori $|\vec{x} - \vec{x}'|$ delle equazioni (3.15), (3.18) e (3.21) in ordine di $\frac{R}{r}$

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} + \dots \quad (3.34)$$

Si trova che

$$\phi = -\frac{GM^{(0)}}{r} - G \frac{\vec{x} \cdot \vec{D}^{(0)}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.35)$$

$$\varsigma_i = -\frac{4GP_i^{(1)}}{r} - \frac{2Gx^j J_{ji}^{(1)}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.36)$$

$$\psi = -\frac{GM^{(2)}}{r} - \frac{G\vec{x} \cdot \vec{D}^{(2)}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.37)$$

dove

$$M^{(0)} = \int {}^{(0)}T^{00} d^3x \quad \vec{D}^{(0)} = \int \vec{x} {}^{(0)}T^{00} d^3x \quad {}^{(1)}P^i = \int {}^{(1)}T^{i0} d^3x \quad (3.38)$$

$$J_{ij}^{(1)} = 2 \int x^i {}^{(1)}T^{j0} d^3x \quad M^{(2)} = \int ({}^{(2)}T^{00} + {}^{(2)}T^{ii}) d^3x \quad (3.39)$$

$$\vec{D}^{(2)} = \int \vec{x} ({}^{(2)}T^{00} + {}^{(2)}T^{ii} + \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}) d^3x \quad (3.40)$$

La componente g_{00} della metrica può essere scritta come

$$g_{00} = -1 - 2(\phi + \psi) - 2(\phi + \psi)^2 + O(v^6) \quad (3.41)$$

e dalle equazioni (3.35) e (3.37) si trova

$$\phi + \psi = -\frac{GM}{r} - \frac{G\vec{x} \cdot \vec{D}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.42)$$

con $M = M^{(0)} + M^{(2)}$ e $\vec{D} = \vec{D}^{(0)} + \vec{D}^{(2)}$

Dall'equazione di conservazione dell'energia si trova inoltre

$$\frac{dM^{(0)}}{dt} = 0 \quad \frac{d\vec{D}^{(0)}}{dt} = \vec{P}^{(1)} \quad (3.43)$$

Se il tensore energia-impulso è indipendente dal tempo allora $\frac{\partial T^{i0}}{\partial x^i} = 0$ che implica

$$P^i = \int x^i \frac{\partial}{\partial x^j} {}^{(1)}T^{j0} d^3x = 0 \quad (3.44)$$

$$0 = 2 \int x^i x^j \frac{\partial}{\partial x^k} {}^{(1)}T^{k0} d^3x = -J_{ij}^{(1)} - J_{ji}^{(1)} \quad (3.45)$$

E quindi per un sistema statico si trova che $\vec{P} = 0$ e $J_{ij}^{(1)}$ è antisimmetrico. Da ques'ultima proprietà si ricava che $J_{ij}^{(1)} = \epsilon_{ijk} J_k^{(1)}$ è il vettore momento angolare

$$J_k^{(1)} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} J_{ij}^{(1)} = \int d^3x \epsilon_{ijk} x^i {}^{(1)}T^{j0} \quad (3.46)$$

e da (3.44) e (3.45) risulta

$$\vec{\zeta} = \frac{2G}{r^3} (\vec{x} \times \vec{j}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.47)$$

Dimostriamo ora che le soluzioni trovate sono compatibili con la metrica di Schwarzschild per distribuzioni di energia e momento a simmetria sferica, stazionarie e statiche. Supponiamo ora $T^{\mu\nu}$ dipenda da $\vec{x}$ solo attraverso il raggio $r = |\vec{x}|$, quindi sostituendo $|\vec{x} - \vec{x}'|$ con $\frac{1}{r}$ si trova che al di fuori di una distribuzione sferica di energia e momento valgono

$$\phi = -\frac{GM^{(0)}}{r} \quad \vec{\zeta} = -4G\frac{\vec{P}^{(1)}}{r} \quad \psi = -\frac{GM^{(2)}}{r} \quad (3.48)$$

Se la distribuzione è statica allora come si è visto $\vec{P}$ è nullo e quindi anche ζ_i . In questo caso troviamo la metrica

$$g_{00} = -1 + \frac{2MG}{r} - \frac{2M^2G^2}{r} \quad (3.49)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\delta_{ij}\frac{MG}{r} \quad (3.50)$$

$$g_{i0} = 0 \quad (3.51)$$

che è in accordo con l'esatta metrica di Schwarzschild data in coordinate armoniche

$$g_{00} = -\frac{1 - MG/r}{1 + MG/r} \quad (3.52)$$

$$g_{i0} = 0 \quad (3.53)$$

$$g_{ij} = (1 + \frac{MG}{r})^2 \delta_{ij} + (\frac{MG}{r})^2 \frac{1 + MG/r}{1 - MG/r} (\frac{x^i x^j}{r^2}) \quad (3.54)$$

che si dimostra essere equivalente alla soluzione classica di Schwarzschild.

Consideriamo ora lo stesso sistema sferico a riposo però rotante con velocità angolare $\omega(r)$. La densità di momento è

$${}^{(1)}T^{i0}(\vec{x}', t) = T^{00(0)}(r')[\omega(r') \times \vec{x}']_i \quad (3.55)$$

L'equazione del campo $\vec{\zeta}$ (3.18) diventa

$$\vec{\zeta}(\vec{x}) = -4G \int \frac{[\vec{\omega}(r') \times \vec{x}']}{|\vec{x} - \vec{x}'|} {}^{(0)}T^{00}(r') d^4x' \quad (3.56)$$

Quindi il campo al di fuori della sfera è

$$\vec{\zeta} = \frac{16\pi G}{3r^3} [\vec{x} \times \int \vec{\omega}(r') {}^{(0)}T^{00}(r') r'^4 dr'] \quad (3.57)$$

L'integrale può essere espresso in termini del momento angolare, dato da (3.46), e al di fuori della sfera si trova

$$\vec{\zeta}(\vec{x}) = \frac{2G}{r^3} (\vec{x} \times \vec{J}) \quad (3.58)$$

che è il limite asintotico della formula (3.47).

Capitolo 4

Equazioni di Friedmann e teoria perturbativa lineare

4.1 Metrica FRW ed Equazioni di Friedmann

Per comprendere l'evoluzione delle strutture cosmologiche l'approccio seguito è quello di studiare inizialmente la dinamica dell'universo considerando la distribuzione di materia completamente omogenea. Le disomogeneità che osserviamo sono quindi trattate come deviazioni da questo modello omogeneo. Dato che il campo gravitazionale su larghe scale è descritto dalle equazioni di Einstein, il modello di universo omogeneo è basato sulla relatività generale ed è il modello di Friedmann di cui riporteremo solo i punti essenziali.

La metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW) in coordinate sferiche (r, θ, ϕ)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (4.1)$$

descrive un universo omogeneo e isotropo ad ogni istante di tempo. Nell'equazione il valore di k indica il segno della curvatura: $k=0$ è lo spazio piatto, per $k=+1$ la curvatura è positiva e la geometria è sferica e per $k=-1$ la curvatura è negativa e lo spazio è iperbolico. $a(t)$ è il fattore di scala che descrive come le distanze relative tra due osservatori varino nel tempo e infine r è la distanza comovente, cioè la distanza tra i due osservatori misurata all'epoca attuale.

La metrica è espressa in un sistema di coordinate comoventi cioè solidale all'espansione dell'universo. I valori di k e $a(t)$ possono essere determinati attraverso l'equazione di Einstein

$$G^\alpha_\beta = R^\alpha_\beta - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta R = 8\pi G T^\alpha_\beta. \quad (4.2)$$

Se assumiamo che il nostro universo sia omogeneo e isotropo allora possiamo scrivere il tensore energia-impulso come

$$T^\alpha_\beta = \text{diag}[\rho(t), -p(t), -p(t), -p(t)] \quad (4.3)$$

dove p è la pressione della sorgente del tensore e ρ ne è la densità. Se consideriamo un fluido ideale si può scrivere

$$T_{\beta}^{\alpha} = (p + \rho)u^{\alpha}u_{\beta} - p\delta_{\beta}^{\alpha} \quad (4.4)$$

Le proprietà della sorgente sono identificate dalla relazione tra ρ e p tramite una equazione di stato $p = p(\rho)$.

Nell'universo attuale i costituenti sono essenzialmente radiazione e materia non relativistica. La radiazione ha equazione di stato $p = \frac{1}{3}\rho$ mentre la materia non relativistica è assunta polvere cosmologica (*dust*) con $p=0$. Se si calcolano le componenti del tensore di Einstein G_{β}^{α} si trova che le uniche componenti non nulle sono G_0^0 e G_j^i dove

$$G_0^0 = \frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} \quad G_j^i = \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}\delta_j^i \quad (4.5)$$

Sostituendo queste nell'equazione di Einstein (4.2) si ottengono le equazioni di Friedmann

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho a^2}{3} - kc^2 \quad \ddot{a} = -\frac{4\pi G\rho a}{3}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) \quad \dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \quad (4.6)$$

Queste equazioni, combinate con l'equazione di stato $p = p(\rho)$, determinano completamente le tre funzioni $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$ che sono rispettivamente il fattore di scala, la densità di massa totale e la pressione associata della materia (sia non relativistica che radiazione) che compone l'universo assunto omogeneo e isotropo [6].

4.2 Teoria perturbativa lineare

Ora si considera la teoria lineare includendo piccole fluttuazioni di densità le quali crescendo tramite l'instabilità gravitazionale hanno formato le strutture cosmologiche che vediamo oggi. Fino a che queste disomogeneità sono piccole possono essere studiate tramite la teoria perturbativa lineare, quando però le deviazioni dal modello omogeneo crescono sono necessarie altre tecniche per poterle studiare l'evoluzione.

Assumiamo quindi l'esistenza di piccole disomogeneità a un tempo iniziale prodotte da qualche meccanismo fisico (ad esempio modello inflazionario).

Consideriamo una perturbazione della metrica $g_{\alpha\beta}(x)$ e della sorgente $T_{\alpha\beta}$ nella forma $(g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta})$ e $(T_{\alpha\beta} + \delta T_{\alpha\beta})$ dove $(g_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta})$ è l'universo omogeneo di background e $(\delta g_{\alpha\beta}, \delta T_{\alpha\beta})$ la perturbazione. Linearizzando le equazioni di Einstein come fatto in precedenza otteniamo

$$\hat{L}(g_{\alpha\beta})\delta g_{\alpha\beta} = \delta T_{\alpha\beta} \quad (4.7)$$

dove $\hat{L}$ è un operatore differenziale lineare dipendente dallo spaziotempo di background. Dato che è una equazione lineare possiamo svilupparla in termini di modi di Fourier ottenendo così un set di equazioni $\hat{L}_{(k)}\delta g_{\alpha\beta} = \delta T_{(k)}$ dove $\vec{k}$ è il vettore d'onda relativo ad ogni componente. Risolvendo questo set di equazioni si determinano l'evoluzione di ogni modo. La difficoltà di questo metodo è che in relatività generale la forma e i coefficienti della metrica $g_{\alpha\beta}$ (o quelli del tensore

energia-impulso) possono cambiare con una sostituzione di coordinate $x^\alpha \rightarrow x'_\alpha$ e quindi posso essere generate delle perturbazioni aggiuntive originariamente assenti. Il problema è risolto per componenti di Fourier che hanno lunghezza d'onda molto più piccole del raggio di Hubble $d_H(t) = (\frac{\dot{a}}{a})^{-1} = H(t)^{-1}$ che può essere considerato come la lunghezza di scala in cui gli effetti relativistici diventano importanti. Per scale molto più piccole del raggio di Hubble la curvatura dello spaziotempo è trascurabile e quindi anche questi effetti. In queste regioni c'è una naturale scelta delle coordinate e ogni quantità fisica può essere determinata univocamente.

Il metodo Newtoniano presenta però la seguente difficoltà: la lunghezza d'onda λ di ogni componente di Fourier è stato più grande del raggio di Hubble a una determinata epoca. Infatti ogni λ (misurato oggi) con $\lambda \ll H^{-1}$ all'epoca attuale è entrato a un determinato istante $t_{enter}(\lambda)$ nel passato. Quindi il modello Newtoniano può essere utilizzato per studiare un modo di Fourier con lunghezza d'onda λ solo per tempi $t \ll t_{enter}(\lambda)$ quando λ è molto più piccolo del raggio di Hubble. Comunque l'approccio relativistico deve essere usato per studiare le epoche primordiali e quindi è necessario fissare la Gauge.

In linea di principio la teoria perturbativa procede nel seguente modo. Prima di tutto dato il modo λ si ricava $t_{enter}(\lambda)$. Per $t \ll t_{enter}(\lambda)$ si ha $\lambda > d_H$ e dovremmo utilizzare un approccio perturbativo relativistico per studiare l'evoluzione della perturbazione $\delta\rho_\lambda(t)$ da un determinato tempo iniziale $t = t_i$ a $t = t_{enter}(\lambda)$. Per $t > t_{enter}(\lambda)$, $\lambda < d_H$ e l'evoluzione di $\delta\rho_\lambda$ può essere studiata utilizzando la teoria Newtoniana.

Riporteremo ora le principali equazioni dell'approccio Newtoniano e lineare relativistico. Ricordiamo che nel primo approccio ci poniamo in scale molto più piccole del raggio di Hubble e consideriamo solo materia non relativistica [6].

Utilizziamo la metrica FRW con $k=0$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (4.8)$$

La metrica è espressa in coordinate comoventi, cioè di un osservatore solidale all'universo in espansione. Possiamo effettuare, per semplificazioni successive, coordinate proprie cioè tali che $\vec{x} = a(t)\vec{r}$

Si consideri ora il limite newtoniano dell'equazione del moto della materia nelle nuove coordinate

$$T_{\beta;\alpha}^\alpha = \frac{\partial T_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha T_\beta^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma T_\sigma^\alpha = 0 \quad (4.9)$$

dove $T_{\beta;\alpha}^\alpha$ è la derivata covariante. Per un fluido ideale nell'approssimazione non relativistica (in coordinate lagrangiane) si ottiene per la densità di materia e per la sua velocità

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (v^i \partial_i)\rho = -\rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (4.10)$$

$$\dot{v}^i = -\partial^i \phi - \rho^{-1} \partial^i \rho \quad (4.11)$$

Per trovare la prima equazione si pone $\beta = 0$ e troviamo (ricordando che $T_\nu^\mu = \text{diag}[-\rho, p, p, p]$)

$$\frac{\partial T_0^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha T_0^\sigma - \Gamma_{0\alpha}^\sigma T_\sigma^\alpha = 0 \quad (4.12)$$

da cui

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} - \Gamma_{0\mu}^\mu \rho - \Gamma_{0\mu}^\alpha T_\alpha^\mu = 0 \quad (4.13)$$

Calcolando i coefficienti di Christoffel nell'ultima equazione (risultano $\Gamma_{0j}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a}$) si ritrova l'equazione (4.10). Il procedimento per calcolare l'altra equazione è analogo.

Le equazioni (4.10) e (4.11) soddisfano i seguenti vincoli:

$$p_b = 0 \quad \rho_b(\vec{x}, t) = \rho_b(t) \quad \vec{v}_b(t, \vec{x}) = f(t)\vec{x} \quad (4.14)$$

dove l'indice b indica il background. Da queste condizioni si ottengono le equazioni

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + 3\rho_b f(t) = 0 \quad \dot{f} + f^2(t) = \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) \quad (4.15)$$

L'ultima equazione integrata dà $f(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = H(t) = H_b(t)$. Sostituendo questo risultato nella prima equazione troviamo che $\rho_b \propto a^{-3}$. Questo è il limite Newtoniano delle equazioni di Friedmann.

Per perturbare questa soluzione possiamo semplicemente aggiungere (fino a che abbiamo una scala molto minore del raggio di Hubble) il potenziale perturbativo $\delta\phi$ (dovuto alla perturbazione di densità) al potenziale di background $\phi_b(t, \vec{x})$ newtoniano. Scrivendo le versioni linearizzate di (4.10) e (4.11) si ottiene facilmente una equazione perturbativa al primo ordine per $\delta\rho$.

Ritornando ora in coordinate comoventi (X,Y,Z) tali che $x=a(t)X$, $y=a(t)Y$, e $z=a(t)Z$ e ponendo $\delta = \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)$ (perturbazione di densità), troviamo le tre equazioni che governano la teoria perturbativa Newtoniana

$$\ddot{\delta} + 2H_b\dot{\delta} - v^2 a^{-2} \nabla^2 \delta = 4\pi G \rho_b \quad (4.16)$$

$$\dot{\rho} + 3H_b \delta \rho + \rho_b \partial_i v^i = 0 \quad (4.17)$$

$$\dot{v}_\alpha + H v_\alpha + \partial_\alpha \phi_b = 0 \quad (4.18)$$

Per ottenere la perturbazione lineare relativistica (quella più generale) si può procedere perturbando linearmente le equazioni di Einstein ottenendo un sistema di equazioni differenziali lineari per le perturbazioni scalari, vettoriali e tensoriali scegliendo un'opportuna gauge. Ad esempio nella gauge di Poisson in cui la dinamica della materia è descritta rispetto a un sistema di coordinate non comovente con il fluido la metrica perturbata ottenuta considerando tutti i tipi di perturbazione si scrive

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1+2\phi)d\eta^2 - 2V_\alpha d\eta dx^\alpha + (1-2\psi)\delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}]dx^\alpha dx^\beta \quad (4.19)$$

Dove V_α è una perturbazione vettoriale tale che in questa gauge $\partial^\alpha V_\alpha = 0$ e h_β^α è un tensore con traccia nulla trasverso cioè tale che $h_\alpha^\alpha = \partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0$.

La metrica è parametrizzata utilizzando coordinate spaziali comoventi (con l'universo) $x = \frac{r}{a(t)}$ e il tempo conforme $d\eta = \frac{dt}{a(t)}$ dove r è la distanza spaziale propria e t è il tempo cosmico, cioè il tempo misurato da un osservatore comovente con l'espansione dell'universo. Un'altra Gauge importante è il Gauge sincrono o comovente col fluido in cui l'osservatore è ancorato alla materia e in queste coordinate ne segue l'evoluzione.

Quindi per trattare la teoria delle perturbazioni si può utilizzare un sistema Euleriano in cui l'osservatore è fisso rispetto alla materia (ma comunque comovente con l'universo) oppure si può utilizzare un sistema Lagrangiano in cui l'osservatore si muove ancorato al fluido.

Con l'approccio Relativistico generale calcolato in quest'ultima Gauge le equazioni sono identiche a quelle ottenute con l'approccio Newtoniano ad eccezione di ρ_b che è sostituito da $(\rho_b + p_b)$. Si ricorda però che nel limite Newtoniano $p_b \ll \rho_b$.

Le equazioni relativistiche quindi sono

$$\dot{\rho} + 3H_b \delta\rho + \rho_b \partial_i v^i = 0 \quad (4.20)$$

$$\dot{v}_\alpha + H v_\alpha + \partial_\alpha \phi_b = 0 \quad (4.21)$$

dove nelle equazioni si è considerata solo materia non relativistica (*dust*) con pressione p nulla o comunque trascurabile.

Capitolo 5

Trattazione unificata delle perturbazioni

Dopo aver discusso le principali teorie perturbative il nostro scopo è ora quello di estendere la teoria Post-Newtoniana alla metrica FRW unendola alla teoria perturbativa relativistica al secondo ordine. Questo approccio permette infatti di seguire l'evoluzione delle perturbazioni cosmologiche da regimi lineari ad altamente non lineari. Questa trattazione sarà valida, come accennato, su scale molto più grandi del raggio di Schwarzschild di oggetti collassanti. Adotteremo la Gauge di Poisson che, essendo più vicina alla Gauge Newtoniana ed Euleriana, permette una semplice interpretazione dei vari modi perturbativi.

Il nuovo approccio permette una più accurata descrizione delle perturbazioni della metrica generate da strutture non lineari della trattazione al secondo ordine la quale considera solo piccole deviazioni dal regime lineare. Per esempio, su piccole scale il set di equazioni che ricaveremo forniscono una descrizione PN delle perturbazioni metriche generate da strutture altamente non lineari includenti materia oscura mentre il moto può essere descritto dalla approssimazione Newtoniana. Su larghe scale le nostre equazioni convergono al primo e al secondo ordine perturbativo relativistico e quindi possono essere utilizzate per ogni tipo di sorgente cosmologica.

Nella prossima sezione otterremo le perturbazioni della metrica nella Gauge di Poisson in accordo con la nostra approssimazione unificata. Nella seconda sezione otterremo le equazioni delle sorgenti scalari, vettoriali e tensoriali delle perturbazioni e le equazioni che governano l'evoluzione della densità di materia e le velocità peculiari. Nella sezione terza faremo il confronto con le teorie approssimative conosciute: Newtoniano, lineare relativistico e PN utilizzato per descrivere regimi altamente non lineari su piccole scale. Nella quarta sezione discuteremo sul fatto che l'approssimazione PN delle nostre equazioni per i modi tensoriali e vettoriali valgono su tutte le scale cosmologiche. Infine nell'ultima sezione discuteremo di due applicazioni cosmologiche del nostro approccio: Momenti di quadrupolo di una distribuzione di materia e onde gravitazionali [2].

5.1 Equazioni del modello

Adottando il tempo conforme, η (dove ricordiamo è legato al tempo misurato da un osservatore comovente con la geometria dell'universo t tramite $d\eta = \frac{dt}{a(t)}$), l'elemento di linea perturbata della metrica FRW, che descrive un universo omogeneo e isotropo in coordinate comoventi, assume la forma nella gauge di Poisson

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ -(1 + 2\phi)d\eta^2 - 2V_\alpha d\eta dx^\alpha + [(1 - 2\psi)\delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}]dx^\alpha dx^\beta \}. \quad (5.1)$$

dove in questa Gauge la perturbazione vettoriale V_α soddisfa $\partial_\alpha V^\alpha = 0$ mentre la perturbazione tensoriale $h_{\alpha\beta}$ è tale che $h^\alpha_\alpha = \partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0$. Inoltre la metrica (5.1) include termine perturbativi di ogni ordine.

Dai risultati della teoria Post-Newtoniana risulta che i modi tensoriali e vettoriali, in ordine di potenze di $\frac{1}{c}$, sono rispettivamente di $O(\frac{1}{c^2})$ e $O(\frac{1}{c^4})$ e che all'ordine più basso (approssimazione di campo debole) la metrica (5.1) assume la forma

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2\phi_1)d\eta^2 + (1 - 2\psi_1)\delta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta] \quad (5.2)$$

dove i potenziali scalari ϕ_1 e ψ_1 sono dell'ordine di $O(\frac{1}{c^2})$ e $\phi_1 = \psi_1 = \varphi$. Scriviamo ora le equazioni di Einstein $G^i_j = \kappa^2 T^i_j$ nella forma perturbata

$$^{(0)}G^i_j + \delta G^i_j = \kappa^2 (^{(0)}T^i_j + \delta T^i_j) \quad (5.3)$$

dove $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$ e $^{(0)}G^i_j = \kappa^2 ^{(0)}T^i_j$ sono le equazioni di Friedmann del background. Assumiamo che nel modello di universo sia imputata la costante cosmologica Λ e un fluido con pressione trascurabile (costituito da materia oscura fredda (CDM) e barioni) il cui tensore energia-impulso è $T^i_j = \rho u^i u_j$. In questo caso le equazioni di Friedmann diventano $3\mathcal{H}^2 = a^2(8\pi G\bar{\rho} + \Lambda)$ e $\bar{\rho}' = -3\mathcal{H}\bar{\rho}$ dove la derivazione è rispetto η , $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$ e $\bar{\rho}$ è la densità di energia media.

Dato che la metrica (5.1) può essere espressa in una forma invariante sia nell'approssimazione PN che perturbativa relativistica al secondo ordine introduciamo ora un formalismo 'ibrido' che consiste nell'approssimare le equazioni di Einstein fino al corretto ordine in potenze di $1/c$ includendo dei termini correttivi che non sono inclusi nell'approssimazione PN ma sono richiesti per consistenza con una approssimazione perturbativa relativistica al secondo ordine.

Poniamo ora $\psi = \psi_1 + \psi_2$ e $\phi = \phi_1 + \phi_2$ (dove ψ_2 e ϕ_2 contengono tutte le potenze in $1/c$) e inseriamo la metrica (5.1) in (5.3). Le componenti (0-0) e (0- α) delle equazioni di Einstein perturbate sono

$$\begin{aligned} \delta G^0_0 &= -\frac{1}{a^2} [-6\mathcal{H}(\mathcal{H}\phi_1 + \psi'_1) + 2\nabla^2\psi + 3\partial^\nu\psi_1\partial_\nu\psi_1 + 8\psi_1\nabla^2\psi_1 + \mathcal{S}_1] \\ &= \kappa^2 \delta T^0_0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

dove

$$\mathcal{S}_1 \equiv 12\mathcal{H}^2\phi_1^2 + 3\psi_1'^2 + 12\mathcal{H}\phi_1\psi_1' - 12\mathcal{H}\psi_1\psi_1' \quad (5.5)$$

e

$$\delta G^0_\alpha = -\frac{2}{a^2} \left(\mathcal{H}\partial_\alpha\phi_1 + \partial_\alpha\psi_1' + \frac{1}{4}\nabla^2V_\alpha + \mathcal{S}_{2\alpha} \right) = \kappa^2 \delta T^0_\alpha \quad (5.6)$$

dove

$$\mathcal{S}_{2\alpha} \equiv -4\mathcal{H}\phi_1\partial_\alpha\phi_1 - 2\phi_1\partial_\alpha\psi'_1 - \psi'_1\partial_\alpha\phi_1 + 2\psi'_1\partial_\alpha\psi_1 + 2\psi_1\partial_\alpha\psi'_1. \quad (5.7)$$

La componente $(\alpha - \beta)$ delle equazioni di Einstein $\delta G^\alpha_\beta = \kappa^2 \delta T^\alpha_\beta$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2}{3}\nabla^2(\phi - \psi) - \frac{8}{3}\psi_1\nabla^2\psi_1 - \frac{4}{3}\phi_1\nabla^2\phi_1 + \frac{4}{3}\psi_1\nabla^2\phi_1 - \frac{2}{3}\partial^\nu\phi_1\partial_\nu\phi_1 \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{3}\partial_\nu\phi_1\partial^\nu\psi_1 - 2\partial^\nu\psi_1\partial_\nu\psi_1 \right] \delta^\alpha_\beta - 2\partial^\alpha\partial_\beta(\phi - \psi) + 8\psi_1\partial^\alpha\partial_\beta\psi_1 \\ & \quad + 6\partial^\alpha\psi_1\partial_\beta\psi_1 - 2\partial^\alpha\phi_1\partial_\beta\psi_1 + 2\partial^\alpha\phi_1\partial_\beta\phi_1 - 2\partial^\alpha\psi_1\partial_\beta\phi_1 + 4\phi_1\partial^\alpha\partial_\beta\phi_1 \\ & - 4\psi_1\partial^\alpha\partial_\beta\phi_1 + \partial^\alpha(2\mathcal{H}V_\beta + V'_\beta) + \partial_\beta(2\mathcal{H}V^\alpha + V'^\alpha) + h''^{\alpha}_\beta + 2\mathcal{H}h'^\alpha_\beta - \nabla^2 h^\alpha_\beta \\ & = 2a^2\kappa^2 \left(\delta T^\alpha_\beta - \frac{1}{3}\delta T^\nu_\nu \delta^\alpha_\beta \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

mentre la traccia è

$$\begin{aligned} & 2\nabla^2(\phi - \psi) + 6\mathcal{H}\phi'_1 + 6(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\phi_1 + 6\psi''_1 + 12\mathcal{H}\psi'_1 - 2\partial^\nu\phi_1\partial_\nu\phi_1 \\ & - 4\phi_1\nabla^2\phi_1 - 3\partial_\nu\psi_1\partial^\nu\psi_1 - 8\psi_1\nabla^2\psi_1 + 4\psi_1\nabla^2\phi_1 - 2\partial_\nu\phi_1\partial^\nu\psi_1 = a^2\kappa^2\delta T^\nu_\nu \end{aligned} \quad (5.9)$$

Le componenti del tensore energia-impulso perturbato saranno calcolate nella prossima sezione al corretto ordine in potenze di $1/c$. Le equazioni (5.4), (5.8), e (5.9) sono valutate fino a $O(\frac{1}{c^4})$, mentre (5.6) è valutato fino a $O(\frac{1}{c^5})$. I termini S_1 e $S_{2\alpha}$ sono dell'ordine rispettivamente di $O(\frac{1}{c^6})$ e $O(\frac{1}{c^5})$ e provengono dalla nostra approssimazione. Comunque nella nostra trattazione non consideriamo termini di ordine superiore a $O(\frac{1}{c^4})$ pur mantenendo le derivate temporali di h^α_β . Considerando ora la divergenza di (5.6), risolvendo per $\mathcal{H}\phi_1 + \psi'_1$ e sostituendo in (5.4) si ottengono le equazioni

$$\nabla^2(\mathcal{H}\phi_1 + \psi'_1) = -\frac{a^2\kappa^2}{2}\partial^\nu\delta T^0_\nu - \partial^\nu\mathcal{S}_{2\nu}, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\nabla^2\psi &= \nabla^2\nabla^2(\psi_1 + \psi_2) = -\frac{a^2\kappa^2}{2} \left[\nabla^2\delta T^0_0 + 3\mathcal{H}(\partial^\nu\delta T^0_\nu) \right] \\ & - 3\mathcal{H}\partial^\nu\mathcal{S}_{2\nu} - \frac{1}{2}\nabla^2\mathcal{S}_1 - \nabla^2 \left(\frac{3}{2}\partial^\nu\psi_1\partial_\nu\psi_1 + 4\psi_1\nabla^2\psi_1 \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

La parte vettoriale V_α può essere isolata risostituendo $\nabla^2(\mathcal{H}\phi_1 + \psi'_1)$ in (5.6) dove ora rigettiamo il termine $S_{2\alpha}$ dato che è almeno dell'ordine $O(\frac{1}{c^5})$

$$\nabla^2\nabla^2V_\alpha = 2a^2\kappa^2 \left(\partial_\alpha\partial^\nu\delta T^0_\nu - \nabla^2\delta T^0_\alpha \right). \quad (5.12)$$

Infine, applicando l'operatore $\partial^\beta\partial_\alpha$ all'equazione (5.8) e risolvendo per $\phi - \psi$ si trova

$$\nabla^2\nabla^2(\phi - \psi) = -\frac{3}{2}a^2\kappa^2\partial^\beta\partial_\alpha \left(\delta T^\alpha_\beta - \frac{1}{3}\delta T^\nu_\nu \delta^\alpha_\beta \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \partial_\alpha \partial^\beta (\partial_\beta \psi_1 \partial^\alpha \phi_1 - \partial_\beta \phi_1 \partial^\alpha \psi_1 - \partial_\beta \psi_1 \partial^\alpha \psi_1 - \partial_\beta \phi_1 \partial^\alpha \phi_1) \\
& + \nabla^2 \left(\frac{9}{2} \partial_\nu \psi_1 \partial^\nu \psi_1 - 2 \partial_\nu \psi_1 \partial^\nu \phi_1 + \frac{5}{2} \partial_\nu \phi_1 \partial^\nu \phi_1 + 4 \psi_1 \nabla^2 \psi_1 + 2 \phi_1 \nabla^2 \phi_1 - 2 \psi_1 \nabla^2 \phi_1 \right).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Risostituendo quest'ultima espressione in (5.8) insieme con l'espressione per la perturbazione vettoriale V_α ottenuta tramite la divergenza sempre della stessa equazione si trova

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \nabla^2 (h''^{\alpha}_{\beta} + 2\mathcal{H}h'^{\alpha}_{\beta} - \nabla^2 h^{\alpha}_{\beta}) &= 2\kappa^2 a^2 [\nabla^2 (\nabla^2 \mathcal{R}^{\alpha}_{\beta} - \partial^\alpha \partial_\nu \mathcal{R}^{\nu}_{\beta} - \partial_\beta \partial^\nu \mathcal{R}^{\alpha}_{\nu}) \\
&+ \frac{1}{2} (\nabla^2 \partial^\mu \partial_\nu \mathcal{R}^{\nu}_{\mu} \delta^{\alpha}_{\beta} + \partial^\alpha \partial_\beta \partial^\mu \partial_\nu \mathcal{R}^{\nu}_{\mu})]
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Dove abbiamo definito il tensore

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{\alpha}_{\beta} &= \delta T^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{3} \delta T^{\nu}_{\nu} \delta^{\alpha}_{\beta} \\
&- \frac{1}{\kappa^2 a^2} \left(\frac{2}{3} \psi_1 \nabla^2 \phi_1 + \frac{2}{3} \partial_\nu \phi_1 \partial^\nu \psi_1 - \frac{4}{3} \psi_1 \nabla^2 \psi_1 - \frac{2}{3} \phi_1 \nabla^2 \phi_1 - \frac{1}{3} \partial^\nu \phi_1 \partial_\nu \phi_1 - \partial^\nu \psi_1 \partial_\nu \psi_1 \right) \delta^{\alpha}_{\beta} \\
&- \frac{1}{\kappa^2 a^2} (4 \psi_1 \partial^\alpha \partial_\beta \psi_1 + 3 \partial^\alpha \psi_1 \partial_\beta \psi_1 - \partial^\alpha \phi_1 \partial_\beta \psi_1 + \partial^\alpha \psi_1 \partial_\beta \phi_1 - \partial^\alpha \psi_1 \partial_\beta \phi_1 + 2 \phi_1 \partial^\alpha \partial_\beta \phi_1 \\
&- 2 \psi_1 \partial^\alpha \partial_\beta \phi_1).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

5.2 Sorgenti delle perturbazioni della metrica

Ora calcoliamo le componenti del tensore energia-impulso al corretto ordine di potenze in $\frac{1}{c}$ e nel calcolo inseriamo la velocità della luce c . In questo modo le coordinate temporali diventano $dx^0 = cd\eta$ e dall'equazione della metrica (5.2) otteniamo per la quadrivelocità $u^i = dx^i/ds$

$$u^0 \simeq \frac{1}{a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(2\phi_1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right), \tag{5.16}$$

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c} u^0 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^5} \right), \tag{5.17}$$

dove $v^2 = v^\nu v_\nu$ e $v^\alpha = dx^\alpha/d\eta$ sono le coordinate del vettore velocità rispetto al background FRW. Il tensore totale energia-momento per il fluido (supposto polvere) comprendente la costante cosmologica è

$$T^i_k = {}^{(0)}T^i_k + \delta T^i_k = [(\rho_\Lambda + \rho)c^2 + p_b] g_{kj} u^i u^j + p_b \delta^i_k, \tag{5.18}$$

dove ${}^{(0)}T^i_k$ è il tensore energia impulso di background e $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$ è la densità di massa totale. La densità di background $\rho_b = \bar{\rho} + \rho_\Lambda$ include il contributo dovuto alla costante cosmologica $\rho = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$ mentre la pressione di background $p_b = p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$ è dovuto solo a quest'ultima.

Le componenti del tensore energia-impulso perturbato in termini dei coefficienti ϕ_1 e ψ_1 della metrica (5.2) fino al corretto ordine in potenze di $1/c$, sono

$$\delta T^0_0 = T^0_0 - {}^{(0)}T^0_0 = -c^2 \delta \rho - v^2 \rho + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right), \quad (5.19)$$

$$\delta T^\alpha_\alpha = T^\alpha_\alpha - {}^{(0)}T^\alpha_\alpha = v_\alpha \rho c (1 - 2\phi_1 - 2\psi_1) + \frac{v_\alpha}{c} \rho v^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad (5.20)$$

$$\delta T^\alpha_0 = T^\alpha_0 - {}^{(0)}T^\alpha_0 = -v^\alpha \rho c - \frac{v^\alpha}{c} \rho v^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad (5.21)$$

$$\delta T^\alpha_\beta = T^\alpha_\beta - {}^{(0)}T^\alpha_\beta = v^\alpha v_\beta \rho \left(1 - 2\phi_1 - 2\psi_1 + \frac{v^2}{c^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (5.22)$$

Sostituendo δT^α_β in (5.13) si ottiene considerando termini fino a $\mathcal{O}(\frac{1}{c^2})$

$$\nabla^2 \nabla^2 (\phi_1 - \psi_1) = 0 \quad (5.23)$$

e quindi possiamo assumere $\phi_1 = \psi_1 = \phi$. Con questo risultato possiamo semplificare le equazioni (5.9)-(5.13) e quindi le equazioni ibride per le perturbazioni cosmologiche derivanti dal nostro modello sono

$$\nabla^2 (\mathcal{H}\varphi + \varphi') = -\frac{a^2 \kappa^2 c^2}{2} \partial^\nu (\rho v_\nu), \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \psi = & -\frac{a^2 \kappa^2}{2} \left[3\mathcal{H} \partial^\nu (\rho v_\nu (1 - 4\varphi)) - \nabla^2 (c^2 \delta \rho + \rho v^2) \right] \\ & + 3 \frac{\mathcal{H}}{c} \partial^\nu \left(4 \frac{\mathcal{H}}{c} \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{c} \varphi' \partial_\nu \varphi \right) - \nabla^2 \left(\frac{3}{2} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi + 4\varphi \nabla^2 \varphi + 6 \frac{\mathcal{H}^2}{c^2} \varphi^2 + \frac{3}{2c^2} \varphi'^2 \right), \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 V_\alpha = 2a^2 \kappa^2 \left[\partial_\alpha \partial^\nu (c \rho v_\nu) - \nabla^2 (c \rho v_\alpha) \right] \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 (\phi - \psi) = & -\frac{3}{2} a^2 \kappa^2 \partial^\mu \partial_\nu \left(\rho v^\nu v_\mu - \frac{1}{3} \rho v^2 \delta^\nu_\mu \right) + \nabla^2 (5 \partial_\nu \varphi \partial^\nu \varphi + 4\varphi \nabla^2 \varphi) \\ & - 3 \partial_\nu \partial^\mu (\partial_\mu \varphi \partial^\nu \varphi), \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \phi = & -\frac{a^2 \kappa^2}{2} \left[3\mathcal{H} \partial^\nu (\rho v_\nu (1 - 4\varphi)) + 3 \partial^\mu \partial_\nu (\rho v^\nu v_\mu) - \nabla^2 (c^2 \delta \rho + 2\rho v^2) \right] \\ & + \frac{7}{2} \nabla^2 (\partial_\nu \varphi \partial^\nu \varphi) - 3 \partial_\nu \partial^\mu (\partial_\mu \varphi \partial^\nu \varphi) + 3 \frac{\mathcal{H}}{c} \partial^\nu \left(4 \frac{\mathcal{H}}{c} \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{c} \varphi' \partial_\nu \varphi \right) \\ & - \nabla^2 \left(6 \frac{\mathcal{H}^2}{c^2} \varphi^2 + \frac{3}{2c^2} \varphi'^2 \right), \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \left(\frac{1}{c^2} h''^{\alpha}_{\beta} + \frac{2\mathcal{H}}{c^2} h'^{\alpha}_{\beta} - \nabla^2 h^{\alpha}_{\beta} \right) &= 2\kappa^2 a^2 \left[\nabla^2 (\nabla^2 \mathcal{R}^{\alpha}_{\beta} - \partial^{\alpha} \partial_{\nu} \mathcal{R}^{\nu}_{\beta} - \partial_{\beta} \partial^{\nu} \mathcal{R}^{\alpha}_{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\nabla^2 \partial^{\mu} \partial_{\nu} \mathcal{R}^{\nu}_{\mu} \delta^{\alpha}_{\beta} + \partial^{\alpha} \partial_{\beta} \partial^{\mu} \partial_{\nu} \mathcal{R}^{\nu}_{\mu}) \right], \end{aligned} \quad (5.29)$$

dove ora

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\alpha}_{\beta} &= \rho \left(v^{\alpha} v_{\beta} - \frac{1}{3} v^2 \delta^{\alpha}_{\beta} \right) - \frac{2}{\kappa^2 a^2} \left(\partial^{\alpha} \varphi \partial_{\beta} \varphi - \frac{1}{3} \partial^{\nu} \varphi \partial_{\nu} \varphi \delta^{\alpha}_{\beta} \right) \\ &\quad - \frac{4}{\kappa^2 a^2} \left(\varphi \partial^{\alpha} \partial_{\beta} \varphi - \frac{1}{3} \varphi \nabla^2 \varphi \delta^{\alpha}_{\beta} \right), \end{aligned} \quad (5.30)$$

mentre la traccia delle equazioni di Einstein perturbate (5.9) diventa

$$2\nabla^2(\phi - \psi) + 18 \frac{\mathcal{H}}{c^2} \varphi' + 6 \left(2 \frac{\mathcal{H}'}{c^2} + \frac{\mathcal{H}^2}{c^2} \right) \varphi + \frac{6}{c^2} \varphi'' - 7 \partial_{\nu} \varphi \partial^{\nu} \varphi - 8 \varphi \nabla^2 \varphi = \kappa^2 a^2 \rho v^2. \quad (5.31)$$

Dall'equazione $T^i_{i;j} = 0$ si ricavano le equazioni di conservazione dell'energia e del momento della fluidodinamica

$$\begin{aligned} \rho' + 3\mathcal{H}\rho + \partial_{\nu}(\rho v^{\nu}) - \frac{3}{c} \rho \varphi' + \frac{1}{c^2} [(\rho v^2)' + \partial_{\nu}(v^{\nu} \rho v^2) + 4\mathcal{H}\rho v^2] \\ - 2\rho v^{\nu} \partial_{\nu} \varphi - \frac{3}{c} \rho \psi'_2 - \frac{6}{c} \rho \varphi \varphi' = 0, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} (\rho v_{\alpha})' + \partial_{\nu}(\rho v^{\nu} v_{\alpha}) + 4\mathcal{H}v_{\alpha}\rho + \rho c^2 \partial_{\alpha} \varphi - 16\mathcal{H}\rho v_{\alpha} \varphi + \frac{1}{c^2} \partial_{\nu}(\rho v^2 v^{\nu} v_{\alpha}) - 2\rho c^2 \varphi \partial_{\alpha} \varphi \\ - \mathcal{H}c\rho V_{\alpha} + \rho c v_{\nu} \partial_{\alpha} V^{\nu} - 4\partial_{\nu}(\rho v^{\nu} v_{\alpha} \varphi) + \frac{4}{c^2} \mathcal{H}\rho v^2 v_{\alpha} - 4\rho' v_{\alpha} \varphi - 4\rho v'_{\alpha} \varphi \\ - 6\rho v_{\alpha} \varphi' + \frac{1}{c^2} (v_{\alpha} \rho v^2)' - 2\rho v_{\alpha} v^{\nu} \partial_{\nu} \varphi + 2v^2 \rho \partial_{\alpha} \varphi + \rho c^2 \partial_{\alpha} \phi_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Le equazioni ottenute sono il principale risultato della tesi e rappresentano un nuovo set di equazioni che permettono di descrivere l'evoluzione delle perturbazioni della metrica da regimi lineari a fortemente non lineari in termini del potenziale gravitazionale ϕ , della densità di materia ρ e della velocità peculiare v^{α} .

5.3 Limite delle equazioni

Ora mostriamo che il set di equazioni trovate è consistente con le approssimazioni conosciute.

5.3.1 Limite lineare relativistico

Perturbando linearmente le equazioni (5.24), (5.25), e (5.27) rispetto al background si ricava che ϕ e ψ coincidono e quindi otteniamo il potenziale scalare lineare ϕ in termini al primo ordine della densità e della velocità,

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 4a^2 \pi G [\nabla^2 \delta\rho - 3\mathcal{H}\bar{\rho} \partial^\nu v_\nu] , \quad (5.34)$$

$$\nabla^2 (\mathcal{H}\varphi + \varphi') = -4a^2 \pi G \bar{\rho} \partial^\nu v_\nu . \quad (5.35)$$

Linearizzando (5.26), (5.29) e (5.31) si ottiene

$$\varphi'' + 3\mathcal{H}\varphi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\varphi = 0 , \quad (5.36)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 V_\alpha = 0 \quad (5.37)$$

$$h''_{\beta}{}^{\alpha} + 2\mathcal{H}h'_{\beta}{}^{\alpha} - \nabla^2 h^{\alpha}{}_{\beta} = 0 . \quad (5.38)$$

Perturbando inoltre (5.32) e (5.33) si ritrovano le equazioni lineari di energia e momento

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}\delta\rho + \bar{\rho} \partial_\nu v^\nu - 3\bar{\rho} \varphi' = 0 , \quad (5.39)$$

$$v'^{\alpha} + \mathcal{H}v^{\alpha} + \partial^{\alpha}\varphi = 0. \quad (5.40)$$

Quindi otteniamo gli stessi risultati della teoria perturbativa relativistica lineare se consideriamo ϕ come un potenziale scalare lineare.

5.3.2 Limite Newtoniano

Dall'equazione (5.23) e (5.25) fino all'ordine $O(\frac{1}{c^2})$ si ricava

$$\nabla^2 \psi_1 = \nabla^2 \phi_1 = \nabla^2 \varphi = \frac{4\pi G a^2}{c^2} \delta\rho , \quad (5.41)$$

e scrivendo $\phi = \frac{\phi_N}{c^2}$ si ritrovano le equazioni di Poisson $\nabla^2 \phi_N = 4\pi G a^2 \delta\rho$, dove l'indice N in basso indica che il potenziale è Newtoniano. Analogamente all'opportuno ordine di $\frac{1}{c}$ le equazioni della fluidodinamica ricavate (5.32) e (5.33) diventano

$$\rho' + 3\mathcal{H}\rho + \partial_\nu (\rho v^\nu) = 0 , \quad (5.42)$$

$$v'_\alpha + \mathcal{H}v_\alpha + v_\nu \partial^\nu v_\alpha = -\partial_\alpha \varphi_N . \quad (5.43)$$

che sono le equazioni di continuità e di Eulero applicate alla cosmologia Newtoniana nel caso di campi deboli e velocità non relativistiche. Nel limite lineare le equazioni (5.41)-(5.43) diventano

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G a^2 \delta \rho , \quad (5.44)$$

$$\delta \rho' + 3\mathcal{H}\delta \rho + \bar{\rho}\partial_\nu v^\nu = 0 , \quad (5.45)$$

$$v'_\alpha + \mathcal{H}v_\alpha = -\partial_\alpha \varphi_N . \quad (5.46)$$

Come si può osservare le equazioni che caratterizzano la teoria Newtoniana lineare differiscono da quella relativistica. Infatti mentre le equazioni di conservazione del momento (5.40) e (5.46) sono uguali, le equazioni di conservazione dell'energia (5.39) e (5.45) differiscono di un termine $-3\bar{\rho}\phi'$, che non si annulla neanche per soluzioni crescenti della (5.36), dovuto al contributo della costante cosmologica al background FRW. L'equazione (5.34) rappresenta la generalizzazione lineare relativistica dell'equazione di Poisson dato che include il contributo della *densità di momento longitudinale* $\phi_f(\partial_\nu \phi_f = -4a^2\pi G \bar{\rho} v_\nu)$ che è un termine sorgente del potenziale lineare ϕ . Quindi la Gauge di Poisson fornisce la cosmologica relativistica generalizzazione della gravità Newtoniana.

5.3.3 Limite Post-Newtoniano

Consideriamo ora infine il caso delle strutture cosmologiche in regimi altamente non lineari, la cui grandezza è molto maggiore del raggio di Schwarzschild. In generale questo approccio si applica allo studio degli aloni di materia oscura attorno alle galassie o agli ammassi e più in generale attorno a sub-strutture che sono caratterizzate da questi aloni.

Otteniamo ora le equazioni di continuità e momento fino a $O(\frac{1}{c^2})$, l'equazione descrivente l'evoluzione della componente (0-0) della metrica (5.1) fino a $O(\frac{1}{c^4})$ e l'equazione per la perturbazione vettoriale V_α fino a $O(\frac{1}{c^3})$, cioè la loro approssimazione 1PN. Inoltre descriviamo la componente scalare ($\alpha - \beta$) della metrica (5.1) fino a $O(\frac{1}{c^4})$, cioè consideriamo l'approssimazione Post-Newtoniana al secondo ordine (2PN), mentre otteniamo al primo ordine in potenze di $1/c$ l'equazione per la componente tensoriale h^α_β . Le equazioni (5.25)-(5.29) in questo limite diventano

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \psi &= \frac{4\pi G a^2}{c^2} \nabla^2 \delta \rho + \frac{4\pi G a^2}{c^4} [\nabla^2(\rho v^2) - 3\mathcal{H}\partial^\nu(v_\nu \rho)] \\ &\quad - \frac{1}{c^4} \nabla^2 \left(\frac{3}{2} \partial^\nu \varphi_N \partial_\nu \varphi_N + 4\varphi_N \nabla^2 \varphi_N \right) , \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \phi &= \frac{4\pi G a^2}{c^2} \nabla^2 \delta \rho + \frac{4\pi G a^2}{c^4} [2\nabla^2(\rho v^2) - 3\mathcal{H}\partial^\nu(v_\nu \rho) - 3\partial^\mu \partial_\nu(\rho v^\nu v_\mu)] \\ &\quad + \frac{7}{2c^4} \nabla^2(\partial_\nu \varphi_N \partial^\nu \varphi_N) - \frac{3}{c^4} \partial_\nu \partial^\mu (\partial_\mu \varphi_N \partial^\nu \varphi_N) , \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 V_\alpha = \frac{16\pi G a^2}{c^3} [\partial_\alpha \partial^\nu(v_\nu \rho) - \nabla^2(v_\alpha \rho)] , \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \left(\frac{1}{c^2} h''^{\alpha}_{\beta} + \frac{2\mathcal{H}}{c^2} h'^{\alpha}_{\beta} - \nabla^2 h^{\alpha}_{\beta} \right) &= \frac{16\pi G a^2}{c^4} [\nabla^2 (\nabla^2 \mathcal{R}^{\alpha}_{\beta} - \partial^{\alpha} \partial_{\nu} \mathcal{R}^{\nu}_{\beta} - \partial_{\beta} \partial^{\nu} \mathcal{R}^{\alpha}_{\nu}) \\ &+ \frac{1}{2} (\nabla^2 \partial^{\mu} \partial_{\nu} \mathcal{R}^{\nu}_{\mu} \delta^{\alpha}_{\beta} + \partial^{\alpha} \partial_{\beta} \partial^{\mu} \partial_{\nu} \mathcal{R}^{\nu}_{\mu})] , \end{aligned} \quad (5.50)$$

dove il limite Post-Newtoniano del tensore $\mathcal{R}^{\alpha}_{\beta}$ è

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\alpha}_{\beta} &= \rho \left(v^{\alpha} v_{\beta} - \frac{1}{3} v^2 \delta^{\alpha}_{\beta} \right) - \frac{1}{4\pi G a^2} \left(\partial^{\alpha} \varphi_N \partial_{\beta} \varphi_N - \frac{1}{3} \partial^{\nu} \varphi_N \partial_{\nu} \varphi_N \delta^{\alpha}_{\beta} \right) \\ &- \frac{1}{2\pi G a^2} \left(\varphi_N \partial^{\alpha} \partial_{\beta} \varphi_N - \frac{4\pi G a^2}{3} \varphi_N \delta \rho \delta^{\alpha}_{\beta} \right) . \end{aligned} \quad (5.51)$$

Le equazioni di continuità Newtoniana e le equazioni di Eulero in approssimazione PN sono

$$\rho' + 3\mathcal{H}\rho + \partial_{\nu}(\rho v^{\nu}) + \frac{1}{c^2} [(\rho v^2)' + \partial_{\nu}(v^{\nu} \rho v^2) + 4\mathcal{H}\rho v^2 - 2\rho v^{\nu} \partial_{\nu} \varphi_N] = 0 , \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} &\rho (v'_{\alpha} + \mathcal{H}v_{\alpha} + v_{\nu} \partial^{\nu} v_{\alpha} + \partial_{\alpha} \varphi_N) \\ &+ \frac{1}{c^2} \left[-4\rho' v_{\alpha} \varphi_N - 4\rho v'_{\alpha} \varphi_N - 6\rho v_{\alpha} \varphi'_N + (v_{\alpha} \rho v^2)' - 2\rho v_{\alpha} v^{\nu} \partial_{\nu} \varphi_N + 2v^2 \rho \partial_{\alpha} \varphi_N \right. \\ &\quad \left. + \rho \partial_{\alpha} \phi_{PN} - 2\rho \varphi_N \partial_{\alpha} \varphi_N - \mathcal{H}\rho V_{\alpha} + \rho v_{\nu} \partial_{\alpha} V_{\nu} - 16\mathcal{H}\rho v_{\alpha} \varphi_N \right. \\ &\quad \left. - 4\partial_{\nu}(\rho v^{\nu} v_{\alpha} \varphi_N) + \partial_{\nu}(\rho v^2 v^{\nu} v_{\alpha}) + 4\mathcal{H}\rho v^2 v_{\alpha} \right] = 0 , \end{aligned} \quad (5.53)$$

dove ϕ_{PN} è dato dalla parte 1PN di (5.48)

5.4 Modi tensoriali e vettoriali

Si osserva che nel limite lineare l'equazione (5.31) diventa

$$\varphi''_N + 3\mathcal{H}\varphi'_N + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\varphi_N = 0 . \quad (5.54)$$

Questo risultato è estremamente importante dato che implica che il potenziale Newtoniano ϕ_N e il potenziale lineare ϕ evolvono allo stesso modo nel tempo. Questo significa che, partendo dalle stesse condizioni iniziali, cioè dallo stesso potenziale primordiale dato dall'inflazione, i due potenziali lineari $\frac{\phi_N}{c^2}$ e ϕ assumono lo stesso valore in ogni punto dello spazio e del tempo. In altre parole l'equazione (5.54) implica che, in caso di perturbazioni della materia al primo ordine, è sufficiente considerare la gravità Newtoniana su ogni scala a patto che si definisca una densità di perturbazione lineare $\delta\rho_N$ attraverso l'equazione di Poisson applicata al potenziale lineare relativistico ϕ , anche se $\delta\rho_N$ differisce dalla densità relativistica $\delta\rho$ data da (5.34). Questa considerazione ci permette di concludere che considerando soluzioni crescenti di (5.54), nel caso di un fluido irrotazionale e senza pressione, le equazioni (5.49)-(5.51) si applicano a tutte le rilevanti scale cosmologiche anche se la densità ρ , la velocità v^{α} e il potenziale ϕ seguono le usuali equazioni della fluidodinamica Newtoniana. Nelle equazioni

che seguono quindi possiamo omettere l'indice N sulle varie quantità che riscritte sono

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G a^2 \delta \rho , \quad (5.55)$$

$$\rho' + 3\mathcal{H}\rho + \partial_\nu(\rho v^\nu) = 0 , \quad (5.56)$$

$$v'_\alpha + \mathcal{H}v_\alpha + v_\nu \partial^\nu v_\alpha = -\partial_\alpha \varphi . \quad (5.57)$$

Per la componente vettoriale si trova

$$\nabla^2 \nabla^2 V_\alpha = \frac{16\pi G a^2}{c^3} [\partial_\alpha \partial^\nu (v_\nu \rho) - \nabla^2 (v_\alpha \rho)] , \quad (5.58)$$

e per la componente tensoriale

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \left(\frac{1}{c^2} h''^{\alpha}_{\beta} + \frac{2\mathcal{H}}{c^2} h'^{\alpha}_{\beta} - \nabla^2 h^{\alpha}_{\beta} \right) = \\ \frac{16\pi G a^2}{c^4} [\nabla^2 (\nabla^2 \mathcal{R}^{\alpha}_{\beta} - \partial^\alpha \partial_\nu \mathcal{R}^{\nu}_{\beta} - \partial_\beta \partial^\nu \mathcal{R}^{\alpha}_{\nu}) + \frac{1}{2} (\nabla^2 \partial^\mu \partial_\nu \mathcal{R}^{\nu}_{\mu} \delta^{\alpha}_{\beta} + \partial^\alpha \partial_\beta \partial^\mu \partial_\nu \mathcal{R}^{\nu}_{\mu})] \\ = \frac{16\pi G a^2}{c^4} \nabla^2 \nabla^2 \left(\mathcal{P}^{\alpha}_{\nu} \mathcal{P}^{\mu}_{\beta} - \frac{1}{2} \mathcal{P}^{\alpha}_{\beta} \mathcal{P}^{\mu}_{\nu} \right) \mathcal{R}^{\nu}_{\mu} , \end{aligned} \quad (5.59)$$

dove abbiamo definito l'operatore di proiezione $\mathcal{P}^{\alpha}_{\beta}$ come

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - (\nabla^2)^{-1} \partial^\alpha \partial_\beta \quad (5.60)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\alpha}_{\beta} = \rho \left(v^\alpha v_\beta - \frac{1}{3} v^2 \delta^{\alpha}_{\beta} \right) - \frac{1}{4\pi G a^2} \left(\partial^\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - \frac{1}{3} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi \delta^{\alpha}_{\beta} \right) \\ - \frac{1}{2\pi G a^2} \left(\varphi \partial^\alpha \partial_\beta \varphi - \frac{4\pi G a^2}{3} \varphi \delta \rho \delta^{\alpha}_{\beta} \right) = \rho \left(v^\alpha v_\beta - \frac{1}{3} v^2 \delta^{\alpha}_{\beta} \right) \\ + \frac{1}{4\pi G a^2} \left(\partial^\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - \frac{1}{3} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi \delta^{\alpha}_{\beta} \right) - \frac{1}{2\pi G a^2} \left[\partial^\alpha (\varphi \partial_\beta \varphi) - \frac{1}{3} \partial^\nu (\varphi \partial_\nu \varphi) \delta^{\alpha}_{\beta} \right] . \end{aligned} \quad (5.61)$$

Queste equazioni rappresentano il risultato più importante della tesi siccome implicano che in caso di perturbazioni della materia, la descrizione Newtoniana delle sorgenti vettoriali e tensoriali contiene tutti gli effetti perturbativi relativistici del secondo ordine. Considerando l'equazione (5.61) l'ultimo termine dell'ultima riga non contribuisce alla sorgente delle onde gravitazionali dato che si annulla applicando l'operatore di proiezione (5.60). Eliminando questo termine quindi l'effettiva sorgente delle onde gravitazionali è

$$\mathcal{R}^{\alpha}_{\text{eff } \beta} = \rho \left(v^\alpha v_\beta - \frac{1}{3} v^2 \delta^{\alpha}_{\beta} \right) + \frac{1}{4\pi G a^2} \left(\partial^\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - \frac{1}{3} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi \delta^{\alpha}_{\beta} \right) . \quad (5.62)$$

5.5 Momenti di quadrupolo e onde gravitazionali

Vogliamo ora mostrare come la sorgente delle onde gravitazionali $\mathcal{R}_{\text{eff}\beta}^\alpha$ in (5.62) include il contributo del momento di quadrupolo di una distribuzione di materia espresso in coordinate comoventi

$$\mathcal{Q}^\alpha{}_\beta = \int d^3\tilde{x} \rho \left(\tilde{x}^\alpha \tilde{x}_\beta - \frac{1}{3} \tilde{x}^\nu \tilde{x}_\nu \delta^\alpha{}_\beta \right). \quad (5.63)$$

Prima di tutto abbiamo scelto l'origine delle coordinate O all'interno della distribuzione di massa-energia descritto dal tensore δT_j^i . Sia $\vec{x}$ il vettore da O al punto di osservazione P e $\vec{\tilde{x}}$ il vettore da O all'elemento di volume $d^3\tilde{x}$. Su scale molto più piccole del raggio di Hubble la soluzione di (5.59) è

$$h^\alpha{}_\beta(\eta, \mathbf{x}) = \frac{4G}{ac^4} \mathcal{P}^\alpha{}_\nu{}^\mu{}_\beta \int d^3\tilde{x} \frac{(a^3 \mathcal{R}_{\text{eff}\mu}^\nu)_{\text{ret}}}{|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|}, \quad (5.64)$$

dove l'operatore antisimmetrico $\mathcal{P}^\alpha{}_\nu{}^\mu{}_\beta$ è $\mathcal{P}^\alpha{}_\nu{}^\mu{}_\beta \equiv \mathcal{P}^\alpha{}_\nu \mathcal{P}^\mu{}_\beta - \frac{1}{2} \mathcal{P}^\alpha{}_\beta \mathcal{P}^\mu{}_\nu$, con $\mathcal{P}^\alpha{}_\beta$ dato da (5.60) e $\mathcal{R}_{\text{eff}\beta}^\alpha$ dato da (5.62). *ret* significa che la quantità è valutata al punto ritardato dello spazio-tempo $(\eta - |\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|/c, \tilde{\mathbf{x}})$.

Il nostro scopo è quello di valutare $h^\alpha{}_\beta$ nella zona d'onde, molto lontano dalle sorgenti, $|\vec{x}| = r \gg |\vec{\tilde{x}}|$ per cui espandiamo l'integrale in (5.64) in potenze di $\frac{\tilde{x}}{r}$ e consideriamo solamente il primo termine dello sviluppo in multipoli

$$h^\alpha{}_\beta(\eta, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \frac{1}{ar} \mathcal{P}^\alpha{}_\nu{}^\mu{}_\beta \left[a^3 \int d^3\tilde{x} \mathcal{R}_{\text{eff}\mu}^\nu \right]_{\text{ret}}, \quad (5.65)$$

dove per onde che si muovono in direzione radiale $\mathcal{P}^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta - x^\alpha x_\beta / r^2$. L'equazione (5.64) esprime le onde gravitazionali $h^\alpha{}_\beta$ in termini di un integrale sulla sorgente della perturbazione $\mathcal{P}^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta - x^\alpha x_\beta / r^2$, mentre (5.63) esprime l'integrale sulla distribuzione di energia. Convertendo le componenti spaziali T_β^α del tensore energia-impulso in termini delle componenti temporali attraverso le equazioni di conservazione $T_{i;j} = 0$ si dimostra che le onde gravitazionali nella zona d'onde in termini del momento di quadrupolo (5.63) al primo ordine in potenze di $\frac{1}{c}$ e $\frac{\tilde{x}}{r}$ diventano

$$\begin{aligned} h^\alpha{}_\beta(\eta, \mathbf{x}) = & \frac{2G}{ar c^4} \mathcal{P}^\alpha{}_\nu{}^\mu{}_\beta \left\{ a^3 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{Q}^\nu{}_\mu}{\partial \eta^2} + 7\mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{Q}^\nu{}_\mu}{\partial \eta} + (3\mathcal{H}' + 12\mathcal{H}^2) \mathcal{Q}^\nu{}_\mu \right. \right. \\ & - \int d^3\tilde{x} \rho \left(\tilde{x}^\nu \partial_\mu \varphi + \tilde{x}_\mu \partial^\nu \varphi - \frac{2}{3} \tilde{x}^\sigma \partial_\sigma \varphi \delta^\nu{}_\mu \right) \\ & \left. \left. + \frac{1}{2\pi G a^2} \int d^3\tilde{x} \left(\partial^\nu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{3} \partial^\sigma \varphi \partial_\sigma \varphi \delta^\nu{}_\mu \right) \right] \right\}_{\text{ret}}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

La prima linea di (5.66) corrisponde alla conosciuta radiazione di quadrupolo nel limite di un universo piatto e statico, mentre il contributo delle altre linee derivano dal potenziale gravitazionale ϕ che agisce come una sorgente di onde

gravitazionali. Inoltre su scale molto più piccole del raggio di Hubble, gli ultimi due termini della prima linea sono trascurabili in confronto al primo termine della prima linea. Infatti il tempo tipico di caduta libera di una distribuzione di materia è proporzionale a $\rho^{-1/2}$, mentre il tempo di Hubble è proporzionale a $\rho_b^{-1/2}$ (b indica il background). Quindi, su piccole scale, dove il contrasto di densità è molto elevato il tempo tipico del collasso gravitazionale è molto più grande di quello di espansione. Questo ci permette di trascurare i contributi proporzionali a $\mathcal{H}$ in (5.66) e otteniamo quindi per scale molto più piccole del raggio di Hubble in strutture altamente non lineari l'espressione delle onde gravitazionali

$$h^\alpha{}_\beta(\eta, \mathbf{x}) = \frac{2G}{ar c^4} \mathcal{P}^\alpha{}_\nu{}^\mu{}_\beta \left\{ a^3 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{Q}^\nu{}_\mu}{\partial \eta^2} - \int d^3 \tilde{x} \rho \left(\tilde{x}^\nu \partial_\mu \varphi + \tilde{x}_\mu \partial^\nu \varphi - \frac{2}{3} \tilde{x}^\sigma \partial_\sigma \varphi \delta^\nu{}_\mu \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2\pi G a^2} \int d^3 \tilde{x} \left(\partial^\nu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{3} \partial^\sigma \varphi \partial_\sigma \varphi \delta^\nu{}_\mu \right) \right] \right\}_{ret}. \quad (5.67)$$

Capitolo 6

Conclusione

In questo elaborato si sono presentate le principali teorie perturbative utilizzate nell'ambito della cosmologia per studiare le perturbazioni cosmologiche. Sono state presentate le teorie perturbative lineari, sia nella metrica di Minkowsky che in quella di Friedmann, ed è stato presentato nel caso della metrica di Minkowsky l'approccio Post-Newtoniano di cui abbiamo riportato l'applicazione nel caso di una distribuzione generica di materia. Infine nell'ultimo capitolo abbiamo ricavato le equazioni del nostro modello ibrido che unisce l'approccio PN e la teoria perturbativa relativistica al secondo ordine.

Il risultato principale della tesi è rappresentato dal set di equazioni (5.25), (5.26), (5.28)-(5.30) e (5.62) che esprimono le perturbazioni della metrica in termini del campo gravitazionale ϕ , dove la densità di materia ρ e la velocità peculiare v^α soddisfano (5.24), (5.46) e (5.40). Queste equazioni, quando applicate in un sistema cosmologico caratterizzato da un fluido irrotazionale e senza pressione e una costante cosmologica, forniscono un'unificata descrizione delle perturbazioni cosmologiche durante la loro evoluzione da regimi lineari ad altamente non lineari. Su grandi scale queste equazioni si riducono al primo e secondo ordine perturbativo sviluppato nella gauge di Poisson mentre su piccole scale, dove l'approccio perturbativo non è più applicabile, descrivono l'evoluzione delle perturbazioni cosmologiche tramite una approssimazione PN. Abbiamo calcolato la componente (0-0) e $(0-\alpha)$ della metrica (5.1) fino all'approssimazione 1PN, la componente scalare $(\alpha-\beta)$ fino all'ordine 2PN, mentre la componente tensoriale $(\alpha-\beta)$ al primo ordine in potenze di $1/c$.

Abbiamo derivato anche la generalizzazione del sistema di equazioni della fluidodinamica Newtoniana che considera tutti gli effetti fino all'ordine $O(\frac{1}{c^2})$. E' da notare il fatto che le sorgenti dei modi vettoriali e tensoriali sono di origine Newtoniana su tutte le scale, cioè coinvolgono solo termini che soddisfano un sistema Newtoniano Euleriano. Questo risultato è estremamente importante in vista di una possibile implementazione numerica del nostro set di equazioni.

Infine facciamo notare che il nostro set di equazioni ha molte applicazioni cosmologiche come ad esempio lo studio delle onde gravitazionali prodotte da piccole strutture e lo studio di sub-strutture con aloni di materia oscura. Inoltre il nostro set di equazioni può essere utilizzato per lo studio degli effetti del Gravitational Lensing e le anisotropie di polarizzazione e temperatura secondarie della CMB generate dalle piccole strutture.

Bibliografia

- [1] D. S. Gorbunov and V. A. Rubakov, *Introduction to the Theory of the Early Universe - Hot Big Bang Theory* (World Scientific, Singapore, 2011).
- [2] C. Carbone and S. Matarrese, Phys. Rev. D **71**, 043508 (2005).
- [3] J. B. Hartle, *Gravity, an introduction to Einstein's General Relativity* (Addison Wesley, San Francisco, 2003).
- [4] S. Matarrese, S. Mollerach, and M. Bruni, Phys. Rev. D **58**, 043504 (1998).
- [5] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology* (Wiley, New York, 1973).
- [6] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).