

Università degli studi di Padova

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali

Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

**Ottimizzazione delle prestazioni dinamiche di
meccanismi articolati mediante elementi elastici**

RELATORE: Giovanni BOSCHETTI

LAUREANDO: Pris – Parfait KEUMEJIO

1081223 - IMC

ANNO ACCADEMICO 2015/2016

Sommario

Questo documento porta sull'introduzione di elementi elastici nei meccanismi articolati nell'obiettivo di ottimizzare il loro funzionamento abbassando al minimo la coppia richiesta al motore e di conseguenza un minor consumo di corrente. La principale ragione per spingere la ricerca in questa direzione è il fatto che nei meccanismi rotanti ripetitivi in cui il carico è soggetto alla stessa prestazione dinamica per tutto il tempo di lavoro, è possibile, introdurre in modo opportuno una molla o un qualsiasi elemento elastico che generi sull'albero motore una coppia tale da poter abbassare la coppia totale richiesta al motore per fare lo stesso movimento rispetto al caso senza molla.

La problematica nell'introduzione di questi elementi elastici è di determinare quello idoneo (lunghezza a vuoto e rigidità) e la sua posizione ottimale di attacco per garantire la minima coppia richiesta al motore per ogni tipo di legge di moto.

In questo documento sono proposti due soluzioni per risolvere la problematica sopra presentata. L'innovazione rispetto alle soluzioni incontrate in letteratura è il fatto di non trascurare l'energia cinetica del meccanismo. Queste due soluzioni sono poi applicate teoricamente su due meccanismi ad un grado di libertà, uno ad inerzia costante e l'altro ad inerzia variabile. In fine, le soluzioni sono state applicate in laboratorio su un caso reale di un meccanismo costituito da un motore brushless, un'asta, una molla e un sistema di controllo Allen-Bradley.

Ringraziamenti

Desidero ricordare tutti coloro che mi hanno aiutato nella stesura della tesi con suggerimenti, critiche ed osservazioni: a loro va la mia gratitudine, anche se a me spetta la responsabilità per ogni errore contenuto in questa tesi.

Ringrazio anzitutto il professore Giovanni Boschetti, relatore: senza il suo supporto e la sua guida sapiente questa tesi non esisterebbe.

Proseguo con il personale tecnico di supporto per i laboratori che hanno preparato il banco di prova facilitando il mio lavoro nella fase sperimentale.

Un ringraziamento particolare va ai colleghi ed agli amici che mi hanno incoraggiato o che hanno speso parte del proprio tempo per leggere e discutere con me le bozze del lavoro.

Vorrei infine ringraziare le persone a me più care: i miei amici, la mia famiglia ed in particolare la mia moglie Gaëlle, i miei figli Junior e Roger, a chi questo lavoro è dedicato.

Indice

INTRODUZIONE.....	1
CAPITOLO 1: LEGGI DI MOTO	3
1.1. Generalità	3
1.2. Leggi di moto particolari.....	4
1.2.1. Legge ad accelerazione costante a tratti.....	4
1.2.2. Legge trapezoidale in accelerazione.....	5
1.2.3. Legge polinomiale di terzo grado	7
1.2.4. Legge polinomiale di quinto grado.....	8
1.2.5. Legge armonica	9
1.2.6. Legge cicloidale.....	10
1.3. Confronto tra leggi di moto.....	11
CAPITOLO 2: MECCANISMO (motore – manovella – molla)	13
2.1 Studio del meccanismo posto sul piano orizzontale	13
2.1.1 Modello dinamico del meccanismo senza molla.....	14
2.1.2 Modello dinamico del meccanismo con la molla	15
2.2 Studio energetico	16
2.2.1 Energia potenziale elastica	16
2.2.2 Energia cinetica	17
2.2.3 Energia meccanica.....	17
2.3 Localizzazione del punto A	17
2.3.1 Coppia motrice al variare di θ, r, α, k	18
2.3.2 Energia meccanica al variare di θ, r, α, k	26
2.4 Metodi di ottimizzazione per il punto A(r, α) e la molla(k, l_0).....	30
2.4.1 Metodo 1: minimizzazione diretta della coppia massima.....	31
2.4.2 Primo approccio di ottimizzazione	32
2.4.3 Secondo approccio di ottimizzazione	33
2.4.4 Metodo 2: minimizzazione della varianza dell'energia meccanica	37
2.4.5 Confronto dei risultati con altre leggi di moto	39
2.4.6 Analisi dei risultati	43
2.4.7 Miglioramento del metodo di minimizzare la varianza dell'energia meccanica.....	43

CAPITOLO 3: MECCANISMO (motore-quadrilatero articolato-molla).....	47
3.1 Studio del meccanismo posto sul piano orizzontale	47
3.1.1 Modello dinamico del meccanismo senza molla.....	48
3.1.2 Analisi cinematica di posizione.....	49
3.1.3 Analisi cinematica di velocità	52
3.1.4 Energia cinetica del meccanismo	52
3.1.5 Modello dinamico del meccanismo con una molla.....	55
3.2 Ottimizzazione della dinamica del meccanismo posto sul piano orizzontale.....	56
3.2.1 Metodo 1: Minimizzazione diretta della coppia massima.....	56
3.2.2 Metodo 2: Minimizzazione della varianza dell'energia meccanica.....	58
 CAPITOLO 4: IMPLEMENTAZIONE MATLAB.....	 61
4.1 Meccanismo (motore-manovella-molla).....	61
4.1.1 Leggi di moto	62
4.1.2 Ottimizzazione	62
4.2 Miglioramento del metodo di minimizzazione della varianza dell'energia meccanica	65
4.3 Meccanismo (motore-quadrilatero articolato-molla).....	66
 CAPITOLO 5: ANALISI SPERIMENTALE	 67
5.1 Setup sperimentale	67
5.1.1 Determinazione della costante elastica	68
5.2 Impianto Allen – Bradley	70
5.3 Software di sviluppo RSLOGIX5000	72
5.3.1 Programma di controllo.....	72
5.3.2 Creazione Camme elettroniche	74
5.3.3 Gestione delle uscite	77
5.4 Risultati sperimentali.....	79
5.4.1 Il sistema di controllo	79
5.4.2 Coppia di attrito.....	80
5.4.3 Confronto tra modello reale e teorico	81
5.4.4 Confronto tra le coppie motrici.....	82
 CONCLUSIONI	 93
 BIBLIOGRAFIA	 95
 APPENDICI	 97
A Codice matlab per il quadrilatero articolato.....	97
B Codice per la creazione di una camma cicloidale.....	100

Elenco delle figure

Figura 1: Diagramma descrittivo della soluzione proposta.....	2
Figura 2: Legge ad accelerazione costante.....	5
Figura 3: Legge trapezoidale in accelerazione.....	6
Figura 4: Legge polinomiale di terzo grado	7
Figura 5: Legge polinomiale di quinto grado	8
Figura 6: Legge armonica	9
Figura 7: Legge cicloidale.....	10
Figura 8: Meccanismo (motore-manovella-molla).....	13
Figura 9: Rappresentazione del modello nel piano x y	14
Figura 10: Modello del sistema senza molla	14
Figura 11: Modello del sistema in presenza della molla	15
Figura 12: Legge cicloidale, coppia motrice senza molla, energia cinetica	18
Figura 13: Confronto di coppia con r, k crescenti e $\alpha = 165^\circ$	19
Figura 14: Confronto di coppia con r, k crescenti e $\alpha = 180^\circ$	20
Figura 15: Confronto di coppia con r, k crescenti e $\alpha = 195^\circ$	20
Figura 16: Confronto di coppia con r, k decrescenti e $\alpha = 165^\circ$	22
Figura 17: Confronto di coppia con r, k decrescenti e $\alpha = 180^\circ$	22
Figura 18: Confronto di coppia con r, k decrescenti e $\alpha = 195^\circ$	23
Figura 19: Variazione dell'energia potenziale elastica	24
Figura 20: Intervalli di posizionamento del punto A	25
Figura 21: Energia meccanica con $\alpha = 165^\circ$	26
Figura 22: Energia meccanica con $\alpha = 180^\circ$	27
Figura 23: Energia meccanica con $\alpha = 195^\circ$	27
Figura 24: Varianza dell'energia meccanica	28
Figura 25: Varianza minima al variare del raggio r.....	29
Figura 26: Minima varianza al variare della rigidezza k.....	30
Figura 27: Condizioni iniziali ($r=0.05\text{m}$; $\alpha = 180^\circ$; $k=20\text{N/m}$).....	32
Figura 28: Condizioni iniziali ($r=0.11\text{m}$; $\alpha = 90^\circ$; $k=3\text{N/m}$).....	33
Figura 29: Condizioni iniziali ($\alpha = 180^\circ$; $k=20\text{N/m}$)	34
Figura 30: Condizioni iniziali ($\alpha = 90^\circ$; $k=3\text{N/m}$)	34
Figura 31: Minimizzazione diretta della coppia di picco e coppia rms.....	36
Figura 32: Coppia di picco mediante minimizzazione della varianza dell'energia meccanica	38
Figura 33: Minimizzazione coppia massima con legge polinomiale 5° grado	40
Figura 34: Minimizzazione varEm con legge polinomiale 5° grado.....	41
Figura 35: Minimizzazione coppia di picco con legge trapezoidale in accelerazione	42
Figura 36: Minimizzazione VarEm con legge trapezoidale in accelerazione	42
Figura 37: Minimizzazione coppia massima e rms con l_0 variabile.....	44
Figura 38: Minimizzazione coppia di picco e rms con l_0 e OM variabili.....	45
Figura 39: Energia meccanica nel caso ottimo	46
Figura 40: Rappresentazione del quadrilatero nel piano xy.....	47
Figura 41: Rappresentazione del Modello dinamico del meccanismo senza molla.....	48
Fig.48 Figura 42: Configurazione 1 per il quadrilatero articolato	51
Figura 43: Configurazione 2 per il quadrilatero.....	51
Figura 44: Inerzia totale e coppia motrice nella configurazione 1	54
Figura 45: Inerzia totale e coppia motrice nella configurazione 2	55
Figura 46: Minimizzazione diretta della coppia di picco con l_0 fissato	57

Figura 47: Minimizzazione della coppia di picco e rms mediante varEm.....	59
Figura 48: Minimizzazione della coppia di picco e rms mediante ricerca globale	60
Figura 49: Organigramma del codice matlab	61
Figura 50: Asta in alluminio con il gancio	67
Figura 51: Posizione dei ganci per il fissaggio dell'elastico	69
Figura 52: Impianto Allen-Bradley.....	70
Figura 53: Motore brushless MP-series.....	71
Figura 54: MSO e MSF	73
Figura 55: MAH.....	73
Figura 56: Diagramma logico per la creazione di una camma	74
Figura 57: Sincronizzazione master-slave.....	75
Figura 58: Cam editor per camma cicloidale.....	76
Figura 59: Pannello di controllo dell'asse 1.....	77
Figura 60: Finestra di visualizzazione dei segnali di uscita (legge cicloidale).....	78
Figura 61: Ripple di coppia a velocità costante	81
Figura 62: Confronto tra modello teorico e reale del sistema senza molla	82
Figura 63: Coppia teorica col legge cicloidale e algoritmo fminimax.....	83
Figura 64: Coppia teorica col legge polinomiale 5° e algoritmo fminimax	84
Figura 65: Coppia teorica col legge ad accelerazione trapezoidale e algoritmo fminimax.....	84
Figura 66: Coppia reale con legge cicloidale e algoritmo fminimax.....	85
Figura 67: Coppia reale con legge polinomiale 5° e algoritmo fminimax.....	86
Figura 68: Coppia reale con legge ad accelerazione trapezoidale e algoritmo fminimax.....	86
Figura 69: Coppia teorica col legge cicloidale con fmincon	87
Figura 70: Coppia teorica con legge polinomiale 5° e algoritmo fmincon	88
Figura 71: Coppia teorica col legge trapezoidale in accelerazione e algoritmo fmincon.....	88
Figura 72: Coppia reale con legge cicloidale e algoritmo fmincon.....	89
Figura 73: Coppia reale col legge polinomiale di 5° e algoritmo fmincon.....	90
Figura 74: Coppia reale col legge trapezoidale in accelerazione e algoritmo fmincon.....	90

Elenco delle tabelle

Tabella 1: Parametri delle leggi di moto	11
Tabella 2: Aumento di r e k rispetto a r_0 e K_0	19
Tabella 3: Diminuzione di r e k rispetto a r_0 e K_0	21
Tabella 4: Variazioni r da 0.1m a 0.135m Tabella 5: Variazioni k da 64N/m a 82N/m	35
Tabella 6: Variazioni r da 0.295m a 0.33m	36
Tabella 7: Variazioni r da 0.11m a 0.135m Tabella 8: Variazioni k da 50N/m a 57N/m	38
Tabella 9: Risultati ottenuti con la legge cicloidale	39
Tabella 10: Risultati ottenuti con la legge polinomiale di quinto grado	40
Tabella 11: Risultati ottenuti con la legge trapezoidale in accelerazione	41
Tabella 12: Risultati del miglioramento con l_0 variabile	44
Tabella 13: Risultati del miglioramento con l_0 e OM variabili	45
Tabella 14: Variazioni r da 0.1m a 0.2m Tabella 15: Variazioni k da 755N/m a 765N/m	57
Tabella 16: Variazioni r da 0.1m a 0.2m Tabella 17: Variazioni k da 470N/m a 480N/m	58
Tabella 18: Risultati del miglioramento con l_0 variabile	59
Tabella 19: Dimensioni dell'asta	67
Tabella 20: Calcolo della rigidezza dell'elastico	69
Tabella 21: Datasheet dei motori a disposizione	71
Tabella 22: Caratteristiche del motore	79
Tabella 23: Parametri di taratura degli anelli di controllo	80
Tabella 24: Abbassamento coppia teorico a algoritmo fminimax	85
Tabella 25: Abbassamento di coppia reale e algoritmo fminimax	87
Tabella 26: Abbassamento coppia teorico a algoritmo fmincon	89
Tabella 27: Abbassamento di coppia reale e algoritmo fmincon	91

Introduzione

Nella letteratura scientifica del settore dei meccanismi articolati e particolarmente in robotica, tanti metodi sono stati studiati per ridurre gli sforzi richiesti al motore. Alcuni di quei metodi sono basati sull'utilizzo di un contrappeso per compensare la gravità nel meccanismo, ma subito si pone il problema dell'aggiunta di massa (contrappeso) che rende il meccanismo pesante e poco efficiente in termini di spazio occupato; altri metodi sono orientati sull'introduzione di elementi elastici per compensare in modo statico la gravità sfruttando l'energia potenziale dell'elemento elastico. Anche questi metodi trovano dei limiti visto che non prendono in considerazione l'energia cinetica del meccanismo. Di più, per compensare la gravità bisogna essere in presenza di un meccanismo nel quale la forza peso produce un contributo considerevole nella dinamica. Questo significa che per i meccanismi posti nel piano orizzontale questi metodi non si possono più applicare.

Come documenti recenti ricapitolati nel giornale scientifico dell'azienda di pubblicazione ELSEVIER nella rubrica Mechanism and Machine Theory, si possono citare i seguenti che sono riferimenti bibliografici:

[1] Sushant Veer e S. Sujatha, hanno studiato dei metodi di compensazione statica della forza di gravità introducendo delle molle nei meccanismi articolati per ridurre gli sforzi richiesti agli attuatori. La loro innovazione è sul fatto che le molle vengono attaccate tra un membro e il successivo per rendere il meccanismo meno ingombrante.

[2] Abhishek Agrawal e Sunil K. Agrawal, hanno messo in evidenza l'uso delle molle a lunghezza a vuoto non nulla nei sistemi di riabilitazione per assistenza alle persone, con un meccanismo a due o tre membri.

In questo documento vengono studiati poi testati in laboratorio due semplici metodi di ottimizzazione che permettono di ridurre le coppie richieste al motore in un meccanismo articolato posto nel piano orizzontale con l'introduzione di una o più molle. L'innovazione è il fatto che nello studio si prende in considerazione anche la velocità del carico rotante imposta dalla legge di moto, quello che permette di non trascurare l'energia cinetica del meccanismo. Il primo metodo è basato sulla minimizzazione diretta della coppia massima richiesta al motore. Infatti, se il sistema in studio ha un modello dinamico accurato che descrive la coppia richiesta all'attuatore, allora con questo metodo, si minimizza direttamente la coppia di picco del sistema con la molla. Il secondo metodo si basa sulla minimizzazione della varianza dell'energia meccanica del meccanismo e la sua particolarità rispetto ai metodi incontrati in letteratura è il fatto che la compensazione si fa in modo dinamico sfruttando l'energia potenziale elastica e cinetica del meccanismo. Il principio di funzionamento di questo metodo è il seguente: si sfrutta l'energia potenziale elastica della molla introdotta per compensare il contributo di energia cinetica così per avere una energia meccanica costante supponendo trascurabili le

componenti dissipativi. Nei due metodi, con l'introduzione della molla, il sistema si trova in condizioni migliori visto che per effettuare lo stesso movimento è richiesta una coppia motrice inferiore rispetto a quella del meccanismo senza molla; nel caso migliore si può ridurre la dimensione del motore per abbassare anche il costo del meccanismo.

Nel primo capitolo viene presentata una breve teoria sulle leggi di moto e la loro importanza in questo documento. Nel secondo capitolo vengono applicati i due metodi citati sopra nel caso di un meccanismo ad un grado di libertà ad inerzia costante (motore-manovella-molla) con la manovella e molla in moto nel piano orizzontale. Nel terzo capitolo si applicano i due metodi di minimizzazione su un meccanismo ad un grado di libertà ad inerzia variabile (motore-quadrilatero articolato-molla) posto nel piano orizzontale. Il quarto capitolo è dedicato al codice matlab implementato per realizzare le simulazioni. L'ultimo capitolo è quello della sperimentazione in laboratorio del caso motore-manovella-molla.

Il seguente diagramma permette di capire la logica utilizzata per arrivare agli obiettivi fissati.

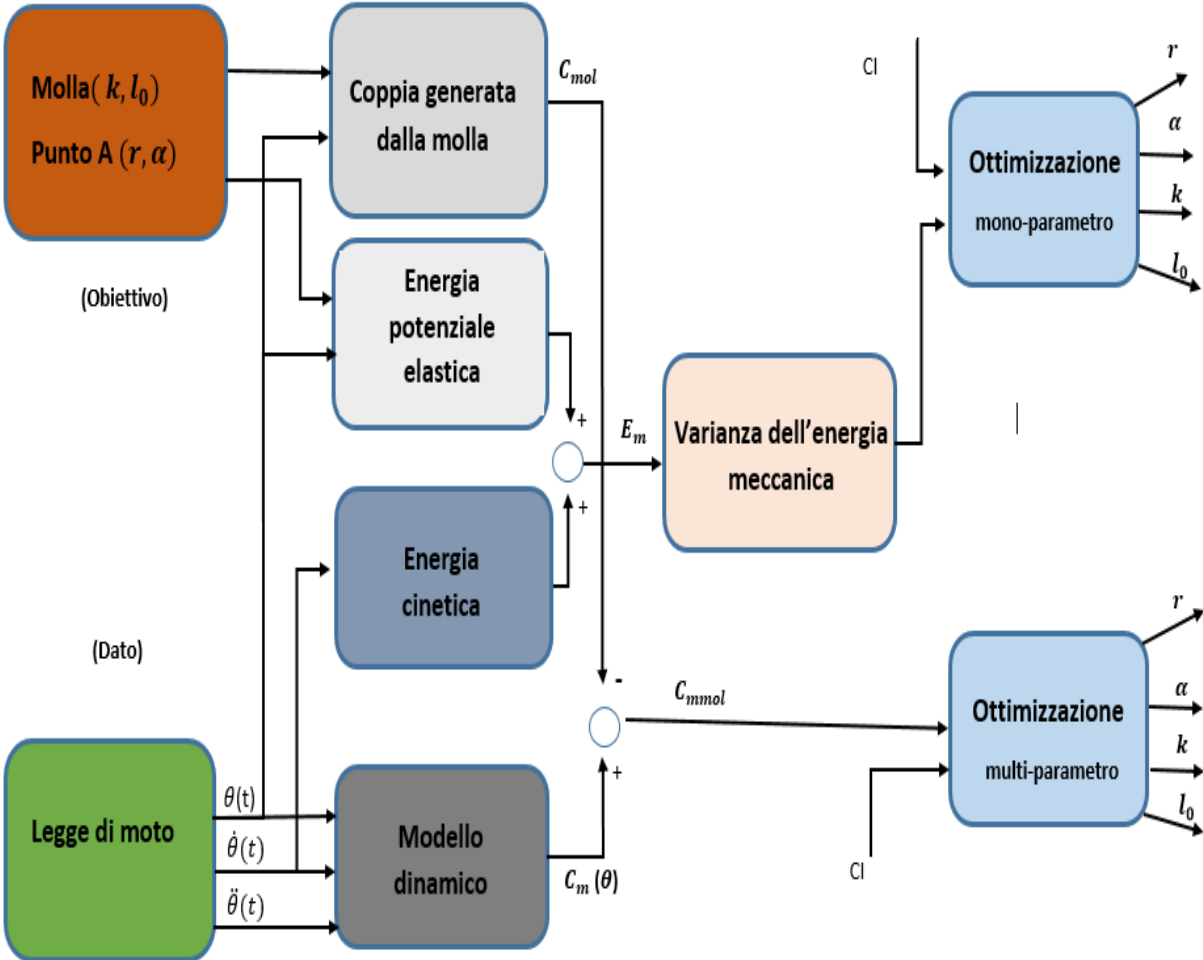


Figura 1: Diagramma descrittivo della soluzione proposta

CAPITOLO 1: LEGGI DI MOTO

In questo capitolo viene presentata una breve teoria sulle leggi di moto, poi sono studiate e confrontate tra di loro alcune leggi particolari tramite i coefficienti di velocità, accelerazione e livello di dolcezza.

1.1. Generalità

Una legge di moto è una relazione che legga il moto di asse ad una variabile indipendente che può essere lo spostamento di un altro asse, oppure il tempo. In questo documento vengono presentate leggi di moto rispetto al tempo. Una legge di moto è in fatti costituito da un insieme di equazioni che permettono descrivere la cinematica di un sistema in termini di posizione, velocità, accelerazione e eventualmente JERK (derivata dell'accelerazione). La legge di moto definisce allora il riferimento che il motore deve seguire per posizionare il carico.

Il requisito fondamentale che una legge di moto deve soddisfare è la continuità della posizione e della velocità. È spesso gradita anche la continuità di accelerazione. Infatti una discontinuità in posizione e/o velocità non sono fisicamente realizzabili perché implicherebbero accelerazioni infinite e quindi coppie motrici infinite per vincere le azioni d'inerzia e l'attrito. La continuità delle accelerazioni fa sì che le azioni d'inerzia varino più dolcemente rendendo meno brusco il movimento con sensibile riduzione del pericolo di insorgenza di vibrazioni.

Per poter confrontare tra di loro due leggi di moto che permettono di realizzare uno spostamento h nel tempo T si ricorre ad alcuni parametri adimensionali che non dipendono da h e T ma soltanto dalla "forma" della legge. In pratica questi parametri permettono di verificare se i valori di picco e quelli RMS (root mean square) di velocità ed accelerazione superino di molto e di poco i valori medi richiesti.

Osservazione:

Data una quantità X , variabile nel tempo $t \in [0, T]$, il suo valore RMS oppure media quadratica si definisce come segue:

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X(t)^2 dt} \quad \text{caso continuo}; \quad X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_0^T X(i)^2 \Delta t} \quad \text{caso discreto}$$

Sia V_{max} e A_{max} i valori massimi di velocità ed accelerazione, V_{rms} e A_{rms} i valori RMS di velocità ed accelerazione. Si definiscono:

$$\text{Coefficiente di velocità: } C_v = \frac{V_{max}}{\frac{h}{T}} \quad C_{vrms} = \frac{V_{rms}}{\frac{h}{T}} \quad (1.1)$$

$$\text{Coefficiente di accelerazione: } C_a = \frac{A_{max}}{\frac{h}{T^2}} \quad C_{arms} = \frac{A_{rms}}{\frac{h}{T^2}}$$

La scelta della legge di moto adatta al sistema deve essere fatta ragionando sulle caratteristiche intrinseche del sistema stesso e sul comportamento che si desidera da esso. Non esiste una legge di moto che va bene in tutti i casi. Tuttavia i seguenti criteri possono essere seguiti nella scelta:

Limitare i coefficienti di velocità ed accelerazione: questo permette di non sovraccaricare gli attuatori ed gli organi meccanici in movimento. Si presta particolare attenzione all'accelerazione RMS perché da essa dipende la coppia nominale e quindi la taglia del motore.

Scegliere leggi di moto che siano continue almeno fino all'accelerazione.

1.2. Leggi di moto particolari

In questo paragrafo vengono studiate alcuni tipi di leggi di moto presentando i loro pregi e difetti.

I parametri comuni per tutte le leggi di moto presentate in seguito sono: il tempo di azionamento che è stato fissato a $T = 0.5$ secondo, l'alzata oppure distanza tra il punto iniziale e il punto finale, è stata fissata a $\theta = 2\pi$ radianti (moto in un giro). I grafici delle leggi di moto sono stati realizzati mediante il programma Matlab.

1.2.1. Legge ad accelerazione costante a tratti

La legge ad accelerazione costante a tratti ancora chiamata legge trapezoidale in velocità è costituita da una fase di accelerazione, una fase a velocità costante corrispondente alla velocità massima e l'ultima fase è la decelerazione. Nel caso generico, la fase di accelerazione, decelerazione e velocità costante hanno dei tempi indipendenti ma in questo paragrafo si è scelto il caso di una legge simmetrica visto che questa legge viene applicata in un meccanismo nel quale il carico inerziale è prevalente sulle forze resistenti. Per fare una movimentazione da una posizione iniziale ($t=0, \theta = 0$) a una posizione finale ($t=T, \theta = 2\pi$) si definisce un parametro $\lambda = tempo\ acc/T$ che permette di regolare il tempo di accelerazione, decelerazione e velocità costante. Il parametro λ è legato ai coefficienti di valutazione della legge dalle seguenti relazioni:

$$C_v = \frac{1}{1-\lambda} \quad ; \quad C_a = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \quad (1.2)$$

Partendo dall'accelerazione, la legge trapezoidale in velocità si definisce come segue:

$$\ddot{\theta}(t) = \begin{cases} A_{max} & 0 \leq t \leq \lambda T \\ 0 & \lambda T \leq t \leq T - \lambda T \\ -A_{max} & T - \lambda T \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.3)$$

La velocità e la posizione si ricavano dall'accelerazione con le seguenti relazioni:

$$\text{Velocità: } \dot{\theta}(t) = \int_{t_0}^t \ddot{\theta}(\tau) d\tau \quad ; \quad \text{posizione: } \theta(t) = \int_{t_0}^t \dot{\theta}(\tau) d\tau \quad (1.4)$$

La seguente figura presenta la rappresentazione grafica della legge ad accelerazione costante con $\lambda = 1/2$ e $A_{max} = 32\pi \text{ rad/s}^2$. Questo valore è stato scelto per poter minimizzare l'accelerazione massima. In questo caso, la velocità è triangolare.

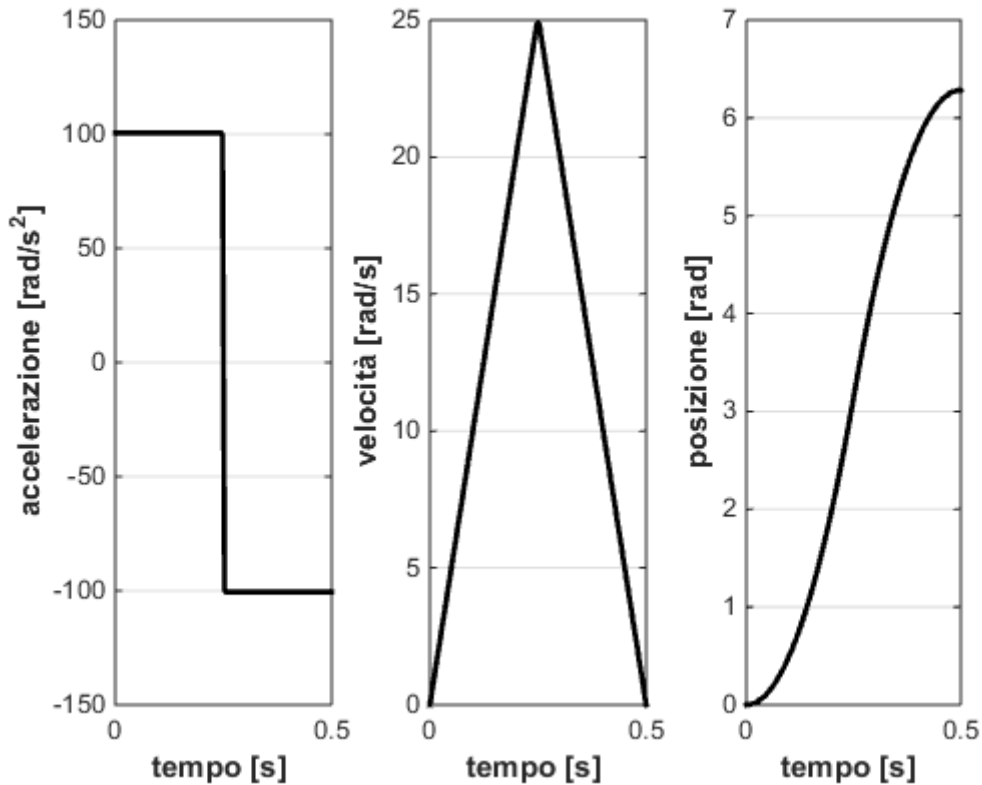


Figura 2: Legge ad accelerazione costante

Questa legge presenta delle discontinuità in accelerazione che generano discontinuità in coppia. Non è adatta per applicazioni dove è richiesta dolcezza nella movimentazione.

1.2.2. Legge trapezoidale in accelerazione

La legge trapezoidale in accelerazione deriva dalla legge ad accelerazione costante a tratti trasformando la fase di accelerazione in tre fasi: accelerazione crescente, accelerazione costante al valore massimo, accelerazione decrescente e vice-versa per la fase di decelerazione.

Per costruire questa legge si è definito un parametro $\gamma = \text{tempo acc crescente} / \lambda T$ per regolare le fasi di accelerazione crescente, accelerazione costante e accelerazione decrescente. Questo stesso parametro fornisce il legame tra il valore dell'accelerazione massima di questa legge e l'accelerazione massima della legge ad accelerazione costante. Utilizzando il fatto che l'area del rettangolo di base λT e altezza A_{max} (accelerazione massima della legge ad accelerazione costante) deve essere uguale a l'area del trapezio con grande base λT e altezza A_m (accelerazione massima della legge trapezoidale in accelerazione) si ottiene che:

$$A_m = \frac{A_{max}}{1-\gamma}.$$

Partendo dall'accelerazione, la legge trapezoidale in accelerazione si definisce come segue:

$$\ddot{\theta}(t) = \begin{cases} \frac{A_m}{\gamma\lambda T} t & 0 \leq t \leq \gamma\lambda T \\ A_m & \gamma\lambda T \leq t \leq (1-\gamma)\lambda T \\ -\frac{A_m}{\gamma\lambda T} (t - \lambda T) & (1-\gamma)\lambda T \leq t \leq \lambda T \\ -\frac{A_m}{\gamma\lambda T} (t - \lambda T) & \lambda T \leq t \leq (1+\gamma)\lambda T \\ -A_m & (1+\gamma)\lambda T \leq t \leq (1-\gamma)\lambda T \\ \frac{A_m}{\gamma\lambda T} (t - T) & (1-\gamma)\lambda T \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.5)$$

La velocità e la posizione si ricavano dall'accelerazione usando le relazioni (1.4)

Il seguente grafico presenta la legge trapezoidale in accelerazione con $\gamma = 1/4$. La scelta di $\gamma = 1/4$ permette di avere accelerazione non troppo alte e di conseguenza anche coppie non troppo alte.

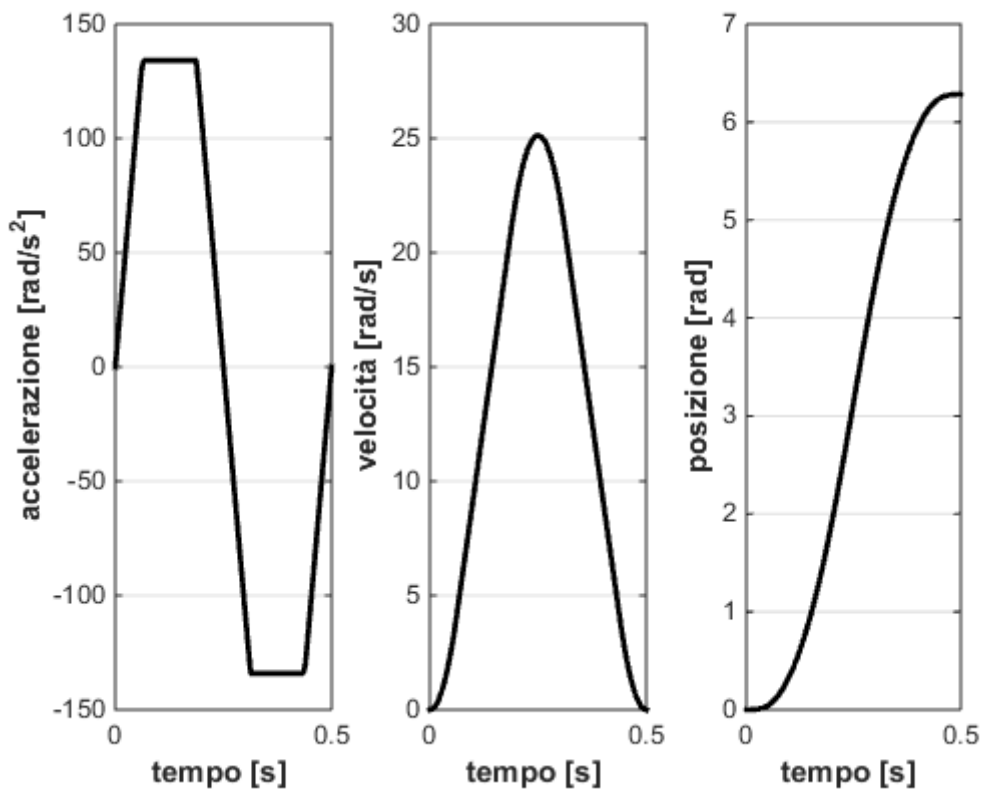


Figura 3: Legge trapezoidale in accelerazione

Fig.3 Legge trapezoidale in accelerazione

Questa legge, rispetto a quella precedente ha un'accelerazione continua. La discontinuità è spostata al JERK.

1.2.3. Legge polinomiale di terzo grado

La legge polinomiale di terzo grado è definita in posizione come segue:

$\theta(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3$; $t_0 \leq t \leq T$. Dove t_0 è l'istante iniziale che in seguito sarà considerato nullo.

Questa legge può essere ottenuta dalla sua forma normalizzata $S(\tau)$ usando la seguente relazione:

$\theta(t) = \theta_0 + hS(\tau)$ Dove $\theta_0 = 0$ è la posizione iniziale, $h = 2\pi$ è l'alzata, $\tau = \frac{t-t_0}{T}$ è il tempo normalizzato, $0 \leq \tau \leq 1$.

La legge normalizzata è indipendente da T e h .

Usando le seguenti condizioni al contorno sulla posizione e la velocità: $\theta(0) = 0$, $\theta(T) = 2\pi$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\theta}(T) = 0$ si ottiene che :

$$S(\tau) = 3\tau^2 - 2\tau^3 \quad \text{Poi } \theta(t) = 2\pi S(\tau)$$

La velocità $\dot{\theta}(t)$ e l'accelerazione $\ddot{\theta}(t)$ si ottengono dalla posizione $\theta(t)$ facendo le derivate. Il seguente grafico presenta la legge polinomiale di terzo grado.

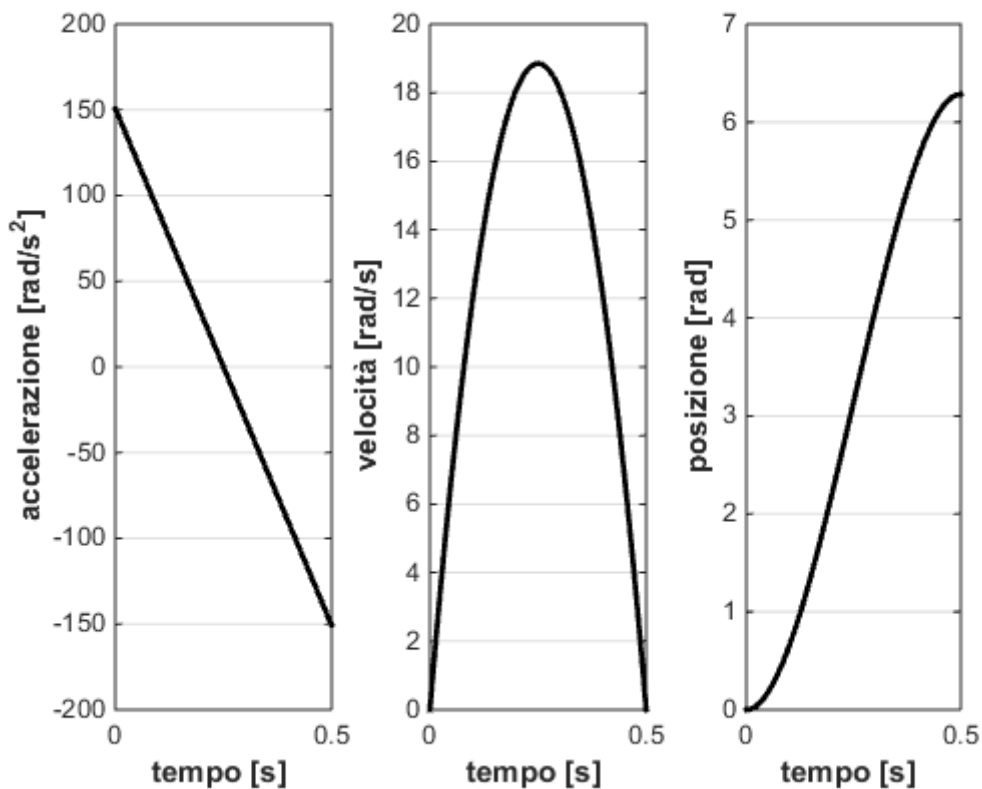


Figura 4: Legge polinomiale di terzo grado

Si osserva che questa legge presenta anch'essa delle discontinuità in accelerazione, la velocità e la posizione sono continue su tutto il dominio. Per gli stessi motivi visti sulla legge ad accelerazione costante questa legge è considerata brusca e non adatta nelle applicazioni dove è richiesta un certo livello di dolcezza.

1.2.4. Legge polinomiale di quinto grado

La legge polinomiale di quinto grado è definita in posizione come segue:

$$\theta(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + a_4(t - t_0)^4 + a_5(t - t_0)^5 ; \quad t_0 \leq t \leq T$$

Dove t_0 è l'istante iniziale che in seguito sarà considerato nullo.

Seguendo lo stesso procedimento per la legge polinomiale di terzo grado, ma con le condizioni al contorno di posizione, velocità e accelerazione: $\theta(0) = 0, \theta(T) = 2\pi$; $\dot{\theta}(0) = 0, \dot{\theta}(T) = 0$; $\ddot{\theta}(0) = 0, \ddot{\theta}(T) = 0$, si ottiene che :

$$S(\tau) = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5 \quad \text{Poi } \theta(t) = 2\pi S(\tau) \quad \text{con, } \tau = \frac{t-t_0}{T}$$

La velocità e l'accelerazione si ottengono facendo le derivate della posizione.

Il seguente grafico presenta le legge polinomiale di quinto grado.

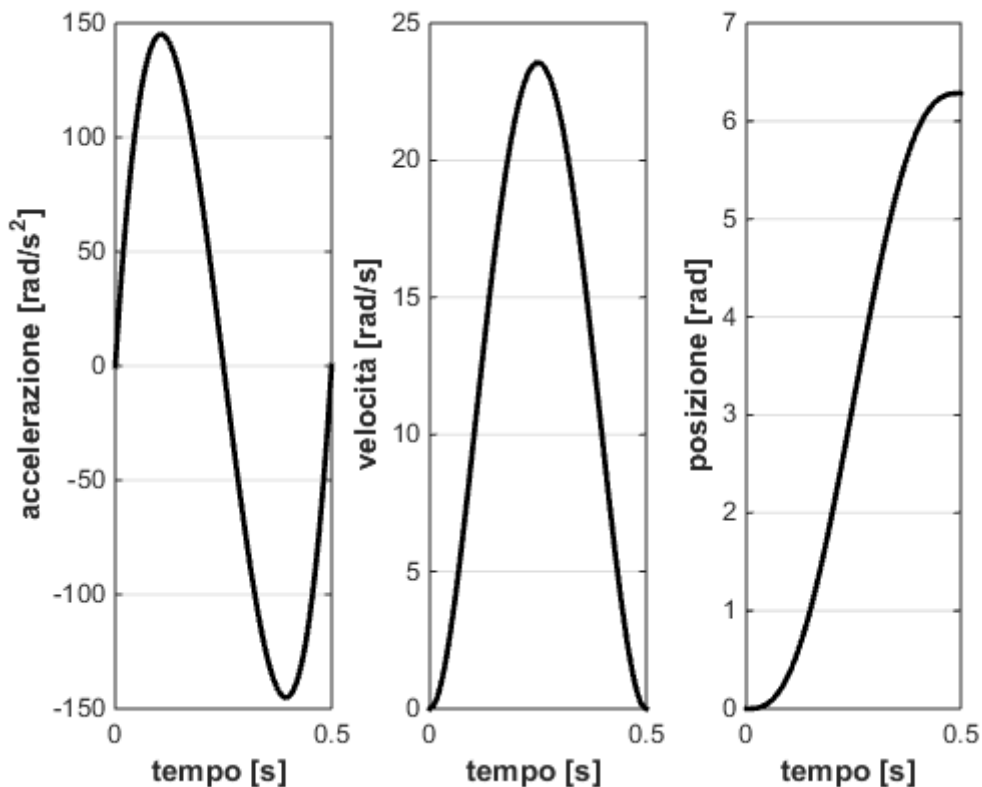


Figura 5: Legge polinomiale di quinto grado

Questa legge è continua in posizione velocità ed accelerazione. Un suo problema potrebbe essere le sovra elongazioni in velocità ed accelerazione che possono essere dannose per l'attuatore e anche per l'ambiente dove è posto il meccanismo nel caso ci sono degli ostacoli.

1.2.5. Legge armonica

La legge armonica è una legge costruita a partire da funzioni trigonometriche. La sua forma normalizzata in posizione è la seguente:

$$S(\tau) = \frac{1 - \cos(\pi\tau)}{2}, \quad \tau = \frac{t - t_0}{T} \quad \text{Dove } t_0 \text{ è l'istante iniziale che in seguito sarà considerato nullo.}$$

Questa legge è ottenuta dalla sua forma normalizzata $S(\tau)$ usando la seguente relazione:

$$\theta(t) = \theta_0 + hS(\tau) \quad \text{Dove } \theta_0 = 0 \text{ è la posizione iniziale, } h = 2\pi \text{ è l'alzata, } \tau \text{ è il tempo normalizzato, } 0 \leq \tau \leq 1.$$

Il grafico della legge armonica è il seguente:

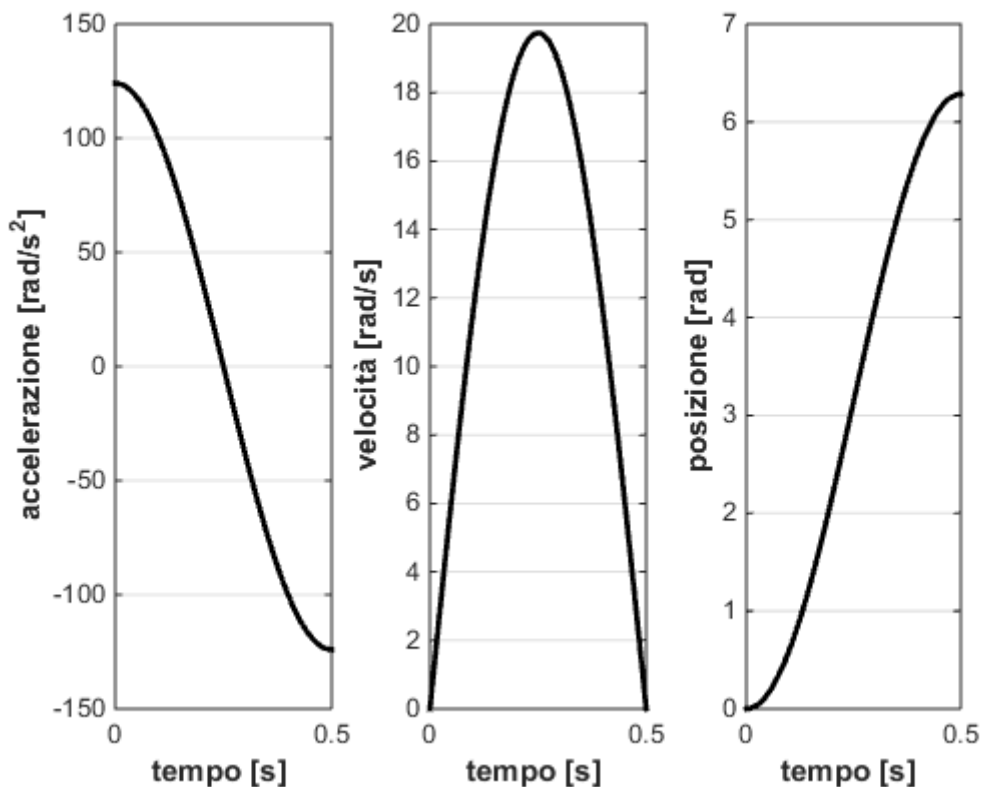


Figura 6: Legge armonica

Un difetto di questa legge è il fatto che presenta discontinuità in accelerazione. Ma questo difetto può essere corretto facendo dei raccordi sinusoidali all'inizio e alla fine per ottenere una legge armonica modificata che presenta continuità in posizione velocità e accelerazione.

1.2.6. Legge cicloidale

La legge cicloidale è anch'essa costruita a partire da funzioni trigonometriche. La sua forma normalizzata in accelerazione è la seguente:

$S''(\tau) = 2\pi\sin(2\pi\tau)$, $\tau = \frac{t-t_0}{T}$ Dove t_0 è l'istante iniziale che in seguito sarà considerato nullo.

La velocità normalizzata e la posizione normalizzata si ottengono dall'accelerazione normalizzata usando le seguenti espressioni:

Velocità normalizzata: $S'(\tau) = \int_0^\tau S''(x)dx$; posizione : $S(\tau) = \int_0^\tau S'(x)dx$

Questa legge è ottenuta dalla sua forma normalizzata $S(\tau)$ usando la seguente relazione:

$\theta(t) = \theta_0 + hS(\tau)$ Dove $\theta_0 = 0$ è la posizione iniziale, $h = 2\pi$ è l'alzata , τ è il tempo normalizzato, $0 \leq \tau \leq 1$.

Il grafico della legge armonica è il seguente:

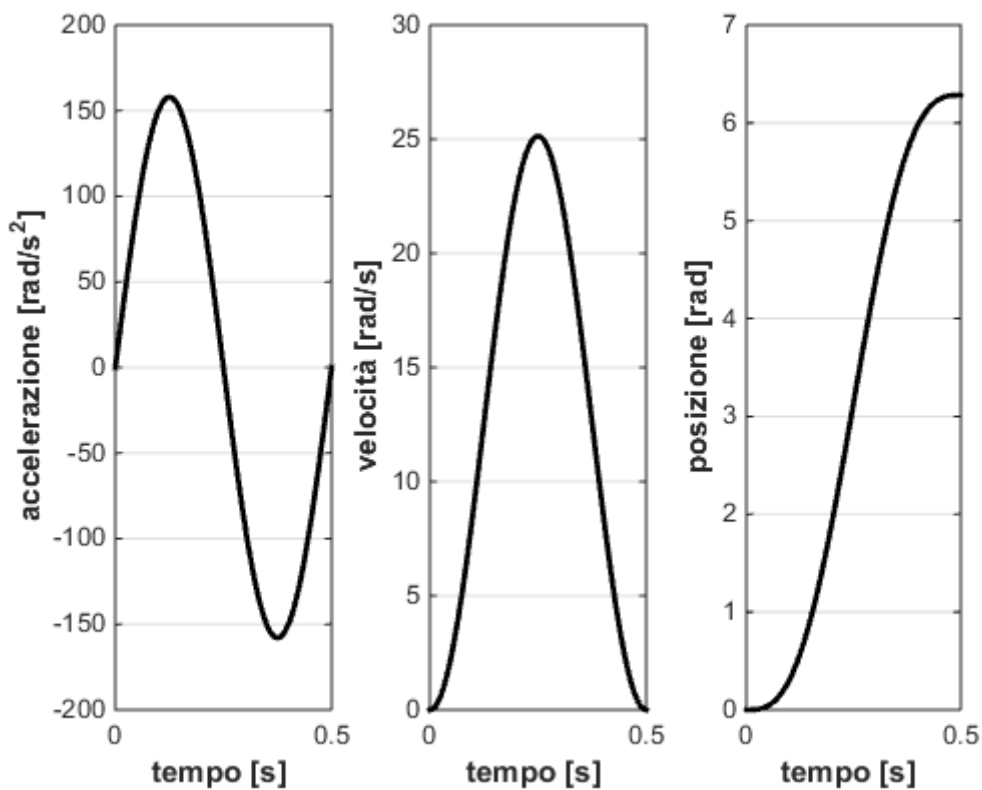


Figura 7: Legge cicloidale

Si osserva che questa legge è continua in posizione, velocità e accelerazione. La sua accelerazione essendo ottenuta da funzioni sinusoidali permette di generare una coppia avendo una forma sinusoidale. Una coppia di questo tipo è un campione interessante che può essere facilmente bilanciata dalle coppia generata da una molla che è anch'essa di forma sinusoidale.

Osservazione:

Esistono altre leggi di moto che non sono state studiate in questo paragrafo visto che l'obiettivo di questo documento non è basato sullo studio delle leggi di moto. Nella tabella che segue sono presentate alcune leggi di moto che potrebbero essere sfruttate se necessario.

1.3. Confronto tra leggi di moto

La seguente tabella presenta un confronto tra diverse leggi di moto:

Legge	Cv	Ca	Carms	dolcezza
Accelerazione costante	Var	Var	Var	*
Accelerazione trapezoidale	Var	Var	Var	***
Accelerazione trapezoidale modificata	Var	Var	Var	****
Polinomiale terzo grado	1.5	6	3.4	**
Polinomiale quinto grado	1.87	5.7	4.15	****
Polinomio settimo grado	2.2	7.5	5.05	****
Armonica	1.57	4.9	3.45	**
Armonica modificata	Var	Var	Var	***
Cicloidale	2	6.28	4.4	****
Freudenstein 1-3-5	2	5	4.25	****

Tabella 1: Parametri delle leggi di moto

Da questa tabella si osserva che certe leggi hanno parametri sintetici costanti mentre altre ne hanno variabile. La variabilità dipende dai parametri che permettono di costruire la legge. Ad esempio nel caso di una legge ad accelerazione costante i parametri sintetici dipendono da λ che è un parametro di costruzione della legge. Per $\lambda = 1/2$, si ha che $C_v = 2$; $C_a = 4$; $C_{arms} = 4$

Per la legge trapezoidale in accelerazione, i parametri sintetici dipendono da λ e un altro parametro γ . Questo ultimo non cambia la velocità massima rispetto alla legge ad accelerazione costante ma piuttosto l'accelerazione massima. Per $\lambda = 1/2$, $\gamma = 1/4$ si ha che $C_v = 2$; $C_a = 5.3$; $C_{arms} = 4.3$

La legge trapezoidale in accelerazione modificata, è ottenuta dalla legge trapezoidale in accelerazione aggiungendo dei raccordi sinusoidale per aumentare il livello di dolcezza. Per $\lambda = 1/2$, $\gamma = 1/4$ si ha che $C_v = 2$; $C_a = 4.9$; $C_{arms} = 4.3$

La legge armonica modificata è ottenuta dalla legge armonica aggiungendo dei raccordi sinusoidali per eliminare la discontinuità in accelerazione. Sia t_R il tempo di raccordi, per $\frac{t_R}{T} = 1/8$ si ha che $C_v = 1.75$; $C_a = 5.5$; $C_{arms} = 3.9$

Si osserva dalla tabella che la legge polinomiale di settimo grado è la più dolce ma non porta a dei picchi di velocità e accelerazione molto alti.

La legge di Freudenstein è una legge basata su lo sviluppo in serie di Fourier e successivo filtraggio delle componenti spetrali. Il simbolo 1-3-5 significa che nella legge vengono considerate solo la prima, terza e quinta armonica.

CAPITOLO 2: MECCANISMO (motore – manovella – molla)

In questo capitolo viene fatta uno studio teorico del meccanismo costituito dagli seguenti elementi: un motore, un'asta e una molla. Questo studio teorico porta sulla determinazione del modello dinamico e lo sviluppo di metodi di ottimizzazione per determinare le caratteristiche del sistema (posizione di attacco della molla a telaio, rigidità e lunghezza a vuoto della molla) che garantiscono una coppia di picco la più bassa possibile.

2.1 Studio del meccanismo posto sul piano orizzontale

Il meccanismo in studio in questa parte è costituito da un motore, un'asta e una molla. L'obiettivo è di determinare le caratteristiche ottimali della molla (rigidità, lunghezza a vuoto), la posizione ottimale del punto A (attacco della molla a telaio) che permettono di minimizzare gli sforzi richiesti al motore al variare della legge di moto. Si supponga il punto M (attacco della molla all'asta) fisso. La figura 8 realizzata mediante il programma Sketchup (modellizzazione dinamica 3D) presenta il sistema appena descritto.

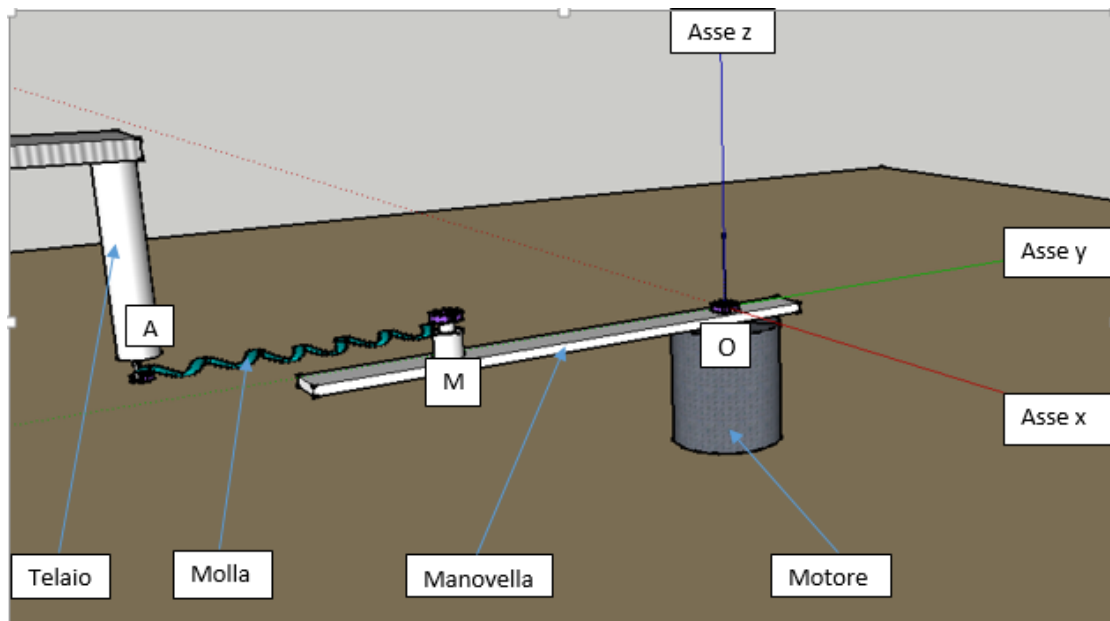


Figura 8: Meccanismo (motore-manovella-molla)

Per affrontare lo studio del meccanismo, è importante fare una rappresentazione del meccanismo al fine di scrivere le equazioni della dinamica. La figura 9, rappresenta il meccanismo nel piano orizzontale (visto da sopra). Si considerano i punti O, M e A posto nello stesso piano passante per M.

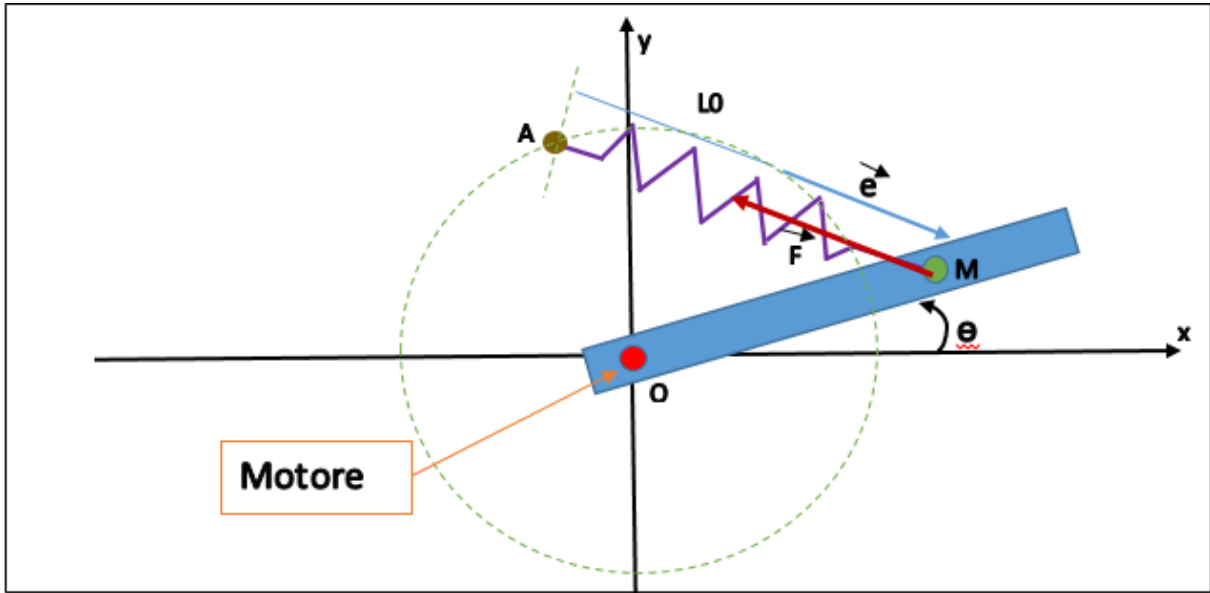


Figura 9: Rappresentazione del modello nel piano x y

2.1.1 Modello dinamico del meccanismo senza molla

Il sistema (motore-manovella) è un meccanismo ad un grado di libertà. C_m rappresenta la coppia richiesta al motore per trascinare la manovella. $\dot{\theta}$ è la velocità del motore e anche della manovella essendo tra di loro un collegamento supposto rigido. $f_v \dot{\theta}$ è la coppia resistente derivata dall'attrito viscoso nel motore. La seguente figura rappresenta il modello appena descritto.

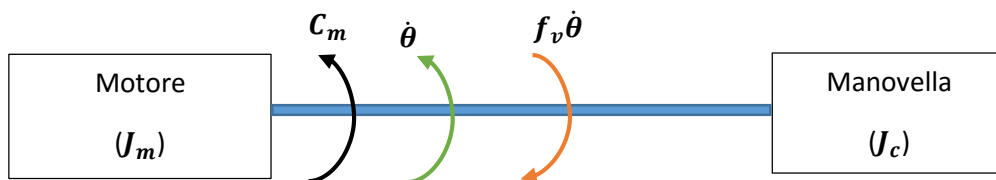


Figura 10: Modello del sistema senza molla

Il teorema dell'energia cinetica (oppure bilancio delle potenze) applicato al sistema (motore – manovella) è scritto come segue:

$$W_m + W_c - W_p = \frac{dE_c}{dt} \quad (2.1)$$

$w_m = C_m \dot{\theta}$ È la potenza del motore.

$w_c = 0$ È la potenza del carico: il carico (manovella) non sviluppa nessuna potenza

$w_p = f_v \dot{\theta}^2$ È la potenza persa per attrito viscoso nel motore e f_v è il coefficiente di attrito viscoso

$E_c = \frac{1}{2}(J_m + J_c)\dot{\theta}^2$ è l'energia cinetica del sistema e si misura in Joule(J) ; J_m e J_c sono rispettivamente il momento d'inerzia del motore e del carico

Il modello ottenuto dall'equazione (2.1) è il seguente:

$$C_m = (J_m + J_c)\ddot{\theta} + f_v\dot{\theta} \quad (2.2)$$

Questa equazione fa capire che: la coppia richiesta al motore per trascinare il carico deve essere in grado di muovere il carico inerziale equivalente ($J_m + J_c$) e deve anche superare le coppie resistenti $f_v\dot{\theta}$. Si supponga trascurabile le altre coppie resistenti (ad esempio attrito dell'aria).

Questo modello è costituito da un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti.

$\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ sono rispettivamente la velocità e l'accelerazione angolare del motore e dell'asta e sono date dalla legge di moto.

Nota: Il modello (2.2) si poteva ottenere applicando le equazioni di Eulero-Lagrange per un meccanismo ad un grado di libertà ad inerzia costante.

2.1.2 Modello dinamico del meccanismo con la molla

Il sistema (motore-manovella –molla) è un meccanismo ad un grado di libertà. La molla genera una coppia C_{mol} sul l'albero motore che per certe posizioni dell'asta produrrà una potenza motrice e per altre una potenza resistente. Per ottenere il modello dinamico in questo caso, è importante calcolare prima la coppia generata dalla molla sull'albero motore poi applicando il teorema dell'energia cinetica (oppure il bilancio delle potenze), si ottiene il modello desiderato. L'obiettivo dell'utilizzo della molla è di sfruttare la sua potenza motrice nelle fasi di accelerazione dove è richiesta tanta coppia al motore e sfruttare la sua potenza resistente nelle fasi di decelerazione per aiutare il motore a frenare. Osservando la figura Fig.11 rispetto alla figura Fig.10 si può notare che con l'introduzione della molla, la coppia richiesta al motore diventa C_{mmol} . In base alla legge di moto in ingresso, si deve vedere di quanto si è abbassato C_{mmol} rispetto a C_m . Quello sarà la misura del beneficio della molla.

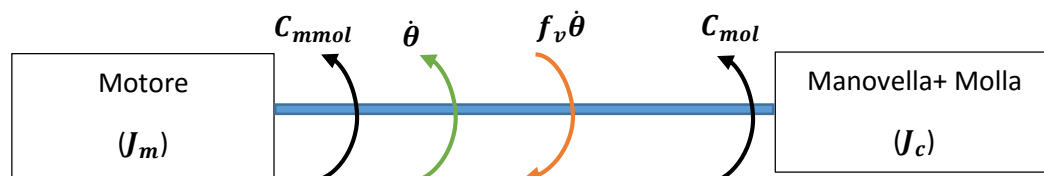


Figura 11: Modello del sistema in presenza della molla

Applicando la legge di Hooke nel sistema in Fig. si ottiene la seguente espressione che definisce la forza elastica:

$$\vec{F} = -K\vec{e} \quad (2.3)$$

Dove $\vec{e} = \frac{\overline{AM}}{\|\overline{AM}\|} (1 - \frac{l_0}{\|\overline{AM}\|})$ è l'allungamento della molla

K è la rigidezza della molla e l_0 è la sua lunghezza a vuoto

Sfruttando la definizione del momento meccanico polare di una forza, si definisce la coppia generata dalla forza elastica sull'albero motore come segue :

$$C_{mol}(\theta, r, \alpha, k, l_0) = \overline{OM} \times \vec{F} \quad (2.4)$$

Si considera l'equazione (1.1) con la potenza del carico che vale $w_c = C_{mol}\dot{\theta}$ allora il nuovo modello ottenuto è il seguente:

$$C_{mmol}(\theta, r, \alpha, k, l_0) + C_{mol}(\theta, r, \alpha, k, l_0) = (J_m + J_c)\ddot{\theta} + f_v\dot{\theta} \quad (2.5)$$

C_{mmol} rappresenta la coppia richiesta al motore per trascinare la manovella in presenza della molla misurata in Newton – metro (Nm)

$$\text{In altri termini} \quad C_{mmol}(\theta, r, \alpha, k, l_0) = C_m(\theta) - C_{mol}(\theta, r, \alpha, k, l_0) \quad (2.6)$$

$C_m(\theta)$ dipende solo dalla legge di moto

Nello studio trattato in questa parte si considerano solo le posizioni del punto A per le quali la molla è in trazione cioè $\|\overline{AM}\| > l_0$. Negli altri casi (cioè con molla in compressione), la coppia generata dalla molla è considerata nulla. Questa ipotesi permette che in un giro completo dell'asta, la coppia generata dalla molla abbia una forma sinusoidale con un solo massimo e un solo minimo così per poter bilanciare bene il la coppia richiesta al motore in assenza di molla. Il caso ideale sarebbe di trovare una molla e la posizione ottimale del punto A tale per cui la coppia richiesta al motore in presenza della molla C_{mmol} tenda a zero. Per avere ciò, la coppia generata dalla molla C_{mol} deve bilanciare perfettamente la coppia motrice in assenza di molla C_m .

2.2 Studio energetico

2.2.1 Energia potenziale elastica

L'energia potenziale elastica della molla è definita come segue e si misura in Joule [J]:

$$E_p(\theta, r, \alpha, k, l_0) = \frac{1}{2} k \|\vec{e}\|^2 \quad (2.7)$$

E_p dipende dalla posizione del punto A in coordinate polari (r, α) con $r > 0$ e $\alpha \in [0; 2\pi]$, dalla rigidezza della molla $k > 0$ e lunghezza a vuoto l_0 e dalla posizione angolare $\theta \in [0; 2\pi]$ della manovella.

2.2.2 Energia cinetica

L'energia cinetica del meccanismo è stata utilizzata nel paragrafo 2.1 per la costruzione del modello dinamico del meccanismo e si definisce come segue:

$$E_c = \frac{1}{2}(J_m + J_c)\dot{\theta}^2 \quad (2.8)$$

Visto che la manovella è rigidamente legata al motore, l'inerzia considerata è la somma dell'inerzia del motore (inerzia albero motore) e l'inerzia del carico (manovella). L'inerzia essendo costante in questo caso, l'energia cinetica dipende solo dalla velocità angolare della manovella che è fornita dalla legge di moto.

2.2.3 Energia meccanica

L'energia meccanica del sistema (manovella – molla) è definita come somma dell'energia potenziale elastica e dell'energia cinetica:

$$E_m = E_p + E_c \quad (2.9)$$

In presenza di forze non conservative (ad esempio attrito) si ha che l'energia meccanica non si conserva.

$$\frac{dE_m}{dt} = W_{nc} \quad (2.10)$$

Dove W_{nc} è la potenza delle forze non conservative

Nel caso di un sistema privo di attrito o altre forze non conservative, l'energia meccanica si conserva e si ha:

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad (2.11)$$

2.3 Localizzazione del punto A

L'obiettivo di questo paragrafo è di determinare una possibile zona del piano per il posizionamento del punto A (attacco della molla a telaio). Questa zona dipende dalla legge di moto utilizzata per muovere la manovella.

Al seguito di quello che è stato studiato per le leggi di moto, si è scelto di realizzare le simulazioni con la legge cicloidale per la semplice ragione la sua accelerazione è perfettamente sinusoidale e continua, di più, la coppia richiesta al motore usando tale legge ha un andamento che bilancia meglio la coppia generata dalla molla. Tutti i grafici di seguito sono stati realizzati con Matlab.

Il seguente grafico presenta la legge cicloidale con un tempo di azionamento fissato a $t_m = 0.5$ s, la coppia richiesta al motore senza molla e l'energia cinetica in funzione della posizione del motore (θ).

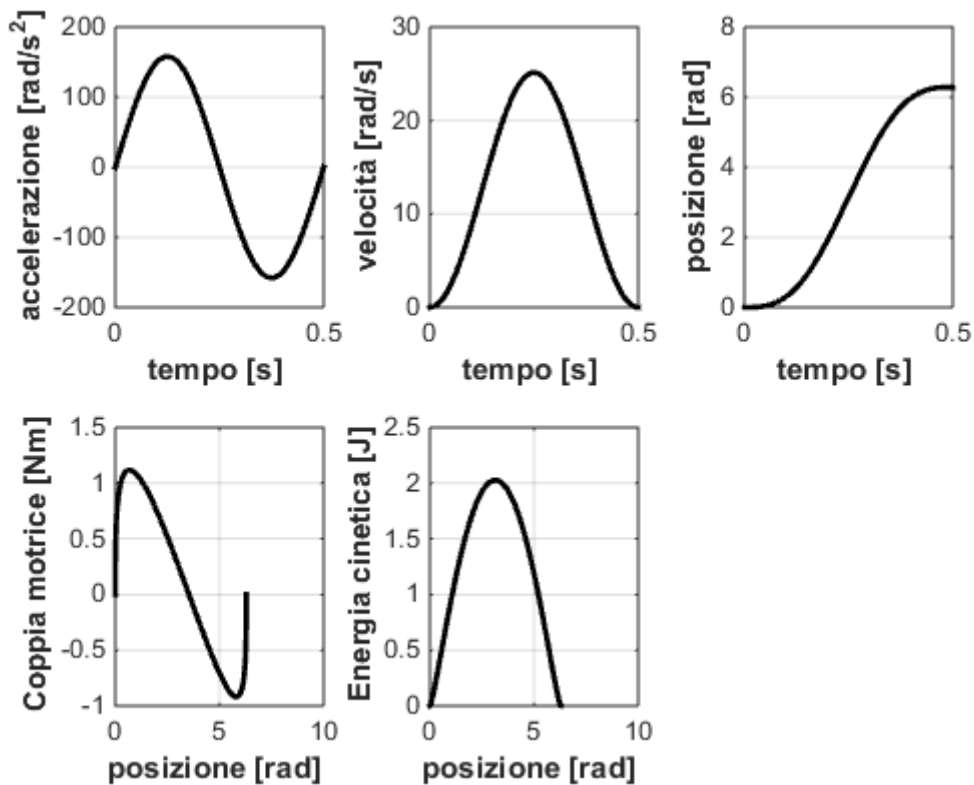


Figura 12: Legge cicloidale, coppia motrice senza molla, energia cinetica

Nel seguito, tre metodi sono stati utilizzati per la localizzazione del punto A:

Analisi della coppia massima richiesta al motore

Analisi della varianza dell'energia meccanica

Analisi del lavoro compiuto dal motore

2.3.1 Coppia motrice al variare di θ, r, α, k

Si consideri una molla di rigidezza $K_0 = 50$ N/m, lunghezza a vuoto $l_0 = 0.08$ m e il punto A su una circonferenza di raggio $r_0 = 0.1$ m. Questi valori sono stati scelti al fine di realizzare la simulazione in Matlab.

I seguenti grafici mostrano le variazioni delle coppie (generata dalla molla e richiesta al motore) in funzione della posizione del punto A e della rigidezza della molla.

Il punto A può essere rappresentato nel piano mediante le sue coordinate cartesiane oppure mediante coordinate polari. Si è scelto di rappresentare in coordinate polari (r, α) con $r > 0$ e $\alpha \in [0; 2\pi]$ per essere presisi sui risultati.

In coordinate polari (r, α), Il punto A si muove su circonferenze di raggio r e la sua posizione angolare è α . La simulazione è stata realizzata considerando un passo di $\alpha = 15^\circ$ tra le diverse posizioni del punto A, cioè considerando 24 posizioni del punto A sulla circonferenza per un giro completo. Ma è possibile raffinare il passo per avere risultato più accurato.

Si considerano 4 casi per analizzare tali variazioni:

Caso1	Caso 2	Caso3	Caso4
$R = r_0$	$R = 2r_0$	$R = r_0$	$R = 2r_0$
$K = K_0$	$K = K_0$	$K = 2K_0$	$K = 2K_0$

Tabella 2: Aumento di r e k rispetto a r_0 e K_0

Queste considerazioni permettono di vedere al variare del raggio della circonferenza e della rigidezza come si comportano le coppie (generata dalla molla e richiesta al motore). L'obbiettivo essendo di determinare la posizione del punto A che fornisce la minima coppia richiesta al motore in presenza della molla.

I risultati ottenuti nelle seguenti figure mostrano i casi più rilevanti in qui la posizione del punto A permette alla molla di abbassare la coppia richiesta al motore.

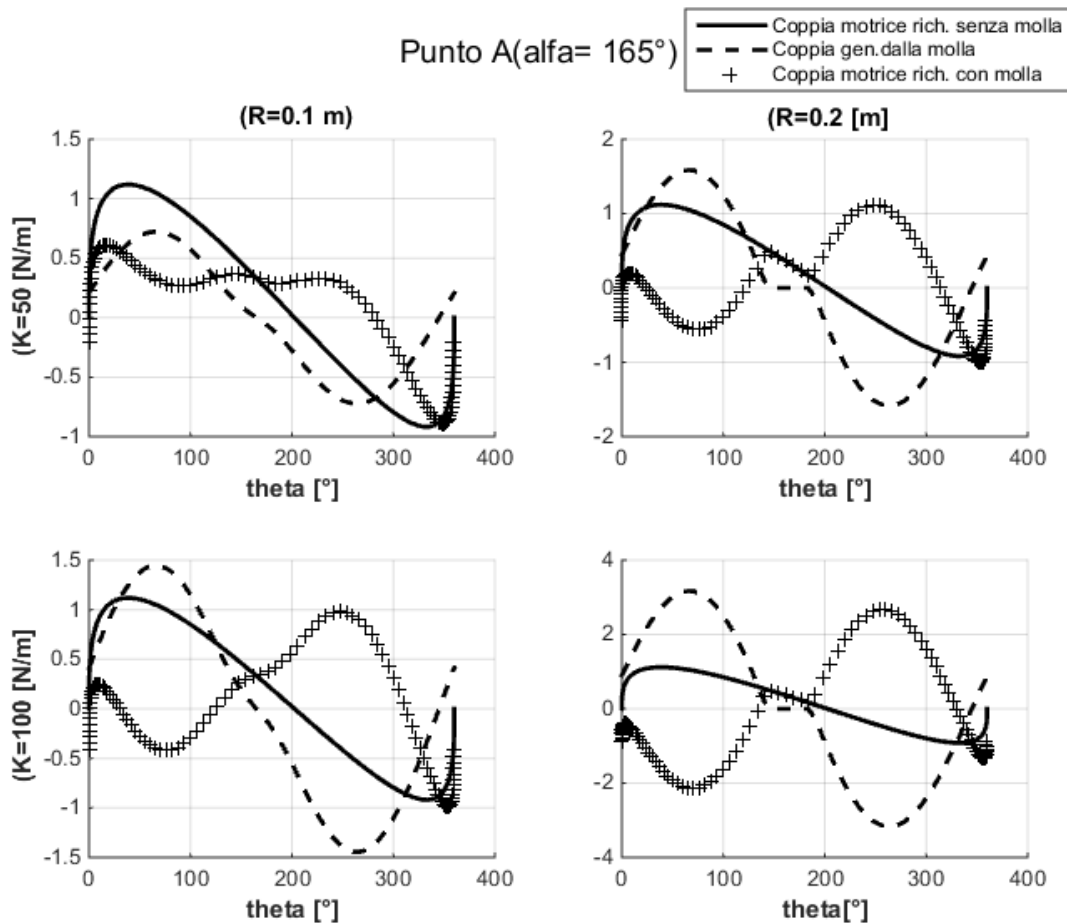


Figura 13: Confronto di coppia con r, k crescenti e $\alpha = 165^\circ$

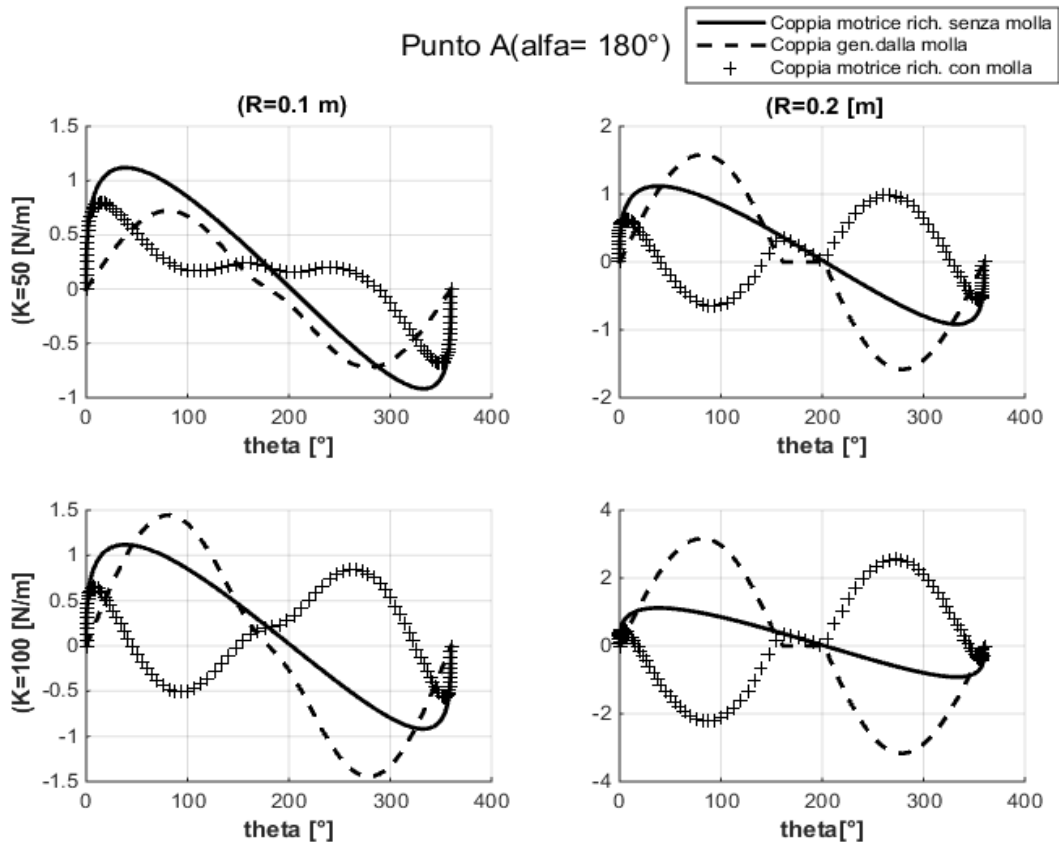


Figura 14: Confronto di coppia con r, k crescenti e $\alpha = 180^\circ$

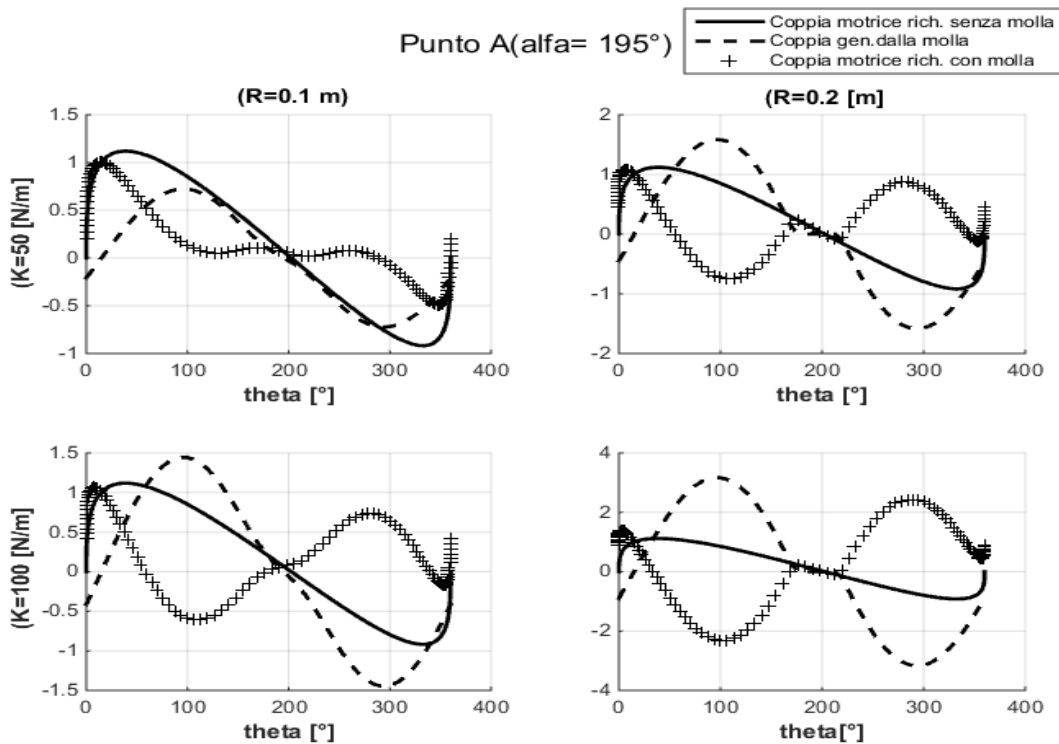


Figura 15: Confronto di coppia con r, k crescenti e $\alpha = 195^\circ$

Si osserva che quando α appartiene nell'intervallo $[165^\circ; 195^\circ]$ il sistema si trova nelle seguenti configurazioni:

In fase di accelerazione cioè con θ (posizione della manovella) nell'intervallo $[0^\circ; 180^\circ]$

La coppia generata dalla molla è positiva (la molla genera una potenza motrice). Questo deriva dal fatto che L'energia potenziale elastica decresce cioè, la molla si restringe (oppure si scarica) e quindi apporta energia al sistema.

In fase di decelerazione cioè con θ nell'intervallo $[180^\circ; 360^\circ]$

La coppia generata dalla molla è negativa (la molla genera una potenza frenante). Questo deriva dal fatto che L'energia potenziale elastica cresce cioè la molla si allunga (oppure si carica) e quindi tira energia dal sistema.

Da questo si può capire che con la legge di moto scelta, quando il punto A di trova nell'arco $[165^\circ; 195^\circ]$ di raggio r , in fase di accelerazione, la molla sviluppa una parte della coppia necessaria per trascinare il carico mentre in fase di decelerazione la molla aiuta il motore a frenare.

Per arricchire l'analisi, si sono aggiunti 4 altri casi per vedere il comportamento del sistema quando il raggio e la rigidità diminuiscono. Si considerano $R = r_0$ e $K = K_0$ come valori di riferimento.

Caso1	Caso 2	Caso3	Caso4
$R = r_0$	$R = 1/2r_0$	$R = r_0$	$R = 1/2r_0$
$K = K_0$	$K = K_0$	$K = 1/2K_0$	$K = 1/2K_0$

Tabella 3: Diminuzione di r e k rispetto a r_0 e K_0

I seguenti grafici mostrano i risultati ottenuti per questi casi.

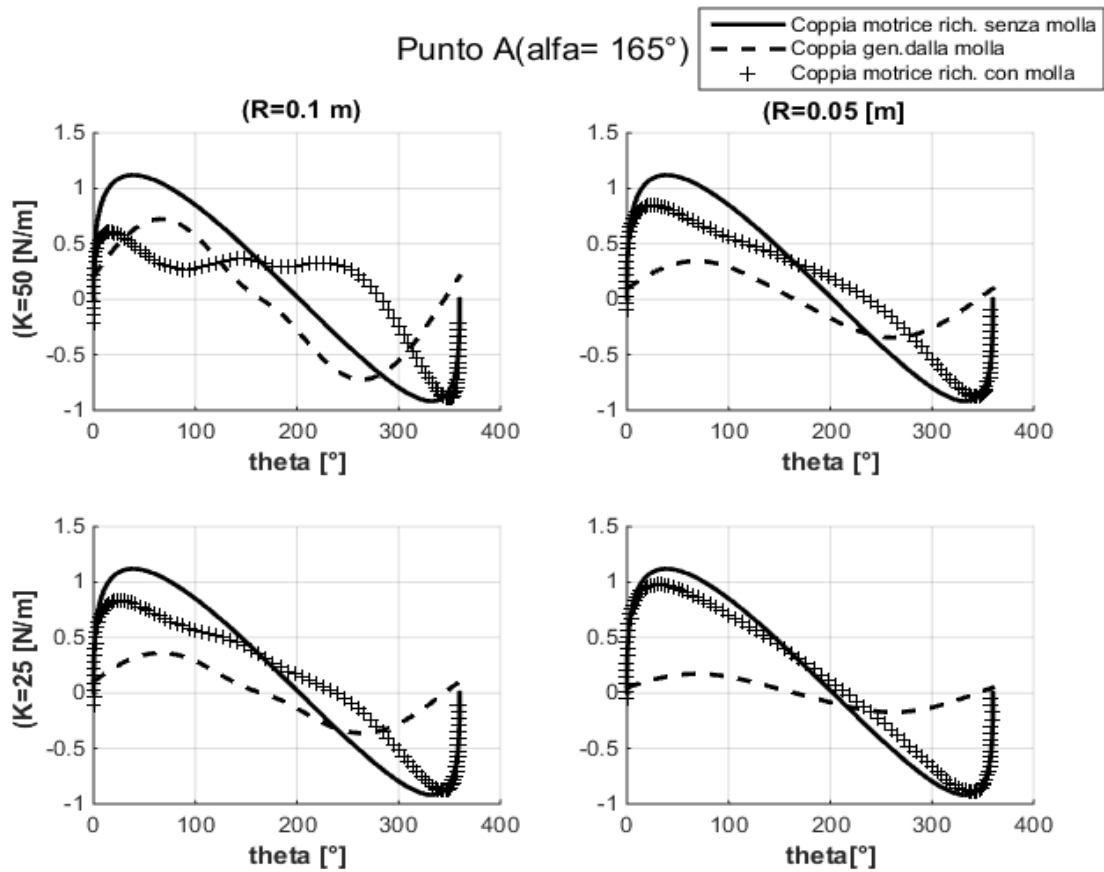


Figura 16: Confronto di coppia con r, k decrescenti e $\alpha=165^\circ$

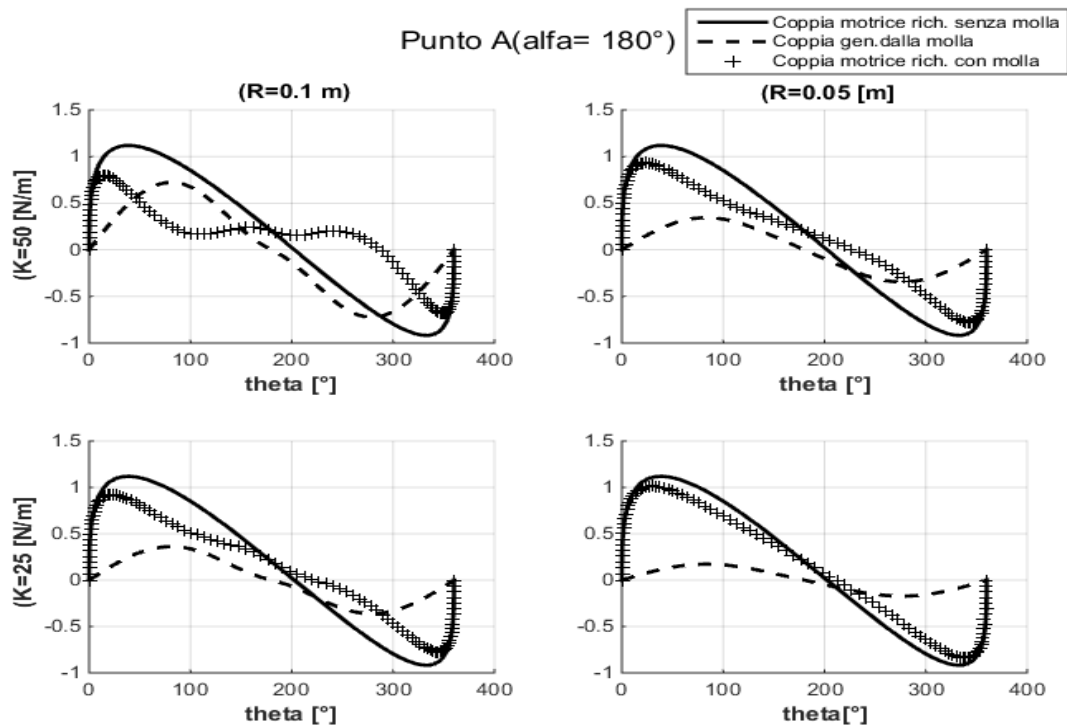


Figura 17: Confronto di coppia con r, k decrescenti e $\alpha=180^\circ$

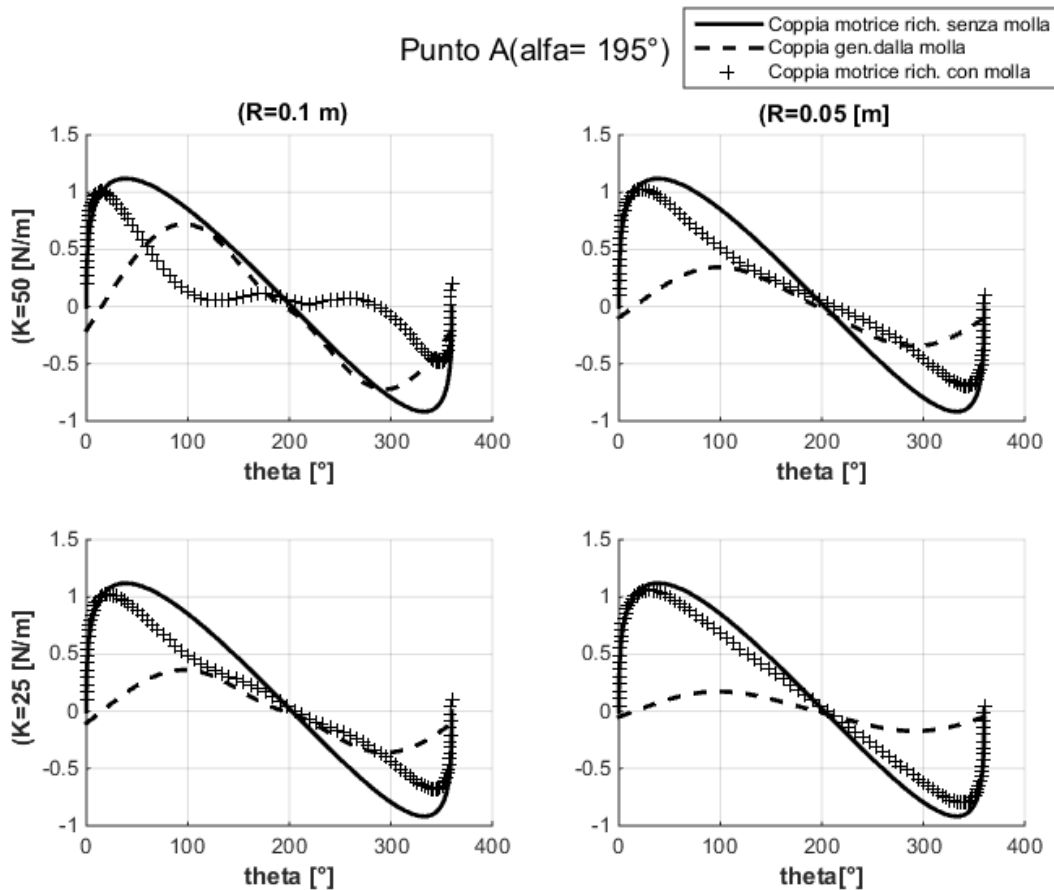


Figura 18: Confronto di coppia con r , k decrescenti e $\alpha = 195^\circ$

Situazioni particolari:

Casi $R = 2r_0$

Per certe posizioni della manovella, la coppia generata dalla molla è nulla. Queste sono situazioni in cui la molla è più corta della sua lunghezza a vuoto (molla in compressione). Visto che si studiano solo casi con molla in trazione, cioè $|\overline{AM}| > l_0$ allora nei casi di molla in compressione, l'energia potenziale elastica e la coppia generata dalla molla sono forzate a zero. Questa forzatura a zero è presente solo nella simulazione ma nella realtà tale coppia generata dalla molla in compressione esiste.

Casi $R = 2r_0$ e $K = 2K_0$

In fase di accelerazione, la coppia generata dalla molla è maggiore della coppia richiesta al motore per trascinare il carico in assenza della molla. Si osserva che in tale fase, in presenza della molla, il motore sviluppa una coppia frenante molto grande.

In fase di decelerazione, la molla frena troppo e si osserva che il motore accelera molto.

Queste situazioni permettono di capire che la rigidità della molla e anche il raggio scelto non possono superare certi valori.

Casi $R = \frac{1}{2}r_0$ e $K = \frac{1}{2}K_0$

In questi casi, si osserva che la coppia richiesta al motore in presenza della molla è molto vicina di quella richiesta senza molla. Questo perché la rigidezza della molla è troppo piccola oppure il punto A è troppo vicino dell'origine e quindi la coppia generata dalla molla è insufficiente per aiutare il motore.

Queste situazioni permettono di capire che la rigidezza della molla e anche il raggio scelto non possono essere al di sotto di certi valori.

Caso $R = r_0$ e $K = K_0$

Con questi valori di raggio e rigidezza, si osserva che quando α appartiene nell'intervallo $[165^\circ; 195^\circ]$, la coppia richiesta al motore in presenza della molla in fase di accelerazione è minore di quella richiesta senza molla. Quindi, la molla ha sviluppato una parte di coppia richiesta. E anche in decelerazione la coppia richiesta con molla è maggiore di quella richiesta senza molla. Quindi la molla aiuta il motore a frenare.

Questo permette di affermare che, con la legge cicloidale, i valori $R = r_0$; $K = K_0$ $\alpha \in [165^\circ; 195^\circ]$ sono valore attorno ai quali si può cercare la posizione ottimale del punto A e la rigidezza adatta.

Per avere una limitazione migliore per il raggio, si può osservare l'evoluzione dell'energia potenziale elastica al variare della posizione del punto A.

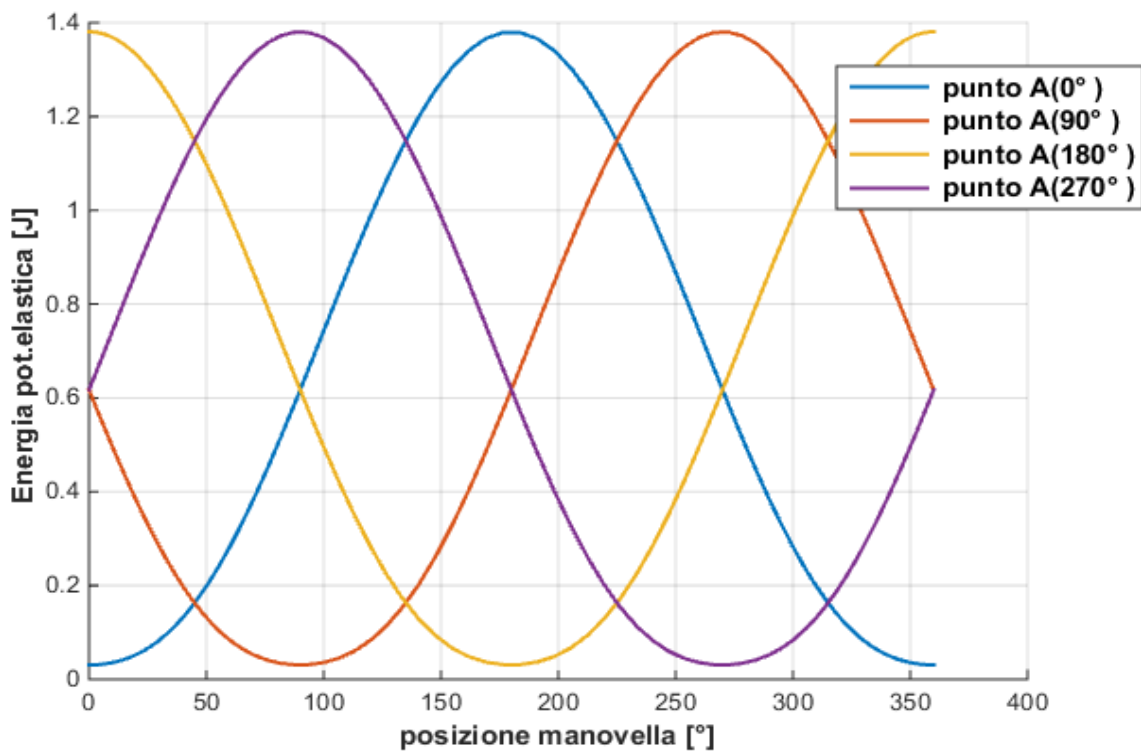


Figura 19: Variazione dell'energia potenziale elastica

Si osserva su questo grafico che l'energia potenziale elastica è minima in corrispondenza alla posizione angolare del punto A e massima nel punto diametralmente opposto ad A. Per esempio quando il punto A è in posizione angolare $\alpha = 90^\circ$, l'energia potenziale elastica è minima per $\theta = 90^\circ$ e massima per $\theta = 270^\circ$

Questo risultato significa che quando i punti A M e O sono allineati, allora la molla è alla sua lunghezza minima e per quello l'energia potenziale è minima.

Per rimanere nei casi di molla in trazione, il raggio della circonferenza dove evolve il punto A deve rispettare le seguenti condizioni:

$$r \leq OM - l_0 \quad \text{oppure} \quad r \geq OM + l_0$$

Numericamente con i dati del problema si ha che:

$$r \leq 0.135 \text{ m} \quad \text{oppure} \quad r \geq 0.295 \text{ m}$$

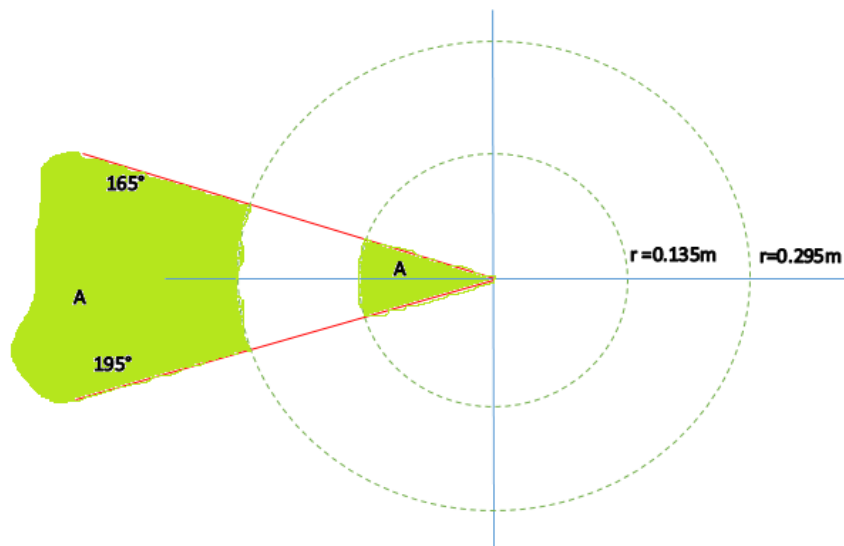


Figura 20: Intervalli di posizionamento del punto A

La banda compresa tra le due circonferenze $r = 0.135 \text{ m}$ e $r = 0.295 \text{ m}$ è una zona nella quale se si posiziona il punto A, per certe posizioni della manovella, la molla si troverà in compressione. Mentre se il punto A all'interno della circonferenza di raggio $r = 0.135 \text{ m}$ oppure all'esterno della circonferenza di raggio $r = 0.295 \text{ m}$ per tutte le posizioni della manovella, la molla rimane sempre in trazione. Questi limiti sono indipendenti dalla legge di moto e della rigidità della molla scelta.

2.3.2 Energia meccanica al variare di θ, r, α, k

Si considera una molla di rigidezza $K_0 = 50 \text{ N/m}$, lunghezza a vuoto $l_0 = 0.08 \text{ m}$ e il punto A su una circonferenza di raggio $r = 0.135 \text{ m}$

In questo paragrafo si cercano l'intervalli di posizionamento del punto A per le quali l'energia meccanica è quasi costante. Infatti, l'energia cinetica deriva dalla legge di moto per quello in funzione della legge di moto scelta, l'energia meccanica vista come somma dell'energia potenziale elastica e dell'energia cinetica e al variare della posizione del punto A non viene esattamente una costante.

I seguenti grafici mostrano l'energia meccanica come somma dell'energia potenziale elastica e dell'energia cinetica e al variare della posizione del punto A.

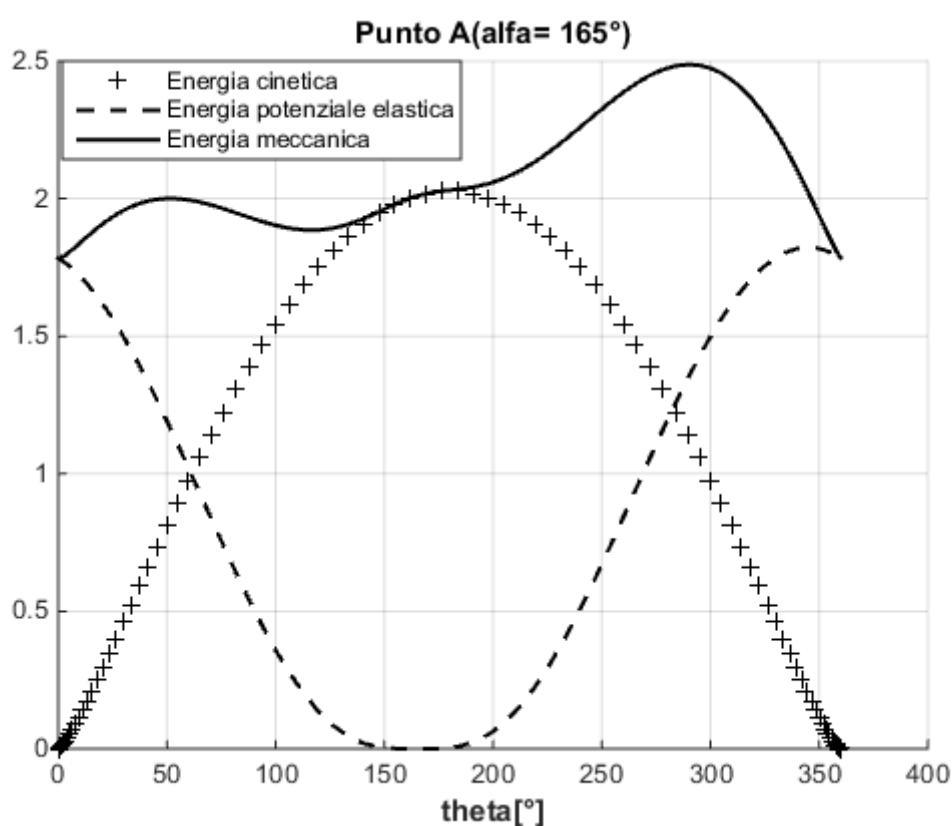


Figura 21: Energia meccanica con $\alpha = 165^\circ$

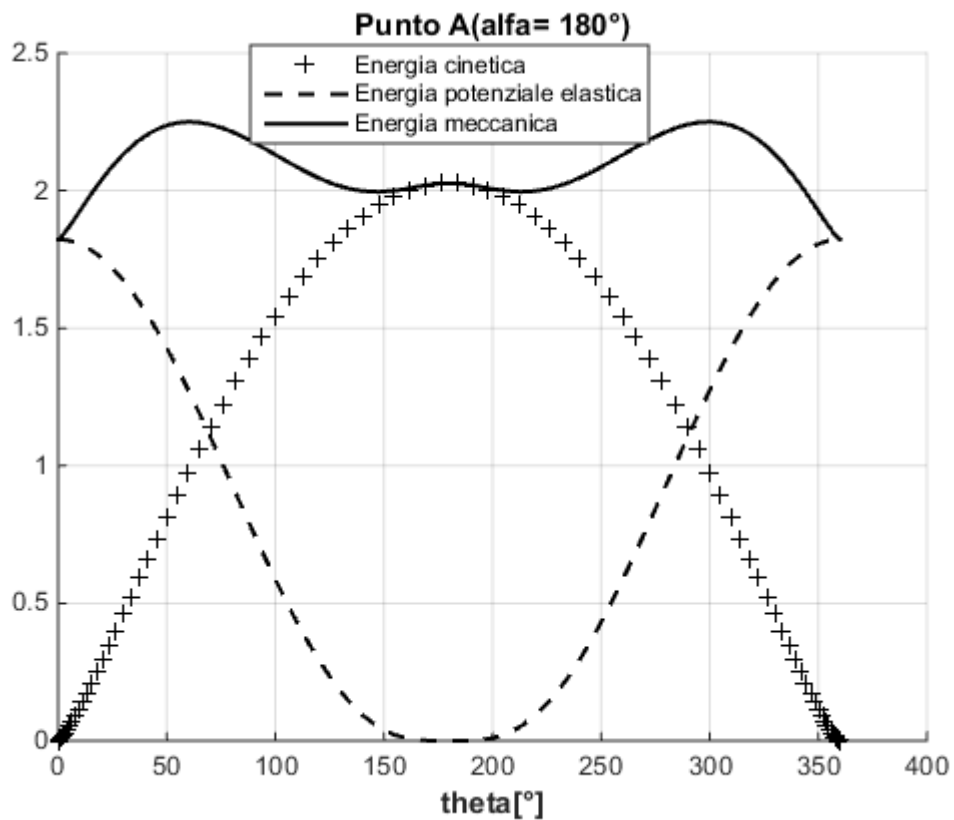


Figura 22: Energia meccanica con $\alpha = 180^\circ$

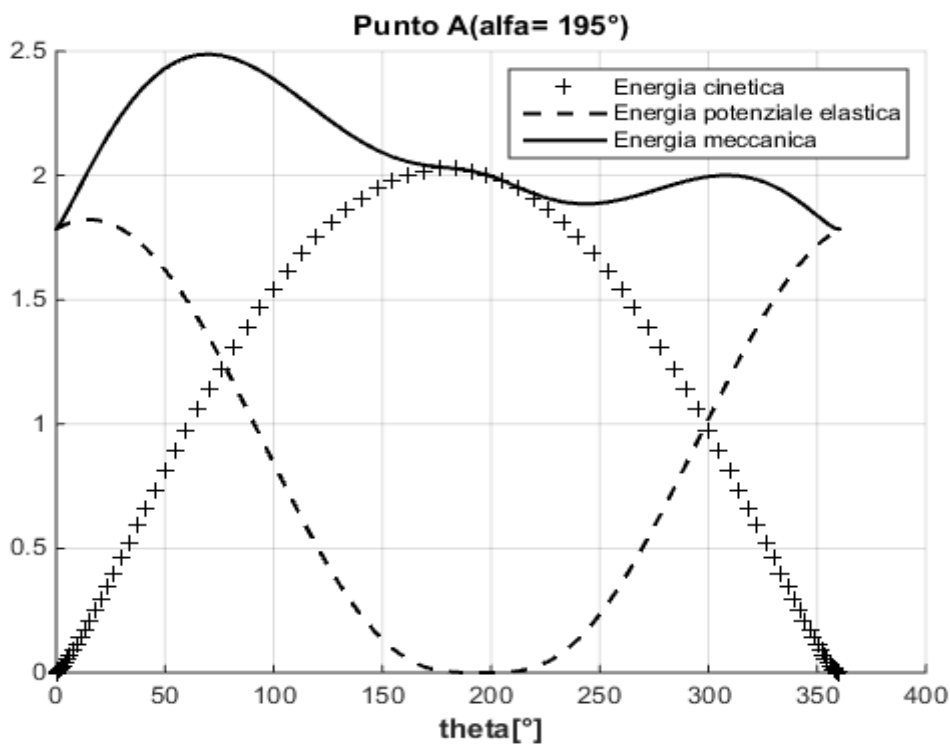


Figura 23: Energia meccanica con $\alpha = 195^\circ$

Si osserva che quando il punto A si trova nella posizione angolare $\alpha = 180^\circ$, l'energia potenziale elastica bilancia meglio l'energia cinetica e quindi l'energia meccanica è quasi costante.

Per determinare il posizionamento desiderato del punto A, si sfrutta il fatto che quando una variabile è costante, la sua varianza statistica è nulla.

Il sistema (motore-manovella-molla) considerato, il lavoro della forza d'attrito è definito come $L_{nc} = \int_0^{2\pi} f_v \dot{\theta} d\theta$. Con la legge cicloidale usata questo lavoro tende a zero perché la velocità non è elevata e il coefficiente di attrito è piccolissimo $f_v = 0.004 \text{ Nms/rad}$. Con questa considerazione si può dire che il sistema è conservativo visto che la variazione della sua energia meccanica tende a zero. Sia E_m l'energia meccanica del sistema. Allora,

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

Questa relazione significa che l'energia meccanica si conserva e quindi è costante. Di conseguenza la sua varianza è nulla.

Il seguente grafico mostra la varianza dell'energia meccanica al variare della posizione del punto A. Il calcolo della varianza è stato fatto usando la funzione *var* di Matlab.

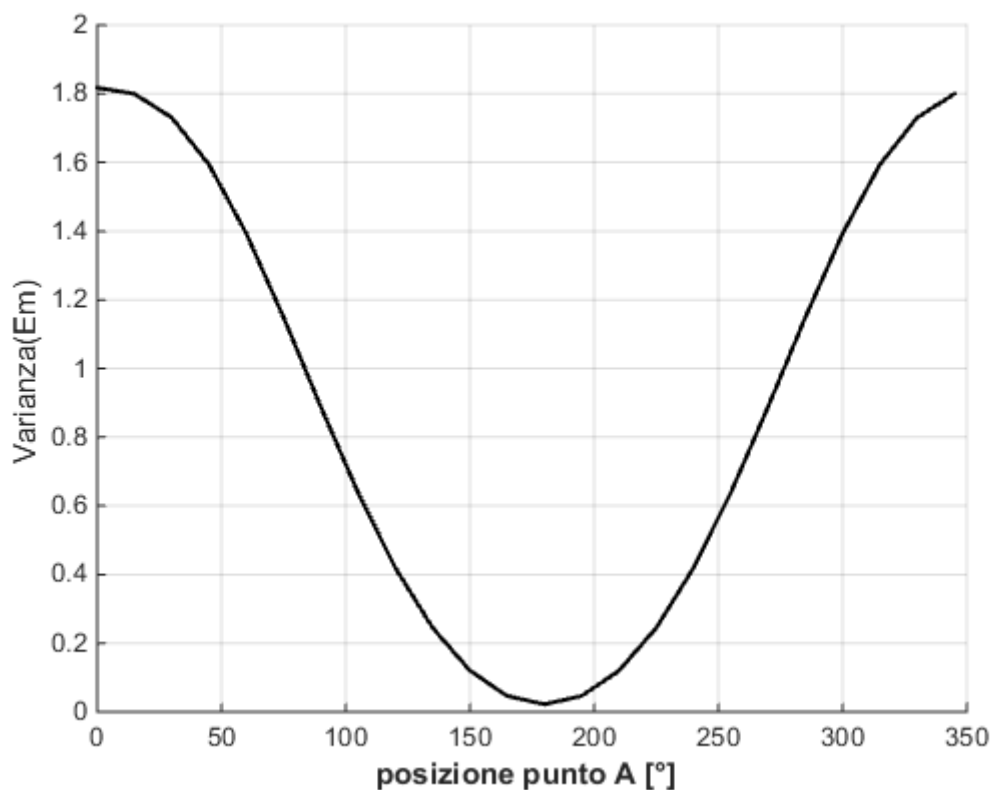


Figura 24: Varianza dell'energia meccanica

Si osserva che quando $\alpha = 180^\circ$, la varianza dell'energia meccanica è al suo valore minimo. Questo permette di capire che tutti i punti A dell'asse delle ascisse portano alla minima varianza dell'energia meccanica. Per determinare il punto A ottimale si potrebbe pensare a cambiare il raggio della circonferenza mantenendo costante la rigidezza e vedere come evolve la minima varianza. La posizione ottimale del punto A corrisponde al più piccolo valore della varianza. Poi si realizza la stessa simulazione variando la rigidezza e mantenendo costante la circonferenza.

Nel seguito si studia l'evoluzione della minima varianza per diversi raggi r , mantenendo costante la rigidezza. I risultati sono i seguenti:

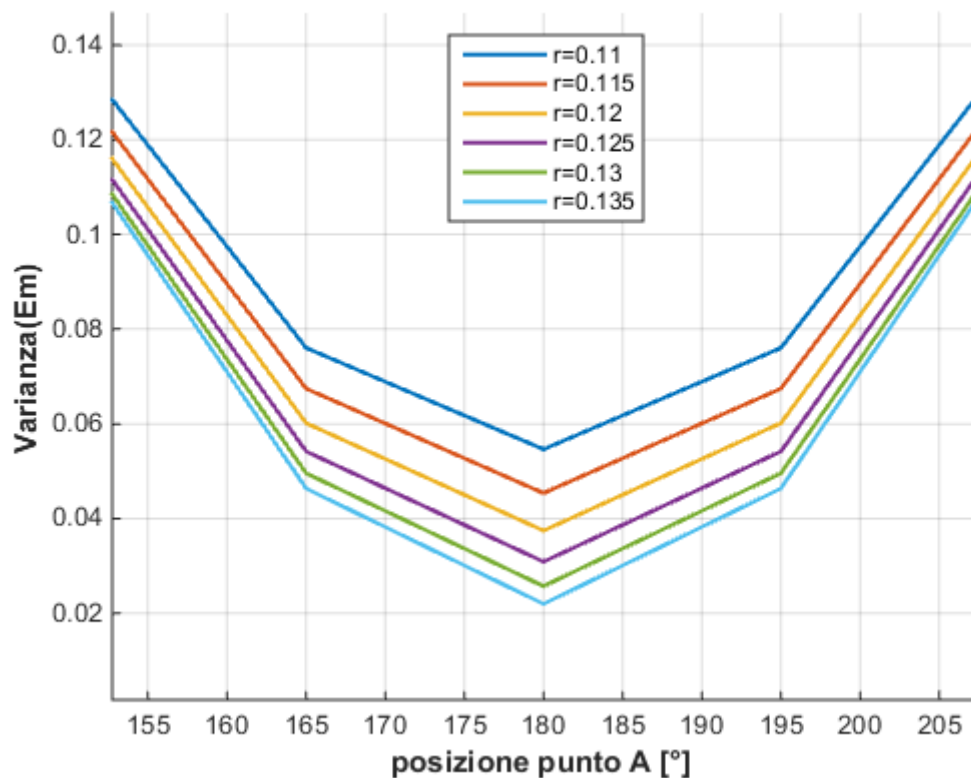


Figura 25: Varianza minima al variare del raggio r

Si osserva che al crescere del raggio r della circonferenza dove evolve il punto A, il valore della minima varianza diminuisce e il minimo assoluto è ottenuto quando il punto A si trova in posizione $r=0.135m$; $\alpha = 180^\circ$. A questa posizione, tutta l'energia meccanica vale solo energia cinetica perché l'energia potenziale elastica è nulla.

Ora, si osserva la variazione della minima varianza al variare della rigidezza k mantenendo costante il raggio delle circonferenza. Il risultato è il seguente:

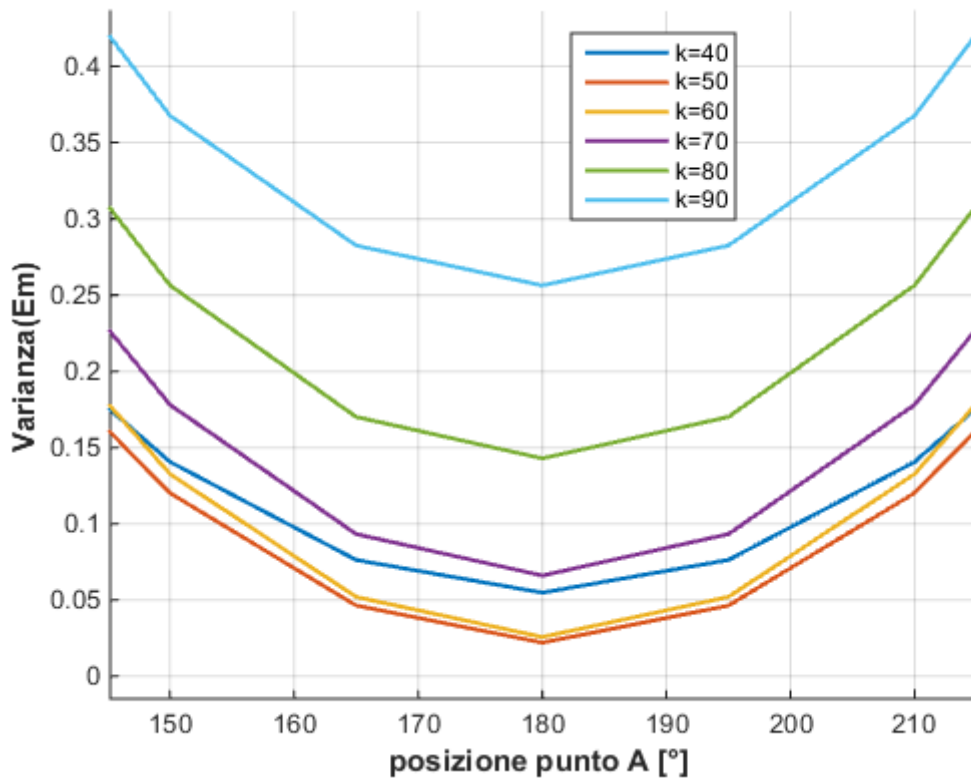


Figura 26: Minima varianza al variare della rigidezza k

Da questo grafico si osserva che al crescere delle rigidezza k della molla, la minima varianza cresce poi decresce e il minimo assoluto si trova quando $k \in [50; 60]$

Queste simulazioni appena fatte permettono di capire che minimizzando la varianza dell'energia meccanica con un opportuno algoritmo di minimizzazione, sarà possibile determinare una o più triple (r, α, k) per la(le) quale(i) la varianza dell'energia meccanica è minima. Per tali triple, l'energia meccanica è quasi costante. Questo significa che la molla, grazie alla sua energia potenziale elastica sta bilanciando gli sforzi inerziali (energia cinetica) e quindi il motore deve solo vincere gli sforzi di attrito e altre non-linearità del sistema che sono comunque degli sforzi piccolissime rispetto a quello che è richiesto al motore per trascinare la manovella.

2.4 Metodi di ottimizzazione per il punto A (r, α) e la molla (k, l_0)

Da quello visto in paragrafo 4.3, i limiti per la ricerca del raggio r sono:

$$r \leq 0.135 m \quad \text{oppure} \quad r \geq 0.295 m \quad \text{con la molla di lunghezza a vuoto } l_0 = 0.08m$$

Questi limiti permettono di mantenere la molla sempre in trazione e saranno introdotti negli algoritmi di ottimizzazione come essendo dei vincoli.

Rispettando la stessa logica dell'analisi fatta nel paragrafo 2.3, Il punto A ottimale e la rigidità della molla vanno cercati usando tre metodi di ottimizzazione:

Minimizzazione della coppia massima

Minimizzazione della varianza dell'energia meccanica

Minimizzazione del lavoro globale compiuto dal motore.

Anche in questa parte, la legge di moto usata per la simulazione è la legge cicloidale con un tempo di azionamento fissato a $t_m = 0.5$ s per uno spostamento di $h = 2\pi$ radianti.

2.4.1 Metodo 1: minimizzazione diretta della coppia massima

Nel paragrafo 2.1.2 si è scritto il modello del sistema in presenza della molla. Questo modello definisce la coppia richiesta al motore in funzione dei parametri della legge di moto (che sono noti), della posizione del punto A in coordinate polari (r, α) e dei parametri della molla (rigidità, lunghezza a vuoto). Da quello che è stato fatto nel paragrafo 2.3, la coppia massima può essere minimizzata se la tripla (r, α, k) è opportunamente scelta.

I criteri di ottimizzazione applicati per questo metodo sono:

Il punto A deve essere posto tale da minimizzare la massima coppia motrice necessaria per trascinare la manovella per un giro completo e in presenza di una molla adatta.

Il punto A è vincolato ad una circonferenza di raggio r e le sue coordinate polari sono (r, α) con $r > 0$ e rispettando i vincoli sopra segnati e $\alpha \in [0; 2\pi]$.

Per determinare il punto A valido e la molla adatta per l'applicazione, si usa una funzione di ottimizzazione vincolata chiamata "fminimax" che si trova nella "MATLAB's Optimization Toolbox" e permette di minimizzare il massimo di una funzione .

I parametri d'ingresso della funzione sono:

Coppia richiesta al motore in presenza della molla: è la grandezza di cui si vuole minimizzare il valore massimo.

Vincoli lineari di uguaglianza

Vincoli lineari di disuguaglianza

Vincoli di limiti

Condizioni iniziali

I parametri di uscita sono:

Valore minimo tra i massimi della coppia.

La posizione del punto A e la rigidità k per le quali la coppia massima ha il più piccolo valore.

Le tolleranze ammesse in default dall'algoritmo sono:

Tolcon = $1e-6$ è la tolleranza di violazione delle condizioni iniziali

TolFun = $1e-6$ è la tolleranza sul valore della funzione che termina l'algoritmo.

TolX = $1e-6$ è la tolleranza che termina l'algoritmo sul punto in cui la funzione è valutata.

2.4.2 Primo approccio di ottimizzazione

Per prima istanza, si applica l'algoritmo "fminimax" con i seguenti parametri:

Valore assoluto della coppia richiesta al motore in presenza della molla: è la grandezza da minimizzare il massimo.

Vincoli lineari di uguaglianza: non specificati

Vincoli lineari di disuguaglianza: $0 < r \leq (OM - l_0)$; $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; $k > 0$

Vincoli di limiti: non specificati

Condizioni iniziali: $(r_0; \alpha_0; k_0)$ sono le coordinate polari del punto A e la rigidezza. Per motivi di limitare il numero di variabili nella funzione di minimizzazione, si fissa la lunghezza a vuoto della molla a $l_0 = 0.08m$

Si aspetta come risultato:

Valore del lavoro minimo compiuto dal motore.

La posizione del punto A e la rigidezza k per le quali la coppia massima è minima.

Le seguenti figure mostrano i risultati ottenuti in diverse condizioni iniziali.

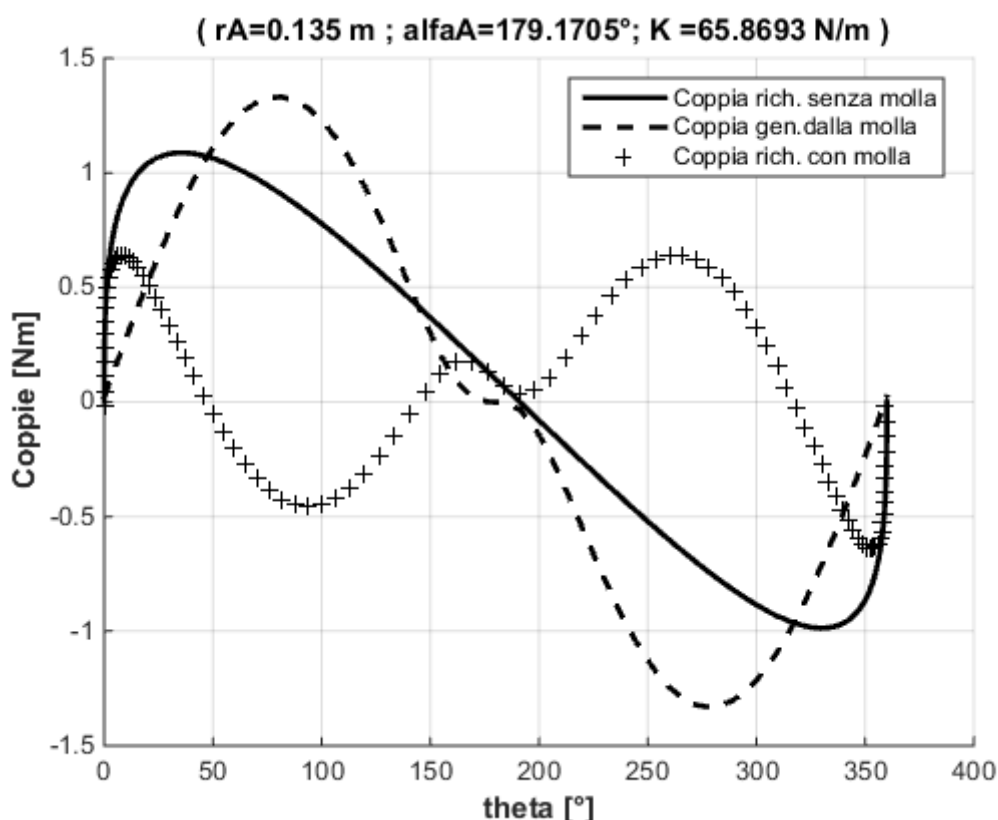


Figura 27: Condizioni iniziali ($r=0.05m$; $\alpha = 180^\circ$; $k=20N/m$)

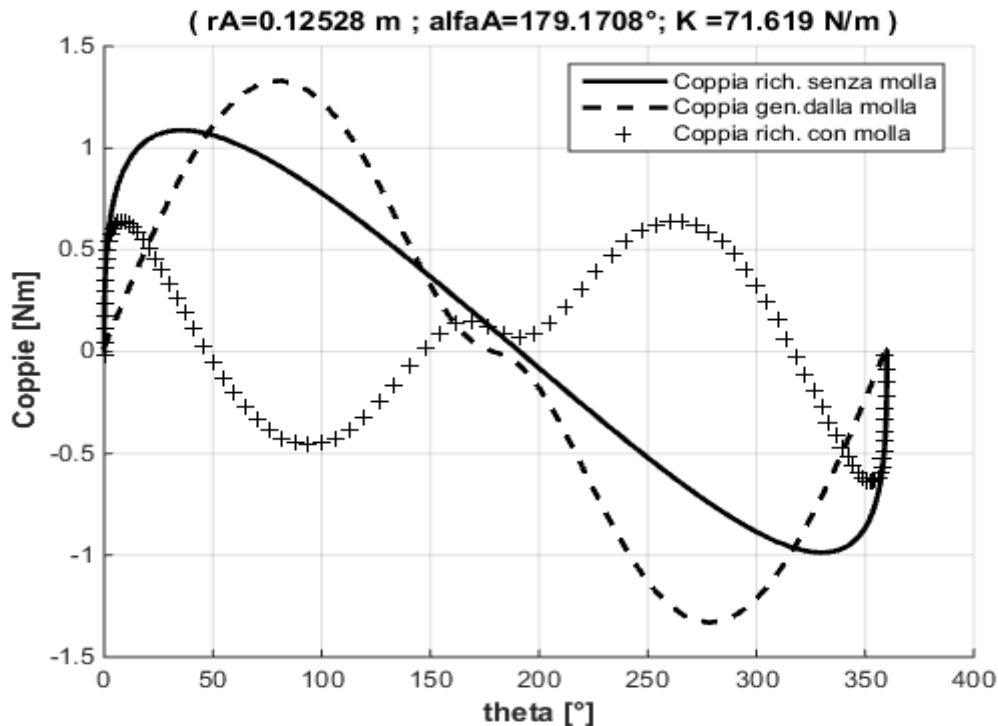


Figura 28: Condizioni iniziali ($r=0.11$ m; $\alpha = 90^\circ$; $k=3$ N/m)

Si osserva che la coppia richiesta al motore in presenza della molla è diminuita rispetto al caso senza molla ma la posizione del punto A e la rigidezza della molla variano in base alle condizioni iniziali ($r_0 ; \alpha_0 ; k_0$). Questa variazione è legata al fatto che ci sono tante combinazioni delle variabili ($r ; \alpha ; k$) che portano a diversi minimi locali della grandezza minimizzata.

Per eliminare tale dipendenza, una soluzione consiste ad usare un ciclo iterativo per una variabile ad esempio il raggio r e così si ottiene che la coppia in funzione di ($\alpha ; k$) ha un minimo che non dipende più dalle condizioni iniziali perché si riesce a raggiungere il minimo globale. Vice-versa usare un ciclo iterativo per la rigidezza k così, nella grandezza minimizzata le variabili diventano ($r ; \alpha$) e il risultato non dipende più dalle condizioni iniziali perché si riesce a raggiungere il minimo globale.

2.4.3 Secondo approccio di ottimizzazione

In questo approccio, si tiene fissato il raggio r della circonferenza dove evolve il punto A e si determina con la funzione “fminimax” il valore di rigidezza k e la posizione angolare α che garantiscono il minimo valore della coppia massima richiesta al motore. Poi ripetendo questa operazione con un ciclo iterativo sul raggio r , si riesce a trovare delle triple ($r ; \alpha ; k$) che portano al minimo valore dalla coppia massima richiesta al motore per spostare la manovella in un giro completo.

Ora si supponga il raggio fissato a $r = 0.135$ m.

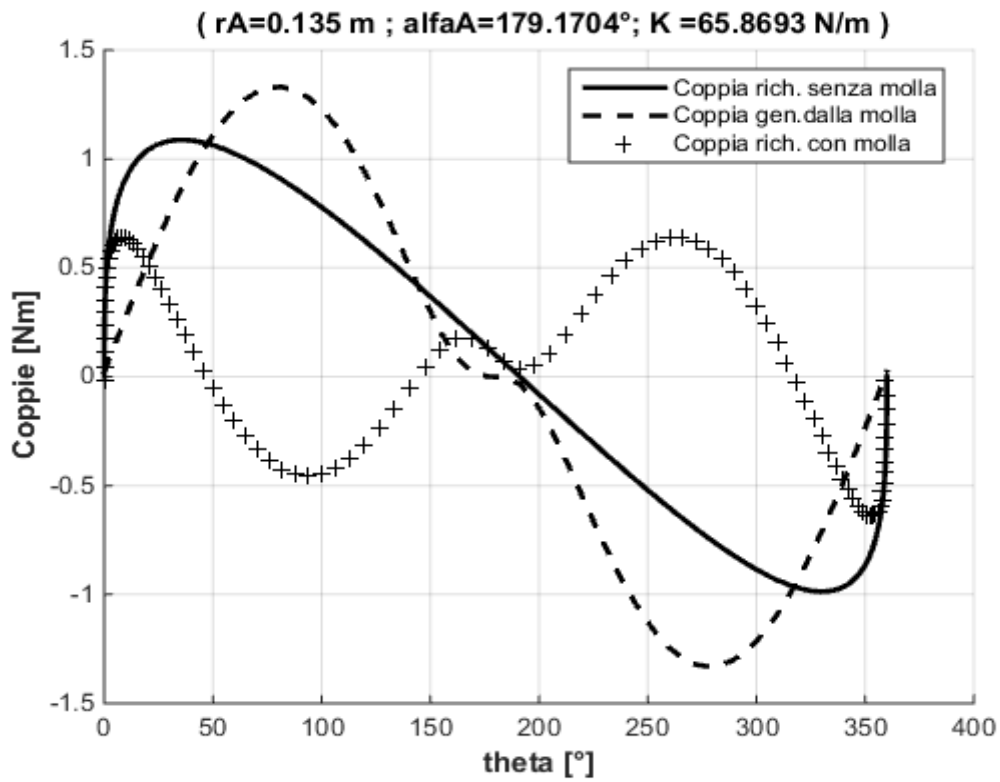


Figura 29: Condizioni iniziali ($\alpha = 180^\circ$; $k=20$ N/m)

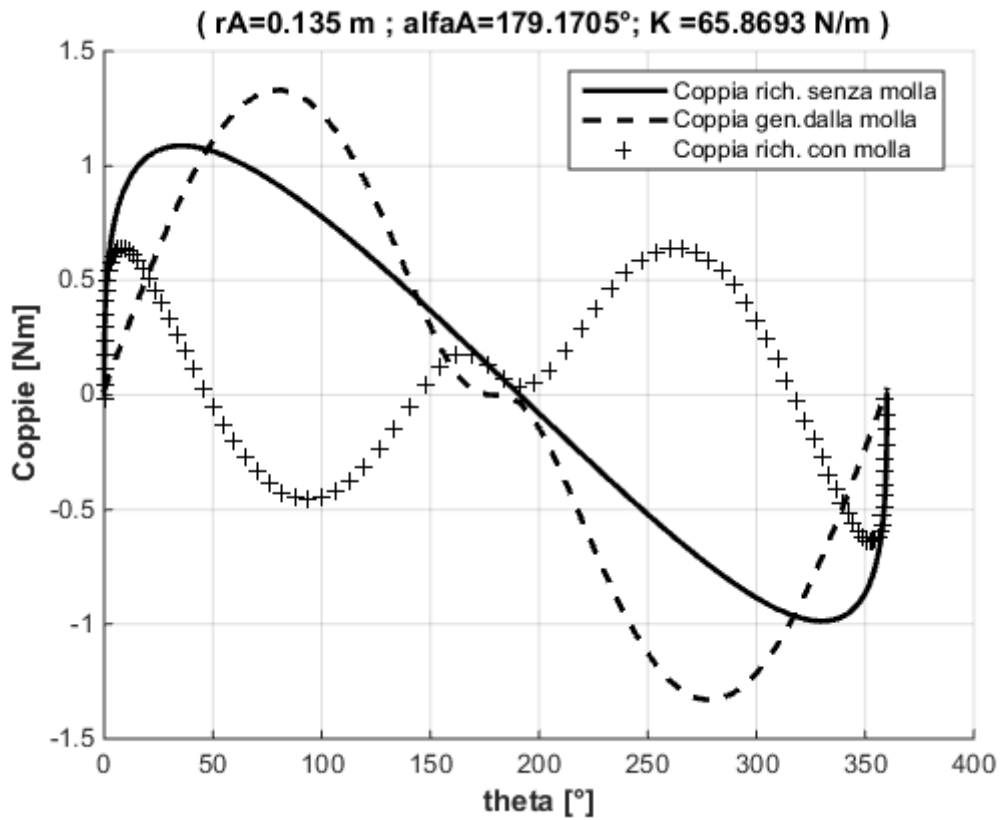


Figura 30: Condizioni iniziali ($\alpha = 90^\circ$; $k=3$ N/m)

Si osserva su queste figure che usando delle condizioni iniziali differenti, il risultato, intendendo ($\alpha(^{\circ})$ $k(N/m)$ $C_{max}(Nm)$) rimane invariato.

Applicando un ciclo iterativo sul raggio da 0.1m a 0.135m con passo 0.005 e sulla rigidezza da 64N/m a 82N/m con passo 2N/m si ottengono le seguenti tabelle.

$r(m)$	$\alpha(^{\circ})$	$k(N/m)$	$C_{max}(Nm)$
0.1000	179.1679	91.6809	0.6425
0.1050	179.1690	86.9631	0.6423
0.1100	179.1698	82.6648	0.6421
0.1150	179.1703	78.7326	0.6420
0.1200	179.1707	75.1216	0.6419
0.1250	179.1708	71.7946	0.6419
0.1300	179.1707	68.7195	0.6419
0.1350	179.1704	65.8693	0.6419

Tabella 4: Variazioni r da 0.1m a 0.135m

$r(m)$	$\alpha(^{\circ})$	$k(N/m)$	$C_{max}(Nm)$
0.1350	179.1462	64.0000	0.6477
0.1348	179.1705	66.0000	0.6419
0.1312	179.1707	68.0000	0.6419
0.1279	179.1708	70.0000	0.6419
0.1247	179.1708	72.0000	0.6419
0.1216	179.1707	74.0000	0.6419
0.1187	179.1706	76.0000	0.6419
0.1160	179.1704	78.0000	0.6420
0.1133	179.1702	80.0000	0.6420
0.1108	179.1699	82.0000	0.6421

Tabella 5: Variazioni k da 64N/m a 82N/m

Nelle lista tabella 4, si osserva che esistono tre triple $(r; \alpha; k)$ che portano alla stessa coppia $C_{max} = 0.6419Nm$ che è il valore minimo. In questo approccio si ha: $r \in [0.12m; 0.135m]$; $\alpha = 179.17^{\circ}$; $k \in [65.87N/m; 75.12N/m]$

Nella lista in tabella 5 si osserva che esistono sei triple $(r; \alpha; k)$ che portano alla stessa coppia $C_{max} = 0.6419Nm$ che è il valore minimo. In questo approccio si ha: $r \in [0.1187m; 0.1348m]$; $\alpha = 179.17^{\circ}$; $k \in [66N/m; 76N/m]$

Confrontando le due tabelle, si definisce un intervallo comune che vale per i due casi.

$r \in [0.12m; 0.135m]$; $\alpha = 179.17^{\circ}$; $k \in [66N/m; 75N/m]$; $C_{max} = 0.6419Nm$

Nota: La coppia massima richiesta al motore senza la molla è di 1.0869 Nm . Questo valore si calcola utilizzando il modello del sistema senza molla.

Con $l_0 = 0.08m$ e scegliendo una tripla $(r; \alpha; k)$ tra quelle in colore giallo, si ottiene che la coppia massima richiesta al motore è di 0.6419 Nm sia un abbassamento di coppia massima del 41% circa.

Ad esempio per $r = 0.1279\text{m}$ $\alpha = 179.17^\circ$ $k = 70\text{N/m}$ si ha il seguente grafico:

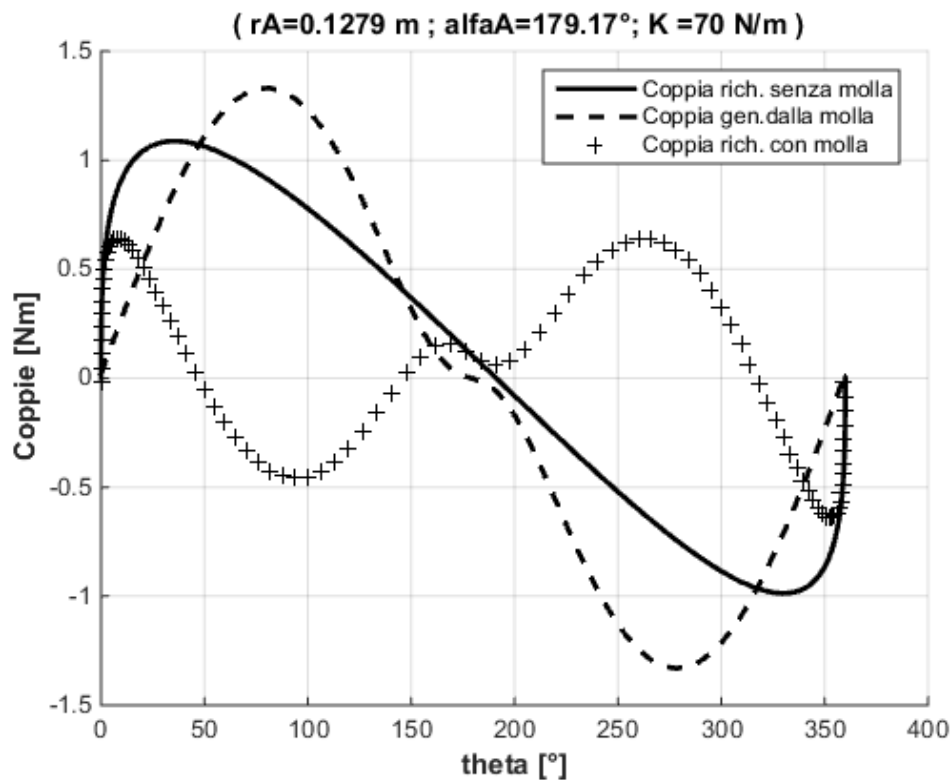


Figura 31: Minimizzazione diretta della coppia di picco e coppia rms

Si osserva che la coppia massima richiesta in presenza della molla è leggermente alta (0.6422Nm) rispetto a quello trovato in simulazione con l'algoritmo di ottimizzazione(0.6419Nm) ma si nota che la percentuale di abbassamento è sempre di circa 41%

Per i valori di $r \geq 0.295\text{ m}$ i risultati della simulazione applicando il ciclo iterativo su r sono i seguenti:

$r(\text{m})$	$\text{alfa}(\text{°})$	$k(\text{N/m})$	$C_{\text{max}}(\text{Nm})$
0.2950	179.1301	26.2800	0.6514
0.3000	179.1287	25.7559	0.6517
0.3050	179.1271	25.2510	0.6520
0.3100	179.1246	24.7645	0.6523
0.3150	179.1223	24.2951	0.6526
0.3200	179.1199	23.8421	0.6529
0.3250	179.1176	23.4046	0.6532
0.3300	179.1153	22.9820	0.6535

Tabella 6: Variazioni r da 0.295m a 0.33m

Si osserva che la coppia massima è maggiore di quella richiesta quando $r \leq 0.135\text{ m}$ quindi punti A su circonferenze di raggio $r \geq 0.295\text{ m}$ non verranno considerati.

2.4.4 Metodo 2: minimizzazione della varianza dell'energia meccanica

Per raggiungere l'obiettivo di minimizzare gli sforzi richiesti al motore per trascinare la manovella, questo metodo di ottimizzazione sfrutta il fatto che quando l'energia meccanica è costante, la sua varianza è nulla. Il legame tra la minima varianza dell'energia meccanica e il fatto di abbassare gli sforzi richiesti al motore è stato spiegato nel paragrafo 2.3.2.

I criteri di ottimizzazione per ottenere il punto A ottimo e la molla adatta sono:

Il punto A deve essere posto tale da minimizzare varianza dell'energia meccanica per un giro completo e in presenza di una molla adatta.

Il punto A è vincolato ad una circonferenza di raggio r e le sue coordinate polari sono (r, α) con $r > 0$ e $\alpha \in [0; 2\pi]$

Per determinare il punto A valido per l'applicazione, si usa una funzione di ottimizzazione vincolata chiamata "fmincon" che si trova nella "MATLAB's Optimization Toolbox" e permette di minimizzare una detta funzione tenendo conto dei vincoli.

I parametri d'ingresso della funzione sono:

La varianza dell'energia meccanica del sistema in presenza della molla: è la grandezza da minimizzare

Vincoli lineari di uguaglianza : non specificati

Vincoli lineari di disuguaglianza: $0 < r \leq (OM - l_0)$; $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; $k > 0$

Vincoli di limiti : non specificati

Condizioni iniziali : $(r_0 ; \alpha_0 ; k_0)$.

I parametri di uscita sono:

Valore della minima varianza dell'energia meccanica.

La posizione del punto A e la rigidità della molla k per le quali la varianza dell'energia meccanica è minima. La lunghezza a vuoto della molla è fissata a $l_0 = 0.08m$

Le tolleranze ammesse in default dall'algoritmo sono:

Tolcon = $1e-6$ è la tolleranza di violazione delle condizioni iniziali

TolFun = $1e-6$ è la tolleranza sul valore della funzione che termina l'algoritmo.

TolX = $1e-10$ è la tolleranza che termina l'algoritmo sul punto in cui la funzione è valutata.

Per eliminare la dipendenza di "fmincon" dalle condizioni iniziali, si procede come visto nel caso di "fminimax"

Si applica il ciclo iterativo su r poi su k e i risultati sono i seguenti:

$r(m)$	$\alpha(^{\circ})$	$k(N/m)$	Var_{min}
0.1100	180.0000	68.6261	0.0208
0.1150	180.0000	65.4721	0.0206
0.1200	180.0000	62.5769	0.0204
0.1250	180.0000	59.9087	0.0202
0.1300	180.0000	57.4431	0.0201
0.1350	179.9999	55.1551	0.0199

$r(m)$	$\alpha(^{\circ})$	$k(N/m)$	Var_{min}
0.1350	180.0000	50.0000	0.0248
0.1350	180.0000	51.0000	0.0231
0.1350	180.0000	52.0000	0.0218
0.1350	180.0000	53.0000	0.0208
0.1350	180.0000	54.0000	0.0202
0.1350	180.0000	55.0000	0.0199
0.1335	180.0000	56.0000	0.0200
0.1313	180.0000	57.0000	0.0200

Tabella 7: Variazioni r da 0.11m a 0.135m

Tabella 8: Variazioni k da 50N/m a 57N/m

Si osserva dalle due tabelle che la tripla $(r; \alpha; k)$ che porta alla minima varianza è $r=0.135m$ $\alpha=180^{\circ}$ $k=55N/m$

Con questi parametri si ha il seguente grafico:

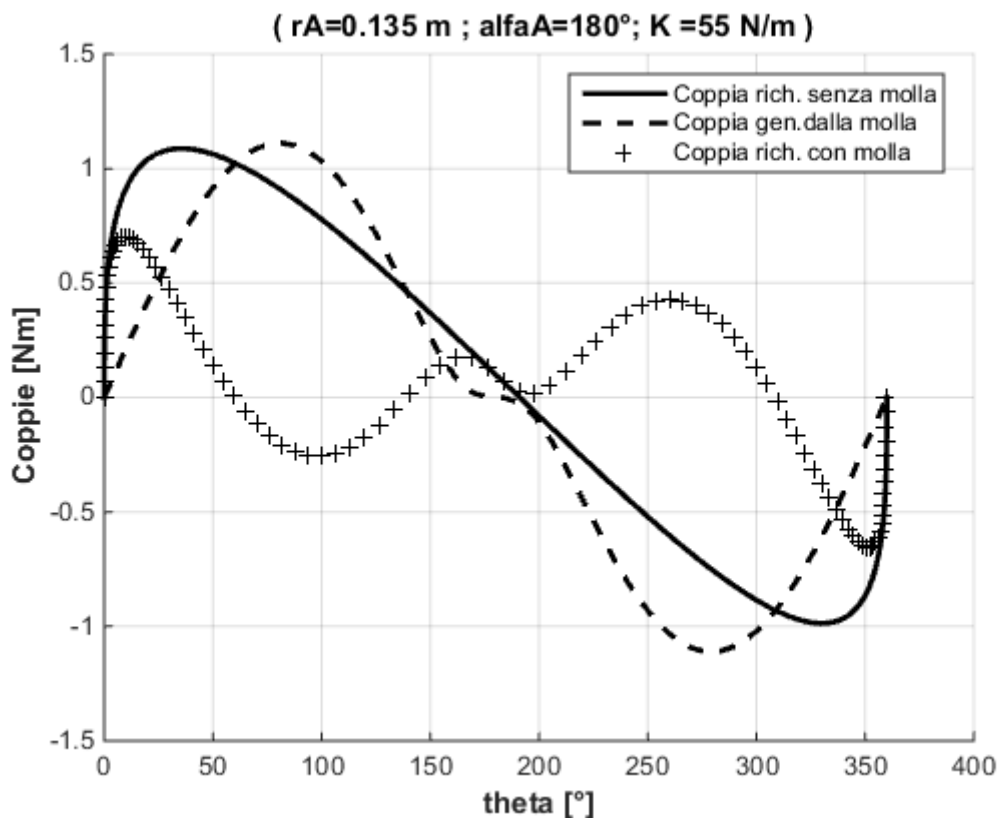


Figura 32: Coppia di picco mediante minimizzazione della varianza dell'energia meccanica

In questo caso, si ottiene un abbassamento della coppia di picco del 36% coppia rms del 45%

2.4.5 Confronto dei risultati con altre leggi di moto

La coppia massima richiesta al motore senza la molla è: $\max C_m = 1.0868 \text{ Nm}$

La coppia rms (coppia continuativa) richiesta al motore senza la molla è : $C_{m \text{ rms}} = 0.7314 \text{ Nm}$

Per tutti i metodi $l_0 = 0.08 \text{ m}$.

Di seguito sono presentati i risultati per tre diverse leggi di moto avendo tempo di azionamento $t_m = 0.5 \text{ s}$ e spostamento $h = 2\pi \text{ radianti}$

Le tre leggi di moto sotto presentate sono state scelte perché garantiscono la continuità della funzione di costo che viene applicata come ingresso dell'algoritmo di ottimizzazione. Infatti la continuità della funzione da minimizzare è una condizione da soddisfare per garantire il buon funzionamento degli algoritmi "fminimax" e "fmincon".

❖ Legge cicloidale

Metodi di ottimizzazione ->	Minimizzazione della coppia massima ("fminimax")	Minimizzazione dalla varianza dell'energia meccanica ("fmincon")
Coppia massima richiesta al motore	0.6423 Nm	0.7084 Nm
Abbassamento della coppia massima (%)	41%	36%
Coppia rms richiesta al motore	0.4162 Nm	0.40 Nm
Abbassamento della coppia rms (%)	43%	45%
Posizione del punto A e rigidità della molla	$r \in [0.12 \text{ m}; 0.135 \text{ m}]$ $\alpha = 179.17^\circ$ $k \in [66 \text{ N/m}; 75 \text{ N/m}]$	$r = 0.135 \text{ m}$ $\alpha = 180^\circ$ $k = 53 \text{ N/m}$

Tabella 9: Risultati ottenuti con la legge cicloidale

❖ Legge polinomiale 5°grado

Metodi di ottimizzazione →	Minimizzazione della coppia massima ("fminimax")	Minimizzazione dalla varianza dell'energia meccanica ("fmincon")
Coppia massima richiesta al motore	0.6738 Nm	0.7378Nm
Abbassamento della coppia massima (%)	32%	26%
Coppia rms richiesta al motore	0.4396 Nm	0.4128 Nm
Abbassamento della coppia rms (%)	35.5%	39%
Posizione del punto A e rigidezza della molla	$r \in [0.12m; 0.13m]$ $\alpha = 179.17^\circ$ $k \in [64N/m; 74N/m]$	$r = 0.135m$ $\alpha = 180^\circ$ $k = 46N/m$

Tabella 10: Risultati ottenuti con la legge polinomiale di quinto grado

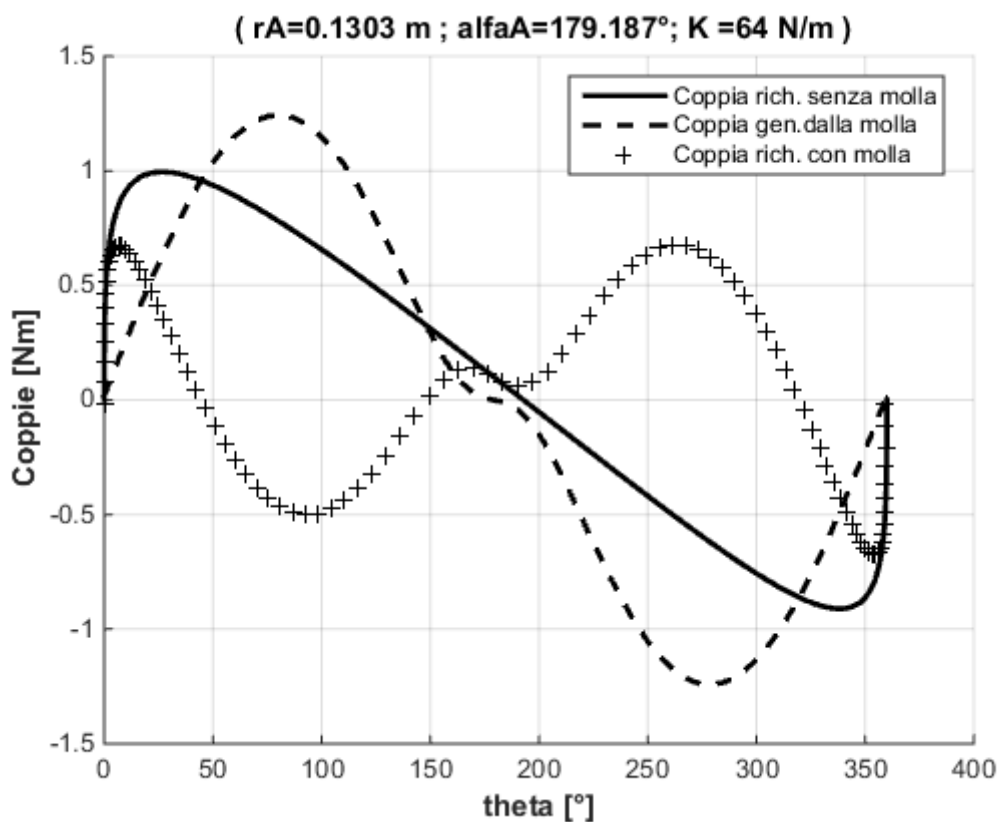


Figura 33: Minimizzazione coppia massima con legge polinomiale 5° grado

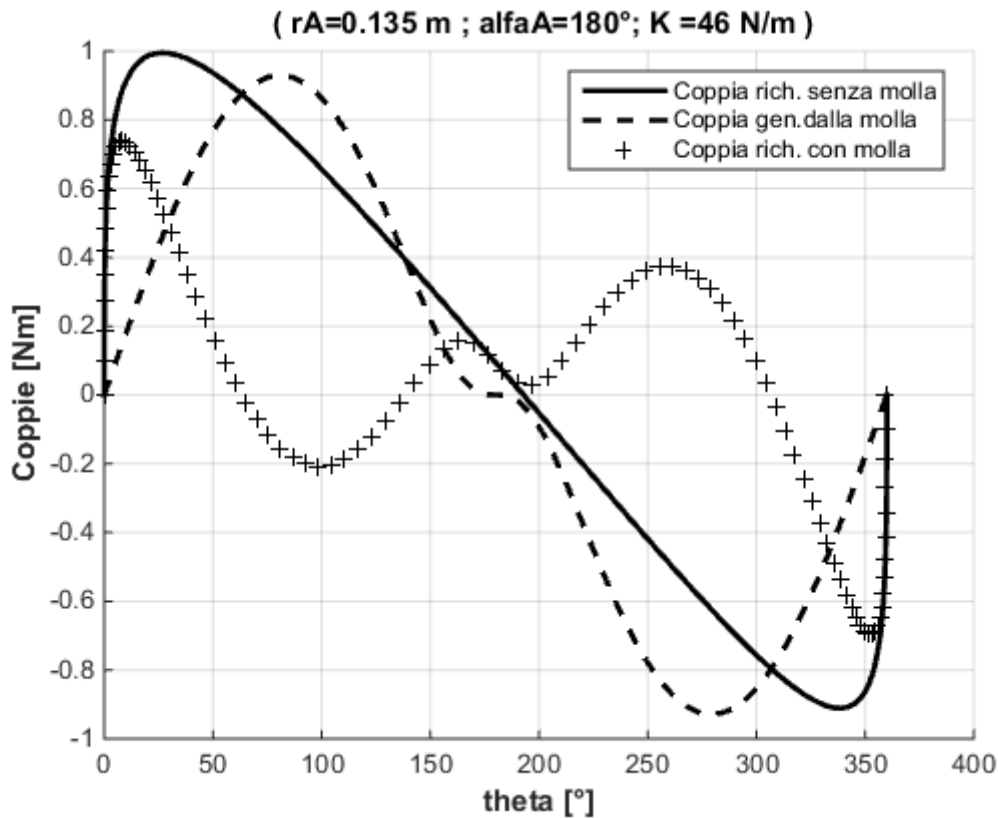


Figura 34: Minimizzazione varEm con legge polinomiale 5° grado

❖ Legge trapezoidale in accelerazione

Metodi di ottimizzazione →	Minimizzazione della coppia massima ("fminimax")	Minimizzazione dalla varianza dell'energia meccanica ("fmincon")
Coppia massima richiesta al motore	0.7131 Nm	0.7949 Nm
Abbassamento della coppia massima (%)	33%	25%
Coppia rms richiesta al motore	0.4320 Nm	0.4051 Nm
Abbassamento della coppia rms (%)	41%	44%
Posizione del punto A e rigidezza della molla	$r \in [0.12\text{m}; 0.134\text{m}]$ $\alpha = 179.11^\circ$ $k \in [70\text{N/m}; 78\text{N/m}]$	$r = 0.135\text{m}$ $\alpha = 180^\circ$ $k = 53\text{N/m}$

Tabella 11: Risultati ottenuti con la legge trapezoidale in accelerazione

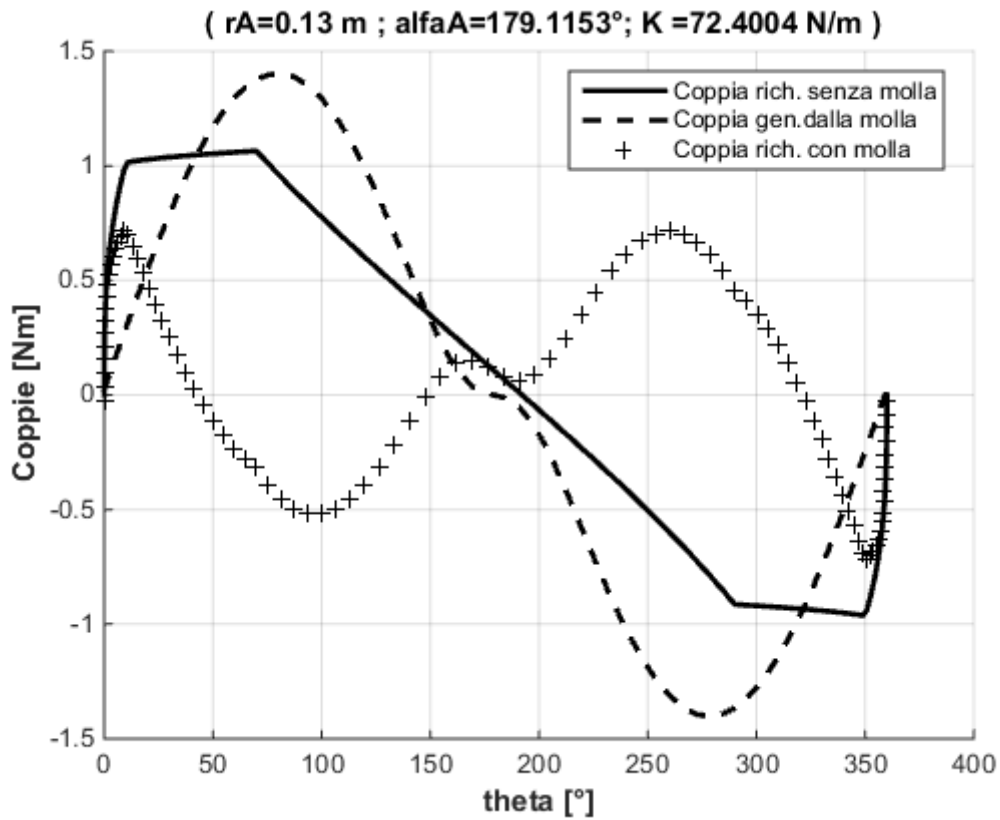


Figura 35: Minimizzazione coppia di picco con legge trapezoidale in accelerazione

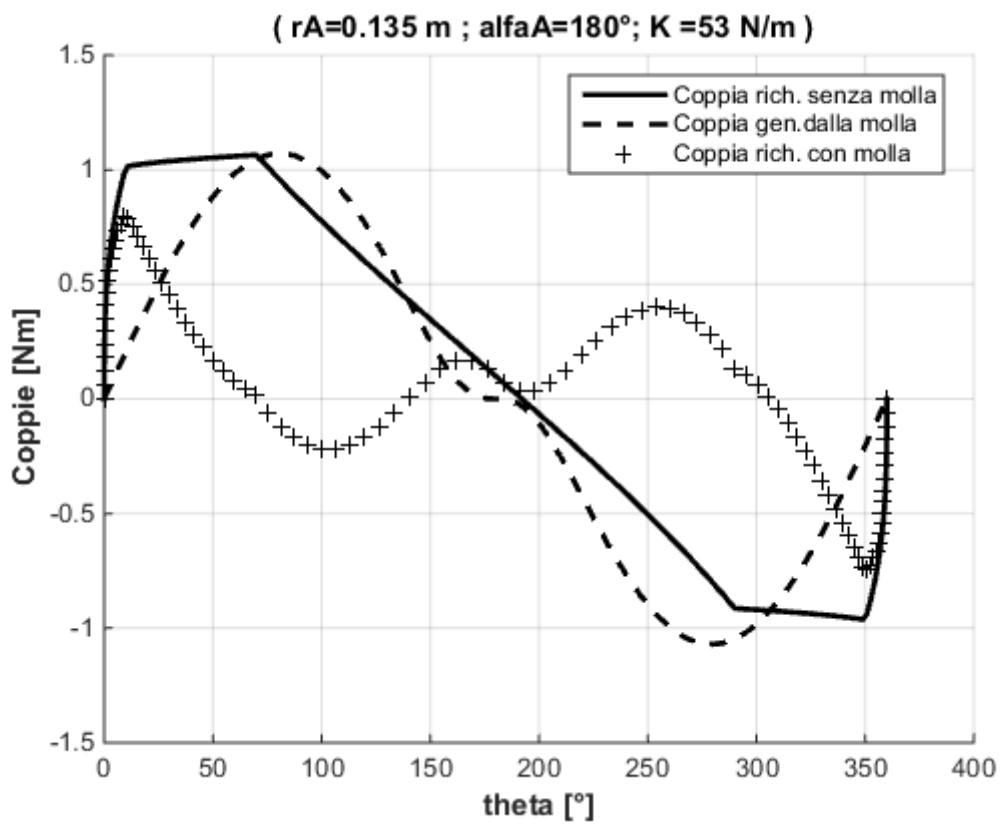


Figura 36: Minimizzazione VarEm con legge trapezoidale in accelerazione

2.4.6 Analisi dei risultati

I risultati presentati nelle tabelle 9, 10 e 11 permettono di capire che con la legge cicloidale l'abbassamento è migliore sia in coppia di picco che in coppia RMS. Questo è dovuto al fatto che la legge cicloidale ha una accelerazione continua e quindi garantisce una coppia richiesta al motore anch'essa continua. Di più, la forma sinusoidale della coppia richiesta al motore (che deriva dal fatto che l'accelerazione della legge cicloidale è sinusoidale) permette un migliore bilanciamento della coppia generata dalla molla (che ha anch'essa una forma sinusoidale).

Confrontando i due algoritmi di ottimizzazione, si nota che l'algoritmo che minimizza direttamente la coppia massima produce risultati migliori per le tre leggi di moto. È importante notare che il metodo basato sulla minimizzazione della varianza dell'energia meccanica anche se produce risultati bassi rispetto al metodo di minimizzazione diretta della coppia massima ha un punto di forza perché non dipende dal modello del meccanismo. Questo significa che questo metodo è applicabile su un sistema meccanico anche se non è noto esplicitamente il suo modello dinamico visto che sfrutta piuttosto l'energia meccanica del sistema.

Il metodo basato sulla minimizzazione della coppia massima produce una più grande varietà di triple $(r; \alpha; k)$ che portano ad un buon risultato quindi un migliore margine nella scelta. Si può allora dire che ogni metodo ha i suoi vantaggi e limiti quindi la scelta dipende dall'applicazione.

2.4.7 Miglioramento del metodo di minimizzazione della varianza dell'energia meccanica

Per ottenere questi presentati con i due metodi precedenti si sono fissati il valore della lunghezza a vuoto della molla e la distanza OM tra l'asse di rotazione del motore e il punto di fissaggio della molla. Visto che i risultati ottenuti dipendono anche da quei valori fissati, si cerca in questo paragrafo di sviluppare un approccio che permette di avere il risultato considerando il valore ottimo per l_0 e OM.

Nel seguito, OM rimane fissato al suo valore di prima cioè 21,5 cm. Questo valore è un vincolo del problema perché nella manovella presente nel laboratorio per la verifica dei risultati il foro è fatto a quella distanza.

L'algoritmo utilizzato nel seguito permette di calcolare direttamente $(r; \alpha; k; l_0)$ che definiscono la posizione del punto di attacco della molla a telaio e le caratteristiche della molla. Per fare ciò si modifica l'algoritmo precedente aggiungendo delle istruzioni che permettono all'algoritmo di arrivare a trovare il minimo globale partendo da una condizione iniziale pseudo casuale.

Purtroppo in matlab questo metodo esiste solo per certe funzioni di ottimizzazione e non è definito per l'algoritmo "fminimax". Per quello verrà applicato solo nel caso della minimizzazione della varianza dell'energia meccanica.

L'algoritmo si definisce come segue:

Il risultato ottenuto con questo metodo usando una legge cicloidale è il seguente:

$r(m)$	$\alpha(^{\circ})$	$k(N/m)$	$l_0(m)$	Var_{min}
0.1271	0.0296	27.3099	0.5000	0.0015

Tabella 12: Risultati del miglioramento con l_0 variabile

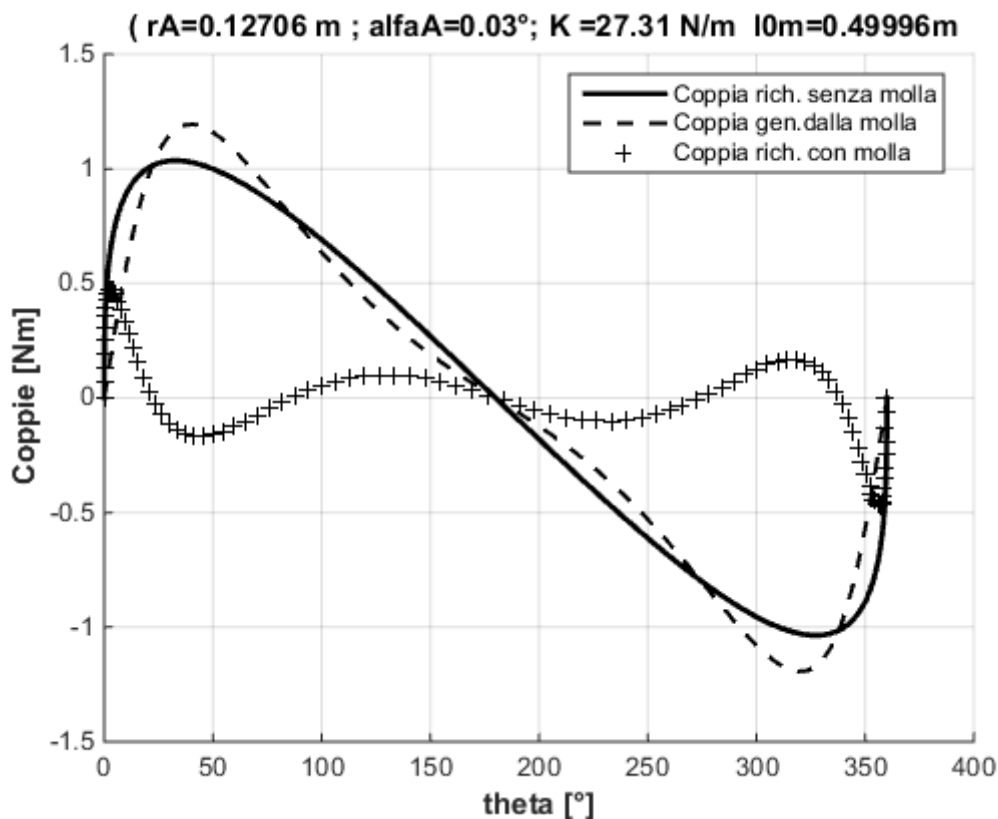


Figura 37: Minimizzazione coppia massima e rms con l_0 variabile

Si osserva che con questo metodo produce risultati migliori in quanto, la coppia massima viene abbassata del 55% e la rms del 68% con l'introduzione della molla. Si ricorda che nel precedente metodo usato la coppia massima era abbassata del 36% e la rms del 45%.

Si può notare che questo algoritmo è molto più intuitivo rispetto al caso precedente nel senso che si riesce in un solo colpo a trovare la posizione ottimale del punto A e le caratteristiche della molla.

Se si considera anche OM variabile nei limiti della lunghezza delle manovella si ottiene il seguente:

$r(m)$	$\alpha(^{\circ})$	$k(N/m)$	$l_0(m)$	$OM(m)$	$Varmin$
0.0057	0.03	433.01	0.4249	0.0063	0.0000

Tabella 13: Risultati del miglioramento con l_0 e OM variabili

($r_A=0.0057121$ m ; $\alpha_A=0.03^{\circ}$; $K=433.01$ N/m $l_0m=0.42488m$ $OM=0.0063138$

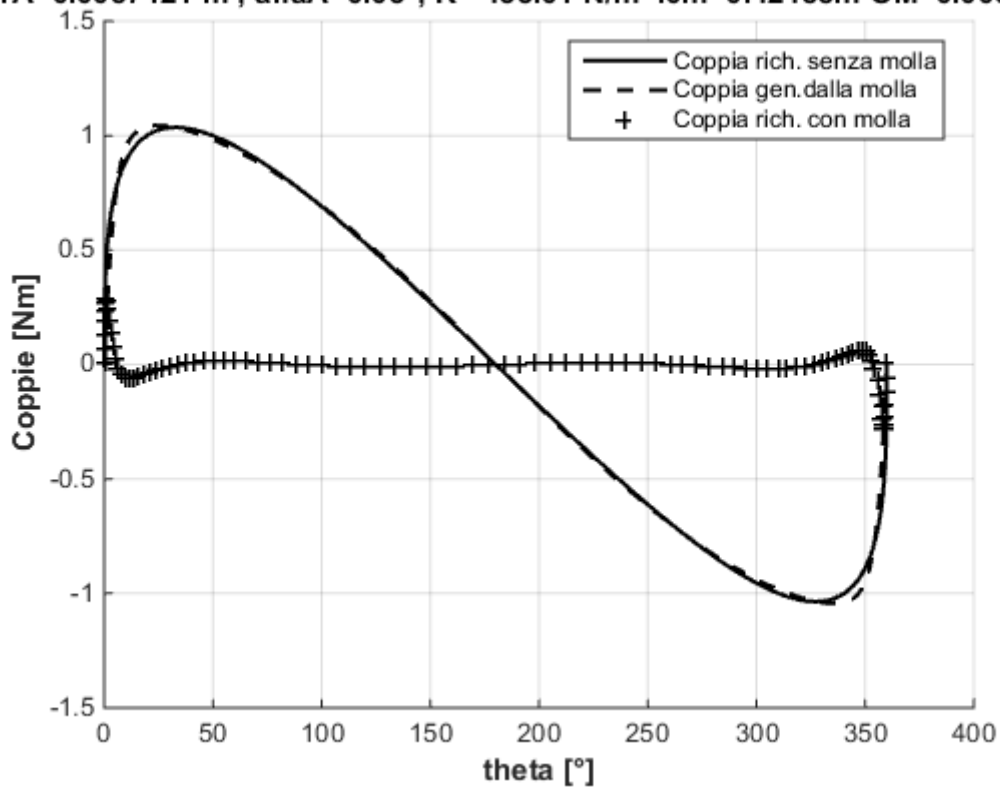


Figura 38: Minimizzazione coppia di picco e rms con l_0 e OM variabili

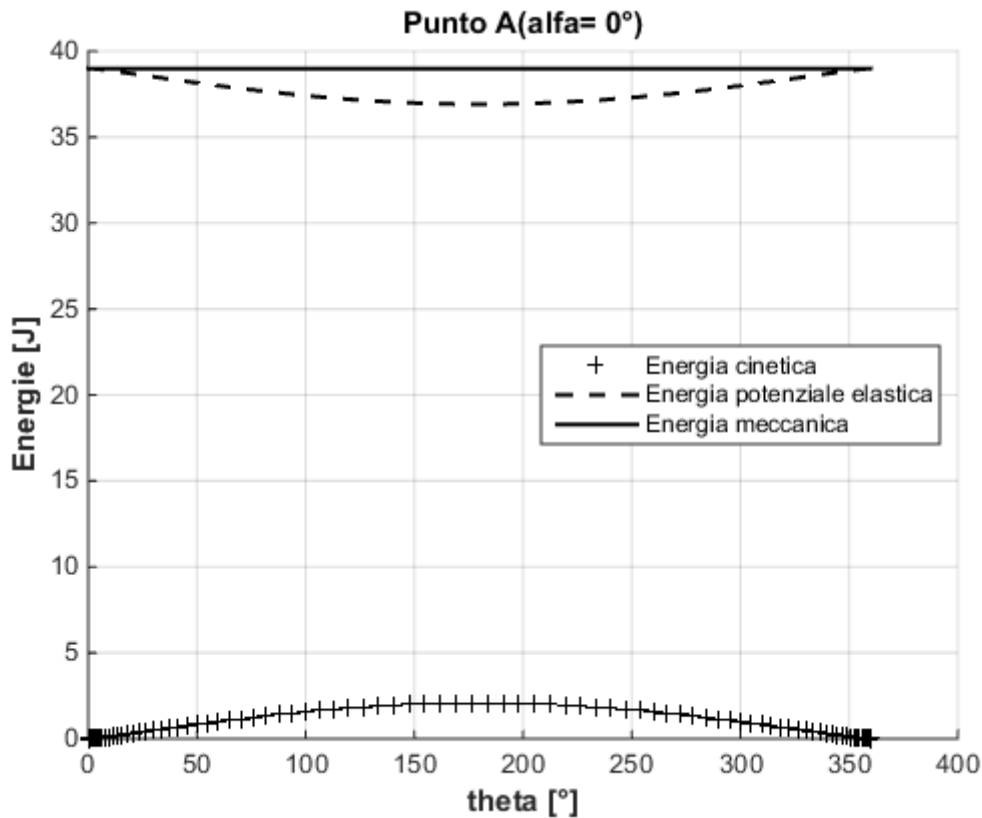


Figura 39: Energia meccanica nel caso ottimo

Si nota in questo caso un abbassamento della coppia massima del 72% e la rms del 86%. Questo risultato è l'ottimo che si può trovare con questo metodo. Si osserva che l'energia cinetica compensa completamente l'energia potenziale elastica e quindi l'energia meccanica è costante. Questo risultato è più ideale che reale ma realizzabile. Infatti, si può notare che OM e IO differiscono di circa 0.5 mm questo significa che al momento che i punti O; M e A sono allineati, la lunghezza della molla è di circa 0.5mm partendo da una lunghezza a vuoto di circa 346mm. Questo non è facile da realizzare. Altra cosa da notare è la distanza OM che vale circa 5mm troppo vicino all'asse.

CAPITOLO 3: MECCANISMO (motore-quadilatero articolato-molla)

In questo capitolo viene fatto uno studio teorico di un meccanismo ad un grado di libertà ad inerzia variabile costituito dagli seguenti elementi: un motore, un quadrilatero articolato e una molla. Si determina prima il modello dinamico del sistema, poi vengono sviluppati metodi di ottimizzazione per determinare i parametri del sistema (posizione di attacco della molla a telaio, rigidezza e lunghezza a vuoto della molla) che garantiscono la minima coppia richiesta al motore.

3.1 Studio del meccanismo posto sul piano orizzontale

Il meccanismo in studio in questa parte è costituito da un motore, un quadrilatero articolato e una molla. L'obiettivo è di determinare le caratteristiche ottimali della molla (rigidezza, lunghezza a vuoto), la posizione ottimale del punto A (attacco della molla a telaio) che permettono di minimizzare gli sforzi richiesti al motore. È importante notare che il risultato ottenuto dipende della legge di moto che è un dato del problema. Si supponga il punto M (attacco della molla al membro1) fisso.

Per affrontare lo studio del meccanismo, è importante fare una sua rappresentazione al fine di scrivere le equazioni della dinamica. La seguente figura rappresenta il meccanismo nel piano orizzontale XY (visto da sopra). Si considerano i punti O, M e A posto nello stesso piano passante per M.

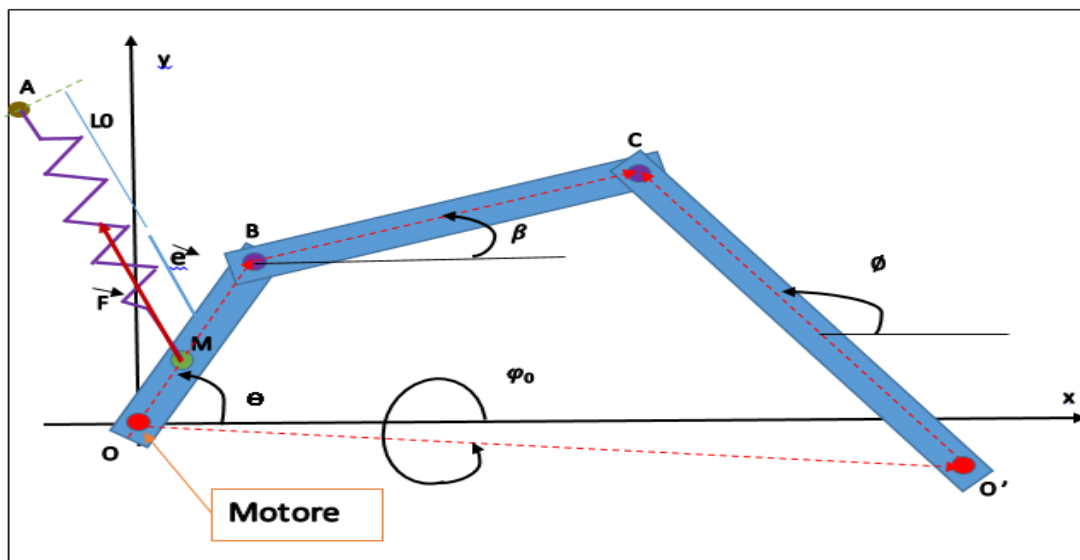


Figura 40: Rappresentazione del quadrilatero nel piano xy

Le caratteristiche del quadrilatero articolato sono le seguenti:

Membro 1: collegato rigidamente al motore

Massa: m_1 ; lunghezza : l_1

Momento d'inerzia rispetto al suo centro di massa $C_1 : I_1$

Membro 2: membro intermedio

Massa: m_2 , ; lunghezza : l_2

Momento d'inerzia rispetto al suo centro di massa $C_2 : I_2$

Membro 3:

Massa: m_3 ; lunghezza : l_3

Momento d'inerzia rispetto al suo centro di massa $C_3 : I_3$

Note: L'angolo φ_0 è costante; la distanza O, O' vale l_0 ; il punto O' è vincolato a telaio

3.1.1 Modello dinamico del meccanismo senza molla

Il sistema (motore-quadrilatero articolato) è un meccanismo ad un grado di libertà perché tutte sue variabili angolari β e ϑ sono riconducibili alla coordinata libera θ . La sua particolarità rispetto al modello studiato nel capitolo 2 è che è un sistema ad inerzia variabile. Questo significa che per certe configurazioni del meccanismo il motore risente una inerzia massima e per altre una inerzia minima. Il motore è attaccato al punto O e la sua posizione angolare è θ . C_m rappresenta la coppia richiesta al motore per trascinare il meccanismo. $\dot{\theta}$ è la velocità del motore e anche del membro 1 essendo tra di loro un collegamento supposto rigido. $f_v \dot{\theta}$ è la coppia resistente derivata dall'attrito viscoso nel motore. La seguente figura rappresenta il modello appena descritto.

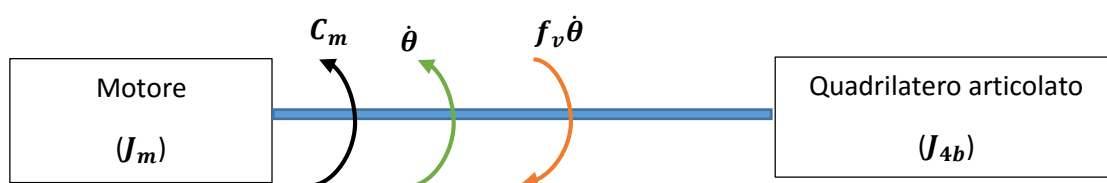


Figura 41: Rappresentazione del Modello dinamico del meccanismo senza molla

In questo modello l'inerzia del motore J_m è costante, l'inerzia del carico (quadrilatero articolato) J_{4b} è variabile e dipende dalla posizione angolare θ del motore. Allora per costruire il modello dinamico del sistema complessivi si deve ricorrere alle equazioni di Eulero-Lagrange per un sistema meccanico ad un grado di libertà ancora chiamate semplicemente

Equazioni di Lagrange in quanto la loro giustificazione fisica è stata compiuto da Lagrange solo.

Le equazioni di Lagrange per un sistema ad un grado di libertà avendo coordinata libera q possono essere di due tipi:

Tipo 1: che sfrutta solo l'energia cinetica T del sistema

Tipo 2: che sfrutta la lagrangiana meccanica definita come $L = T - U$ dove T rappresenta l'energia cinetica del sistema e U la sua energia potenziale.

Il meccanismo studiato in questo paragrafo essendo posto nel piano orizzontale, si ha che l'energia potenziale di gravità è nulla. Quindi si può usare le equazioni di tipo 1 espresse come segue:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_h \quad \text{Dove} \quad Q_h = \sum_h \pm F_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \theta} \quad (3.1)$$

T rappresenta l'energia cinetica del sistema

Le Q_h sono le forze lagrangiane oppure forze/coppie ridotte alla coordinata libera θ

Le F_h sono le forze esterne applicate al meccanismo

$\frac{\partial \varphi_h}{\partial \theta}$ sono i rapporti di velocità tra lo spostamento del punto di applicazione della forza/coppia F_h e la coordinata libera

Il segno (+) va messo quando forze/coppie e spostamenti sono concordi e (-) quando forze/coppie e spostamenti sono discordi.

Per poter costruire il modello dinamico del meccanismo, è importante fare una analisi cinematica di posizione e velocità per trovare i legami tra le variabili θ ; β ; φ e le loro derivate perché l'inerzia del meccanismo ne dipende. θ ; $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ definiscono rispettivamente, la posizione angolare, la velocità angolare e l'accelerazione angolare del motore. Esse sono date dalla legge di moto.

3.1.2 Analisi cinematica di posizione

L'obbiettivo di questa parte è di determinare in forma chiusa le variabili α e φ in funzione della coordinata libera θ

Le equazioni di chiusura del meccanismo sono le seguenti:

$$\begin{cases} l_1 \cos \theta + l_2 \cos \beta - l_3 \cos \varphi - l_0 \cos \varphi_0 = 0 \\ l_1 \sin \theta + l_2 \sin \beta - l_3 \sin \varphi - l_0 \sin \varphi_0 = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$l_2 \cos \beta = (-l_1 \cos \theta + l_3 \cos \varphi + l_0 \cos \varphi_0) \quad (3.3)$$

$$l_2 \sin \beta = (-l_1 \sin \theta + l_3 \sin \varphi + l_0 \sin \varphi_0) \quad (3.4)$$

Elevando al quadrato le equazioni (3.3) e (3.4) poi sommando membro a membro si ottiene la seguente equazione detta “**Equazione di Freudenstein**” per un meccanismo a 4 barre.

$$R_1(\theta)\sin\phi + R_2(\theta)\cos\phi + R_3(\theta) = 0 \quad (3.5)$$

Dove $R_1(\theta) = 2l_3(-l_1\sin\theta + l_0\sin\phi_0)$

$$R_2(\theta) = 2l_3(-l_1\cos\theta + l_0\cos\phi_0)$$

$$R_3(\theta) = l_0^2 + l_1^2 + l_3^2 - l_2^2 - 2l_0l_1\cos(\theta - \phi_0)$$

Per risolvere l’equazione (3.5) in forma chiusa si può porre un cambio di variabile $t = \tan\frac{\phi}{2}$

Allora si ha che: $\cos\phi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\sin\phi = \frac{2t}{1+t^2}$

Questo cambio di variabile porta l’equazione (3.5) ad un’equazione di secondo grado nella variabile t

Sotto la condizione:

$$4(R_1^2(\theta) + R_2^2(\theta) - R_3^2(\theta)) \geq 0 \quad (\text{Condizione per aver soluzioni reali})$$

Si ottiene che:

$$\phi(\theta) = 2\text{ATAN2}(-R_1(\theta) \pm \sqrt{R_1^2(\theta) + R_2^2(\theta) - R_3^2(\theta)}; R_3(\theta) - R_2(\theta))$$

Dividendo (3.4) e (3.3) membro a membro si ottiene:

$$\beta(\theta, \phi) = \text{ATAN2}(-l_1\sin\theta + l_3\sin\phi + l_0\sin\phi_0; -l_1\cos\theta + l_3\cos\phi + l_0\cos\phi_0)$$

Queste soluzioni per gli angoli β ϕ permettono di capire che ci sono due configurazioni per il quadrilatero. Si considera un quadrilatero avente le seguenti caratteristiche

Massa: $m_1 = 0.25\text{kg}$; lunghezza : $l_1 = 0.3\text{m}$

Momento d’inerzia rispetto al suo centro di massa C_1 : $I_1 = 1/12(m_1l_1^2)$

Membro 2: membro intermedio

Massa: $m_2 = 0.25\text{kg}$, ; lunghezza : $l_2 = 1.2\text{m}$

Momento d’inerzia rispetto al suo centro di massa C_2 : $I_2 = 1/12(m_2l_2^2)$

Membro 3:

Massa: $m_3 = 0.25\text{kg}$; lunghezza : $l_3 = 0.75\text{m}$

Momento d’inerzia rispetto al suo centro di massa C_3 : $I_3 = 1/12(m_3l_3^2)$

Note: L’angolo $\phi_0 = 0$ per semplicità; la distanza OO’ vale $l_0 = 0.9\text{m}$; il punto O’ è vincolato a telaio

Le seguenti figure mostrano le variazioni di angoli nelle due configurazioni

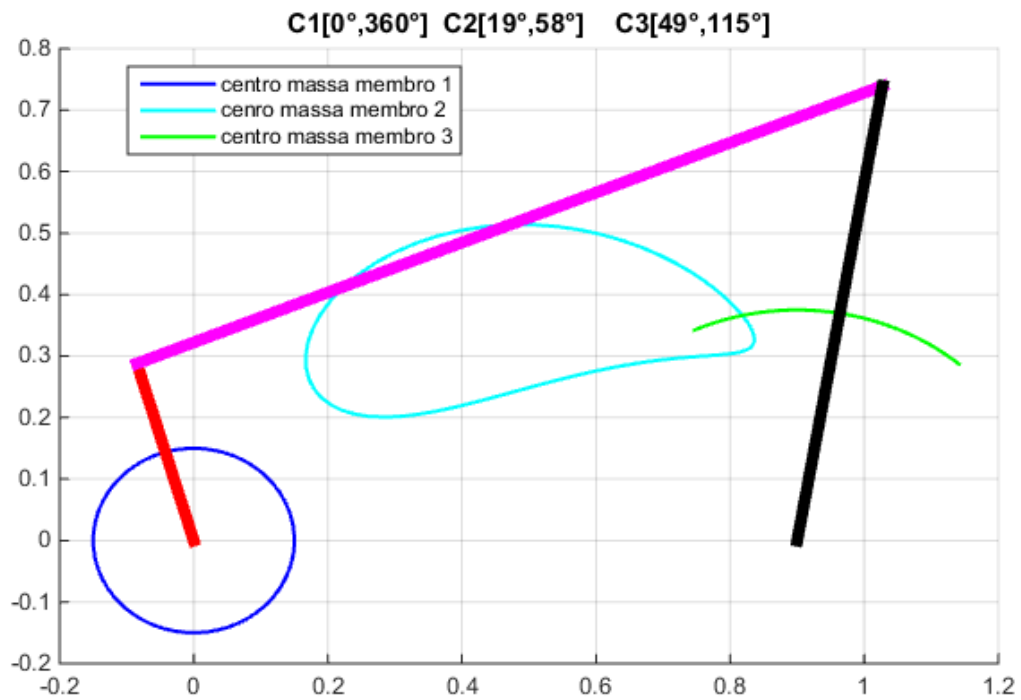


Fig.48 Figura 42: Configurazione 1 per il quadrilatero articolato

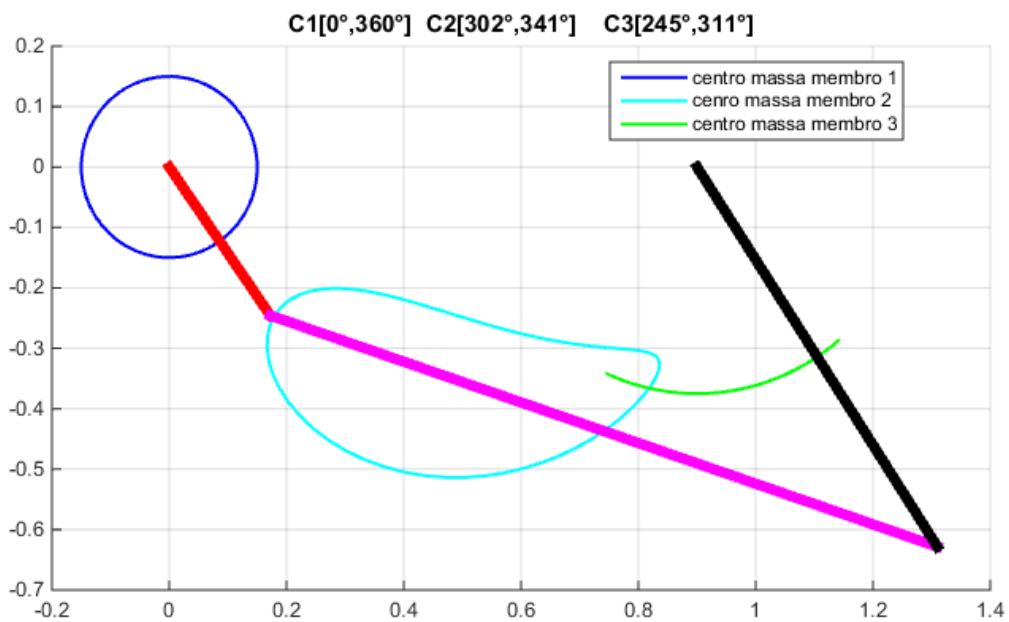


Figura 43: Configurazione 2 per il quadrilatero

Nel quadrilatero considerato, i membri sono delle barre uniforme per quello il centro di massa si trova a metà di ogni barra.

Su questi grafici si può osservare che il centro di massa del membro 1 compie il giro completo, il centro di massa del membro 2 descrive un ovale simile ad un profilo di camma, il centro di massa del membro 3 compie un arco di cerchio andata e ritorno.

3.1.3 Analisi cinematica di velocità

L'obbiettivo di questa parte è di determinare $\dot{\beta} = \frac{d\alpha}{dt}$ e $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ in funzione di $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

Derivando nel tempo il sistema (3.2) si ottiene il seguente sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} -l_2 \sin \beta & -l_3 \sin \phi \\ l_2 \cos \beta & l_3 \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \sin \theta \\ -l_1 \cos \theta \end{Bmatrix} \dot{\theta} \quad (3.6)$$

Il sistema (3.6) ha nelle variabili $\dot{\beta}$ e $\dot{\phi}$ ha una soluzione unica se e solo se :

$$\text{Det}J = l_2 l_3 \sin(\phi - \beta) \neq 0 \quad \text{cioè} \quad \phi - \beta \neq n\pi \quad n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Sotto questa condizione, si ottiene:

$$\dot{\alpha} = \frac{l_1 \sin(-\theta + \phi)}{l_2 \sin(-\phi + \beta)} \dot{\theta} \quad \dot{\phi} = \frac{l_1 \sin(\beta - \theta)}{l_2 \sin(-\phi + \beta)} \dot{\theta}$$

A partire da questi risultati, si definiscono i seguenti rapporti di velocità:

$$K_1(\theta, \beta, \phi) = \frac{\partial \beta}{\partial \theta} = \frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}} \quad K_2(\theta, \beta, \phi) = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\theta}} \quad (3.7)$$

3.1.4 Energia cinetica del meccanismo

L'energia cinetica del quadrilatero articolato si definisce come la somma del contributo di energia cinetica di ogni membro mobile.

$$T_{4b} = T_1 + T_2 + T_3 \quad (3.8)$$

L'energia cinetica del membro 1 è definita come segue:

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1 v_{c1}^2 + I_1 \dot{\theta}^2) \quad \text{dove} \quad v_{c1}^2 = \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{e} \quad v_{c1} \text{ la velocità lineare del centro di massa } C_1$$

L'energia cinetica del membro 3 è definita come segue:

$$T_3 = \frac{1}{2}(m_3 v_{c3}^2 + I_3 \dot{\phi}^2) \quad \text{dove} \quad v_{c3}^2 = \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \dot{\phi}^2 \quad \text{e} \quad v_{c3} \text{ la velocità lineare del centro di massa } C_3$$

L'energia cinetica del membro 2 è definita come segue:

$$T_2 = \frac{1}{2}(m_2 v_{c2}^2 + I_2 \dot{\beta}^2) \quad \text{e} \quad v_{c2} \text{ la velocità lineare del centro di massa } C_2$$

v_{c2} si calcola derivando nel tempo le componenti del vettore $\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC_2}$ poi si prende il modulo per ottenere:

$$v_{c2}^2 = l_1^2 \dot{\theta}^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\beta}^2 + 2l_1 \left(\frac{l_2}{2}\right) \cos(\theta - \beta) \dot{\theta} \dot{\beta} \quad (3.9)$$

Sommando i tre contributi di energia cinetica si ottiene l'energia cinetica del quadrilatero articolato definito come segue:

$T_{4b} = \frac{1}{2}J_{4b}(\theta)\dot{\theta}^2$ dove $J_{4b}(\theta)$ è l'inerzia equivalente del quadrilatero articolato ridotta alla coordinata libera θ

$$J_{4b}(\theta) = \left\{ m_1 \left(\frac{l_1}{2} \right)^2 + I_1 + m_2 \left[l_1^2 + \left(\frac{l_2}{2} \right)^2 K_1(\theta, \beta, \phi)^2 + 2l_1 \left(\frac{l_2}{2} \right) \cos(\theta - \beta) K_1(\theta, \beta, \phi) \right] + I_2 K_1(\theta, \beta, \phi)^2 + \left[m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 + I_3 \right] K_2(\theta, \beta, \phi)^2 \right\} \quad (3.10)$$

Considerando l'inerzia del motore, l'energia cinetica del meccanismo (motore + quadrilatero articolato) è dato da:

$$T = \frac{1}{2}J_{eq}(\theta)\dot{\theta}^2 \quad \text{dove } J_{eq}(\theta) = J_m + J_{4b}(\theta)$$

Nel seguito sono sviluppate le diverse componenti dell'**equazione di Lagrange (3.1)**

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial J_{eq}(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_{eq}(\theta) \dot{\theta} \quad \text{allora } \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial J_{eq}(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 + J_{eq}(\theta) \ddot{\theta} \quad ; \quad Q_h = C_m - f_v \dot{\theta}$$

Dall'equazione (3.1) si ottiene il seguente modello che esprime la coppia richiesta al motore per muovere il quadrilatero articolato.

$$J_{eq}(\theta) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{eq}(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 = C_m - f_v \dot{\theta}$$

Questo modello è costituito da un'equazione differenziale NON LINEARE del secondo ordine a coefficienti variabili. La simulazione del modello nell'obbiettivo di determinare la coppia richiesta al motore è resa facile dal fatto che la velocità e l'accelerazione angolare sono date dalle legge di moto. Avendo già calcolato l'inerzia $J_{eq}(\theta)$ resta a calcolare la sua derivata rispetto alla posizione $\frac{\partial J_{eq}(\theta)}{\partial \theta}$

L'inerzia equivalente del meccanismo può essere riscritto come segue:

$$J_{eq}(\theta) = J_1 + J_2 K_1(\theta, \beta, \phi)^2 + J_3 K_2(\theta, \beta, \phi)^2 + J_4 C(\theta, \beta) K_1(\theta, \beta, \phi)$$

$$\text{Dove } J_1 = J_m + m_1 \left(\frac{l_1}{2} \right)^2 + I_1 + m_2 l_1^2 \quad J_2 = m_2 \left(\frac{l_2}{2} \right)^2 + I_2 \quad J_3 = m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 + I_3$$

$$J_4 = 2m_2 l_1 \left(\frac{l_2}{2} \right) \quad C(\theta, \beta) = \cos(\theta - \beta)$$

Usando la regola della catena per la derivata di una funzione in più variabili si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{eq}(\theta)}{\partial \theta} = & 2J_2 K_1(\theta, \beta, \phi) \left(\frac{\partial K_1(\theta, \beta, \phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial K_1(\theta, \beta, \phi)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{\partial K_1(\theta, \beta, \phi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\ & + 2J_3 K_2(\theta, \beta, \phi) \left(\frac{\partial K_2(\theta, \beta, \phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial K_2(\theta, \beta, \phi)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{\partial K_2(\theta, \beta, \phi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\ & + J_4 C(\theta, \beta) \left(\frac{\partial K_1(\theta, \beta, \phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial K_1(\theta, \beta, \phi)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{\partial K_1(\theta, \beta, \phi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\ & + J_4 K_1(\theta, \beta, \phi) \left(\frac{\partial C(\theta, \beta)}{\partial \theta} + \frac{\partial C(\theta, \beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

(3.11)

Dove

$$\frac{\partial K_1(\theta, \beta, \phi)}{\partial \theta} = -\frac{l_1 \cos(-\theta + \phi)}{l_2 \sin(-\phi + \beta)}$$

$$\frac{\partial K_1(\theta, \beta, \phi)}{\partial \beta} = -\frac{l_1 \sin(-\theta + \phi) \cos(-\phi + \beta)}{l_2 \sin^2(-\phi + \beta)}$$

$$\frac{\partial K_1(\theta, \beta, \phi)}{\partial \phi} = \frac{l_1 \sin(-\theta + \beta)}{l_2 \sin^2(-\phi + \beta)}$$

$$\frac{\partial K_2(\theta, \beta, \phi)}{\partial \theta} = -\frac{l_1 \cos(\beta - \theta)}{l_3 \sin(-\phi + \beta)}$$

$$\frac{\partial K_2(\theta, \beta, \phi)}{\partial \beta} = \frac{l_1 \sin(\phi - \theta)}{l_3 \sin^2(-\phi + \beta)}$$

$$\frac{\partial K_2(\theta, \beta, \phi)}{\partial \phi} = \frac{l_1 \sin(\beta - \theta) \cos(-\phi + \beta)}{l_3 \sin^2(-\phi + \beta)}$$

$$\frac{\partial C(\theta, \beta)}{\partial \theta} = -\sin(\theta - \beta) \quad ; \quad \frac{\partial C(\theta, \beta)}{\partial \beta} = \sin(\theta - \beta)$$

Le seguenti figure presentano nelle due configurazioni, le variazioni dell'inerzia equivalente del meccanismo, la coppia richiesta al motore in assenza della molla e l'energia cinetica del meccanismo.

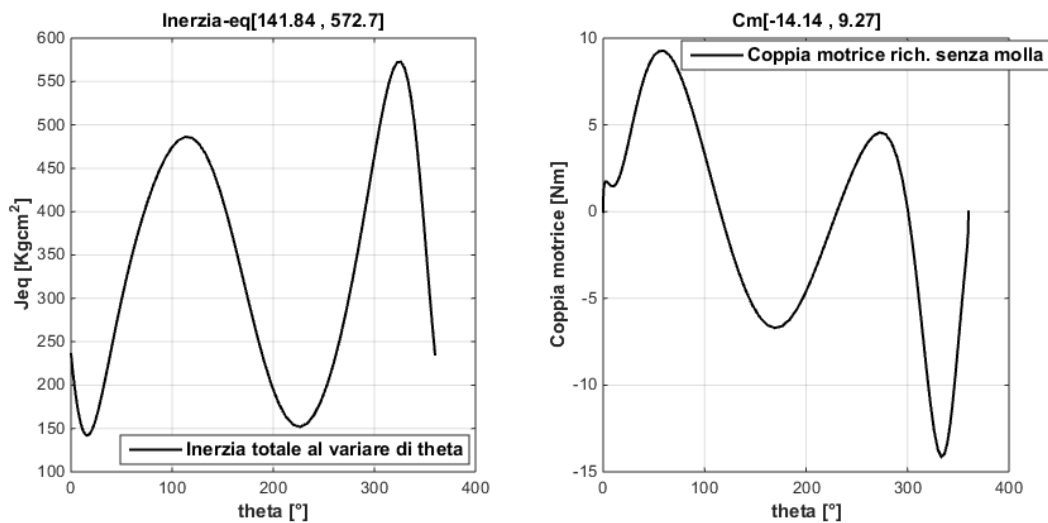


Figura 44: Inerzia totale e coppia motrice nella configurazione 1

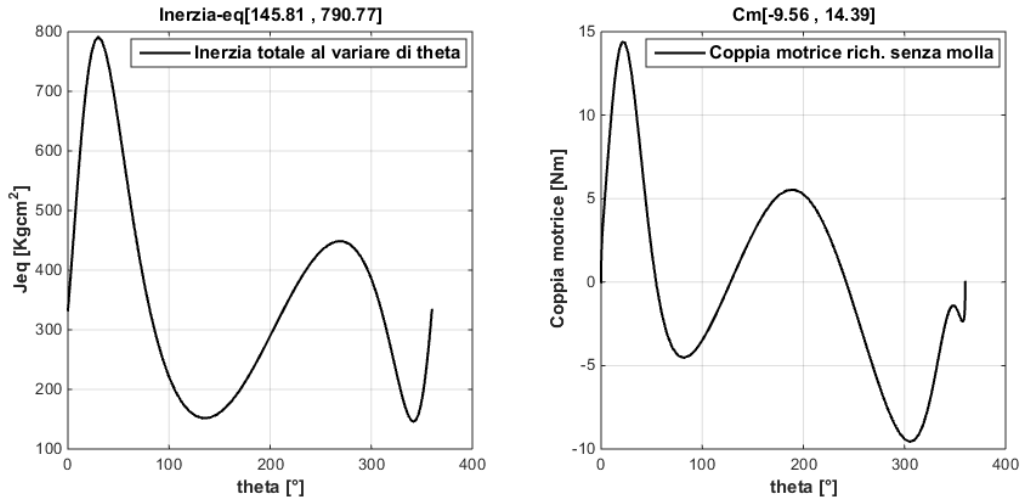


Figura 45: Inerzia totale e coppia motrice nella configurazione 2

Visto la forma della coppia richiesta al motore, cioè in un giro del motore ci sono due picchi di coppia massima e due di coppia minima. Da questo si può intuire di fare lavorare la molla in trazione e in compressione. In questo modo, la prima fase in trazione permette di compensare il primo picco di massimo poi segue la compressione che permette di compensare il primo picco di minimo e così via. Per ottimizzare il funzionamento della molla in questo caso è importante considerare molle di opportune lunghezze a vuoto. Per le simulazioni fatte in questo capitolo, si considera per semplicità dei calcoli (diminuendo le variabili da ottimizzare) che la molla è di lunghezza a vuoto $l_0 = 24 \text{ cm}$. Anche il punto di attacco della molla alla manovella è considerato fisso per le stesse ragioni di diminuzione delle variabili da ottimizzare. Si supponga $OM = 28 \text{ cm}$.

3.1.5 Modello dinamico del meccanismo con una molla

Per prima istanza si inserisce una molla nel membro 1 del quadrilatero articolato come mostrato nella figura 40. Per costruire il modello dinamico del sistema con la molla, si considera l'altra estremità della molla attaccata ad un punto A nel piano passante per i punti O e M. In questa configurazione, la coppia generata dalla molla segue la stessa relazione (2.2) definita nel capitolo 2.

Allora il modello dinamico del sistema con la molla è il seguente:

$$C_{mmol}(\theta, r, \alpha, k, l_0) + C_{mol}(\theta, r, \alpha, k, l_0) = J_{eq}(\theta)\ddot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{eq}(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 + f_v \dot{\theta} \quad (3.12)$$

Dove, $C_{mmol}(\theta, r, \alpha, k, l_0)$ è la coppia richiesta al motore in presenza della molla

$C_{mol}(\theta, r, \alpha, k, l_0)$ è la coppia generata dalla molla sull'albero motore

$J_{eq}(\theta)\ddot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{eq}(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 + f_v \dot{\theta}$ è la coppia richiesta al motore senza la molla

Questa equazione si può anche scrivere così:

$$C_{mmol}(\theta, r, \alpha, k, l_0) = C_m(\theta) - C_{mol}(\theta, r, \alpha, k, l_0) \quad (3.13)$$

In altri termini, la coppia richiesta al motore con la molla è uguale alla coppia richiesta senza molla alla quale si toglie la coppia generata dalla molla.

Un altro modo di costruire questo modello è di considerare l'equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_h$ nella quale la lagrangiana vale: $L = T - U$ dove T rappresenta l'energia cinetica e U l'energia potenziale elastica. Q_h rappresenta la forza lagrangiana ed è stata definita nella relazione (3.1).

Questa formulazione permette di ricavare direttamente la coppia richiesta al motore in presenza della molla in funzione della posizione della molla (r, α) e delle sue caratteristiche (l_0, k) (lunghezza a vuoto, rigidità). Questo metodo non sarà utilizzato in questo documento per le semplici ragioni che è più complicato del precedente, e di più non consente di sfruttare il modello del meccanismo senza molla che nel caso pratico è un modello che potrebbe essere già disponibile.

3.2 Ottimizzazione della dinamica del meccanismo posto sul piano orizzontale

L'obiettivo in questa parte è di determinare mediante un metodo di ottimizzazione, le caratteristiche della molla (l_0, k), la posizione ottimale del punto A per le quali la coppia richiesta al motore in presenza della molla risulta minimale e il lavoro compiuto dal motore anch'esso minimale. Le simulazioni vengono fatte su una configurazione del meccanismo. Il procedimento essendo uguale nell'altra configurazione.

3.2.1 Metodo 1: Minimizzazione diretta della coppia massima

Come già accenato nel capitolo 2, questo metodo di ottimizzazione è basato sulla minimizzazione diretta della coppia massima richiesta al motore per trascinare il quadrilatero in presenza della molla. La funzione di ottimizzazione usata è "fminimax". Come già spiegato in precedenza, il risultato della funzione di ottimizzazione "fminimax" può variare in base alle condizioni iniziali quando il numero di variabili cresce. In questo caso ci sono 3 variabili (r, α, k). Per sistemare il problema, si isola una delle variabili r oppure k e si cambia il suo valore con un ciclo iterativo.

Facendo iterazione sul raggio poi sulla rigidezza si ottengono i seguenti risultati:

r (m)	α (gradi)	k (N/m)	C_m (Nm)
0.1000	147.1149	996.9489	7.3814
0.1100	147.1252	866.0766	7.3742
0.1200	147.0288	760.1400	7.3720
0.1300	146.8483	673.0885	7.3738
0.1400	146.6006	600.6261	7.3788
0.1500	146.2988	539.6272	7.3863
0.1600	145.9528	487.7694	7.3958
0.1700	145.5707	443.2958	7.4069
0.1800	145.1589	404.8560	7.4192
0.1900	144.9493	370.5271	7.4580
0.2000	144.7629	340.3635	7.5016

Tabella 14: Variazioni r da 0.1m a 0.2m

r (m)	α (gradi)	k (N/m)	C_m (Nm)
0.1205	147.0210	755.0000	7.3720
0.1204	147.0225	756.0000	7.3720
0.1203	147.0241	757.0000	7.3720
0.1202	147.0256	758.0000	7.3720
0.1201	147.0271	759.0000	7.3720
0.1200	147.0286	760.0000	7.3720
0.1199	147.0300	761.0000	7.3720
0.1198	147.0315	762.0000	7.3720
0.1197	147.0330	763.0000	7.3720
0.1196	147.0344	764.0000	7.3720
0.1195	147.0358	765.0000	7.3720

Tabella 15: Variazioni k da 755N/m a 765N/m

Il seguente grafico presenta l'andamento delle coppie con la lunghezza a vuoto della molla l_0 fissata a 0.24m.

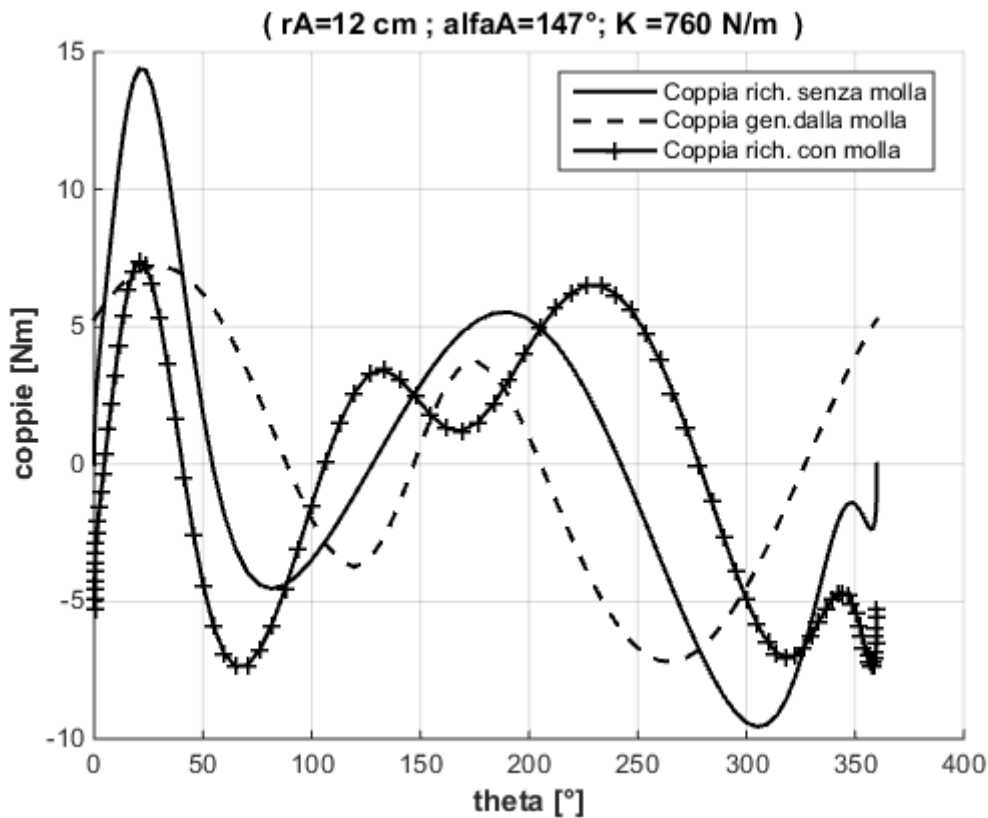


Figura 46: Minimizzazione diretta della coppia di picco con l_0 fissato

Da questo grafico si osserva che con la tripla ($r = 12\text{cm}$, $\alpha = 147^\circ$, $k = 760\text{N/m}$) si ottiene un abbassamento in coppia massima del 49 % e 14% di coppia rms

3.2.2 Metodo 2: Minimizzazione della varianza dell'energia meccanica

Questo metodo di ottimizzazione è già stato spiegato nel capitolo 2. Nel seguito viene applicato al meccanismo studiato in questo capitolo. Le stesse considerazioni vanno fatte per risolvere la dipendenza dalle condizioni iniziali.

L'unica differenza rispetto al metodo precedente è il fatto che si considera qui un sistema conservativo cioè la coppia d'attrito viscoso nel motore è considerata nulla. Questo permette di avere un sistema nel quale l'energia meccanica è costante per avere che la sua varianza tenda a zero.

Facendo l'iterazione sul raggio poi sulla rigidezza si ottengono le seguenti tabelle:

r (m)	α (gradi)	k (N/m)	VarEm(J)
0.1000	170.7131	831.8458	3.9352
0.1100	170.1625	733.7693	3.8613
0.1200	169.7094	652.0092	3.8088
0.1300	169.3400	582.9614	3.7751
0.1400	169.0434	524.0196	3.7578
0.1500	168.8110	473.2469	3.7549
0.1600	168.6361	429.1693	3.7645
0.1700	168.5135	390.6436	3.7848
0.1800	168.4395	356.7679	3.8145
0.1900	168.4113	326.8204	3.8522
0.2000	168.4273	300.2165	3.8968

Tabella 16: Variazioni r da 0.1m a 0.2m

r (m)	α (gradi)	k (N/m)	VarEm(J)
0.1505	168.8146	470.0000	3.7551
0.1503	168.8179	471.0000	3.7550
0.1501	168.8211	472.0000	3.7550
0.1499	168.8244	473.0000	3.7549
0.1497	168.8276	474.0000	3.7548
0.1495	168.8309	475.0000	3.7547
0.1493	168.8342	476.0000	3.7547
0.1491	168.8375	477.0000	3.7546
0.1489	168.8408	478.0000	3.7546
0.1487	168.8442	479.0000	3.7545
0.1485	168.8475	480.0000	3.7545

Tabella 17: Variazioni k da 470N/m a 480N/m

Sempre con la lunghezza a vuoto della molla l_0 fissata a 0.24m. Il grafico ottenuto è il seguente:

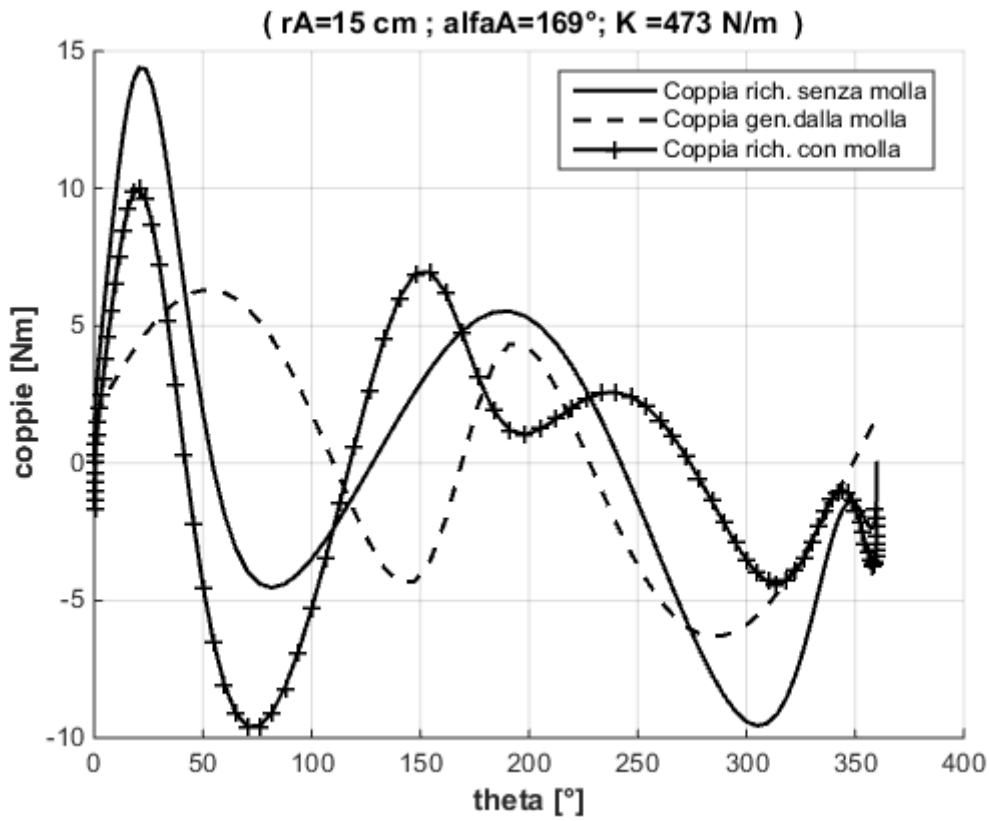


Figura 47: Minimizzazione della coppia di picco e rms mediante varEm

Da questo grafico si osserva che con la tripla ($r = 15\text{cm}$, $\alpha = 169^\circ$, $k = 473\text{N/m}$) si ottiene un abbassamento in coppia massima del 31 % e 22% di coppia rms

Applicando il metodo di ricerca diretta del minimo globale si ottiene il seguente risultato:

r (m)	α (gradi)	k (N/m)	l_0 (m)	VarEm(J)
0.1460	346.4848	572.2695	0.3168	1.7294

Tabella 18: Risultati del miglioramento con 10 variabile

Il grafico ottenuto è:

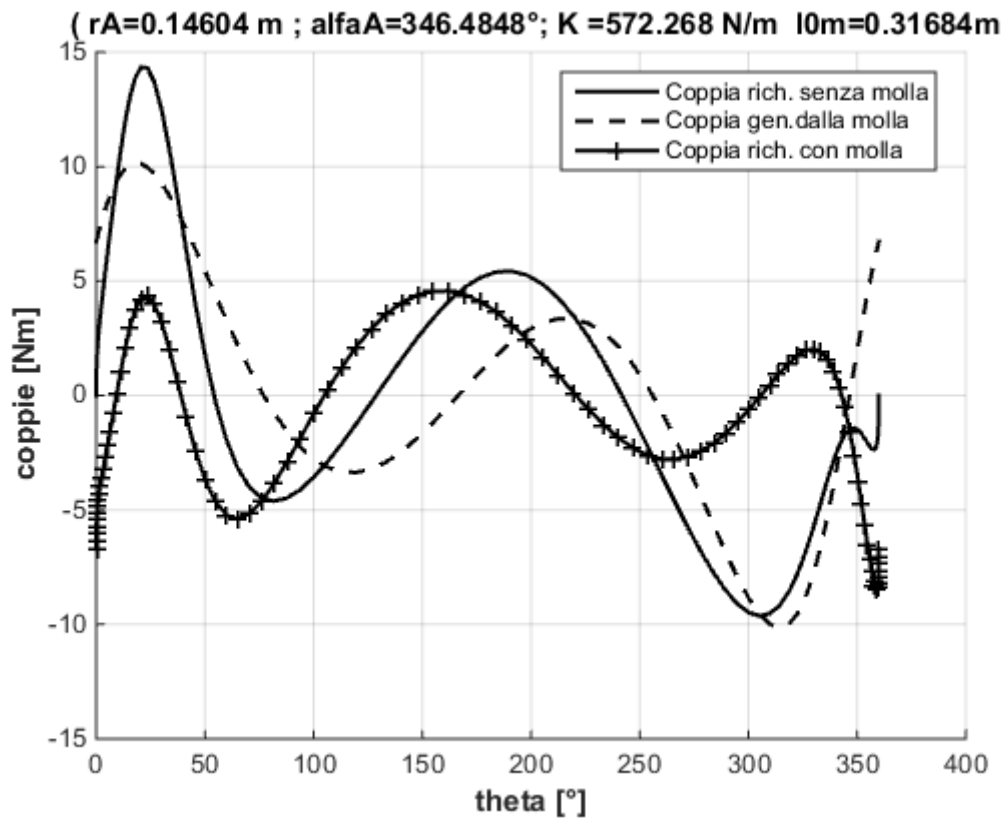


Figura 48: Minimizzazione della coppia di picco e rms mediante ricerca globale

CAPITOLO 4: IMPLEMENTAZIONE MATLAB

In questo capitolo viene presentato l'organizzazione del codice matlab implementato per tutte le simulazioni eseguite nel capitolo 2 e 3.

4.1 Meccanismo (motore-manovella-molla)

Il seguente diagramma rappresenta l'organizzazione del codice matlab implementato per risolvere il problema posto nel capitolo 2.

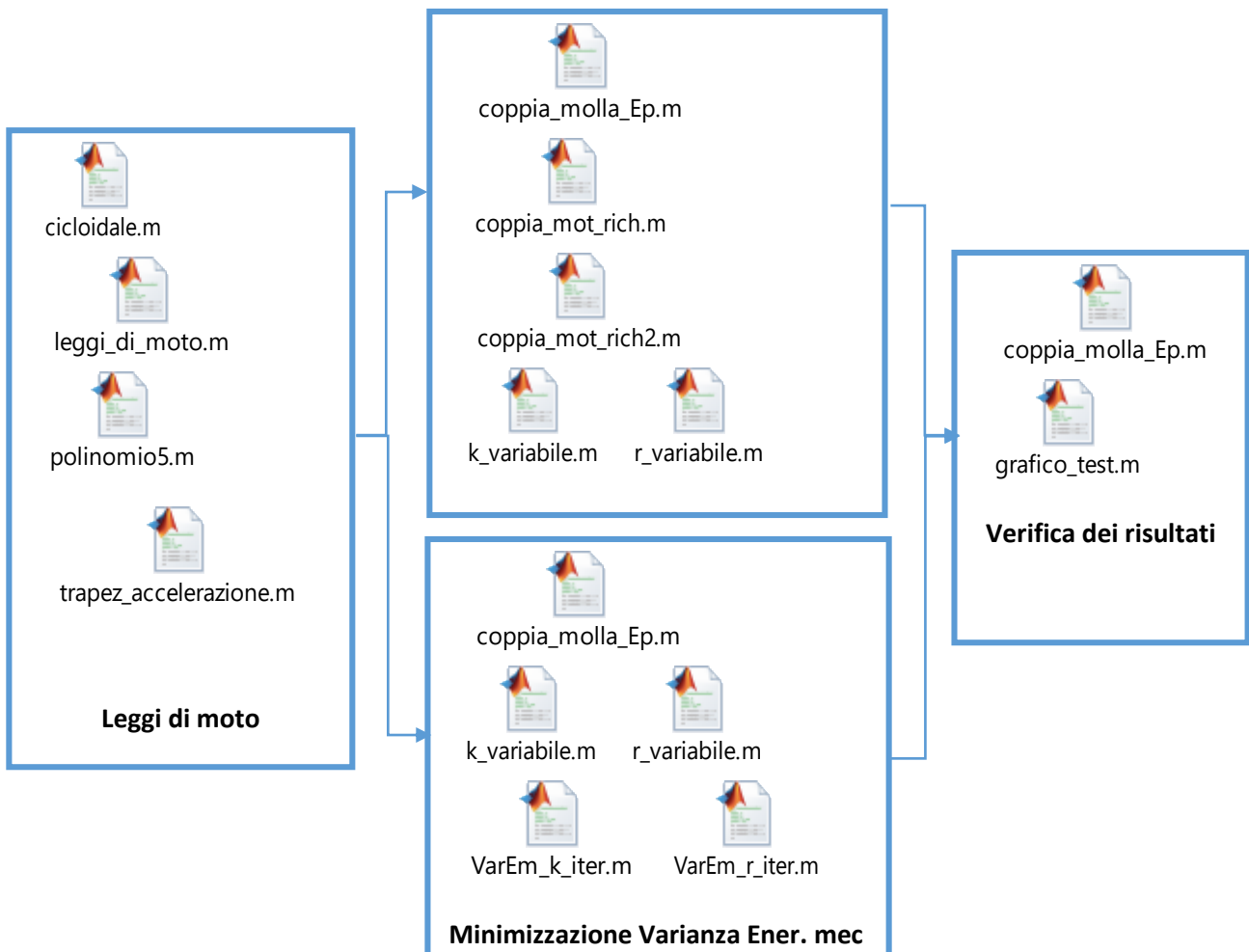


Figura 49: Organigramma del codice matlab

Il codice matlab implementato nel caso del meccanismo (motore-manovella-molla) è stato organizzato in cinque cartelle: una per le leggi di moto, tre di ottimizzazione, una per verifica dei risultati.

4.1.1 Leggi di moto

Nella cartella con nome Leggi di moto sono presenti le seguenti funzioni (*cicloidale.m*, *polinomio5.m*, *trapez_accelerazione.m*) che descrivono le tre leggi di moto scelte per le simulazioni. Il file *leggi_di_moto.m* contiene le caratteristiche del meccanismo (lunghezza e massa della manovella, inerzia motore, inerzia manovella, . . .). Si sono definiti delle variabili globali che saranno condivise con le altre funzioni.

```
global theta v a Cm Ec;
global L m OM l0 k0 th0 thf tm N ; %modello
global Jm Jc fv ; % inerzia e attrito
L=0.3; % Lunghezza manovella [m]
m = 0.25; % Massa manovella [Kg]
OM=0.215; % Distanza di fissaggio della molla lungo la manovella
[m] (valore imposto dal materiale di laboratorio)
l0=0.08; % Lunghezza libera della molla [m] (valore fissato)
N =100; % numero di punti per discretizzazione
Jc = 63e-4 ; %[Kgm2] Inerzia della manovella (carico)
Jm = 1.2e-4 ; % [Kgm2] Inerzia del motore
fv = 0.004 ; % [Nms/rad] coefficiente di attrito viscoso motore
tm = 0.5 ; % [s] tempo di azionamento
th0 =0; %posizione iniziale
thf = 2*pi; %posizione finale
t = linspace(0,tm,N); % vettore dei tempi
%[theta, v, a, Cm, Ec] = trapez_accelerazione(t); % trapezia in
velocità
%[theta, v, a, Cm, Ec] = polinomio5(t); % legge di moto
polinomiale 5° grado
[theta, v, a, Cm, Ec] = cicloidale(t); % legge di moto cicloidale
```

4.1.2 Ottimizzazione

Le tre cartelle di ottimizzazione sono costituite da cinque file ognuno. Un file di funzione per la coppia generata dalla molla e energia potenziale elastica (*Copia_molla_Ep.m*), due file di funzioni che restituiscono la variabile di costo da passare come parametro all'algoritmo di ottimizzazione nei due casi in cui c'è iterazione su k oppure iterazione su r, poi due file editor per la chiamata della funzioni.

La funzione che genera la coppia generata dalla molla e l'energia potenziale elastica è la seguente:

```
function [Ep,lm,Cmol] = coppia_molla_Ep(alfa,r,k)
global OM theta l0m N ;
M = zeros(N,3);Fel =zeros(N,3);Cmol =zeros(N,3);
lmx = zeros(N,1);lmy =zeros(N,1);lmz =zeros(N,1);
lm =zeros(N,1);dlx =zeros(N,1);dly =zeros(N,1);
dlz =zeros(N,1);dl =zeros(N,1);Ep =zeros(N,1);
xA = r*cos(alfa);
yA = r*sin(alfa); % punto A
for i=1:N
xM = OM*cos(theta(i)); % punto M
yM = OM*sin(theta(i));
zM = 0;
M(i,1) =xM;
M(i,2) =yM;
M(i,3)= zM;
% coordinate del vettore AM
lmx(i) = (xM-xA);
lmy(i) = (yM -yA);
lmz(i) = 0;
lm(i) = sqrt(lmx(i)^2 + lmy(i)^2 +lmz(i)^2); % distanza AM
if( lm(i) <=l0m)% molla in compressione
Cmol(i,:) =[0 0 0]';
Ep(i) = 0;
dl(i) =0;
else
% Coordinate del vettore Allungamento della molla
dlx(i)=(1-l0m/lm(i))*lmx(i);
dly(i)=(1-l0m/lm(i))*lmy(i);
dlz(i)=0;
%Coordinate del vettore forza elastica
Fel(i,1) = -k*dlx(i);
```

```

    Fel(i,2) = -k*dly(i);
    Fel(i,3) =0;
    Cmol(i,:) = cross(M(i,:),Fel(i,:)); % Coppia generata dalla
molla
    dl(i) = sqrt(dlx(i)^2 + dly(i)^2 +dlz(i)^2); % Allungamento
molla
    Ep(i) = (1/2)*k*dl(i)^2 ; % Energia potenziale elastica
end
end

```

Questa funzione viene utilizzata nei tre metodi di ottimizzazione e anche nella cartella di verifica dei risultati.

Nel caso di minimizzazione della varianza dell'energia meccanica, la funzione *r_variabile.m* (che permette di realizzare l'ottimizzazione tenendo come variabili la rigidità e la posizione angolare del punto A e facendo una iterazione sulla variabile *r* si definisce come segue:

```

global rk ; % posizione punto A
rag=0.125:0.001:0.135;%
Legend=cell(4,1); % creazione legenda
num =11;
result = zeros(num,4);
%Algoritmo di ottimizzazione "fmincon"
for s=1:num
rk=rag(s);
A = [-1 0; 1 0;0 -1]; % 0<=alfa<=2*pi; k>0 vincolo
disuguaglianza
b = [0;2*pi;0];
Aeq = []; % vincolo uguaglianza "non specificato"
beq = [];
lb = []; % limiti per le variabili
ub =[];
posA0 = [pi;50]; % Condizione iniziale in coordinate polari
(r ; alfa ; k)
[posA,feval] = fmincon(@VarEm_r_iter,posA0,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
%Coordinate polari del punto A
rA =rk;

```

```

alfa = posA(1); % alfa in rad
angA = alfa*180/pi; % alfa in gradi
k =posA(2) ; % rigidezza
result(s,:)=[rA,angA,k,feval];
end
result

```

la funzione *k_variabile.m* si definisce della stessa maniera solo che nell'ottimizzazione, le variabili sono il raggio *r* e la posizione angolare del punto *A* e l'iterazione si fa sulla variabile *k*. La funzione *VarEm_r_iter.m* definisce varianza dell'energia meccanica quando l'iterazione è fatta sulla variabile *r* ed è definita come segue:

```

function varEm = VarEm_r_iter(posA) % posA = (alfa, k)
global T rk
r=rk;
alfa=posA(1);
k=posA(2);
[Ep,lm,Cmol] = coppia_molla_Ep(alfa,r,k);
Em =Ep+T;
varEm = var(Em);
end

```

4.2 Miglioramento del metodo di minimizzazione della varianza dell'energia meccanica

Il miglioramento è stato fatto usando il seguente algoritmo:

```

%Algoritmo di ottimizzazione "fmincon"

rng('shuffle')
opts = optimoptions(@fmincon,'Algorithm','interior-point');
problem = createOptimProblem('fmincon','x0',randn(4,1),...

'objective',@VarEmtest,'lb',[0;0;0;0],'ub',[0.5;2*pi;1000;0.5]
,...
'options',opts);

```

```
gs = GlobalSearch;  
[x,feval] = run(gs,problem);
```

Si osserva che l'algoritmo usato è "fmincon" e la condizione iniziale pseudo casuale definita dalla funzione randn(). Per cambiare il numero casuale ogni volta che il programma parte si è inserito l'istruzione rng('shuffle').

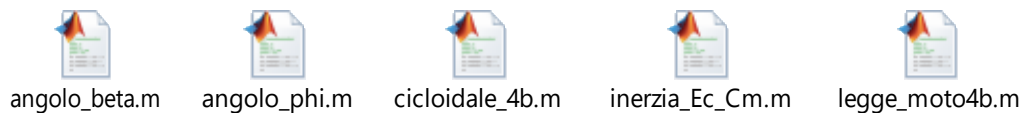
VarEmtest.m è la funzione che la varianza dell'energia meccanica.

Le istruzioni `gs = GlobalSearch;` e `[x,feval] = run(gs,problem);` permettono la ricerca del minimo globale.

L'unico svantaggio di questo metodo è il suo tempo di esecuzione un po' lungo (qualche minuto)

4.3 Meccanismo (motore-quadrilatero articolato-molla)

Nel caso del quadrilatero articolato, l'implementazione segue la stessa logica presentata nell'organigramma in fig.56. L'unica differenza si trova nella cartella che contiene le leggi di moto. In questo caso, ci sono tre funzioni aggiuntive in questa cartella. Considerando come legge di moto la cicloidale, la cartella è composta come segue:



I file *angolo_beta.m* e *angolo_phi.m* sono funzioni che permettono di generare l'angolo del membro2 rispettivamente membro 3 nel meccanismo. Il file *inerzia_Ec_Cm.m* permette di calcolare la coppia motrice richiesta senza molla l'energia necessaria al calcolo dell'energia meccanica. Il codice di queste funzioni si trova in appendice

CAPITOLO 5: ANALISI SPERIMENTALE

In questo capitolo si vuole caratterizzare lo studio teorico effettuato nel capitolo 2 per un sistema reale costituito da un'asta di alluminio messo in rotazione sul piano orizzontale da un motore brushless con azionamento Allen-Bradley. Viene descritto il sistema fisico e l'ambiente di sviluppo utilizzato per il controllo e la movimentazione.

5.1 Setup sperimentale

Il Setup completo per la caratterizzazione dell'analisi teorica su un sistema reale è costituito da un'asta di alluminio che svolge la funzione di manovella descritta precedentemente e un motore brushless della casa Allen-Bradley per la sua movimentazione, il tutto allocato all'interno di un armadio chiuso per la sicurezza dell'utente. All'interno di esso sono collocati anche gli azionamenti per il motore e il controllore Allen-Bradley per la comunicazione tra PC di controllo e azionamenti.



Figura 50: Asta in alluminio con il gancio

La seguente tabella contiene le dimensioni dell'asta.

Dimensione	valore	unità di misura
Lunghezza (L)	0.38	[m]
Larghezza (h)	0.03	[m]
Spessore (s)	0.008	[m]

Tabella 19: Dimensioni dell'asta

Per il calcolo dell'inerzia del carico (asta + gancio di fissaggio della molla sull'asta), è necessario conoscere le masse in gioco.

La massa dell'asta si calcola mediante la seguente formula:

$$m = \rho \cdot L \cdot h \cdot s = 0.25 \text{ kg} \quad (5.1)$$

Dove $\rho = 2700 \text{ Kg/m}^3$ è la densità dell'alluminio.

Sia $l_1 = 0.05 \text{ m}$ la distanza dal centro di massa dell'asta al suo punto di fissaggio sull'albero motore.

Ad una distanza di circa $d_1 = 0.08 \text{ m}$ dal punto di rotazione dell'asta è stato fissato il gancio su cui fissare il carico elastico che comporta un'ulteriore aumento dell'inerzia della massa rotante; con un peso del gancio pari a $mg = 0.02 \text{ kg}$.

Applicando il teorema di Huygens-Steiner è ora possibile calcolare l'inerzia del carico rotante attorno al punto di fissaggio all'asse motore.

$$I_c = \frac{1}{12} mL^2 + ml_1^2 + m_g d_1^2 = 0.00376 \text{ Kg.m}^2 \quad (5.2)$$

L'inerzia del motore vale $I_m = 0.00012 \text{ Kg.m}^2$. Quindi, l'inerzia totale risulta:
 $I = 0.00388 \text{ Kg.m}^2$

5.1.1 Determinazione della costante elastica

Per simulare l'azione della molla si è scelto di utilizzare dei semplici elastici da agganciare opportunamente tra asta e telaio.

Per calcolare la costante elastica è stato agganciato un peso di massa M ad un'estremità dell'elastico e si è misurato il suo allungamento finale sotto l'azione della sola forza di gravità agente sul peso. L'esperimento è stato ripetuto per quattro diverse masse. Indicando con F_p la forza peso dell'oggetto, è noto che $F_p = M \cdot g$ dove $g = 9.8 \text{ N/Kg}$ è l'accelerazione della gravità. Le masse sono state scelte per ottenere un allungamento massimo pari a quello che si ottiene durante la rotazione dell'asta.

Partendo da una lunghezza libera dell'elastico di $l_0 = 0.19 \text{ m}$ e applicando i diversi pesi, la lunghezza finale dell'elastico è stata misurata pari a l_f quindi c'è stato un allungamento totale Δl . La formula permettendo di calcolare costante elastica è $K = F_p / \Delta l$. Nella seguente tabella sono riportati i risultati ottenuti e la rigidezza finale viene calcolata come media aritmetica delle quattro rigidezze ottenute.

$l_f(m)$	$\Delta l(m)$	$M(Kg)$	$K(N/m)$
0.245	0.055	0.611	108.87
0.275	0.085	0.816	94.08
0.32	0.13	1.035	78.02
0.345	0.155	1.158	73.22

Tabella 20: Calcolo della rigidità dell'elastico

La rigidità media ottenuta è $K = 88.5 N/m$

Questo valore di rigidità è molto approssimativo perché l'elastico non ha un allungamento lineare rispetto ai pesi applicati. Quindi sarebbe meglio usare una vera molla con rigidità ben nota.

Lo studio teorico del problema imponeva che anche la molla agisse completamente sul piano orizzontale. Per l'impossibilità costruttiva di porre il punto di fissaggio a telaio sullo stesso piano di rotazione dell'asta, sono stati costruiti due ganci (G1 e G2 rispettivamente posizionati sull'asta e sul telaio come nella figura seguente creando un piano di rotazione dell'elastico distante **30mm** da quello dell'asta e parallelo ad esso.



Figura 51: Posizione dei ganci per il fissaggio dell'elastico

5.2 Impianto Allen – Bradley

Il controllore utilizzato in questo impianto è il modello ControlLogix5561TM, prodotto della casa Allen-Bradley (numero di catalogo 1756-EN2T 1756 10/100 Mbps Ethernet Bridge, Twisted-Pair Media). E' compatibile con gli standard CIP Sync e CIP Motion. Ad esso sono collegati i seguenti moduli per la comunicazione tra controllori Azionamenti-PC e per la gestione degli ingressi e uscite:

2094-EN02D-M01-S0 Kinetix 6500 Single Axis Ethernet Drive

1756-OB32 32 Point 10V-31.2V DC Output

1756-IB32/B Point 10V-31.2V DC Input

L'impianto riportato nella figura seguente, costituisce la parte di controllo per il sistema utilizzato per svolgere la parte sperimentale del progetto.



Figura 52: Impianto Allen-Bradley

La MP-Series è una tipologia di motori brushless a bassa inerzia della casa Allen-Bradley, di dimensioni ridotte ma in grado di fornire valori significativi di coppia necessari in sistemi dinamici ad alte prestazioni.



Figura 53: Motore brushless MP-series

Sono disponibili a catalogo in diverse tipologie e garantiscono una coppia di stallo continua nell'intervallo di valori 0,26-163 Nm e una coppia massima da 0.77 a 278 Nm. Sono dotati di un encoder con una scelta di singolo o multi giro che fornisce feedback ad alta risoluzione della posizione assoluta all'interno di 4096 giri. Le caratteristiche dei motori a disposizione per la sperimentazione sono riportate nella seguente tabella.

	MPL-B330P	MPL-B420P	unità di misura
Velocità nominale	5000	5000	[rpm]
Potenza nominale	1.8	1.9	[KW]
Inerzia rotorica	0.00012	0.00026	[Kg. m²]
Coppia di stallo continua	4.18	4.74	[Nm]
Coppia di stallo picco	11.1	13.5	[Nm]
Corrente di stallo continua	6.1	6.4	[A]
Corrente di stallo picco	19.0	22.0	[A]

Tabella 21: Datasheet dei motori a disposizione

5.3 Software di sviluppo RSLOGIX5000

Logix è una delle tecnologie principali dell'Architettura Integrata della casa Allen-Bradley, è una piattaforma di controllo con un ambiente di sviluppo progettato appositamente per garantire prestazioni eccezionali nel campo dell'automazione.

Il software di progettazione e configurazione RSLogix 5000 è uno dei prodotti più diffusi di questa categoria e supporta applicazioni di controllo discreto, controllo batch e di processo, controllo assi, sicurezza e azionamenti, offrendo un'interfaccia semplice ed intuitiva, e conforme alla normativa IEC 61131-3 (International Standard for programmable logic controllers). Il software fornisce editor di logica ladder, testo strutturato, diagramma a blocchi funzione e diagramma funzionale sequenziale.

5.3.1 Programma di controllo

La logica ladder è un linguaggio di programmazione che rappresenta un programma attraverso un diagramma grafico basato sui schemi di logica a interruttori e blocchi funzionali; E' utilizzato principalmente per sviluppare software per controllori a logica programmabile (PLC) utilizzati nelle applicazioni di controllo industriale e risulta molto semplice ed intuitivo permettendone così un più ampio utilizzo anche a tecnici non specificatamente formati. Ciascun sistema di programmazione è messo a disposizione direttamente dalla casa di produzione dei dispositivi hardware (PLC) e ciò non consente una totale standardizzazione riguardo la tipologia e le caratteristiche del linguaggio di programmazione. La casa Allen-Bradley mette a disposizione del programmatore diverse tipologie di linguaggio di programmazione per facilitare la creazione di software di controllo per impianti molto complessi. Nel software RSLogix 5000 oltre alle tipiche funzioni dei programmi ladder (es. contatti normalmente aperti, contatti normalmente chiusi, set e reset di bit) sono implementati a disposizione dell'utente, molteplici blocchetti funzionali i quali permettono un interfacciamento diretto e completo con gli azionamenti del sistema da gestire. Viene inoltre fornito un ambiente di programmazione di tipo strutturato (Editor di testo) in cui è possibile implementare funzioni dedicate in codice simile al linguaggio C, e un Editor Grafico per mezzo del quale, in maniera semplice, possono essere definite e create le camme elettroniche. Sono stati definiti all'interno del software tutti i componenti di cui è composto il sistema come descritto nella sezione precedente e in particolare è stato definito il gruppo degli assi di movimento (MotionAxis):

asse1, di tipo AXIS-CIP-DRIVE associato al motore MPL-B330P;

asse2, di tipo AXIS-CIP-DRIVE associato al motore MPL-B420P;

master, di tipo AXIS-VIRTUAL;

L'ultimo elencato è l'asse denominato virtuale perché non è associato ad alcun elemento reale, ma viene implementato per essere utilizzato come asse master per la sincronizzazione agli assi reali del sistema.

Nelle prove effettuate non è stato utilizzato l'asse2 e quindi si è limitata la gestione del sistema all'asse1 e all'asse master.

E' importante conoscere che prima di comandare i movimenti di un qualsiasi asse servo, quest'ultimo deve necessariamente essere attivato. A questo scopo il software RSLogix mette a disposizione un blocchetto funzionale denominato MSO (Motion Servo ON) che consente di abilitare l'azionamento servo e attivare l'anello di controllo dell'asse stesso. Esiste anche la funzione complementare che serve per la disattivazione dell'asse denominata MSF (Motion Servo OFF), la quale "apre" l'anello di controllo dell'asse. Molti blocchetti funzionali, tra cui anche quelli appena menzionati, devono essere eseguiti solamente una volta dal programma altrimenti generano dei fault che bloccano il sistema; vengono usati quindi dei segnali che non permettano la riattivazione del ramo del diagramma ladder dopo la prima esecuzione.

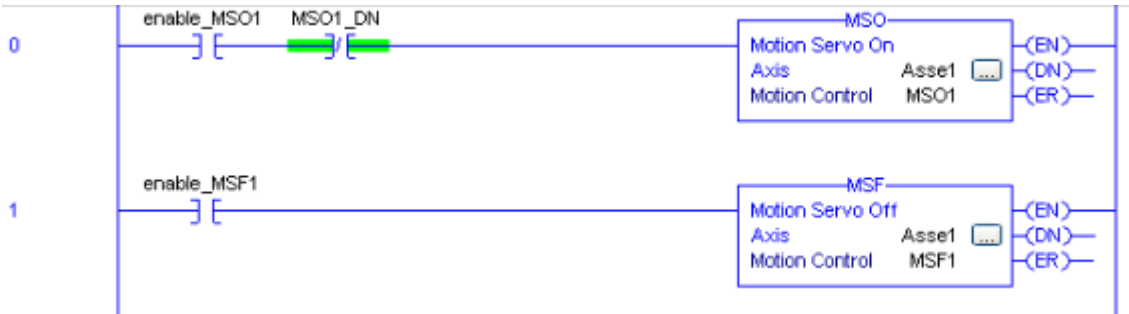


Figura 54: MSO e MSF

Dopo la procedura di abilitazione dell'asse, è importante fare anche il homing che permette all'asse di definire il suo zero. In questa sperimentazione è stato eseguito il homing dell'asse master e quello dello slave alla stessa posizione considerato come posizione di avviamento del sistema.

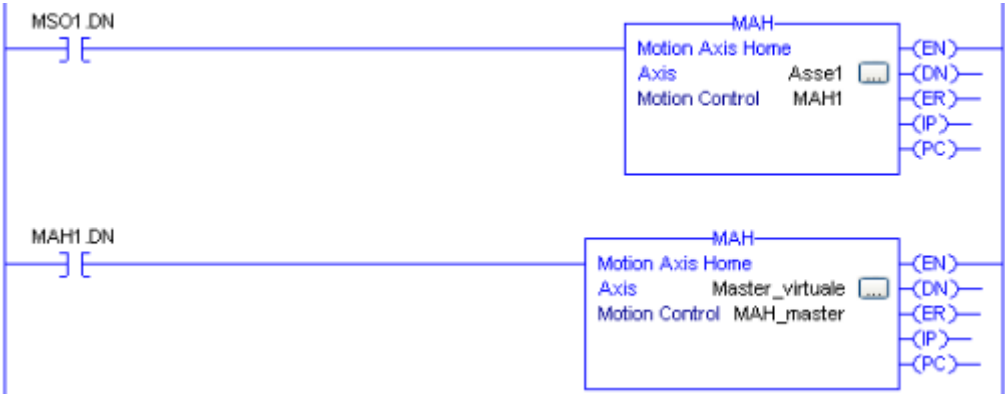


Figura 55: MAH

5.3.2 Creazione Camme elettroniche

Il software RSLogix5000 permette di definire, modificare ed implementare camme elettroniche tra i vari assi definiti nel controllore. Le camme elettroniche sono degli accoppiamenti virtuali molto flessibili e facili da modificare che, grazie a queste caratteristica e la facilità di gestione in logica PLC, si stanno sostituendo all'utilizzo di riduttori e camme meccaniche. Esse infatti consentono la sincronizzazione di più assi con una gestione via software.

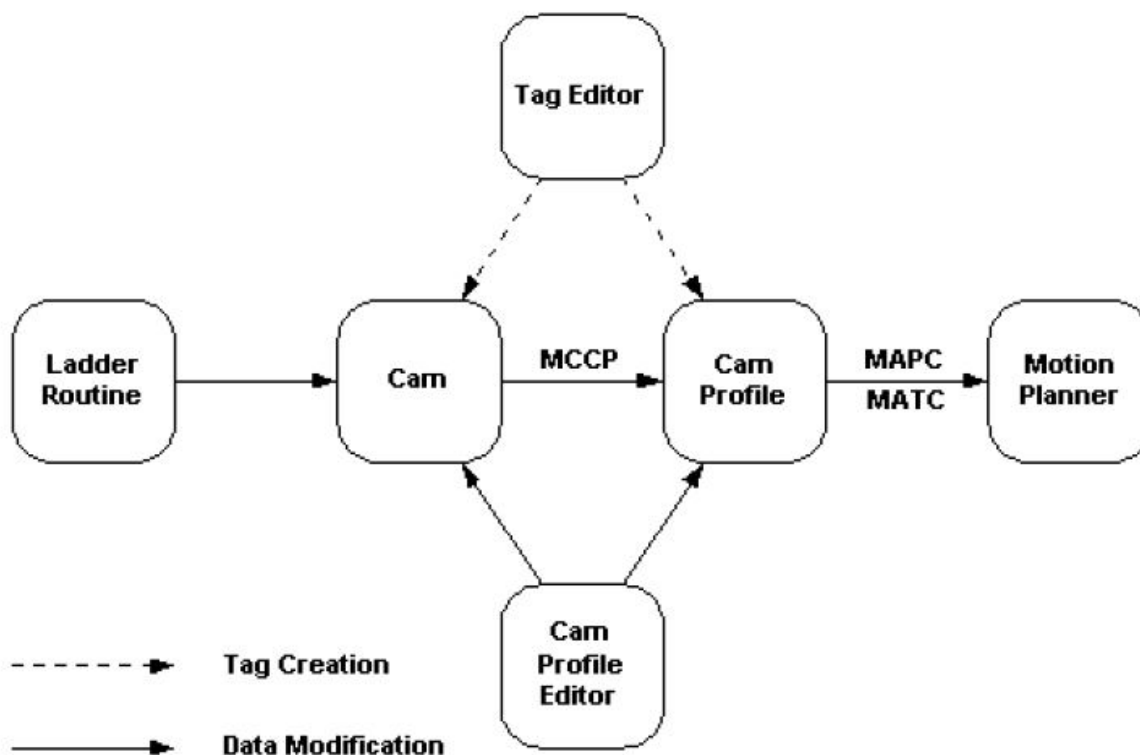


Figura 56: Diagramma logico per la creazione di una camma

All'interno del software RSLogix5000, per realizzare e implementare le camme elettroniche all'interno del controllore, sono state messe a disposizione dell'utente le seguenti funzioni: MCCP (Motion Calculate Cam Profile), istruzione che calcola un profilo camma in base ad una matrice di punti camma definita programmaticamente oppure tramite l'editor profilo camma RSLogix5000. Lo scopo principale di un'istruzione MCCP è quello di consentire di calcolare un profilo di camma in tempo reale in base ad un dato set di punti nella matrice di una camma specifica.

I profili camma generati da questa istruzione vengono usati dalle istruzioni di calcolo della camma MAPC (Motion Axis Position Cam) per eseguire il movimento complesso di un asse slave in relazione alla posizione o al tempo di un asse master. Nel caso particolare gli elementi della matrice di tipo CAM sono composti da coppie di punti master-slave calcolati per mezzo di una funzione scritta in una routine di tipo Structured Text con interpolazione di tipo cubico tra un punto e l'altro. L'interpolazione è stata così scelta ponendo a 1 la componente SegmentType in ciascun elemento del vettore di camma; sarebbe stata possibile un'interpolazione di tipo lineare ponendo a 0 tale valore. MAPC, istruzione per l'avvio di un profilo di camma precedentemente calcolato dal blocco MCCP. Con tale comando si esegue la camma attraverso la quale l'asse slave (in questo caso asse1) viene sincronizzato con l'asse master. I parametri forniti a questa istruzione controllano la direzione del moto, la scala tra master e slave, la posizione, la modalità di esecuzione e il piano di esecuzione. In questo momento non sono ancora definiti i limiti di velocità e accelerazione in quanto questi vengono dichiarati e determinati dalla funzione di movimentazione dell'asse di comando, in questo caso quindi dell'asse master virtuale.

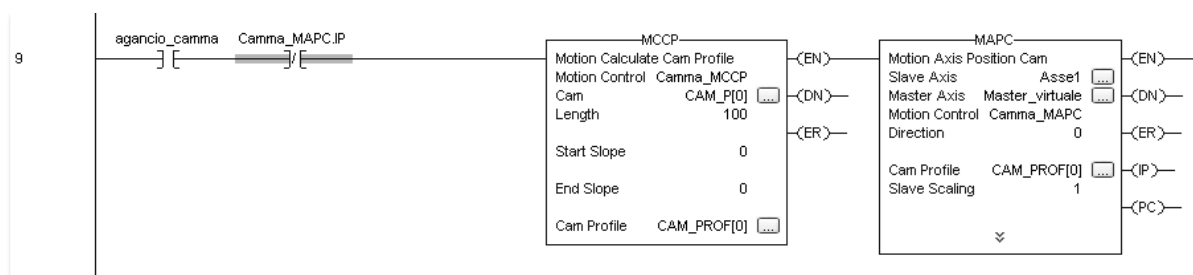


Figura 57: Sincronizzazione master-slave

La routine di camma deve essere eseguita una sola volta in quanto la sincronizzazione master-slave rimane costante per tutta l'esecuzione del controllo; a tal scopo, è stato inserito un contatto logico ONS (fronte di salita) nel ramo di comando della subroutine. La sua funzione è facilmente intuibile: quando è abilitato e il bit di memoria è azzerato, l'istruzione ONS abilita il resto del ramo, mentre quando è disattivato o quando il bit controllo è a valore logico alto, l'istruzione ONS disabilita il resto del ramo. Per la creazione del profilo di camma si è utilizzato un vettore di tipo CAM_P[100], in cui 100 rappresenta il fattore di discretizzazione (numero di punti) del profilo. Si tratta di un vettore di celle composte da tre elementi:

- CAM[i].Master
- CAM[i].Slave
- CAM[i].SegmentType per i che varia da zero a 99.

Ciascuno di essi verrà compilato tramite dei comandi scritti in codice appropriato all'interno di un listato di programmazione di tipo Structured Text. La costruzione della camma avviene in sola posizione, in quanto è il software che automaticamente deriva il profilo per ottenere quello di velocità, accelerazione e jerk; in questo modo si riduce notevolmente la complessità di costruzione della camma elettronica da parte dell'utente. L'editor grafico per la visualizzazione dei diversi profili si presenta come nella seguente figura e il profilo finale può essere visualizzato all'interno del blocchetto MCCP.

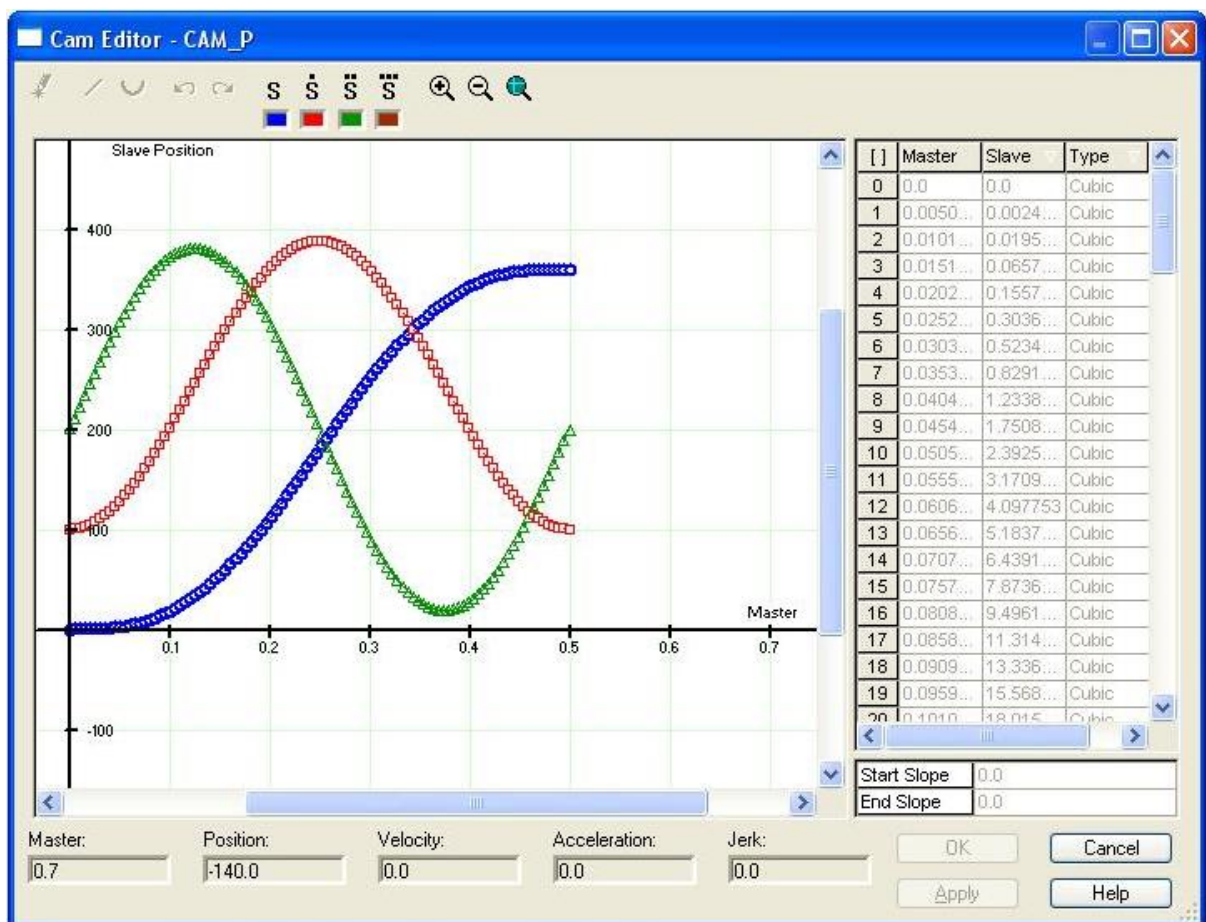


Figura 58: Cam editor per camma cicloidale

5.3.3 Gestione delle uscite

Il software RSlogix permette la lettura delle variabili dei dispositivi collegati al controllore. In particolare attraverso il pannello di controllo dell'asse, come in **Figura 59**, possono essere selezionati i parametri di maggior interesse dell'asse motore, permettendone la visualizzazione grafica durante il ciclo di lavoro attraverso dei monitor che costruiscono il trend della variabile.

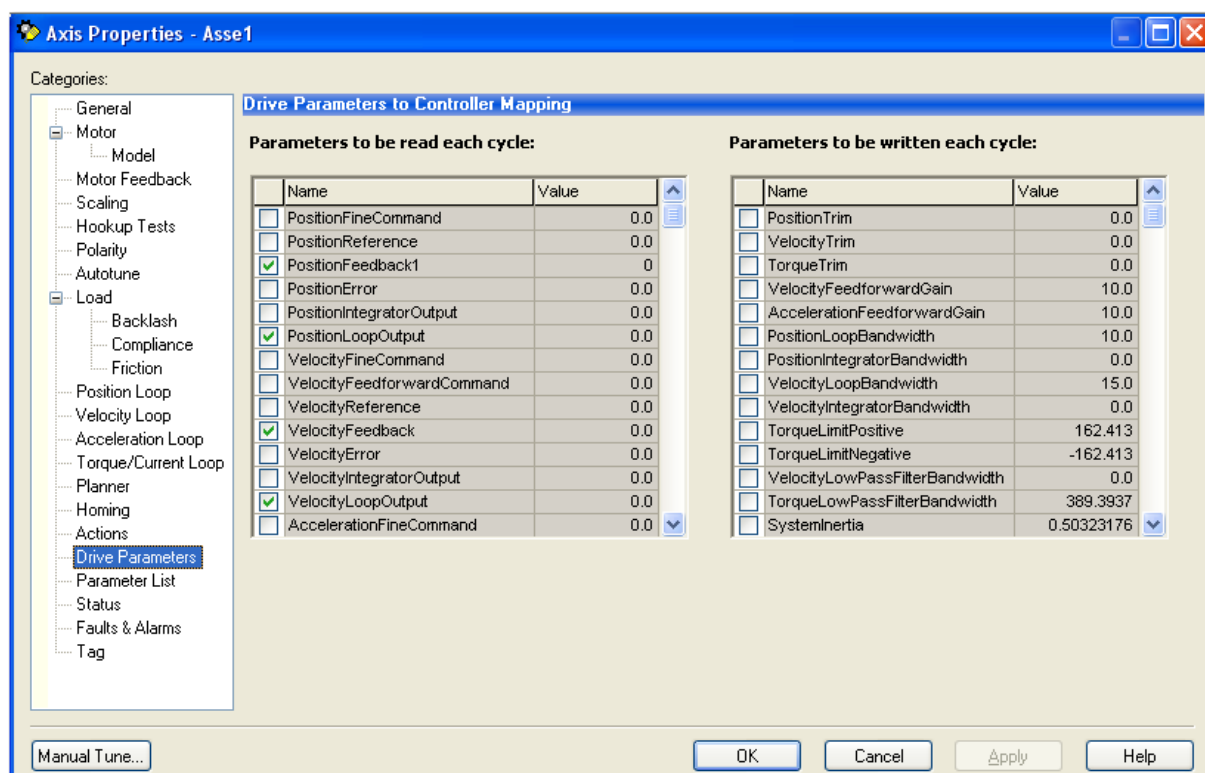


Figura 59: Pannello di controllo dell'asse 1

All'interno di una cartella di sistema (Trends) possono essere salvati gli andamenti delle variabili in relazione al tempo ciclo; in un primo momento si possono così confrontare visivamente se i risultati soddisfano o meno le aspettative. E' possibile modificare il tempo di campionamento, la scala degli assi, il colore delle linee e aggiungere delle barre di valore per la lettura puntuale dei dati. In Figura 60 è riportato un esempio di monitor grafico per la visualizzazione di alcuni parametri del motore in esame. Sarà lo strumento fondamentale per lo svolgimento dell'analisi pratica dello studio in oggetto.

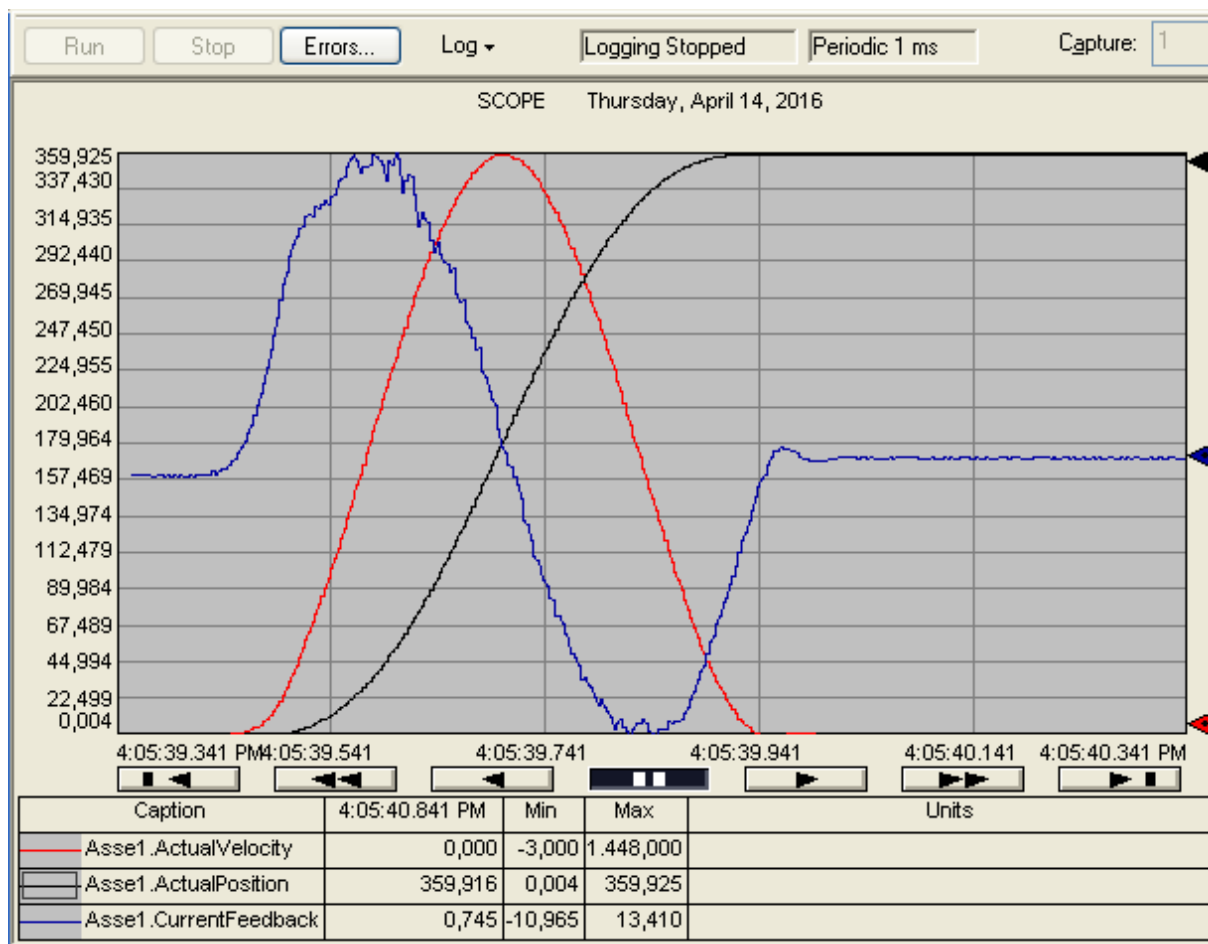


Figura 60: Finestra di visualizzazione dei segnali di uscita (legge cicloidale)

Per la visualizzazione grafica saranno scelte le forme d'onda di maggior interesse, in particolare quelle che caratterizzano la legge di moto di comando per confrontarne i valori con quella imposta nel CAM Editor, e la forma d'onda della corrente del motore dalla quale per mezzo della costante di coppia si ha la relazione diretta per ottenere i valori istantanei di coppia motrice fornita dal motore.

5.4 Risultati sperimentali

5.4.1 Il sistema di controllo

Il software RSLogix5000 fornito da Allen-Bradley consente all'utente una semplice gestione del sistema di controllo per gli assi attuati e/o virtuali. All'interno della cartella di sottosistema "Motion Groups " sono presenti tutti gli assi del sistema sperimentale. In particolare è necessario impostare correttamente tutti i parametri relativi all'asse principale di movimento denominato asse1. Il software riconosce in procedura automatica gli elementi connessi al controllore, quindi sono direttamente salvati i parametri caratteristici del motore MPL-B330.

Dimensione	valore	unità di misura
Costante di coppia (Kt)	1.124	[Nm/A(rms)]
Resistenza (Rs)	4.6	[Ohms]
Induttanza (Ls)	0.028	[Henries]

Tabella 22: Caratteristiche del motore

Il controllore invece non ha alcuna informazione riguardo il meccanismo collegato all'asse motore. E' possibile quindi definire il sistema esterno attraverso l'impostazione di alcuni semplici dati:

Load Coupling, per mezzo del quale si specifica la tipologia di accoppiamento; nel nostro caso l'accoppiamento è di tipo rigido in quanto l'asta è fissata con una vite direttamente sull'albero motore.

Load Ratio, per specificare il rapporto di inerzia tra carico e motore (Load Inertia/Motor Inertia). Nel nostro caso l'inerzia motore è $J_m = 0.00012 \text{ Kg.m}^2$ per cui, vista l'inerzia del carico calcolata precedentemente, si è deciso di non usare LoadRatio in quanto esso risulta troppo elevato e il sistema di controllo non avrebbe gestito correttamente questa informazione.

Si è usato invece l'inerzia totale del sistema $I = 0.00388 \text{ Kg.m}^2$

Torque Offset, per una compensazione attiva della coppia di carico, ma posta nulla per questa applicazione.

E' fornito un controllo molto complesso che comprende:

- ❖ **Anello di posizione**
- ❖ **Anello di velocità**
- ❖ **Anello di accelerazione**
- ❖ **Anello di corrente/coppia**

I parametri di questi anelli sono calcolati da una procedura di Auto-Tuning che utilizza i dati esplicitati in precedenza, al fine di ottenere un buon controllo di base per il sistema. Tuttavia è possibile eseguire un Manual-Tuning per ottimizzare al meglio il controllo dell'applicazione, variando i parametri di larghezza di banda (Bandwidth), inserendo degli integratori sintonizzati su particolari frequenze, utilizzando delle reti anticipatrici di velocità e accelerazione (Velocity/Acceleration Feedforward) per velocizzare la convergenza del sistema di controllo. Per questo particolare caso di studio non sono state utilizzate tutte le funzioni a disposizione in quanto un controllo di base era sufficiente per ottenere i valori delle coppie motrici in gioco. Tuttavia per ciascuna legge di moto implementata si è cercata una taratura manuale ottimale tale per cui i segnali acquisiti dal motore fossero chiari e l'inseguimento dei riferimenti fosse il più preciso possibile, con uno sfruttamento del motore lontano dai suoi limiti massimi di utilizzo. Per ciascuna legge di moto quindi sono stati assunti diversi valori in termini di larghezza di banda in modo da ottenere dei segnali abbastanza "puliti" con basso ripple sovrapposto. I valori sono riportati nella seguente tabella

	Anello di posizione (Bandwidth Hz)	Anello di velocità (Bandwidth Hz)	Anello di corrente (Bandwidth Hz)
Vel costante	5	15	500
Cicloidale	10	15	500
Poli 5 grado	5	12	500
Trapez acc	5	15	500

Tabella 23: Parametri di taratura degli anelli di controllo

Il software di controllo RSLogix fornisce il segnale di corrente assorbita come percentuale della corrente nominale. Noto quindi il valore della costante di coppia K_t in Tabella 22 e il valore a catalogo della corrente nominale del motore (Tabella 21), risulta semplice il calcolo della coppia motrice

$$C_m = K_t * I_n * I_{mis}/100 \quad (5.3)$$

5.4.2 Coppia di attrito

Facendo ruotare il motore a velocità costante (in questo caso 700 gradi/s), quindi data l'accelerazione nulla qualsiasi componente di coppia esterna risulta azzerata. In figura. 61 è mostrato il ripple di corrente (e conseguentemente di coppia) dovuto all'interazione delle coppie polari tra rotore e statore e anche all'attrito tra l'albero motore e certe parti dello statore. Si nota come l'ampiezza del ripple di coppia sia solo qualche punto percentuale della corrente nominale del motore; nonostante ciò esso influisce notevolmente sull'andamento della corrente per le leggi di moto studiate.

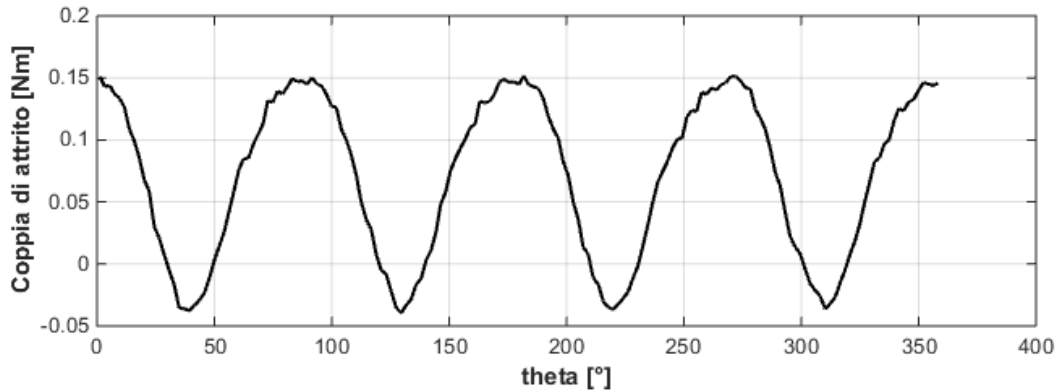


Figura 61: Ripple di coppia a velocità costante

Il tempo ciclo inizialmente usato era di 1s. Data la bassa inerzia del carico da muovere, le coppie inerziali richieste per la movimentazione risultano molto basse e assumono lo stesso ordine di grandezza del ripple di coppie di attrito. In tal caso risulta difficile discriminare quale sia il reale andamento delle coppie in gioco nel sistema, dovute alla sola legge di moto implementata e alla tipologia di carico (coppie inerziali della manovella). Per tal motivo è stato dimezzato il tempo ciclo $T_c = 0.5s$, con una richiesta di maggior accelerazione per la movimentazione, la quale si traduce in maggior assorbimento di corrente da parte del motore e quindi maggior generazione di coppia motrice. E' stato così possibile ridurre l'influenza del ripple di corrente dovuto all'attrito sull'andamento grafico della corrente assorbita dal motore durante la fase di lavoro.

Nel modello dinamico usato nel capitolo 2, si è considerato tutto l'attrito come viscoso. Con questa approssimazione il coefficiente di attrito viscoso f_v usato per la simulazione può essere ricavato considerando che a velocità costante la coppia richiesta al motore è proporzionale alla velocità come nella seguente formula

$$C_m = f_v \dot{\theta} . \text{ Per la simulazione si è stimato il coefficiente di attrito viscoso a } f_v = 0.008$$

5.4.3 Confronto tra modello reale e teorico

Il seguente grafico mostra il confronto tra il modello dinamico teorico del sistema senza molla ottenuto mediante equazioni in matlab e il modello reale ottenuto dalle misure sperimentale. Il grafico è stato fatto solo nel caso della legge di moto cicloidale. L'errore del 18% osservato è dovuto al fatto che nella costruzione del modello teorico si è tenuto conto solo di una stima di attrito viscoso invece nel modello reale ci sono tante altre componenti di attrito tale l'attrito aerodinamico dovuto al fatto che la manovella gira nell'aria. Un altro elemento di spiegazione dell'errore è il fatto che l'inerzia utilizzata nella simulazione non è esattamente quella risentita dal motore visto che la manovella è stata forata in più punti e non si è tenuto conto nella stima dell'inerzia del carico. Per ottenere dei risultati ottimali con il metodo di minimizzazione della coppia massima, bisogna prima di tutto stimare con accuratezza le

componenti d'attrito del sistema reale così per migliorare il modello teorico usato per la simulazione.

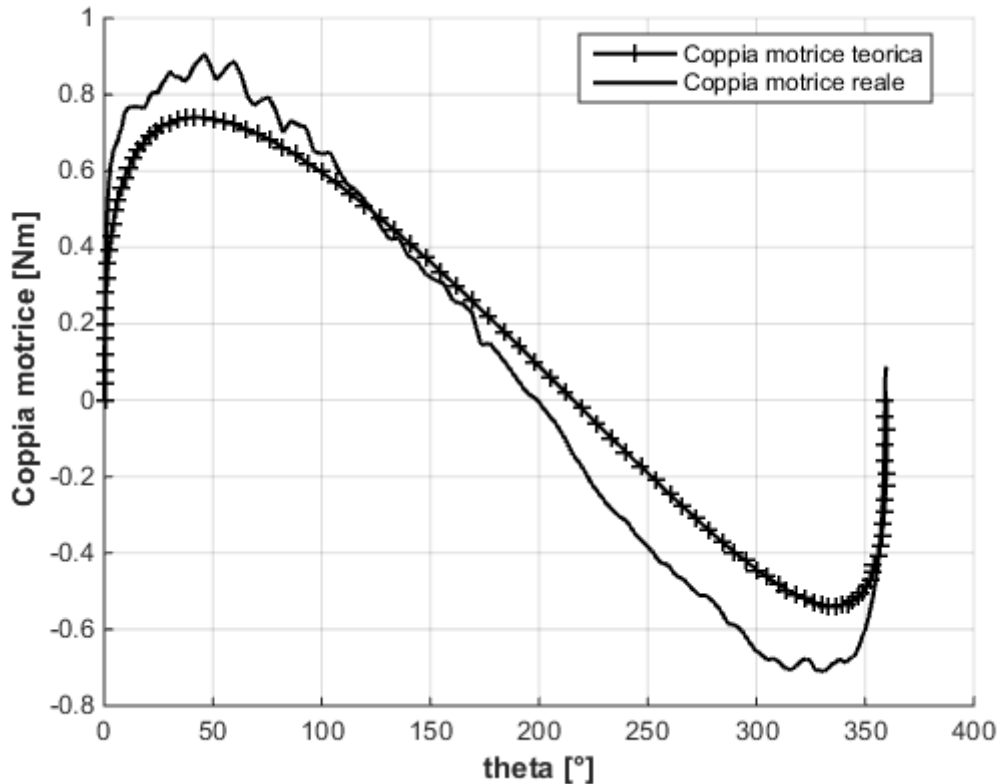


Figura 62: Confronto tra modello teorico e reale del sistema senza molla

5.4.4 Confronto tra le coppie motrici

In questo paragrafo vengono visualizzati i risultati ottenuti con le diverse leggi di moto e il guadagno in termini di abbassamento della coppia richiesta al motore sia nel caso teorico che nel caso reale. Il risultato nel caso teorico è molto approssimativo visto che il modello non è abbastanza accurato.

Non si è usato il risultato teorico studiato nel capitolo 2 perché gli elastici usati nel laboratorio avevano lunghezza a vuoto fissata $l_0 = 0.19m$ e la rigidità calcolata secondo il metodo presentato precedentemente, $K = 88.5N/m$. Si è elaborato un altro codice che tiene conto di questi vincoli.

$L=0.3$; % Lunghezza manovella [m]
 $m = 0.25$; % Massa manovella [Kg]
 $OM=0.08$; % Distanza di fissaggio della molla lungo la manovella [m]
 $l_{0m}=0.19$; % Lunghezza libera della molla [m]
 $K=88.5$; % rigidezza della molla [N/m]
 $N = 100$; % numero di punti per discretizzazione
 $J_c = 3.88e-3$; % [Kgm²] Inerzia della manovella (carico)
 $J_m = 1.2e-4$; % [Kgm²] Inerzia del motore
 $f_v = 0.008$; % [Nms/rad] coefficiente di attrito viscoso motore
 $t_m = 0.5$; % [s] tempo di azionamento

❖ **Metodo di ottimizzazione basato sulla minimizzazione della coppia massima**

I risultati teorici ottenuti per le tre tipologie di leggi di moto sono:

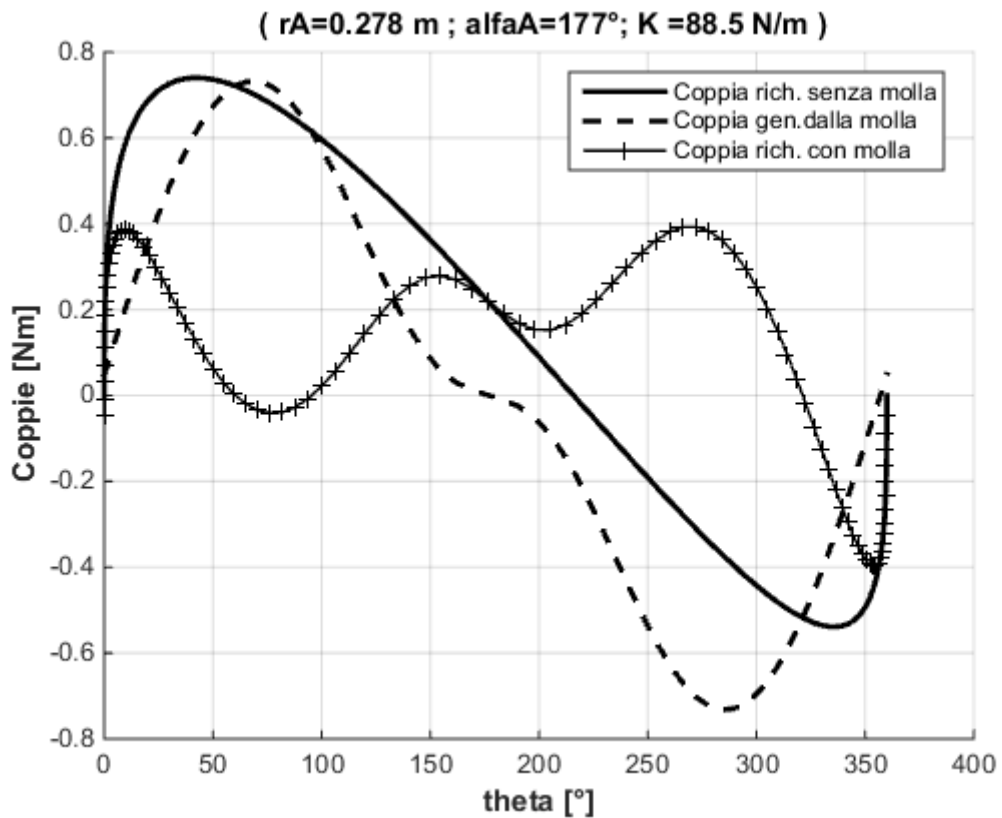


Figura 63: Coppia teorica col legge cicloidale e algoritmo fminimax

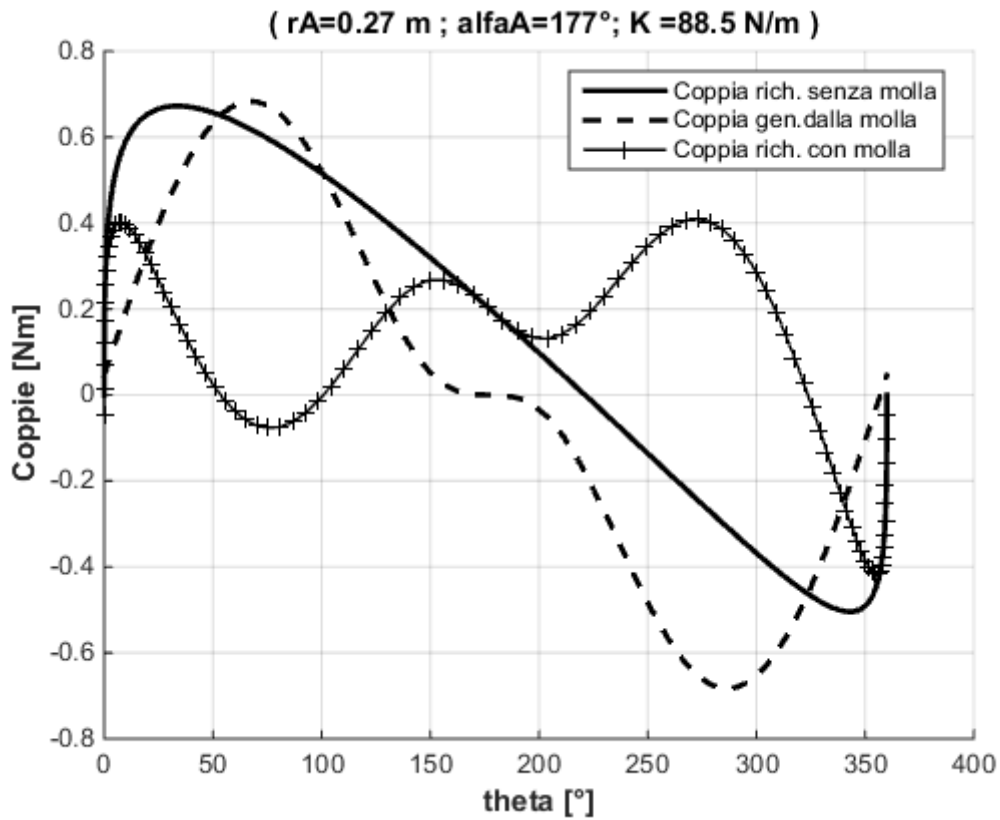


Figura 64: Coppia teorica col legge polinomiale 5° e algoritmo fminimax

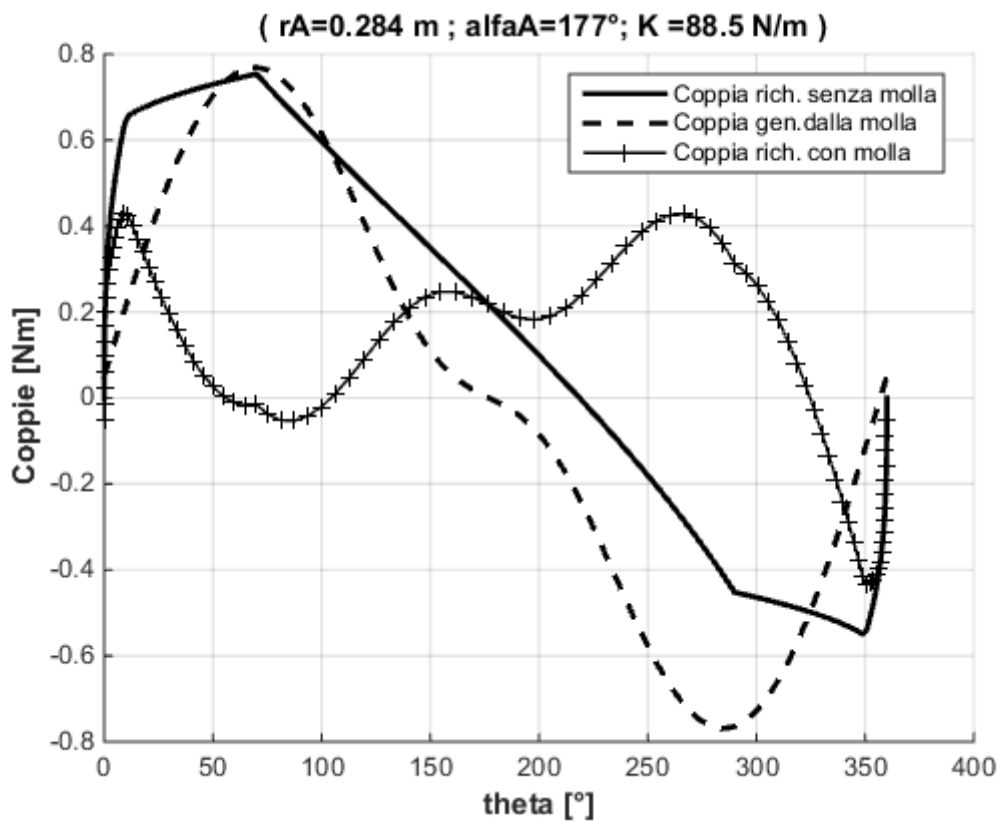


Figura 65: Coppia teorica col legge ad accelerazione trapezoidale e algoritmo fminimax

Leggi di moto	Abbassamento coppia di picco	Abbassamento coppia rms
Cicloidale	46%	44%
Polinomiale 5° grado	38%	39%
Accelerazione trapezoidale	42%	44%

Tabella 24: Abbassamento coppia teorico a algoritmo fminimax

Dopo la sperimentazione i risultati ottenuti sono:

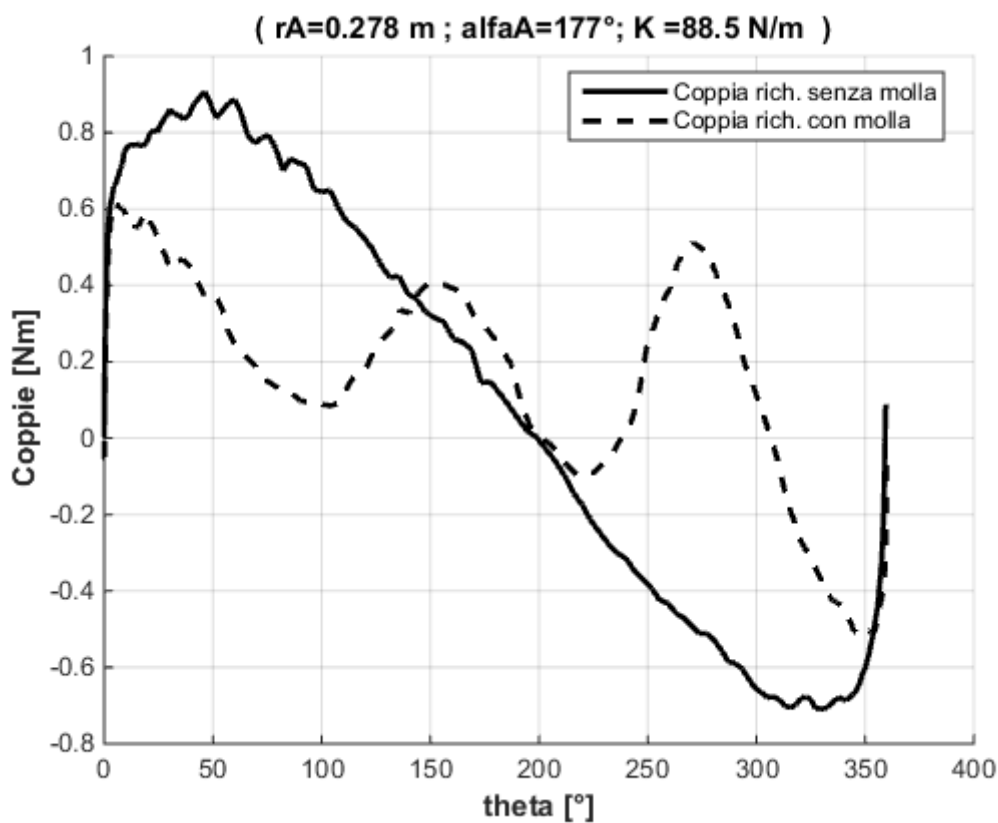


Figura 66: Coppia reale con legge cicloidale e algoritmo fminimax

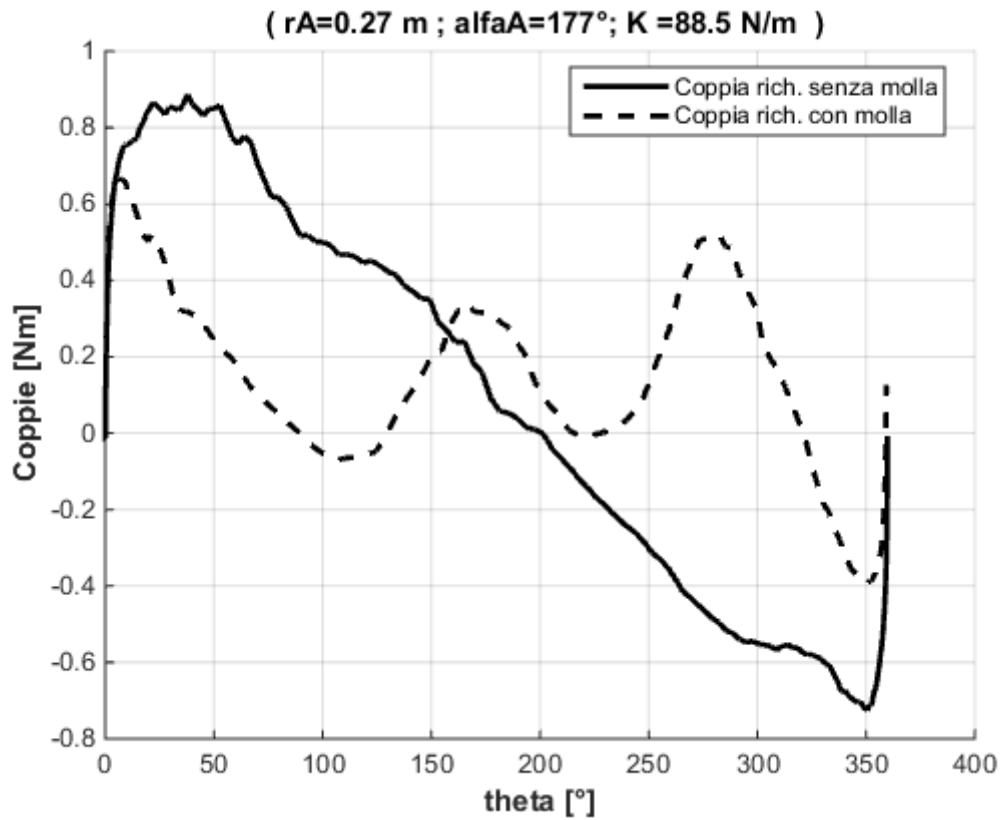


Figura 67: Coppia reale con legge polinomiale 5° e algoritmo fminimax

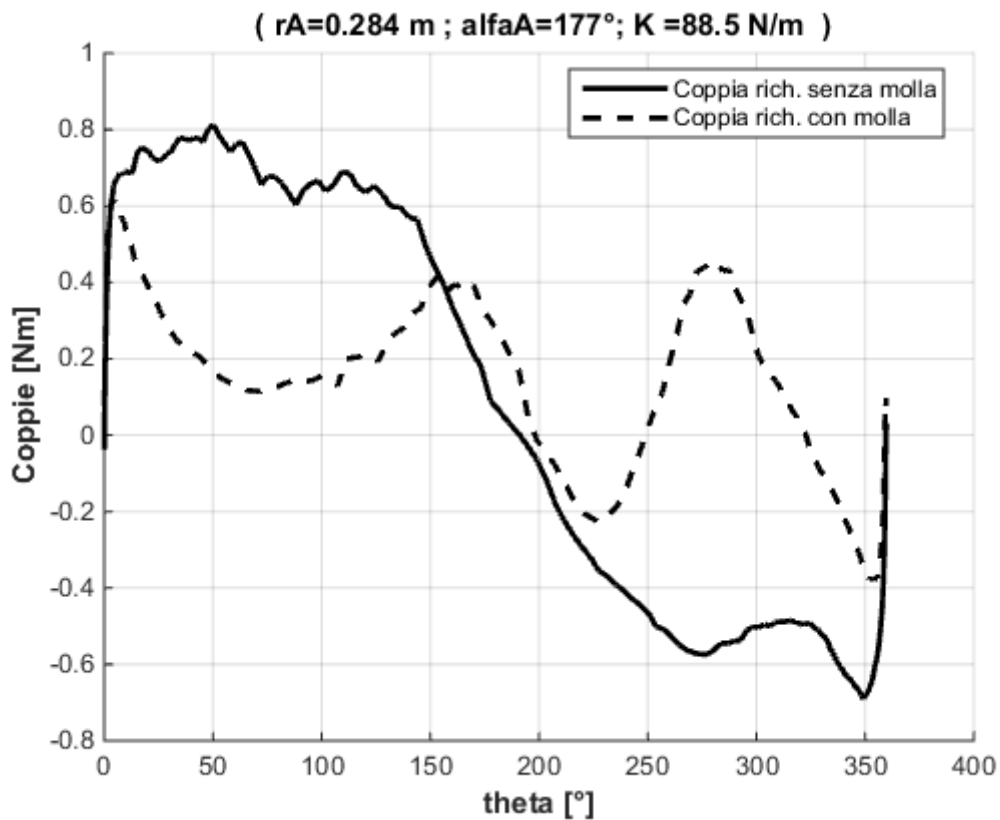


Figura 68: Coppia reale con legge ad accelerazione trapezoidale e algoritmo fminimax

Leggi di moto	Abbassamento coppia di picco	Abbassamento coppia rms
Cicloidale	32%	30%
Polinomiale 5° grado	25%	44%
Accelerazione trapezoidale	24%	45%

Tabella 25: Abbassamento di coppia reale e algoritmo fminimax

❖ **Metodo di ottimizzazione basato sulla minimizzazione della varianza dell'energia meccanica**

I risultati ottenuti per le tre tipologie di leggi di moto sono le seguenti:

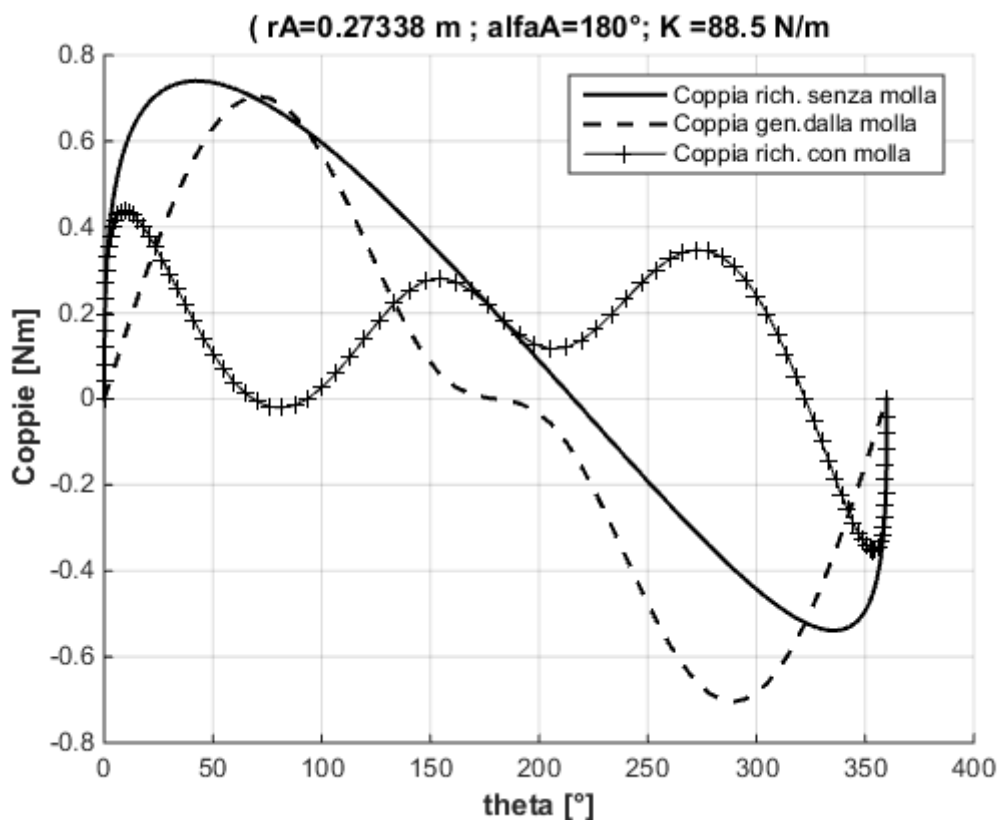


Figura 69: Coppia teorica col legge cicloidale con fmincon

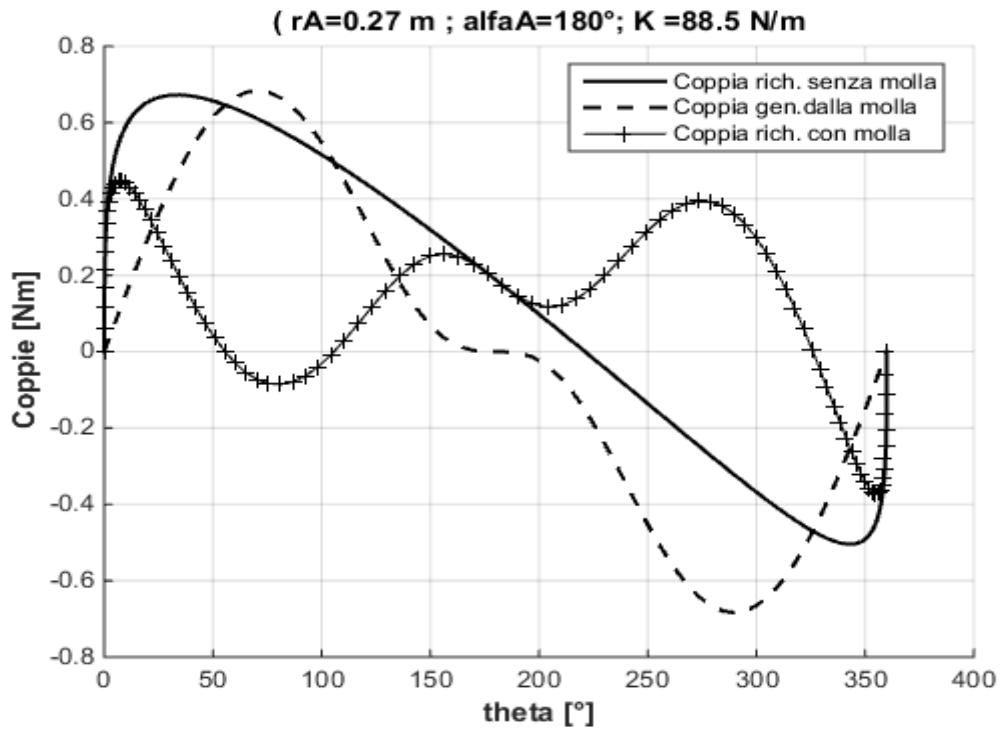


Figura 70: Coppia teorica con legge polinomiale 5° e algoritmo fmincon

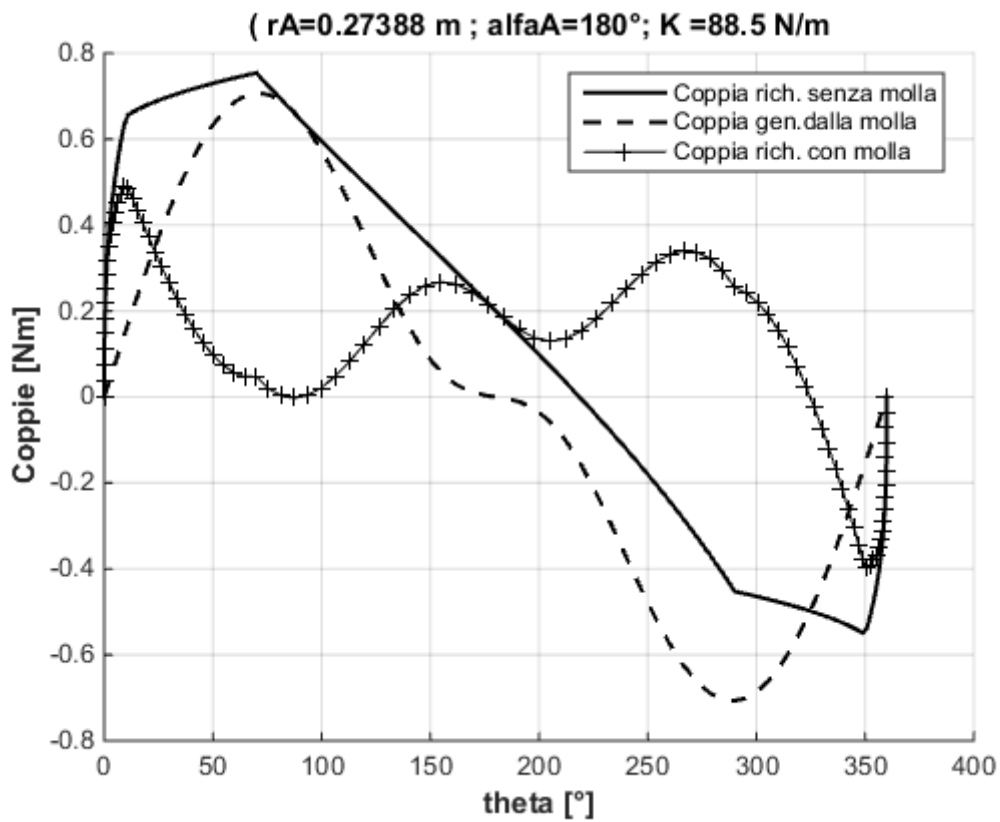


Figura 71: Coppia teorica col legge trapezoidale in accelerazione e algoritmo fmincon

Leggi di moto	Abbassamento coppia di picco	Abbassamento coppia rms
Cicloidale	41%	45%
Polinomiale 5° grado	34%	39%
Accelerazione trapezoidale	35%	45%

Tabella 26: Abbassamento coppia teorico a algoritmo fmincon

Questi risultati sono buoni ma bisogna verificare il caso reale per confrontare visto le approssimazioni del modello teorico.

Dopo la sperimentazione i risultati ottenuti sono i seguenti:

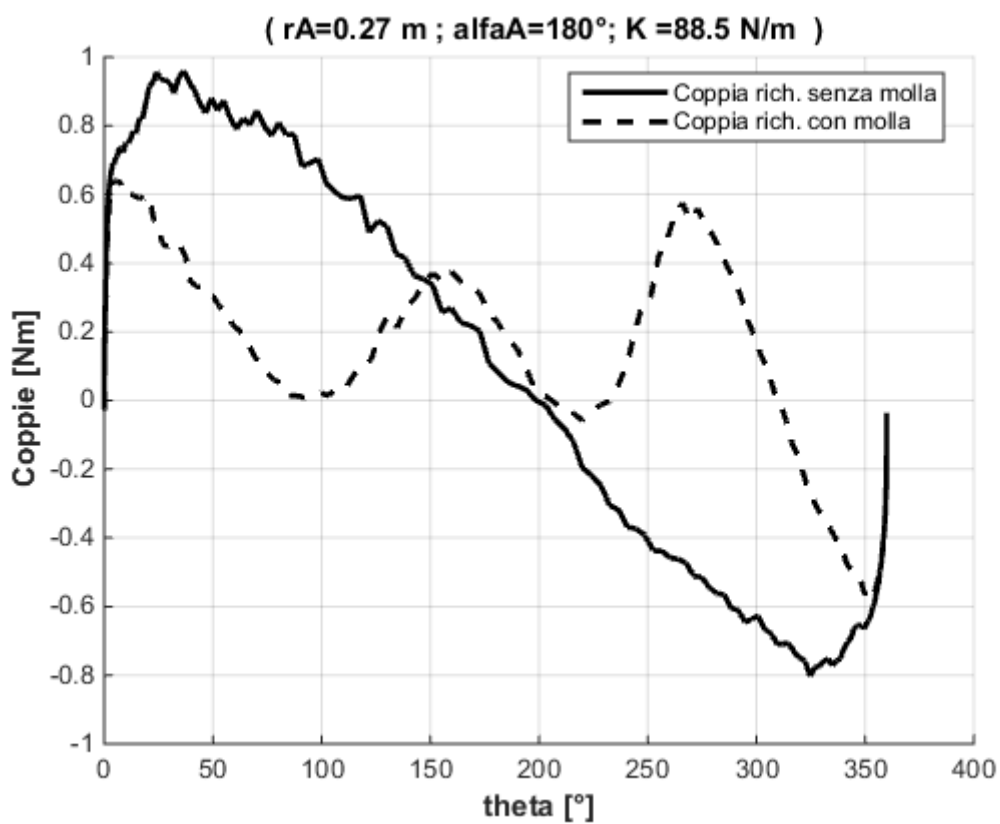


Figura 72: Coppia reale con legge cicloidale e algoritmo fmincon

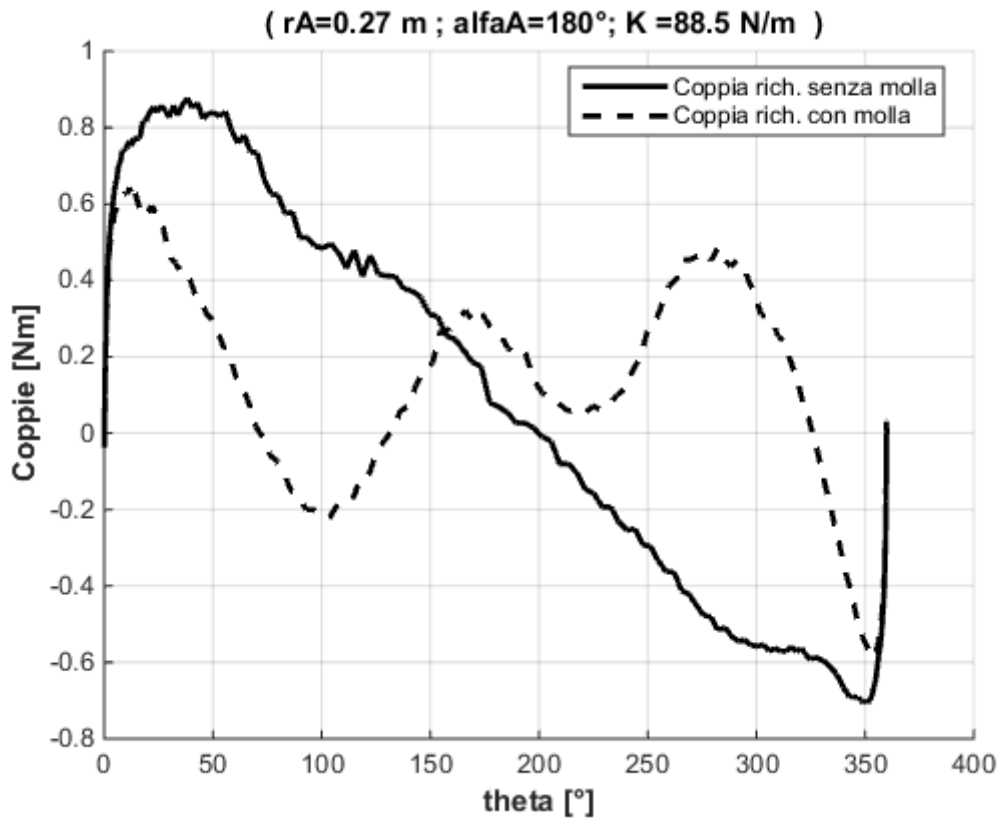


Figura 73: Coppia reale col legge polinomiale di 5° e algoritmo fmincon

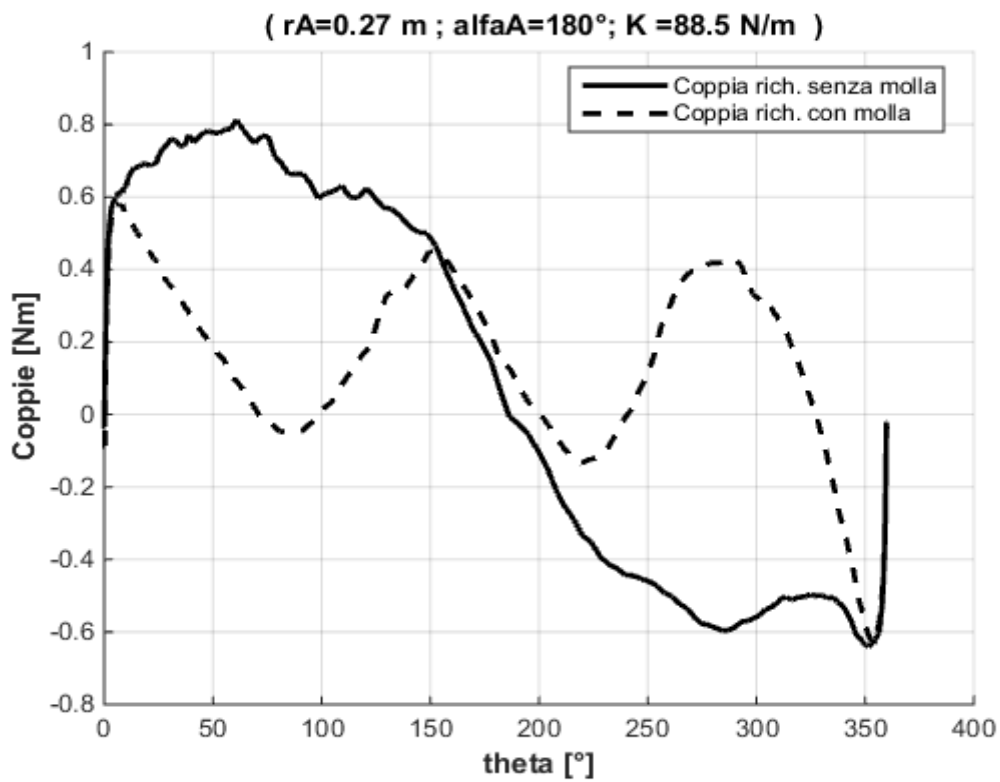


Figura 74: Coppia reale col legge trapezoidale in accelerazione e algoritmo fmincon

Leggi di moto	Abbassamento coppia di picco	Abbassamento coppia rms
Cicloidale	33%	38%
Polinomiale 5° grado	27%	39%
Accelerazione trapezoidale	23%	37%

Tabella 27: Abbassamento di coppia reale e algoritmo fmincon

Si osserva per i due metodi che i risultati teorici sono migliori dei risultati reali. Questa differenza è dovuta al fatto che il modello teorico non è abbastanza accurato in quanto tutte le componenti dissipative presenti nel sistema reale non sono stati considerati nel sistema teorico. Infatti, per avere il modello di queste componenti dissipative, bisogna fare uno studio energetico del sistema reale.

Conclusioni

In questo documento, per risolvere il problema di abbassamento della coppia richiesta al motore nei meccanismi articolati mediante elementi elastici, due metodi sono stati proposti: uno basato sulla minimizzazione diretta della coppia massima e l'altro sulla minimizzazione della varianza dell'energia meccanica. Queste soluzioni sono state applicate su due famiglie di meccanismi ad un grado di libertà: una ad inerzia costante e l'altra ad inerzia variabile. Questa applicazione passa per, uno studio teorico dei meccanismi in termini di costruzione del modello dinamico senza e con l'elemento elastico, poi una simulazione con matlab per visualizzare i risultati.

Come meccanismo ad inerzia costante, si è studiato il caso di un meccanismo costituito da un motore, un'asta e una molla. Per primo approccio si è considerato una molla di lunghezza a vuoto fissata, per ridurre il numero delle variabili delle funzioni di ottimizzazione. Infatti quando cresce il numero di variabili, gli algoritmi di ottimizzazione tendono a produrre risultati che dipendono da condizioni iniziali oppure diventano lenti se si cerca il minimo globale a causa di numerosi minimi locali. I risultati ottenuti sono migliori nel caso della legge di moto cicloidale e minimizzando la coppia massima. Più di 40% di abbassamento di coppia di picco e coppia RMS.

L'altro meccanismo studiato era costituito di una motore, un quadrilatero articolato e una molla. Per poter costruire il suo modello dinamico, si è fatta una analisi cinematica di posizione e di velocità per determinare in forma chiusa le posizioni e velocità del centro di massa di ogni membro per un giro completo del motore. Questa analisi ha servito anche a determinare l'inerzia ridotta alla coordinata libera (posizione del motore) per il quadrilatero articolato che permette di risolvere l'equazione di Lagrange e determinare il modello dinamico del sistema. La simulazione in Matlab è stata realizzata come nel caso della manovella con l'unica differenza di avere inerzia variabile poi i risultati ottenuti sono migliori sempre con la legge cicloidale e minimizzando la coppia la coppia massima. 49% di abbassamento di coppia di picco e 14% di abbassamento di coppia RMS.

Sfruttando questa possibilità di ricerca del minimo globale offerta dall'algoritmo di minimizzazione della varianza dell'energia meccanica, si è aggiunto la lunghezza a vuoto della molla tra le variabili. Il risultato ottenuto con la legge cicloidale è del 55% di abbassamento di coppia di picco e 68% di abbassamento della coppia RMS nel caso dell'asta e del 41% di abbassamento di coppia di picco e 27% di coppia RMS. Aggiungendo anche la posizione di fissaggio della molla sul meccanismo come variabile, l'abbassamento arriva ai 73% di coppia di picco e 83% di coppia RMS.

Dopo lo studio teorico e la validazione dei risultati, si è passato alla sperimentazione in laboratorio con il meccanismo (motore-manovella-molla). Si è realizzato un confronto tra il modello teorico costruito in Matlab e il modello dinamico del sistema reale senza molla. Si nota un errore massimo del 23% tra i due modelli dovuto al fatto che nel modello Matlab si è tenuto conto solo della coppia di attrito viscoso invece il sistema reale contiene tante altre componenti di attrito ad esempio attrito radente, attrito aerodinamico. È da notare che per il laboratorio, non si è usata una vera molla ma un elastico in gomma. Una delle problematiche incontrate è stata la determinazione della costante elastica visto che l'allungamento di un elastico non è proporzionale alla forza applicata.

I due metodi di ottimizzazione sono stati provati con un elastico di lunghezza a vuoto 19cm e rigidezza media 88.5N/m. I risultati sono abbastanza vicini visto che la molla era già fissata e mancava solo la determinazione del punto di attacco a telaio.

Per avere dei risultati ottimali sarebbe meglio fare l'ottimizzazione considerando anche la lunghezza a vuoto della molla e la sua rigidezza come delle variabili. Questo permette di scegliere la molla ideale per l'applicazione.

Bibliografia

- [1] Sushant Veer and S. Sujatha, "*Approximate spring balancing of linkages to reduce actuator requirements*", Mechanism and Machine Theory ,18th December 2014
- [2] Zong-Wei Yang and Chao-Chieh Lan, "*An adjustable gravity-balancing mechanism using planar extension and compression springs*", Mechanism and Machine Theory 20th June 2015
- [3] Abhishek Agrawal and Sunil K. Agrawal, "*Design of gravity balancing leg orthosis using non-zero free length springs*", Mechanism and Machine Theory 5th March 2005
- [4] Sunil K. Agrawal and Abbas Fattah, "Theory and Design of an Orthotic Device for Full or Partial Gravity-Balancing of a Human Leg During Motion", IEEE transactions on neural systems and rehabilitation engineering, Vol.12 No.2 June 2014
- [5] Claudio Melchiorri, Traiettorie per azionamenti elettrici, 31 Dicembre 2000
- [6] Allen-Bradley Company. Logix5000 Controllers Motion Instructions.
In Reference Manual.

Appendici

A Codice matlab per il quadrilatero articolato

```
function beta = angolo_beta() % posA = (alfa, k)
global N theta phi0 l0 l1 l3
beta = zeros(N,2);
phi = angolo_phi();

for i =1:N
beta(i,1) = atan2(-l1*sin(theta(i))+l3*sin(phi(i,1))+ ...
    +l0*sin(phi0),-l1*cos(theta(i))+l3*cos(phi(i,1))+
    l0*cos(phi0));
beta(i,2) = atan2(-l1*sin(theta(i))+l3*sin(phi(i,2))+ ...
    +l0*sin(phi0),-l1*cos(theta(i))+l3*cos(phi(i,2))+
    l0*cos(phi0));
end
end

function [phi,delta] = angolo_phi() % posA = (alfa, k)
global N theta phi0 l0 l1 l2 l3
phi = zeros(N,2);
R1 = zeros(N,1);
R2 =zeros(N,1);
R3 = zeros(N,1);
delta = zeros(N,1);
for i =1:N
    R1(i) = 2*l3*(-l1*sin(theta(i))+l0*sin(phi0));
    R2(i) = 2*l3*(-l1*cos(theta(i))+l0*cos(phi0));
    R3(i) = l0^2+l1^2+l3^2-l2^2-2*l0*l1*cos(theta(i)-phi0);
    delta(i) = 4*(R1(i)^2+R2(i)^2-R3(i)^2);
    if( delta(i) >=0)
        phi(i,1) = 2*atan2(-R1(i)+sqrt(delta(i)/4),R3(i)-
R2(i));
```

```

        phi(i,2)      =      2*atan2(-R1(i)-sqrt(delta(i)/4),R3(i)-
R2(i));
    else
        phi(:,1)=0;
        phi(:,2)=0;
    end
end
end
function [Jeq, T, Cm] = inerzia_Ec_Cm() % posA = (alfa, k)
global N theta beta phi phi0 l0 l1 l2 l3 m1 m2 m3 I1 I2 I3 Jm v
a fv
C=zeros(N,1);
dC_dtheta = zeros(N,1);
dC_dbeta = zeros(N,1);
dK1_dtheta = zeros(N,1);
dK1_dbeta = zeros(N,1);
dK1_dphi = zeros(N,1);
dK2_dtheta = zeros(N,1);
dK2_dbeta = zeros(N,1);
dK2_dphi = zeros(N,1);
dJeq_dtheta = zeros(N,1);

Cm =zeros(N,1);
T = zeros(N,1);
J4b =zeros(N,1);
Jeq =zeros(N,1);
K1 = zeros(N,1);
K2 = zeros(N,1);
j=2; % numero di configurazioni per il meccanismo
for i =1:N
if((l2*(sin(-phi(i,j)+beta(i,j))))~=0)
    K1(i)=(l1*sin(-theta(i)+phi(i,j)))/(l2*sin(-
phi(i,j)+beta(i,j)));

```

```

K2(i)=(l1*sin(beta(i,j)-theta(i)))/(l3*sin(-
phi(i,j)+beta(i,l)));
J4b(i)=(m1*(l1/2)^2+I1)+
(m2*(l1^2+(l2/2)^2*K1(i)^2+2*l1*(l2/2)*(cos(theta(i)-
beta(i,j)))*K1(i)))+(I2*K1(i)^2)+(m3*(l3/2)^2+I3)*K2(i)^2);

%T(i) = (1/2)*(Jm+J4b(i))*v(i)^2; % energia cinetica

J1 =Jm+ (m1*(l1/2)^2+I1)+(m2*l1^2);
J2 = (m2*(l2/2)^2+I2);
J3 = (m3*(l3/2)^2+I3);
J4 = 2*m2*l1*(l2/2);
C(i) = cos(theta(i)-beta(i,j));
Jeq(i) = J1 + J2*K1(i)^2 + J3*K2(i)^2 + J4*C(i)*K1(i); %
inerzia equivalente
T(i) = (1/2)*Jeq(i)*v(i)^2; % energia cinetica
dK1_dtheta(i) = (-l1*cos(-theta(i)+phi(i,j)))/(l2*(sin(-
phi(i,j)+beta(i,j)))); % dK1/dtheta
dK1_dbeta(i) = -(l1*sin(-theta(i)+phi(i,j)))*(cos(-
phi(i,j)+beta(i,j)))/(l2*(sin(-phi(i,j)+beta(i,j)))^2);
dK1_dphi(i) = (l1*sin(-theta(i)+beta(i,j)))/(l2*(sin(-
phi(i,j)+beta(i,j)))^2);
dK2_dtheta(i) = -(l1*cos(beta(i,j)-theta(i)))/(l3*(sin(-
phi(i,j)+beta(i,j))));
dK2_dbeta(i) = -(l1*sin(phi(i,j)-theta(i)))/(l3*(sin(-
phi(i,j)+beta(i,j)))^2);
dK2_dphi(i) = (l1*sin(beta(i,j)-theta(i)))*(cos(-
phi(i,j)+beta(i,j)))/(l3*(sin(-phi(i,j)+beta(i,j)))^2);
dC_dtheta(i) = -sin(theta(i)-beta(i,j));
dC_dbeta(i) = sin(theta(i)-beta(i,j));
dJeq_dtheta(i) =
2*J2*K1(i)*(dK1_dtheta(i)+dK1_dbeta(i)*K1(i)+dK1_dphi(i)*K2(i)
)+...
+2*J3*K2(i)*(dK2_dtheta(i)+dK2_dbeta(i)*K1(i)+dK2_dphi(i)*K2(i)

```

```

)) + ...
+J4*C(i) * (dK1_dtheta(i) + dK1_dbeta(i) * K1(i) + dK1_dphi(i) * K2(i)) +
...   +J4*K1(i) * (dC_dtheta(i) + dC_dbeta(i) * K1(i));
      Cm(i) = Jeq(i) * a(i) + (1/2) * dJeq_dtheta(i) * v(i)^2 + fv * v(i);
end
end

```

B Codice per la creazione di una camma cicloidale

```

//varibili
local_pi:=3.141592653589;
size_cam_p := 100;
h := 360.0;
T := 0.5;

N_punti := size_cam_p-1; // numero di punti a disposizione
deltaT := 1/N_punti; // intervallo di tempo tra un punto e l'altro per la legge
normalizzata
interpolation_type := 1; // tipo di interpolazione : 0 per lineare , 1 per cubica
count := 0;
//legge di moto
CAM_P[0].Slave := 0;
CAM_P[0].Master := 0;
CAM_P[0].SegmentType := interpolation_type;

FOR count:=1 TO N_punti BY 1 DO
    tau := count*deltaT;
    CAM_P[count].Slave := h*(tau- 1/(2*local_pi)*sin(2*local_pi*tau)); // scalatura
posizione
    CAM_P[count].Master := tau*T;
// scalatura tempo
    CAM_P[count].SegmentType := interpolation_type;
END_FOR;
// calcolo completato

```