



**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA GALILEO GALILEI

Corso di Laurea Triennale in Astronomia

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**L'immagine dei buchi neri e la possibilità di rivelare l'orizzonte  
di Sgr A\* con Event Horizon Telescope**

Laureando  
**Angelo Balestra**

Relatore  
**Prof. Roberto Turolla**

*“Forse possiamo paragonare lo scienziato, che abbandona il campo dell’intuizione viva per cercare più vasti rapporti, con l’alpinista che vuole scalare la più alta cima di una poderosa catena di montagne [...]. Anche l’alpinista deve abbandonare le fertili valli abitate dagli uomini. Quanto più sale, tanto più vasto si apre il paesaggio al suo sguardo, e tanto più si rarefà la vita che lo circonda. Infine egli giunge in una limpida e abbagliante regione di nevi e di ghiacci, in cui tutta la vita è spenta, in cui anch’egli non può respirare che con enorme difficoltà. Di qui passa la via che conduce alla cima; ma lassù, nei momenti in cui l’intero paese si stende sotto di lui in perfetta chiarezza, egli non è forse troppo lontano dalla sfera della vita.”*

*Werner Heisenberg*

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Immagine di un buco nero di Schwarzschild</b>	<b>5</b>
2.1	Moto geodetico nella metrica di Schwarzschild . . . . .	5
2.2	L'ombra di un buco nero (caso di Schwarzschild) . . . . .	8
2.3	Calcolo di $\Delta\phi$ con gli integrali ellittici . . . . .	9
2.4	Immagine di un buco nero di Schwarzschild . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Immagine di un buco nero di Kerr</b>	<b>14</b>
3.1	Moto geodetico nella metrica di Kerr . . . . .	14
3.2	L'ombra di un buco nero (caso di Kerr) . . . . .	18
3.3	Il red-shift . . . . .	18
3.4	YNOGK: un programma per vedere i buchi neri . . . . .	20
<b>4</b>	<b>L'ombra di Sgr A* e come rivelarla con EHT</b>	<b>22</b>
4.1	Sgr A* . . . . .	22
4.2	EHT: Event Horizon Telescope . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>Cenni alla teoria dei dischi di accrescimento dei buchi neri (BHAD)</b>	<b>28</b>

# 1 Introduzione

Questa tesi prende spunto da un articolo scritto da un gruppo di ricercatori dell'università dell'Arizona comparso sull'*Astrophysical Journal* il 15 Novembre 2015: “A general relativistic null hypothesis test with event horizon telescope observation of the black hole shadow of Sgr A\*” [8]. Nell'articolo viene mostrato che il buco nero al centro della nostra galassia è il target ottimale per le future osservazioni del progetto Event Horizon Telescope; nella mia tesi riprendo questo problema, e attraverso un percorso che va dalla costruzione teorica dell'immagine di un buco nero fino all'esplorazione delle tecniche più avanzate per l'osservazione nel radio, cerco di dare una panoramica generale sull'argomento mettendone in luce gli aspetti principali.

I buchi neri sono una delle più straordinarie scoperte della fisica moderna, e i più estremi tra gli oggetti del cielo: è proprio questo che li rende affascinanti sia per l'astrofisica delle alte energie, che per la cosmologia, che per la parte della fisica che indaga la natura ultima delle interazioni fondamentali. Proposti per la prima volta in ambito classico col nome di “stelle nere”, ovvero oggetti per cui la velocità di fuga è superiore a quella della luce, è stato possibile modellarli soltanto con l'avvento della *relatività generale*; dato che il loro habitat naturale è proprio questa teoria, ne ripercorro brevemente lo sviluppo. In meccanica newtoniana la gravità è descritta come una forza che agisce sui corpi materiali, ovvero sugli oggetti dotati di *massa*. La legge di Newton afferma che:

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale,  $m_1$  e  $m_2$  sono le masse dei due corpi interagenti e  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  è la differenza tra i due raggi vettori che ne determinano la posizione.  $\vec{F}_g$  non agisce sulle onde elettromagnetiche, che trasportano energia ma sono prive di massa, e che quindi attraversano lo spaziotempo euclideo seguendo il principio di minima lunghezza indipendentemente da qualsiasi campo gravitazionale. Nell'ambito della relatività ristretta, tuttavia, è mostrato che massa ed energia sono due aspetti dello stesso fenomeno; la legge di Newton, inoltre, non rispetta le simmetrie di tale teoria, poiché non può essere scritta in forma covariante. Emerge il problema di dare una descrizione generale della gravità: ciò è stato fatto con la relatività generale, che afferma che la massa dei corpi curva lo spaziotempo, e che quindi l'interdipendenza tra inerzia e gravità è più profonda di quanto affermato dalla teoria di Newton. In questo contesto le onde elettromagnetiche continuano a percorrere curve di minima lunghezza, con la differenza che in uno spaziotempo curvo queste non sono più linee rette, ma *geodetiche*: un raggio di luce può essere deflesso da un campo gravitazionale intenso, o spiraleggiare attorno a un buco nero fino a cadere all'interno del suo orizzonte. E' a partire da queste queste nozioni fondamentali che nelle prossime pagine sarà ricavata l'immagine di un buco nero.

Anche nell'ambito della relatività generale, tuttavia, i buchi neri sono stati a lungo considerati alla stregua di una bizzarra idea matematica; è solo nella seconda parte del ventesimo secolo che prendono piede non soltanto come oggetti realmente possibili, ma anche come spiegazione di molti dei fenomeni che osserviamo nel cosmo (le emissioni dei quasar, ad esempio, o le onde gravitazionali recentemente rivelate dalla collaborazione *Ligo-Virgo*). La caratteristica più importante di un buco nero, che lo distingue da qualsiasi altro oggetto celeste, è l'*orizzonte degli eventi*, un confine dello spaziotempo entro cui nessun evento può influenzare causalmente ciò che avviene all'esterno; si tratta di una superficie che può essere varcata in una sola dire-

zione (dall'esterno verso l'interno), e che è causa dell'effetto ottico che nelle prossime pagine sarà chiamato "*l'ombra del buco nero*".

Questo lavoro si sviluppa in tre parti. Nella prima viene presentato il modello più semplice di buco nero dotato di un disco di accrescimento (buco nero non rotante, disco sottile e statico), data una descrizione del moto geodetico nella metrica di Schwarzschild e definita l'ombra di un buco nero; seguendo le traiettorie dei fotoni emessi dal disco, poi, viene descritta l'immagine che ci aspettiamo di rivelare con i nostri strumenti. Nella seconda parte si generalizza il modello al caso in cui è la metrica di Kerr a descrivere la geometria dello spaziotempo; viene poi accennato al problema del red-shift (causato dalla rotazione del disco e dal campo gravitazionale), e presentato un programma che fornisce delle immagini realistiche dei buchi neri rotanti. Nell'ultima parte si discute della possibile osservazione di Sgr A\*, il buco nero supermassiccio al centro della nostra galassia: vengono fornite informazioni su dimensioni e massa di Sgr A\* e sui metodi con cui è stato possibile misurarle, e viene data una descrizione sommaria delle tecniche osservative che il progetto EHT utilizza. Nell'appendice, infine, si dedica qualche pagina alla discussione dei dischi di accrescimento dei buchi neri, che, tra le sorgenti che potrebbero permetterci di "vedere" questi oggetti (poiché è evidente che possiamo rivelare un buco nero soltanto se è illuminato da una sorgente), sono sicuramente le più importanti.

## 2 Immagine di un buco nero di Schwarzschild

In questa sezione ci si propone di ricavare l'immagine di un buco nero di Schwarzschild dotato di un disco di accrescimento sottile e statico, i cui elementi infinitesimi irradiano in modo isotropo: viene presentata una descrizione del moto geodetico nello spaziotempo del buco nero, di ciò che s'intende per ombra di un buco nero e dell'immagine che ci si aspetta di ottenere considerando i risultati ottenuti.

Sarà presto chiaro che questo lavoro tratta principalmente di *ray-tracing*; per questo è utile precisare fin da subito cosa s'intende precisamente con ciò. In pratica si tratta di calcolare il punto in cui un raggio di luce (o, più propriamente, un fotone) incontra il nostro rivelatore in base alla posizione a cui è emesso e alle sue caratteristiche fisiche (energia, momento, direzione...). Questo calcolo viene fatto tenendo presente che i fotoni (come tutti i corpi non soggetti ad alcuna forza se non alla gravità<sup>1</sup>) si muovono di moto geodetico, e quindi che il loro moto dipende dalla geometria dello spaziotempo. L'obiettivo è quello di mettere insieme i due aspetti del problema (caratteristiche fisiche del fotone e geometria dello spaziotempo) in un affresco che ci mostri in un solo colpo i principi fondanti della relatività generale all'opera e l'immagine che un buco nero proietta sulla volta celeste!

### 2.1 Moto geodetico nella metrica di Schwarzschild

Scritto in coordinate sferiche  $(t, r, \theta, \phi)$  e utilizzando le unità di misura geometriche ( $c=G=1$ ), l'elemento di linea nello spaziotempo di un buco nero non rotante è:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2); \quad (1)$$

dove  $m$  è la massa del buco nero. Le equazioni del moto geodetico per una particella di prova sono date dalle:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\nu\varrho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\varrho}{d\sigma} = 0; \quad (2)$$

dove  $\sigma$  è un parametro affine,  $x^\mu$  sono le coordinate della traiettoria e  $\Gamma_{\nu\varrho}^\mu$  sono i simboli Christoffel (gli indici  $\mu$  vanno da 0 a 3). Una delle strade per trovare le curve geodetiche nello spaziotempo di Schwarzschild è quella di ricavare i simboli di Christoffel per la metrica descritta dall'elemento di linea (1) e sostituirli in (2). E' di gran lunga più diretto, tuttavia, scrivere la lagrangiana di una particella libera  $\mathfrak{J} = (1/2)g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$  (dove  $p^\mu$  sono le componenti del quadrimomento), e considerare le leggi di conservazione che derivano dalle simmetrie della metrica. Attraverso di esse è infatti possibile ridurre il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine (2) ad un'unica equazione del primo ordine.

Dato che la metrica descrive un campo gravitazionale a simmetria sferica, l'orbita della particella sarà piana; è sempre possibile, quindi, introdurre un sistema di coordinate in cui la traiettoria della particella è confinata nel piano equatoriale, ovvero con  $\dot{\theta} = 0$  e  $\theta = \pi/2$ .

<sup>1</sup>Ovviamente la gravità non è una forza in ambito general-relativistico, e considerarla come tale è un po' come dire che in un'opera teatrale il palcoscenico sia uno degli attori; tuttavia si rivelerà spesso utile pensarla come una forza, e quindi immaginare che sia dotata di un potenziale che determina le traiettorie delle particelle: ciò ci fornirà un'immagine chiara e immediata, a cui siamo già stati abituati dalla meccanica classica.

<sup>2</sup>Con  $\dot{\theta}$  si è scritta la derivata dell'angolo  $\theta$  rispetto al parametro affine  $\sigma$ :  $\dot{\theta} \equiv d\theta/d\sigma$ . In seguito denoteremo

In questo sistema di riferimento la lagrangiana diventa:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \left[ - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t}^2 + \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right]. \quad (3)$$

Tale funzione ha due variabili cicliche ( $t$  e  $\phi$ ), che attraverso le equazioni di Lagrange ci portano direttamente alle quantità conservate:

$$E = -p_t = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t}, \quad L = p_\phi = r^2 \dot{\phi}; \quad (4)$$

che sono rispettivamente l'energia e il momento angolare per unità di massa. Anche la lagrangiana è una quantità conservata;  $g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$  è il quadrato della norma del quadrimomento: essendo la particella non soggetta ad alcuna forza, il quadrimomento è trasportato parallelamente a se stesso<sup>3</sup> e la sua norma rimane costante. Per una curva di tipo tempo abbiamo  $\mathfrak{S} = -(1/2)\mu^2$  (dove  $\mu$  è la massa a riposo della particella di prova), mentre per una curva di tipo luce  $\mathfrak{S} = 0$ . Dato che ci interessa descrivere il moto dei fotoni, poniamo la lagrangiana uguale a 0. Sostituendo (4) in (3), dopo qualche manipolazione algebrica troviamo:

$$\dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right). \quad (5)$$

E' utile introdurre il parametro d'impatto  $b$ , ovvero la distanza tra la traiettoria della particella e il buco nero per  $r \gg m$  ( $b = r \sin \phi \approx r\phi$  per  $r \rightarrow \infty$ ). Infatti sarà proprio  $b$  la distanza che separerà il punto d'arrivo del fotone dal centro del buco nero nella nostra immagine.

E' facile ricavare la relazione tra  $b$ ,  $E$  ed  $L$  per un raggio di luce che si avvicina al buco nero:

$$\frac{L}{E} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{\left( 1 - 2m/r \right) \dot{t}} \simeq r^2 \frac{d\phi}{dt} \simeq r^2 \frac{db}{dr} = b; \quad (6)$$

dove si è utilizzato il fatto che la velocità della luce è posta uguale a uno e che per  $r$  molto grande  $dr/dt \simeq -1$ . Da (4),(5) e (6) possiamo ricavare  $r = r(\phi)$ :

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{\dot{r}^2}{\dot{\phi}^2} = \frac{E^2 + \frac{L^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)}{\frac{L^2}{r^4}} \implies \left( \frac{1}{r^2} \left( \frac{dr}{d\phi} \right) \right)^2 = b^{-2} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right). \quad (7)$$

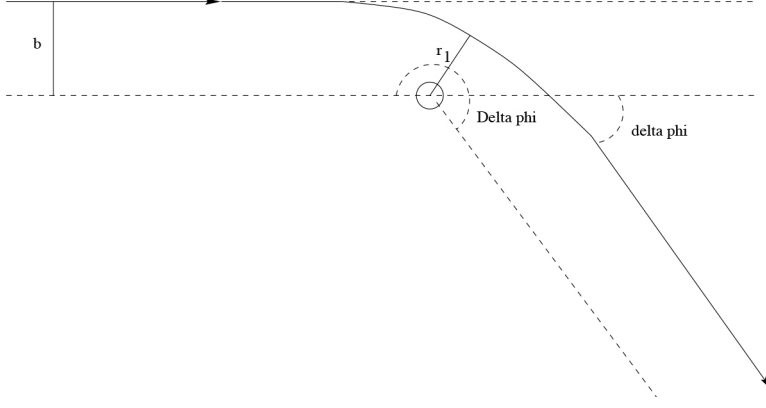
Introduciamo ora il parametro  $u = 1/r$ , attraverso il quale (7) diventa:

$$\left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 = b^{-2} - u^2 + 2mu^3. \quad (8)$$

Tale legge descrive la forma delle traiettorie dei fotoni, e da essa è possibile ricavare due relazioni fondamentali. La prima si ottiene imponendo  $du/d\phi$  uguale a 0, e mette in relazione  $b$  con il *raggio di minima distanza* (quello che in letteratura viene chiamato *turning point*, ovvero

tutte le derivate delle coordinate rispetto al parametro affine in questo modo.

<sup>3</sup>Ciò deriva dalla definizione stessa di moto geodetico.



**Figura 1:** Schema della traiettoria di un fotone che arriva da distanza infinita.

il punto di massimo avvicinamento del fotone al centro del campo gravitazionale); la seconda la troviamo differenziando e dividendo per  $du/d\phi$ , e tale relazione sarà valida nel caso in cui le traiettorie dei fotoni *non* sono circolari:

$$b^{-2} = u_1^2 - 2mu_1^3, \quad (9)$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u + 3mu^2. \quad (10)$$

Analizziamo brevemente il caso in cui un fotone arriva da una distanza infinita, si avvicina al buco nero e prosegue per la sua strada (Fig. 1). Un semplice ragionamento mostra che possiamo considerare il termine  $3mu^2$  in (10) come la correzione relativistica al caso newtoniano; senza di esso, infatti, l'equazione diventa quella del moto armonico, la cui soluzione è  $u(\phi) = b^{-1} \sin \phi$  (tenendo conto delle condizioni iniziali), ovvero  $r(\phi) \sin \phi = b$ , la retta che si ottiene applicando il principio di minima lunghezza al moto di una particella libera in uno spaziotempo piatto.

La variazione dell'angolo  $\phi$  nel corso di tutta la traiettoria è data dall'integrale:

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{u_1} \frac{d\phi}{du} du \quad (11)$$

che nel caso newtoniano è uguale a  $\pi$ . Siamo interessati alla deviazione  $\delta\phi = \Delta\phi - \pi$  causata dalla deformazione dello spaziotempo, e dunque dal campo gravitazionale: è attraverso di essa, infatti, che sapremo quanto l'immagine del disco di accrescimento differirà dal caso non-relativistico.

Ci sono vari modi per ottenerne una stima senza risolvere numericamente l'integrale: perturbando (10), ad esempio, oppure scrivendo le equazioni del moto usando l'espressione linearizzata della metrica per  $r \gg 2m$ . Accenno brevemente al secondo metodo; ricavando di nuovo le equazioni del moto con la metrica descritta dall'elemento di linea (1) linearizzato:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{r}\right)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}\theta^2 d\phi^2); \quad (12)$$

si arriva a questa espressione per  $d\phi(u)/du$ :

$$\frac{d\phi}{du} = (u_1^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} + m \frac{(u_1^3 - u^3)}{(u_1^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (13)$$

Sostituendo (13) in (11) e integrando, il primo termine da  $\pi$  come nel caso non relativistico, mentre il secondo fornisce una relazione che lega il parametro d'impatto, la massa e la deviazione del fotone, ovvero:

$$\delta\phi = 2 \int_0^{u_1} m \frac{(u_1^3 - u^3)}{(u_1^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} du = 4mu_1 \simeq \frac{4m}{b}. \quad (14)$$

Come era facile immaginare, la deviazione dal comportamento newtoniano di un fotone che si avvicina al buco nero dipende dal parametro d'impatto: più questo è grande, più la deviazione sarà minore.

## 2.2 L'ombra di un buco nero (caso di Schwarzschild)

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per precisare cosa s'intende per *ombra di un buco nero*.

Prendiamo in considerazione l'equazione (5). In analogia con la meccanica newtoniana, il secondo termine del membro di destra può essere pensato come il potenziale: esso ha un massimo per  $r = 3m$  ed è uguale a zero per  $r = 2m$ . Da uno studio delle orbite del sistema possiamo trarre le seguenti conclusioni:

- Nel caso in cui un fotone venga emesso a  $r > 3m$  e si avvicini al buco nero ( $\dot{r} < 0$ ), esso verrà catturato se  $b^{-2} > 1/27m^2$ , mentre se  $b^{-2} < 1/27m^2$  raggiungerà un minimo per la distanza e verrà deflesso;
- Nel caso in cui un fotone venga emesso a  $r < 3m$  e si allontani dal buco nero ( $\dot{r} > 0$ ), esso riuscirà a sfuggire al campo gravitazionale se  $b^{-2} > 1/27m^2$ , mentre rimarrà confinato entro  $r = 3m$  per  $b^{-2} < 1/27m^2$ .

Un disco di accrescimento realistico si estende in un range radiale che ha come limite interno  $r_{ISO} = 6m$ , il raggio al di sotto del quale non sono possibili orbite circolari stabili<sup>4</sup>. È evidente che soltanto il caso in cui il fotone è emesso a una distanza maggiore di  $3m$  è di nostro interesse; in altre parole, gli unici fotoni che riusciranno ad arrivare al nostro rivelatore saranno quelli con una distanza perpendicolare dal centro del buco nero maggiore<sup>5</sup> di  $b = 3\sqrt{3}m$ . Ecco spiegato cosa s'intende fisicamente per ombra di un buco nero: la parte dell'immagine dove non arrivano fotoni perché avrebbero un parametro d'impatto troppo piccolo per *scavalcare* l'orizzonte degli eventi. Ha senso, quindi, considerare il diametro dell'ombra di un buco nero di Schwarzschild circa uguale a  $d = 6\sqrt{3}m$ .

<sup>4</sup>La prova dell'esistenza di un raggio al di sotto del quale non esistono orbite circolari stabili è data da uno studio delle curve geodetiche di tipo tempo; per approfondimenti, rimando a *Blau, Lectures on General Relativity* [2].

<sup>5</sup>Questo, ovviamente, nel caso in cui siano emessi da una sorgente che si trova dietro al buco nero, ovvero ad una distanza dall'osservatore maggiore di quella del buco nero stesso: ecco perché se la sorgente che illumina il buco nero è una stella compagna in un sistema binario la sua ombra sarà un cerchio perfetto, mentre se è un disco di accrescimento posto di taglio rispetto all'osservatore somiglierà più ad una mezza luna, poiché l'emissione del disco che si trova tra noi e il buco nero ne illuminerà una parte.

## 2.3 Calcolo di $\Delta\phi$ con gli integrali ellittici

Dalla linearizzazione dell'elemento di linea si ottiene soltanto una stima approssimata di  $\Delta\phi$ ; per un risultato più preciso dobbiamo far ricorso agli *integrali ellittici*.

Riscrivendo (11) attraverso (8) otteniamo:

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{u_1} \frac{1}{\sqrt{b^{-2} - u^2 + 2mu^3}} du \quad (15)$$

Questo integrale può essere trasformato in un integrale ellittico di prima specie:

$$\Delta\phi = 4 \left( \frac{2m^2 r_1}{A} \right) \int_{\zeta_\infty}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} dx = 4 \left( \frac{2m^2 r_1}{A} \right) [K(k) - F(\zeta_\infty, k)]; \quad (16)$$

dove  $r_1 = 1/u_1$  è il raggio di minima distanza,  $A = \sqrt{(r_1 - 2m)/(r_1 + 6m)}$ ,  $K(k)$  l'integrale ellittico completo di modulo  $k = (A - r_1 + 6m/2A)^{1/2}$  e  $F(\zeta_\infty, k)$  è l'integrale ellittico di modulo  $k$  e argomento  $\sin^2 \zeta_\infty = (A - r_1 + 2m)/(A - r_1 + 6m)$ . A questo punto è possibile trovare  $\delta\phi = \Delta\phi - \pi$  attraverso (16) con metodi numerici.

E' interessante notare che:

- per  $r_1 \gg m$  ritroviamo il risultato ottenuto in (14), ovvero  $\delta\phi = 4m/b$  e  $b = r_1$ ;
- per  $r_1 \rightarrow 3m$  troviamo  $b = 3\sqrt{3}m + 3.4823me^{-\delta\phi}$ <sup>6</sup>; questo risultato ha il significato seguente: le particelle che arrivano ad un determinato angolo  $\delta\phi$  non sono soltanto quelle che sono state deflesse di  $\delta\phi$ , ma anche quelle che hanno circumnavigato il buco nero una volta ( $\delta\phi + 2\pi$ ), due ( $\delta\phi + 4\pi$ ), o  $n$  ( $\delta\phi + 2n\pi$ ). Ognuna di esse avrà un parametro d'impatto diverso, fino a quelle che girano attorno al buco nero infinite volte per cui  $b = 3\sqrt{3}m$  (in realtà per  $n > 2$  la differenza tra i parametri d'impatto è così piccola che i fotoni si sovrappongono nell'immagine). Questo risultato suggerisce un altro modo di definire l'ombra, che ci tornerà utile quando tratteremo il moto geodetico in Kerr: *il raggio dell'ombra di un buco nero è il parametro d'impatto dei fotoni che si muovono di moto circolare instabile*. Il raggio a cui ciò avviene individua la *photonsphere*, e lo denoteremo con  $r_{ph}$ .

## 2.4 Immagine di un buco nero di Schwarzschild

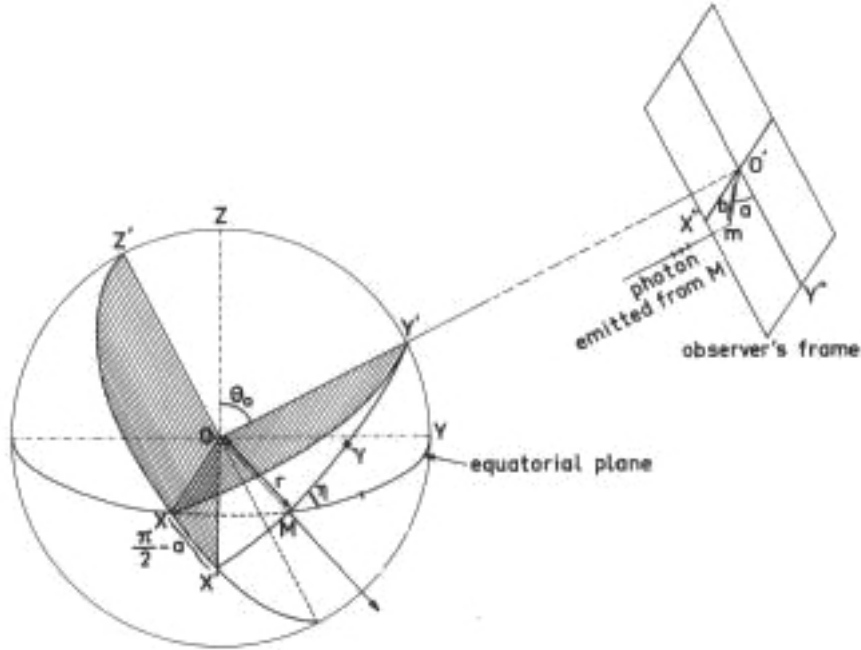
Possiamo ora descrivere l'immagine di un buco nero dotato di un disco di accrescimento. Le ipotesi che facciamo sul disco sono le seguenti:

- Che abbia un'altezza trascurabile rispetto al raggio;
- Che sia costituito da particelle idealizzate che emettono in modo isotropo, immobili rispetto al buco nero.

Si noti che il red-shift viene completamente trascurato in questa prima discussione<sup>7</sup>: si tratta, in effetti, di un modello estremamente semplificato, che mira più che altro a dare un'idea del procedimento da seguire per studiare il caso realistico.

<sup>6</sup>Tale risultato deriva dall'espansione delle funzioni ellittiche per  $k \simeq 1$ .

<sup>7</sup>Di tali effetti si parlerà nella sezione successiva.



**Figura 2:** In questa immagine vengono illustrati i vari sistemi di riferimento utilizzati nel testo per descrivere l'emissione di un disco di accrescimento. L'immagine è stata presa da J.P. Luminet, "Image of a spherical Black Hole with thin accretion disk"[6].

Facendo riferimento al sistema di coordinate XYZ in Fig. 2 (con le coordinate sferiche ad esso associate  $(r, \theta, \varphi)$ ), sia il nostro rivelatore posto a  $\theta = \theta_0$  e  $\varphi = 0$ , e abbia una distanza dal centro  $r_0$  che possiamo immaginare infinita. Poniamo, inoltre, che il disco di accrescimento giaccia nel piano equatoriale ( $\theta = \pi/2$ ), e che O sia il centro del campo gravitazionale. Un fotone emesso dal disco ci raggiungerà se la direzione del suo momento tende asintoticamente a quella della linea di vista mano a mano che si allontana dal buco nero. Vogliamo registrare l'arrivo di un fotone sul nostro rivelatore emesso da un elemento del disco con coordinate  $(r, \varphi)$  (M, in figura), attraverso le coordinate polari  $b$  e  $\alpha$ ; se consideriamo l'osservatore infinitamente distante, per quanto detto in precedenza  $b$  è il parametro d'impatto, mentre  $\alpha$  è l'angolo complementare a quello tra i piani OXY' e OX'Y' (ricordiamo che la traiettoria del fotone è confinata nel piano O0'X' per la simmetria del potenziale gravitazionale).

La costruzione dell'immagine si riduce al calcolo dei parametri  $b$  e  $\alpha$  per ogni punto del disco. L'angolo  $\alpha$  si può ricavare in funzione di  $\theta_0$  e  $\varphi$  attraverso le leggi della trigonometria sferica. Risolvendo i triangoli sferici troviamo:

$$\cos \alpha = \cos \varphi \cos \theta_0 (1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi)^{-1/2}. \quad (17)$$

Il parametro d'impatto  $b$ , invece, lo si trova risolvendo (11). Nel seguito commentiamo la soluzione di questo integrale in due fasi: prima ottenendo una sua stima attraverso la linearizzazione dell'elemento di linea della metrica, e poi descrivendone la risoluzione per mezzo degli integrali ellittici.

## Stima del parametro d'impatto attraverso la linearizzazione della metrica

Prima di proseguire facciamo le seguenti considerazioni:

- Non tutti i fotoni emessi dal disco hanno un punto di minima distanza; quelli che ci arrivano dalla parte che si trova tra noi e il buco nero hanno  $r$  sempre positivo, ed essendo emessi per lo più a grandi distanza dal centro del campo gravitazionale sono deviati molto meno rispetto agli altri: essi viaggiano quasi in linea retta prima di raggiungere il rivelatore, generando una semi-ellisse nella nostra immagine simile a quella che dovremmo aspettarci in assenza di lensing gravitazionale.
- I fotoni che ci arrivano dalla parte più lontana del disco, invece, risentono maggiormente del campo gravitazionale: essi hanno tutti un raggio di minima distanza, e possono venir deviati anche fortemente. Da notare, poi, che di questa parte del disco abbiamo due immagini, una della parte superiore e una della parte inferiore; in effetti, è come se i fotoni emessi dalla parte inferiore del disco “scavalcassero” l'ostacolo ottico per arrivare al nostro rivelatore.

Consideriamo un fotone emesso nella parte più lontana del disco, ad un raggio  $r_* = 1/u_*$  dal centro del buco nero. Vogliamo dare una stima dell'angolo di deviazione attraverso le equazioni trovate linearizzando la metrica di Schwarzschild; il ragionamento è identico a quello fatto per l'angolo di deviazione di un fotone che arriva dall'infinito, con l'unica differenza che l'integrale diventa:

$$\Delta\phi = \int_0^{u_*} \left[ (u_1^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} + m \frac{(u_1^3 - u^3)}{(u_1^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} \right] du. \quad (18)$$

Tale integrale può essere spezzato in due parti:

$$\Delta\phi_0 = \int_0^{u_1} \left[ (u_1^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} + m \frac{(u_1^3 - u^3)}{(u_1^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} \right] du = \frac{\pi}{2} + \frac{2m}{b}; \quad (19)$$

e:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1 &= \int_{u_*}^{u_1} \left[ (u_1^2 - u^2)^{-1/2} + m \frac{(u_1^3 - u^3)}{(u_1^2 - u^2)^{3/2}} \right] du = \\ &= \int_{u_*/u_1}^1 \left[ (1 - x^2)^{1/2} + mu_1 \frac{(1 - x^3)}{(1 - x^2)^{3/2}} dx \right] = \\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{u_*}{u_1}\right) + mu_1 \left(2 - \frac{u_*}{u_1}\right) \left(1 - \frac{u_*}{u_1}\right) \left(1 + \frac{u_*}{u_1}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

La deviazione totale è data da  $\Delta\phi = \Delta\phi_0 + \Delta\phi_1$  (da notare che per  $u_*$  che tende a 0 ritroviamo il risultato espresso dalla (13)). Sostituendo  $1/r_*$  a  $u_*$  e approssimando  $u_1$  con  $1/b$  troviamo finalmente  $\Delta\phi$  scritto in funzione di  $r_*$  e del parametro d'impatto:

$$\Delta\phi = \pi + \frac{2m}{b} - \arcsin\left(\frac{b}{r_*}\right) + \frac{m}{b} \left(2 - \frac{b}{r_*}\right) \left(1 - \frac{b}{r_*}\right) \left(1 + \frac{b}{r_*}\right)^{-1}. \quad (21)$$

Quale  $\Delta\phi$  dovrà avere un fotone a distanza  $r_*$  dal buco nero per essere rivelato dal nostro telescopio? Anche questo è un problema di trigonometria sferica: facendo riferimento alla Fig. 2, nel caso in cui la retta OX è parallela a O'X' la deviazione del fotone è pari a  $\Delta\phi = \pi/2 - \theta_0 \cos\varphi$  se è emesso dalla parte superiore del disco,  $\Delta\phi = (3/2)\pi + \theta_0 \cos\varphi$  se è emesso dalla parte inferiore. Nel caso più generale occorrerà risolvere i triangoli sferici per trovare l'angolo che è indicato in figura con  $\gamma$ , e si avrà:

$$\Delta\phi = \arccos\left[\cos\alpha(\cos^2\alpha + \cot^2\theta_0^{-1/2})\right]. \quad (22)$$

Basta sostituire (22) in (21) per avere  $b$  per ogni elemento del disco a distanza  $r_*$ .

Cosa accade, invece, ai fotoni che vengono emessi dalla parte del disco più vicino a noi? Essi non hanno un punto di minima distanza; pertanto (11) va calcolato soltanto da 0 a  $u_*$ , ottenendo:

$$\Delta\phi = \arcsin\left(\frac{b}{r_*}\right) + \frac{m}{r_*}\left(4 - \frac{b}{r_*}\right)\left(1 + \frac{b}{r_*}\right)^{-1} \quad (23)$$

$$\approx \arcsin\left(\frac{b}{r_*}\right); \quad (24)$$

dove il passaggio da (23) a (24) è lecito se  $r_* \gg m$ . Nel caso semplificato in cui OX è parallelo a O'X', il  $\Delta\phi$  che questi fotoni devono subire per arrivare al nostro rivelatore è  $\Delta\phi = \pi/2 - \theta_0 \cos(\varphi)$ : (24) diventa  $b \approx r_* \sin(\pi/2 - \theta_0 \cos(\varphi))$ , che è il risultato che si ottiene in meccanica newtoniana. Come avevamo anticipato, i fotoni emessi da questa parte del disco deviano di poco dal caso non relativistico se emessi a grandi distanze.

## Stima del parametro d'impatto attraverso integrali ellittici

Utilizziamo ora i risultati ottenuti in sezione 2.3 per calcolare in modo più preciso il parametro d'impatto. Attraverso (8), il  $\Delta\phi$  di un fotone la cui orbita ha un punto di minima distanza può essere scritto come:

$$\Delta\phi = \int_0^{u_*} \frac{1}{\sqrt{b^{-2} - u^2 + 2mu^3}} du. \quad (25)$$

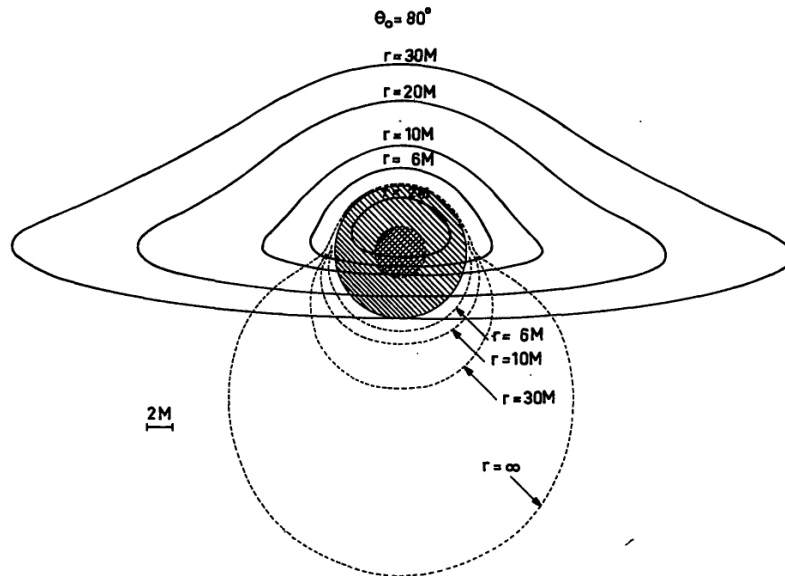
Anche questo integrale può essere trasformato in un integrale ellittico completo di prima specie:

$$\Delta\phi = 2\left(\frac{2m^2 r_1}{A}\right)[F(\zeta_r, k) - F(\zeta_\infty, k)]; \quad (26)$$

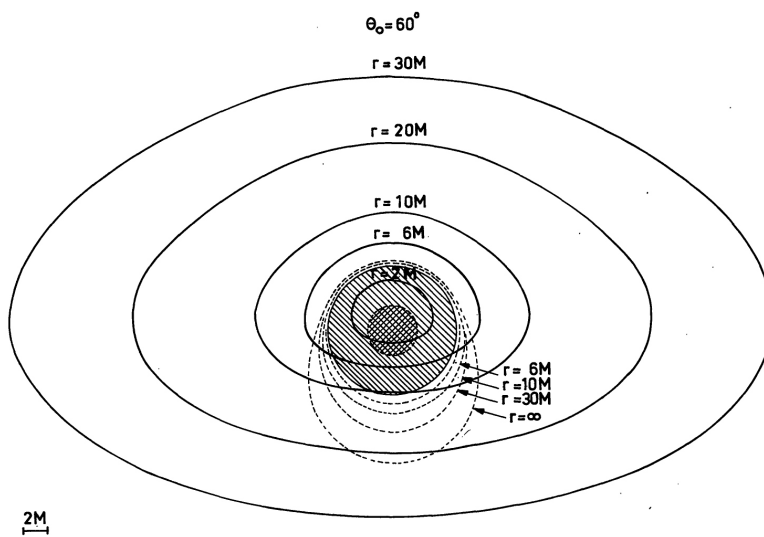
dove  $\sin^2 \zeta_r = (A - r_1 + 2m + 4mr_1/r_*)/(A - r_1 + 6m)$ . Dato  $r_*$ , con (25) troviamo direttamente  $r_1$ , e con  $r_1$  troviamo  $b$  attraverso (9)<sup>8</sup>. Siamo quindi in grado di disegnare le curve isoradiali, che risulteranno essere quelle rappresentate in Fig. 3 (le immagini sono prese da: J.P Luminet, *Image of a spherical Black Hole whit thin accretion disk* [6]).

---

<sup>8</sup>in realtà l'equazione (25) andrebbe calcolata per tutti gli  $n \Delta\phi + 2\pi n$ ; tuttavia abbiamo detto che gli ordini maggiori di 2 non sarebbero risolti nella nostra immagine, senza contare che i fotoni che girano più volte verrebbero riassorbiti dal disco.



(a) *osservatore a 10 gradi al di sopra del disco .*



(b) *osservatore a 30 gradi al di sopra del disco.*

**Figura 3:** Curve isoradiali, rappresentanti fotoni emessi a un raggio costante dal centro. Le immagini sono prese da J.P Luminet, *Image of a spherical Black Hole whit thin accretion disk* [6].

### 3 Immagine di un buco nero di Kerr

Nella sezione precedente è stato illustrato il procedimento per ricavare l'immagine di un buco nero di Schwarzschild dotato di un disco d'accrescimento con momento angolare nullo; in questa sezione ci si propone di generalizzare tale modello al caso di un buco nero di Kerr dotato di un disco rotante. In questo caso il problema diventa più complesso: si complicano le equazioni differenziali che descrivono il moto geodetico, e per studiare il flusso della radiazione bisogna tener conto dell'effetto Doppler dovuto alla rotazione del disco.

Nella prima parte di questa sezione viene discusso il moto geodetico nella metrica di Kerr (che supponiamo sia la geometria dello spaziotempo di un buco nero rotante non carico); in seguito viene accennato a come calcolare il red-shift causato dalla rotazione del disco e dal campo gravitazionale; infine, viene introdotto un codice in grado di fornire delle immagini realistiche di questo tipo di oggetti.

#### 3.1 Moto geodetico nella metrica di Kerr

Per ricavare le leggi che regolano il moto geodetico in Kerr seguiremo la trattazione di Bardeen, *Timelike and null geodesics in the Kerr metric* [1]. L'elemento di linea della metrica di Kerr in coordinate di Boyer-Linquist è:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\lambda} dr^2 + e^{2\xi} d\theta^2; \quad (27)$$

con:

$$e^{2\nu} = \frac{\Delta A}{B}, \quad e^{2\psi} = \frac{B \sin^2 \theta}{A}, \quad \omega = \frac{2amr}{B}, \quad e^{2\lambda} = \frac{A}{\Delta}, \quad e^{2\xi} = A;$$

dove:

$$A = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad B = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2mr + a^2$$

e  $m$  e  $a$  sono rispettivamente la massa e il momento angolare specifico del buco nero.

Anche nella metrica di Kerr le variabili  $t$  e  $\phi$  sono cicliche, poiché il buco nero è statico e c'è ancora simmetria assiale; attraverso le equazioni di Lagrange è di nuovo possibile ricavare le costanti del moto dell'energia  $E = -p_t$  e del momento angolare  $L = p_\phi$ . Queste costanti sono sufficienti per determinare il moto nel piano  $\theta = \pi/2$ , ma non per darne una descrizione generale; infatti la differenza sostanziale tra Schwarzschild e Kerr è che in Kerr non è possibile, data una particella che si muove di moto geodetico, ricondursi sempre ad un sistema di riferimento in cui la traiettoria è piana e il momento angolare è costante; ciò significa che risolvere le equazioni del moto per  $\theta = \pi/2$  ci conduce soltanto ad una soluzione particolare: quella che descrive, come vedremo, il moto degli elementi di un disco di accrescimento sottile che giace nel piano equatoriale, ma non le traiettorie dei fotoni che arriveranno sul nostro rivelatore.

Fortunatamente ci sono anche qui le condizioni necessarie per risolvere il problema: una proprietà importante del sistema di equazioni differenziali che descrive il moto geodetico in Kerr, infatti, è che l'equazione di Hamilton-Jacobi a esso associata è separabile. Ciò significa che esiste un insieme completo di costanti del moto (l'energia  $E$ , il momento angolare  $L$ , la

massa della particella  $\mu$  e la costante di Carter  $Q$ ) che fanno sì che il problema diventi integrabile per quadrature.

Prima di andare avanti scriviamo le componenti del momento misurate da un osservatore locale. Per farlo individuiamo il sistema di riferimento tramite una base ortonormale tale che:

$$g_{\mu\nu}(x)e_a^\mu(x)e_b^\nu(x) = \eta_{ab}; \quad (28)$$

i covettori  $e^m$  sono i cosiddetti *vielbeins*, fondamentali nel formalismo di Cartan. Ogni osservatore individua un sistema di riferimento ortogonale funzione di  $r$  e  $\theta$ :

$$e_{(t)} = e^{-\nu}[\partial_t + \omega\partial_\phi], \quad e_{(\phi)} = e^{-\psi}\partial_\phi, \quad e_{(r)} = e^{-\lambda}\partial_r, \quad e_{(\theta)} = e^{-\xi}\partial_\theta. \quad (29)$$

Essendo una quantità indipendente dalle coordinate, per il quadrimomento varrà:  $p = p^\mu\partial_\mu = \bar{p}^\mu e_\mu$ ; è facile, allora, trovare le sue componenti nel sistema di riferimento individuato dai covettori (28):

$$\bar{p}^t = e^{-\nu}(E - \omega L), \quad \bar{p}^\phi = e^{-\psi}L, \quad \bar{p}^r = e^{-\lambda}p_r, \quad \bar{p}^\theta = e^{-\xi}p_\theta. \quad (30)$$

## Orbite nel piano equatoriale

Come si è detto, lo studio delle orbite nel piano equatoriale non fornisce, a priori, nessuna informazione di carattere generale sulle traiettorie dei fotoni. Tuttavia vale la pena dedicare qualche paragrafo alla soluzione di questo problema, poiché nel farlo troveremo le leggi che descrivono il moto degli elementi del disco di accrescimento del buco nero, e tali risultati ci torneranno utili per lo studio del red-shift. Inoltre, in questa sottosezione vedremo anche emergere le caratteristiche del moto geodetico nello spaziotempo di Kerr senza aver bisogno di introdurre nuovi metodi, dato che per descrivere le orbite nel piano equatoriale ci basterà percorrere la strada già battuta nella sezione precedente.

L'equazione del moto si ricava con lo stesso procedimento della sezione precedente; imponendo che la lagrangiana sia uguale a  $-(1/2)\mu^2$  troviamo:

$$\dot{r}^2 = r^{-3} \left[ (r(r^2 + a^2) + 2a^2m)E^2 - 4amEL - (r - 2m)L^2 - \Delta r\mu^2 \right]. \quad (31)$$

Ponendo  $\dot{r} = 0$  e risolvendo per  $E$  si ha l'energia minima di una particella per un dato raggio e un dato momento angolare<sup>9</sup>:

$$E_{min} = \frac{\Delta^{1/2} [r^2 L^2 + (r(r^2 + a^2) + 2a^2m)r\mu^2]^{1/2} + 2amL}{r(r^2 + a^2) + 2a^2m}. \quad (32)$$

---

<sup>9</sup>Se pensiamo a  $E$  come somma di energia di massa a riposo, energia potenziale gravitazionale e energia cinetica, quando  $\dot{r} = 0$  abbiamo annullato l'unica componente dell'energia cinetica che non è determinata dal momento angolare, e ciò equivale a esplicitare da (31) il valore minimo dell'energia.

Si noti che  $E_{min}$  è l'energia della particella a  $r_1$ <sup>10</sup>. Studiando l'andamento di  $E_{min}$  in funzione del raggio arriviamo alle seguenti conclusioni:

- per  $R \rightarrow \infty$ ,  $E_{min} \rightarrow \mu$ ;
- se  $L/m$  è minore di un certo valore non ci sono orbite circolari stabili, e  $E_{min}$  diminuisce quando  $R \rightarrow 0$ ;
- se  $a \neq 0$  e  $r$  è sufficientemente vicino all'orizzonte, per  $aL < 0$  si ha che  $E_{min} < 0$ ; in questa regione particelle con energia positiva per un osservatore locale possono avere energia negativa rispetto all'infinito. Ciò equivale a dire che l'energia di legame gravitazionale è maggiore della massa a riposo. Questa peculiarissima condizione individua l'*ergoregione*, il luogo attorno all'orizzonte degli eventi in cui il campo gravitazionale del buco nero trascina i sistemi di riferimento inerziali (tale condizione è verificata se  $g_{tt} > 0$ ).

Per particelle con  $\mu = 0$  l'energia minima diventa:

$$E_{min} = \pm L \frac{\Delta^{1/2} r \pm 2am}{r(r^2 + a^2) + 2a^2 m}; \quad (33)$$

da cui deduciamo che i fotoni possono avere al massimo un punto di minima distanza, e le orbite circolari sono sempre instabili a prescindere del segno di  $L$ .

Per studiare le orbite circolari nel piano equatoriale bisogna risolvere le due equazioni per  $\dot{r} = 0$  e  $d\dot{r}/d\sigma = 0$ , da cui si può ottenere, dopo un discreto numero di manipolazioni algebriche, univocamente l'energia specifica, il momento angolare specifico e la velocità angolare in funzione del raggio dell'orbita, della massa e del momento angolare specifico del buco nero:

$$\frac{E}{\mu} = \frac{r^{3/2} - 2mr^{1/2} \pm am^{1/2}}{r^{3/4}(r^{3/2} - 3mr^{1/2} \pm 2am^{1/2})^{1/2}}, \quad (34)$$

$$\frac{L}{\mu} = \pm \frac{m^{1/2}(r^2 \mp 2am^{1/2}r^{1/2} + a^2)}{r^{3/4}(r^{3/2} - 3mr^{1/2} \pm 2am^{1/2})^{1/2}}, \quad (35)$$

$$\Omega = \pm \frac{m^{1/2}}{r^{3/2} \pm am^{1/2}}. \quad (36)$$

Si noti che, per quanto riguarda la velocità angolare, nel caso di Schwarzschild si ritrova esattamente il risultato valido in meccanica newtoniana. Dallo studio delle orbite circolari risulta che, come in Schwarzschild, esiste un raggio minimo al di sotto del quale le orbite circolari sono instabili ( $r_{ISO}$ ). A raggi minori abbiamo l'ultimo raggio a cui è possibile un'orbita legata ( $r_{mb}$ ), e a raggi ancora minori abbiamo il raggio a cui i fotoni si muovono di moto circolare ( $r_{ph}$ ); questa è una distanza particolarmente importante, perché anche qui segna il confine dell'ombra del buco nero (o meglio, dove il confine dell'ombra interseca il piano equatoriale):

$$r_{ph} = 2m + 2m \cos \left[ \frac{2}{3} \cos^{-1} \left( \pm \frac{a}{m} \right) \right] \quad (37)$$

<sup>10</sup>Come nella sezione precedente,  $r_1$  è il raggio di minima distanza.

## Orbite dei fotoni

L'equazione di Hamilton-Jacobi per il sistema di equazioni differenziali (2) è:

$$H + \frac{\partial S}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial S}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}; \quad (38)$$

dove  $S$  è l'azione ( $\partial S / \partial x^\mu = p_\mu$ ) e  $H$  è l'hamiltoniano del sistema<sup>11</sup>. Per un fotone sappiamo che  $p_\mu p^\mu = 0$ ; dunque, considerando le simmetrie della metrica possiamo scrivere:

$$S = -Et + L\phi + S(\theta, r). \quad (39)$$

Il merito di Carter sta nell'aver scoperto che  $S(\theta, r)$  è separabile, e che può essere scritta attraverso le funzioni  $R(r)$  e  $\Theta(\theta)$ :

$$S(\theta, r) = \int_0^r \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta} dr + \int_0^\theta \sqrt{\Theta(\theta)} d\theta; \quad (40)$$

con:

$$R(r) = r[r(r^2 + a^2) + 2a^2 m]E^2 - 4amrEL - (r^2 - 2mr)L^2 - \Delta Q \quad (41)$$

$$\Theta(\theta) = Q + a^2(E^2) \cos^2 \theta - L^2 \cot^2 \theta. \quad (42)$$

$Q$  è una costante che assieme ad  $L$  e ad  $E$  caratterizza la traiettoria di un fotone, ed è nulla se quest'ultima è contenuta nel piano equatoriale. Attraverso (40) abbiamo subito  $p_r = \Delta^{-(1/2)} R(r)^{1/2}$  e  $p_\theta = \Theta(\theta)^{1/2}$ ; le componenti del quadrimomento sono note, e le coordinate della traiettoria possono essere determinate con una semplice integrazione. Per quanto riguarda  $t$  e  $\phi$ , tuttavia, è più semplice trovarle derivando  $S$  nella forma (37) rispetto all'energia e al momento angolare. Avremo infine:

$$t = \int \frac{[r^2(r^2 + a^2)E + 2amr(aE - L)]}{\Delta R(r)^{1/2}} dr + \int \frac{a^2 E^2 \cos^2 \theta}{\Theta(\theta)^{1/2}} d\theta, \quad (43)$$

$$r = \int \Delta^{1/2} R(r)^{1/2} dr, \quad (44)$$

$$\theta = \int \Theta(\theta)^{1/2} d\theta, \quad (45)$$

$$\phi = \int \frac{r^2 L + 2amr(aE - L)}{\Delta R(r)^{1/2}} dr + \int \frac{L \cot^2 \theta}{\Theta(\theta)^{1/2}} d\theta. \quad (46)$$

La soluzione di questi integrali va trovata attraverso metodi numerici dopo averli ridotti ad integrali ellittici standard.

---

<sup>11</sup>Per definizione  $H = p_\mu p^\mu - \mathfrak{J}$ : con la definizione di lagrangiana data nella sezione precedente abbiamo subito (38).

## 3.2 L'ombra di un buco nero (caso di Kerr)

Le costanti del moto  $E$ ,  $L$  e  $Q$  sono direttamente correlate ai parametri d'impatto che descrivono la direzione del fotone per un osservatore posto a distanza  $r_0$  nella direzione  $\theta_0$  (si fa riferimento alla Fig. 2 della sezione precedente). Assumendo di osservare la direzione del fotone relativamente al centro di simmetria del buco nero, attraverso i parametri  $\lambda = L/E$  e  $\eta = Q/E$  è possibile scrivere lo spostamento angolare parallelo all'asse di simmetria  $\alpha$  e lo spostamento perpendicolare  $\beta$ . Poniamo:

$$\alpha = -r_0 \frac{p^{(\phi)}}{p^t} = -\frac{\lambda}{\sin \theta_0}, \quad (47)$$

$$\beta = r_0 \frac{p^{(\theta)}}{p^t} = \eta - \cos^2 \theta_0 - \lambda^2 \cot^2 \theta_0. \quad (48)$$

Immaginiamo di avere una sorgente che illumini il buco nero (un disco di accrescimento, ad esempio); come nel caso di Schwarzschild, per un certo range di valori di  $\alpha$  e  $\beta$  nessun fotone arriverà al nostro rivelatore. Ogni fotone emesso dalla sorgente, in base a posizione e direzione, avrà un valore proprio di  $\lambda$  e di  $\eta$ : il nostro obiettivo è quello di trovare per quali di questi parametri il fotone viene catturato dal campo gravitazionale del buco nero. I fotoni che sono al limite tra l'essere inghiottiti e lo sfuggire si muovono di moto circolare come nel caso di Schwarzschild: sono quelli che percorrono infinite volte un'orbita circolare attorno al buco nero. Da ciò che abbiamo trovato in precedenza sappiamo che c'è solo un'orbita in cui i fotoni si muovono di moto circolare; per trovarla imponiamo  $R(r) = 0$  e  $dR(r)/d\sigma = 0$ . Le soluzioni fisiche sono:

$$\lambda = \frac{-r^3 + 3mr^2 - a^2(r+m)}{a(r-m)}, \quad \eta = \frac{r^3}{a^2(r-m)^2} [4a^2m - r(r-3m)^2]. \quad (49)$$

Queste due equazioni determinano implicitamente una curva  $\eta(\lambda)$  attraverso cui si possono determinare  $\alpha$  e  $\beta$ , ottenendo il limite dell'ombra di un buco nero di Kerr. Quali sono le dimensioni di tale ombra? Dipendono dall'angolo a cui si trova l'osservatore, dalla massa e dal momento angolare del buco nero. In ogni caso, il risultato è quasi il medesimo di un buco nero di Schwarzschild: il diametro potrà assumere valori che vanno dai  $4.48m$  di un buco nero massimamente rotante visto di taglio, fino a  $5.2m$  del buco nero di Schwarzschild.

## 3.3 Il red-shift

Questa sezione è dedicata ad una discussione su quali sono gli effetti di red-shift (o blue-shift) da considerare per avere una stima corretta del flusso bolometrico osservato a partire da un modello di emissione del disco di accrescimento. Le assunzioni che faremo sul disco sono le seguenti:

- Disco sottile (altezza trascurabile rispetto al raggio);
- La geometria dello spaziotempo è determinata completamente dal buco nero: il contributo del disco è quindi trascurabile;

- Il moto degli elementi del disco può essere descritto come un moto circolare geodetico nel piano equatoriale.

Tutti le restanti considerazioni che possono farsi sul disco (emissione, struttura, ecc...) sono non necessarie a questo punto (per gli interessati, rimando all'appendice alla fine di questo lavoro). Il flusso emesso differirà da quello osservato dalla sorgente di un valore proporzionale alla quarta potenza di  $(1+z)$ <sup>12</sup>. Questo a causa:

- Della perdita di energia del fotone ( $v_{oss} = v_{em}(1+z)^{-1}$ );
- Della diminuzione del numero dei fotoni che arrivano al rivelatore dovuta alla dilatazione dei tempi ( $n_{oss} = n_{em}(1+z)^{-1}$ );
- Della correzione relativistica all'angolo solido ( $d\Omega_{oss} = d\Omega_{em}(1+z)^{-2}$ ).

Il gioco sta, quindi, nel calcolare  $(1+z)$  per ogni fotone emesso dal disco. Se trascuriamo il red-shift cosmologico, il fattore  $(1+z)$  è completamente determinato dal moto delle particelle e dal campo gravitazionale. Consideriamo un fotone emesso da una particella del disco. Il quadrimomento del fotone e la quadrivelocità della particella nel sistema di riferimento immobile rispetto all'osservatore sono, rispettivamente:

$$p_\mu = \left( \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = E(-1, \pm \frac{\sqrt{R}}{\Delta}, \pm \sqrt{\Theta}, \lambda), \quad u^\mu = (u^t, 0, u^\phi, 0) = E/\mu(-1, 0, \Omega, 0); \quad (50)$$

dato che  $u^\phi = \frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\sigma} = u^t \Omega$ .

$E/\mu$  è l'energia specifica della particella che si muove di moto circolare ottenuta in (34). Possiamo arrivare all'energia del fotone nel sistema di riferimento della particella moltiplicando scalarmente il quadrimomento per la quadrivelocità:

$$E_{em} = p_t u^t + p_\phi u^\phi = p_t u^t \left( 1 + \Omega \frac{p_\phi}{p_t} \right); \quad (51)$$

$p_t$  è l'energia del fotone, mentre  $p_\phi$  è il momento angolare rispetto all'asse  $z$ : il loro rapporto non è altro che il parametro d'impatto relativo all'asse  $z$ , ovvero  $\alpha$ . Dunque possiamo scrivere:

$$(1+z) = \frac{E_{em}}{E_{oss}} = \frac{p_t u^t (1 + \Omega \alpha)}{p_t} = -\frac{E}{\mu} (1 + \Omega \alpha). \quad (52)$$

Quello che ci resta da fare è sostituire ad  $\Omega$  il risultato ottenuto in (36) e a  $E/\mu$  quello in (34): in questo modo avremo  $(1+z)$  per ogni elemento del disco in funzione di  $m$ ,  $a$ ,  $\lambda$  e  $\theta_0$ .

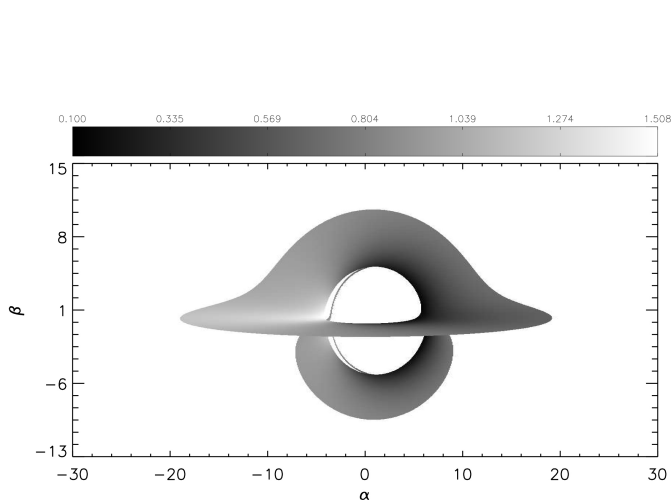
---

<sup>12</sup>Il red-shift è definito come  $z = \frac{\lambda_{oss} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{E_{em} - E_{oss}}{E_{oss}}$ , dove si è fatto uso delle relazione che lega la frequenza di un fotone (e quindi la sua lunghezza d'onda) alla sua energia:  $E = h\nu$ .

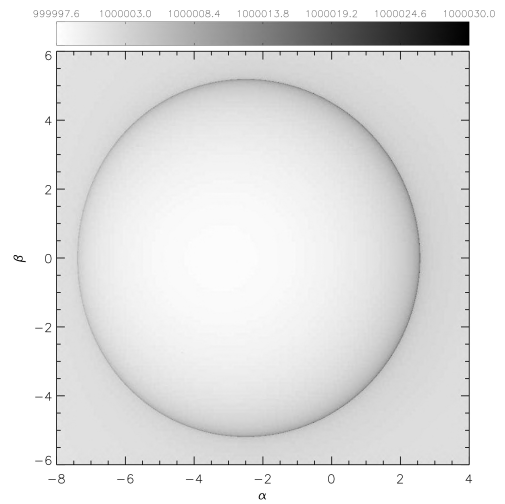
### 3.4 YNOGK: un programma per vedere i buchi neri

YNOGK è un codice costruito dagli astrofisici Xiaolin Yang e Jiancheng Wang per il calcolo delle curve geodetiche nello spaziotempo di Kerr. Il codice è scritto in FORTRAN 95; essi esprimono tutti i parametri affini e le coordinate in funzione di un parametro  $p$  utilizzando le funzioni ellittiche di Weierstrass e Jacobi, e intergrano tali equazioni attraverso il metodo d'integrazione ellittica di Carlson. In questo modo diversi problemi (come ricavare l'immagine del disco di accrescimento di un buco nero, ad esempio) si riducono ad una ricerca delle radici di un sistema di equazioni, e le informazioni sui *turning point* non devono essere specificate in anticipo per il calcolo delle orbite delle particelle.

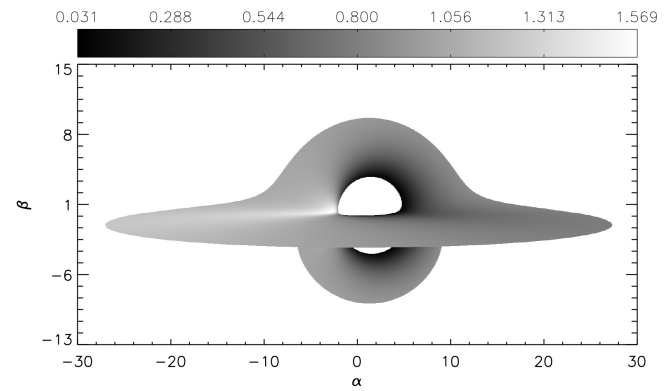
Il programma è in grado di fornire immagini realistiche dell'ombra dei buchi neri e dei dischi di accrescimento. Il codice è free, ed è stato messo a disposizione del pubblico dal gruppo di ricerca; è possibile trovarlo visitando il sito <http://www1.ynao.ac.cn/~yangxl/yxl.html>. Dopo averlo scaricato, seguendo le istruzioni contenute in uno dei file del pacchetto ho ricavato le immagini in Figura 4. Esse rappresentano l'ombra e il disco di accrescimento di un buco nero rispettivamente per  $a/m = 0,75$  e  $a/m = 0,998$ . Nella prima immagine l'osservatore è posto a  $\theta_0 = 85^\circ$  rispetto all'asse di rotazione del buco nero, nella seconda a  $\theta_0 = 90^\circ$ , nella terza e quarta a  $\theta_0 = 86^\circ$ .



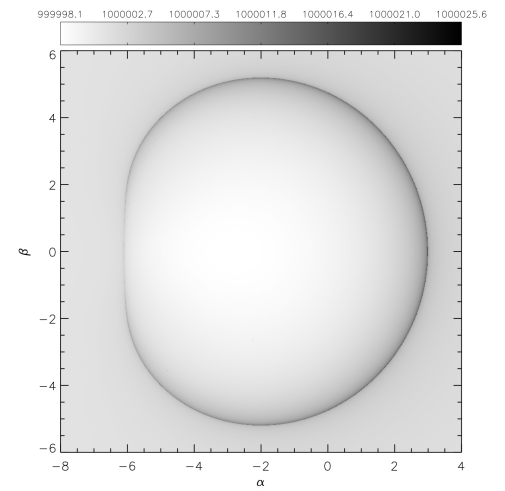
**(a)** *Buco nero dotato di un disco di accrescimento ( $a/m = 0,75, \theta_0 = 85^\circ$ ).*



**(b)** *Ombra di un buco nero di Kerr ( $a/m = 0,75, \theta_0 = 90^\circ$ ).*



**(c)** *Buco nero dotato di un disco di accrescimento ( $a/m = 0,998, \theta_0 = 86^\circ$ ).*



**(d)** *Ombra di un buco nero di Kerr ( $a/m = 0,998, \theta_0 = 86^\circ$ ).*

**Figura 4:** Alcune immagini ricavate attraverso il codice.

## 4 L'ombra di Sgr A\* e come rivelarla con EHT

Nelle sezioni precedenti abbiamo discusso in maniera dettagliata di come l'ombra di un buco nero e il suo disco di accrescimento appaiono sulla volta celeste; abbiamo trovato che il valore del diametro  $d$  dell'ombra nel caso Schwarzschild non è tanto diverso da quello previsto dalla metrica di Kerr, e può assumere valori che vanno da  $4.48m$  a  $3\sqrt{3}m$ <sup>13</sup>. Dato il diametro dell'ombra, conoscendo la distanza  $D$  che ci separa dal buco nero ne troviamo automaticamente l'ampiezza angolare sulla volta celeste  $\theta = d/D$ .

In questa sezione applichiamo la teoria sviluppata sinora concentrandoci sul problema che da il titolo a questa tesi: il rivelamento dell'ombra del buco nero super-massiccio al centro della nostra galassia attraverso osservazioni con Event Horizon Telescope. Tale risultato avrà un doppio valore: quello di essere un'ulteriore test per la relatività generale, e quello di fornire per la prima volta una prova *diretta* dell'esistenza dei buchi neri.

Questa sezione è strutturata nel modo seguente: nella prima parte si danno alcune informazioni su Sgr A\* e si fa un'analisi degli studi che hanno portato a determinarne il rapporto  $m/D$ ; nella seconda si parla del progetto EHT, e di come attraverso l'interferometria nel radio è possibile ottenere immagini con una risoluzione sufficiente a rivelare l'ombra di Sgr A\*.

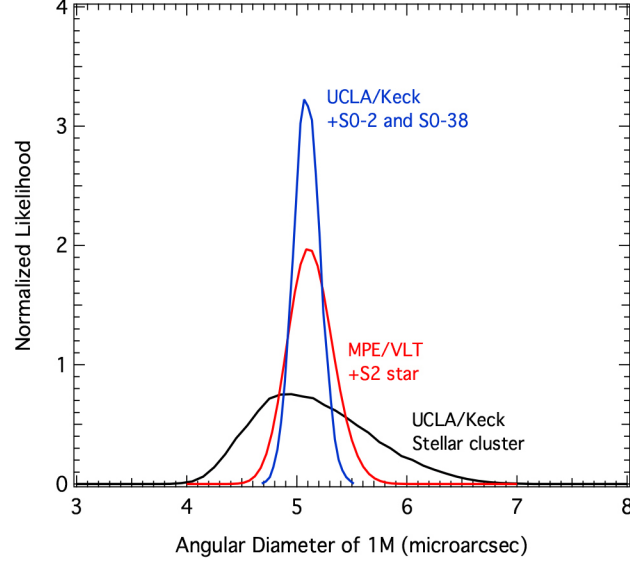
### 4.1 Sgr A\*

Con *Sagittarius A\** si fa riferimento ad una sorgente molto compatta e brillante che si trova nel centro della Via Lattea, ai confini della costellazione del Sagittario e dello Scorpione. A causa dell'estinzione dovuta alle polveri del disco, il radio è la banda più indicata per osservare tale sorgente. Storicamente, il fisico statunitense Karl Jansky è stato il primo a rivelare il segnale proveniente da Sgr A\*, ma furono gli astronomi Bruce Balick e Robert Brown che nel febbraio del 1974 diedero un nome a quest'oggetto del cielo. Attualmente, in seguito all'osservazione delle orbite stellari nelle vicinanze di Sgr A\* si è giunti alla conclusione che in quel punto della galassia debba esistere un buco nero super-massiccio, e, anzi, che tali osservazioni siano una delle prove più convincenti del fatto che buchi neri di questo tipo abitino la parte più interna delle galassie. Consideriamo ad esempio il caso della stella S2: essa segue un'orbita ellittica con un periodo di  $15,56 \pm 0,35$  anni ad una distanza media di 134,6 UA (17 ore-luce). Dal moto di S2 la massa dell'oggetto viene stimata essere 4,1 milioni di masse solari. Tuttavia il raggio dell'oggetto centrale deve essere di molto inferiore a 17 ore luce, altrimenti S2 entrerebbe in collisione o verrebbe distrutta dalle forze di marea; misure recenti indicano che il raggio dell'oggetto non sia superiore a 6,25 ore luce, cioè all'incirca a quello dell'orbita di Urano: solo un buco nero ha una densità sufficiente per stivare 4,1 milioni di masse solari in tale volume!

Passiamo ora ad una discussione più precisa di tale stima: attraverso studi di questo tipo, che consistono nel ricostruire le traiettorie delle stelle che orbitano in prossimità del buco nero e fare un fit con orbite kepleriane, è stato possibile derivare precisamente la massa di Sgr A\* e la sua distanza dalla Terra. Osservazioni spettroscopiche e nel vicino infrarosso sono state portate avanti negli ultimi decenni da telescopi con diametro compreso tra i 4 e i 10 metri (fra tutti, *Keck Telescope* nelle Hawaii e *Very Large Telescope* in Cile); ciò ha permesso

---

<sup>13</sup>Con  $m$  si intende, al solito, il raggio gravitazionale del buco nero. Per visualizzarlo meglio è utile scriverlo con le costanti  $c$  e  $G$ : detta  $M$  la massa del buco nero,  $m = GM/c^2$ .

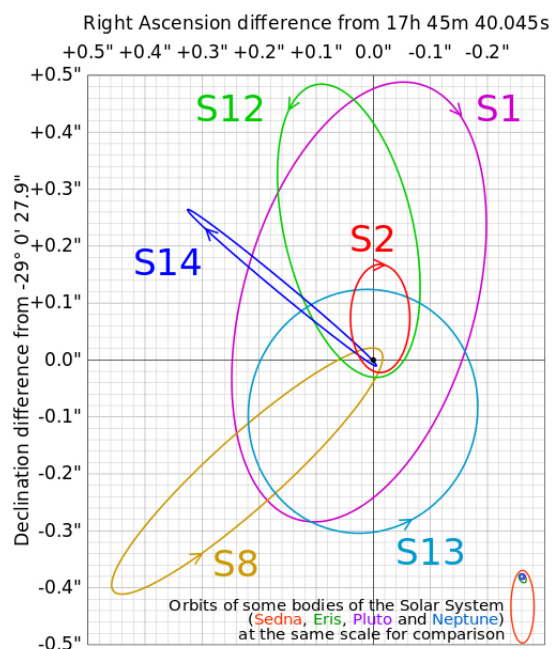


**Figura 5:** La funzione di verosimiglianza del diametro angolare del raggio gravitazionale di Sgr A\* ricavata dal fit con osservazioni astrometriche. La curva nera mostra i risultati di uno studio di UCLA/Keck, nel quale sono considerate solo le osservazioni astrometriche dell’ammasso stellare interno. La curva rossa mostra il risultato dello studio di MPE/VLT, nel quale è considerata anche la velocità radiale della stella S2. La curva blu mostra il risultato di uno studio più recente di UCLA/Keck, nel quale sono inseriti anche i dati della stella S0-38. La funzione di verosimiglianza della curva blu corrisponde a un diametro angolare di  $5.09 \pm 0,17 \mu \text{ arcsec}$ . L’immagine è presa da *Psaltis et al. 2015* [8].

la misurazione delle velocità radiali di centinaia di stelle ad un distanza inferiore a 0.1 pc da Sgr A\*. Una misura astrometrica delle stelle da una stima di  $m/D^3$ , mentre osservazioni della velocità radiale forniscono una misura di  $m/D$ ; in generale, ad ogni studio delle orbite stellari può essere assegnata una funzione di verosimiglianza  $P(D, m)dDdm$ . Quello a cui siamo interessati, tuttavia, è la funzione statistica  $P(m/D)$  che ci da la funzione di verosimiglianza del diametro angolare. Posto  $(m/D) = \theta$  abbiamo:

$$P(\theta, m)d\theta dm = P(D, m)dDdm \implies P(\theta)d\theta = \int_m P(\theta, m)dmd\theta = \int_m \frac{D^2}{m} P(D, m)dmd\theta. \quad (53)$$

Possiamo utilizzare questa equazione per ricavare la funzione di verosimiglianza del diametro angolare  $\theta$  di Sgr A\* da quelle degli studi delle orbite stellari (Gillessen et al. 2009a,2009b[4][5]). I risultati dell’analisi fatta da Psaltis et al. [8] sono mostrati in Fig. 5. Il grafico mostra i progressi fatti con l’accumularsi di dati sulle orbite stellari: la curva in nero riporta le misure astrometriche degli ammassi stellari centrali (l’incertezza sulle dimensioni angolari è del 10%), la curva in rosso mostra le prime assieme alle misure radiali dell’orbita della stella S2, e infine nella curva blu vengono inglobati anche i dati dell’orbita di S0-38. Il risultato finale è che *le dimensioni angolari del raggio gravitazionale sono uguali a  $5.09 \pm 0.17 \mu \text{ arcsec}$  con un’incertezza pari al 4%, che è compatibile con l’incertezza che abbiamo non conoscendo lo spin e l’orientazione dell’asse di Sgr A\*. La precisione delle misure delle dimensioni angolari aumenterà di certo con le prossime osservazioni; in ogni caso, la risoluzione a cui dovremmo arrivare per osservare l’ombra di Sgr A\* è dell’ordine del  $\mu \text{ arcsec}$ , ovvero quella necessaria ad osservare un oggetto delle dimensioni di una pallina da golf sulla superficie della luna. Ciò è possibile? A questo problema è dedicato il prossimo paragrafo.*



**Figura 6:** Sei orbite stellari attorno a Sgr A\*. In basso a sinistra sono mostrate le orbite di alcuni corpi nel nostro sistema solare come termine di paragone.

## 4.2 EHT: Event Horizon Telescope

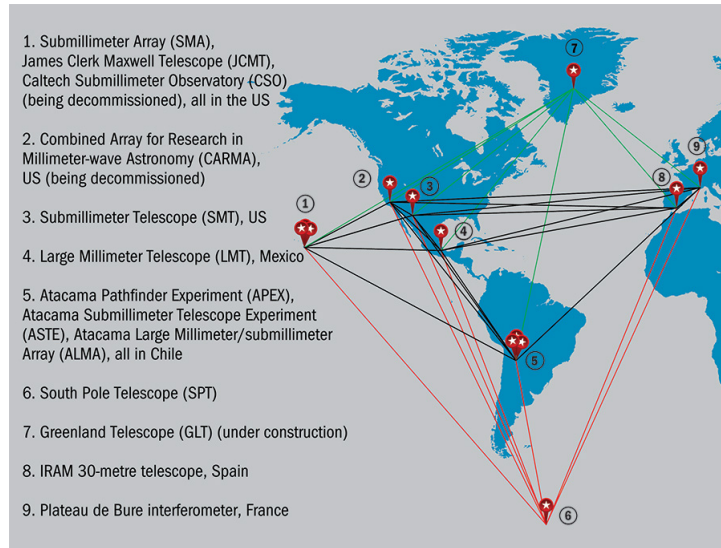
Event Horizon Telescope (EHT) è un progetto nato con il preciso scopo di osservare l'ombra dei buchi neri. Esso lega nove radio telescopi sparsi su tutta la superficie terrestre con lo scopo di fare della “*very long baseline interferometry*”; tale tecnica permette centuplicare il potere risolutivo delle singole antenne: combinando i dati di telescopi distanti migliaia di chilometri è possibile creare un unico telescopio virtuale con un diametro effettivo delle dimensioni dell'intero pianeta!

### *Very Long Baseline Interferometry*

Sappiamo dall'ottica ondulatoria che la risoluzione di uno strumento ottico è limitata dalle dimensioni del disco di Airy, il cui raggio è:

$$R = 1.22 \frac{\lambda}{d} f; \quad (54)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda a cui si osserva,  $d$  è il raggio del telescopio e  $f$  è la lunghezza focale. Questo, in linea di principio, rappresenta un grande svantaggio per le osservazioni in radio: rispetto all'ottico, a parità di diametro un radiotelescopio ha un potere risolutivo inferiore di almeno quattro ordini di grandezza (ciò significa che, per ottenere lo stesso effetto di un telescopio di 120 cm che osserva a  $\lambda = 0.55\mu\text{m}$ , un radiotelescopio che osserva a  $\lambda = 5\text{mm}$  dovrà avere un diametro di 12 Km!).



**Figura 7:** Telescopi che il progetto EHT coordina.

Nonostante ciò le osservazioni in radio hanno numerosi vantaggi:

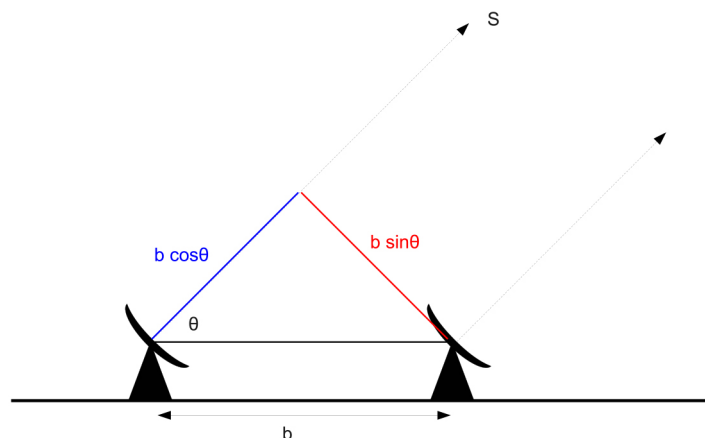
- maggior tolleranza di lavorazione; l'immagine ottenuta da uno strumento ottico perfetto è molto simile a quella ottenuta da quella ottenuta da uno strumento (un collettore, ad esempio) il cui fronte d'onda si discosta di un quarto della lunghezza d'onda. Dunque più  $\lambda$  è grande, più gli strumenti possono essere "imperfetti";
- la riflettività del collettore in radio è molto maggiore di quella in ottico (c'è una minore dispersione del segnale);
- l'osservazione in radio conserva la fase della radiazione incidente.

L'ultima proprietà è di fondamentale importanza: un'antenna conserva la fase del segnale rivelato (a differenza di un CCD, ad esempio, nel quale una volta che il fotone libera l'elettrone tale informazione va completamente distrutta). Ciò permette di correlare immagini dello stesso oggetto ottenute da telescopi diversi. Consideriamo due sorgenti di pari intensità con separazione angolare  $\theta$  (che possono essere due stelle, ad esempio, o i fotoni che ci arrivano dai margini dell'ombra di un buco nero). Se facciamo passare la loro luce attraverso due fenditure di larghezza  $b$  e separazione  $d$  si formeranno due figure di interferenza sovrapposte: in particolare, i massimi delle due figure saranno separati di una certa quantità pari allo stesso angolo  $\theta$ . Dalle leggi dell'ottica ondulatoria possiamo ricavare la distanza tra due frange:

$$\phi \approx \frac{\lambda}{d}. \quad (55)$$

Risulta che, regolando la distanza tra le fenditure in modo che i minimi di una delle figure d'interferenza coincidano con i massimi dell'altra, è possibile eliminare le frange e far sì che le due figure siano risolte. Ciò avviene per:

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{d}, \frac{3}{2} \frac{\lambda}{d}, \frac{5}{2} \frac{\lambda}{d} \dots \quad (56)$$



**Figura 8:** Schema di due radiotelescopi che osservano nella stessa direzione;  $b$  è la distanza di baseline, mentre  $b \cos \theta$  è la differenza di cammino ottico. L'immagine è presa da S. Ciroti, *Dispense di laboratorio di astronomia* [3].

Ha senso definire, quindi,  $P = \lambda/2d$  come il *potere risolutivo* dell'interferometro. E' proprio questo che sta alla base dell'interferometria; con EHT ci si propone di utilizzare una serie di radiotelescopi sparsi per il mondo: la distanza tra un telescopio e l'altro viene chiamata **baseline**, e più sarà grande, maggiore sarà il potere risolutivo del sistema ottico. Una cosa di cui si deve tener conto, tuttavia, è il fatto che i fronti d'onda non arriveranno ai telescopi nello stesso momento, ma ci sarà un ritardo di fase (*geometrical delay*), che a conti fatti è proprio il punto di forza di questa tecnica (maggiore sarà il ritardo di fase, maggiore sarà la differenza di cammino ottico e quindi la distanza tra i telescopi: in definitiva risulta che il potere risolutivo è direttamente proporzionale al ritardo di fase). Questo ragionamento è stato fatto per due sorgenti puntiformi in una sola dimensione (la direzione della baseline): con più telescopi, e sfruttando la rotazione della Terra, sono stati costruiti algoritmi che consentono di ricostruire l'immagine dell'oggetto astronomico in modo completo.

Dato il potere risolutivo di un interferometro, vogliamo conoscere la distanza necessaria tra due fenditure per ottenere una risoluzione di  $1\mu\text{arcsec} = (206265)^{-1} * 10^{-6}\text{rad}$  osservando a  $\lambda = 1.3\text{mm}$ . Tale risoluzione è proprio quella che dobbiamo ottenere per risolvere l'ombra di Sgr A\* osservando con EHT. Abbiamo:

$$d = \frac{\lambda}{2\mu\text{arcsec}} = 13407,225\text{km}. \quad (57)$$

Dato che la circonferenza terrestre è  $C = 20015 \text{ km}$ , abbiamo bisogno di una distanza di baseline di tale ordine di grandezza: EHT, la cui rete di telescopi copre un'area di dimensioni comparabili alla superficie terrestre (Fig. 7), ha le potenzialità per fare questa misura!

## 5 Conclusioni

Nei prossimi decenni ci si aspetta che le osservazioni di EHT forniscano la prova dell'esistenza di buchi neri nell'universo attraverso l'osservazione diretta del lensing gravitazionale dovuto alla presenza di un campo forte nella regione di Sgr A\*. Tale osservazione avrà come valore aggiunto quello di essere una prova ulteriore della *relatività generale*, teoria la cui validità è stata suggellata negli ultimi tempi dalla rivelazione delle onde gravitazionali.

In questa tesi si è mostrato il percorso che va dalla costruzione teorica fino all'osservazione dell'immagine di Sgr A\*, il buco nero super-massiccio al centro della nostra galassia. Nella prima sezione abbiamo costruito l'immagine di un buco nero non rotante dotato di un disco di accrescimento. Nella seconda abbiamo generalizzato il modello al caso in cui è la metrica di Kerr a descrivere la geometria dello spaziotempo, e discusso l'effetto del red-shift causato dalla rotazione del disco e dal campo gravitazionale sul flusso bolometrico; nella stessa sezione si è presentato un programma che fornisce immagini realistiche dei buchi neri rotanti. Infine si è esplorata la possibilità di osservare Sgr A\* facendo della *VLBI*: dopo aver ricavato massa e dimensioni del buco nero da studi fatti sulle orbite stellari nelle sue vicinanze, è stato mostrato che il progetto EHT ha le caratteristiche necessarie per risolvere l'ombra di tale oggetto.

Il mio obiettivo è stato quello di fornire una panoramica generale sull'argomento, mostrando come costruire l'immagine di un buco nero a partire dai risultati della relatività generale, e come l'osservazione di Sgr A\* possa essere un test per questa teoria. Nonostante questo, il lavoro teorico necessario per la rivelazione di Sgr A\* è tutt'altro che concluso: esso non può prescindere da uno studio sugli effetti che il mezzo interstellare avrà sull'immagine, ad esempio, o da una discussione sugli algoritmi con cui ricostruire le immagini che otterremo dalle osservazioni (come discusso in dettaglio da Psaltis et al. [8]).

# APPENDICE

## 6 Cenni alla teoria dei dischi di accrescimento dei buchi neri (BHAD)

Per via della forte connessione con i buchi neri, chiunque voglia cimentarsi nel costruire una teoria accurata dei *BHAD* (*black hole accretion disk*) dovrà tener conto non soltanto dei risultati di fluidodinamica più complicati, ma anche delle correzioni relativistiche dovute all'intenso campo gravitazionale e alle velocità estremamente elevate delle loro parti. Tuttavia, attraverso questa breve parentesi si ha soltanto l'ambizione di mostrare quali sono le loro caratteristiche principali, e pertanto, senza troppi sensi di colpa, ci semplificheremo la vita assumendo che tutti i problemi fisici che analizzeremo possono essere affrontati con gli strumenti della meccanica classica.

Qual'è l'utilità di una teoria dei dischi di accrescimento dei buchi neri nel contesto di questo lavoro?

Nonostante le straordinarie conseguenze che la presenza di un campo gravitazionale intenso come quello di un buco nero ha sulla struttura dello spaziotempo (orizzonte degli eventi, ergosfera, ecc...), tali fenomeni sono estremamente difficili da osservare in natura. Il fatto per definizione generino un campo gravitazionale talmente intenso da far sì che nemmeno la luce possa sfuggirgli se gli passa abbastanza vicino, non ci lascia vie d'uscita: è possibile osservare un buco nero soltanto considerando gli effetti che la sua presenza ha sulla radiazione di un altro oggetto.

Tra le sorgenti che possono permetterci di "vedere" questi, oggetti i dischi di accrescimento sono sicuramente le più importanti. Attualmente, per tutti i nostri modelli la radiazione che pensiamo sia generata dalla presenza di buchi neri deriva dai dischi di accrescimento che li circondano: il moto turbolento del disco fa sì che esso emetta energia a spese del momento angolare, tale energia si disperde nello spazio e infine raggiunge i nostri telescopi.

Da qui l'interesse nell'indagare la fisica che agisce in questi oggetti.

### Le equazioni che descrivono un BHAD

Il modello che analizzeremo è quello di *disco di accrescimento sottile* (detto  $H$  lo spessore del disco e  $R$  il raggio, disco sottile significa che  $H \ll R$ ). Inoltre, assumeremo sempre che il disco sia caratterizzato da un regime di accrescimento non critico ( $\dot{M} < 10^{-8} M/\text{yr}$ ), per il quale la luminosità è minore di quella di Eddington. La materia, nel disco di accrescimento, si dispone su un certo range radiale:

$$R_{ISO} < R < R_{out} \quad (58)$$

Dove  $R_{ISO}$  è il raggio dell'ultima orbita circolare stabile, e  $R_{out}$  segna il limite esterno del disco. Nel seguito assumeremo che la velocità del moto d'insieme delle parti del disco sia kepleriana; detta  $\Omega$  la velocità angolare, essa è funzione della radice quadrata del raggio secondo la seguente legge:

$$v_\phi = R\Omega = R \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (59)$$

Da notare che questa è una semplificazione: in generale, il moto d'insieme del fluido dipenderà anche dalla turbolenza. I fenomeni dissipativi che agiscono sul disco sono di due tipi:

- di tipo cinematico, che fanno sì che gli elementi del disco si stabilizzino su orbite circolari; dato che il tempo scala per questo tipo di fenomeni è breve se confrontato col tempo di evoluzione del sistema ( $t_{dyn} \approx 1/\Omega$ ), ha senso considerare il disco di accrescimento come un insieme di tanti anelli circolari in rotazione, ognuno con una velocità angolare descritta da (21);
- di tipo viscoso, dovuti al moto turbolento, con un tempo scala  $t_{vis} \approx R^2/\nu$ , ove  $\nu$  è la viscosità cinematica.

La variazione del momento angolare è causata dal moto turbolento, ovvero dal flusso di bolle che trasportano momento angolare da un anello all'altro del disco. Consideriamo due anelli a contatto tra di loro, che si trovano, rispettivamente, a distanza  $R$  e  $R+\lambda$  dal centro, con velocità angolare  $\Omega(R)$  e  $\Omega(R+\lambda)$ ; possiamo esprimere il momento torcente che la turbolenza genera tra le due superfici in questo modo:

$$\tau_{sup} = \frac{dL}{dt} = -2\pi R^3 \Sigma \nu \frac{\partial \Omega}{\partial R} = -G(R) \quad (60)$$

dove  $\Sigma = \int_0^H \rho dz$  è la densità superficiale. Da (22) abbiamo che il momento complessivo che agisce su un anello del disco di spessore  $dR$  può essere scritto come:

$$\tau = \frac{\partial G}{\partial R} dR \quad (61)$$

Possiamo ricavare il lavoro infinitesimo e la potenza istantanea:

$$dW = \tau \phi = \frac{\partial G}{\partial R} dR \quad P = \frac{dW}{dt} = \frac{\partial G}{\partial R} dR \Omega \quad (62)$$

Dalla potenza istantanea ricaviamola potenza dissipata per unità di area:

$$D(R) = \frac{dP}{4\pi R dR} = \frac{1}{2} \nu \Sigma R^2 \left( \frac{d\Omega}{dR} \right)^2 \quad (63)$$

Per trovare le leggi che descrivono l'evoluzione del fluido nel disco invochiamo i due pilastri della fluidodinamica: l'equazione di continuità e l'equazione del momento.

Consideriamo un anello del disco di dimensione radiale  $\Delta R$ . L'equazione di continuità stabilisce la conservazione della massa:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + infl - enfl = 0 \quad (64)$$

Dove *infl* e *enfl* stanno rispettivamente per la massa che entra nell'anello e per quella che ne esce. Considerata in termini della velocità radiale, del raggio e della densità superficiale, (26) diventa:

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial R} (r v_R \Sigma) \quad (65)$$

L'equazione del momento stabilisce che la variazione del momento angolare dell'anello deve essere pari al momento delle forze che agisce su di esso, ovvero che:

$$\Delta\tau = \frac{d\Delta L}{dt} \quad (66)$$

Scrivendo  $\Delta L = \Delta m R v_\phi = 2\pi R \Delta R \Sigma R^2 \Omega$  e utilizzando (21), (22) e (23), attraverso alcune manipolazioni si arriva a:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R} = \Sigma \frac{\partial}{\partial t} (R^2 v_\phi) + v_R \Sigma R \frac{\partial}{\partial R} (R v_\phi) \quad (67)$$

Che nel caso che la velocità angolare sia come in (21) diventa:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial R} \left[ 3R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\Sigma v R^{1/2}) \right] \quad (68)$$

## Struttura di un disco stazionario

A partire da (25), (27) e (29) è possibile studiare la struttura di un disco stazionario

Per definizione, in un disco stazionario il tempo in cui la massa varia è molto maggiore rispetto a quello in cui avvengono i fenomeni dissipativi dovuti alla turbolenza; stabilito ciò, possiamo semplificare il problema ponendo tutte le derivate parziali rispetto al tempo delle equazioni trovate in precedenza uguali a 0. Introduciamo  $\dot{M} = 2\pi R(-v_R)\Sigma$ , ovvero la massa che attraversa l'anello infinitesimo; integrando (29) rispetto al raggio e imponendo che non vi sia massa che eserciti torsione per  $R = R_{ISO}$  e che la velocità angolare sia come in (21), troviamo:

$$v\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left( 1 - \sqrt{\frac{R_{ISO}}{R}} \right) \quad (69)$$

Da cui, sostituendo in (25) e integrando su tutto il disco (si è posto  $R_{out} \approx \infty$  poiché  $R_{out} \gg r_{ISO}$ ) arriviamo alla luminosità totale:

$$\Lambda_{tot} = \frac{GM\dot{M}}{2R_{ISO}} \quad (70)$$

Il prossimo passo è quello di descrivere l'equilibrio verticale del disco. Per farlo utilizziamo il metodo classico di risoluzione dei problemi di statica: scriviamo le forze perpendicolari al piano del disco che agiscono su un elementino a quota  $z$  rispetto al sdr utilizzato nella sezione precedente, e poniamo la loro somma uguale a zero. Ci sono soltanto due forze da prendere in considerazione: la forza gravitazionale e quella di pressione. Nel caso in cui l'angolo tra il piano equatoriale e il raggio vettore dell'elementino sia molto piccolo, l'equazione è:

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{GM}{R^2} \frac{z}{R} \quad (71)$$

(33) si può risolvere scrivendo l'equazione di stato del gas del disco come  $p = p_{rad} + p_{gas} = kt\rho/\mu m_p + (1/3)aT^4$  e facendo i conti; la soluzione ci conferma che porre la velocità tangenziale uguale a quella del moto Kepleriano e imporre la velocità delle bolle come molto inferiore a quella del moto d'insieme sono due ottime approssimazioni nel limite di disco sottile. Ponendo

$c_s = \sqrt{p/\rho}$  (velocità del suono, che caratterizza la viscosità cinematica attraverso il parametro  $\alpha$ :  $v = \lambda v_s = \alpha H c_s$ ) abbiamo infatti:

$$\frac{H}{R} = \sqrt{2} \frac{c_s}{v_\phi} \quad \rho = \rho_c \exp\left(\frac{GM}{2R^3 A} z^2\right) \quad v_\phi = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (72)$$

## Emissione

Per trovare una legge di emissione si può considerare che la temperatura vari di poco all'interno del disco, in modo che il trasporto d'energia sia quasi completamente radiativo. L'equazione del flusso totale di energia dal centro del piano equatoriale del disco fino agli strati a quota maggiore è data da:

$$F(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_R} \frac{\partial T(R, z)}{\partial z} \quad (73)$$

nel caso in cui la profondità ottica sia molto maggiore di 1 (Tale risultato deriva dalla teoria del trasporto, per approfondimenti rimando a "*Stellar Astrophysics Volume 2: stellar atmosphere*"). Ponendo  $dF = -\frac{\partial F}{\partial z} dz$  e integrando da  $z=0$  a  $z=H$  troviamo la potenza emessa per unità di area:

$$\int_0^H dF = F_{tot}(0) - F_{tot}(H) \approx F(0) = D(R) \quad (74)$$

Mettendo insieme (35) e (25) otteniamo una stima della temperatura centrale:

$$T^4 = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right] = T_*^4 \left(\frac{R_*}{R}\right)^3 \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right] \quad (75)$$

$T_*$  è una temperatura di scala, attraverso cui possiamo avere un'idea della banda in cui il disco di accrescimento emetterà. Dato che  $T_*$  dobbiamo aspettarci un picco dell'emissione nella banda X. (37) ci permette anche di avere un'idea l'emissione del disco nel suo insieme; tale relazione, infatti, associa una temperatura ad ogni anello del disco. Assumendo che ognuno di essi irradia come un corpo nero, la temperatura identifica univocamente lo spettro della sua radiazione. Facendo i conti, troveremo che il disco può essere diviso in tre regioni:

- Una regione esterna in cui la pressione del gas è dominante rispetto alla radiazione e l'opacità è determinata dall'emissione free/free;
- Una regione al centro del disco, in cui la pressione del gas è dominante rispetto alla radiazione ma l'opacità è determinata dall'electron scattering;
- Una pressione interna in cui la pressione di radiazione è dominante e l'opacità è determinata dallo scattering elettronico.

## Dischi di accrescimento in un contesto general-relativistico

Come già detto, tutto ciò che è stato sviluppato nella sezione precedente è valido soltanto in prima approssimazione; volendo dare una descrizione general-relativistica le leggi del disco dovranno essere scritte in forma covariante, considerando il fluido immerso nello spazio-tempo di Kerr. Inoltre, per dare una stima del moto delle parti del fluido, non si farà una approssimazione di velocità Kepleriana, ma di moto geodetico, e dovranno essere prese in considerazione le leggi trovate in precedenza per descrivere il moto geodetico nella geometria di Kerr.

La legge di continuità e di conservazione del momento avranno la forma:

$$\nabla_{\mu}(\varrho u^{\mu}) = 0 \qquad \nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu} = 0 \qquad (76)$$

con  $\varrho$  la densità di massa-energia a riposo,  $u^{\mu}$  la quadrivelocità della materia e  $T^{\mu}_{\nu}$  il tensore energia-impulso. Il tensore energia-impulso è l'oggetto geometrico che descrive la densità e il flusso di energia e momento nello spazio tempo; è tramite questo oggetto che "ciò che esiste" è una fonte di gravità. Esistono due strade per definire un tensore energia impulso, e sono:

- fenomenologica e macroscopica
- lagrangiana e microscopica

Per parlare dei dischi di accrescimento dobbiamo affidarci ad una descrizione del primo tipo: in pratica non si cerca di derivare tale oggetto da una descrizione microscopica della materia, ma si costruisce in modo che codifichi la fisica che si sta cercando di descrivere (la dinamica e le leggi di conservazione). Nell'ambito della teoria dei dischi di accrescimento, il tensore energia-impulso è descritto come una somma algebrica di tensori che descrivono (singolarmente) le varie caratteristiche fisiche (la componente fluida, la componente viscosa, la componente che descrive i campi magnetici, la componente radiativa).

Attraverso (38) è possibile generalizzare le leggi trovate in precedenza. Ciò non verrà fatto in questa sede: per gli interessati, rimandiamo a "*Mareck, Foundation of black hole accretion disk theory*" [7].

## Riferimenti bibliografici

- [1] J.M. Bardeen (1975), “*Timelike and null geodesics in the Kerr metric*”, *Black Holes-Les astres occlus* eds by C. De Witt (Gordon and Breach, Paris), pp. 215-241;
- [2] M. Blau (2015), “*Lectures notes on General Relativity*”, <http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html>;
- [3] S. Ciroi, A. Cracco (2014-2015), “*Dispense del corso di laboratorio di astronomia*”;
- [4] S. Gillessen, F. Eisenhauer, T. K. Fritz, H. Bartko, K. Dodds-Eden, O. Pfuhl, T. Ott, R. Genzel (2009a), “*The orbit of the Star S2 around Sgr A\* from Very Large Telescope and Keck Data*”, *ApJ*, 707, L114;
- [5] S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, T. Ott (2009b), “*Monitoring stellar orbits around the massive black hole in the galactic center*”, *ApJ*, 692, 1075;
- [6] J.P. Luminet (1978), “*Image of a spherical Black Hole with thin accretion disk*”, *A&A*, 75, 228;
- [7] A.M. Abramowicz, P.C. Fragile (2013), “*Foundations of Black Hole accretion disk theory*”, *Living Rev. Relativity*, <http://www.livingreviews.org/lrr-2013-1>;
- [8] D. Psaltis, F. Ozel, Chi-Kwan Chan, D.P. Marrone (2015), “*A general relativistic null hypothesis test with event horizon telescope observation of the black-hole shadow in Sgr A\**”, *ApJ*, 814, 115;
- [9] K.S. Thorne, I.D. Novikov (1973), “*Astrophysics of Black Holes*”, *Black Holes* eds. C. DeWitt and B. DeWitt (Gordon and Breach, Paris), pp. 343-450;
- [10] X. Yang, J. Wang (2013), “*YNOGK: a new public code for calculating null geodesics in the Kerr spacetime*”, *ApJS*, 207, 6.