UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

La gerarchia dei vuoti nell'Universo

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureando

Davide Maniscalco

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione

Un gran numero di osservazioni e di evidenze teoriche supporta l'ipotesi che la struttura dell'Universo sia nata a causa di minuscole perturbazioni di densità presenti in un cosmo primordiale quasi omogeneo e cresciute in ampiezza attraverso il processo dell'instabilità gravitazionale. Come si può vedere in parte nell'esempio di figura 1, le strutture dell'Universo sono disposte in modo complesso: la distribuzione di materia non è uniforme, anzi essa si accumula in strette regioni a forma di fogli e filamenti, mentre si trovano, anche, regioni praticamente prive di galassie luminose che sono chiamate *vuoti*; tali risultati sono stati ottenuti sia grazie a delle simulazioni numeriche, sia grazie a delle misure di redshift.

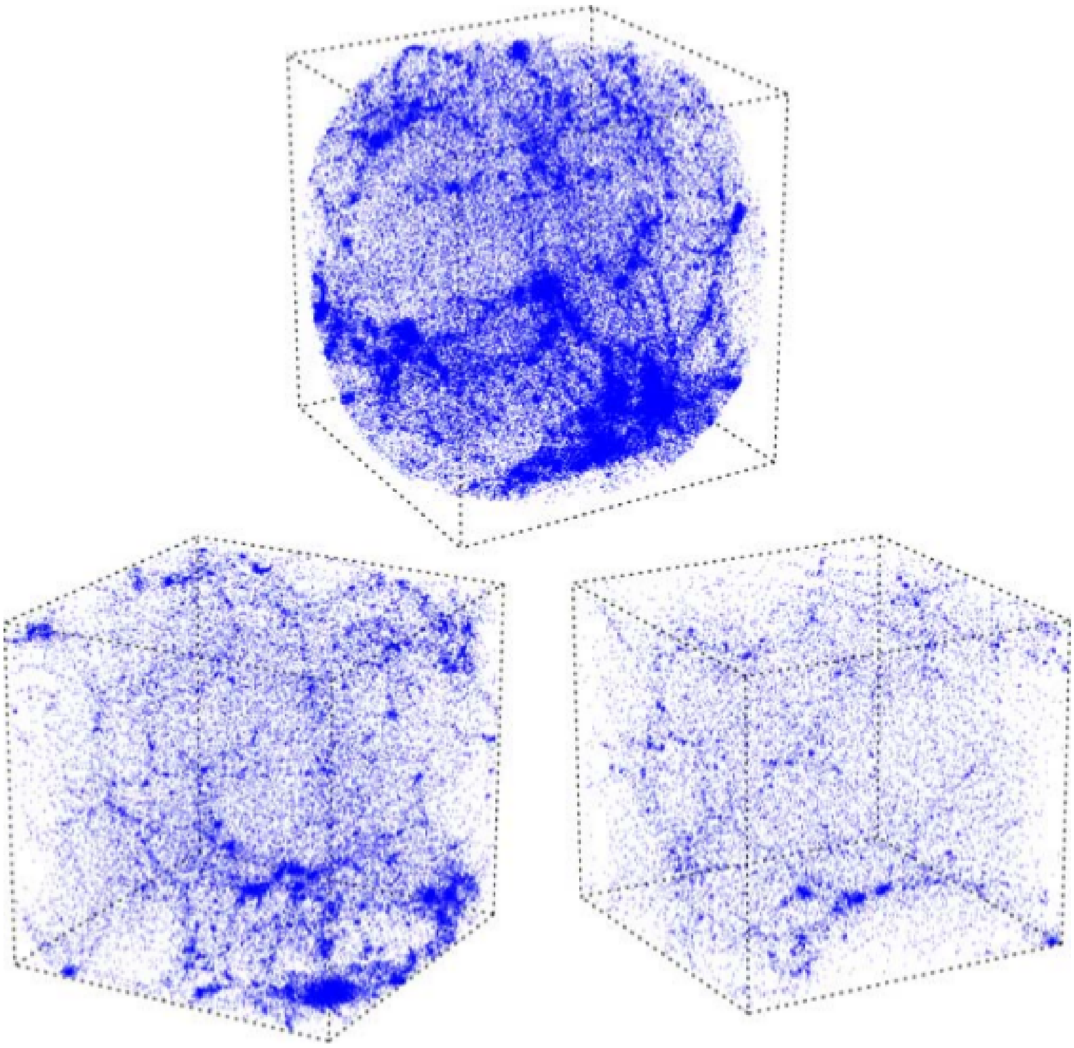

Figura 1: Tre zoom consecutivi di una struttura spaziale selezionati da una simulazione a N-corpi in uno scenario SCDM [2].

Quasi tutte le teorie percorribili riguardanti la formazione delle strutture sono *gerarchiche*, il che significa che la distrubuzione di materia evolve attraverso una sequenza di strutture via via più grandi. Il modello gerarchico per la formazione delle strutture ha avuto successo nello spiegare la storia della formazione degli aloni virializzati. In particolare, una descrizione analitica completa del processo è stata proposta inizialmente da Press & Shechter (1974) e più avanti modificata da Epstein (1983) e da Bond et. al. (1991): l'*excursion set approach* [2]. Per quanto riguarda gli ammassi, questa studia il campo di densità (in un'approssimazione lineare) centrato in un punto dello spazio a scale via via più piccole, e identifica come ammassi virializzati quelle regioni che superano una certa densità critica,

nell'assunzione (originale) che il collasso sia sferico. Come abbiamo appena detto però, la forma delle strutture cosmiche virializzate non è affatto sferica, ma questo non è un ostacolo all'utilizzo dell'excursion set approach, se ci si focalizza sull'evoluzione delle *regioni sottodense*: i *vuoti.* Sheth & van de Weygaert (2004) utilizzano anch'essi l'excursion set approach: si studia di nuovo il campo di densità a scale via via più piccole e si identificano come vuoti quelle regioni che superano una certa altra densità critica. In entrambi i casi si sfruttano delle approssimazioni lineari in modo molto ingegnoso, ossia si associano quei due valori di soglia lineari di cui sopra ai momenti in cui nella realtà avvengono, rispettivamente, il collasso e la formazione di un vuoto. La questione, tuttavia, è più complicata di così, per via degli effetti su grande scala. Il problema più famoso è quello del *cloud-in-cloud*, che ha il suo corrispettivo per le regioni sottodense nel problema del *void-in-void*, ossia, detto in modo spicciolo, di non conteggiare come tali ammassi che in realtà si trovano incorporati in ammassi più grandi e di non conteggiare vuoti che si trovano dentro vuoti più grandi. A questi problemi se ne aggiungerà poi uno più complesso, quello del *void-in-cloud*, relativo allo schiacciamento di un vuoto circondato da ammassi da parte degli stessi. La potenza dell'excursion set approach sta proprio nel fornire un modello generale per la formazione di vuoti e ammassi, tenendo in considerazione tutti questi effetti. In questa tesi tutto il lavoro verrà svolto nell'ipotesi di un Universo di Einstein-de Sitter.
La tesi è organizzata come segue: nella prima sezione si studia in modo completo l'evoluzione di una perturbazione sferica, ricavando i valori delle due soglie critiche di denstità al tempo presente δ_c e δ_v; nella seconda sezione si analizzerà più in dettaglio l'evoluzione di un vuoto isolato, mentre nella terza e nella quarta sezione si analizzerà l'excursion set formalism ed i risultati cui porta.

1 Evoluzione di una perturbazione sferica

Per un Universo di Einstein-de Sitter la densità dell'Universo è costante e pari alla densità critica ρ_c: le perturbazioni di densità potranno essere pertanto di due tipi: sovradense, se $\rho > \rho_c$, o sottodense, se $\rho < \rho_c$. Queste perturbazioni di densità evolvono poi nel tempo e raggiungono la stabilità, dando origine a degli ammassi virializzati, nel caso delle prime, o a dei vuoti, che sono di maggior interesse in questa tesi, nel caso delle seconde.

1.1 Teoria lineare

In questa sezione seguiremo i passaggi di Hamaus [1], che però vengono svolti in una forma più generale, e non specializzandosi subito al caso di un Universo di Einstein-de Sitter, fino all'equazione (17) esclusa, utilizzando le definizioni dell'articolo di Sheth & van de Weygaert [2]. Vogliamo ricavare l'equazione della velocità $\vec{v}\,(\vec{x},t)$ di una perturbazione di densità $\rho\,(\vec{x},t)$. Consideriamo un campo di densità $\rho\,(\vec{x},t)$ di coordinata comovente $\vec{x}$ e tempo t con valor medio $\bar{\rho}\,(t)$. Definiamo ora il *contrasto di densità* come

$$\delta\,(\vec{x},t) = \frac{\rho\,(\vec{x},t)}{\bar{\rho}\,(t)} - 1\,. \tag{1}$$

All'ordine lineare nel contrasto di densità, la conservazione della massa implica che:

$$\frac{\partial\delta\,(\vec{x},t)}{\partial t} + \frac{1}{a\,(t)}\nabla\cdot\vec{v}\,(\vec{x},t) = 0\,, \tag{2}$$

dove a è il *fattore di scala* e $\vec{v}$ il campo di *velocità peculiare*, dove questo termine identifica la velocità della perturbazione rispetto alla velocità di espansione dell'Universo, detta di *background.* Il fattore di densità lineare può essere fattorizzato come prodotto di una parte spaziale e di una temporale, introucendo il *fattore di crescita lineare D(t):*

$$\delta\,(\vec{x},t) = D\,(t)\,\delta\,(\vec{x})\ , \tag{3}$$

da cui

$$\frac{\partial\delta\left(\vec{x},t\right)}{\partial t}=\frac{dD\left(t\right)}{dt}\delta\left(\vec{x}\right)\ .$$

Sostituendo

$$\delta\left(\vec{x}\right)=\frac{\delta\left(\vec{x},t\right)}{D\left(t\right)}$$

nella precedente otteniamo

$$\frac{\partial\delta\left(\vec{x},t\right)}{\partial t}=\frac{1}{D\left(t\right)}\frac{dD\left(t\right)}{dt}\delta\left(\vec{x}\right)\ ,$$

ossia

$$\frac{\partial\delta\left(\vec{x},t\right)}{\partial t}=\frac{dD\left(t\right)}{dt}\delta\left(\vec{x}\right)=\frac{d\ln D\left(t\right)}{dt}\delta\left(\vec{x},t\right)=\frac{d\ln D\left(t\right)}{d\ln a\left(t\right)}\frac{d\ln a\left(t\right)}{dt}\delta\left(\vec{x},t\right)\ .$$

Definendo ora il *tasso di crescita lineare* come

$$f\left(t\right):=\frac{d\ln D\left(t\right)}{d\ln a\left(t\right)}\ ,$$

ricordando che $H\left(t\right)\equiv\dot{a}\left(t\right)/a\left(t\right)$, dove $H\left(t\right)$ è la costante di Hubble, e usando la (2), abbiamo

$$\nabla\cdot\vec{v}\left(\vec{x},t\right)=-f\left(t\right)a\left(t\right)H\left(t\right)\delta\left(\vec{x},t\right)\ .$$

Integriamo la precedente relazione su una sfera di raggio r. A sinistra dell'uguale, per il teorema della divergenza, otteniamo

$$\oint\vec{v}\left(\vec{x},t\right)\mathrm{ds}=4\pi r^{2}\vec{v}\left(\vec{r},t\right)\ ,$$

da cui

$$\vec{v}\left(\vec{r},t\right)=-f\left(t\right)a\left(t\right)H\left(t\right)\frac{1}{3}\frac{3}{4\pi r^{2}}\int_{Vs}\delta\left(\vec{x},t\right)d^{3}x\ .$$

Definiamo ora il *contrasto di densità medio all'interno del raggio* r come

$$\Delta\left(r,t\right):=\frac{3}{4\pi r^{3}}\int_{Vs}\delta\left(\vec{x},t\right)d^{3}x\ . \tag{4}$$

Sostituendo ora la (4) nell'espressione ancora precedente, si ottiene una relazione tra il campo di velocità radiale e il contrasto di densità medio all'interno della sfera

$$v\left(r,t\right)=-\frac{1}{3}f\left(t\right)a\left(t\right)H\left(t\right)\Delta\left(r,t\right)r$$

con r parametro adimensionale; oppure, ridefinendo $r=r\cdot a\left(t\right)$ di modo che abbia le dimensioni di una lunghezza,

$$v\left(r,t\right)=-\frac{1}{3}f\left(t\right)H\left(t\right)\Delta\left(r,t\right)r\left(t\right)\ . \tag{5}$$

1.2 Teoria non lineare

Considereremo solo fluttuazioni di densità $\delta\left(r\right)$ a simmetria sferica, con contrasto di densità medio (che si ricava immediatamente dalla (1))

$$\Delta\left(r\right)=\frac{3}{r^{3}}\int_{0}^{r}\delta\left(r'\right)r'^{2}\mathrm{dr'}\ . \tag{6}$$

Da quest'ultima espressione, dall'equazione (4), e dal valore del volume della sfera, deduciamo immediatamente che la massa della perturbazione sferica di raggio r è

$$M(r) = \frac{4\pi r^3}{3}\bar{\rho}\left(1 + \Delta(r)\right) \ . \tag{7}$$

Enunciamo ora il *Teorema di Birkhoff*, che sarà fondamentale per la prosecuzione del ragionamento:

"Un corpo a simmetria sferica influenza i corpi esterni come se tutta la sua massa fosse concentrata nel punto al suo centro".

Questo ci permette di semplificare i calcoli seguenti, considerando la nostra perturbazione, qui, come puntiforme. Il nostro obiettivo è ora quello di ricavare la forma parametrica del fattore di espansione $a(t)$ e del tempo t della perturbazione nel caso generale, che sarà il punto basilare di partenza per poi specializzarci al caso dell'Universo di Einstein-de Sitter. Per farlo, facciamo un ragionamento del tutto analogo alla derivazione classica delle *Equazioni di Friedmann*, per poi utilizzare l'approssimazione lineare ricavata nella sezione precedente. Dalla legge di Newton, abbiamo che

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM(r)}{r} = cost \ .$$

Sostituiamo $M(r)$ utilizzando l'equazione (7), ottenendo

$$\dot{r}^2 - \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}r^2\left(1 + \Delta(r)\right) = 2cost \ , \tag{8}$$

dove il parametro r ha le dimensioni di una lunghezza. Un caso particolare è quello in cui $\Delta = 0$ e $cost = 0$, nel quale si trova

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{9}$$

definita come *densità* critica, dove

$$H = \dot{a}/a = \dot{r}/r \ . \tag{10}$$

Definiamo ora il parametro

$$\Omega_m := \frac{\bar{\rho}}{\rho_c} \ , \tag{11}$$

che di fatto "mette a confronto" la densità media della perturbazione $\bar{\rho}$ con la densità *critica* dell'Universo, mentre la densità di background dell'Universo ρ è, in generale, un parametro diverso da questi. Sostituendo ora quanto ricavato nelle equazioni (9), (10), (11) nell'equazione (7), quella della distribuzione di massa, si ottiene

$$\dot{r}^2 - \Omega_m H^2 r^2\left(1 + (\Delta(r)\right) = 2cost \ . \tag{12}$$

Ora vogliamo determinare la velocità iniziale (si userà il pedice i per le quantità "iniziali") totale della nostra perturbazione, che è la somma di due contributi: il *flusso di Hubble* $\dot{r} = H_i r_i$, che è dovuto all'espansione dell'Universo, e la velocità peculiare, ossia la velocità della perturbazione rispetto a quella dell'Universo. Quest'ultima all'istante iniziale è certamente piccola, e possiamo pertanto utilizzare l'approssimazione lineare dell'equazione (5). Omettendo la dipendenza dal tempo si ottiene

$$\dot{r}_i \cong r_i H_i - \frac{1}{3}f_i H_i r_i \Delta_i(r_i) \ .$$

L'equazione (12) rappresenta una quantità costante, e possiamo quindi specializzarla all'istante che vogliamo e in particolare a quello iniziale, sostituendo l'espressione per $\dot{r_i}$ appena ricavata. Si ottiene

$$(r_i H_i)^2 \left(1 - \frac{1}{3} f_i \Delta_i\right)^2 - (r_i H_i)^2 (1 + \Delta_i) \Omega_i = 2cost\,,$$

e tenendo solo il primo ordine del quadrato del binomio presente, si ottiene

$$(r_i H_i)^2 \left(1 - \frac{2}{3} f_i \Delta_i\right) - (r_i H_i)^2 (1 + \Delta_i) \Omega_i = 2cost\,.$$

Si definiscono ora due parametri

$$\alpha_i := -\frac{2}{3} f(t_i) \Delta_i \quad \text{e} \quad 1 + \Delta_{ci} := \Omega_i (1 + \Delta_i)\,. \tag{13}$$

Sostituendo questi nell'equazione ancora precedente, si ottiene:

$$(r_i H_i)^2 (1 + \alpha_i) - (r_i H_i)^2 (1 + \Delta_{ci}) = 2cost\,,$$

da cui

$$2cost = (r_i H_i)^2 (\alpha_i - \Delta_{ci})\ .$$

Sostituendo questo valore nella (12) si ha

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2} = \frac{(r_i H_i)^2 (\alpha_i - \Delta_{ci})}{r^2} + \Omega_m H^2 (1 + (\Delta(r))\ . \tag{14}$$

Torniamo ora all'equazione (7). Per la conservazione della massa, vale che $M_i(r) = M(r)$, da cui, sfruttando proprio l'equazione (7), si ottiene

$$1 + \Delta(r) = \frac{r_i^3}{r^3} (1 + \Delta_i) \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}}\,, \tag{15}$$

e sostituendo questo valore nella (14) e sfruttando la seconda delle (13), si ottiene

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2} = \frac{(r_i H_i)^2 (\alpha_i - \Delta_{ci})}{r^2} + (\Delta_{ci} + 1) \left(\frac{r_i}{r}\right)^3 \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}} H^2 \frac{\Omega_m}{\Omega_i}\ .$$

Sfruttando ora la (9) e la (11), così come sono, e specializzandole all'istante iniziale, possiamo scrivere

$$\frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}} = \frac{\rho_{ci} \Omega_i}{\rho_c \Omega_m} H^2 = \frac{H_i^2}{H^2} \frac{\Omega_i}{\Omega_m} H^2\,,$$

e sostituendo quanto appena trovato nella formula ancora precedente si ottiene

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2} = H_i^2 \left(\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 (\alpha_i - \Delta_{ci}) + \left(\frac{r_i}{r}\right)^3 (1 + \Delta_{ci})\right)\ . \tag{16}$$

Dal momento che abbiamo assunto che la perturbazione abbia una simmetria sferica, si ha un solo grado di libertà spaziale, e possiamo pensare la nostra perturbazione come costituita da delle *shell*, che si trovano a distanza r dal centro, e l'equazione appena ricavata è l'equazione del moto di tali shell. L'evoluzione di una regione sferica sotto/sovradensa è univocamente detereminata dalla sotto/sovradensità iniziale nel raggio iniziale r_i. Sono quindi i valori dei parametri α_i e Δ_{ci} a determinare se la perturbazione smetterà di espandersi o no. In particolare vale che

$\Delta_{ci} > \alpha_i$ shell chiusa
$\Delta_{ci} < \alpha_i$ shell aperta
$\Delta_{ci} = \alpha_i$ shell critica.

Soluzione dell'equazione La soluzione dell'equazione (16) può essere scritta in forma parametrica come segue:

$$\begin{cases} \frac{r(\Theta)}{r_i} = \frac{1}{2}\frac{1+\Delta_{ci}}{\alpha_i-\Delta_{ci}}\left(\cosh\Theta-1\right) \\ t\left(\Theta\right) = \frac{1}{2}\frac{1+\Delta_{ci}}{\left(\alpha_i-\Delta_{ci}\right)^{3/2}}\left(\sinh\Theta-\Theta\right) \end{cases} \quad \text{per} \quad \Delta_{ci} < \alpha_i \ \ \text{(shell aperta)}$$

$$\begin{cases} \frac{r(\Theta)}{r_i} = \frac{1}{2}\frac{1+\Delta_{ci}}{\Delta_{ci}-\alpha_i}\left(1-\cos\Theta\right) \\ t\left(\Theta\right) = \frac{1}{2}\frac{1+\Delta_{ci}}{\left(\Delta_{ci}-\alpha_i\right)^{3/2}}\left(\Theta-\sin\Theta\right) \end{cases} \quad \text{per} \quad \Delta_{ci} > \alpha_i \ \ \text{(shell chiusa)}$$

dove Θ è un parametro adimensionale che è stato definito come segue: $d\Theta = \frac{r_i}{r}\sqrt{\frac{5}{3}\Delta_i}H_i dt$. Ci specializziamo ora al caso in cui $\Omega_i = \Omega_m = 1$, che rappresenta il caso di un Universo di Einstein-de Sitter. Il valore scelto è un valore molto particolare, in quanto se $\Omega = 1$ ad un certo istante, allora $\Omega = 1$ a tutti gli istanti, ed è un valore che permette di semplificare notevolmente il seguito della trattazione. Ci poniamo poi nella valida approssimazione in cui $f\left(\Omega\right) \approx \Omega^{0.55}$ dove $f\left(\Omega\right)$ è quella che compare nella definizione di α. In questa casistica, l'equazione (16) può essere riscritta come segue:

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2} = H_i^2\left(\left(\frac{r_i}{r}\right)^3\left(1+\Delta_i\right) - \frac{5}{3}\Delta_i\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right) , \tag{17}$$

e le sue soluzioni sono:

$$\frac{r}{r_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\Delta_i\right)^{-1}\left(1-\cos\Theta\right) \tag{18}$$

$$H_i t = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\Delta_i\right)^{-3/2}\left(\Theta-\sin\Theta\right) \tag{19}$$

per il caso della shell chiusa $\Delta_i > 0$. Nel caso di una shell aperta, $\Delta_i < 0$, Θ diventa immaginario, e le soluzioni sono pertanto:

$$\frac{r}{r_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}|\Delta_i|\right)^{-1}\left(\cosh\Theta-1\right) \tag{20}$$

$$H_i t = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}|\Delta_i|\right)^{-3/2}\left(\sinh\Theta-\Theta\right) . \tag{21}$$

Si analizzano ora queste soluzioni sia nel caso della sovradensità che nel caso della sottodensità, con l'obiettivo di trovare i due valori di soglia di sovra/sottodensità, uno per ciascun caso, che se toccati a livello lineare dalla perturbazione, indicano in realtà la formazione di un ammasso virializzato o di un vuoto (isolato), rispettivamente, a quell'epoca. La trattazione nel caso delle regioni sovradense non è svolta per pura completezza: un'analisi completa dell'evoluzione dei vuoti, infatti, richiederà l'utilizzo di entrambi i valori di soglia.

1.2.1 Sovradensità: il turnaround

Una perturbazione sovradensa è caratterizzata per definizione da $\Delta_i > 0$, e caratterizzata dalle soluzioni parametriche (18) e (19). Il moto di una shell sovradensa è il seguente: questa si espande sino a raggiungere un punto detto di *turnaround*, e poi si contrae fino a virializzare [2]. La condizione perchè avvenga il turnaround è che la velocità si annulli,

ossia che $\dot{r} = 0$. Vediamo che accade a questo preciso momento.
Dalla condizione di turnaround, l'equazione (17) porge subito:

$$1 + \Delta_i = \frac{5}{3}\Delta_i \frac{r}{r_i} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\Theta_{ta}\right) \,,$$

e per contrasti di densità piccoli, $\Delta_i \ll 1$, il parametro di turnaround risulta essere $\Theta_{ta} \approx \pi$.
Sfruttando ora l'equazione (15) e la terza legge di Friedmann [1] otteniamo

$$1 + \Delta = (1 + \Delta_i)\left(\frac{r}{r_i}\right)^{-3}\left(\frac{a}{a_i}\right)^{3} \,. \tag{22}$$

Sfruttando ora la prima soluzione parametrica (18) e la soluzione delle equazioni di Friedmann per un Universo di Einstein-de Sitter[2] otteniamo

$$1 + \Delta = (1 + \Delta_i)\,\frac{\left(\frac{3}{2}H_i t\right)^2}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\Delta_i\right)^{-1}(1 - \cos\Theta)\right]^3} \,.$$

Sfruttando ora la soluzione parametrica per il tempo (19) e sostituendola nell'equazione appena ricavata, si ottiene

$$1 + \Delta = (1 + \Delta_i)\,\frac{9\,(\Theta - \sin\Theta)^2}{2\,(1 - \cos\Theta)^3} \,, \tag{23}$$

che specializzata per il parametro di turnaround $\Theta_{ta} = \pi$, porge il valore per la densità al *turnaround*:

$$1 + \Delta_{ta} = (1 + \Delta_i)\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 \simeq 5.552 \,. \tag{24}$$

Ricordando l'equazione (22) si vede poi che, al turnaround, il raggio comovente della perturbazione si è *ristretto* di un fattore $(1 + \Delta_{ta})^{1/3} \simeq 1.771$.

È ora che utilizziamo la teoria lineare, espandendo l'equazione (23) al primo ordine

$$1 + \Delta \simeq (1 + \Delta_i)\left(1 + \frac{3}{20}\Theta^2\right) \,,$$

e sviluppando anche l'equazione (19)[3]

$$H_i t \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\Delta_i\right)^{-3/2}\frac{\Theta^3}{6} \,;$$

da queste due si ottiene la seguente:

$$1 + \Delta \simeq (1 + \Delta_i)\left[1 + \Delta_i\left(\frac{3}{2}H_i t\right)^{2/3}\right] \,. \tag{25}$$

Ora, semplicemente sostituendo il parametro di turnaround $\Theta_{ta} = \pi$ nell'equazione (19), otteniamo l'istante di turnaround $t_{ta} = \frac{1}{2H_i}\left(\frac{5}{3}\Delta_i\right)^{-3/2}$, che sostituito nell'equazione (25) porge:

$$1 + \Delta_{ta} \simeq (1 + \Delta_i)\left[1 + \frac{3}{5}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3}\right] \simeq 1 + 1.062 \,, \tag{26}$$

[1] La terza equazione di Friedmann, nella sua forma semplice (quella in cui la pressione è nulla), è scritta nella forma seguente: $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}$, dove a è il fattore di espansione. Integrandola tra un istante iniziale t_i ed un generico istante t, si ottiene: $\rho\,(t) = \rho_i\left(\frac{a(t)}{a_i}\right)^{-3}$

[2] Per un Universo di Einstein-de Sitter vale che $\left(\frac{a}{a_i}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}H_i t\right)^2$, con questa convenzione sull'inizio dei tempi

[3] Sarebbe errato, ora, sostituire subito il parametro di turnaround $\Theta_{ta} = \pi$, che funziona per la teoria non lineare. Bisogna infatti sfruttare l'equazione (19) per ottenere *esattamente* l'istante di turnaround ed usare uno sviluppo di questo. Discorso identico varrà poi per le regioni sottodense.

dove il valore $\delta_{ta} = 1.062$ è la soglia lineare di densità per il turnaround. Veniamo ora al collasso. Quello che avverrebbe idealmente è che dopo il turnaround le shell compiano un moto di contrazione che terminerebbe, idealmente, con un collasso a $r = 0$, il quale implica, dall'equazione (18), che il parametro di collasso è $\Theta_c = 2\pi$. Si assume poi che l'istante del collasso sia semplicemente pari al doppio dell'istante di turnaround: $t_c = 2t_{ta}$. Nella realtà il collasso non avviene: per questi valori dei parametri, ossia quando, in base al modello, avverrebbe il collasso, avviene la *virializzazione*: viene a formarsi una struttura cosmica in equilibrio. All'istante del collasso l'equazione (25) della teoria lineare porge

$$1 + \Delta_c \simeq (1 + \Delta_i) \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{6\pi}{4} \right)^{2/3} \right] \simeq 1 + 1.686 \, ,$$

dove $\delta_c = 1.686$ è la soglia di densità lineare per il collasso. Il suo significato è il seguente: quando una perturbazione di densità che interessi un certo volume sferico, venendo evoluta linearmente, raggiunge una densità pari a quel valore, in realtà tale volume è collassato su sè stesso, formando un oggetto virializzato. La questione, in realtà, è più complicata di così per via del problema del *cloud-in-cloud*, e si parlerà di questo nella sezione §(3).

1.2.2 Sottodensità: lo shell crossing

Consideriamo ora, invece, le perturbazioni di densità sottodense $\Delta_i < 0$, caratterizzate dalle soluzioni parametriche (20) e (21). L'evoluzione di queste regioni è ben diversa dalle precedenti: queste non raggiungono mai il turnaround (se si prova ad imporre come prima $\dot{r} = 0$ si trova che l'unica soluzione è $\Theta = 0$, che corrisponde però all'istante iniziale del moto $t = 0$), e continuano ad espandersi per sempre, a meno che, su una qualche scala più grande [1], si trovi $\Delta_i > 0$. Il momento in cui delle shell di differente raggio iniziale r_i si attraversano segna uno stadio di non linearità che può essere interpretato come la formazione di un vuoto [2]. La nostra condizione di shell crossing è dunque l'annullarsi della distanza tra le shell ad un certo istante di tempo, ossia: $dr = dt = 0$. Deriviamo quindi le equazioni (20) e (21) delle nostre soluzioni parametriche, ottenendo

$$dr = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} |\Delta_i| \right)^{-1} \left[(\cosh \Theta - 1) \left(dr_i - r_i \frac{d\Delta_i}{\Delta_i} \right) + r_i \sinh \Theta d\Theta \right]$$

e

$$dt = \frac{1}{2H_i} \left(\frac{5}{3} |\Delta_i| \right)^{-3/2} \left[(\cosh \Theta - 1) \, d\Theta - \frac{3}{2} (\sinh \Theta - \Theta) \frac{d\Delta_i}{\Delta_i} \right] = 0 \, .$$

Imponendo la condizione $dt = 0$ otteniamo

$$d\Theta = \frac{3 (\sinh \Theta - \Theta)}{2 (\cosh \Theta - 1)} \frac{d\Delta_i}{\Delta_i} \, ,$$

e imponendo poi l'altra condizione $dr = 0$ e sostituendo il valore di $d\Theta$ appena trovato, si ottiene

$$(\cosh \Theta - 1) \left(dr_i - r_i \frac{d\Delta_i}{\Delta_i} \right) + r_i \sinh \Theta \frac{3 (\sinh \Theta - \Theta)}{2 (\cosh \Theta - 1)} = 0 \, ,$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d \ln \Delta_i}{d \ln r_i} \left[1 - \frac{3 \sinh \Theta (\sinh \Theta - \Theta)}{2 (\cosh \Theta - 1)^2} \right] = 1 \, . \tag{27}$$

Ricordiamo ora che l'espressione del contrasto di densità nel caso di una perturbazione a simmetria sferica è stata ricavata nell'equazione (6); derivandola, otteniamo che

$$\frac{d \ln \Delta}{d \ln r} = 3 \left(\frac{\delta (r)}{\Delta (r)} - 1 \right) \, .$$

Ci specializziamo ora nel caso di una profilo di densità a *top hat rovesciato* , ossia

$$\delta_i\,(r_i) = \begin{cases} \delta_0 & \text{per} \quad r_i < r_0 \\ 0 & \text{per} \quad r_i \geq r_0 \end{cases}, \quad \text{ossia} \quad \Delta_i\,(r_i) = \begin{cases} \delta_0 & \text{per} \quad r_i < r_0 \\ \delta_0\,(r_0/r_i)^3 & \text{per} \quad r_i \geq r_0 \end{cases}$$

con contrasto di densità $\delta_0 < 0$. Utilizzando questi risultati si ottiene subito

$$\frac{d \ln \Delta_i}{d \ln r_i} = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad r_i < r_0 \\ -3 & \text{per} \quad r_i \geq r_0\,. \end{cases}$$

Uguagliamo quindi questo valore a quello dell'equazione (27): nel caso $r_i < r_0$ otteniamo solo la soluzione banale $\Theta = 0$, mentre nel caso $r_i \geq r_0$ si ottiene l'equazione

$$\frac{\sinh \Theta\,(\sinh \Theta - \Theta)}{(\cosh \Theta - 1)^2} = \frac{8}{9}$$

che possiamo risolvere, ottenendo il parametro di shell crossing $\Theta_{sc} \simeq 3.488$. Vediamo ora cosa accade nella teoria lineare. Ricordiamo che le soluzioni parametriche di r e t in funzione di Θ hanno la stessa forma per regioni sovradense e sottodense, e pertanto con passaggi identici a quelli visti nel paragrafo precedente, si arriva qui ad un'equazione del tutto analoga alla (23):

$$1 + \Delta = (1 + \Delta_i)\,\frac{9\,(\sinh \Theta - \Theta)^2}{2\,(\cosh \Theta - 1)^3}\,,$$

che specializzata per il parametro di shell crossing $\Theta_{sc} = 3.488$ porge il valore per la densità al momento dello shell crossing

$$1 + \Delta_{sc} \simeq 0.2047\,.$$

Ricordando di nuovo la (22), si trova che al momento dello shell crossing il raggio comovente si è *espanso* di un fattore $(1 + \Delta_{sc}^{-1/3}) \simeq 1.697$.

Poi, in totale analogia con l'equazione (25), qui abbiamo che

$$1 + \Delta \simeq (1 + \Delta_i) \left[1 - |\Delta_i| \left(\frac{3}{2} H_i t \right)^{2/3} \right]\,.$$

Invertendo l'equazione (21), troviamo che

$$\left(\frac{3}{2} H_i t \right)^{2/3} = \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{5}{3} |\Delta_i| \right)^{-1} (\sinh \Theta - \Theta)^{2/3}\,,$$

ed inserendo questa espressione nell'equazione ancora precedente, e specializzandosi a $\Theta_{sc} = 3.488$ otteniamo

$$1 + \Delta_{sc} \simeq (1 + \Delta_i) \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} (\sinh \Theta_{sc} - \Theta_{sc})^{2/3} \right] \simeq 1 - 2.717\,.$$

Il valore $\delta_v = -2.717$ è noto come la densità di soglia lineare per la formazione di un vuoto. Questo è un valore di densità negativo che non ha un significato fisico, ma ha un significato analogo a quello del valore $\delta_c = 1.686$ per le sovradensità: quando la densità della perturbazione relativa ad un certo volume sferico, evoluta linearmente, raggiunge il valore δ_v, allora nella realtà si è formato un vuoto. Dal momento della sua formazione in poi, il vuoto continua ad espandersi (idealmente, per sempre), e la sua evoluzione può essere descritta nei termini di una shell che si espande in modo *auto-similare* [2]

2 L'evoluzione dei vuoti

2.1 Evoluzione di un vuoto isolato

Riprendiamo, innanzitutto, le ipotesi utilizzate nella sezione precedente per descrivere l'evoluzione di una perturbazione di densità sottodensa, e ne specifichiamo altre [3].

Fisica Newtoniana. L'approssimazione della fisica non relativistica vale in quanto si è interessati a scale molto inferiori della dimensione dell'orizzonte.

$\Omega = 1$. Ci si pone in un Universo di Einstein-de Sitter principalmente per trattabilità matematica. Questo, però, ha un'importante conseguenza, ossia la presenza di soluzioni *autosimilari* (dopo lo shell crossing), da cui automaticamente l'assenza di una scala dei tempi caratteristica.

Mezzo cosmologico *collisionless*. Ciò significa che la sezione d'urto di interazione tra le particelle è così bassa che non ha effetti significativi sul sistema. Sono state trattate le soluzioni anche nel caso *collisional* e nel caso di una mistura dei due tipi (Bertschinger, 1985), ma qui ci limeteremo al primo caso, la cui caratteristica fondamentale è la presenza del fenomeno dello *shell crossing*, che non avviene altrimenti (a causa della dissipazione di energia cinetica dovuta agli urti).

È dunque lo shell crossing che definisce la formazione di un vuoto, e l'istante cui avviene dipende da tre fattori: dal parametro di densità Ω, dal deficit di densità iniziale Δ_i e dalla forma particolare, o meglio dalla ripidità, del profilo di densità [2]. Addirittura, se il profilo di densità non è sufficientemente ripido, lo shell crossing non avviene mai [2]. Approfondiamo questo aspetto nel caso del profilo di densità a top-hat. Nella sottosezione §(1.2.2) abbiamo visto che l'equazione del moto assume la forma data dalla (27), che, definendo come segue una funzione $g\left(\Theta\right)$, può essere scritta come

$$g\left(\Theta\right) = \frac{3 \sinh\Theta\left(\sinh\Theta - \Theta\right)}{2\left(\cosh\Theta - 1\right)^2} = -\frac{1}{\frac{d\ln\Delta_i}{d\ln r_i}} \, .$$

Tuttavia si nota che $g\left(\Theta\right)$ è limitata sia inferiormente che superiormente, in particolare

$$1 < -\frac{1}{\frac{d\ln\Delta_i}{d\ln r_i}} + 1 < \frac{3}{2} \, ,$$

il che implica

$$\frac{d\ln\Delta_i}{d\ln r_i} < -2 \, .$$

Tale valore indica di fatto la profondità del top-hat; nel caso di esempio della sezione §(1.2.2) si aveva $\frac{d\ln\Delta_i}{d\ln r_i} = -3$ per $r_i \geq r_0$, rispettando quindi la condizione. Dal momento dello shell crossing, le prime shell ad attraversarsi sono quelle più interne, e solo successivamente le altre. L'accelerazione peculiare diretta verso l'esterno è direttamente proporzionale al deficit di densità $|\Delta\left(r,t\right)|$, e pertanto decresce con il raggio: le shell interne si espandono con un rate di espansione maggiore, e sono dunque più rapide [2]. Per un profilo di densità a top-hat di raggio r_0, lo shell crossing avviene per primo per la shell al confine della perturbazione $r_i = r_0$, dal momento che ha il valore maggiore di $|\Delta\left(r,t\right)|$ per $r_i \geq r_0$.

Vediamo ora, assunte queste ipotesi, quali sono le fasi di evoluzione della perturbazione sottodensa (riadattate da Sheth & van de Weygaert) [2]:

1. *Espansione:* Al contrario di quanto accade per le regioni sovradense, che collassano.
2. *Fuoriuscita:* Con l'espandersi della regione sottodensa, la sua densità decresce, principalmente a causa di una redistribuzione della massa sul volume in espansione.

3. *Forma sferica:* Con l'espansione, la regione assume una forma sempre più vicina a quella sferica.

4. *Profilo di densità a top-hat.*

5. *Campo di velocità "super Hubble".*

6. *Soppressione delle inomogeneità all'interno.*

7. *Anello al contorno:* La materia, dall'interno, si accumula vicino al confine della regione sottodensa, formando un anello ad altà densità.

8. *Shell crossing:* Le shell interne oltrepassano quelle esterne: si ha uno stadio di non linearità.

Blumenthal (1992) ha sostenuto che i vuoti osservati nella distribuzione delle galassie dovrebbero essere identificati come sottodensità primordiali che hanno appena raggiunto lo shell crossing [2]. È da questo momento, pertanto, che possiamo parlare a pieno diritto di vuoto e non di regione sottodensa. Dal momento dello shell crossing, l'evoluzione del vuoto può essere descritta nei termini di una shell che si espande verso l'esterno in modo auto-similare [2]. La figura (2) mostra alcune delle caratteristiche elencate per l'evoluzione di un vuoto isolato [2]. Il pannello a sinistra mostra l'evoluzione di un profilo di densità perfettamente a top-hat: si notano l'espansione della regione sottodensa, la diminuzione di densità, la formazione dell'anello al bordo della regione. Il pannello a destra, invece, mostra l'evoluzione di un vuoto la cui configurazione iniziale è più rappresentativa delle condizioni cosmologiche [2]. Si possono notare, qualitativamente, le stesse caratteristiche del caso precedente, e si può vedere inoltre come con l'evoluzione il profilo di densità tenda verso il profilo a top-hat.

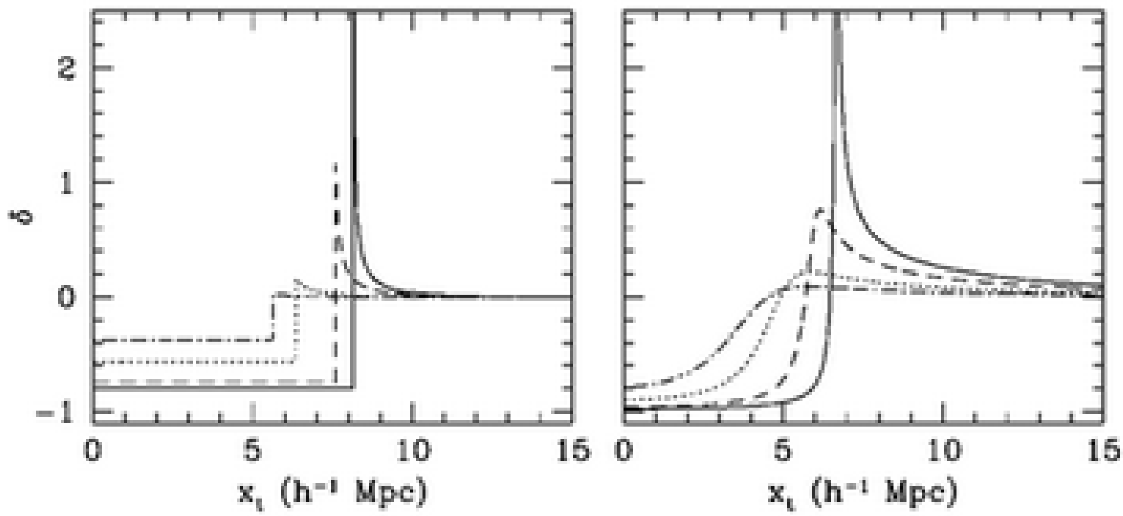

Figura 2: Modello sferico per l'evoluzione di un vuoto.

Uscendo dal caso specifico del profilo a top-hat infatti, Suto et al. (1984), Filmore & Goldreich (1984), e Bertschinger (1985), hanno mostrato che il vuoto sviluppa un anello ad altà densità che si espande [5]. Per una perturbazione sferica poi, si è mostrato , risolvendo numericamente l'equazione (8), che l'anello si forma proprio al confine del vuoto, e che evolve auto-similmente [5].

2.2 Effetti della struttura a grande scala: la gerarchia dei vuoti

Abbiamo parlato della virializzazione delle regioni sovradense ed abbiamo analizzato la dinamica delle regioni sottodense. Questo tuttavia, su grande scala, non è più sufficiente:

l'Universo evolve secondo schemi più complessi. Il nostro obiettivo è quello di contare il numero di vuoti in una regione in cui è presente un campo di perturbazioni di densità, e tale conteggio è seriamente influenzato da due effetti, entrambi legati, appunto, dall'incorporamento gerarchico in un ambiente su grande scala [2]. Al momento, sappiamo che le regioni sovradense si contraggono e virializzano, mentre quelle sottodense si espandono: ciò che risulta è una dinamica in cui la materia si accumula in regioni sempre più piccole - fogli, filamenti e ammassi - la cui disposizione spaziale è dettata dall'espansione delle regioni sottodense, come si può vedere in figura 3 [2].

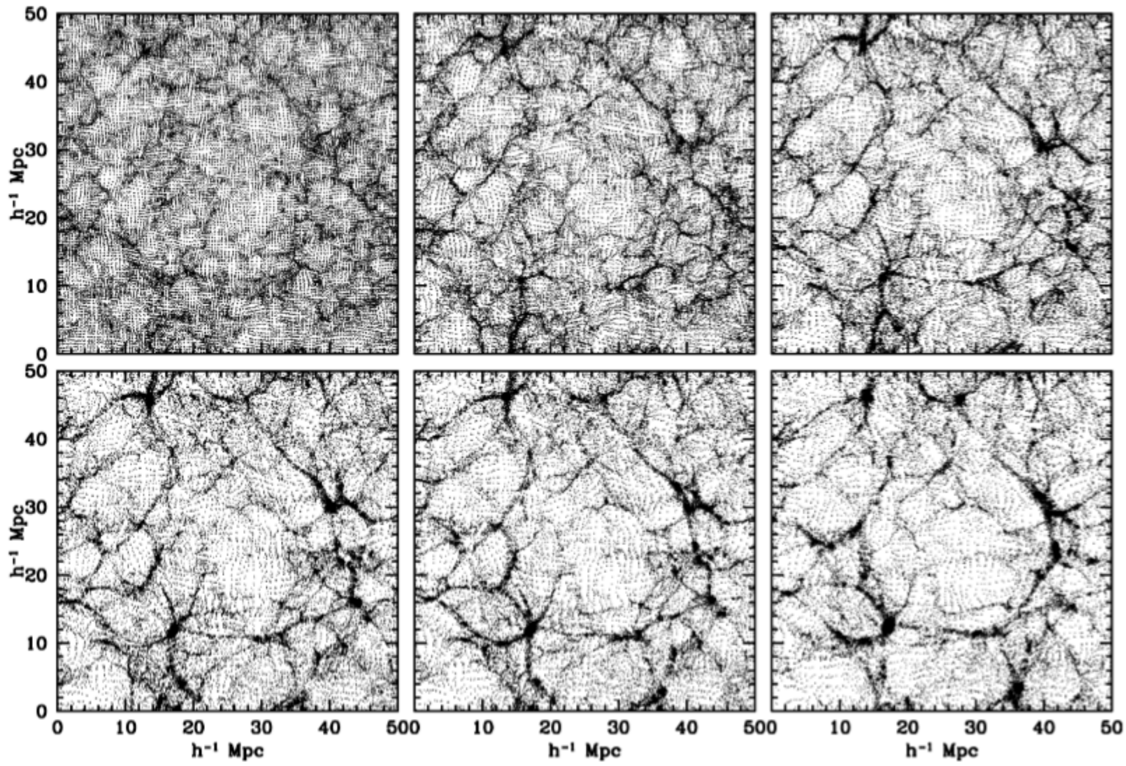

Figura 3: Sei step temporali nell'evoluzione di un vuoto, dal pannello in alto a sinistra fino a quello in basso a destra, in una simulazione a N corpi di 128^3 elementi in un modello SCDM. È poi possibile vedere come nel grande vuoto centrale vi siano altri piccoli vuoti, che vanno via via unendosi e quindi sparendo: è questo il problema void-in void [2]

.

I due effetti di cui sopra sono l'effetto *void-in-void* e l'effetto *void-in cloud*. Partiamo con l'esaminare il primo, seguendo la spiegazione del problema di Sheth & van de Weygaert [2]. Consideriamo una piccola regione che sia meno densa della densità critica δ_v: oggi noi vorremmo identificare tale regione come un vuoto. Tuttavia, tale regione potrebbe trovarsi all'interno di una regione sottodensa più grande, anch'essa di densità inferiore alla densità critica δ_v: noi vorremmo identificare anche questa regione come un vuoto. Pertanto, dal momento che piccoli vuoti possono coesistere all'interno di un vuoto più grande, noi non dobbiamo conatare tutti questi come oggetti distinti, o sovrastimerremmo il numero di piccoli vuoti [2]. Tale problema è del tutto analogo al problema del *cloud-in-cloud*: il numero di ammassi virializzati è sovrastimato se li si conta utilizzando la densità numerica di picchi sovradensi iniziale [2]. Il problema del void-in-cloud invece, è molto particolare, e segna una dissimetria tra le popolazioni di vuoti e di aloni. Se un minimo (di densità) su piccola scala è incorporato in un massimo sufficientemente alto su grande scala, allora il collasso della regione sovradensa potrebbe schiacciare la regione sottodensa, che dunque non deve più essere contata come un vuoto. La figura (4) mostra tre esempi di questo processo, ricavati con delle simulazioni a N corpi (in un modello SCDM) [2].

Al contrario, non è plausibile che gli aloni circondati da vuoti siano distrutti, dal momento

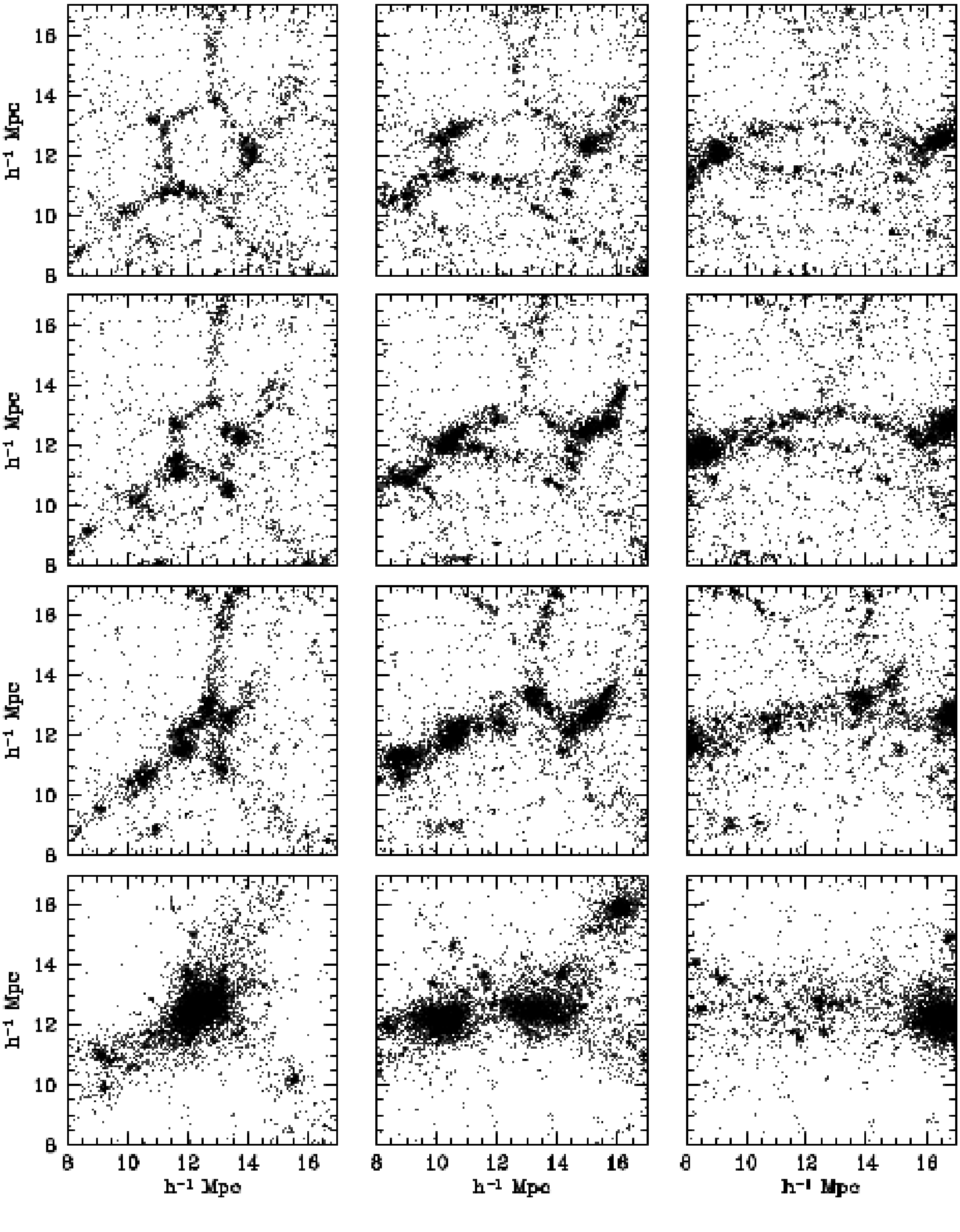

Figura 4: Tre esempi (disposti in colonna) del processo del void-in-cloud.

che i vuoti si espandono attorno ad essi. Quello che sarebbe quindi il problema del *cloud-in-void* è irrilevante per la formazione degli aloni, ed è questo fatto che crea un'assimetria tra l'evoluzione delle regioni sottodense e l'evoluzione delle regioni sovradense [2].

3 La formazione gerarchica delle strutture cosmiche

3.1 Il campo di densità e lo spettro di potenza

Abbiamo visto, dunque, come evolve un vuoto isolato, e quali sono le complicazioni derivanti dagli effetti su grande scala. Il punto ora, nonchè il cuore della questione, è riuscire a calcolare il numero di oggetti non lineari, ossia aloni e vuoti, nel campo di densità $\rho(\vec{x}, t)$ a t fissato, e ciò viene fatto mediante l'*excursion set formalism* [1]. Nella cosmologia moderna si ritiene che le perturbazioni di densità abbiano avuto origine da minuscole fluttuazioni quantistiche del vuoto, poi cresciute in ampiezza grazie al fenomeno dell'instabilità gravitazionale. Tale origine inflazionaria permette di sostenere con ottima approssiamzione che tali perturbazioni formino un campo random quasi-Gaussiano. Ciò è notevole, in quanto i campi Gaussiani sono interamente descritti a livello statistico se ne conosciamo la media, $\langle\delta\rangle = 0$ e la covarianza $\xi(r) := \langle\delta(\vec{x})\,\delta(\vec{x}+\vec{r})\rangle$, detta anche *funzione di correlazione a due punti*. La simmetria per traslazioni e rotazioni dello spazio tridimensionale della metrica di Robertson- Walker implica che il campo random $\delta(\vec{x})$ sia statisticamente omogeneo ed isotropo, il che comporta alcune notevoli assunzioni semplificative, quali il fatto che il valor medio del campo sia indipendente dalla posizione (nel nostro caso il valor medio di δ è nullo) e che la funzione di correlazione del campo random tra due punti x_1 e x_2 , dipenda solo dal modulo della distanza tra i due punti: $r := |\vec{x_2} - \vec{x_1}|$. Seguendo ora i passaggi di Hamaus [1], deriviamo alcune importanti proprietà del campo random, per poi definire lo spettro di potenza. La trasformata di Fourier del contrasto di densità è semplicemente data da

$$\delta(\vec{k}) = \int \delta(\vec{x}) \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}) d^3x$$

con $\delta^*(\vec{k}) = \delta(-\vec{k})$. Possiamo poi definire una quantità simile nello spazio di Fourier:

$$\langle\delta(\vec{k})\delta(\vec{k'})\rangle = \iint \langle\delta(\vec{x})\delta(\vec{x'})\rangle \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}) \exp(-i\vec{k'}\cdot\vec{x'}) d^3x d^3x' \,,$$

e scegliendo $\vec{x'} = \vec{x} + \vec{r}$ questa diventa

$$\langle\delta(\vec{k})\delta(\vec{k'})\rangle = \iint \langle\delta(\vec{x})\delta(\vec{x}+\vec{r})\rangle \exp((-i\vec{k}+\vec{k'})\cdot\vec{x}) \exp(-i\vec{k'}\cdot\vec{r}) d^3x d^3r \,,$$

e ricordando la definizione della funzione di correlazione due punti si ha

$$\int \xi(r) \exp(-i\vec{k'}\cdot\vec{r}) d^3r \int \exp((-i\vec{k}+\vec{k'})\cdot\vec{x}) d^3x \equiv P(\vec{k'})(2\pi)^3 \delta_D(\vec{k}+\vec{k'}) \,,$$

e l'ultima equazione definisce proprio lo *spettro di potenza* come la trasformata di Fourier della funzione di correlazione due punti:

$$P(k) = \int \xi(r) \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r}) d^3r \,,$$

ossia

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}) P(k) \,.$$

Possiamo semplificare l'espressione dello spettro di potenza passando alle coordinate sferiche (k, θ_k, ϕ_k) e sfruttando il fatto che lo spettro di potenza dipende solo dal modulo di $\vec{k}$. Si ottiene

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 P(k) \int_0^\pi d\theta_k \sin^2\theta_k \exp(ikr\cos\theta_k) \int_0^{2\pi} d\phi_k = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 P(k) j_0(kr),$$

dove $j_0(kr) = sin(kr)/kr$ è la funzione sferica di Bessel di ordine zero. Definiamo infine la *varianza del campo di densità* come il valore assunto dalla correlazione ξ nell'origine:

$$\sigma^2 \equiv \xi(0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 P(k) \, .$$

Proseguiamo ora con un'importante assunzione: in cosmologia si assume convenzionalmente che lo spettro di potenza delle perturbazioni di densità lineari sia proporzionale ad una semplice potenza di k. Si ha pertanto $P(k) = Ak^n$, dove n viene detto *indice spettrale* delle perturbazioni (scalari). Sostituendo tale valore nell'integrale che definisce la varianza, otteniamo quindi

$$\sigma^2 \equiv \frac{A}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^{(2+n)} \, .$$

Tale integrale diverge per $k \to \infty$ (divergenza ultravioletta) per $n \geq -3$, mentre diverge per $k \to 0$ (divergenza nell'infrarosso) per $n \leq -3$: occorrerà pertanto regolarizzarlo introducendo un cut-off, ossia applicando un *filtro* $W(\vec{x}, R)$ alle perturbazioni. Si definisce quindi un campo di densità filtrato come segue [1]:

$$\delta_R(\vec{x}) = \int \delta \vec{x}' W_R(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \, ,$$

e che nello spazio di Fourier è:

$$\delta_R(\vec{k}) = W_R(k) \delta(\vec{k}) \, ,$$

dove $W_R(k)$ è la trasformata di Fourier del filtro $W(\vec{x}, R)$.

Un filtro non è altro che una funzione arbitraria in grado di eliminare le divergenze di cui sopra: ha un'utilità matematica necessaria, ma non solo. Il campo random Gaussiano infatti, assegna la densità in ogni punto, ma noi vogliamo occuparci della formazione di strutture cosmiche estese: è proprio il filtro che, in un certo qual modo, definisce la regione di Universo in cui si sta operando, e dunque anche la dimensione dell'eventuale struttura cosmica trovata. Dalla definizione poi, segue subito che la varianza delle perturbazioni di densità filtrate è

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 W^2(k, R) P(k) \, . \tag{28}$$

In questa tesi assumeremo sempre $n > -3$; Hamaus fornisce alcuni esempi dei filtri maggiormente utilizzati, che ora vedremo [1].

Il più comune è il filtro a top-hat nello spazio reale, definito come:

$$W_{TH}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & per \quad |\vec{x}| < R \\ 0 & per \quad |\vec{x}| \geq R \, . \end{cases}$$

Tale filtro è di fatto una regione sferica di raggio R e quindi di volume $V_{TH} = \frac{4\pi R^3}{3}$, ed è normalizzato: $\int W_{TH}(\vec{x}) d^3x = 1$, e la sua trasformata di Fourier è

$$W_{TH}(\vec{k}) = \frac{3}{(kR)^3} [\sin(kR) - kR \cos(kR)] \, . \tag{29}$$

Un altro filtro possibile è il filtro Gaussiano nello spazio reale, definito come

$$W_G(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} R^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2R^2}\right) \, ,$$

che definisce una regione di volume

$$V_G = (2\pi)^{3/2} R^3 \, ,$$

e che nello spazio di Fourier diventa

$$W_G(\vec{k}) = \exp\left(-\frac{k^2R^2}{2}\right) .$$

Ora, se chiamiamo $\bar{\rho}$ la densità media all'interno di un filtro di "raggio" R (il termine raggio, ovviamente, è approppropriato solo per il filtro a top-hat) e di volume V, e chiamiamo δ le fluttuazioni di densità, possiamo associare una massa al nostro filtro: $M = \bar{\rho}V(1+\delta)$ [2]. Se poi le fluttuazioni (iniziali) di densità sono piccole (e questo è proprio il caso dei modelli di una formazione gerarchica delle strutture), vale che $M \simeq \bar{\rho}V$, e c'è pertanto una corrispondenza tra la massa e la scala di filtraggio $M \propto R^3$. Questo suggerisce che se si vogliono studiare oggetti di massa M, occorre studiare il campo iniziale di densità quando è filtrato su una scala spaziale $R \propto M^{1/3}$, dove la costante di proporzionalità dipende dal particolare filtro utilizzato [2].

Analizziamo ora più in dettaglio il filtro a top-hat. Assumendo come detto $P(k) \propto k^n$, dalla (28), e ricordando la trasformata del filtro a top-hat data dalla (29), otteniamo [1]

$$\sigma^2_{TH} \propto \int_0^\infty P(k)W^2_{TH}(k)k^2dk \propto \int_0^{1/R} k^{n+2}dk \propto R^{-(n+3)} ,$$

e poichè per quanto detto $R \propto M^{1/3}$ otteniamo una relazione tra la massa e la varianza del campo di fluttuazioni di densità iniziale [1]

$$\sigma^2_{TH} \propto M^{-\frac{n}{3}-1} . \tag{30}$$

Si vede quindi che fintantochè $n > -3$, σ^2_{TH} è una funzione decrescente di M, il che significa che gli oggetti più piccoli si sono formati da fluttuazioni di densità grandi, e pertanto, in tempi più antichi. Questo costituisce lo *scenario del clustering gerarchico* [1].

3.2 L'excursion set formalism

Nella nostra attuale comprensione le attuali strutture cosmiche osservate si sono formate per la crescita gravitazionale di perturbazioni di densità di piccola ampiezza, nate in un epoca antica ad alto redshift $z \simeq 1000$ [6]. Un approccio analitico al problema della formazione delle strutture è stato sviluppato da Press & Shechter (1974): nelle loro analisi la densità numerica e la massa degli oggetti virializzati sono direttamente dedotte dalla statistica del campo iniziale delle perturbazioni di densità [6]. Il fondamentale lavoro svolto da Press & Shechter presentava tuttavia delle criticità, dovute principalmente al problema del cloud-in-cloud. Bond *et al.* (1991) proposero una soluzione al problema del cloud-in-cloud considerando delle funzioni di massa *"excursion set"* [6]; poi Sheth & van de Weygaert (2004) [2] hanno applicato lo stesso metodo ai vuoti, ed in questa tesi vedremo la trattazione completa.

Inizialmente le fluttuazioni di densità sono piccole: è più difficile che si formino delle (grandi) strutture cosmiche in tempi antichi mentre è più facile per tempi successivi, in quanto queste crescono in ampiezza nel tempo. Assumendo la teoria lineare, il campo filtrato $\delta_R(\vec{x})$ cresce in ampiezza in proporzione col fattore di crescita lineare $D(t)$ che era stato definito nell'equazione (3) [7]. Nella sezione §(1), avevamo ricavato i due valori di soglia lineari δ_c e δ_v per la formazione delle strutture cosmiche sovradense e sottodense, che sono ora utilizzati nell'excursion formalism. Come detto, il campo di densità, e dunque la sua varianza, dipendono dal tempo, ma è più conveniente ragionare in modo differente. Invece che considerare il campo $\delta_R(\vec{x})$ come crescente in ampiezza e le soglie δ_c e δ_v come fissate, consideriamo $\delta_R(\vec{x})$ come fissato in ampiezza, e facciamo variare nel tempo i valori di soglia [7]. Usando quindi la teoria lineare, si estrapola il campo $\delta_R(\vec{x})$ al tempo presente t_0, e si fanno decrescere nel tempo le soglie con il fattore di crescita lineare, ossia

$$\delta_c(t) = \frac{\delta_c}{D(t)} \quad \text{e} \quad |\delta_v(t)| = \frac{|\delta_v|}{D(t)}$$

con $D(0) = 1$ [7]. I valori $\delta_c = 1.686$ e $\delta_v = -2.717$ valgono solo al *presente*, mentre in tempi più antichi sono sempre più, rispettivamente, alto e basso. Questo ha senso: poichè in tempi più antichi le fluttuazioni di densità sono inferiori, è più difficile che si formino delle (grandi) strutture cosmiche: è in questo senso, infatti, che si parla di *gerarchia*.
Vedremo ora nel dettaglio l'*excursion set formalism* seguendo la trattazione di Sheth & van de Weygaert [2]: si descrive innanzitutto il collasso di sovradensità perfettamente sferiche, per poi proseguire con la trattazione generale.
La forma della funzione di massa dipende dal filtro. Il caso più semplice è quello di un filtraggio "sharp k-space", in cui il campo compie un cammino aleatorio (random walk) Browniano al cambiare della risoluzione (il raggio di filtraggio) [7]. La linea frastagliata in figura 5 rappresenta il contrasto di densità (relativo alla densità di background dell'Universo) centrato su una posizione casuale del campo di densità iniziale in funzione della scala cui il contrasto di densità è stato calcolato.

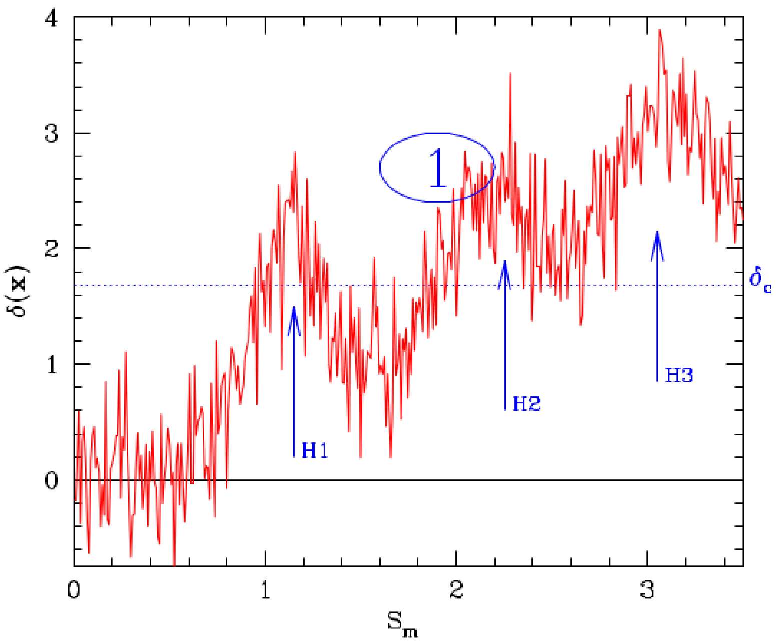

Figura 5: Excursion set formalism per la formazione di un alone. S_m indica la varianza; i volumi maggiori sono sulla sinistra (grande scala, varianza piccola), mentre quelli minori sulla destra (piccola scala, varianza grande) [2].

La scala spaziale è parametrizzata dalla sua varianza S. Come abbiamo mostrato nell'equazione (30) (e per via del fatto che $R \propto M^{(1/3)}$), nei modelli gerarchici la varianza decresce al crescere della scala, pertanto $\delta(S) \to 0$ come $S \to 0$. Nel modello a collasso sferico, tutte le regioni con densità lineare maggiore di δ_c possono aver formato oggetti virializzati, e la densità critica è indipendente dalla scala di massa. L'excursion set formalism suppone poi che nessuna massa può uscire da un oggetto collassato. Pertanto, se $\delta_0 = \delta_c$ alla scala R, allora tutta la massa contenuta in R è inclusa nell'oggetto collassato, anche se, addirittura, $\delta_0 < \delta_c$ per tutti gli $r < R$. Pertanto, se il cammino aleatorio raggiunge il valore δ_c dopo aver percorso una distanza $S(R)$, allora esso rappresenta un oggetto collassato di massa $M \propto R^{1/3}$ [2]. Può poi capitare che un cammino attraversi la soglia δ_c a vari diversi valori di $S(R)$, e ad ogni attraversamento corrisponde una massa diversa, in quanto $M \propto R^3$. Tuttavia , è il *primo attraversamento* ad avere un'importanza cruciale, in quanto è quello

cui corrisponde la massa maggiore. Gli attraversamenti su piccola scala corrispondono alla condensazione di masse più piccole, che però si trovano incorporate in una concentrazione di massa più grande.
Introduciamo ora anche la formazione dei vuoti. In totale analogia con quanto appena visto per gli ammassi, potremmo dire che nel momento in cui il cammino aleatorio scende sotto il valore δ_v dopo aver percorso la distanza $S(R)$, allora rappresenta un vuoto di massa $M \propto R^3$. Tuttavia, come spiegato nella sottosezione §(2.2), dobbiamo essere più cauti, a causa del problema del void-in-cloud. Facciamo ora un'analisi della casistica completa seguendo il ragionamento di Sheth & van de Weygaert [2].

La figura (6) mostra quattro set di pannelli, da leggere da sinistra verso destra. La prima colonna mostra il cammino aleatorio relativo alla distribuzione delle particelle. Le due colonne successive mostrano la distribuzione delle particelle a due istanti successivi.

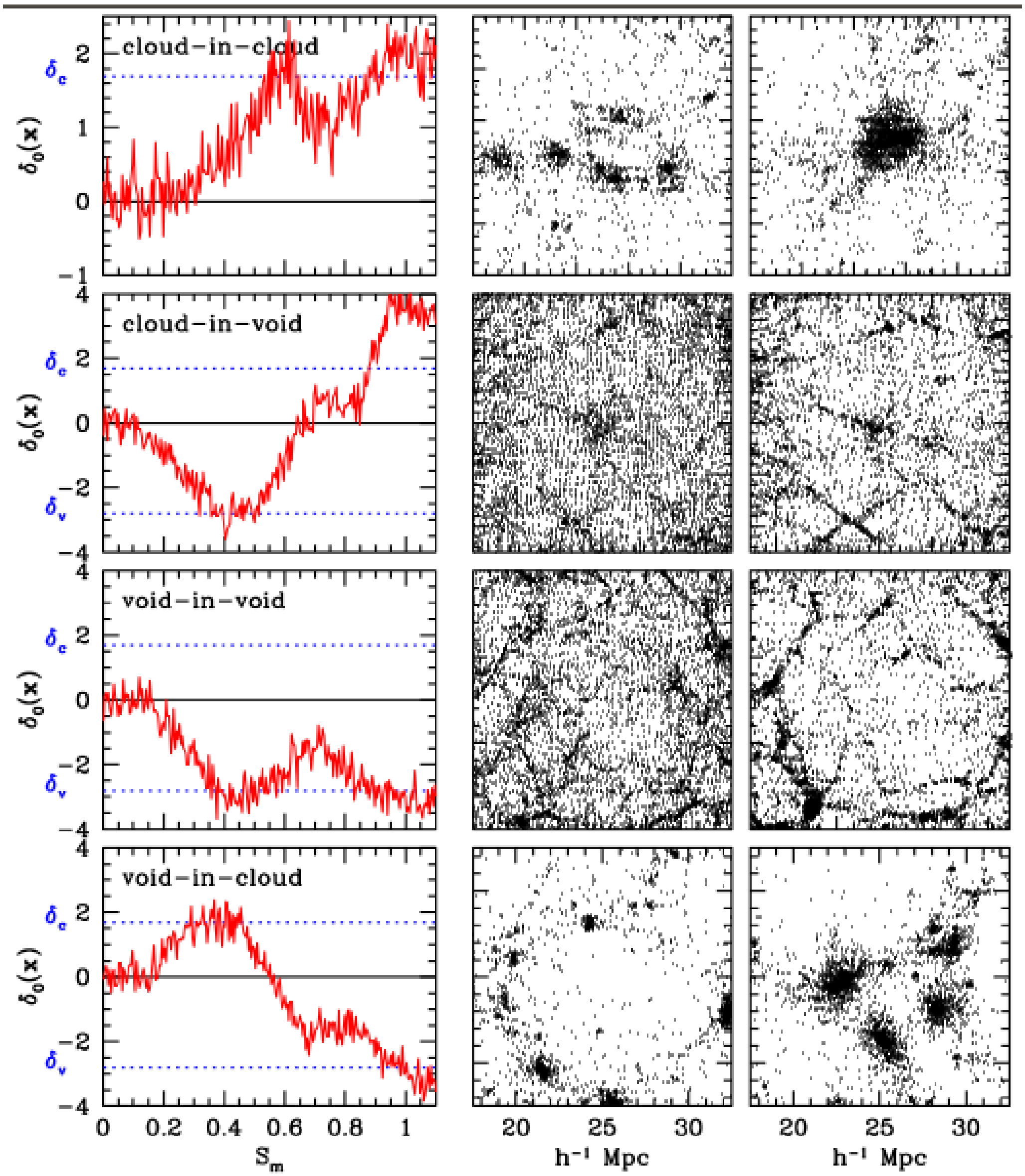

Figura 6: Quattro cammini aleatori con relative distribuzioni di particelle. Ogni riga illustra uno dei processi fondamentali del clustering gerarchico, nell'ordine il processo cloud-in-cloud, cloud-in-void, void-in-void, void-in-cloud. Nei grafici della prima colonna, si ha la perturbazione di densità in funzione della varianza, indicata con S_m. Si trovano poi, tratteggiate, le linee corrispondenti alle due soglie δ_c e δ_v al tempo presente [2].

La prima riga illustra il processo del *cloud-in-cloud*. La massa che costituisce l'oggetto finale (a destra) si ricava trovando che l'attraversamento della barriera δ_c avviene alla va-

rianza $S = 0.55$. Tale massa si è formata dalla fusione di pezzi più piccoli, che si sono formati in tempi più antichi (pannello centrale). In tempi più antichi infatti la barriera si trova ad un valore maggiore $\delta_c/D(t) > \delta_c$, e viene intercettata dal cammino aleatorio a valori di varianza maggiori ($S > 0.55$), cui corrispondono, come spiegato, masse minori.
La seconda riga illustra il processo del *cloud-in-void*. Come si può dedurre dal grafico, qui un ammasso di piccola massa virializza ad un qualche tempo antico ($S > 0.85$). L'ammasso è incorporato in una regione che è *destinata* a diventare un vuoto: si ha infatti un attraversamento della barriera δ_v ad un valore della varianza ben più piccolo. La grande regione vuota attorno ad esso diventa un vuoto vero e proprio solo al presente, istante in cui esso contiene la massa maggiore ($S = 0.4$). Notiamo che l'ammasso contenuto nel vuoto non viene distrutto a causa dell'espansione del vuoto, che anzi aumenta la sua massa da $S > 0.85$ a $S \simeq 0.85$. Per la stima del numero degli ammassi, quindi, la barriera δ_v è irrilevante.
La terza riga illustra invece il processo del *void-in-void*. Il cammino aleatorio associato assomiglia molto al simmetrico del cammino aleatorio relativo al cloud-in-cloud. Esso mostra che il vuoto contiene più massa nel presente ($S \simeq 0.4$) che nel passato ($S > 0.4$). Invece, un cammino aleatorio centrato su uno degli elementi massivi che vanno a costituire i filamenti assomiglierebbe ad un cammino "cloud-in-void", mostrato nella seconda riga.
La quarta riga, infine, mostra il processo del *void-in-cloud*. La distribuzione di particelle mostra un vuoto relativamente grande presente a un tempo antico che viene schiacciato ad una dimensione inferiore, a causa del collasso dell'anello di oggetti che si trova attorno ad esso. Un semplice parallelismo col processo del cloud-in-void porterebbe a contare il vuoto come un oggetto di massa ($S \simeq 1$). Tuttavia questo è evidentemente scorretto: contando anche gli aloni, il cammino aleatorio mostra la formazione di un alone di massa decisamente maggiore ($S \simeq 0.3$) , e non ha assolutamente senso che un ammasso virializzato contenga un vuoto al suo interno. Pertanto, il modello dell'excursion set per i vuoti si sviluppa nel seguente modo: se il cammino attraversa prima δ_c e poi δ_v su una scala più piccola, allora il piccolo vuoto è contenuto in una regione collassante più grande. Dal momento in cui la regione sovradensa collassa, il vuoto non esiste più, e pertanto non deve essere conteggiato. Pertanto, i vuoti veri e propri sono soltanto quelli associati a cammini che *attraversano* δ_v *senza prima aver attraversato* δ_c. La descrizione della gerarchia dei vuoti è pertanto un problema a due barriere. Il problema del void-in-cloud, però, è ancora più complesso. Nella sottosezione §(2.1), abbiamo identificato un vuoto con il momento dello shell crossing, ma su larga scala ci sono delle complicazioni. Se un vuoto si trova all'interno di una regione che sta collassando, ma non è ancora collassata completamente, allora la sua dimensione sarà una dimensione intermedia tra quella che avrebbe se fosse un vuoto isolato e zero. Pertanto, l'escludere dal conteggio soltanto i vuoti che sono completamente collassati quasi sicuramente sovrastimerebbe la dimensione tipica di un vuoto. Una possibilità naturale è di utilizzare, anzichè δ_c, $\delta_{ta} = 1.062$ (cfr. Eq. 26): con questa soglia vengono ignorati tutti i vuoti che si trovano in regioni che stanno per iniziare il turnaround, anche se questi hanno delle dimensioni considerevoli, e ciò sottostimerebbe il numero di grandi vuoti.
In sintesi, ciò che distingue i vuoti dagli oggetti collassati è quanto segue: laddove sia possibile trovare un ammasso dentro un vuoto, non ha senso fisico avere un vuoto dentro un ammasso [2].

4 La funzione di massa e il conteggio delle strutture cosmiche

4.1 Le sovradensità: la teoria di Press & Shechter

Il problema che ora vogliamo risolvere è quello di calcolare, dato un certo cammino aleatorio, il numero di oggetti virializzati che vengono a formarsi. L'articolo pioniere in questo campo è indubbiamente quello di Press & Schechter (1974) [4]. Il metodo di Press & Schechter è puramente geometrico ed è basato unicamente sul conoscere la *frazione di massa per gli aloni* $F(\sigma_R, \delta_c)$ [4], che è è la frazione di oggetti collassati con raggio R o inferiore. Se noi pensiamo le nostre traiettorie come particelle che compiono un cammino aleatorio nello spazio del campo, il problema che vogliamo risolvere può essere posto nel seguente modo: data una sorgente di particelle a $\delta = 0$, occorre trovare, appunto, $F(\sigma_R, \delta_c)$, ossia la frazione di particelle che vengono assorbite[4] dalla barriera δ_c al "tempo" σ_R [7]. Si assume, quindi, che il contrasto di densità δ_R filtrato sia un campo casuale Gaussiano, con funzione di distribuzione di probabilità data da [1]

$$p(\delta_R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp(-\frac{\delta_R^2}{2\sigma_R^2}) \, .$$

Per ottenere quindi la frazione di massa per gli aloni $F(\sigma_R, \delta_c)$ si integra semplicemente questa distribuzione sul dominio $[\delta_c \, , \, \infty)$ ottenendo [1]

$$F(\sigma_R, \delta_c) = \int_{\delta_c}^{\infty} p(\delta_R) d\delta_R = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{\nu}{\sqrt{2}} \right) \, , \tag{31}$$

dove è stato definito il parametro $\nu := \delta_c/\sigma_R$. Si nota tuttavia che nel limite in cui $R \to 0$, ossia quello in cui tutti gli oggetti sono collassati in una singolarità, si ottiene $F(R \to 0, \delta_c) = F(\sigma_R \to \infty, \delta_c) = 1/2$, e sembra pertanto che metà degli oggetti non vengano conteggiati [1]. Chandrasehkar ha però notato che (per via della simmetria del campo), per ogni traiettoria che va oltre la soglia, ve ne è una simmetrica ottenuta riflettendo (con la soglia come asse) la porzione di traiettoria che sta sopra la soglia [7]. Pertanto, come si può anche intuire osservando la figura (7), la funzione $F(\sigma_R, \delta_c)$ deve corrispondere al doppio dell'area della coda della Gaussiana.

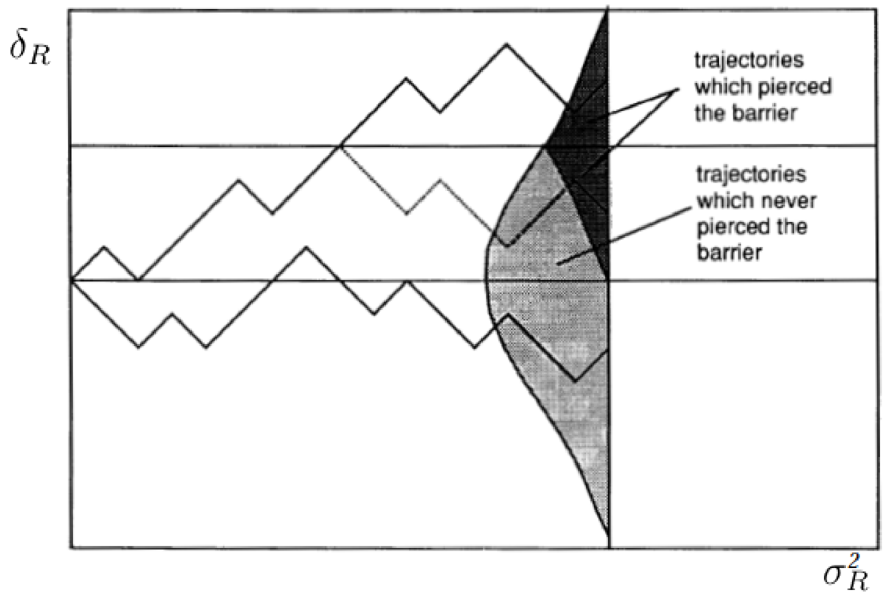

Figura 7: Tre cammini aleatori. Le due linee orizzontali sono lo 0 e la barriera δ_c, mentre sulla destra si vede il profilo della distribuzione Gaussiana. In nero sono colorate la coda della Gaussiana e la sua riflessione sotto la barriera δ_c.

Ora vogliamo, però, stimare il numero di oggetti che possiedono un certo raggio R (ossia, una certa dimensione) preciso; si vuole insomma una distribuzione della frazione degli oggetti virializzati in funzione della varianza. Si seguono ora i passaggi di Hamaus [1].

[4]In questa visione del problema, si usa il concetto di barriera *assorbente*, ossia si impone che le particelle che oltrepassano la barriera non possano più tornare indietro. Questo è per soddisfare l'ipotesi fondamentale che nessuna massa può uscire da un oggetto virializzato: se una particella ricadesse sotto la barriera senza risalirvi sopra, allora l'ammasso ad essa relativo non sarebbe conteggiato.

Come già detto molte volte, quello che conta è però il *primo* attraversamento della barriera, e pertanto la quantità fondamentale per descrivere il numero di oggetti collassati di dimensione R è la *distribuzione dei primi attraversamenti per gli ammassi*, data da:

$$f(\sigma_R, \delta_c) = \frac{dF}{d\sigma_R^2} = \frac{\delta_c}{\sqrt{2\pi}\sigma_R^3} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_R^2}\right) . \tag{32}$$

La densità numerica n di aloni è ovviamente

$$dn = \frac{\bar{\rho}}{M}|dF| ,$$

e mettendo insieme le ultime due espressioni si ottiene:

$$\frac{dn}{dM} = \frac{\bar{\rho}}{M} f(\sigma_R, \delta_c) \left|\frac{d\sigma_R^2}{dM}\right| , \tag{33}$$

dove dn/dM è la *funzione di massa degli aloni*, che rappresenta la densità di numerica di aloni con massa compresa tra M e $M + dM$. Poi, semplicemente dalla definizione di derivata logaritmica, si può scrivere:

$$\frac{dn}{dM} = \frac{\bar{\rho}}{M^2} f(\sigma_R, \delta_c)\sigma_R^2 \left|\frac{d\ln\sigma_R^2}{d\ln M}\right| .$$

Ora vogliamo esprimere la funzione di massa in funzione della variabile $\nu = \delta_c/\sigma_R$. Semplicemente dalla definizione di ν, si vede che

$$d\ln\sigma_R^2 = \frac{d\sigma_R^2}{\sigma_R^2} = -2\frac{d\nu}{\nu} , \tag{34}$$

e sostituendo questo valore nell'espressione precedente e ricordando la (32), si ottiene

$$\frac{dn}{dM} = \frac{\bar{\rho}}{M^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\nu \exp(-\frac{\nu^2}{2})\frac{d\ln\nu}{d\ln M} . \tag{35}$$

Ora, sostituendo ν nella (32), e utilizzando la seconda uguaglianza della (34), si ottiene

$$f(\sigma_R, \delta_c) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) \frac{d\nu}{d\sigma_R^2} ,$$

e definendo

$$\nu f(\nu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\nu \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) ,$$

si vede che

$$f(\sigma_R, \delta_c) d\sigma_R^2 = f(\nu) d\nu ,$$

e dalla (35) si ottiene

$$\frac{dn}{dM} = \frac{\bar{\rho}}{M^2}\nu f(\nu)\frac{d\ln\nu}{d\ln M} .$$

Questi risultati non sono stati presentati per semplice completezza, ma saranno necessari nella prossima sottosezione: come spiegato, quello dei vuoti è un problema a due barriere, che coinvolge anche gli ammassi.

4.2 Le sottodensità: Sheth & van de Weygaert

Seguiamo ora di nuovo i ragionamenti di Hamaus [1] e di Sheth & van de Weygaert (2004) [2].
Definiamo con $f(\sigma_R, \delta_v, \delta_c)$ la *distribuzione dei primi attraversamenti per i vuoti*, che è l'analogo dell'equazione (32) per le regioni sottodense. Tuttavia, come spiegato nella sottosezione §(3.2), i vuoti veri e propri sono associati a cammini che hanno attraversato δ_v senza prima aver attraversato δ_c, e pertanto la distribuzione $f(\sigma_R, \delta_v, \delta_c)$ rappresenta la frazione dei cammini soddisfa entrambe queste condizioni [2]. Si tratta, in pratica, di sottrarre alla distribuzione $f(\sigma_R, \delta_v)$ che rappresenta i vuoti senza considerare il processo del void-in-cloud, quelli che sono affetti dal void in cloud:

$$f(\sigma_R, \delta_v, \delta_c) = f(\sigma_R, \delta_v) - \int_0^{\sigma_R^2} f(\sigma_{R'}, \delta) f(\sigma_R, \delta_v | \sigma_{R'}, \delta_c) d\sigma_{R'}^2 \,.$$

L'ultimo termine è il prodotto della frazione di tutti i cammini che attraversano δ_c al raggio $R' > R$ per la frazione di cammini che attraversano δ_v al raggio R, se hanno attraversato δ_c a R'. Tale prodotto deve poi essere integrato su R', con dominio che va ovviamente da 0 a R [1]. La soluzione dell'equazione può essere trovata con l'ausilio delle trasformate di Laplace come mostrano Sheth & van de Weygaert [2], trovando

$$f(\sigma_R, \delta_v, \delta_c) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2\pi^2 D^2}{\delta_v^2} \frac{\sin(j\pi D)}{j\pi} \exp\left(-\frac{j^2\pi^2 D^2}{2\delta_v^2/\sigma_R^2}\right) \,, \tag{36}$$

dove D è il parametro void-and-cloud, definito come

$$D := \frac{|\delta_v|}{\delta_c + |\delta_v|} \,,$$

che determina l'importanza del fenomeno del void-in-cloud mediante la diffrenza tra i valori di δ_c e δ_v. Sempre grazie alle trasformate di Laplace, in Sheth & van de Weygaert (2004) [2] si mostra che la frazione di massa all'interno dei vuoti è data da

$$\int f(\sigma_R, \delta_v, \delta_c) d\sigma_R^2 = 1 - D = \frac{\delta_c}{\delta_c + |\delta_v|} \,.$$

Si nota che per $\delta_c \gg |\delta_v|$, D è piccolo, e i vuoti comprendono quasi tutta la massa dell'Universo (ciò ha senso: è molto più difficile l'attraversamento di δ_c), mentre per $\delta_c \ll |\delta_v|$, D è grande e quasi tutta la massa dell'Universo è contenuta negli aloni [1]. Con i valori trovati per le due soglie, $\delta_c = 1.686$ e $\delta_v = -2.717$, si trova che

$$1 - D = 0.383 \,, \tag{37}$$

il che che significa che abbiamo un modello in cui i vuoti contengono circa 1/3 della massa dell'Universo [2]. Come per le sovradensità, vogliamo scrivere $f(\sigma_R, \delta_v, \delta_c)$ in funzione della variabile ν, qui definita come $\nu = |\delta_v|/\sigma_R$. Per $\delta_c/\delta_v \geq 1/4$, l'equazione (36) è ben approssimata da [1]

$$\nu f(\nu) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \nu \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{|\delta_v|}{\delta_c}\left(\frac{D}{2\nu}\right)^2 - 2\left(\frac{D}{\nu}\right)^4\right] \,. \tag{38}$$

Notiamo che la prima parte dell'equazione è identica all'equazione (32), mentre la seconda parte dell'equazione è responsabile solamente del processo del void-in-cloud [1]. L'andamento della distribuzione è rappresentato in figura 8.

Sono rappresentate tre curve della distribuzione riscalata della massa (o volume) dei vuoti a tre differenti valori di δ_c ed a δ_v fissato. La curva decrescente (a puntini) è quella che si

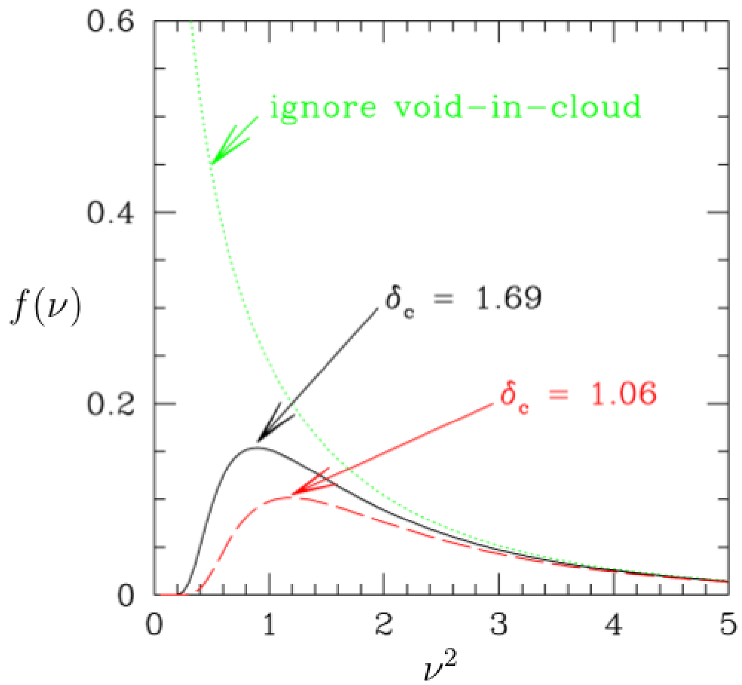

Figura 8: Distribuzione riscalata della massa/dimensione dei vuoti per tre differenti valori di δ_c e per $\delta_v = -2.81$ [1].

ottiene con $\delta_c \to \infty$, il che equivale ad ignorare il processo void-in-cloud [2]. Si nota che questa curva è simile alle altre per alti valori di ν (cioè di R), ossia l'ignorare il processo del void-in-cloud non sovrastima il numero di vuoti grandi (e questo è sensato: è difficile, a prescindere dal valore di δ_c, avere il processo del void-in-cloud su grande scala, poichè le fluttuazioni di densità dovrebbero essere così ampie da riuscire a superare sia δ_c che δ_v, nell'ordine, a valori di R poco distanti). A bassi valori di R invece, la distribuzione sovrastima enormemente il numero dei (piccoli) vuoti. Per $\delta_c \gg |\delta_v|$ insomma, il secondo esponenziale della (38) tende ad uno, e il problema diventa un problema ad una barriera analogo a quello degli aloni. Per i valori finiti di δ_c di nostro interesse, invece, i due esponenziali decadono velocemente a valori alti e molto bassi di ν, e per i valori scelti di δ_c, la distribuzione è piccata attorno a $\nu \simeq 1$, e si vede come la dipendenza da δ_c del numero dei grandi vuoti sia risibile [1]. Questa, però, è la frazione dei vuoti date le varianze, e non il raggio. Il legame tra la varianza e il raggio è dato, come detto, dal particolare filtro utilizzato. Utilizzando quindi un filtro a top-hat, il legame tra il raggio e la varianza è dato dalla (30). La distribuzione è piccata attorno ad un certo valore, che possiamo identificare come la *dimensione caratteristica dei vuoti*. Sapendo che per i valori di D di nostro interesse, ossia $0.6 < D < 0.75$, la distribuzione è piccata attorno a $\nu_{max} \simeq 1$, allora dalla definizione di ν abbiamo che $\sigma_R \simeq |\delta_v|$ [2]. Poi, poichè $M \propto R^3$, e dalla (30), si ha che $\sigma_R^2 \propto R^{-n-3}$. Pertanto, se ora chiamiamo σ_i la varianza iniziale e R_i il raggio iniziale, abbiamo che

$$\sigma_R^2 \simeq \sigma_i^2 \left(\frac{R}{R_i}\right)^{-n-3} ,$$

da cui, per quanto visto, si ha [2]

$$R \simeq \left(\frac{\sigma_i}{|\delta_v|}\right)^{\frac{2}{n+3}} R_i .$$

Ora, in analogia con la (33), possiamo definire una funzione di massa dei vuoti, ma una quantità più naturale per descriverli è il volume V_v, o meglio il raggio effettivo R_v [1]

$$R_v = \left(\frac{3}{4\pi}V_v\right)^{1/3}$$

e cerchiamo quindi le sostituzioni da compiere. Il volume comovente di un vuoto può essere messo in relazione alla sua massa M e alla sua scala iniziale R di excursion set dalla seguente:

$$V_v = \frac{M}{\bar{\rho}}\left(\frac{R_v}{R}\right)^3 \tag{39}$$

(ottenuta semplicemente partendo da $V = 4\pi R^3/3 = M/\bar{\rho}$) dove il rapporto tra i due raggi vale $R_v/R \simeq 1.697$, come visto nella sottosezione §(1.2.2). Poi, si trova che [1]

$$dM = \left(\frac{R}{R_v}\right)^3 \bar{\rho}dV_v = \left(\frac{R}{R_v}\right)^3 4\pi\bar{\rho}R_v^2 dR_v = 3M d\ln R_v \ ,$$

da cui poi si trova subito che $d\ln M = 3d\ln R_v$. Sostituendo i valori appena trovati per M, dM, e $d\ln M$ nella (33), troviamo la *funzione di massa dei vuoti*:

$$\frac{dn}{d\ln R_v} = \frac{1}{V_v}\left(\frac{R_v}{R}\right)^3 \nu f(\nu)\frac{d\ln\nu}{d\ln R_v} \ . \tag{40}$$

Chiudiamo la sezione con una semplice considerazione sulla struttura dell'Universo. L'equazione (39) suggerisce che la *frazione di volume nei vuoti* sia $1.676^3(1-D)$, ricordando che $1-D$ è la frazione di massa nei vuoti [2]. Come visto in precedenza, per i valori di soglia usuali si ha che $1-D = 0.383$ (cfr. Eq 37), e pertanto la frazione di volume nei vuoti è più grande dell'unità, indicando che i vuoti riempiono l'Universo [2]. Pertanto, abbiamo un modello in cui circa un terzo della massa dell'Universo è associata ai vuoti, che occupano quasi tutto il volume, mentre i restanti due terzi della massa occupano un volume trascurabile [2].

5 Conclusioni

Come visto, quindi, l'Universo non presenta una struttura uniforme, ma una struttura complessa in cui gli ammassi si dispongono in fogli e filamenti, schiacciati dall'espansione dei vuoti, che occupano quasi tutto il volume. Regioni sovradense e sottodense si comportano in modo molto differente: mentre quelle sovradense si contraggono e virializzano, quando la densità lineare ha raggiunto il valore di soglia δ_c, quelle sottodense si espandono, e diventano dei vuoti veri e propri al momento dello shell crossing, ossia quando la densità lineare raggiunge la soglia δ_v. Un modo efficacissimo di studiare la formazione di vuoti e ammassi è l'excursion set approach, utilizzando un filtro a top-hat e nell'ipotesi di un campo di densità Gaussiano omogeneo ed isotropo. Esso identifica gli aloni osservando il primo attraversamento della soglia δ_c da parte del cammino aleatorio, ed i vuoti osservando il primo attraversamento della soglia δ_v, ma senza che prima vi sia stato un attraversamento della soglia δ_c. Eventuali attraversamenti successivi delle due barriere corrispondono ad oggetti di dimensione inferiore, che si trovano incorporati in quelli più grandi, e pertanto non devono essere conteggiati come oggetti a sè stanti: è questa la struttura gerarchica dell'Universo.

Il modello dell'excursion set è potentissimo, e permette poi di ricavare la funzione di massa per vuoti e aloni, e di trovare spiegazioni alla struttura dell'Universo osservato in particolare per le regioni sottodense, che hanno una forma ben più vicina a quella sferica che le regioni sovradense. In particolare, si è trovato che i vuoti hanno una certa dimensione caratteristica, e che il numero di vuoti su grande scala non è inficiato dal fenomeno del void-in-cloud, mentre lo è moltissimo il numero di vuoti su piccola scala.

Riferimenti bibliografici

[1] N. Hamaus, Cosmic Voids, Lecture Series on Cosmology, https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/~komatsu/lecturenotes/Nico_Hamaus_on_voids.pdf 3-24 (2017).

[2] R. K. Sheth, R. van de Weygaert, A hierarchy of voids: much ado about nothing, Mon. Not. R. Astron. Soc. , **350**, 517–527, 533-537 (2004).

[3] E. Bertschinger, The self-similar evolution of holes in an Einstein-de Sitter Universe, The Astrophysical Journal Supplement Series, **58**, 1-3 (1985)

[4] B. J. T. Jones, The Large Scale Structure of the Universe, https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Sept01/Jones/frames.html , 64 (2002)

[5] G. R. Blumenthal, L. Nicolaci da Costa, D. S. Goldwirth, M. Lecar, T. Piran, The largest possible voids, The Astrophysical Journal, **388**, 234-236 (1992)

[6] K. Jedamzik, The cloud-in-cloud problem in the Press-Schechter formalism of hierarchical structure formation, https://arxiv.org/abs/astro-ph/9408080v1 2 (1994).

[7] J. R. Bond, S. Cole, G. Efstathiou, N. Kaiser, Excursion set mass function for hierarchical Gaussian fluctuations, The Astrophysical Journal, **379**, 440-442 (1991)