Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA E APPLICATA
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di laurea in Matematica

# Metrica di Gromov-Hausdorff ed esistenza di geodetiche

Relatore:
**Prof. Roberto Monti**

Laureando:
**Daniele Gerosa**
**Matricola 1030409**

**3 luglio 2015**

Soffrire è produrre conoscenza.

---

Emil Cioran ne *Il funesto demiurgo*

# Indice

# Introduzione

Nel primo capitolo di questa tesi abbiamo studiato la teoria della *convergenza di Gromov-Hausdorff*, sviluppata nell'ambito della *Teoria geometrica dei gruppi* verso la fine degli anni '70 dal matematico russo Michail Leonidovič Gromov e pubblicata in un articolo intitolato *Groups of polynomial growth and expanding maps* (1981). Nell'articolo in questione Gromov trova una caratterizzazione dei gruppi finitamente generati a crescita polinomiale, che scoprì essere quei gruppi che possiedono sottogruppi nilpotenti di indice finito.

Noi però ci siamo limitati ad un contesto analitico, ed abbiamo dapprima analizzato le proprietà dello spazio metrico $(\mathcal{K}, \delta_H)$, ovvero della famiglia di tutti i compatti non vuoti di $\mathbb{R}^n$ munita della *metrica di Hausdorff.* Dopo aver dimostrato che successioni limitate in $(\mathcal{K}, \delta_H)$ ammettono sottosuccessioni convergenti (*Teorema di compattezza di Blaschke*) abbiamo osservato che la dimostrazione di questo teorema non fa uso in maniera essenziale delle peculiarità di $\mathbb{R}^n$, e che quindi si generalizza al caso di un qualsiasi spazio metrico completo/compatto. In seguito abbiamo definito la *metrica di Gromov-Hausdorff* che, oltre a permettere di misurare la distanza tra due compatti *qualsiasi*, permette di capire, se calcolabile e/o stimabile, quanto due compatti siano distanti dall'essere isometrici. Infine, detta $\mathcal{M}$ la classe di tutti gli spazi metrici compatti (modulo isometria), abbiamo mostrato che lo spazio $(\mathcal{M}, d_{GH})$ è anche completo, fornendo inoltre condizioni sufficienti affinché un sottoinsieme $\mathcal{M}'$ di $\mathcal{M}$ sia precompatto (*Teorema di compattezza di Gromov*).

Nel secondo capitolo abbiamo richiamato la definizione di *spazio metrico di lunghezza* (spazio la cui metrica, detta *intrinseca*, discende da una nozione "primitiva" di lunghezza) ed alcuni risultati che ci hanno permesso di dimostrare un teorema, il quale afferma che se una successione di spazi metrici di lunghezza converge nella distanza di Gromov-Hausdorff ad uno spazio metrico completo, allora anche quest'ultimo è di lunghezza.

Nell'ultimo capitolo abbiamo analizzato il seguente problema: dati uno spazio metrico $(X, d)$ e due punti $x, y \in X$, ci si chiede se esistono curve $\gamma : [a, b] \to X$ tali che l'insieme

$$\{\mathrm{Var}(\gamma) \,:\, \gamma \in \mathrm{Lip}([a, b], X),\ \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y\}$$

abbia minimo. Una riformulazione di questo problema si può operare nel contesto della *Teoria della Misura*, domandandosi se il seguente insieme

$$\{\mathcal{H}^1(C) \,:\, C \text{ connesso, chiuso e } x, y \in C\}$$

abbia o meno un minimo. Abbiamo dimostrato che in entrambi i casi il problema, sotto opportune ipotesi, ha soluzione; la seconda formulazione del problema, detta *formulazione intrinseca*, trova soluzione passando per il (bel) *Teorema di semicontinuità di Gołab*, il quale afferma che la misura unidimensionale di Hausdorff è semicontinua inferiormente.

**Ringraziamenti.** Ringrazio in questa sede il mio relatore, il professor **Roberto Monti**, che mi ha guidato con pazienza ed estrema disponibilità lungo tutto il cammino che mi ha portato alla realizzazione di questo piccolo lavoro, offrendomi supporto e stimoli precisi. Ringrazio poi il professor **Luigi Ambrosio** della Scuola Normale Superiore di Pisa per il carteggio telematico al quale si è gentilmente prestato per chiarirmi alcuni dubbi legati alla formulazione di un teorema. Eventually I would like to thank **Jan Cristina** from University of Helsinki for his precious availability to clarify some details from his lecture notes.

Ringrazio infine la mia famiglia che, seppur distante, mi è stata sempre vicina.

# Capitolo 1

# Convergenza di Gromov-Hausdorff

> The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality.
>
> David Hilbert

Nella prima parte di questo capitolo, dopo aver fornito alcune definizioni preliminari, dimostriamo il *Teorema di selezione di Blaschke* per compatti di $\mathbb{R}^n$ e mostriamo come la dimostrazione di tale teorema non faccia uso in maniera essenziale delle peculiarità di $\mathbb{R}^n$, e come possa quindi essere facilmente generalizzata al caso di spazi metrici completi e/o compatti qualsiasi. Nella seconda parte del capitolo definiamo la *metrica di Gromov-Hausdorff* e mostriamo come l'insieme $\mathcal{M}$ di tutti gli spazi metrici compatti munito di tale metrica sia completo; dimostreremo infine un *Teorema di compattezza di Gromov*. In questa seconda sezione vediamo anche come spazi metrici (separabili) possano essere immersi in maniera isometrica in certi spazi di Banach (*Teorema di Kuratowski-Wojdysławski o Fréchet-Kuratowski*).

## 1.1 Metrica di Hausdorff

### 1.1.1 Definizioni e risultati preliminari

**Definizione 1.1.1** (Corpo $\delta$-parallelo)**.** Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta \geq 0$. Diciamo *corpo $\delta$-parallelo* (*$\delta$-parallel body*) di $E$ l'insieme

$$[E]_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \inf_{y \in E} |x - y| \leq \delta\}.$$

Definiamo poi $\mathcal{K} = \{K \subset \mathbb{R}^n \,:\, K \text{ compatto non vuoto}\}$.

**Definizione 1.1.2** (Distanza di Hausdorff su $\mathbb{R}^n$)**.** Si definisce la *metrica di Hausdorff* $\delta_H : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to [0, \infty)$ nel seguente modo:

$$\delta_H(E, F) = \inf\{\delta \geq 0 \,:\, E \subset [F]_\delta \text{ e } F \subset [E]_\delta\}.$$

Richiamiamo qui la definizione di metrica:

**Definizione 1.1.3** (Spazio metrico)**.** Uno spazio metrico è una coppia $(X, d)$ dove $X$ è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

*Osservazione* 1.1.4. Osserviamo che l'insieme $\{\delta \geq 0 : E \subset [F]_\delta \text{ e } F \subset [E]_\delta\}$ è effettivamente non vuoto.

**Proposizione 1.1.5.** $(\mathcal{K}, \delta_H)$ *è uno spazio metrico.*

*Dimostrazione.*

1. Gli elementi di $\{\delta \geq 0 : E \subset [F]_\delta \text{ e } F \subset [E]_\delta\}$ sono tutti maggiori od uguali di zero per ipotesi, quindi sarà certamente $\inf\{\delta \geq 0 : E \subset [F]_\delta \text{ e } F \subset [E]_\delta\} = \delta_H(E, F) \geq 0$. Bisogna provare ora che $\delta_H(E, F) = 0 \iff E = F$. Sia quindi $\delta_H(E, F) = 0$; vogliamo mostrare che $E \subset F$. Sia $x \in E$; siccome $E \subset [F]_\delta$ per ogni $\delta \geq 0$, sarà $x \in [F]_\delta$ per ogni $\delta \geq 0$, e quindi esiste $y_\delta \in F$ tale che $|x - y_\delta| \leq 2\delta$. Siccome questo vale per ogni $\delta \geq 0$ e siccome $F$ è chiuso, sarà $x \in F$. In maniera identica si mostra che $F \subset E$, da cui $E = F$.

2. Che si abbia $\delta_H(E, F) = \delta_H(F, E)$ è evidente dalla definizione.

3. Siano ora $E, F$ e $G$ tre elementi di $\mathcal{K}$. Vogliamo in principio mostrare che per ogni $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$ si ha
$$[[G]_{\delta_2}]_{\delta_1} \subseteq [G]_{\delta_1+\delta_2}. \tag{1.1}$$
Se $x \in [[G]_{\delta_2}]_{\delta_1}$, allora $\inf_{y \in [G]_{\delta_2}} |x - y| \leq \delta_1$; da
$$|x - z| \leq |y - z| + |x - y| \quad \text{per ogni } x \in [[G]_{\delta_2}]_{\delta_1}, y \in [G]_{\delta_2}, z \in G$$
e passando agli estremi inferiori per $z \in G$ si ottiene
$$\inf_{z \in G} |x - z| \leq \inf_{z \in G} |y - z| + |x - y| \leq \delta_2 + |x - y|.$$
Inoltre vale anche
$$\inf_{z \in G} |x - z| \leq \delta_2 + \inf_{y \in [G]_{\delta_2}} |x - y| \leq \delta_1 + \delta_2$$
che significa che $x \in [G]_{\delta_1+\delta_2}$. Poniamo ora per economia $\delta_H(E, F) = p$, $\delta_H(E, H) = q$ e $\delta_H(F, H) = r$; certamente per ogni $\epsilon > 0$ valgono le seguenti inclusioni: $E \subset [F]_{p+\epsilon}$, $F \subset [E]_{p+\epsilon}$, $F \subset [H]_{r+\epsilon}$ etc... Da queste e da (1.1) discende direttamente che
$$[H]_{q+\epsilon} \subset [[F]_{r+\epsilon}]_{q+\epsilon} \subset [F]_{q+r+2\epsilon}$$
da cui si ottiene $E \subset [F]_{q+r+2\epsilon}$. Analogamente si ottiene $F \subset [E]_{q+r+2\epsilon}$. Ne consegue che
$$\delta_H(E, F) \leq q + r + 2\epsilon = \delta_H(E, F) + \delta_H(F, H) + 2\epsilon$$
e la tesi si ha dall'arbitrarietà di $\epsilon$.

□

Proviamo ora che le successioni limitate in $(\mathcal{K}, \delta_H)$ ammettono sottosuccessioni convergenti.

**Teorema 1.1.6** (di selezione/compattezza di Blaschke)**.** *Sia* $\boldsymbol{C}$ *una collezione infinita di insiemi non vuoti compatti contenuti in una porzione limitata* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbb{R}^n$*. Allora esiste una successione* $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *di insiemi distinti di* $\boldsymbol{C}$ *che converge nella metrica di Hausdorff ad un compatto non vuoto* $E$*.*

*Dimostrazione.* Costruiamo dapprima una successione di Cauchy di insiemi di $\mathbf{C}$. Sia $(E_{1,i})_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi distinti di $\mathbf{C}$. Per ogni $k > 1$ definiamo in maniera induttiva una sottosuccessione $(E_{k,i})_{i\in\mathbb{N}}$ di $(E_{k-1,i})_{i\in\mathbb{N}}$ come segue: sia $\mathcal{B}_k$ una collezione finita di palle chiuse di diametro al più $1/k$ che ricopre $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ (esistono perché $\mathcal{B}$ è un precompatto). Ognuno dei $E_{k-1,i}$ interseca una specifica combinazione (finita) di queste palle e quindi ci deve essere una sottosuccessione $(E_{k,i})_{i\in\mathbb{N}}$ di $(E_{k-1,i})_{i\in\mathbb{N}}$ che interseca esattamente le stesse palle di $\mathcal{B}_k$ - l'idea che sta sotto a questa costruzione è la seguente: consideriamo una numerazione delle balle di $\mathcal{B}_k$, da 1 ad $m$; per costruire la sottosuccessione di cui sopra consideriamo *quali* palle vengano intersecate da $E_{k-1,j}$, siano esse $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q \in M = \{1, \ldots, m\}$; per le considerazioni fatte in precedenza riesco a trovare un $E_{k,j}$, che verrà associato a $E_{k-1,j}$, che interseca esattamente le palle con le "etichette" $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Sia ora $F$ l'unione delle palle di $\mathcal{B}_k$ intersecate da $E_{k-1,j}$ e quindi da $E_{k,j}$; allora si ha che

$$E_{k,i} \subset F \subset [E_{k,i}]_{1/k} \quad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}.$$

Infatti (prima inclusione) le palle di $\mathcal{B}_k$ ricoprono $\mathcal{B}$, e (seconda inclusione) se $x \in F$ allora esiste $B \in \mathcal{B}_k$ con $x \in B$; per ipotesi $\operatorname{diam}(B) \le 1/k$ e quindi $\inf_{y\in E_{k,i}} |x - y| \le 1/k$ donde $x \in [E_{k,i}]_{1/k}$. Da questo si deduce che $\delta_H(E_{k,i}, F) \le 1/k$ e quindi

$$\delta_H(E_{k,i}, E_{k,j}) \le \delta_H(E_{k,i}, F) + \delta_H(E_{k,j}, F) \le 1/k + 1/k = 2/k \quad \text{per ogni } i, j \in \mathbb{N}.$$

La successione desiderata si ottiene mediante un procedimento diagonale, ponendo $E_i = E_{i,i}$:

$$\begin{array}{cccc}
\boxed{E_{1,1}} & E_{1,2} & E_{1,3} & \cdots \\
E_{2,1} & \boxed{E_{2,2}} & E_{2,3} & \cdots \\
E_{3,1} & E_{3,2} & \boxed{E_{3,3}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

e si osserva immediatamente che

$$\delta_H(E_i, E_j) \le \frac{2}{\min\{i, j\}} \tag{1.2}$$

cioè $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy con la metrica di Hausdorff.

L'insieme

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i}$$

è non vuoto: posto infatti per economia $F_j = \overline{\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i}$, osserviamo innanzitutto che $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$ e che gli $F_i$ sono tutti compatti in quanto chiusi e limitati. Siccome $\mathbb{R}^n$ è completo, si può invocare il cosiddetto *Cantor's intersection theorem*. In realtà basta osservare che la successione $x_n \in F_n$ è limitata, e che quindi ammette un'estratta $y_n$ convergente ad $x$; siccome $F_i \subseteq F_{i-1}$ dev'essere $x \in E$. Inoltre $E$ è evidentemente un compatto di $\mathbb{R}^n$, in quanto chiuso e limitato.

Ora, da (1.2) segue che

$$\overline{\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i} \subseteq [E_j]_{2/j}.$$

Quest'inclusione è banale: basta osservare che per ogni $m \geq j$ vale $E_m \subseteq [E_j]_{2/j}$. Quindi

$$E \subseteq [E_j]_{2/j} \quad \text{per ogni } j.$$

Sia ora $x \in E_j$; da (1.2) segue che $x \in [E_i]_{2/j}$ per $i \geq j$, e quindi $x \in \left[\overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i}\right]_{2/j}$ se $k \geq j$. Siamo vicini alla conclusione: basta considerare una successione $y_k \in \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i}$ con $|x - y_k| \leq 2/j$; per la compattezza sequenziale esiste una sottosuccessione di $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $y \in \mathbb{R}^n$ con $|x - y| \leq 2/j$; ma $y \in E$, e quindi $x \in [E]_{2/j}$. Siccome $x$ era tale che $\in E_j$, si ha $E_j \subseteq [E]_{2/j}$; inoltre abbiamo mostrato che $E \subseteq [E_j]_{2/j}$, quindi $2/j \in \{\delta \,:\, E \subset [E_j]_\delta \text{ e } E_j \subset [E]_\delta\}$; ne segue che

$$\delta_H(E_j, E) \leq 2/j$$

ovvero la successione $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge ad $E$ nella metrica di Hausdorff.

□

Per lavorare in maggiore generalità la distanza di Hausdorff può essere definita nella maniera seguente:

**Definizione 1.1.7** (Metrica di Hausdorff)**.** Sia $\mathcal{C}_X$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi chiusi di uno spazio metrico $(X, d_X)$. Se $C \in \mathcal{C}_X$, posto

$$[C]_\delta = \{x \in X \,:\, \inf_{y \in C} d(x, y) \leq \delta\}$$

definiamo la *distanza di Hausdorff* come

$$\delta_H(C, D) := \inf\{\delta > 0 \,:\, C \subset [D]_\delta \text{ e } D \subset [C]_\delta\}.$$

### 1.1.2 Generalizzazioni del Teorema di selezione di Blaschke

Alla luce di questa ridefinizione, vediamo come il teorema di selezione di Blaschke si possa generalizzare:

**Teorema 1.1.8.** *Sia $(X, d)$ uno spazio metrico completo. Allora l'insieme*

$$Y = \{A \subseteq X \,:\, A \text{ è compatto}\}$$

*è completo con la metrica di Hausdorff.*

*Dimostrazione.* Anche qui, la dimostrazione è già contenuta in quella del teorema di Blaschke: basta riscriverla dalla disuguaglianza (1.2) sostituendo $2/\min\{i, j\}$ con l'*epsilon* della definizione di successione di Cauchy. □

**Teorema 1.1.9.** *Sia $(X, d)$ uno spazio metrico compatto. Allora l'insieme*

$$Y = \{A \subseteq X \,:\, A \text{ è compatto}\}$$

*è compatto con la metrica di Hausdorff.*

*Dimostrazione.* Basta ricordare che in spazi metrici le nozioni di compattezza e di compattezza sequenziale sono equivalenti. La dimostrazione del teorema di selezione di Blaschke non fa uso in maniera essenziale delle peculiarità di $\mathbb{R}^n$, e quindi si può estendere a qualsiasi spazio metrico compatto; questo significa che per ogni successione di compatti di $Y$ si riesce a trovare una sottosuccessione convergente ad un elemento di $Y$, e questo conclude la dimostrazione. □

### 1.1.3 Convergenza di Hausdorff e convergenza di Kuratowski

**Definizione 1.1.10** (Convergenza di Kuratowski)**.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Una successione di insiemi chiusi $\{C_n\} \subset X$ si dice *convergere nel senso di Kuratowski* ad un insieme chiuso $C$ se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

1. Per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \in C_n$ e per ogni sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ , allora $x \in C$.

2. Per ogni $x \in C$ esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \in C_n$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Si denoterà la convergenza sopra scrivendo $C_n \xrightarrow{K} C$.
Indicheremo invece con $C_n \xrightarrow{H} C$ la convergenza di Hausdorff.

**Proposizione 1.1.11.** *Se $C$ e $\{C_n\}$ sono insiemi chiusi, allora $C_n \xrightarrow{H} C$ implica $C_n \xrightarrow{K} C$. Inoltre se $X$ è compatto vale anche il viceversa.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $C_n \xrightarrow{H} C$. Verifichiamo **2**. Sia $x \in C$; per ogni $n$, se $\delta_H(C, C_n) < 1$ (che accade se $n$ è sufficientemente grande) allora esiste $x_n \in C_n$ tale che $d(x, x_n) \leq \delta_H(C_n, C) + 1/n$, dal momento che $C_n$ giace in un certo corpo $\epsilon$-parallelo di $C$, con $\epsilon < \delta_H(C_n, C) + 1/n$. Se d'altro canto $\delta_H(C_n, C) \geq 1$, che può accadere per un numero finito di valori di $n$, allora si può scegliere $x_n \in C_n$ arbitrariamente. È chiaro come la successione così costruita converga ad $x$ in $X$.

Verifichiamo ora **1**. Supponiamo ora che $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, dove $x_{n_k} \in C_{n_k}$ per un'opportuna sottosuccessione di indici $\{n_k\}$. Se fosse $x \notin C$, allora $r := d(x, C) = \inf_{y\in C} |x - y| > 0$ dal momento che $C$ è chiuso. Per $n$ grande si ha $C_n \subset [C]_{r/2}$ e cioè $d(x, x_{n_k}) \geq r/2$ che è assurdo, perché $x_{n_k}$ converge a $x$.

Supponiamo ora che $X$ sia compatto e che $C_n \xrightarrow{K} C$. Se $C_n$ non convergesse a $C$ in $\delta_H$, allora passando eventualmente ad una sottosuccessione se necessario possiamo assumere $h(C, C_n) \geq \lambda > 0$ per un certo $\lambda > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $n$ almeno una delle due inclusioni

$$C_n \subset [C]_\lambda, \quad C \subset [C_n]_\lambda$$

è violata, ed almeno una delle due lo deve essere per infiniti $n$. Estraendo eventualmente una sottosuccessione, assumiamo (caso **1**) che $C_n \not\subset [C]_\lambda$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi possiamo scegliere $x_n \in C_n$ tale che $d(x_n, C) \geq \lambda$; dal momento che $X$ è compatto si può estrarre una sottosuccessione $x_{n_k}$ convergente ad un elemento $x \in X$ (compattezza sequenziale in spazi metrici). Siccome $C_{n_k} \xrightarrow{K} C$, allora deve essere $x \in C$, che è assurdo perché $d(x_n, C) \geq \lambda > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; l'assurdo deriva dall'aver supposto $C_n \not\subset [C]_\lambda$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo ora (caso **2**) che nemmeno la seconda inclusione sia verificata: possiamo assumere che sia $C \not\subset [C_n]_\lambda$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste $x_n \in C$ tale che $d(x_n, C_n) \geq \lambda > 0$. Dal momento che $C$ è compatto abbiamo $x_{n_k} \to x \in C$ per un certo $x$ ed un'opportuna sottosuccessione e per la parte **2** della definizione di convergenza di Kuratowski esiste $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset X$ con $y_n \to x$. Eppure

$$0 < \lambda \leq d(x_{n_k}, C_{n_k}) \leq d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \underbrace{d(x_{n_k}, x) + d(x, y_{n_k})}_{\to 0}$$

che è assurdo.

□

## 1.2 Metrica di Gromov-Hausdorff

### 1.2.1 Definizioni e risultati preliminari

Per certi versi questa è la parte centrale del capitolo, parte nella quale si sviluppa appieno l'idea di Gromov: infatti il problema che si poneva era quello di misurare la distanza tra due compatti di natura diversa (e.g. un sottoinsieme compatto $A$ di $\mathcal{C}^0([0,1])$ e $[0,1]$), operazione impossibile con la sola strumentazione fornita da Hausdorff. Gromov ebbe quindi la seguente intuizione: prendiamo i due insiemi ed immergiamoli in maniera isometrica in uno spazio metrico comune, che finirà per essere la loro unione disgiunta, in modo da poter misurare la distanza tra i due.

**Definizione 1.2.1** (Isometria o Immersione isometrica)**.** Una mappa $\phi : X \to Y$ tra spazi metrici $(X, d_X)$ e $(Y, d_Y)$ è detta *isometria* o *immersione isometrica* se per ogni $x, y \in X$ si ha

$$d_Y(\phi(x), \phi(y)) = d_X(x, y).$$

**Definizione 1.2.2** (Unione disgiunta)**.** Sia $\{A_i : i \in I\}$ una famiglia di insiemi indicizzata da $I$. L'*unione disgiunta* di questa famiglia di insiemi è l'insieme

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \{(x, i) : x \in A_i\}.$$

Osserviamo che ogni $A_i$ è canonicamente isometrico all'insieme $A_i^* = \{(x, i) : x \in A_i\}$.

**Definizione 1.2.3** (Distanza di Gromov-Hausdorff)**.** Siano $(X, d_X), (Y, d_Y)$ spazi metrici compatti non vuoti. Definiamo la *distanza di Gromov-Hausdorff* $d_{GH}(X, Y)$ come l'estremo inferiore dell'insieme degli $\epsilon > 0$ tali che esista uno spazio metrico compatto $(Z, d_Z)$ e delle immersioni isometriche $i_X : X \to Z$, $i_Y : Y \to Z$ tali che $\delta_H(i_X(X), i_Y(Y)) < \epsilon$.

Osserviamo che può essere data una definizione equivalente di $d_{GH}$. Siano $(X, d_X), (Y, d_Y)$ spazi metrici compatti non vuoti. Definiamo la *distanza di Gromov-Hausdorff* $d'_{GH}(X, Y)$ come l'estremo inferiore dell'insieme degli $\epsilon > 0$ tali che esista una metrica $d$ sull'unione disgiunta $X \sqcup Y$ che estende le metriche di $X$ e di $Y$ e tali che $\delta_H(X, Y) < \epsilon$, dove $\delta_H$ è la distanza di Hausdorff relativa a $d$.

Dimostriamo questa equivalenza tra definizioni:

*Dimostrazione.* Osserviamo che $d_{GH}(X, Y) \leq d'_{GH}(X, Y)$ perché la classe di spazi metrici $Z$ e di isometrie considerata è più piccola - di fondo l'isometria considerata è la proiezione e $Z = X \sqcup Y$. Viceversa per $(Z, d_Z)$, $i_X$ e $i_Y$ come nella **Definizione 1.2.3** e per ogni $\delta > 0$ possiamo definire una metrica $d_{X \sqcup Y}$ su $X \sqcup Y$ mediante

$$d_{X\sqcup Y}(x, y) := \begin{cases} d_X(x, y) & \text{se } x, y \in X \\ d_Z(i_X(x), i_Y(y)) + \delta & \text{se } x \in X, y \in Y \\ d_Y(x, y) & \text{se } x, y \in Y \end{cases}$$

e ottenere $\delta_H(X, Y) < \epsilon + \delta$. Dal momento che $\delta > 0$ è arbitrario, si ottiene la tesi. □

Sia ora $\widehat{\mathcal{M}}$ l'insieme di tutti gli spazi metrici compatti non vuoti, e consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ tra elementi di $\widehat{\mathcal{M}}$: per $E, F \in \widehat{\mathcal{M}}$ diciamo che

$$E \sim F \iff E, F \text{ sono isometrici.}$$

Definiamo poi $\mathcal{M} := \widehat{\mathcal{M}}/\sim$ e osserviamo che la funzione $d_{GH} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to [0, \infty)$ "fissa il quoziente", cioè se $X \sim X'$ e $Y \sim Y'$ allora $d_{GH}(X, Y) = d_{GH}(X', Y')$ e pertanto risulta ben definita $d_{GH}([X], [Y])$.

**Definizione 1.2.4** (Diametro di uno spazio metrico)**.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Il *diametro* di $X$ è

$$\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y).$$

**Proposizione 1.2.5.** *$d_{GH}$ è una metrica su $\mathcal{M}$ e inoltre*

$$d_{GH}(X, Y) \leq \frac{1}{2} \max\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\}.$$

*Dimostrazione.* Proviamo la disuguaglianza triangolare. Siano $\lambda_1 > d_{GH}(X, Y)$ e $\lambda_2 > d_{GH}(Y, Z)$ e $d_1$, $d_2$ le metriche rispettivamente su $X \sqcup Y$ e $Y \sqcup Z$, il tutto tale che $\delta_H(X, Y) < \lambda_1$ e $\delta_H(Y, Z) < \lambda_2$. Definiamo poi su $X \sqcup Z$ la seguente metrica

$$p(x, z) := \begin{cases} d_1(x, z) & \text{se } x, z \in X \\ \min_{y \in Y}\{d_1(x, y) + d_2(y, z)\} & \text{se } x \in X, z \in Z \\ d_2(x, z) & \text{se } x, z \in Z \end{cases}$$

ed osserviamo, prima di continuare, che $p$ è effettivamente una metrica mostrando la disuguaglianza triangolare nel caso in cui $x \in X$ e $z \in Z$ (gli altri casi sono banali): sia $\bar{y} \in Y$ che realizza il minimo della funzione $t \mapsto d_1(x,t) + d_2(t,z)$ (esiste perché le distanze sono mappe continue, e $Y$ è compatto) e sia $y \in X \sqcup Z$. Senza ledere le generalità possiamo supporre che $y \in X$ (il caso $y \in Z$ è identico). Allora

$$p(x,y) + p(y,z) = d_1(x,y) + d_1(y,y') + d_2(y',z)$$

dove $y' \in Y$ realizza il minimo della funzione $t \mapsto d_1(y,t) + d_2(t,z)$. Ma $d_1(x,y) + d_1(y,y') \geq d_1(x,y')$ e quindi

$$\begin{aligned} p(x,y) + p(y,z) &\geq d_1(x,y') + d_2(y',z) \\ &\geq d_1(x,\bar{y}) + d_2(\bar{y},z) = p(x,z). \end{aligned}$$

Continuiamo. Per ogni $x \in X$ esiste $y \in Y$ tale che $d_1(x,y) < \lambda_1$ (in virtù delle ipotesi fatte sulla distanza di Hausdorff tra $X$ ed $Y$); inoltre per ogni $y \in Y$ esiste $z \in Z$ con $d_2(y,z) < \lambda_2$, e pertanto si ha $p(x,z) < \lambda_1 + \lambda_2$. Dal momento che $x$ è arbitrario si ha che $X \subset [Z]_{\lambda_1+\lambda_2}$ e specularmente $Z \subset [X]_{\lambda_1+\lambda_2}$; siccome quindi $\delta_H(X,Z) \leq \lambda_1 + \lambda_2$, si avrà che $d_{GH}(X,Z) \leq \lambda_1 + \lambda_2$, e facendo tendere $\lambda_1 \to d_{GH}(X,Y)$ e $\lambda_2 \to d_{GH}(Y,Z)$ si ottiene la disuguaglianza voluta.

Proviamo ora che se $d_{GH}(X,Y) = 0$ allora $X$ ed $Y$ sono isometrici. Preliminarmente osserviamo che se $X$ e $Y$ sono contenuti nel medesimo spazio metrico $Z$, la mappa $j : X \to Y$ che associa ad $x \in X$ un qualsiasi punto $y \in Y$ di distanza minima da $x$ soddisfa alle seguenti disuguaglianze (disuguaglianza triangolare, diretta ed inversa)

$$d_Z(x_1,x_2) - 2\delta \leq d_Z(j(x_1), j(x_2)) \leq d_Z(x_1,x_2) + 2\delta \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X$$

non appena $d_{GH}(X,Y) < \delta$. Componendo con le isometrie, anche nel caso generale si ottiene una mappa $j : X \to Y$ tale che le disuguaglianze precedenti continuino a valere. Quindi, siccome $d_{GH}(X,Y) = 0$, esisterà un successione di mappe $j_h : X \to Y$ tale che

$$d_X(x_1,x_2) - 2^{-h} \leq d_Y(j_h(x_1), j_h(x_2)) \leq d_X(x_1,x_2) + 2^{-h} \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X. \qquad (1.3)$$

Sia poi $D \subset X$ un insieme denso; estraendo eventualmente una successione mediante un argomento diagonale, si può assumere che $j_h(x)$ converga per ogni $x \in D$: siccome siamo in compatti, la successione $\{j_n(x_1)\}_{n\geq 1}$ ha una sottosuccessione convergente, siano $j(x_1)$ il suo limite e $I_1$ l'insieme su cui si indicizza questa prima sottosuccessione. Analogamente si può selezionare un insieme $I_2 \subseteq I_1$ di indici tale che $j_n(x_2) \to j(x_2),\ n \in I_2$. Al $k-$esimo passaggio si ha $I_k \subseteq I_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq I_2 \subseteq I_1$ e $\{f_n(x_k)\}_{n\in I_k} \to f(x_k)$; a questo punto è sufficiente prendere $\{n_j\}_{j\geq 1}$ con $n_j \in I_j$ e $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$; in particolare $n_j \in I_k$ per ogni $k \leq j$, e quindi $j_{n_j}(x_k)$ converge per ogni $k$ per costruzione, visto che gli indici di ogni coda della successione sono contenuti in un qualche $I_k$. Per la densità di $D$ si ha che $j_h(x)$ converge per ogni $x \in X$: infatti per ogni $x \in X$ esiste una successione $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset D$ con $y_i \to x$; inoltre fissato $y_j \in \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ si ha che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d_Y(f_n(y_j), f_m(y_j)) \leq \epsilon$ per ogni $n, m \geq N$. Sarà quindi

$$\begin{aligned} d_Y(f_n(x), f_m(x)) &\leq d_Y(f_n(x), f_n(y_j)) + d_Y(f_n(y_j), f_m(y_j)) + d_Y(f_m(y_j), f_m(x)) \\ &\leq d_X(x,y_j) + 2^{-n} + \epsilon + d_X(x,y_j) + 2^{-m} \end{aligned}$$

ovvero $f_n(x)$ è di Cauchy, e pertanto converge perché $Y$ è compatto (e quindi completo) - abbiamo usato la disuguaglianza triangolare e (1.3). Si conclude di nuovo per (1.3): la mappa limite $j$ è un'isometria.

Infine per provare che $d_{GH}(X,Y) \leq \frac{1}{2}\max\{\text{diam}(X), \text{diam}(Y)\}$ si considera su $X \sqcup Y$ la distanza definita da $d(x,y) = \delta$ con $2\delta > \text{diam}(X)$ e $2\delta > \text{diam}(Y)$, osservando che, con questa scelta di $d$, si ha $\delta_H(X,Y) < \delta$.

$\square$

Vediamo ora un interessante fatto di immersione isometrica, che a posteriore è una potente giustificazione di tutta la teoria sin d'ora costruita.

**Teorema 1.2.6** (Kuratowski-Wojdysławski o Fréchet-Kuratowski)**.**

1. *Ogni spazio metrico $(X,d)$ ammette un'immersione isometrica in $\ell^\infty(X) = (\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$, cioè lo spazio di Banach di tutte le funzioni $s : X \to \mathbb{R}$ con $\|s\|_\infty = \sup_{x\in X}|s(x)| < \infty$.*

2. *Ogni spazio metrico separabile $(X,d)$ ammette un'immersione isometrica in $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) = \{(s_k)_{k\in\mathbb{N}} : \|(s_k)\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}}|s_k| < \infty\}$.*

*Dimostrazione.*

1. Scelto un punto base $z \in X$, definiamo $f : X \to \ell^\infty(X)$ come
$$f(x) = s^x, \quad s^x(y) = d(x,y) - d(y,z).$$
Osserviamo che $\|s^x\|_\infty \leq d(x,z)$ (disuguaglianza triangolare). Inoltre
$$\|s^x - s^{x'}\|_\infty = \sup_{y\in Y}|d(x,y) - d(x',y)| \leq d(x,x')$$
e per $y = x'$ si ha che $\|f(x) - f(y)\|_\infty = \|s^x - s^y\|_\infty = d(x,y)$, cioè $f$ è un'isometria.

2. Scelto un punto base $z \in X$, dalla separabilità di $X$ segue che esiste un $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = D \subset X$ denso. Definiamo la mappa $i : X \to \ell^\infty$ come segue
$$x \mapsto (d(x,x_n) - d(x_n,z))_{n\in\mathbb{N}}$$
Preliminarmente si osserva che $(d(x,x_n) - d(x_n,z))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$: infatti $\sup_{n\in\mathbb{N}}|d(x,x_n) - d(x_n,z)| \leq d(x,z)$ (disuguaglianza triangolare inversa). Vogliamo mostrare che questa mappa è un'isometria:
$$\begin{aligned}\|i(x) - i(y)\|_\infty &= \|d(x,x_n) - d(x_n,z) - d(y,x_n) + d(x_n,z)\|_\infty \\ &= \|d(x,x_n) - d(y,x_n)\|_\infty \leq d(x,y)\end{aligned}$$
e questo mostra che
$$\|i(x) - i(y)\|_\infty \leq d(x,y).$$
Vogliamo mostrare ora che per $\epsilon > 0$ si ha
$$\|i(x) - i(y)\|_\infty \geq d(x,y) - \epsilon.$$

Siccome $D$ è denso esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ che converge ad $x$; quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\overline{n_k} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n_k}$ si abbia $d(x_n, x) \leq \epsilon/2$ e $d(x, y) - \epsilon/2 \leq d(x_n, y)$ (una metrica è una mappa continua + caratterizzazione del lim inf); da questo ne discende che per ogni $n \geq \overline{n_k}$ si ha

$$d(x,y) - \epsilon/2 - \epsilon/2 \leq d(x_n, y) - d(x_n, x) \leq |d(x_n, y) - d(x_n, x)|$$

donde

$$d(x,y) - \epsilon \leq \|i(x) - i(y)\|_\infty$$

cioè $i$ è un'isometria.

□

Ci stiamo avvicinando al *Teorema di compattezza di Gromov*; introduciamo prima delle definizioni:

**Definizione 1.2.7** ($\epsilon$-rete)**.** Siano $(X, d)$ uno spazio metrico, $Y \subset X$ e $\epsilon > 0$. Diciamo che $Y$ è una *$\epsilon$-rete* per $X$ se $X \subset [Y]_\epsilon$. Definiamo poi anche

$$\mathrm{Cov}(X, \epsilon) := \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, \text{esistono } x_1, \ldots, x_n \in X \text{ con } X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)\}.$$

Infine poniamo

$$\mathrm{Cap}(X, \epsilon) := \max\{n \in \mathbb{N} \,:\, \text{esistono } x_1, \ldots, x_n \in X \text{ con } B_{\epsilon/2}(x_i) \cap B_{\epsilon/2}(x_j) = \varnothing \text{ per ogni } i \neq j\}.$$

### 1.2.2 Teoremi di completezza e di compattezza

**Teorema 1.2.8** (di completezza di Gromov)**.** *Sia $\{X_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ una successione di Cauchy. Allora tale successione è convergente (nella metrica di Gromov-Hausdorff).*

*Dimostrazione.* Estraendo un'eventuale sottosuccessione, si può assumere che $d_{GH}(X_i, X_{i-1}) < 1/2^i$. Sia poi $d^{i,i+1}$ la metrica su $X_i \sqcup X_{i+1}$ tale che $\delta_H(X_i, X_{i+1}) < 1/2^i$ e costruiamo, per $i < j$, una metrica $d^{i,j}$ su $X_i \sqcup X_j$ come segue:

$$d^{i,j}(x, y) := \inf\left\{\sum_{k=i}^{j-1} d^{k,k+1}(x_k, x_{k+1}) \,:\, x_i = x, x_j = y\right\} \quad x \in X_i,\ y \in X_j.$$

Verifichiamo che in effetti la funzione appena definita verifica la disuguaglianza triangolare: siano $x \in X_i$ e $y, z \in X_j$ (gli altri casi sono uguali o banali). Siano poi $\epsilon > 0$ e $x_k \in X_k$ tali che

$$\begin{aligned}
d^{i,j}(x, z) &= \sum_{k=i}^{j-1} d^{k,k+1}(x_k, x_{k+1}) - \epsilon \\
&= \sum_{k=i}^{j-2} d^{k,k+1}(x_k, x_{k+1}) + d^{j-1,j}(x_{j-1}, x_j) - \epsilon \\
&\leq \sum_{k=i}^{j-2} d^{k,k+1}(x_k, x_{k+1}) + d^{j-1,j}(x_{j-1}, y) + \underbrace{d_{X_j}(y, z)}_{=d^{i,j}(y,z)} - \epsilon
\end{aligned}$$

e prendendo l'estremo inferiore della quantità $\sum_{k=i}^{j-2} d^{k,k+1}(x_k, x_{k+1}) + d^{j-1,j}(x_{j-1}, y)$ al variare degli $x_k \in X_k$ si ottiene che

$$d^{i,j}(x, y) \leq d^{i,j}(x, y) + d^{i,j}(y, z) - \epsilon$$

e la tesi discende dall'arbitrarietà di $\epsilon$.

Per costruzione vale poi

$$d^{i,j}(x_i, x_j) \leq d^{i,k}(x_i, x_k) + d^{k,j}(x_k, x_j) \quad \text{per } i < k < j. \tag{1.4}$$

Dalla definizione appena fornita si osserva che valgono le seguenti disuguaglianze

$$\delta_H^{i,j}(X_i, X_j) \leq \sum_{k=i}^{j-1} \delta_H^{k,k+1}(X_k, X_{k+1}) \leq 2^{1-i} \quad \text{per } 1 \leq i < j. \tag{1.5}$$

(la seconda è una semplice proprietà della somma geometrica, mentre la prima si dimostra come la disuguaglianza triangolare della distanza di Gromov-Hausdorff). Costruiamo ora lo spazio metrico limite $(X, d)$. Poniamo dapprima

$$\hat{X} := \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \, : \, x_i \in X_i \text{ e } \lim_{i,j\to\infty} d^{i,j}(x_i, x_j) = 0 \right\}.$$

Denotiamo con $d_i$ la metrica di $X_i$, e definiamo una pseudometrica $\delta$ in $\hat{X}$ mediante

$$\delta((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) := \limsup_{i\to\infty} d_i(x_i, y_i)$$

(la funzione $\delta$ verifica la disuguaglianza triangolare perché il $\limsup$ la conserva). Infine definiamo $(X, d)$ come spazio metrico quoziente (la relazione di equivalenza sarà $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \iff \delta((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = 0$).

Proviamo che $(X, d)$ è il limite di Gromov-Hausdorff della successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; introduciamo ora un'ulteriore metrica $d^i$ definita su $X_i \sqcup X$ come segue:

$$d^i(y, (x_j)_{j\in\mathbb{N}}) := \limsup_{j\to\infty} d^{i,j}(y, x_j), \quad y \in X_i, (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X.$$

Sia ora $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X$; siccome

$$\lim_{n\to\infty} d^n(x_n, (x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \limsup_{n,j\to\infty} d^{n,j}(x_n, x_j) = 0$$

possiamo scegliere $n \geq i$ tale che $d^n(x_n, (x_j)) < 2^{1-i}$. Da (1.5) si deduce che si può scegliere $y \in X_i$ tale che $d^{i,n}(y, x_n) < 2^{1-i}$. Pertanto da (1.4) si ha

$$d^i(y, (x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \limsup_{j\to\infty} d^{i,j}(y, x_j) \leq d^{i,n}(y, x_n) + \limsup_{j\to\infty} d^{n,j}(x_n, x_j) < 2^{1-i} + 2^{1-i} = 2^{2-i}.$$

Dall'arbitrarietà di $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ si deduce che $X \subset [X_i]_{2^{2-i}}$. Viceversa sia $y \in X_i$ e sia $x_j \in X_j$ tale che $x_i = y$ e $d^{j,j+1}(x_j, x_{j+1}) < 2^{-j}$. Siccome poi, per (1.5), $d^{j,l}(x_j, x_l) \leq 2^{1-j}$ per $l \geq j$, ne segue che $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X$, e dal momento che

$$d^i(y, (x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \limsup_{j\to\infty} d^{i,j}(y, x_j) \leq 2^{1-i}$$

e $y$ è arbitrario, si conclude che $X_i \subset [X]_{2^{1-i}}$. □

**Teorema 1.2.9** (di compattezza di Gromov). *Sia $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *$\mathcal{M}'$ è relativamente compatto per la distanza di Gromov-Hausdorff.*
2. *Esiste una costante $C > 0$ tale che $\mathrm{diam}(X) \leq C$ per ogni $X \in \mathcal{M}'$ ed esiste una funzione $N(\epsilon) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tale che $\mathrm{Cap}(X, \epsilon) \leq N(\epsilon)$ per ogni $X \in \mathcal{M}'$ ed ogni $\epsilon > 0$.*
3. *Esiste una costante $C > 0$ tale che $\mathrm{diam}(X) \leq C$ per ogni $X \in \mathcal{M}'$ ed esiste una funzione $N(\epsilon) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tale che $\mathrm{Cov}(X, \epsilon) \leq N(\epsilon)$ per ogni $X \in \mathcal{M}'$ ed ogni $\epsilon > 0$.*

Prima di procedere con la dimostrazione dimostriamo la seguente

**Proposizione 1.2.10.** *Se $X, Y \in \mathcal{M}$ e $d_{GH}(X, Y) < \delta$, allora*

1. $\mathrm{Cov}(X, \epsilon) \geq \mathrm{Cov}(Y, \epsilon + 2\delta)$.
2. $\mathrm{Cap}(X, \epsilon) \geq \mathrm{Cap}(Y, \epsilon + 2\delta)$.

   *Inoltre comunque scelti $X$ ed $\epsilon > 0$, si ha anche*

3. $\mathrm{Cov}(X, \epsilon) \leq \mathrm{Cap}(X, \epsilon)$.

*Dimostrazione.*

1. Se $n = \mathrm{Cov}(X, \epsilon)$, allora esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i)$. Siccome per ipotesi $Y \subset [X]_\delta$, siano $y \in Y$ e $x \in X$ tali che $d(x, y) < \delta$ (qui $d$ è la solita metrica definita su $X \sqcup Y$). Allora esiste $i$ tale che $x \in B_\epsilon(x_i)$, e quindi $d(x, x_i) < \epsilon$. Si conclude osservando che $d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \epsilon$ donde $y \in B_{\delta+\epsilon}(x_i)$.
2. Se $n = \mathrm{Cap}(Y, \epsilon + 2\delta)$, allora esistono $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tali che le palle $B_{\epsilon/2+\delta}(y_i)$ sono tutte contenute in $Y$ e sono a due a due disgiunte. Per ipotesi $Y \subset [X]_\delta$, e quindi in $[X]_\delta$ ci stanno almeno $n$ palle di raggio $\epsilon/2 + \delta$ a due a due disgiunte. Certamente si ha che $\mathrm{dist}(y_i, \partial\overline{[X]_\delta}) \geq \epsilon/2 + \delta$ per ogni $y_i$; di conseguenza $\mathrm{dist}(y_i, \partial X) \geq \epsilon/2$, che significa che $B_{\epsilon/2}(y_i) \subset X$ per ogni $y_i$.
3. Se $n = \mathrm{Cap}(X, \epsilon)$ e $B_{\epsilon/2}(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, sono palle a due a due disgiunte, allora affermiamo che $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i)$; in caso contrario esiste $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i)$, e la palla $B_{\epsilon/2}(x)$ è disgiunta dalle $B_{\epsilon/2}(x_i)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, contro la massimalità di $n$. Ne segue che $\mathrm{Cov}(X, \epsilon) \leq n$, donde la tesi.

□

Procediamo ora alla dimostrazione del *Teorema di compattezza di Gromov*:

*Dimostrazione.*

**1** $\Longrightarrow$ **2**. Dimostriamo la prima parte di **2**: dal momento che $\mathcal{M}'$ è limitato, esistono $\overline{X} \in \mathcal{M}$ e $r > 0$ tali che $\mathcal{M}' \subseteq B_r(\overline{X})$; in particolare $d_{GH}(X, Y) \leq 2r$ per ogni $X, Y \in \mathcal{M}'$. Fissiamo ora un $\tilde{X} \in \mathcal{M}'$, ed osserviamo che $\delta_H(\tilde{X}, Y) \leq 2r$ per ogni $Y \in \mathcal{M}'$, dove qui $\delta_H$ è la distanza di Hausdorff relativa alla metrica $d_{\tilde{X} \sqcup Y}$ su $\tilde{X} \sqcup Y$. Sia $d = \mathrm{diam}(\tilde{X})$; $\tilde{X}$ è limitato, e quindi contenuto in $B_{d+\epsilon}(x) = \{y \in \tilde{X} \sqcup Y : d_{\tilde{X} \sqcup Y}(x, y) < d + \epsilon\}$, $x \in \tilde{X}$ e $\epsilon > 0$.

Per ipotesi, per ogni $Y \in \mathcal{M}'$ vale $Y \subset [\tilde{X}]_{2r}$, e si vede facilmente che $[\tilde{X}]_{2r} \subset B_{d+2r+\epsilon}(x)$. Di conseguenza $\operatorname{diam}(Y) \leq \operatorname{diam}(B_{d+2r+\epsilon}) = 2(d+2r+\epsilon)$ per ogni $Y \in \mathcal{M}'$. Per una questione puramente "immaginativa" si può pensare di immergere tutti gli spazi in in $\ell^\infty$, per poter "visualizzare" le palle in questione.

Dimostriamo ora la seconda parte. Siccome $\mathcal{M}'$ è totalmente limitato, possiamo trovare una $\epsilon/4$-rete finita $\mathcal{M}'' \subset \mathcal{M}'$. Per la **2** della **Proposizione 1.2.10** si ha

$$\operatorname{Cap}(X, \epsilon) \leq \max_{Y \in \mathcal{M}''} \operatorname{Cap}(Y, \epsilon/2) \quad \text{per ogni } X \in \mathcal{M}'$$

e possiamo porre quindi $N(\epsilon) = \max_{Y \in \mathcal{M}''} \operatorname{Cap}(Y, \epsilon/2)$.

**2** $\Longrightarrow$ **3**. Segue banalmente dalla terza disuguaglianza della **Proposizione 1.2.10**

**3** $\Longrightarrow$ **1**. Assumiamo in questa sede la completezza di $\mathcal{M}'$; per mostrare che $\mathcal{M}'$ è un precompatto, è sufficiente far vedere che ogni successione di spazi metrici in $\mathcal{M}'$ ha una sottosuccessione di Cauchy. Sia quindi $(X_i)_{i\geq 1}$ una successione di spazi metrici in $\mathcal{M}'$. Per ogni $i$ prendiamo un $\epsilon/2$ ricoprimento di $X_i$ (esiste perché gli $X_i$ sono tutti compatti, e quindi totalmente limitati) di cardinalità al più $N(\epsilon/2)$ - stiamo usando l'ipotesi. Sia poi $\Xi_i = \{B_{\epsilon/2}(x_i^\alpha) \,:\, \alpha = 1, \ldots, N_i\}$. Siccome $N(\epsilon/2)$ è finito, si deduce che esiste un $N \leq N(\epsilon/2)$ tale che $|\Xi_i| = N$ per infiniti indici $i$. Questo fornisce una sottosuccessione $(X_i')_{i\geq 1}$ degli elementi di $(X_i)_{i\geq 1}$ che hanno un $\epsilon/2$ ricoprimento di cardinalità esattamente $N$. Prendiamo ora in esame la sottosuccessione $(X_i')_{i\geq 1}$ appena estratta, e consideriamo il seguente array-indicatore:

$$\delta^i_{\alpha\beta} = \left[2d_{X_i}(x_i^\alpha, x_i^\beta)/\epsilon\right] \leq [2\operatorname{diam}(X_i)/\epsilon] \leq [2\,C/\epsilon] < \infty$$

ove con $[\cdot]$ si indica la parte intera. Per ogni $i$ il numero dei possibili valori è finito; pertanto uno di questi array, sia esso $\delta_{\alpha\beta}$, è ripetuto infinite volte. Definiamo ora una seconda estratta:

$$\{X_l''\}_{l\geq 1} = \{X_i' \,:\, \delta^i_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\}.$$

Indicando ora con $x_i^\alpha \,:\, \alpha = 1, \ldots, N$ i centri delle palle dei $X_i''$ si ha certamente

$$|d_{X_i}(x_i^\alpha, x_i^\beta) - d_{X_j}(x_j^\alpha, x_j^\beta)| < \epsilon/2.$$

Definiamo ora una metrica sull'unione disgiunta di due qualsiasi termini $X_i, X_j \in \{X_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ di questa seconda estratta:

$$d(x_i, x_j) = \min\{d_{X_i}(x_i, x_i^\alpha) + d_{X_j}(x_j, x_j^\alpha) + \epsilon/2 \,:\, \alpha = 1, \ldots, N\} \quad x_i \in X_i'',\ x_j \in X_j''.$$

Mostriamo che vale la disuguaglianza triangolare: presi $x_i, x_i' \in X_i''$ e $x_j, x_j' \in X_j''$, per certi $\alpha$ e $\beta$ si ha

$$\begin{aligned}
d(x_i, x_j) + d(x_j, x_i') &= d_{X_i}(x_i, x_i^\alpha) + d_{X_j}(x_j, x_j^\alpha) + d_{X_j}(x_j, x_j^\beta) + d_{X_i}(x_i', x_i^\beta) + \epsilon \\
&= d_{X_i}(x_i, x_i^\alpha) + d_{X_i}(x_i', x_i^\beta) + d_{X_i}(x_i^\alpha, x_i^\beta) - d_{X_i}(x_i^\alpha, x_i^\beta) \\
&\quad + d_{X_j}(x_j, x_j^\alpha) + d_{X_j}(x_j, x_j^\beta) + \epsilon \\
&\geq d_{X_i}(x_i, x_i') - d_{X_i}(x_i^\alpha, x_i^\beta) + d_{X_j}(x_j^\alpha, x_j^\beta) + \epsilon \\
&\geq d_{X_i}(x_i, x_i') + \epsilon/2 = d(x_i, x_i') + \epsilon/2.
\end{aligned}$$

E poi

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) + \underbrace{d(x_j, x'_j)}_{=d_{X_j}(x_j, x'_j)} &= d_{X_i}(x_i, x_i^\alpha) + d_{X_j}(x_j, x_j^\alpha) + \epsilon/2 + d_{X_j}(x_j, x'_j) \\ &\geq d_{X_i}(x_i, x_i^\alpha) + d_{X_j}(x'_j, x_j^\alpha) + \epsilon/2 \\ &\geq \min\{d_{X_i}(x_i, x_i^\gamma) + d_{X_j}(x'_j, x_j^\gamma) \, : \, \gamma\} + \epsilon/2 \\ &= d(x_i, x'_j). \end{aligned}$$

Questa metrica è tale che

$$\delta_H(X''_i, X''_j) < \epsilon \quad \text{per ogni } i, j;$$

è sufficiente infatti osservare che se $x \in X''_i, y \in X''_j$ allora, reindicizzando eventualmente i centri in maniera opportuna, si ottiene che $d(x, y) < 3\epsilon/2$.

Abbiamo quindi mostrato che data una successione $\{X_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}'$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una sottosuccessione $\{X_{n_j}\}_{j\geq 1} \subseteq \{X_n\}_{n\geq 1}$ tale che $d_H(X_{n_{j'}}, X_{n_{j''}}) < \epsilon$ comunque scelti $X_{n_{j'}}, X_{n_{j''}} \in \{X_{n_j}\}_{j\geq 1}$; per estrarre la sottosuccessione di Cauchy è sufficiente applicare un argomento diagonale, già esibito nella dimostrazione della **Proposizione 1.2.5**.

□

# Capitolo 2

# Metrica intrinseca

> Imagine that you ask a mathematician: "What is the distance between New York and Sydney?". Perhaps, you get the answer "about 8 thousand miles". It is formally correct and still absolutely useless: this is the length of a straight tunnel through the Earth. Analogously, every mountaineer knows that distance in mountains is a tricky thing: if you measure it by an optical device, you get the distance "as a crow flies". [...] This little philosophical digression contains a very clear mathematical moral: in many cases, we have to begin with length of paths as the primary notion and only after that can we derive a distance function.
>
> D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov in *A Course in Metric Geometry*

L'idea che viene suggerita dalla citazione è interessate: spesso è più ragionevole avvicinarsi ad un concetto di distanza tra due punti passando per quello di lunghezza di cammini che li connettono. In questo capitolo presenteremo gli spazi di lunghezza insieme ad alcuni risultati notevoli per poi dimostrare un interessante teorema di chiusura, il quale afferma che se una successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di spazi di lunghezza converge nella metrica di Gromov-Hausdorff ad uno spazio metrico completo $X$, allora anche $X$ è uno spazio di lunghezza.

## 2.1 Spazi di lunghezza. Definizioni

**Definizione 2.1.1** (Cammino)**.** Se $X$ è uno spazio topologico, un *cammino* $\gamma$ da $x$ a $y$ è una mappa continua $\gamma : [0, 1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

**Definizione 2.1.2** (Struttura di lunghezza)**.** Una *struttura di lunghezza* (*length structure*) su uno spazio topologico $X$ è una classe $\mathcal{A}$ di cammini ammissibili, che è un sottoinsieme di tutti i cammini continui di $X$, con una mappa $L : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ detta *lunghezza del cammino.*

Tale classe $\mathcal{A}$ deve soddisfare le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{A}$ deve essere chiusa per restrizioni: se $\gamma : [a,b] \to X$ è un cammino ammissibile e $a \leq c < d \leq b$, allora la restrizione $\gamma_{|_{[c,d]}}$ di $\gamma$ su $[c,d]$ è ancora un cammino ammissibile.

2. $\mathcal{A}$ deve essere chiusa per concatenazione (o prodotto) di cammini. In altri termini, se $\gamma : [a,b] \to X$ è tale che le restrizioni $\gamma_1$ e $\gamma_2$ su $[a,c]$ e $[c,b]$ sono entrambe ammissibili, allora anche $\gamma$ è ammissibile (e sarà detto *prodotto* o *concatenazione* di $\gamma_1$ e $\gamma_2$).

3. $\mathcal{A}$ deve essere chiusa per riparametrizzazioni lineari: per un cammino $\gamma : [a,b] \to X$ ed un omeomorfismo $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ della forma $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, la composizione $\gamma \circ \varphi(t) = \gamma(\varphi(t))$ è ancora un cammino ammissibile.

La funzione $L$ deve possedere invece le seguenti proprietà:

1. Additività: $L(\gamma_{|_{[a,b]}}) = L(\gamma_{|_{[a,c]}}) + L(\gamma_{|_{[c,b]}})$ per ogni $c \in [a,b]$.

2. Per un cammino $\gamma : [a,b] \to X$ di lunghezza finita, denotiamo con $L(\gamma, a, t)$ la lunghezza della restrizione di $\gamma : [a,b] \to X$ sul segmento $[a,t]$; si richiede che $L(\gamma, a, \cdot)$ sia una funzione continua.

3. Invarianza per riparametrizzazioni (lineari): $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$ con $\varphi$ omeomorfismo lineare.

4. Se $x \in X$ e $U_x$ è un suo intorno, si richiede che la lunghezza del cammino che connette $x$ con i punti di $X \setminus U_x$ sia $> 0$. In termini:

$$\inf\{L(\gamma) \,:\, \gamma(a) = x,\, \gamma(b) \in X \setminus U_x\} > 0.$$

**Definizione 2.1.3** (Metrica associata alla struttura di lunghezza)**.** Data una struttura di lunghezza, si può definire una metrica associata a tale struttura: presi $x, y \in X$ (qui $X$ è assunto essere uno spazio topologico di Hausdorff), sia

$$d_L(x,y) := \inf\{L(\gamma) \,:\, \gamma[a,b] \to X,\, \gamma \in \mathcal{A},\, \gamma(a) = x \text{ e } \gamma(b) = y\}.$$

Una tale metrica è detta *metrica intrinseca* e uno spazio metrico con metrica intrinseca è detto *spazio di lunghezza*. Una struttura di lunghezza su uno spazio topologico $X$ si dice *completa* se per ogni $x, y \in X$ esiste $\gamma \in \mathcal{A}$ (insieme dei cammini ammissibili) tale che $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$ e $d_L(x,y) = L(\gamma)$. In questo caso il cammino $\gamma$ è detto *cammino più breve*; inoltre una metrica intrinseca è detta *strettamente intrinseca* se la struttura di lunghezza sottesa è completa.

Facciamo poi un'altra osservazione: dato uno spazio metrico $(X,d)$, si può definire la *lunghezza* della curva $\gamma : [0,1] \to X$ come

$$L_d(\gamma) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \,:\, n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1\right\}$$

ove l'estremo superiore è preso su tutti gli $n \in \mathbb{N}$ e su tutte le partizioni $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ dell'intervallo $[0,1]$. La lunghezza $L_d(\gamma)$, a sua volta, induce una metrica, che è automaticamente una metrica intrinseca. Un problema interessante è quello di capire quando la metrica indotta dalla lunghezza $L_d$ e la metrica $d$ coincidano.

## 2.2 Spazi di lunghezza e metrica di Gromov-Hausdorff

Vogliamo ora dimostrare il teorema di chiusura **2.2.9**. Premettiamo alcuni risultati preparatori e alcune definizioni.

**Definizione 2.2.1** (Punto medio)**.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Un punto $z \in X$ è detto *punto medio* (*midpoint*) tra due punti $x, y \in X$ se $d(x, z) = d(z, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$.

**Definizione 2.2.2** (Punto $\epsilon$-medio)**.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Un punto $z \in X$ è detto *punto $\epsilon$-medio* (*$\epsilon$-midpoint*) tra due punti $x, y \in X$ se $|2d(x, z) - d(x, y)| \leq \epsilon$ e $|2d(y, z) - d(x, y)| \leq \epsilon$.

**Proposizione 2.2.3.** *Siano $(X, d_X)$ uno spazio metrico e $X'$ un sottoinsieme denso di $X$. Sia poi $(Y, d_Y)$ uno spazio metrico completo e $f : X' \to Y$ una funzione Lipschitziana. Allora esiste un'unica funzione continua $\tilde{f} : X \to Y$ tale che $\tilde{f}_{|X'} = f$. Inoltre anche $\tilde{f}$ è Lipschitziana.*

*Dimostrazione.* Sia $C$ la costante di Lipschitz di $f$. Per ogni $x \in X$ definiamo $\tilde{f}(x) \in Y$ come segue: scelta una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $x_n \in X'$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Osserviamo poi che $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $Y$: infatti abbiamo $d_Y(f(x_i), f(x_j)) \leq C d_X(x_i, x_j)$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ e $d_X(x_i, x_j) \to 0$ per $i, j \to \infty$. Quindi la successione $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge; definiamo pertanto $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Abbiamo così una funzione $\tilde{f} : X \to Y$. La disuguaglianza $d_Y(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) \leq C d_X(x, x')$ per $x, x' \in X$ segue dal passaggio al limite di disuguaglianze simili per $f$: infatti se $\lim x_n = x, \lim x'_n = x', \lim f(x_n) = \tilde{f}(x)$ e $\lim \tilde{f}(x'_n) = x'$ allora

$$d_Y(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) = \lim_{n\to\infty} d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \leq C \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n) = d_X(x, x').$$

L'unicità di $\tilde{f}$ è banale: se due mappe continue coincidono su di un insieme denso, allora coincidono ovunque. □

**Teorema 2.2.4.** *Sia $(X, d_X)$ uno spazio metrico completo.*

1. *Se per ogni $x, y \in X$ esiste un punto medio, allora $d_X$ è strettamente intrinseca.*

2. *Se per ogni $x, y \in X$ e ogni $\epsilon > 0$ esiste un punto $\epsilon$-medio, allora $d_X$ è intrinseca.*

*Dimostrazione.* Per dimostrare che una metrica è intrinseca bisogna mostrare che per ogni coppia di punti $x, y \in X$ ci sono cammini che connettono $x$ e $y$ le cui lunghezze approssimano $d_X(x, y)$ con precisione arbitraria. Per mostrare l'affermazione **1** bisogna provare l'esistenza di un cammino la cui lunghezza sia uguale a $d_X(x, y)$; costruiremo quindi un cammino $\gamma : [0, 1] \to X$ tra $x$ e $y$ tale che $\gamma(x) = 0$, $\gamma(y) = 1$ e $L(\gamma) = d_X(x, y)$. Operiamo come segue: siccome esiste $z$ punto medio tra $x, y$ per ipotesi, definiamo $\gamma(1/2) = z$; assegniamo poi a $\gamma(1/4)$ il punto medio tra $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1/2) = z$, a $\gamma(3/4)$ il punto medio tra $\gamma(1/2) = z$ e $\gamma(1) = y$ e così via, andando a coprire tutti i razionali diadici, ovvero i razionali della forma $k/2^m$ $(k, m \in \mathbb{N})$, che sappiamo essere densi in $[0, 1]$. In accordo con la costruzione, per ogni coppia di diadici $t, t'$ si ha

$$d_X(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'| d_X(x, y)$$

il che implica che $\gamma$ definita sui diadici è Lipschitziana. Siccome $X$ è completo, per la **Proposizione 3.2.8** possiamo estendere $\gamma$ ad una funzione continua su tutto $[0,1]$, che è il cammino cercato. Se infine definiamo su $\gamma$ e sulle sue restrizioni una struttura di lunghezza mediante

$$L(\gamma_{|[a,b]}) = d_X(a,b)$$

si ottiene che $d$ è strettamente intrinseca. $\square$

**Definizione 2.2.5** (Corrispondenza)**.** Siano $X$ e $Y$ due insiemi. Una *corrispondenza* tra $X$ e $Y$ è un insieme $\mathfrak{R} \subset X \times Y$ soddisfacente la seguente condizione: per ogni $x \in X$ esiste almeno un $y \in Y$ tale che $(x,y) \in \mathfrak{R}$, e similmente per ogni $y \in Y$ esiste un $x \in X$ tale che $(x,y) \in \mathfrak{R}$.

**Esempio 2.2.6.** Ogni funzione suriettiva $f : X \to Y$ definisce una corrispondenza $\mathfrak{R}$ tra $X$ e $Y$:

$$\mathfrak{R} = \{(x, f(x)) \,:\, x \in X\}.$$

Chiamiamo questa $\mathfrak{R}$ la *corrispondenza associata ad f.*

**Definizione 2.2.7** (Distorsione di una corrispondenza)**.** Sia $\mathfrak{R}$ una corrispondenza tra due spazi metrici $(X, d_X)$ e $(Y, d_Y)$. La *distorsione* di $\mathfrak{R}$ è definita da

$$\operatorname{dis}\mathfrak{R} = \sup\{|d_X(x,x') - d_Y(y,y')| \,:\, (x,y),(x',y') \in \mathfrak{R}\}.$$

**Teorema 2.2.8.** *Per ogni coppia di spazi metrici $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ si ha*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf_{\mathfrak{R}}(\operatorname{dis}\mathfrak{R})$$

*dove $\mathfrak{R}$ è una corrispondenza tra $X$ e $Y$.*

Una dimostrazione di questo teorema si può trovare in [2].

**Teorema 2.2.9.** *Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di spazi di lunghezza separabili e $(X,d)$ uno spazio metrico completo. Sia inoltre $X_n \xrightarrow{GH} X$. Allora $X$ è uno spazio di lunghezza.*

*Dimostrazione.* Per il **Teorema 2.2.4** è sufficiente mostrare che ogni coppia di punti $x, y \in X$ possiede un punto $\epsilon$-medio, per ogni $\epsilon > 0$. Sia $n$ tale che $d_{GH}(X_n, X) < \epsilon/10$. Allora per il **Teorema 2.2.8** esiste una corrispondenza $\mathfrak{R}$ tra $X$ e $X_n$ tale che $\operatorname{dis}\mathfrak{R} < \epsilon/5$. Siano $\tilde{x}, \tilde{y} \in X_n$ i punti corrispondenti a $x, y$. Siccome $X_n$ è uno spazio di lunghezza, esiste $\tilde{z} \in X_n$ che sia punto $(\epsilon/5)$-medio per $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$. Sia $z \in X$ il corrispondente di $\tilde{z}$; allora si ha

$$\begin{aligned}
|d_X(x,z) - \frac{1}{2}d_X(x,y)| &= |d_X(x,z) - \frac{1}{2}d_X(x,y) + d_{X_n}(\tilde{x},\tilde{z}) - d_{X_n}(\tilde{x},\tilde{z})| \\
&\le |d_X(x,z) - d_{X_n}(\tilde{x},\tilde{z})| + |d_{X_n}(\tilde{x},\tilde{z}) - \frac{1}{2}d_X(x,y)| \\
&\le |d_X(x,z) - d_{X_n}(\tilde{x},\tilde{z})| + |\frac{1}{2}d_{X_n}(\tilde{x},\tilde{y}) - \frac{1}{2}d_X(x,y)| \\
&+ |d_{X_n}(\tilde{x},\tilde{z}) - \frac{1}{2}d_{X_n}(\tilde{x},\tilde{y})| \\
&\le 2\operatorname{dis}\mathfrak{R} + |d_{X_n}(\tilde{x},\tilde{z}) - \frac{1}{2}d_{X_n}(\tilde{x},\tilde{y})| \\
&\le 2\epsilon/5 + \epsilon/5 < \epsilon
\end{aligned}$$

cioè $z$ è punto $\epsilon$-medio per $x$ e $y$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

# Capitolo 3

# Esistenza di geodetiche in spazi metrici

The shortest distance between people is a smile.

Victor Borge citato da Eberhard Zeidler in
*Nonlinear Functional Analysis and its Applications*

## 3.1 Formulazioni del problema e definizioni preliminari

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Data una curva $\gamma : [a, b] \to X$, denotiamo con $\Gamma := \gamma([a, b])$ la sua immagine, e definiamo

$$\mathrm{Var}_{a'}^{b'}(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \ : \ a' \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b' \right\}$$

per ogni coppia $a', b'$ con $a \leq a' < b' \leq b$. Per analogia con il caso $X = \mathbb{R}^n$ e $d$ distanza euclidea, la quantità $\mathrm{Var}_{a'}^{b'}(\gamma)$ rappresenta la lunghezza della curva $\gamma$ ristretta all'intervallo $[a', b']$ rispetto alla metrica $d$. Da qui in avanti scriveremo $\mathrm{Var}(\gamma) = \mathrm{Var}_{a'}^{b'}(\gamma)$; inoltre diremo che una curva è *rettificabile* se $\mathrm{Var}(\gamma) < \infty$, cioè se $\gamma$ ha lunghezza finita.

**Definizione 3.1.1** (Spazio delle funzioni Lipschitziane e costante di Lipschitz)**.** Se $(X, d_X)$ e $(Y, d_Y)$ sono due spazi metrici, denotiamo con $\mathrm{Lip}(X, Y)$ lo *spazio delle funzioni Lipschitziane* a valori in $Y$ e definite in $X$; cioè una funzione $f : X \to Y$ appartiene a $\mathrm{Lip}(X, Y)$ se e solo se esiste ua costante $L \geq 0$ tale che

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \text{ per ogni } x, y \in X.$$

Definiamo poi la *costante di Lipschitz di $f$* come

$$\mathrm{Lip}(f) = \inf\{L \ : \ d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \text{ per ogni } x, y \in X\}.$$

Diremo infine che $f$ è *$L$-Lipschitziana* se $L \geq \mathrm{Lip}(f)$.

*Osservazione* 3.1.2. Se $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ sono spazi metrici e $f \in \mathrm{Lip}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Lip}(Y,Z)$, allora $g \circ f \in \mathrm{Lip}(X,Z)$ e $\mathrm{Lip}(g \circ f) \leq \mathrm{Lip}(f)\mathrm{Lip}(g)$.

**Definizione 3.1.3** (Misura unidimensionale di Hausdorff)**.** Sia $(X,d)$ uno spazio metrico. Per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ definiamo la *misura unidimensionale di Hausdorff* come

$$\mathcal{H}^1(A) := \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^1_\delta(A)$$

ove

$$\mathcal{H}^1_\delta := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(A_i) \;:\; A \subseteq \bigcup_i A_i,\ \mathrm{diam}(A_i) < \delta \right\}.$$

Dati $x, y \in X$ il problema dell'esistenza di geodetiche che connettono $x$ a $y$ ha due possibili formulazioni. La **prima**, detta *formulazione parametrica*, si domanda se esiste $\gamma : [a,b] \to X$ tale che si realizzi il minimo

$$\min\{\mathrm{Var}(\gamma) \;:\; \gamma \in \mathrm{Lip}([a,b], X),\ \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y\}.$$

La **seconda**, detta *formulazione intrinseca*, è il seguente problema di minimo

$$\min\{\mathcal{H}^1(C) \;:\; C \text{ connesso, chiuso, } C' \subseteq C\}$$

con $C' \subseteq X$ chiuso e non vuoto.

**Definizione 3.1.4** (Derivata metrica)**.** Data una curva $\gamma : [a,b] \to X$, definiamo la *derivata metrica* di $\gamma$ nel punto $t \in (a,b)$ come il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|},$$

se esso esiste. In tal caso lo indichiamo con $|\dot{\gamma}|(t)$.

## 3.2 Soluzione della formulazione parametrica

Ci proponiamo ora di dimostrare che, sotto opportune ipotesi, la formulazione parametrica del problema delle geodetiche ha soluzione. Ci servono dei teoremi preparatori.

### 3.2.1 Alcuni risultati preliminari

**Teorema 3.2.1** (Rademacher)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$ una funzione Lipschitziana. Allora esiste un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ di misura di Lebesgue nulla tale che $f$ è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^n \setminus A$.*

Una dimostrazione di questo teorema si può trovare in [4].

**Lemma 3.2.2** (Fatou)**.** *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio con misura, e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili non negative definite su $X$. Allora*

$$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Una dimostrazione di questo lemma si può trovare ad esempio in [6].

**Teorema 3.2.3.** *Per ogni curva Lipschitziana $\gamma : [a,b] \to X$ la derivata metrica esiste in quasi ogni punto di $[a,b]$ (per la misura di Lebesgue). Inoltre si ha*

$$\mathrm{Var}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}|(t)\, dt.$$

*Dimostrazione.* Siccome $\gamma$ è continua la sua immagine $\Gamma = \gamma([a,b])$ è un compatto, e pertanto è separabile. Sia quindi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ un sottoinsieme denso di $\Gamma$. Definiamo alcune funzioni Lipschitziane ausiliarie:

$$\varphi_n(t) := d(\gamma(t), x_n) \in \mathrm{Lip}([a,b]).$$

Per il **Teorema 3.2.1**, la derivata $\dot{\varphi}_n$ esiste in quasi ogni punto di $[a,b]$. Definendo poi

$$m(t) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\dot{\varphi}_n(t)|$$

proveremo che

$$|\dot{\gamma}|(t) = m(t) \text{ per quasi ogni } t.$$

Poiché la funzione $x \mapsto d(x, x_n)$ è 1-Lipschitziana, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha, dalla disuguaglianza triangolare inversa

$$\liminf_{h\to 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|} \geq \liminf_{h\to 0} \frac{|\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)|}{|h|} = |\dot{\varphi}_n(t)| \tag{3.1}$$

valida per quasi ogni $t \in [a,b]$. Prendendo poi l'estremo superiore rispetto ad $n$, otteniamo

$$\liminf_{h\to 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|} \geq m(t) \text{ per quasi ogni } t \in [a,b]$$

D'altro canto si ha

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), \gamma(s)) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |d(\gamma(t), x_n) - d(\gamma(s), x_n)| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_s^t \dot{\varphi}_n(\tau)\, d\tau \right| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_s^t |\dot{\varphi}_n(\tau)|\, d\tau \leq \int_s^t m(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{3.2}$$

dove la prima uguaglianza deriva dal fatto che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è densa in $\Gamma$, e quindi possiamo estrarre da essa una sottosuccessione convergente a $\gamma(t)$ (o a $\gamma(s)$) in modo tale che sia realizzata l'uguaglianza - $\sup_{n\in\mathbb{N}} |d(\gamma(t), x_n) - d(\gamma(s), x_n)|$ non può eccedere $d(\gamma(t), \gamma(s))$ per la disuguaglianza triangolare inversa. Osserviamo inoltre che la funzione $m$ è misurabile in quanto sup di una famiglia di funzioni misurabili. Dall'**Osservazione 3.1.2** si ha che $\mathrm{Lip}(\varphi_n) \leq \mathrm{Lip}(\gamma)$. Quindi, siccome la costante di Lipschitz "controlla" la derivata, si ha che $|m(t)| \leq \mathrm{Lip}(\gamma)$ e pertanto $m$ è integrabile su $[a,b]$. Sia $t$ un punto di Lebesgue per $m$; da (3.2) discende che

$$\limsup_{h\to 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|} \leq \limsup_{h\to 0} \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} m(\tau)\, d\tau \right| = m(t).$$

Combinando quest'ultima con (3.1) otteniamo che $|\dot\gamma|(t) = m(t)$ per quasi ogni $t \in [a,b]$ (in particolare il limite esiste).

Mostriamo ora che
$$\mathrm{Var}(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma|(t)\,dt.$$
Da (3.2) e da $|\dot\gamma|(t) = m(t)$ abbiamo che
$$\sum_{i=1}^{n-1} d(\gamma(t_{i+1}),\gamma(t_i)) \le \sum_{i=1}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot\gamma|(\tau)\,d\tau \le \int_a^b |\dot\gamma|(\tau)\,d\tau$$
per ogni scelta di $a \le t_1 \le \cdots \le t_n \le b$. Prendendo l'estremo superiore su tutte queste partizioni si ottiene che
$$\mathrm{Var}(\gamma) \le \int_a^b |\dot\gamma|(t)\,dt.$$
Per provare la disuguaglianza opposta, prendiamo $\epsilon > 0$ e poniamo $h = (b-a)/n$ e $t_i = a+ih$ ove $n \in \mathbb{N}^{\ge 2}$ tale che $h \le \epsilon$, e osserviamo che
$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_a^{b-\epsilon} d(\gamma(t+h),\gamma(t))\,dt &\le \frac{1}{h}\int_0^h \sum_{i=0}^{n-2} d(\gamma(\tau+t_{i+1}),\gamma(\tau+t_i))\,d\tau\\ &\le \frac{1}{h}\int_0^h \mathrm{Var}(\gamma)\,d\tau = \mathrm{Var}(\gamma)\end{aligned}$$
dove la prima disuguaglianza si ottiene prima operando la sostituzione $t \mapsto \tau + t_i$ e poi utilizzando ripetutamente la disuguaglianza triangolare sulla partizione di $[a,b]$ sopra definita, mentre la seconda è ottenuta osservando che $a \le \tau + t_i \le b$ per ogni $\tau \in (0,h)$ e per ogni $i = 0,1,\ldots,n-1$ e ricordando la definizione di $\mathrm{Var}(\gamma)$. Per concludere, dalla definizione di $|\dot\gamma|$ e dal *Lemma di Fatou* (**Lemma 3.2.2**), con la stessa notazione di sopra otteniamo
$$\begin{aligned}\int_a^{b-\epsilon} |\dot\gamma|(t)\,dt &= \int_a^{b-\epsilon} \liminf_{n\to\infty} \frac{d(\gamma(t+h),\gamma(t))}{h}\,dt\\ &\le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{h}\int_a^{b-\epsilon} d(\gamma(t+h),\gamma(t))\,dt \le \mathrm{Var}(\gamma).\end{aligned}$$
La disuguaglianza
$$\int_a^b |\dot\gamma|(t)\,dt \le \mathrm{Var}(\gamma)$$
segue dall'arbitrarietà di $\epsilon$. Questo conclude la dimostrazione del teorema. □

*Osservazione* 3.2.4. Se $\gamma : [a,b] \to X$ è una curva a variazione finita e $l(t) = \mathrm{Var}_a^t(\gamma)$ allora si ha
$$d(\gamma(t+h),\gamma(t)) \le l(t+h) - l(t), \quad a \le t \le t+h \le b.$$
Infatti direttamente dalla definizione di variazione totale e dall'additività dell'estremo superiore si ha che
$$\mathrm{Var}_t^{t+h}(\gamma) + \mathrm{Var}_a^t(\gamma) = \mathrm{Var}_a^{t+h}(\gamma) \longrightarrow \mathrm{Var}_t^{t+h}(\gamma) = \mathrm{Var}_a^{t+h}(\gamma) - \mathrm{Var}_a^t(\gamma)$$
e siccome vale banalmente $d(\gamma(t+h),\gamma(t)) \le \mathrm{Var}_t^{t+h}$ si ha la tesi.

Inoltre se $l(t)$ è continua allora anche $\gamma$ è continua. In particolare se $l$ è Lipschitziana anche $\gamma$ lo è, e $\mathrm{Lip}(\gamma) \le \mathrm{Lip}(l)$.

### 3.2.2 Un Teorema di riparametrizzazione e soluzione della formulazione parametrica

**Teorema 3.2.5** (di riparametrizzazione)**.** *Supponiamo che* $\gamma \in \mathrm{Lip}([a,b],X)$*, e sia* $L = Var(\gamma)$ *la sua variazione totale. Allora esiste una curva Lipschitziana* $\tilde{\gamma} : [0,L] \to X$ *tale che* $|\dot{\tilde{\gamma}}| = 1$ *quasi ovunque in* $[0,L]$ *e* $\tilde{\gamma}([0,L]) = \gamma([a,b])$*.*

*Dimostrazione.* Senza ledere le generalità possiamo supporre che $a = 0$. Dopo aver posto $l(t) = \mathrm{Var}_0^t(\gamma)$, definiamo

$$h(t) := \inf\{s \in [0,b] \,:\, l(s) = t\}, \ t \in [0,L]$$

e osserviamo che $h(0) = 0$, che $h$ è crescente e che $h(L) \leq b$. Inoltre si ha

$$l(h(t)) = t \quad \text{e} \quad \gamma(s) = \gamma(h(l(s))) \tag{3.3}$$

per $t \in [0,L]$ e $s \in [0,b]$. Infatti la prima uguaglianza discende direttamente dalla definizione di $h$ mentre la seconda segue dall'**Osservazione 3.2.4**, osservando che $h(l(s)) \leq s$ e che

$$d(\gamma(h(l(s))), \gamma(s)) \leq \mathrm{Var}_{h(l(s))}^s(\gamma) = l(s) - l(h(l(s))) = l(s) - l(s) = 0.$$

Definiamo poi

$$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(h(t)), \quad t \in [0,L].$$

Vogliamo dimostrare che la curva $\tilde{\gamma}$ ha le proprietà richieste. Direttamente dalla definizione di $h$ si ottiene l'identità

$$\mathrm{Var}_0^t(\tilde{\gamma}) = t \quad \text{per ogni } t \in [0,L]. \tag{3.4}$$

Infatti se $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t$, ponendo $s_i = h(t_i)$ si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} d(\tilde{\gamma}(t_{i+1}), \tilde{\gamma}(t_i)) &= \sum_{i=1}^{n-1} d(\gamma(s_{i+1}), \gamma(s_i)) \\ &\leq \mathrm{Var}_0^{s_n}(\gamma) = l(s_n) = t_n \leq t\end{aligned}$$

che implica direttamente

$$\mathrm{Var}_0^t(\tilde{\gamma}) \leq t.$$

D'altro canto per $t \in [0,L]$ e $\epsilon > 0$ possiamo trovare dei numeri $0 = s_1 \leq \cdots \leq s_n = h(t)$ tali che

$$l(h(t)) \leq \epsilon + \sum_{i=1}^{n-1} d(\gamma(s_{i+1}), \gamma(s_i))$$

e usando (3.3) otteniamo

$$\begin{aligned}t &\leq \epsilon + \sum_{i=1}^{n-1} d(\gamma(h(l(s_{i+1}))), \gamma(h(l(s_i)))) = \epsilon + \sum_{i=1}^{n-1} d(\tilde{\gamma}(l(s_{i+1})), \tilde{\gamma}(l(s_i))) \\ &\leq \epsilon + \mathrm{Var}_{l(s_1)}^{l(s_n)}(\gamma) = \epsilon + \mathrm{Var}_0^{l(h(t))} = \epsilon + \mathrm{Var}_0^t(\tilde{\gamma})\end{aligned}$$

che implica (3.4), data l'arbitrarietà di $\epsilon$. In particolare (3.4) e l'**Osservazione 3.2.4** permettono di affermare che $\tilde{\gamma}$ è 1-Lipschitziana.

Possiamo ora concludere: per il **Teorema 3.2.3** otteniamo

$$t = \mathrm{Var}_0^t(\tilde{\gamma}) = \int_0^t |\dot{\tilde{\gamma}}|(\tau)\, d\tau \quad \text{per ogni } t \in [0,1]$$

e, differenziando ambo i lati rispetto a $t$ abbiamo $|\dot{\tilde{\gamma}}|(t) = 1$ per quasi ogni $t$. Infine da (3.3) e dalla definizione di $\tilde{\gamma}$ otteniamo anche $\gamma([a,b]) = \tilde{\gamma}([0,L])$.

□

**Definizione 3.2.6** (Equicontinuità)**.** Siano $(X, d_X)$ e $(Y, d_Y)$ due spazi metrici e $F$ una famiglia di funzioni definite da $X$ in $Y$. La famiglia $F$ si dice *equicontinua* nel punto $x_0 \in X$ se per per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ per ogni $f \in F$ e per ogni $x$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$.

**Teorema 3.2.7** (Ascoli-Arzelà)**.** *Siano $(X, d_X)$ e $(K, d_K)$ due spazi metrici con $K$ compatto, e sia $\{\gamma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue da $K$ ad $X$ tali che:*

- *$\{\gamma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ è equicontinua.*
- *Esiste un insieme compatto $C \subseteq X$ tale che, per ogni corpo $\epsilon$-parallelo $[C]_\epsilon$ di $C$, si abbia $\gamma_m(K) \subseteq [C]_\epsilon$, a patto che $m$ sia grande abbastanza.*

*Allora esiste $\gamma : K \to C$ ed una sottosuccessione $\{\gamma_{m_k}\}_{m_k\in\mathbb{N}}$ che converge uniformemente a $\gamma$ su $K$.*

Una dimostrazione di questo teorema si può trovare in [1].

**Proposizione 3.2.8.** *Siano $(X, d)$ uno spazio di lunghezza e $\gamma : [a,b] \to X$ una curva. Se $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di curve rettificabili (cioè di lunghezza finita) che converge puntualmente a $\gamma$, allora si ha*

$$\mathrm{Var}(\gamma) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\gamma_n).$$

*Dimostrazione.* Siano $\epsilon > 0$ ed una partizione $a = t_0 < t_2 < \cdots < t_N = b$ per $\gamma$ tali che

$$\mathrm{Var}(\gamma) - \sum_{j=1}^{N} d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) < \epsilon.$$

Sia poi $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \geq \bar{k}$ e per ogni $t_j$ della partizione si abbia

$$d(\gamma_k(t_{j-1}), \gamma(t_j)) < \epsilon/N.$$

Dalla disuguaglianza triangolare segue immediatamente che

$$d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq d(\gamma(t_{j-1}), \gamma_k(t_{j-1})) + d(\gamma_k(t_{j-1}), \gamma_k(t_j)) + d(\gamma_k(t_j), \gamma(t_j))$$

da cui segue subito

$$|d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) - d(\gamma_k(t_{j-1}), \gamma_k(t_j))| \leq d(\gamma(t_{j-1}), \gamma_k(t_{j-1})) + d(\gamma(t_j), \gamma_k(t_j)) \leq 2\epsilon/N$$

e questo fornisce

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\gamma) &\leq \sum_{j=1}^{N} d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) + \epsilon \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} d(\gamma_k(t_{j-1}), \gamma_k(t_j)) + \epsilon + \frac{2\epsilon}{N} \cdot N \\ &\leq \mathrm{Var}(\gamma_k) + 3\epsilon.\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $\epsilon$ discende che

$$\mathrm{Var}(\gamma) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\gamma_n).$$

□

**Teorema 3.2.9.** *Sia $(X, d)$ uno spazio metrico compatto. Allora il problema di minimo*

$$\min\{\mathrm{Var}(\gamma) \,:\, \gamma \in \mathrm{Lip}([a, b], X),\, \gamma(a) = x,\, \gamma(b) = y\}$$

*ammette soluzione, purché la classe delle curve Lipschitziane che connettono $x$ e $y$ sia non vuota.*

*Dimostrazione.* Sia

$$L = \inf\{\mathrm{Var}(\gamma) \,:\, \gamma \in \mathrm{Lip}([a, b], X),\, \gamma(a) = x,\, \gamma(b) = y\}$$

e sia $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzante, ovverosia una successione di curve $\gamma_n : [a, b] \to X$ tali che

$$\gamma_n(a) = x, \quad \gamma_n(b) = y, \quad \lim_{n\to\infty} L_n = L$$

dove $L_n = \mathrm{Var}(\gamma_n)$. Senza ledere le generalità possiamo assumere che $L > 0$ (nel caso $x = y$ il problema è banale) e che $L_n \leq L + 1$. In accordo con il **Teorema 3.2.5** possiamo assumere che $\gamma_n$ sia definita su $[0, L_n]$ con $|\dot\gamma_n| = 1$ quasi ovunque; inoltre con i cambi di variabile $t \mapsto tL_n/L$ possiamo assumere che le $\gamma_n$ siano tutte definite su $[0, L]$ e che $|\dot\gamma_n| = L_n/L$.

In particolare abbiamo che $\mathrm{Lip}(\gamma_n) \leq (L+1)/L$ e quindi la successione $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è equicontinua. Siccome $X$ è compatto, per il *Teorema di Ascoli-Arzelà* (**Teorema 3.2.7**) si ottiene l'esistenza di una sottosuccessione $\{\gamma_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}} \subset \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente su $[0, L]$ ad una funzione Lipschitziana $\gamma$. Si conclude per la **Proposizione 3.2.8**:

$$L \leq \mathrm{Var}(\gamma) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Var}(\gamma_{n_k}) = \liminf_{k\to\infty} L_{n_k} = L$$

che prova che $L = \mathrm{Var}(\gamma)$.

□

Osserviamo che in virtù del **Teorema 3.2.11** le ipotesi sullo spazio metrico $(X, d)$ del **Teorema 3.2.9** possono essere rilassate: basta infatti che sia localmente compatto e completo. Così facendo il **Teorema 3.2.9** sarebbe applicabile anche a $\mathbb{R}^n$.

Concludiamo il paragrafo enunciando un importante teorema relativo alla completezza di spazi di lunghezza localmente compatti.

**Definizione 3.2.10** (Geodetica)**.** Sia $X$ uno spazio metrico. Una curva $\gamma : I \to X$ è detta *geodetica* se per ogni $t \in I$ esiste un intorno $J \subset I$ di $t$ tale che per ogni coppia di punti $t_1, t_2 \in J$ si abbia

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|.$$

**Teorema 3.2.11** (Hopf-Rinow-Cohn-Vossen)**.** *Sia $X$ uno spazio di lunghezza localmente compatto. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$X$ è completo.*
2. *Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $X$ è compatto.*
3. *Ogni geodetica $\gamma : [0, a) \to X$ con $a < +\infty$ può essere estesa ad un cammino continuo $\overline{\gamma} : [0, a] \to X$.*
4. *Esiste un punto $p \in X$ tale che ogni cammino più breve (shortest path) $\gamma : [0, a) \to X$ con $\gamma(0) = p$ può essere esteso ad un cammino continuo $\overline{\gamma} : [0, a] \to X$.*

Questo teorema generalizza un teorema classico dovuto a H. Hopf e a W. Rinow, il quale si limitava al caso di varietà riemanniane. Una dimostrazione del **Teorema 3.2.11** si può trovare in [2].

## 3.3 Soluzione della formulazione intrinseca

In questa sezione mostreremo che anche la formulazione intrinseca del problema delle geodetiche ha soluzione.

### 3.3.1 Teoremi di rettificabilità

**Definizione 3.3.1** (Totale limitatezza)**.** Uno spazio metrico si dice *totalmente limitato* se per ogni $r > 0$ esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)$.

**Definizione 3.3.2** ($\epsilon$-connessione)**.** Sia $(X, d)$ spazio metrico. Siano poi $C \subseteq X$ e $x, y \in C$. Diciamo che $x, y$ sono *$\epsilon$-connessi* se esistono $x_1, \ldots, x_n \in C$ tali che $x_1 = x$, $x_n = y$ e $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$. In tal caso diciamo che $\{x_1, \ldots, x_n\}$ è una *$\epsilon$-catena* che congiunge $x$ e $y$ in $C$.

**Lemma 3.3.3** (Bound inferiore per la densità)**.** *Se $C \subseteq X$ è connesso e $0 < r < \mathrm{diam}(C)/2$, allora*

$$\mathcal{H}^1(C \cap B_r(x)) \geq r, \quad \textit{per ogni } x \in C.$$

Una dimostrazione di questo fatto si trova in [1].

**Teorema 3.3.4** (Primo teorema di rettificabilità)**.** *Sia $(X, d)$ uno spazio metrico completo e $C \subseteq X$ un suo sottoinsieme chiuso e connesso con $\mathcal{H}^1(C) < +\infty$. Allora $C$ è compatto e connesso da curve iniettive e rettificabili.*

*Dimostrazione.* Sia $x_0 \in C$ e sia $\epsilon > 0$ tale che $\epsilon < \operatorname{diam}(C)$. Per $n \geq 1$ prendiamo in maniera induttiva

$$x_n \in C \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} B_\epsilon(x_i)$$

interrompendo il procedimento non appena $\bigcup_{i=0}^{n-1} B_\epsilon(x_i)$ copre tutto $C$. Mostriamo che ciò avviene dopo un numero finito di passi: infatti gli insiemi $C \cap B_{\epsilon/2}(x_i)$ sono a due a due disgiunti ed hanno distanza (di Hausdorff) positiva l'uno dall'altro. Quindi, dopo un numero $n$ di passi abbiamo dal **Lemma 3.3.3** che

$$\mathcal{H}^1(C) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{H}^1(C \cap B_{\epsilon/2}(x_i)) \geq n\frac{\epsilon}{2}$$

e siccome $\mathcal{H}^1(C) < +\infty$ per ipotesi, il procedimento si deve arrestare dopo un numero finito di passi. Questa costruzione prova che $C$ è totalmente limitato, e quindi è compatto (perché $X$ è completo e $C$ è chiuso).

Senza perdere di generalità, visto che l'enunciato del teorema è "invariante per isometrie", possiamo assumere che $X = \ell^\infty$, in virtù del **Teorema 1.2.6** (ricordiamo che $\ell^\infty$ *non* è separabile ma è completo con la norma $\|\cdot\|_\infty$).

Siano ora $\epsilon > 0$ e $x \in C$; definiamo

$$C'_x := \{y \in C \, : \, x \text{ e } y \text{ sono } \epsilon\text{-connessi in } C\}.$$

È facile vedere che $C'_x$ è chiuso e aperto in $C$: infatti sia $y \in C'_x$ e sia $\{y = y_1, y_2, \ldots, y_n = x\}$ una $\epsilon$-catena per $y$. Allora per ogni $w \in B_{\epsilon/2}(y)$ l'insieme $\{w, y = y_1, y_2, \ldots, y_n = x\}$ è una $\epsilon$-catena per $w$ e quindi $B_{\epsilon/2}(y) \subset C'_x$. Ne segue che $C'_x$ è aperto. Del resto se $y \in C'_x$, è chiaro che $B_r(y) \cap C'_x \neq \varnothing$ per ogni $0 < r < \epsilon$ (per la stessa ragione di prima), e a maggior ragione per ogni $r > 0$. Quindi $C'_x$ contiene tutti i suoi punti di chiusura, e pertanto è chiuso. Ne segue che $C'_x = C$ perché $C$ è connesso. Ne discende che per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni $y \in C$ possiamo trovare una $\epsilon$-catena $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq C$ che connette $x$ e $y$. Inoltre, eventualmente riducendo la catena, possiamo assumere che

$$d(x_i, x_j) > \epsilon \quad \text{se} \quad |i - j| > 1.$$

Osserviamo che questa disuguaglianza implica direttamente che la distanza tra due palle $B_{\epsilon/2}(x_i)$ e $B_{\epsilon/2}(x_j)$ è positiva purché $i$ e $j$ siano entrambi pari od entrambi dispari. Pertanto otteniamo, dall'additività della misura

$$\mathcal{H}^1(C) \geq \mathcal{H}^1\left(C \cap \bigcup_{i \text{ dispari}} B_{\epsilon/2}(x_i)\right) = \sum_{i \text{ dispari}} \mathcal{H}^1\left(C \cap B_{\epsilon/2}(x_i)\right)$$

e se $\epsilon < \operatorname{diam}(C)$, dal **Lemma 3.3.3** discende che

$$\mathcal{H}^1(C) \geq \sum_{i \text{ dispari}} \frac{\epsilon}{2}.$$

Ripetendo l'argomento utilizzando gli indici pari otteniamo infine

$$2\mathcal{H}^1(C) \geq n\frac{\epsilon}{2}$$

che fornisce un limite superiore alla dimensione/lunghezza $n$ dell'$\epsilon$-catena in termini di $\epsilon$ e di $\mathcal{H}^1(C)$. Dati quindi $x, y \in C$ e $\epsilon > 0$ con $\epsilon < \mathrm{diam}(C)$, possiamo ottenere una $\epsilon$-catena $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq C$ che connette $x$ e $y$, e la dimensione/lunghezza $n$ della catena soddisfa $n \leq 4\mathcal{H}^1(C)/\epsilon$.

L'assunzione $X = \ell^\infty$ ci fornisce una struttura di spazio vettoriale, e quindi esiste una curva Lipschitziana $\gamma_\epsilon : [0, L] \to \ell^\infty$ dove $L = 4\mathcal{H}^1(C)$ (in effetti ne mostriamo l'esistenza costruendola) con le seguenti proprietà:

- Esiste una partizione $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq L$ tale che $t_{i+1} - t_i = d(x_{i+1}, x_i) < \epsilon$.
- $\gamma_\epsilon(s) = x_i + (s - t_i)(x_{i+1} - x_i)/(t_{i+1} - t_i)$ se $s \in [t_i, t_{i+1}]$.
- $\gamma_\epsilon(s) = x_n = y$ se $s \in [t_n, L]$.
- $\gamma_\epsilon$ è 1-Lipschitziana.
- $\gamma_\epsilon(s) \in [C]_\epsilon$ per ogni $s \in [0, L]$: infatti, considerata l'identificazione fatta, la distanza su $X$ è indotta dalla norma $\| \cdot \|_\infty$ e quindi

$$\|\gamma_\epsilon(s) - x_i\|_\infty = \frac{(s - t_i)}{(t_{i+1} - t_i)} \|x_{i+1} - x_i\|_\infty = s - t_i < \epsilon.$$

Siccome $C$ è compatto e la famiglia $\{\gamma_\epsilon\}$ è equicontinua, possiamo applicare il **Teorema 3.3.4** e il **Teorema 3.2.9** per ottenere così l'esistenza di una curva iniettiva Lipschitziana $\gamma : [0, L] \to C$ che congiunge $x$ e $y$ in $C$ come limite uniforme di una certa sottosuccessione di $\{\gamma_\epsilon\}$.

□

Enunciamo ora alcuni risultati sulla misura di Hausdorff di cui ci serviremo nella dimostrazione del Secondo teorema di rettificabilità:

**Lemma 3.3.5.** *Sia $(X, d)$ spazio metrico. Se $\gamma : [a, b] \to X$ è mappa continua, allora*

$$\mathcal{H}^1(\gamma([a, b])) \geq d(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Una dimostrazione di questo lemma si trova in [1].

**Definizione 3.3.6** (Densità sferica)**.** Per $k \geq 0$ poniamo

$$\omega_k := \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} \quad \text{ove} \quad \Gamma(t) := \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx.$$

Se $\mu$ è una misura su uno spazio metrico $(X, d)$, per ogni numero reale $k \geq 0$ ed ogni $x \in X$ definiamo le *densità inferiore e superiore $k$-dimensionali della misura $\mu$ nel punto $x$*:

$$\overline{\Theta}_k(\mu, x) := \limsup_{r \to 0^+} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k}, \quad \underline{\Theta}_k(\mu, x) := \liminf_{r \to 0^+} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k}.$$

*Osservazione* 3.3.7. Nella definizione appena data si può rimpiazzare $B_r(x)$ con la sua chiusura $\overline{B_r(x)}$ senza che i valori di $\overline{\Theta}_k(\mu, x)$ e $\underline{\Theta}_k(\mu, x)$ ne vengano modificati: questo perché le palle chiuse possono essere approssimate dall'esterno con palle aperte, e viceversa quelle aperte possono essere approssimate dall'interno con palle chiuse. Dunque per $0 < \sigma < r$ si ha

$$(1-\sigma)^k \frac{\mu(B_{r-r\sigma}(x))}{\omega_k r^k (1-\sigma)^k} \leq \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k} \leq \frac{\mu(\overline{B_r(x)})}{\omega_k r^k} \leq (1+\sigma)^k \frac{\mu(B_{r+r\sigma}(x))}{\omega_k r^k (1+\sigma)^k}$$

e passando al limite superiore (risp. inferiore) per $r \to 0^+$ si ottiene

$$(1-\sigma)^k \overline{\Theta}_k(\mu, x) \leq \overline{\Theta}_k(\mu, x) \leq \frac{\mu(\overline{B_r(x)})}{\omega_k r^k} \leq (1+\sigma)^k \overline{\Theta}_k(\mu, x)$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di $\sigma$.

**Teorema 3.3.8.** *Sia $(X, d)$ spazio metrico e sia $\mu$ una misura positiva e localmente finita su $X$. Allora per ogni $t \in (0, +\infty)$ ed ogni Boreliano $B \subseteq X$ valgono le seguenti implicazioni:*

$$\begin{aligned} \overline{\Theta}_k(\mu, x) \geq t \quad \forall x \in B \quad &\Longrightarrow \quad \mu(B) \geq t\mathcal{H}^k(B) \\ \underline{\Theta}_k(\mu, x) \leq t \quad \forall x \in B \quad &\Longrightarrow \quad \mu(B) \leq t2^k\mathcal{H}^k(B). \end{aligned}$$

Una dimostrazione di questo teorema si può trovare in [1].

**Teorema 3.3.9** (Secondo teorema di rettificabilità)**.** *Sia $(X, d)$ uno spazio metrico completo. Se $C \subseteq X$ è chiuso e connesso, e $\mathcal{H}^1(C) < +\infty$, allora esiste una successione $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di curve Lipschitziane $\gamma_n : [0, 1] \to C$ tale che*

$$\mathcal{H}^1 \left( C \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_i([0, 1]) \right) = 0.$$

*In altre parole: a meno di insiemi di misura di Hausdorff nulla, $C$ si può ricoprire con le immagini di un insieme numerabile di curve Lipschitziane.*

*Dimostrazione.* Siccome $C$ è compatto possiamo scegliere due punti $x, y \in C$ tali che

$$d(x, y) = \mathrm{diam}(C).$$

Sia ora $\Gamma_0$ l'immagine di una curva Lipschitziana che congiunge $x$ e $y$. Supponiamo poi di aver costruito $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_k$ con le seguenti proprietà:

- $\Gamma_i \subseteq C, \quad i = 0, \ldots, k.$
- Ogni intersezione $\Gamma_i \cap \bigcup_{j<i} \Gamma_j$ consiste di un solo punto, per $i = 1, \ldots, k$.

Sia

$$d_k := \max_{x\in C} d\left(x, \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i\right).$$

Se $d_k = 0$ allora abbiamo concluso con un numero finito di curve. Altrimenti possiamo procedere induttivamente così (questa costruzione giustifica le due richieste fatte sopra sulle curve): se $d_k > 0$, dalla compattezza di $C$ possiamo scegliere $x_k \in C$ e $y_k \in \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i$ tali che

$$d(x_k, y_k) = d_k.$$

Sia quindi $\gamma : [0,1] \to C$ una curva Lipschitziana tale che $\gamma(0) = x_k$ e $\gamma(1) = y_k$; definiamo $\tilde{t} := \min\{t \in [0,1] \, : \, \gamma(t) \in \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i\}$ e $\Gamma_{k+1} := \gamma([0,\tilde{t}])$. In tal modo l'intersezione

$$\Gamma_{k+1} \cap \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i$$

consiste di un solo punto. Dal **Lemma 3.3.5** discende che

$$d_k \leq d(x_k, \gamma(\tilde{t})) \leq \mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1})$$

da cui otteniamo

$$\sum_{i=0}^{k+1} d_i \leq \sum_{i=0}^{k+1} \mathcal{H}^1(\Gamma_{i+1}) \leq \mathcal{H}^1(C).$$

La catena di disuguaglianze sopra vale per ogni $k \in \mathbb{N}$, e quindi si ottiene che

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} d_k < +\infty;$$

in particolare $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$. Per costruzione, per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$C \subseteq \left[ \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i \right]_{2d_k} \subseteq \left[ \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i \right]_{2d_k}$$

e prendendo l'intersezione su tutti i $k$ otteniamo che

$$C \subseteq \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i}.$$

Vogliamo ora mostrare che si ha

$$\mathcal{H}^1 \left( \overline{B_r(x)} \cap \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Gamma_i \right) \geq r \tag{3.5}$$

se $x \in C \setminus \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i$ e $\overline{B_r(x)} \cap \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i = \varnothing$. Infatti siccome $x \in \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i}$ allora si riesce a trovare una successione di punti $x_h \in \Gamma_{i(h)}$, dove $i(h) > k$ è crescente, tale che $\lim_{h\to\infty} x_{i(h)} = x$. Definiamo poi

$$C_h := \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_{i(h)}$$

ed osserviamo che $C_h$ è connesso: per costruzione infatti $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \varnothing$ e quindi $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ è connesso (se non lo fosse esisterebbero due aperti $A, B \subset \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ con $A \cup B = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$; ma allora $A \cap \Gamma_0$ e $B \cap \Gamma_0$ sono due aperti disgiunti di $\Gamma_0$ tali che $\Gamma_0 = (A \cap \Gamma_0) \cup (B \cap \Gamma_0)$. Assurdo, perché $\Gamma_0$ è connesso in quanto immagine continua di un connesso - l'ipotesi $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \varnothing$ è fondamentale). Per lo stesso motivo, siccome $\Gamma_2 \cap (\Gamma_0 \cup \Gamma_1) \neq \varnothing$, l'insieme $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ è connesso, e così via fino a $C_h$. Dalla connessione di $C_h$ e dal **Lemma 3.3.3** segue che per ogni $r' < r$ si ha

$$\mathcal{H}^1(C_h \cap B_{r'}(x_h)) \geq r'$$

e siccome $B_{r'}(x_h) \subset B_r(x)$ per $h$ sufficientemente grande (dal momento che $x_h \to x$) vale la seguente catena:

$$\mathcal{H}^1\left(\overline{B_r(x)} \cap \bigcup_{i=k+1}^{i(h)} \Gamma_i\right) = \mathcal{H}^1(\overline{B_r(x)} \cap C_h) \geq \mathcal{H}^1(C_h \cap B_{r'}(x_h)) \geq r'.$$

Facendo tendere $r'$ a $r$ si ottiene (3.5). Definiamo ora la misura $\mu(B) := \mathcal{H}^1(B \cap \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Gamma_i)$ ed osserviamo che

$$\overline{\Theta}_1(\mu, x) \geq 1/2 \quad \text{per ogni } x \in C \setminus \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i;$$

infatti ricordando che $\omega_1 = 2$ da (3.5) e dall'**Osservazione 3.3.7** abbiamo che, per ogni $x \in C \setminus \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i$

$$\begin{aligned}\overline{\Theta}_1(\mu, x) = \limsup_{r \to 0^+} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_1 r} &= \limsup_{r \to 0^+} \frac{\mu(\overline{B_r(x)})}{\omega_1 r} \\ &\geq \limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^1\left(\overline{B_r(x)} \cap \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Gamma_i\right)}{2r} \\ &\geq \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dal **Teorema 3.3.8** otteniamo quindi

$$\mathcal{H}^1\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Gamma_i\right) \geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1\left(C \setminus \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i\right)$$

e si conclude osservando che

$$\mathcal{H}^1\left(C \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \mathcal{H}^1\left(C \setminus \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i\right) \leq 2\mathcal{H}^1\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Gamma_i\right)$$

ove la quantità a sinistra è arbitrariamente piccola, se $k$ è sufficientemente grande.

□

### 3.3.2 Teorema di Gołab e sue conseguenze

Siamo ora pronti ad enunciare e dimostrare il teorema chiave di questa sezione che, in analogia con il caso parametrico, è un teorema di *semicontinuità*.

**Proposizione 3.3.10** (Proiezioni Lipschitziane). *Se $\varphi \in \mathrm{Lip}(X, Y)$, allora*

$$\mathcal{H}^1(\varphi(B)) \leq \mathrm{Lip}(\varphi)\mathcal{H}^1(B)$$

*per ogni $B \subseteq X$.*

La dimostrazione usa il fatto che $\mathrm{diam}(\varphi(B)) \leq \mathrm{Lip}(\varphi)\,\mathrm{diam}(B)$ per ogni $B \subseteq X$. Si osserva poi che la proposizione vale in forma più generale per la misura di Hausdorff $k$-dimensionale:

$$\mathcal{H}^k(\varphi(B)) \leq [\mathrm{Lip}(\varphi)]^k \mathcal{H}^k(B)$$

per ogni $B \subseteq X$.

**Teorema 3.3.11** (Gołab)**.** *Sia $(X, d)$ uno spazio metrico, e sia $\mathcal{C}_X$ la famiglia di tutti sottoinsiemi chiusi di $X$. Supponiamo che $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_X$ sia una successione tale che ogni $C_n$ sia anche connesso, e che $C_n \xrightarrow{H} C$. Allora $C$ è connesso e*

$$\mathcal{H}^1(C) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{H}^1(C_n).$$

*Dimostrazione.* Senza perdere di generalità possiamo supporre che $\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^1(C_n) = L$ esista e sia finito, e che $\mathcal{H}^1(C_n) < L + 1$ per ogni $n$. Per il **Teorema 3.3.4** i $C_n$ sono pertanto tutti compatti. Preliminarmente osserviamo che $C$ è connesso. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Allora $C = A_1 \cup A_2$ con $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ e $A_i$ non vuoti, chiusi e quindi compatti; allora $\delta_H(A_1, A_2) = d > 0$. Definiamo quindi $U_i = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A_i) < d/3\}$. Per ipotesi esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\delta_H(C_n, C) < d/3$ per ogni $n > N$. Direttamente dalla definizione segue che gli $U_i$ sono aperti disgiunti di $X$; inoltre $C_n \subset U_1 \cup U_2$ e $C_n \cap U_1 \neq \varnothing$, $C_n \cap U_2 \neq \varnothing$ per ogni $n > N$. Ne discende che i $C_n$ non sono connessi, assurdo.

Possiamo ridurre la nostra argomentazione al caso di $X$ compatto operando come segue: definiamo

$$\tilde{X} := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n}$$

ed osserviamo che, per ogni $\epsilon > 0$ si ha

$$C_n \subset [C_{n(\epsilon)}]_\epsilon \quad \text{per ogni } n \geq n(\epsilon)$$

dal momento che $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy rispetto alla metrica di Hausdorff $\delta_H$. Inoltre usando la caratterizzazione sequenziale della chiusura si mostra facilmente che

$$\tilde{X} \subset C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_{n(\epsilon)-1} \cup [C_{n(\epsilon)}]_\epsilon$$

e siccome i $C_i$ sono tutti compatti, li possiamo ricoprire con un numero finito di palle di raggio $4\epsilon$ (questo vale anche per $[C_{n(\epsilon)}]_\epsilon$ in virtù della **Proposizione 1.2.10**). Questo argomento mostra che $\tilde{X}$ è totalmente limitato, e quindi è compatto in quanto chiuso. Assumeremo pertanto che l'intero spazio $X$ sia compatto.

Poniamo ora $d_n = \operatorname{diam}(C_n)$; estraendo eventualmente una sottosuccessione possiamo assumere che $d_n \to d > 0$. Definiamo poi

$$\mu_n(B) := \mathcal{H}^1(B \cap C_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

per ogni boreliano $B \subseteq X$ e osserviamo che le $\mu_n$ sono tutte misure di Borel finite perché i $C_n$ hanno misura unidimensionale di Hausdorff finita. A meno di estrazione di una sottosuccessione possiamo supporre che $\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ ove $\mu$ è una misura di Borel[1]. Ricordiamo che questo implica che

$$\mu(F) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(F), \quad \mu(G) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G)$$

[1]Argomento: se $(X, d)$ è uno spazio metrico separabile, allora anche lo spazio $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R}^n)$ è separabile ed essendo uno spazio di Banach, la topologia debole-* sui limitati è metrizzabile. Quindi, per il *Teorema di Banach-Alaoglu*, siccome $\mathcal{M}(X, \mathbb{R}^n)$ insieme delle misure definite sui boreliani di $X$ può essere visto come il duale di $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R}^n)$, da ogni successione $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a variazione totale equilimitata si può estrarre una sottosuccessione tale che $\mu_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R}^n)$.

ove $F$ è un chiuso e $G$ è un aperto (di $X$).

Siano ora $x \in C$ e $r' < r < \operatorname{diam}(C)/2$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\mu(B_r(x)) &\geq \mu(\overline{B_{r'}(x)}) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{B_{r'}(x)}) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \mathcal{H}^1(C_n \cap \overline{B_{r'}(x)}) \geq r'\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le appena richiamate proprietà della convergenza debole (seconda disuguaglianza) ed il **Lemma 3.3.3** (ultima disuguaglianza) dal momento che $r' < \operatorname{diam}(C_n)/2$ se $n$ è sufficientemente grande. Siccome $r' < r$ è arbitrario, otteniamo che

$$\mu(B_r(x)) \geq r, \quad \text{per ogni } x \in C \text{ e per ogni } r < \operatorname{diam}(C)/2.$$

Usando infine il **Teorema 3.3.8** si ha

$$\mathcal{H}^1(C) \leq 2\mu(X) \leq 2\liminf_{n\to\infty} \mu_n(X) = 2\liminf_{n\to\infty} \mathcal{H}^1(C_n) = 2L$$

e la tesi è parzialmente provata, a meno di un fattore moltiplicativo pari a 2.

Dal **Teorema 3.3.9** si ottiene che quasi ogni $x_0 \in C$ (la terminologia "quasi ogni" è da riferirsi a $\mathcal{H}^1$) è del tipo $\gamma(t_0) = x_0$, ove $\gamma$ è una curva Lipschitziana a valori in $C$ definita su di un intervallo chiuso contenente $t_0$ come punto interno. Inoltre $\gamma$ è differenziabile in $t_0$, e dal **Teorema 3.2.3** possiamo assumere che $|\dot\gamma|(t_0) = 1$. Possiamo infine supporre che

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{d(\gamma(t_0+h), \gamma(t_0-h))}{2|h|} = 1.$$

Omettiamo la dimostrazione di questo fatto.

Ora, dati $x_0 \in C$ e $\gamma$ con le suddette proprietà, prendiamo $\sigma \in (0,1)$. Se $h$ (dipendente da $\sigma$) è sufficientemente piccolo abbiamo, semplicemente dalla definizione di limite

$$d(\gamma(t_0+h), \gamma(t_0-h)) \geq (2-\sigma)|h|$$

e

$$(1-\sigma)|h| \leq d(\gamma(t_0 \pm h), \gamma(t_0)) \leq (1+\sigma)|h|.$$

Prendendo $h > 0$ tale che siano soddisfatte le due precedenti stime e che $|h| < \sigma/(1+\sigma)$, poniamo $y := \gamma(t_0 - h)$, $z := \gamma(t_0 + h)$ e $r := \max\{d(y, x_0), d(z, x_0)\}$ e otteniamo che

$$r < (1+\sigma)|h| < \sigma$$

e che

$$d(y,z) \geq (2-\sigma)|h| \geq \frac{2-\sigma}{1+\sigma} r.$$

Poniamo poi ancora $r' := (1+\sigma)r$ e osserviamo che, siccome la convergenza di Hausdorff implica la convergenza di Kuratowski (si veda il primo capitolo), possiamo trovare successioni di punti $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $y_n \to y$, $z_n \to z$ e $y_n, z_n \in C_n$. Inoltre, per $n$ sufficientemente grande, $y_n, z_n \in B_{r'}(x_0)$. Per concludere definiamo $\varphi(x) := d(z, x)$; siccome $\varphi$ è 1-Lipschitziana, dalla **Proposizione 3.3.10** otteniamo

$$\begin{aligned}\mu_n(\overline{B_{r'}(x)}) &= \mathcal{H}^1(C_n \cap \overline{B_{r'}(x)}) \geq \mathcal{H}^1(\varphi(C_n \cap \overline{B_{r'}(x)})) \\ &= \varphi(x_{\max}(n)) - \varphi(x_{\min}(n)) \geq \varphi(y_n) - \varphi(x_{\min}(n)) \\ &= d(z, y_n) - d(p_n, z)\end{aligned}$$

dove $d(p_n, z) \to 0$ per $n \to \infty$. Abbiamo usato il fatto che l'immagine continua di un connesso è connessa (e quindi un intervallo di $\mathbb{R}$, nel nostro caso) e il fatto che $\mathcal{H}^1([a, b]) = |b - a|$.

Passando al lim sup si ha

$$\begin{aligned}\mu(\overline{B_{r'}(x)}) &\geq \limsup_{n\to\infty} \mathcal{H}^1(C_n \cap \overline{B_{r'}(x)}) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty}[d(z, y_n) - d(p_n, z)] = d(z, y) \\ &\geq \frac{2-\sigma}{1+\sigma} r = \frac{2-\sigma}{(1+\sigma)^2} r'.\end{aligned}$$

Siccome $\sigma \in (0, 1)$ è arbitrario, otteniamo che $\overline{\Theta}_1(\mu, x_0) \geq 1$ per quasi ogni $x_0 \in C$. Ne consegue che

$$\mathcal{H}^1(C) \leq \mu(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(X) = L.$$

La dimostrazione è così ultimata.

□

Concludiamo il capitolo dimostrando che quindi la formulazione intrinseca del problema delle geodetiche ha soluzione, e che invero la formulazione parametrica si riduce ad un caso particolare di quella intrinseca.

**Teorema 3.3.12.** *Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Supponiamo che $C' \subseteq X$ sia non vuoto, ed assumiamo che esista un insieme chiuso e connesso $C \subseteq X$ tale che $\mathcal{H}^1(C) < +\infty$ e che $C' \subseteq C$. Se $X$ è tale che ogni palla chiusa è compatta allora la versione intrinseca del problema di minimo riportata nella* ***Sezione 3.1*** *ha soluzione. In particolare se $C' = \{x, y\}$ il problema si riduce alla formulazione parametrica.*

*Dimostrazione.* Sia $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzante, cioè una successione di chiusi e connessi con $C' \subseteq C_n$ tale che $\mathcal{H}^1(C_n) \to L$ con

$$L := \inf\{\mathcal{H}^1(C) \,:\, C \text{ connesso, chiuso e } C' \subseteq C\}.$$

Non è restrittivo assumere che $\mathcal{H}^1(C_n) \leq L + 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Riduciamoci prima al caso di $X$ compatto: scelto $x \in C'$ e posto $r_n := \mathrm{diam}(C_n)/4$, se $r_n > 0$ otteniamo dal **Lemma 3.3.3**

$$L + 1 \geq \mathcal{H}^1(C_n \cap B_{r_n}(x)) \geq \mathrm{diam}(C_n)/4$$

e quindi ogni $C_n$ è contenuto in una palla chiusa centrata in $x$ e di raggio $4(L+1)$. Riducendo la nostra analisi a questa palla chiusa, possiamo assumere che tutto $X$ sia compatto.

Per il **Teorema 1.1.9** esiste un compatto $C \subseteq X$ tale che, a meno di sottosuccessioni, $C_n \xrightarrow{H} C$; chiaramente si ha $C' \subseteq C$. Come conseguenza del *Teorema di Gołab* $C$ è connesso, ed è la soluzione del nostro problema di minimo.

Infine, se $C' = \{x, y\}$ è costituito da due soli punti distinti, in virtù del **Teorema 3.3.4** esiste una curva iniettiva e Lipschitziana $\gamma$ che connette $x$ e $y$.

□

# Bibliografia

[1] Luigi Ambrosio e Paolo Tilli. *Selected Topics on Analysis in Metric Spaces - Appunti.* Scuola Normale Superiore, 2000.

[2] Dmitri Burago, Yuri Burago e Sergei Ivanov. *A Course in Metric Geometry.* American Mathematical Society, 2001.

[3] Jan Cristina. «Gromov-Hausdorff convergence in metric spaces». Dispensa. University of Helsinki, 2008.

[4] Lawrence C. Evans e Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, 1992.

[5] Kenneth John Falconer. *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge University Press, 1985.

[6] Gerald B. Folland. *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley and Sons, 1999.

[7] Urs Lang. «Length Spaces». Dispensa. ETH Zurich, 2004.

[8] Urs Lang. «Notes on Rectifiability». Dispensa. ETH Zurich, 2008.

[9] Roberto Monti. «Appunti di Analisi Matematica I». Dispensa. Università degli Studi di Padova, 2012.

[10] Roberto Monti. «Appunti di Analisi Matematica II». Dispensa. Università degli Studi di Padova, 2013.

[11] Nicklas Personn. «Shortest paths and geodesics in metric spaces». Master thesis in Mathematics. Umeå University, 2012.

[12] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw Hill, 1970.

[13] Letizia Ulivi. «Esistenza e regolarità delle connessioni minime». Tesi di Laurea Specialistica in Matematica. Università degli Studi di Firenze, 2008.