



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

**Dualità e covarianza
in modelli di Elettrodinamica non lineare**

Candidato:

Ginevra Buratti

Matricola 1072124

Relatore:

Prof. Kurt Lechner

Indice

1	Equazioni di Maxwell e dualità elettromagnetica	1
2	Dualità di Gaillard-Zumino	3
2.1	La condizione di dualità di GZ	6
2.2	Una soluzione non banale: la lagrangiana di Born-Infeld	8
3	Dualità manifesta a livello dell'azione	11
3.1	Il formalismo non manifestamente covariante di Schwarz-Sen .	11
3.1.1	Teoria di Maxwell	12
3.1.2	Teoria di Born-Infeld	14
3.2	Il metodo di Pasti-Sorokin-Tonin	16
3.2.1	Formulazione di PST della teoria di Maxwell	16
3.2.2	Formulazione di PST di una teoria non lineare	20
3.2.3	Formulazione di PST della teoria di Born-Infeld	24
4	Conclusioni	27
A	Appendici	29
A.1	Derivazione della condizione di GZ	29
A.2	Soluzioni in forma parametrica della condizione di GZ	29
A.3	Una proprietà dei tensori antisimmetrici	30
A.4	Variazione della lagrangiana di PST lineare	31
A.5	Una riscrittura equivalente dell'azione di PST lineare	32
A.6	Proprietà della lagrangiana di PST non lineare	33
A.7	Derivazione della condizione di BN-PST	33

Introduzione

In questo lavoro ci occupiamo della dualità elettromagnetica e studiamo modelli che descrivono la dinamica di un singolo tensore di Maxwell in quattro dimensioni, in assenza di cariche e con gruppo di dualità $SO(2)$. Lavoreremo essenzialmente con due classi di teorie:

- nel caso libero, lineare, l'elettromagnetismo di Maxwell;
- nel caso interagente, non lineare, ad esempio la teoria di Born-Infeld.

Possiamo distinguere tra due possibili approcci alla dualità:

- la dualità di Gaillard-Zumino, che agisce a livello delle equazioni del moto;
- la dualità "manifesta", che agisce a livello dell'azione.

Cominciamo dal primo. Dato un modello non lineare descritto da una generica lagrangiana $\mathcal{L}(F)$, funzione del tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ e Lorentz-invariante, si impone l'invarianza delle equazioni del moto da essa generate rispetto ad una trasformazione di $SO(2)$ che agisce in modo *non lineare* su $F^{\mu\nu}$ e si trova che la lagrangiana deve soddisfare un'opportuna condizione. Si tratta di un'equazione differenziale alle derivate parziali, del primo ordine non lineare, in due variabili, derivata originariamente nel 1995 da Gibbons e Rasheed in [7] e ri-derivata due anni dopo da Gaillard e Zumino (GZ) in [6], seguendo il formalismo da essi precedentemente sviluppato per il caso lineare in [5]. Pur essendo possibile risolverla implicitamente, parametrizzando la famiglia delle soluzioni con un'arbitraria funzione di una variabile, come fatto in [7], [14] e [6], non è facile trovarne soluzioni in forma esplicita. Un esempio importante di soluzione in forma chiusa, oltre a quella della teoria libera, è la lagrangiana della teoria di Born-Infeld, le cui proprietà di dualità sono note da tempo (erano note già a Schroedinger nel 1935, si veda [15]) e hanno recentemente riacquisito un ruolo di rilievo nelle teorie di stringa (si veda ad esempio [17]). Il pregio di questo approccio è che l'invarianza di

Lorentz è manifesta, mentre il difetto è che la dualità è una simmetria delle equazioni del moto, ma non della lagrangiana che le genera.

In effetti, si possono elaborare formalismi in cui la simmetria di dualità sia realizzata a livello dell'azione. Parleremo in tal caso di dualità *manifesta*. L'idea di base è quella di usare come variabili dinamiche nella lagrangiana *due* campi di gauge indipendenti $A_\mu^I(x)$ ($I = 1, 2$) e di far emergere come equazione del moto una relazione di dualità *non lineare* tra di essi. In questo caso $SO(2)$ agisce *linearmente*, in modo canonico, su A_μ^I . Un possibile modo di procedere è quello non manifestamente Lorentz-covariante di Schwarz e Sen (SS), proposto in [16] (si veda [8] per un approccio simile, precedente). Osserviamo subito che, in generale, non c'è prova dell'equivalenza di questo metodo con quello di GZ: la difficoltà sta nell'eliminare in modo esplicito *uno* dei due campi dalle equazioni del moto non lineari. Inoltre questo metodo ha un difetto, quantomeno formale: per poter costruire un'azione manifestamente invariante per dualità, bisogna rinunciare alla manifesta covarianza. L'invarianza per trasformazioni di Lorentz deve essere verificata a mano e, per di più, si trova che questa è presente solo in una classe ristretta di lagrangiane che soddisfano un'opportuna condizione, derivata da Bossard e Nicolai (BN) in [3].

Esiste tuttavia un modo per avere *entrambe* le simmetrie manifeste a livello dell'azione, sviluppato da Pasti, Sorokin e Tonin (PST) per il caso lineare in [12], [13] e nella forma più generale, valida anche per teorie non lineari, in [11]. L'unico difetto di questo metodo, se si vuole, è che per costruire l'azione di PST bisogna introdurre, oltre ai due campi di gauge $A_\mu^I(x)$ già presenti nell'approccio di SS, un ulteriore campo scalare $a(x)$. Se però la lagrangiana soddisfa un'opportuna condizione, questo campo in più è completamente ausiliario e non si propaga. In tal caso, per un'opportuna scelta di a (precisamente per $a(x) = x^0$) l'azione di PST si riduce a quella dell'approccio non manifestamente covariante e la condizione di non propagazione di PST si identifica con la condizione di covarianza di BN. La chiameremo pertanto condizione di BN-PST. Quanto al legame della dualità di PST con quella di GZ, ribadiamo che tuttora non esiste alcuna prova *generale* della loro equivalenza. A questo proposito, siamo comunque riusciti a dimostrare un fatto che ci pare rilevante: le condizioni di GZ e di BN-PST sono formalmente identiche. Questo non risolve il problema, in quanto le variabili delle due lagrangiane di GZ e di PST sono *diverse*, ma suggerisce un possibile modo di procedere per indagare l'equivalenza dei due metodi.

Organizzazione del materiale. Il lavoro è organizzato come segue. Nel primo capitolo viene introdotta la dualità elettromagnetica come simmetria

delle equazioni di Maxwell. Nel secondo capitolo viene presentata la dualità di GZ nel caso di una generica teoria non lineare. In particolare, deriviamo la condizione sulla lagrangiana che garantisce l'invarianza per dualità di GZ delle equazioni del moto e ne presentiamo una soluzione non banale, la lagrangiana di Born-Infeld. In questo approccio, la dualità è una simmetria delle equazioni del moto, ma non della lagrangiana che le genera.

Questa osservazione costituisce il punto di partenza per la seconda parte del lavoro, interamente dedicata alla dualità *manifesta*. Il terzo capitolo è diviso in due sezioni: nella prima applichiamo il formalismo non manifestamente covariante di SS alle teorie di Maxwell ([14]) e Born-Infeld ([1], [9]), mentre nella seconda presentiamo il metodo di PST, descriviamo in dettaglio la sua applicazione prima alla teoria di Maxwell, poi a una generica teoria non lineare, avendo in mente come prototipo la teoria di Born-Infeld, e proviamo, almeno in questi due casi particolari, l'equivalenza con l'approccio di GZ. Deriviamo inoltre la condizione di BN-PST, trovando che questa è formalmente identica alla condizione di GZ, risultato che costituisce il punto più originale del lavoro.

Nelle conclusioni discutiamo la relazione tra le due forme di dualità esaminate, delineando schematicamente i vari passi che si dovrebbero seguire per dimostrarne l'equivalenza.

Notazione. Sono qui riassunte le principali convenzioni adottate:

- gli indici greci ($\mu, \nu, \dots$) assumono i valori $0, 1, 2, 3$. Scriveremo allora un generico campo tensoriale T di rango (n, m) su uno spazio quadridimensionale nella forma $T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}$;
- denotiamo con $\eta_{\mu\nu}$ la metrica sullo spazio di Minkowski quadridimensionale, con segnatura $(1, 3)$. Avremo dunque $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$;
- gli indici latini ($i, j, k, \dots$) assumono i valori $1, 2, 3$ e verranno usati per le grandezze vettoriali e per la parte spaziale dei campi tensoriali;
- adottiamo il sistema di unità di misura naturali, in cui $\hbar, c = 1$. Notiamo che, in queste unità di misura, campo elettrico e magnetico hanno entrambi le dimensioni dell'inverso di una lunghezza al quadrato;
- occasionalmente, ove non vi sia ambiguità, ometteremo gli indici dei tensori;
- l'espressione "variare una lagrangiana" va intesa nel senso di variare l'azione ad essa relativa. Ricorreremo spesso a questo abuso per semplificare la notazione.

Capitolo 1

Equazioni di Maxwell e dualità elettromagnetica

Le equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

restano invariate se si effettuano le sostituzioni

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}. \quad (1.3)$$

Questa simmetria discreta è detta dualità elettromagnetica o dualità "S" ed equivale a scambiare tra loro le equazioni dinamiche e le identità di Bianchi¹. Tuttavia, la lagrangiana

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2),$$

non è invariante, ma cambia segno.

Per passare dalla notazione vettoriale ad una formulazione covariante e relativisticamente valida della dualità elettromagnetica, introduciamo il tensore di Maxwell $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, con componenti

$$F^{i0} = E^i, \quad (1.4)$$

$$F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k \quad \Leftrightarrow \quad B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} F^{jk}. \quad (1.5)$$

¹In presenza di cariche, se si vuole preservare questa simmetria occorre considerare delle equazioni di Maxwell generalizzate in cui le identità di Bianchi vengono modificate tramite l'introduzione di monopoli magnetici (si veda [4]). In tal caso, la dualità scambia cariche elettriche con cariche magnetiche

Denotiamo poi con $\tilde{F}^{\mu\nu} = *F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ il suo duale di Hodge, le cui componenti sono date da

$$\tilde{F}^{i0} = \frac{1}{2}\varepsilon^{i0jk}F_{jk} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk} = B^i, \quad (1.6)$$

$$\tilde{F}^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij0k}F_{0k} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{k0} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}E^k. \quad (1.7)$$

Il duale di Hodge gode della proprietà

$$** = -1, \quad (1.8)$$

che preclude, in $D = 4$, l'esistenza di tensori (anti)-autoduali. Dalla formula per la contrazione di due tensori di Levi-Civita

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -4\delta_{[\alpha}^{\rho}\delta_{\beta]}^{\sigma}, \quad (1.9)$$

segue infatti

$$\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma} = -F^{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Le equazioni (1.1) e (1.2) si possono allora scrivere nella forma

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.11)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (1.12)$$

e sono evidentemente invarianti rispetto alle sostituzioni

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} \rightarrow -F^{\mu\nu}. \quad (1.13)$$

Agendo con il duale di Hodge sulla seconda e sfruttando la (1.10), si ritrova la prima: le due trasformazioni sono compatibili e la presenza del segno "−" è dovuta alla proprietà (1.8) del duale di Hodge. Inoltre, come si vede dalla (1.6) e dalla (1.7), questa trasformazione è equivalente alla (1.3) e la traduce in una forma Lorentz-covariante.

Infine, osserviamo che il sistema di equazioni costituito dalla (1.11) e dalla (1.12) è in realtà invariante rispetto alla più ampia famiglia di trasformazioni a un parametro $\alpha \in (0, 2\pi)$,

$$\begin{pmatrix} F' \\ \tilde{F}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ \tilde{F} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Siamo quindi in presenza di tutto un gruppo continuo di simmetria, costituito dalle matrici di rotazione $SO(2)$. Si parla in questo caso di dualità $SO(2)$. Scegliendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ci si riduce come caso particolare alla dualità S considerata all'inizio. Precisamente, si ha che il gruppo ciclico di quattro elementi $\{R(\frac{\pi}{2}), -\mathbb{I}, -R(\frac{\pi}{2}), \mathbb{I}\}$ generato dalla matrice $R(\frac{\pi}{2})$ relativa ad una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ che descrive l'azione della dualità S costituisce un sottogruppo discreto, isomorfo a $\mathbb{Z}_4$, del gruppo continuo $SO(2)$.

Capitolo 2

Dualità di Gaillard-Zumino

La lagrangiana della teoria di Maxwell libera,

$$\mathcal{L}_M(F) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

è una funzione quadratica del tensore elettromagnetico. Si possono anche considerare lagrangiane $\mathcal{L}(F)$ più generali, in cui la dipendenza da F non sia più puramente quadratica. Storicamente, l'interesse per lagrangiane di questo tipo è stato motivato dall'esigenza di curare le divergenze ultraviolette da cui la teoria di Maxwell è affetta, poi risolte dalla QED per altra via (tramite la rinormalizzazione). Se si richiede che il limite di campi deboli (cioè di basse energie) riproduca la teoria di Maxwell, in tale limite queste devono essere della forma

$$\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}_M + \mathcal{O}(F^4)^1. \quad (2.2)$$

La parte non quadratica della lagrangiana deforma la propagazione libera del campo e ne descrive possibili modalità di autointerazione. Di conseguenza, in queste teorie generalizzate la dinamica non è più lineare.

Un esempio importante è la lagrangiana della teoria di Born-Infeld,

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ 1 - \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu})} \right\}, \quad (2.3)$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è il tensore metrico e λ un parametro con le dimensioni di una lunghezza al quadrato. Vale in particolare $\mathcal{L}_{BI} = \mathcal{L}_M + \mathcal{O}(F^4)$. Proposta originariamente da Born e Infeld negli anni Trenta [2] in relazione al problema delle divergenze ultraviolette, questa teoria perse interesse con la nascita

¹Possiamo escludere la presenza di termini $\mathcal{O}(F^3)$ perchè non esiste alcun invariante cubico di $F^{\mu\nu}$. L'unico modo per costruirlo sarebbe quello di prendere la combinazione $\text{tr } F^3 = F_{\mu\nu}F^{\nu\rho}F_{\rho}^{\mu}$, che però è nulla.

della QED, mentre oggi è tornata ad assumere un ruolo di rilievo nell'ambito delle teorie di stringa, descrivendo l'azione effettiva a bassa energia per certe "brane" (3-Dbrane) self-duali della superstringa di tipo IIB (si veda ad esempio [17]).

Vorremmo adesso generalizzare la dualità elettromagnetica del capitolo 1 al caso di teorie non lineari. Per prima cosa, conviene definire il campo $G^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}(F)$, funzione del tensore elettromagnetico, tale che²

$$\tilde{G}^{\mu\nu}(F) = \frac{\partial \mathcal{L}(F)}{\partial F_{\mu\nu}}, \quad G^{\mu\nu}(F) = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{G}_{\rho\sigma}(F), \quad (2.4)$$

dove $\mathcal{L}(F)$ è la langrangiana della teoria. Nel caso della teoria libera, descritta dalla lagrangiana (2.1), si ha

$$\tilde{G}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}, \quad G^{\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Scritte in termini di $\tilde{F}$ e $\tilde{G}$, l'identità di Bianchi e l'equazione dinamica, quest'ultima discendente per via variazionale dall'azione

$$I = \int \mathcal{L}(F) d^4x,$$

assumono una struttura formalmente simmetrica nei due campi,

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.6)$$

$$\partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.7)$$

Eseguiamo una trasformazione di $SO(2)$,

$$\begin{pmatrix} F' \\ G'(F') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G(F) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

in cui il campo trasformato F' è una funzione di F . Prendiamo poi il duale di Hodge della (2.8), ricordando che si tratta di una mappa lineare,

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}' \\ \tilde{G}'(F') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{G}(F) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Chiaramente, il sistema di equazioni costituito dalla (2.6) e dalla (2.7) continua ad essere valido se ai campi $\tilde{F}$ e $\tilde{G}$ sostituiamo i loro trasformati $\tilde{F}'$ e $\tilde{G}'$.

Queste considerazioni diventano più interessanti se si fanno due ulteriori richieste:

²Questa definizione ha l'ambiguità di un fattore 2. La convenzione da noi adottata per la derivata $\frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}}$ consiste nel derivare sia rispetto a $F^{\mu\nu}$ che a $-F^{\nu\mu}$.

- $G'(F')$ deve potersi scrivere come nella (2.4), per un'opportuna lagrangiana $\mathcal{L}'(F')$,

$$\tilde{G}'^{\mu\nu}(F') = \frac{\partial \mathcal{L}'(F')}{\partial F'_{\mu\nu}}; \quad (2.10)$$

- tale lagrangiana deve essere quella della teoria originale,

$$\mathcal{L}'(\cdot) = \mathcal{L}(\cdot). \quad (2.11)$$

In tal caso diremo che le equazioni (2.6) e (2.7) sono *invarianti per dualità* $SO(2)$ secondo Gaillard-Zumino. Possiamo combinare queste due richieste nella forma compatta

$$\tilde{G}'(\cdot) = \tilde{G}(\cdot), \quad \text{ovvero} \quad G'(\cdot) = G(\cdot). \quad (2.12)$$

Scritta esplicitamente, la prima di queste diventa

$$-\sin \alpha \tilde{F}^{\mu\nu} + \cos \alpha \tilde{G}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}(\cos \alpha F + \sin \alpha G)}{\partial (\cos \alpha F_{\mu\nu} + \sin \alpha G_{\mu\nu})}. \quad (2.13)$$

Nel caso lineare, ricordando la (2.5), la trasformazione (2.8) diventa

$$\begin{pmatrix} F' \\ G'(F') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ \tilde{F} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

e la (2.9)

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}' \\ \tilde{G}'(F') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ -F \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Calcolando dalla seconda

$$\tilde{G}'(F') = -\sin \alpha \tilde{F} - \cos \alpha F,$$

e confrontando il secondo membro con l'espressione per F' data dalla (2.14), si trova

$$\tilde{G}'(F') = -F', \quad \text{ovvero} \quad G'(F') = \tilde{F}'.$$

Dunque nel caso lineare la richiesta (2.12) è soddisfatta.

La (2.13) vincola severamente le possibili dipendenze funzionali della lagrangiana $\mathcal{L}$. Per vedere in che modo, consideriamo la versione infinitesima della (2.8),

$$\delta F = F' - F = \alpha G, \quad (2.16)$$

$$\delta G = G' - G = -\alpha F. \quad (2.17)$$

Sviluppando ambo i membri della (2.13) al primo ordine in α , otteniamo

$$\begin{aligned} -\alpha \tilde{F}^{\mu\nu} + \tilde{G}^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} + \alpha \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\cos \alpha F + \sin \alpha G)}{\partial (\cos \alpha F_{\mu\nu} + \sin \alpha G_{\mu\nu})} \right]_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) G_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

da cui, sfruttando la (2.4) e riarrangiando (si veda per maggiori dettagli l'appendice A.1), troviamo

$$F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} + G^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

Questa condizione è stata derivata per la prima volta da Gibbons e Rasheed in [7], poi ri-derivata da Gaillard e Zumino in [6] sfruttando il formalismo da essi precedentemente sviluppato in [5] per il caso lineare. Abbiamo quindi dimostrato che le equazioni del moto di una teoria la cui lagrangiana $\mathcal{L}$ soddisfi la (2.18) sono *invarianti per dualità di GZ*.

2.1 La condizione di dualità di GZ

Dovendo essere una funzione invariante per Lorentz, la lagrangiana $\mathcal{L}$ può dipendere dal tensore elettromagnetico solo tramite gli invarianti

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{4} \text{tr}(F^2) = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\nu\mu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \\ X_2 &= \frac{1}{8} \text{tr}(F^4) = \frac{1}{8} F_{\mu\nu} F^{\nu\rho} F_{\rho\sigma} F^{\sigma\mu}, \\ X_3 &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{8} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

di cui in realtà soltanto due sono indipendenti. Vale infatti la relazione

$$X_2 = X_1^2 + \frac{1}{2} X_3^2. \quad (2.20)$$

Questo fatto permette di riscrivere la condizione (2.18) in diverse forme equivalenti.

Prendendo come "base" gli invarianti X_1 e X_2 , si ha che $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X_1, X_2)$ e si può esplicitare la derivata nella definizione (2.4), ottenendo

$$\frac{\partial \mathcal{L}(X_1, X_2)}{\partial F^{\mu\nu}} = \frac{\partial X_1}{\partial F^{\mu\nu}} \mathcal{L}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial F^{\mu\nu}} \mathcal{L}_2 = -F_{\mu\nu} \mathcal{L}_1 + F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} \mathcal{L}_2, \quad (2.21)$$

2. Dualità di Gaillard-Zumino

in cui si è usata per le derivate parziali la notazione $\mathcal{L}_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_1}$, $\mathcal{L}_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_2}$. Inserendo nella (2.18), troviamo

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left\{F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \left(-F_{\mu\nu}\mathcal{L}_1 + F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}\mathcal{L}_2\right)\left(-F_{\rho\sigma}\mathcal{L}_1 + F_{\rho\gamma}F_{\sigma\delta}F^{\gamma\delta}\mathcal{L}_2\right)\right\} = 0.$$

Poiché si tratta di un'equazione scalare, possiamo valutarla nel sistema di riferimento in cui $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$, particolarmente conveniente perché in tal caso le uniche componenti non nulle di F sono $F^{10} = -F^{01} = E$, $F^{23} = -F^{32} = -B$,

$$(\mathcal{L}_1 + E^2\mathcal{L}_2)(\mathcal{L}_1 - B^2\mathcal{L}_2) = \mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2(E^2 - B^2) - (EB)^2\mathcal{L}_2^2 = 1.$$

Osservando che, nel sistema di riferimento scelto,

$$E^2 - B^2 = 2X_1, \quad (EB)^2 = X_3^2 = 2(X_2 - X_1^2), \quad (2.22)$$

si trova un'equazione contenente solo quantità Lorentz-invarianti e perciò valida in tutti i sistemi di riferimento,

$$\mathcal{L}_1^2 + 2\mathcal{L}_2^2(X_1^2 - X_2) + 2X_1\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = 1. \quad (2.23)$$

Questa forma della *condizione di dualità di GZ* è particolarmente importante e la riprenderemo nel seguito.

Un'altra scelta possibile è quella di prendere come "base" i due invarianti quadratici X_1 e X_3 . In questo caso si ha $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X_1, X_3)$ e derivando si trova

$$\frac{\partial \mathcal{L}(X_1, X_3)}{\partial F_{\mu\nu}} = \frac{\partial X_1}{\partial F_{\mu\nu}}\mathcal{L}_1 + \frac{\partial X_3}{\partial F_{\mu\nu}}\mathcal{L}_3 = -F^{\mu\nu}\mathcal{L}_1 + \tilde{F}^{\mu\nu}\mathcal{L}_3. \quad (2.24)$$

Dalla (2.4) si ha

$$\tilde{G}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}\mathcal{L}_1 + \tilde{F}^{\mu\nu}\mathcal{L}_3, \quad G^{\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu\nu}\mathcal{L}_1 + F^{\mu\nu}\mathcal{L}_3, \quad (2.25)$$

che inserita nella (2.18) dà

$$X_3(\mathcal{L}_3^2 - \mathcal{L}_1^2 + 1) + 2X_1\mathcal{L}_1\mathcal{L}_3 = 0. \quad (2.26)$$

Operando il cambio di variabili $(X_1, X_3) \rightarrow (\alpha, \beta)$ dato da

$$\alpha = X_1, \quad \beta = \sqrt{X_1^2 + X_3^2}, \quad (2.27)$$

questa equazione si può portare nella forma

$$\mathcal{L}_\alpha^2 - \mathcal{L}_\beta^2 = 1, \quad (2.28)$$

o ancora, passando alle nuove variabili $(\alpha, \beta) \rightarrow (p, q)$ date da

$$p = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad q = \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \quad (2.29)$$

nella forma

$$\mathcal{L}_p \mathcal{L}_q = 1. \quad (2.30)$$

Una famiglia di soluzioni in forma parametrica della (2.30) è presentata nell'appendice A.2.

2.2 Una soluzione non banale: la lagrangiana di Born-Infeld

Come già abbiamo avuto modo di osservare, la teoria libera è invariante per dualità di GZ. Verifichiamolo nuovamente, usando la (2.23). Scritta in termini degli invarianti definiti nella (2.19), la lagrangiana di Maxwell è semplicemente

$$\mathcal{L}_M = X_1, \quad (2.31)$$

e la verifica della (2.23) è immediata. Vogliamo ora dimostrare che anche la lagrangiana di Born-Infeld,

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ 1 - \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu})} \right\}, \quad (2.32)$$

è invariante secondo GZ, ovvero che soddisfa la (2.23). Innanzitutto, riscriviamo la (2.32) in termini degli invarianti, sfruttando il fatto che il determinante che in essa compare è Lorentz-invariante. Dato infatti un generico tensore con due indici $M_{\mu\nu}$, si ha $M'_{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}^\rho_\mu \tilde{\Lambda}^\sigma_\nu M_{\rho\sigma}$ ovvero, in notazione matriciale, $M' = \tilde{\Lambda} M \tilde{\Lambda}^T$. Essendo $|\det \tilde{\Lambda}| = 1$, si ha che $\det M' = \det M$. Possiamo dunque valutare il radicando nel sistema di riferimento in cui $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$, che risulta particolarmente conveniente perchè in questo caso il determinante da calcolare si riduce a quello di una matrice a blocchi. Ricordando che il valore degli invarianti in questo particolare sistema di riferimento era già stato calcolato nella (2.22), si trova

$$\begin{aligned} -\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda E & 0 & 0 \\ -\lambda E & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda B \\ 0 & 0 & \lambda B & -1 \end{pmatrix} &= 1 + \lambda^2(B^2 - E^2) - \lambda^4 E^2 B^2 \\ &= 1 - 2\lambda^2 X_1 - \lambda^4 X_3^2 \\ &= 1 - 2\lambda^2 X_1 + 2\lambda^4 (X_1^2 - X_2). \end{aligned}$$

La (2.32) si può allora riscrivere nella forma

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 2\lambda^2 X_1 + 2\lambda^4 (X_1^2 - X_2)} \right\}, \quad (2.33)$$

o equivalentemente nella forma

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 2\lambda^2 X_1 - \lambda^4 X_3^2} \right\}. \quad (2.34)$$

Consideriamo la prima e calcoliamo le due derivate,

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1 - 2\lambda^2 X_1}{\sqrt{1 - 2\lambda^2 X_1 + 2\lambda^4 (X_1^2 - X_2)}}, \quad \mathcal{L}_2 = \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 - 2\lambda^2 X_1 + 2\lambda^4 (X_1^2 - X_2)}}.$$

Sostituendo nella (2.23), si trova che questa è soddisfatta.

Capitolo 3

Dualità manifesta a livello dell'azione

Abbiamo visto come la dualità di GZ agisca sulle equazioni del moto di una teoria: se la condizione di dualità (2.18) è soddisfatta, una trasformazione di $SO(2)$ lascia invariate le equazioni del moto, ma non la lagrangiana. Tale concetto non avrebbe neppure molto senso, dal momento che $\mathcal{L}$ dipende da un unico campo elettromagnetico.

In realtà, è anche possibile definire una nozione di dualità come simmetria manifesta a livello dell'azione, che chiameremo *dualità manifesta* per distinguerla dall'altra. Il nostro punto di partenza sarà di nuovo la teoria di Maxwell. Applicando un metodo dovuto a Pasti, Sorokin e Tonin (sviluppato prima in [12] e [13], poi nella forma più generale in [11]), costruiremo un'azione equivalente a quella usuale, nel senso che le equazioni del moto da essa generate saranno le solite equazioni di Maxwell, ma che esibisca la dualità come simmetria manifesta. Generalizzeremo poi la costruzione al caso non lineare, avendo in mente come prototipo la teoria di Born-Infeld. Prima di esaminare questo metodo, conviene presentare un approccio ancora diverso, originariamente proposto da Schwarz e Sen in [16], che ci sarà utile nel seguito.

3.1 Il formalismo non manifestamente covariante di Schwarz-Sen

L'idea originaria di Schwarz e Sen è quella di usare come variabili dinamiche nella lagrangiana due potenziali di gauge indipendenti $A_\mu^I(x)$ ($I = 1, 2$). La natura ausiliaria di uno dei due campi emerge come conseguenza delle equazioni del moto e della presenza di una nuova simmetria locale. Il principale

difetto di questo approccio è che l'azione che si considera non è manifestamente Lorentz-covariante, pur essendo invariante sotto trasformazioni di Lorentz modificate che si riducono a quelle usuali tramite un'opportuna trasformazione di gauge (si vedano [16] e [3]). Discuteremo la costruzione per le teorie di Maxwell e Born-Infeld.

3.1.1 Teoria di Maxwell

Consideriamo l'azione

$$S[A^I] = -\frac{1}{2} \int d^4x \left(\varepsilon^{IJ} B^{Ii} E^{Ji} + B^{Ii} B^{Ii} \right), \quad (3.1)$$

in cui

$$E^i = \partial_0 A_i^I - \partial_i A_0^I, \quad B^{Ii} = \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k^I, \quad (3.2)$$

e ε^{IJ} è il tensore di Levi-Civita in due dimensioni ($\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1$).

L'azione (3.1) presenta, oltre all'usuale invarianza per trasformazioni di gauge, di parametro $\Lambda^I(x)$,

$$\delta A_\mu^I = \partial_\mu \Lambda^I, \quad (3.3)$$

un'ulteriore simmetria locale, di parametro $\lambda^I(x)$,

$$\delta A_0^I = \lambda^I. \quad (3.4)$$

Infatti in questa azione A_0^J non compare, perché si integra via in virtù dell'identità di Bianchi per il campo A^I ,

$$\int d^4x \varepsilon^{IJ} B^{Ii} \partial_i A_0^J = - \int d^4x \varepsilon^{IJ} \partial_i B^{Ii} A_0^J = 0. \quad (3.5)$$

Inoltre, la (3.1) è *manifestamente invariante* sotto la trasformazione di $SO(2)$

$$A_\mu^I = O^{IJ}(\alpha) A_\mu^J, \quad (3.6)$$

con $O(\alpha)$ la matrice di rotazione nella (2.8).

Variando la lagrangiana rispetto ad uno dei due campi, ad esempio A^2 , si ha che l'equazione del moto di A_0^2 è un'identità, mentre per A_i^2

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \left(B^{1i} \partial_0 \delta A_i^2 - E_i^1 \varepsilon^{ijk} \partial_j \delta A_k^2 + 2 B_i^2 \varepsilon^{ijk} \partial_j \delta A_k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial_0 B^{1k} - \varepsilon^{ijk} \partial_j E_i^1 + 2 \varepsilon^{ijk} \partial_j B_i^2 \right) \delta A_k^2 \\ &= \varepsilon^{ijk} \partial_j \left(B_i^2 - E_i^1 \right) \delta A_k^2 = 0, \end{aligned}$$

si trova l'equazione del moto

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j (B_k^2 - E_k^1) = 0. \quad (3.7)$$

Sfruttando l'invarianza (3.4) di A_0^1 , la soluzione generale della (3.7),

$$B_k^2 - E_k^1 = \partial_k \chi, \quad (3.8)$$

si può portare nella forma

$$B_k^2 - E_k^1 = 0. \quad (3.9)$$

A questo punto possiamo procedere in due modi.

Variando rispetto ad A^1 , troviamo l'equazione del moto

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j (E_i^2 + B_i^1) = 0, \quad (3.10)$$

la cui soluzione generale

$$E_k^2 + B_k^1 = \partial_k \chi', \quad (3.11)$$

si riduce a

$$E_k^2 + B_k^1 = 0 \quad (3.12)$$

sfruttando l'invarianza (3.4) di A_0^2 . Queste equazioni del moto permettono di ricavare uno dei due campi elettromagnetici completamente in funzione dell'altro, ad esempio $\mathbf{E}^2$ e $\mathbf{B}^2$ in funzione di $\mathbf{E}^1$ e $\mathbf{B}^1$,

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{E}^1, \quad \mathbf{E}^2 = -\mathbf{B}^1. \quad (3.13)$$

Sostituendo nelle identità di Bianchi di $\mathbf{E}^2$ e $\mathbf{B}^2$,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^2 = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}^2 = 0, \quad (3.14)$$

troviamo le equazioni dinamiche di $\mathbf{E}^1$ e $\mathbf{B}^1$,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^1 = 0, \quad -\frac{\partial \mathbf{E}^1}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B}^1 = 0, \quad (3.15)$$

In alternativa, possiamo riscrivere l'azione (3.1) usando l'equazione del moto (3.7) del solo A^2 . Osserviamo che, dei quattro addendi della lagrangiana, due si cancellano, infatti tralasciando derivate totali

$$B^{1i} E^{2i} = -\partial_0 B^{1i} A_i^2 = -\varepsilon^{ijk} \partial_j E_k^1 A_i^2 = -\varepsilon^{ijk} \partial_j B_k^2 A_i^2 = -B^{2i} B^{2i}, \quad (3.16)$$

in cui si sono usate l'identità di Bianchi di A^1 per la seconda uguaglianza e la (3.8) per la terza. I restanti due termini, usando ancora la (3.8), danno la lagrangiana di Maxwell per il campo A^1

$$S[A^1] = -\frac{1}{2} \int d^4x (B^{1i} B^{1i} - E^{1i} E^{1i}). \quad (3.17)$$

3.1.2 Teoria di Born-Infeld

Questa costruzione si può generalizzare al caso della teoria di Born-Infeld, come fatto in [1] e [9]. Modifichiamo il secondo addendo della (3.1) con un termine non lineare e consideriamo l'azione

$$S[A^I] = - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} B^I E^J + \sqrt{1 + B_i^I B_i^I + \frac{1}{4} \left(\varepsilon^{IJ} \varepsilon^{ijk} B_j^I B_k^J \right)^2} \right\}, \quad (3.18)$$

che si riduce alla (3.1) al primo ordine nei campi. Sviluppando il quadrato,

$$\begin{aligned} (\varepsilon^{IJ} \varepsilon^{ijk} B_j^I B_k^J)^2 &= (\varepsilon^{IJ} \varepsilon^{ijk} B_j^I B_k^J) (\varepsilon^{LM} \varepsilon^{ilm} B_l^L B_m^M) \\ &= 2 \delta^{jl} \delta^{km} \varepsilon^{IJ} \varepsilon^{LM} B_j^I B_k^J B_l^L B_m^M \\ &= 4(B_j^1 B_j^1 B_k^2 B_k^2 - B_j^1 B_j^2 B_k^2 B_k^1), \end{aligned}$$

la (3.18) si può anche scrivere nella forma

$$S[A^I] = - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} B_i^I E_i^J + \sqrt{1 + B_i^I B_i^I + (B_i^1 B_i^1)(B_i^2 B_i^2) - (B_i^1 B_i^2)^2} \right\}. \quad (3.19)$$

Le simmetrie sono le stesse del caso lineare. Oltre all'usuale invarianza di gauge (3.3), vi è la simmetria (3.4) dovuta al fatto che nell'azione A_0^I compare solo tramite una derivata totale. Inoltre l'azione è manifestamente invariante per dualità, si veda la (3.6).

Per calcolare l'equazione del moto di A^2 , variamo la lagrangiana in (3.19). Sfruttando l'identità di Bianchi di A^1 e ponendo

$$\begin{aligned} M_i(B^1, B^2) &= \frac{\partial \sqrt{1 + B_i^I B_i^I + (B_i^1 B_i^1)(B_i^2 B_i^2) - (B_i^1 B_i^2)^2}}{\partial B_i^2} \\ &= \frac{B_i^2 + (B_j^1 B_j^1) B_i^2 - (B_j^1 B_j^2) B_i^1}{\sqrt{1 + B_i^I B_i^I + (B_i^1 B_i^1)(B_i^2 B_i^2) - (B_i^1 B_i^2)^2}}, \end{aligned}$$

troviamo

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (-\varepsilon^{ijk} \partial_j E_i^1 + \partial_0 B_k^1) \delta A_k^2 + \varepsilon^{ijk} \partial_j M_i \delta A_k^2 \\ &= \varepsilon^{ijk} \partial_j (M_i - E_i^1) \delta A_k^2, \end{aligned}$$

da cui si legge l'equazione del moto

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j (M_k - E_k^1) = 0. \quad (3.20)$$

Sfruttando l'invarianza locale (3.4) di A^1 , possiamo scrivere la soluzione della (3.20) nella forma

$$M_i(B^1, B^2) - E_i^1 = 0. \quad (3.21)$$

Riarrangiando in modo opportuno, come fatto in [1], quest'ultima si può mettere nella forma

$$B_i^2 = \frac{E_i^1 + (E_j^1 B_j^1) B_i^1}{\sqrt{1 + B_j^I B_j^I + (B_j^1 B_j^1)(B_k^2 B_k^2) - (B_j^1 B_j^2)^2}}, \quad (3.22)$$

in cui il secondo membro dipende ancora da $\mathbf{B}^2$. Tuttavia, sostituendo quest'espressione nella (3.19), miracolosamente $\mathbf{B}^2$ scompare e troviamo un'azione che dipende da un solo campo,

$$S[A^1] = - \int d^4x \sqrt{1 + B_i^1 B_i^1 - E_i^1 E_i^1 - (E_i^1 B_i^1)^2}, \quad (3.23)$$

Confrontando con la (2.34) e ricordando le definizioni degli invarianti nella (2.19), quest'ultima si vede essere proprio l'azione di Born-Infeld per A^1 .

3.2 Il metodo di Pasti-Sorokin-Tonin

Nella sezione precedente abbiamo visto come, rinunciando alla manifesta covarianza, sia possibile scrivere un'azione in cui la simmetria di dualità sia manifesta. Il metodo di Pasti-Sorokin-Tonin di cui ora ci occupiamo permette di avere *entrambe* le simmetrie manifeste nell'azione. Le principali novità rispetto al formalismo di SS consistono nell'introduzione di un campo scalare ausiliario $a(x)$ come ulteriore variabile dinamica nella lagrangiana e nella presenza di due simmetrie locali, che giocano in tutta la costruzione un ruolo chiave: l'una contiene l'informazione sulla natura completamente ausiliaria del campo a e permette, in un'opportuna gauge, di ridurre l'azione PST a quella dell'approccio non covariante, l'altra permette di scrivere l'equazione del moto nella forma di un vincolo "di dualità" tra i due campi, che permette di determinare l'uno completamente in funzione dell'altro, e garantisce l'equivalenza con la formulazione usuale della teoria (almeno nel caso di Maxwell e Born-Infeld).

3.2.1 Formulazione di PST della teoria di Maxwell

Per applicare il metodo PST alla teoria di Maxwell libera, seguendo [12] e [13] scriviamo una lagrangiana in cui le variabili dinamiche sono un doppietto di potenziali di gauge $A_\mu^I(x)$ ($I = 1, 2$) che danno i due tensori elettromagnetici $F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I$ e un campo scalare ausiliario $a(x)$ che compare in essa tramite il campo vettoriale

$$v_\mu = \frac{\partial_\mu a}{\sqrt{(\partial a)^2}}. \quad (3.24)$$

Quest'ultimo ha, per definizione, norma unitaria $v_\mu v^\mu = 1$.

L'azione, funzionale di A_μ^I ed a , si può scrivere nella forma

$$S[A, a] = \int d^4x \left(-\frac{1}{8} F^{I\mu\nu} F_{\mu\nu}^I + \frac{1}{4} h^{I\mu} h_\mu^I \right), \quad (3.25)$$

in cui, denotando con ε^{IJ} il tensore di Levi Civita in due dimensioni ($\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1$) e con $\tilde{F}_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ il duale di Hodge, si è posto

$$H_{\mu\nu}^I = \varepsilon^{IJ} F_{\mu\nu}^J - \tilde{F}_{\mu\nu}^I, \quad h^{I\mu} = H^{I\mu\nu} v_\nu, \quad \tilde{h}^{I\mu} = \tilde{H}^{I\mu\nu} v_\nu. \quad (3.26)$$

Si osserva che, per la particolare scelta $a(x) = x^0$, cioè $v^\mu = \delta_0^\mu$, la (3.25) si riduce a

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{8} F^{I\mu\nu} F_{\mu\nu}^I + \frac{1}{4} H^{Ii0} H_{i0}^I \right), \quad (3.27)$$

che è una riscrittura dell'azione non covariante (3.1). Per verificarlo, calcoliamo il secondo termine,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}H^{Ii0}H_{i0}^I &= \frac{1}{4}(\varepsilon^{IJ}F^{Ji0} - \tilde{F}^{Ii0})(\varepsilon^{IK}F_{i0}^K - \tilde{F}_{i0}^I) \\ &= \frac{1}{4}(E^{Ii}E^{Ii} - B^{Ii}B^{Ii} - 2\varepsilon^{IJ}B^{Ii}E^{Ji}).\end{aligned}$$

Questo, sommato al primo, dà proprio la (3.1).

Il tensore $H_{\mu\nu}$ definito nella (3.26) gode di alcune proprietà, che ora proviamo e che ci saranno utili nel seguito. Esso è "autoduale", nel senso che

$$H_{\mu\nu}^I = \varepsilon^{IJ}\tilde{H}_{\mu\nu}^J, \quad (3.28)$$

come si vede subito dalla definizione (3.26), usando $\varepsilon^{IJ}\varepsilon^{JK} = -\delta^{IK}$ e la proprietà del duale di Hodge $** = -1$. Inoltre, come dimostrato nell'appendice A.3 per un *generico* tensore antisimmetrico con due indici, ammette la decomposizione in componenti parallela e ortogonale ad un quadrivettore fissato v^μ :

$$H_{\mu\nu}^I = -2v_{[\mu}h_{\nu]}^I + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}v_\rho\tilde{h}_\sigma^I. \quad (3.29)$$

Tenendo conto della (3.28), la (3.29) diventa poi

$$H_{\mu\nu}^I = -2v_{[\mu}h_{\nu]}^I - \varepsilon^{IJ}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}v^\alpha h^{J\beta}. \quad (3.30)$$

Simmetrie. L'azione (3.25) che abbiamo introdotto presenta, oltre alla consueta invarianza di gauge, di parametro $\Lambda^I(x)$,

$$\begin{cases} \delta A_\mu^I = \partial_\mu \Lambda^I, \\ \delta a = 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

due ulteriori simmetrie locali, con parametri $\lambda^I(x)$ ¹ e $\varphi(x)$,

$$\begin{cases} \delta A_\mu^I = v_\mu \lambda^I = \partial_\mu a \chi^I, \\ \delta a = 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

e

$$\begin{cases} \delta A_\mu^I = \frac{\varphi}{\sqrt{(\partial a)^2}}\varepsilon^{IJ}h_\mu^J, \\ \delta a = \varphi. \end{cases} \quad (3.33)$$

Per la verifica delle simmetrie, nonché per la derivazione delle equazioni del moto che sarà il passo immediatamente successivo, conviene preliminarmente calcolare la variazione dell'azione (3.25) sotto una generica trasformazione

¹Per chiarezza, precisiamo che nella prima si può ridefinire il parametro della trasformazione, $\chi^I = \frac{\lambda^I}{\sqrt{(\partial a)^2}}$.

dei campi A_μ^I e a . Questo calcolo è un po' laborioso ed è riportato integralmente nell'appendice A.4. Qui diamo direttamente il risultato, modulo quadridivergenze,

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (h_\nu^I v_\rho) \delta A_\sigma^I + \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} v_\nu h_\rho^I h_\sigma^J \right) \delta a. \quad (3.34)$$

Sfruttando questa espressione generale, possiamo calcolare le variazioni della lagrangiana rispetto a trasformazioni di tipo (3.32) e (3.33) e la verifica delle due simmetrie diventa immediata. La prima è ovvia, infatti il primo addendo nella (3.34) si può anche scrivere nella forma

$$-v^\alpha h^{I\mu} \delta \tilde{F}_{\mu\alpha}^I. \quad (3.35)$$

Per una trasformazione di tipo (3.32), questa variazione è nulla, come si vede subito calcolando

$$\delta \tilde{F}_{\mu\nu}^I = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \delta F^{I\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho (\partial^\sigma a \chi^I) = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\sigma a \partial^\rho \chi^I. \quad (3.36)$$

Quanto alla seconda simmetria, usando la (3.34) si trova che la variazione della lagrangiana per una trasformazione di tipo (3.33) è data da

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (v_\nu h_\rho^I) \frac{\varphi}{\sqrt{(\partial a)^2}} \varepsilon^{IJ} h_\sigma^J - \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} v_\nu h_\rho^I h_\sigma^J \partial_\mu \varphi \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} v_\nu h_\rho^I h_\sigma^J \varphi \right), \end{aligned}$$

che è una quadridivergenza.

Equazioni del moto e gauge fixing. Le equazioni del moto, che si ottengono imponendo l'annullarsi della (3.34) per variazioni arbitrarie dei campi A_μ^I e a , sono

$$\delta A_\mu^I : \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (v_\nu h_\rho^I) = 0, \quad (3.37)$$

$$\delta a : \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{IJ} \partial_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} v_\nu h_\rho^I h_\sigma^J \right) = 0. \quad (3.38)$$

Si dimostra facilmente che la seconda equazione è implicata dalla prima. Infatti, ponendo per comodità $k_\mu^I = \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} h_\mu^I$, dalla (3.37) si ha

$$0 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\nu a k_\rho^I) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu a \partial_\mu k_\rho^I. \quad (3.39)$$

Sviluppando la (3.38) si trova poi

$$\varepsilon^{IJ} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\nu a k_\rho^I k_\sigma^J) = 2\varepsilon^{IJ} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu a (\partial_\mu k_\rho^I) k_\sigma^J = 0, \quad (3.40)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dalla (3.37). Questo fatto non è sorprendente: la natura puramente ausiliaria del campo scalare a è assicurata dalla simmetria (3.33), in base a cui una traslazione arbitraria di a lascia la lagrangiana invariata.

La (3.37) afferma che vh è una forma chiusa e, in uno spazio topologicamente banale, anche esatta. In virtù del lemma di Poincaré, vale allora

$$v_{[\nu} h_{\rho]}^I = \partial_{[\nu} \chi_{\rho]}^I = \partial_{[\nu} a \Lambda_{\rho]}^I = \partial_{[\nu} a \partial_{\rho]} \tilde{\lambda}^I, \quad (3.41)$$

in cui il secondo e il terzo passaggio sono giustificati dalla particolare forma di v e h^I . La simmetria (3.32) assicura che è sempre possibile effettuare una trasformazione di gauge in cui la (3.41) diventi

$$v_{[\nu} h_{\rho]}^I = 0. \quad (3.42)$$

Per verificarlo, calcoliamo le variazioni rispetto ad una trasformazione della forma (3.32) per un parametro χ^I arbitrario,

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^I &= 2\partial_{[\mu} \delta A_{\nu]}^I = 2\partial_{[\nu} a \partial_{\mu]} \chi^I, \\ \delta \tilde{F}_{\mu\nu}^I &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\sigma a \partial^\rho \chi^I, \\ \delta h_\rho^I &= (\varepsilon^{IJ} \delta F_{\rho\sigma}^J - \delta \tilde{F}_{\rho\sigma}^I) v^\sigma = 2\varepsilon^{IJ} v^\sigma \partial_{[\sigma} a \partial_{\rho]} \chi^J \\ &= \varepsilon^{IJ} \partial_\rho \chi^J \sqrt{(\partial a)^2} - \varepsilon^{IJ} v_\rho \partial^\sigma a \partial_\sigma \chi^J. \end{aligned}$$

Nell'ultima, si usa la definizione di h nella (3.26) e si osserva che la variazione del secondo termine è nulla e non contribuisce. Si ha dunque

$$\delta (v_{[\nu} h_{\rho]}^I) = \varepsilon^{IJ} \partial_{[\nu} a \partial_{\rho]} \chi^J, \quad (3.43)$$

e confrontando quest'ultima con la (3.41), si vede che scegliendo il parametro $\chi^J = -\tilde{\lambda}^I \varepsilon^{IJ}$, l'equazione del moto si riduce alla forma voluta.

Dimostriamo ora che

$$v_{[\nu} h_{\rho]}^I = 0 \Leftrightarrow h_\rho^I = 0 \Leftrightarrow H_{\rho\sigma}^I = 0. \quad (3.44)$$

Contraendo la prima equazione della (3.44) con v^ν si trova

$$0 = h_\rho^I - v_\rho v^\nu H_{\nu\mu}^I v^\mu = h_\rho^I, \quad (3.45)$$

e l'identità (3.30), che esprime H in funzione di h , permette di concludere.

L'equazione del moto così ottenuta

$$H_{\mu\nu}^I = \varepsilon^{IJ} F_{\mu\nu}^J - \tilde{F}_{\mu\nu}^I = 0 \quad (3.46)$$

è equivalente alle equazioni di Maxwell. Infatti, prendendo ad esempio $I = 1$, la (3.46) diventa

$$F_{\mu\nu}^2 = \tilde{F}_{\mu\nu}^1, \quad (3.47)$$

che usando l'identità di Bianchi per A^1 dà proprio

$$\partial_\mu F^{2\mu\nu} = 0. \quad (3.48)$$

3.2.2 Formulazione di PST di una teoria non lineare

L'azione lineare (3.25) si può riscrivere in varie forme equivalenti. Tra queste, quella che meglio si presta alla generalizzazione non lineare è

$$S[A, a] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} f^{I\mu} \tilde{f}_\mu^J + \mathcal{N}^{(0)} \right), \quad (3.49)$$

in cui si è posto

$$f_\mu^I = F_{\mu\nu}^I v^\nu, \quad \tilde{f}_\mu^I = \tilde{F}_{\mu\nu}^I v^\nu, \quad \mathcal{N}^{(0)} = \frac{1}{2} \tilde{f}^{I\mu} \tilde{f}_\mu^I. \quad (3.50)$$

Da queste definizioni, si vede che,

$$v^\mu f_\mu^I = 0, \quad v^\mu \tilde{f}_\mu^I = 0, \quad (3.51)$$

proprietà che useremo nel seguito. Per la derivazione della (3.49), si rimanda all'appendice A.5.

Nel caso non lineare, bisogna considerare un'azione della forma (si veda [11])

$$S[A, a] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} f^{I\mu} \tilde{f}_\mu^J + \mathcal{N}(\tilde{f}) \right), \quad (3.52)$$

in cui $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\tilde{f})$ è una funzione locale, invariante per *Lorentz* e per *dualità* $SO(2)$ del campo $\tilde{f}$. In realtà, la dipendenza da $\tilde{f}$ non può essere generica. Come mostrato nell'appendice A.6, nel caso di una sola coppia di campi di gauge A_μ^I ($I = 1, 2$) le richieste di invarianza per Lorentz e per $SO(2)$ implicano che $\mathcal{N}$ può dipendere da $\tilde{f}$ solo tramite i due invarianti indipendenti

$$Q_1 = \frac{1}{2} \text{tr} Y = \frac{1}{2} \tilde{f}^{I\mu} \tilde{f}_\mu^I, \quad Q_2 = \frac{1}{4} \text{tr}(Y^2) = \frac{1}{4} \tilde{f}^{I\alpha} \tilde{f}_\alpha^J \tilde{f}^{I\beta} \tilde{f}_\beta^J, \quad (3.53)$$

in cui si è posto

$$Y^{IJ} = \tilde{f}^{I\mu} \tilde{f}_\mu^J. \quad (3.54)$$

Si ha dunque

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(Q_1, Q_2). \quad (3.55)$$

Si richiede poi che il termine di ordine zero nello sviluppo di $\mathcal{N}$ in potenze di Q_1 e Q_2 coincida con l' $\mathcal{N}^{(0)}$ definito nella (3.50). Ovviamente, per motivi dimensionali e come sempre nelle teorie non lineari, nella funzione $\mathcal{N}$ è presente un opportuno parametro dimensionale λ . Noi per comodità porremo $\lambda = 1$.

Passiamo ora a discutere le simmetrie e le equazioni del moto, tenendo presente quanto già svolto per la teoria lineare.

Simmetrie. La (3.52) è ovviamente invariante per trasformazioni di gauge, di parametro $\Lambda^I(x)$,

$$\begin{cases} \delta A_\mu^I = \partial_\mu \Lambda^I, \\ \delta a = 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Il formalismo di PST richiede poi la presenza di due ulteriori simmetrie locali, di parametri rispettivamente $\lambda^I(x)$ e $\varphi(x)$, che generalizzano le (3.32) e (3.33) del caso lineare,

$$\begin{cases} \delta A_\mu^I = v_\mu \lambda^I = \partial_\mu a \chi^I, \\ \delta a = 0, \end{cases} \quad (3.57)$$

che ha esattamente la stessa forma della (3.32), e

$$\begin{cases} \delta A_\mu^I = \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} \epsilon^{IJ} \hat{h}_\mu^J \varphi, \\ \delta a = \varphi, \end{cases} \quad (3.58)$$

in cui

$$\hat{h}_\mu^J = \epsilon^{JK} f_\mu^K - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{J\mu}} \quad (3.59)$$

rappresenta la generalizzazione non lineare del h_μ^I della (3.26). Infatti, sviluppando la (3.59) all'ordine zero nei campi e ricordando l'espressione di $\mathcal{N}^{(0)}$ nella (3.50), si trova

$$\hat{h}_\mu^J \approx \epsilon^{JK} f_\mu^K - \frac{\partial \mathcal{N}^{(0)}}{\partial \tilde{f}^{J\mu}} = \epsilon^{JK} f_\mu^K - \frac{\partial (\frac{1}{2} \tilde{f}^{I\nu} \tilde{f}_\nu^I)}{\partial \tilde{f}^{J\mu}} = \epsilon^{JK} f_\mu^K - \tilde{f}^{I\mu}, \quad (3.60)$$

che coincide con la definizione di h_μ^I nella (3.26).

La verifica della (3.57) è immediata, se si osserva che nella variazione della lagrangiana non c'è alcun contributo dovuto a $\tilde{f}$. Dalla (3.57) segue infatti

$$\delta \tilde{f}^{I\mu} = \delta \tilde{F}^{\mu\nu} v_\nu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho (\partial_\sigma a \chi^I) v_\nu = 0,$$

e il calcolo si riduce a

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \varepsilon^{IJ} \partial_{[\nu} a \partial_{\mu]} \chi^I v^\nu \tilde{f}^{J\mu} \\
&= \frac{1}{4} \varepsilon^{IJ} (\partial_\nu a \partial_\mu \chi^I - \partial_\mu a \partial_\nu \chi^I) v^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}^J v_\alpha \\
&= \frac{1}{4} \varepsilon^{IJ} \partial_\mu \chi^I \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}^J \partial_\alpha a \\
&= -\frac{1}{4} \varepsilon^{IJ} \chi^I \partial_\alpha a \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \partial_\mu F_{\beta\gamma}^J = 0,
\end{aligned}$$

in cui l'ultimo passaggio è l'identità di Bianchi di $F_{\beta\gamma}^J$.

Condizione di non propagazione di $\mathbf{a(x)}$. La seconda simmetria è più delicata. Come dimostrato nell'appendice A.7, la richiesta che l'azione (3.52) sia invariante rispetto ad una trasformazione di tipo (3.58) impone un ulteriore vincolo sulla funzione $\mathcal{N}$,

$$\partial_\mu \left\{ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{IJ} \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} \left[\tilde{f}_\nu^I \tilde{f}_\rho^J - \mathcal{N}_\nu^I \mathcal{N}_\rho^I \right] v_\sigma \right\} = 0, \quad (3.61)$$

in cui si è usata la notazione compatta $\mathcal{N}_\mu^I = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{I\mu}}$ per le derivate. Osserviamo che, nella gauge $a(x) = x^0$, la condizione di non propagazione del campo a di PST si riduce alla condizione trovata da Bossard e Nicolai in [3], che garantisce l'invarianza dell'azione per trasformazioni di Lorentz "modificate" nell'approccio non manifestamente covariante discusso nella sezione 3.1. Chiameremo per questo la (3.61) *condizione di BN-PST*. Non è difficile convincersi che nella (3.61) occorre che il termine entro parentesi graffe si annulli identicamente,

$$\tilde{f}_{[\alpha}^I \varepsilon^{IJ} \tilde{f}_{\beta]}^J - \mathcal{N}_{[\alpha}^I \varepsilon^{IJ} \mathcal{N}_{\beta]}^J = 0. \quad (3.62)$$

Osserviamo che all'ordine zero, cioè per la teoria lineare, in cui

$$\mathcal{N}_\alpha^I = \mathcal{N}_\alpha^{(0)I} = \tilde{f}_\alpha^I,$$

questa condizione è automaticamente soddisfatta.

Poiché, come siamo giunti a concludere nella (3.55), $\mathcal{N}$ può dipendere da $\tilde{f}$ solo tramite i due invarianti Q_1 e Q_2 , si ha che

$$\mathcal{N}^{I\mu} = \frac{\partial X_1}{\partial \tilde{f}^{I\mu}} \mathcal{N}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial \tilde{f}^{I\mu}} \mathcal{N}_2 = \tilde{f}_\mu^I \mathcal{N}_1 + \tilde{f}^{I\beta} \tilde{f}_\beta^J \tilde{f}_\mu^J \mathcal{N}_2 = K^{IJ} \tilde{f}_\mu^J, \quad (3.63)$$

avendo posto

$$K^{IJ} = \delta^{IJ} \mathcal{N}_1 + Y^{IJ} \mathcal{N}_2. \quad (3.64)$$

Sfruttando la (3.63), il secondo termine nella (3.62) si può scrivere

$$\mathcal{N}_{[\alpha}^I \varepsilon^{IJ} \mathcal{N}_{\beta]}^J = K^{MI} \tilde{f}_{[\alpha}^I \varepsilon^{MN} K^{NJ} \tilde{f}_{\beta]}^J = \det K \tilde{f}_{[\alpha}^I \varepsilon^{IJ} \tilde{f}_{\beta]}^J, \quad (3.65)$$

in cui per l'ultimo passaggio si è usata l'identità del determinante

$$\varepsilon^{MN} K^{MI} K^{NJ} = (\det K) \varepsilon^{IJ}, \quad (3.66)$$

e la (3.62) diventa

$$(1 - \det K) \tilde{f}_{[\alpha}^I \varepsilon^{IJ} \tilde{f}_{\beta]}^J = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det K = 1. \quad (3.67)$$

Il determinante si calcola facilmente,

$$\det K = \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon^{MN} K^{IM} K^{JN} = \frac{1}{2} \left[(\text{tr } K)^2 - \text{tr}(K^2) \right]. \quad (3.68)$$

Ricordando le definizioni degli invarianti nella (3.55), le tracce che vi compaiono sono date da

$$\begin{aligned} \text{tr } K &= 2\mathcal{N}_1 + 2Q_1\mathcal{N}_2, \\ \text{tr } K^2 &= \text{tr}(\mathcal{N}_1^2 + 2\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2Y + Y^2\mathcal{N}_2^2) = 2\mathcal{N}_1^2 + 4\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2Q_1 + 4Q_2\mathcal{N}_2^2. \end{aligned}$$

Infine, inserendo nella (3.67) si trova

$$\mathcal{N}_1^2 + 2\mathcal{N}_2^2(Q_1^2 - Q_2) + 2Q_1\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 = 1. \quad (3.69)$$

Scritta in questa forma, la condizione di BN-PST per la funzione $\mathcal{N}$ risulta essere formalmente identica alla condizione di dualità di GZ (2.23) per la lagrangiana $\mathcal{L}$, funzione di un solo campo. Le due condizioni si traducono nella stessa equazione differenziale per una funzione di due variabili: in un caso, queste sono i due invarianti quadratico e quartico del tensore elettromagnetico, che nella (2.19) avevamo denotato X_1 e X_2 , mentre nell'altro corrispondono ai due invarianti Q_1 e Q_2 del campo $\tilde{f}$, definiti nella (3.55). Torneremo nel seguito a discutere l'interesse di questo risultato.

Senza bisogno di fare alcun conto, conosciamo già due soluzioni particolari della condizione di BN-PST: la (2.31) e la (2.33) esaminate nella sezione 2.2,

$$\mathcal{N} = Q_1, \quad \mathcal{N} = -\sqrt{1 - 2Q_1 + 2(Q_1^2 - Q_2)}. \quad (3.70)$$

La prima soluzione corrisponde ovviamente alla teoria di Maxwell, descritta dall'azione (3.49), mentre la seconda, come è naturale aspettarsi e come verificheremo nella sezione 3.2.3, corrisponde alla teoria di Born-Infeld.

Equazioni del moto e gauge fixing. La variazione della lagrangiana (3.52) per trasformazioni generiche dei campi A_μ^I e a è data dalla (A.20) dell'appendice A.7. Le equazioni del moto della teoria si ottengono imponendo l'annullarsi di questa variazione per trasformazioni arbitrarie dei campi,

$$\delta A_\mu^I : \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (v_\nu \hat{h}_\rho^I) = 0, \quad (3.71)$$

$$\delta a : \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} \left[\varepsilon^{IJ} (\tilde{f}_\nu^I \tilde{f}_\rho^J + f_\nu^I f_\rho^J) - 2 f_\nu^I \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}_{I\rho}} \right] v_\sigma \right\}. \quad (3.72)$$

Se vale la condizione di BN-PST (3.61), possiamo riscrivere la (3.72) nella forma

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{IJ} \partial_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} v_\nu \hat{h}_\rho^I \hat{h}_\sigma^J \right) = 0, \quad (3.73)$$

e le equazioni del moto della teoria non lineare diventano formalmente analoghe alle (3.37) e (3.38) della teoria lineare, con ora $\hat{h}$ al posto di h . Il fatto che la (3.73) sia implicata dalla (3.71), sulla traccia di (3.39) e (3.40), è immediato. Infine, procedendo come nella (3.41) e seguenti, si vede che tramite una trasformazione di tipo (3.57) la soluzione della (3.71) si può scrivere nella forma

$$v_{[\mu} \hat{h}_{\nu]}^I = 0 \Leftrightarrow \hat{h}_\mu^I = 0. \quad (3.74)$$

Per l'implicazione non banale osserviamo che, ricordando la definizione di $\hat{h}$ nella (3.59) e sfruttando la (3.51) e (3.63), si trova

$$v^\mu \hat{h}_\mu^I = v^\mu \varepsilon^{IJ} f_\mu^J - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}_{I\mu}} = 0,$$

da cui segue subito

$$0 = v^\mu (v_\mu \hat{h}_\nu^I - v_\nu \hat{h}_\mu^I) = \hat{h}_\nu^I,$$

come si voleva. Infine, ricordando la (3.63), possiamo scrivere l'equazione del moto nella forma

$$\hat{h}_\mu^I = \varepsilon^{IJ} f_\mu^J - K^{IJ} \tilde{f}_\mu^J = 0, \quad (3.75)$$

con K^{IJ} definito nella (3.64).

3.2.3 Formulazione di PST della teoria di Born-Infeld

Conoscendo le due soluzioni (3.70) della (3.69) e sapendo che la prima di queste corrisponde alla teoria di Maxwell libera, vogliamo ora capire a quale teoria corrisponda la seconda. Anticipiamo subito che si tratta della teoria di Born-Infeld. Per verificarlo, partiamo dall'azione non covariante (3.18), che come mostrato nella sezione 3.1.2 descrive proprio la dinamica di Born-Infeld.

Come primo passo, riscriviamo la (3.18) *à la* PST (si veda [10]) introducendo il campo scalare $a(x)$ e definendo i campi v_μ , f_μ^I , $\tilde{f}_\mu^I$ come nelle (3.24) e (3.50),

$$S[A, a] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} f^{I\mu} \tilde{f}_\mu^J + \mathcal{N}(\tilde{f}) \right\}, \quad (3.76)$$

in cui la funzione $\mathcal{N}(\tilde{f})$ è data da

$$\mathcal{N}(\tilde{f}) = -\sqrt{1 - \tilde{f}^{I\mu} \tilde{f}_\mu^I + \frac{1}{4} (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{IJ} \tilde{f}_\nu^I \tilde{f}_\rho^J v_\sigma)^2}. \quad (3.77)$$

Scegliendo $a(x) = x^0$, cioè $v^\mu = \delta_0^\mu$, la (3.76) si riduce alla (3.18) della formulazione non covariante.

Sviluppando il quadrato e tenendo conto della (3.51), otteniamo

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{IJ} \tilde{f}_\nu^I \tilde{f}_\rho^J v_\sigma)^2 = \\ & = (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{IJ} \tilde{f}_\nu^I \tilde{f}_\rho^J v_\sigma) (\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{KL} \tilde{f}^{K\alpha} \tilde{f}^{L\beta} v^\gamma) = \\ & = -2(\delta_\nu^\alpha \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\gamma + 2\delta_\nu^\beta \delta_\rho^\gamma \delta_\sigma^\alpha) \varepsilon^{IJ} \varepsilon^{KL} \tilde{f}^{I\nu} \tilde{f}^{J\rho} v^\sigma \tilde{f}_\alpha^K \tilde{f}_\beta^L v_\gamma = \\ & = -2\varepsilon^{IJ} \varepsilon^{KL} \tilde{f}^{I\alpha} \tilde{f}^{J\beta} \tilde{f}_\alpha^K \tilde{f}_\beta^L = \\ & = -2(\tilde{f}^{I\alpha} \tilde{f}_\alpha^I \tilde{f}^{J\beta} \tilde{f}_\beta^J - \tilde{f}^{I\alpha} \tilde{f}_\alpha^J \tilde{f}^{I\beta} \tilde{f}_\beta^J) \\ & = -2[(tr Y)^2 - tr(Y^2)], \end{aligned}$$

in cui Y è definito nella (3.54). Inserendo questa espressione nella (3.77) e ricordando le definizioni degli invarianti nella (3.55), si trova che $\mathcal{N}$ è data da

$$\mathcal{N} = -\sqrt{1 - tr Y + \frac{1}{2} [(tr Y)^2 - tr(Y^2)]} = -\sqrt{1 - 2Q_1 + 2(Q_1^2 - Q_2)},$$

e dipende da $\tilde{f}$ solo tramite i due invarianti Q_1 e Q_2 , come già anticipato nell'analisi generale. Ha poi esattamente la forma che avevamo previsto, in quanto soluzione della (3.69).

Capitolo 4

Conclusioni. Legame tra dualità di GZ e dualità manifesta

Basandoci sull'esempio a questo punto ben noto della teoria di Born-Infeld, concludiamo con una discussione circa il legame tra le due forme di dualità che abbiamo esaminato. Benché comunemente, almeno a livello implicito, si tenda a identificare i due metodi, non esiste una prova generale della loro equivalenza. Una tale prova dovrebbe svolgersi secondo la seguente strategia.

Riprendiamo l'equazione del moto di PST per una teoria non lineare,

$$\hat{h}_\mu^I = \varepsilon^{IJ} f_\mu^J - K^{IJ} \tilde{f}_\mu^J = 0, \quad (4.1)$$

con

$$K^{IJ} \equiv \delta^{IJ} \mathcal{N}_1 + Y^{IJ} \mathcal{N}_2, \quad Y^{IJ} \equiv \tilde{f}^{I\mu} \tilde{f}_\mu^J. \quad (4.2)$$

Si tratta di sei equazioni indipendenti, vi è infatti l'identità $v^\mu \hat{h}_\mu^I = 0$, tante quante sono le equazioni del moto nella formulazione non manifestamente covariante della sezione 3.1. Nella gauge $a(x) = x^0$, in cui $f_i^I = E_i^I$, $\tilde{f}_i^I = B_i^I$, queste equazioni del moto prendono la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^1 &= \mathbf{E}^1(\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2) = \alpha_1(\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2) \mathbf{B}^1 + \beta_1(\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2) \mathbf{B}^2, \\ \mathbf{E}^2 &= \mathbf{E}^2(\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2) = \alpha_2(\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2) \mathbf{B}^1 + \beta_2(\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2) \mathbf{B}^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

ed è sempre possibile riscriverle come

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 &= \mathbf{E}^2(\mathbf{E}^1, \mathbf{B}^1), \\ \mathbf{B}^2 &= \mathbf{B}^2(\mathbf{E}^1, \mathbf{B}^1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Queste ultime hanno sicuramente la forma manifestamente covariante

$$\tilde{F}^{2\mu\nu} = \mathcal{H}^{\mu\nu}(F^1), \quad (4.5)$$

visto che, nella formulazione di PST, v_μ è un campo ausiliario e la teoria è comunque Lorentz-invariante.

Se poi la teoria è una teoria fondamentale, nel senso di *derivabile da una lagrangiana*, si dovrebbe avere

$$\tilde{F}^{2\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}(F^1)}{\partial F_{\mu\nu}^1}, \quad (4.6)$$

per un'opportuna lagrangiana $\mathcal{L}(F^1)$. Questo però non è garantito dal metodo di PST. Arrivati a questo punto, occorrerebbe dimostrare che la $\mathcal{L}$ della (4.6) soddisfa la condizione di GZ (2.23) *grazie al fatto che $\mathcal{N}$ soddisfa la condizione di BN-PST* (3.69). In tal caso, avremmo dimostrato che ad ogni teoria descritta da una lagrangiana $\mathcal{N}$ e invariante per dualità *à la* PST corrisponde una teoria equivalente con lagrangiana $\mathcal{L}$ e invariante per dualità *à la* GZ. Dato che sia $\mathcal{L}$ che $\mathcal{N}$ soddisfano la stessa condizione, è naturale supporre che valga proprio

$$\mathcal{L}(\cdot) = \mathcal{N}(\cdot). \quad (4.7)$$

Come abbiamo visto, questa *congettura* è verificata sia nel caso della teoria libera sia in quello, tutt'altro che banale, della teoria di Born-Infeld.

Concludiamo osservando che, per completare la dimostrazione dell'equivalenza dei due metodi, bisognerebbe poi ripercorrere al contrario i passi delineati in questo schema e mostrare anche l'inverso, cioè che partendo da una lagrangiana $\mathcal{L}$ che soddisfa la condizione di GZ si possa ottenere una $\mathcal{N}$ che soddisfa la condizione di BN-PST.

Appendice A

A.1 Derivazione della condizione di GZ

Riprendiamo l'equazione

$$-\alpha\tilde{F}_{\mu\nu} + \tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial F_{\alpha\beta}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\right)G_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.1})$$

Sfruttando le definizioni di G e $\tilde{G}$ nella (2.4), questa diventa

$$-\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}}\right)\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\rho\sigma}}\right), \quad (\text{A.2})$$

che ancora si può mettere nella forma

$$\frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}}\left(\frac{1}{8}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}}\left(\frac{1}{8}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\rho\sigma}}\right), \quad (\text{A.3})$$

da cui

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\rho\sigma}} + C, \quad (\text{A.4})$$

con C costante di integrazione. Se vale la (2.2), il confronto con la teoria libera dà $C = 0$.

A.2 Soluzioni in forma parametrica della condizione di GZ

Una delle forme equivalenti in cui abbiamo scritto la condizione di GZ è

$$\mathcal{L}_p\mathcal{L}_q = 1. \quad (\text{A.5})$$

Si tratta di un'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine, non lineare. Una famiglia di soluzioni si può dare nella forma parametrica

$$\mathcal{L} = \frac{2p}{\dot{v}(t)} + v(t), \quad (\text{A.6})$$

$$q = \frac{p}{(\dot{v}(t))^2} + t, \quad (\text{A.7})$$

dove $v(t)$ è un'arbitraria funzione di una variabile, determinata dalle condizioni iniziali. A priori, la (A.7) permette di ricavare $t(p, q)$, che va sostituito nella (A.6) se si vuole $\mathcal{L}(p, q)$. Per verificare che il sistema di equazioni costituito dalla (A.6) e dalla (A.7) definisce una soluzione della (2.30) basta differenziare,

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{2dp}{\dot{v}} + \left(\dot{v} - \frac{2p}{\dot{v}^2} \ddot{v} \right) dt, \\ dq &= \frac{dp}{\dot{v}^2} + \left(1 - \frac{2p}{\dot{v}^3} \ddot{v} \right) dt. \end{aligned}$$

Risolvendo in dt nella seconda e sostituendo nella prima, si trova

$$d\mathcal{L} = \frac{1}{\dot{v}} dp + \dot{v} dq = \mathcal{L}_p dp + \mathcal{L}_q dq. \quad (\text{A.8})$$

La (A.5) è dunque soddisfatta.

A.3 Una proprietà dei tensori antisimmetrici

Siano $K^{\mu\nu}$ un tensore antisimmetrico con due indici, v_μ un quadrivettore e $k^\mu = K^{\mu\nu} v_\nu$, $\tilde{k}^\mu = \tilde{K}^{\mu\nu} v_\nu$. Vogliamo decomporre K in una componente parallela e una ortogonale a v_μ , cioè scriverlo nella forma

$$K_{\mu\nu} = v_{[\mu} Z_{\nu]} + G_{\mu\nu}, \quad (\text{A.9})$$

con $G_{\mu\nu} v^\mu = 0$ e $Z_\nu v^\nu = 0$. Per determinare Z basta contrarre la (A.9) con v^ν , ottenendo

$$Z_\mu = -2k_\mu. \quad (\text{A.10})$$

Inserendo la (A.10) nella (A.9) e prendendo il duale di quest'ultima, si trova

$$\tilde{G}^{\mu\nu} = \tilde{K}^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\rho K_{\sigma\alpha} v^\alpha = \tilde{K}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\rho \varepsilon_{\sigma\alpha\beta\gamma} \tilde{K}^{\beta\gamma} v^\alpha = -2v^{[\mu} \tilde{k}^{\nu]}, \quad (\text{A.11})$$

in cui, per l'ultimo passaggio, si è usata la formula per la contrazione di due tensori di Levi Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} = -3!\delta_{[\alpha}^{\nu}\delta_{\beta}^{\rho}\delta_{\gamma]}^{\sigma}$. Dalla (A.11) segue subito

$$G^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}v_{\rho}\tilde{k}_{\sigma}. \quad (\text{A.12})$$

Infine, inserendo la (A.10) e la (A.12) nella (A.9), otteniamo

$$K_{\mu\nu} = -2v_{[\mu}k_{\nu]} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}v_{\rho}\tilde{k}_{\sigma}. \quad (\text{A.13})$$

A.4 Variazione della lagrangiana di PST lineare

Calcoliamo la variazione della lagrangiana di PST lineare nella (3.25) rispetto a trasformazioni generiche dei campi A_{μ}^I e a . Variando rispetto ad A_{μ}^I si trova, modulo quadridivergenze,

$$\begin{aligned} \delta_A \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^{I\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}^I + \frac{1}{2}h^{I\mu}\delta h_{\mu}^I \\ &= -\frac{1}{4}F^{I\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}^I + \frac{1}{2}h^{I\mu}v^{\alpha}\delta H_{\mu\alpha}^I \\ &= -\frac{1}{4}F^{I\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}^I + \frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}v^{\alpha}h^{I\alpha}\delta F_{\mu\alpha}^J - \frac{1}{2}v^{\alpha}h^{I\mu}\delta\tilde{F}_{\mu\alpha}^I \\ &= -\frac{1}{4}F^{I\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}^I + \frac{1}{8}\varepsilon^{IJ}v^{\alpha}v^{\beta}\varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma}\tilde{H}_{\rho\sigma}^I\varepsilon_{\mu\alpha\gamma\delta}\delta\tilde{F}^{J\gamma\delta} - \frac{1}{2}v^{\alpha}h^{I\mu}\delta\tilde{F}_{\mu\alpha}^I \\ &= -\frac{1}{4}F^{I\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}^I + \frac{1}{4}v^{\alpha}v^{\beta}H_{\rho\alpha}^I\delta\tilde{F}^{I\gamma\delta}(\delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\gamma}^{\rho}\delta_{\delta}^{\sigma} + 2\delta_{\alpha}^{\rho}\delta_{\gamma}^{\sigma}\delta_{\delta}^{\beta}) - \frac{1}{2}v^{\alpha}h^{I\mu}\delta\tilde{F}_{\mu\alpha}^I \\ &= -\frac{1}{4}F^{I\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}^I + \frac{1}{4}\tilde{H}^{I\rho\sigma}\delta F^{I\rho\sigma} - v^{\alpha}h^{I\mu}\delta\tilde{F}_{\mu\alpha}^I \\ &= -\frac{1}{4}F^{I\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}^I + \frac{1}{4}F^{I\rho\sigma}\delta F_{\rho\sigma}^I + \frac{1}{4}\varepsilon^{IJ}\tilde{F}^{J\rho\sigma}\delta F^{I\rho\sigma} - v^{\alpha}h^{I\mu}\delta\tilde{F}_{\mu\alpha}^I \\ &= -v^{\alpha}h^{I\mu}\delta\tilde{F}_{\mu\alpha}^I \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma}\partial_{\rho}(h_{\mu}^I v_{\alpha})\delta A_{\sigma}^I. \end{aligned}$$

Variando invece rispetto ad a , si trova

$$\begin{aligned}
\delta_a \mathcal{L} &= \frac{1}{2} h^{I\mu} H_{\mu\nu}^I \delta v^\nu \\
&= -h^{I\mu} v_{[\mu} h_{\nu]}^I \delta v^\nu - \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha h^{\beta J} h^{I\mu} \delta v^\nu \\
&= \frac{1}{2} h^{I\mu} (h_\mu^I v_\nu - h_\nu^I v_\mu) \delta v^\nu - \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha h^{J\beta} h^{I\mu} \delta v^\nu \\
&= -\frac{1}{4} \varepsilon^{IJ} \varepsilon^{\mu\rho\alpha\beta} H_{\alpha\beta}^J v_\rho v_\mu h_\nu^I \partial v^\nu - \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha h^{\beta J} h^{I\mu} \partial v^\nu \\
&= -\frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha h^{I\mu} h^{J\beta} \delta \left(\frac{\partial^\nu a}{\sqrt{(\partial a)^2}} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha h^{I\mu} h^{J\beta} \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} \delta \partial^\nu a + \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha h^{I\mu} h^{J\beta} v^\nu v_\gamma \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} \delta \partial^\gamma a \\
&= -\frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha h^{I\mu} h^{J\beta} \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} \delta \partial^\nu a.
\end{aligned}$$

Infine, combinando le due espressioni si ha

$$\delta \mathcal{L} = \delta_A \mathcal{L} + \delta_a \mathcal{L} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (h_\nu^I v_\rho) \delta A_\sigma^I + \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} v_\nu h_\rho^I h_\sigma^J \right) \delta a. \quad (\text{A.14})$$

A.5 Una riscrittura equivalente dell'azione di PST lineare

Effettuando nella lagrangiana in (3.25) le sostituzioni

$$\begin{aligned}
h^{I\mu} h_\mu^I &= (\varepsilon^{IJ} f^{J\mu} - \tilde{f}^{I\mu}) (\varepsilon^{IK} f_\mu^K - \tilde{f}_\mu^I) = (f^{I\mu} f_\mu^I - 2\varepsilon^{IJ} f^{J\mu} \tilde{f}_\mu^I + \tilde{f}^{I\mu} \tilde{f}_\mu^I), \\
F^{I\mu\nu} F_{\mu\nu}^I &= (-2v^{[\mu} f^{\nu]I} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\rho \tilde{f}_\sigma^I) (-2v_{[\mu} f_{\nu]}^I + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha \tilde{f}^{I\beta}) \\
&= 2(f^{I\mu} f_\mu^I - \tilde{f}^{I\mu} \tilde{f}_\mu^I),
\end{aligned}$$

in cui abbiamo usato la definizione (3.26) di h_μ^I nella prima e la proprietà (A.13) per $F^{I\mu\nu}$ nella seconda, troviamo la forma equivalente

$$S[A, a] = \frac{1}{2} \int d^4x \left(\varepsilon^{IJ} f^{I\mu} \tilde{f}_\mu^J + \tilde{f}^{I\mu} \tilde{f}_\mu^I \right). \quad (\text{A.15})$$

A.6 Proprietà della lagrangiana di PST non lineare

Nell'azione di PST non lineare (3.52) compare $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\tilde{f})$, una funzione locale, invariante per Lorentz e per dualità $SO(2)$ del campo $\tilde{f}$. Vogliamo ora mostrare che essa può in realtà dipendere da $\tilde{f}$ solo tramite i due invarianti definiti nella (3.55), ovvero che $\mathcal{N} = \mathcal{N}(Q_1, Q_2)$. Infatti, per la richiesta di invarianza di Lorentz, possiamo avere solo combinazioni del tipo

$$\tilde{f}^{I\mu} \dots \tilde{f}^{J\nu}, \quad (\text{A.16})$$

con gli indici opportunamente contratti. Escludendo la presenza dello pseudotensore $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, visto che in queste teorie la parità si conserva e che per di più la contrazione $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{f}_\mu^I \tilde{f}_\nu^J \tilde{f}_\rho^K \tilde{f}_\sigma^L$ è identicamente nulla, essendo completamente antisimmetrica negli indici di $SO(2)$, gli indici di Lorentz devono semplicemente contrarsi tra loro. La (A.16) si riduce in tal modo a

$$Y^{IJ} \dots Y^{MN}, \quad \text{con } Y^{IJ} \equiv \tilde{f}^{I\mu} \tilde{f}_\mu^J. \quad (\text{A.17})$$

Per la richiesta di invarianza per $SO(2)$, gli indici di $SO(2)$ possono contrarsi tra loro solo tramite una δ^{IJ} o una ε^{IJ} . Quest'ultima però non può esservi, per simmetria nello scambio degli Y . Ne segue che la (A.17) deve essere una traccia, del tipo $\text{tr}(Y^n)$. Inoltre, le varie tracce non sono tra loro tutte indipendenti. Per vederlo, conviene scriverle nella forma

$$\text{tr}(Y^n) = a^n + b^n, \quad (\text{A.18})$$

in cui a e b sono gli autovalori reali, $SO(2)$ -invarianti, di Y^{IJ} . Una possibile "base" di invarianti è data dalle tracce con $n = 1$ e $n = 2$, cioè

$$\text{tr} Y = a + b, \quad \text{tr}(Y^2) = a^2 + b^2. \quad (\text{A.19})$$

A.7 Derivazione della condizione di BN-PST

Verifichiamo che la variazione della lagrangiana di PST non lineare (3.52) per delle generiche trasformazioni dei campi è

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\hat{h}_\nu^I v_\rho) \delta A_\sigma^I + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} \left[\varepsilon^{IJ} (\tilde{f}_\nu^I \tilde{f}_\rho^J + f_\nu^I f_\rho^J) - 2 f_\nu^I \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}_{I\rho}} \right] v_\sigma \right\} \delta a. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Infatti, variando rispetto ad A_μ^I , si trova

$$\begin{aligned}\delta_A \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \left\{ (\delta f^{I\mu}) \tilde{f}_\mu^J + f^{I\mu} (\delta \tilde{f}_\mu^J) \right\} + \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{I\mu}} \delta \tilde{f}^{I\mu} \\ &= \left\{ -\varepsilon^{IJ} f^{J\mu} + \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{I\mu}} \right\} v^\nu \delta \tilde{F}_{\mu\nu}^I \\ &= -\hat{h}^{I\mu} v^\nu \delta \tilde{F}_{\mu\nu}^J \\ &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\hat{h}_\nu^I v_\rho) \delta A_\sigma^I.\end{aligned}$$

Variando poi rispetto ad a ,

$$\begin{aligned}\delta_a \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} F^{I\mu\nu} \tilde{f}_\mu^J \delta v_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} f^{I\mu} \tilde{F}^{J\mu\nu} \delta v_\nu + \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{I\mu}} \tilde{F}^{I\mu\nu} \delta v_\nu \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \varepsilon^{IJ} (\tilde{f}_\mu^I \tilde{f}_\nu^J + f_\mu^I f_\nu^J) - 2 f_\mu^I \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{I\nu}} \right\} v_\rho \delta v_\sigma\end{aligned}$$

Nel caso di una trasformazione di tipo (3.58), la (A.20) dà

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} \left[\varepsilon^{IJ} (\tilde{f}_\nu^I \tilde{f}_\rho^J + f_\nu^I f_\rho^J) - 2 f_\nu^I \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{I\rho}} - \varepsilon^{IJ} \hat{h}_\nu^I \hat{h}_\rho^J \right] v_\sigma \right\} \varphi,$$

che, dopo aver sviluppato

$$\begin{aligned}\varepsilon^{IJ} \hat{h}_\nu^I \hat{h}_\rho^J &= \varepsilon^{IJ} \left(\varepsilon^{IK} f_\nu^K - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{I\nu}} \right) \left(\varepsilon^{IJ} f_\rho^L - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{J\rho}} \right) \\ &= \varepsilon^{IJ} \tilde{f}_\nu^I \tilde{f}_\rho^J + \varepsilon^{IJ} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{I\nu}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{J\rho}} - 2 f_\nu^I \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{I\rho}},\end{aligned}$$

diventa

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{IJ} \partial_\mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} \left[\tilde{f}_\nu^I \tilde{f}_\rho^J - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{I\nu}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{J\rho}} \right] v_\sigma \right\} \varphi. \quad (\text{A.21})$$

Affinché questa variazione sia nulla per ogni scelta di φ , occorre che

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{IJ} \partial_\mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}} \left[\tilde{f}_\nu^I \tilde{f}_\rho^J - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{I\nu}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tilde{f}^{J\rho}} \right] v_\sigma \right\} = 0. \quad (\text{A.22})$$

Bibliografia

- [1] David Berman. $SL(2, \mathbb{Z})$ duality of Born-Infeld theory from nonlinear selfdual electrodynamics in six-dimensions. *Phys. Lett.*, B409:153–159, 1997.
- [2] M. Born and L. Infeld. Foundations of the new field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A144:425–451, 1934.
- [3] Guillaume Bossard and Hermann Nicolai. Counterterms vs. Dualities. *JHEP*, 08:074, 2011.
- [4] Paul A. M. Dirac. Quantized Singularities in the Electromagnetic Field. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A133:60–72, 1931.
- [5] Mary K. Gaillard and Bruno Zumino. Duality Rotations for Interacting Fields. *Nucl. Phys.*, B193:221–244, 1981.
- [6] Mary K. Gaillard and Bruno Zumino. Nonlinear electromagnetic selfduality and Legendre transformations. In *Duality and supersymmetric theories. Proceedings, Easter School, Newton Institute, Euroconference, Cambridge, UK, April 7-18, 1997*, 1997.
- [7] G. W. Gibbons and D. A. Rasheed. Electric - magnetic duality rotations in nonlinear electrodynamics. *Nucl. Phys.*, B454:185–206, 1995.
- [8] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. Dynamics of Chiral (Selfdual) P Forms. *Phys. Lett.*, B206:650–654, 1988.
- [9] A. Khoudeir and Y. Parra. On duality in the Born-Infeld theory. *Phys. Rev.*, D58:025010, 1998.
- [10] Alexei Nurmagametov. Duality symmetric three-brane and its coupling to type IIB supergravity. *Phys. Lett.*, B436:289–297, 1998.

-
- [11] Paolo Pasti, Dmitri Sorokin, and Mario Tonin. Covariant actions for models with non-linear twisted self-duality. *Phys. Rev.*, D86:045013, 2012.
 - [12] Paolo Pasti, Dmitri P. Sorokin, and Mario Tonin. Duality symmetric actions with manifest space-time symmetries. *Phys. Rev.*, D52:4277–4281, 1995.
 - [13] Paolo Pasti, Dmitri P. Sorokin, and Mario Tonin. Space-time symmetries in duality symmetric models. In *Gauge theories, applied supersymmetry, quantum gravity. Proceedings, Workshop, Leuven, Belgium, July 10-14, 1995*, 1995.
 - [14] Malcolm Perry and John H. Schwarz. Interacting chiral gauge fields in six-dimensions and Born-Infeld theory. *Nucl. Phys.*, B489:47–64, 1997.
 - [15] E. Schrödinger. Contributions to Born’s New Theory of the Electromagnetic Field. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A150:465–477, 1935.
 - [16] John H. Schwarz and Ashoke Sen. Duality symmetric actions. *Nucl. Phys.*, B411:35–63, 1994.
 - [17] Arkady A. Tseytlin. Selfduality of Born-Infeld action and Dirichlet three-brane of type IIB superstring theory. *Nucl. Phys.*, B469:51–67, 1996.