Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Interazioni non-standard dei neutrini

Laureando

Fabio Semenzato

Relatore

Prof. Paride Paradisi

Anno Accademico 2016/2017

Indice

Sommario

Il neutrino è una particella del Modello Standard postulata nel 1930 da Wolfgang Pauli per spiegare il decadimento beta. Infatti, se visto come decadimento a due corpi, questo viola alcune simmetrie fondamentali, come la conservazione del momento angolare e dell'energia, mentre con l'aggiunta di una nuova particella, neutra, di spin un mezzo, molto leggera e debolmente interagente, che Pauli inizialmente chiamò *neutrone*, tali anomalie vengono superate; viene quindi rinominato *neutrino* nel 1933 da Fermi dopo la scoperta del neutrone da parte di J. Chadwick.

La conferma sperimentale avvenne solamente nel 1956 da parte di F. B. Harrison, H. W. Kruse e A. D. McGuire attraverso un esperimento di cattura elettronica, proposto inizialmente da W. Ganchang nel 1942. Si susseguirono quindi le scoperte del neutrino muonico nel 1962 e di quello tauonico nel 1975. Già negli anni '60 cominciarono, però, a sorgere le prime difficoltà. Infatti un esperimento che puntava a misurare il flusso di neutrini elettronici provenienti dal Sole, l'*Homestake experiment*, rivelò solamente un terzo dei neutrini solari previsti dallo *Standard Solar Model*. Tale problema, che divenne noto come *solar neutrino problem*, venne confermato successivamente anche da altri vari esperimenti e restò irrisolto per oltre trent'anni, finchè, nel 1998, rilevatori come il Super-Kamiokande e il Sudbury Neutrino Observatory dimostrarono che i neutrini elettronici prodotti dal Sole cambiano sapore durante il tragitto che li porta fino alla Terra, attraverso un fenomeno chiamato *oscillazione*.

Tale congettura fu sviluppata principalmente da Bruno Pontecorvo negli anni successivi al 1957, che basò il suo modello teorico sull'ipotesi di neutrini massivi. Nel Modello Standard, però, i neutrini vennero introdotti come particelle di massa nulla, fatto che inizialmente non permise al fenomeno dell'oscillazione di imporsi come soluzione al solar neutrino problem. La conferma sperimentale del 1998 mise quindi in evidenza una grave mancanza del Modello Standard, portando i fisici alla ricerca di nuove teorie che colmassero le lacune di tale modello. Queste teorie vennero denominate BSM, *Beyond Standard Model*, e considerano il Modello Standard come un'approssimazione valida fino alla scala elettrodebole, sotto alla quale, infatti, le stime fornite risultano ottime.

Una particolarità delle teorie BSM è la possibile esistenza di nuovi accoppiamenti tra le particelle, a cui solitamente ci si riferisce con la denominazione *Non-Standard Interactions*, NSIs. Questi accoppiamenti potrebbero, in linea teorica, apportare modifiche al fenomeno di oscillazione dei neutrini, sia tramite piccole perturbazioni ai risultati standard, sia attraverso l'introduzione di fenomeni del tutto nuovi, come la variazione di sapore del neutrino a distanza zero dalla sorgente, visibile sotto forma di violazione del numero leptonico. Tali modifiche possono presentarsi su tre diversi livelli: nella produzione, nella propagazione e nel rilevamento dei neutrini.

Gli argomenti trattati in questo lavoro sono suddivisi nel seguente modo: nel Capitolo 1 introduciamo il formalismo generale necessario allo studio dell'oscillazione dei neutrini,

deriviamo quindi la forma della probabilità di oscillazione nel vuoto valida per un qualsiasi numero di famiglie di neutrini e la particolarizziamo poi al caso di due famiglie; nel Capitolo 2 discutiamo il fenomeno di oscillazione dei neutrini dovuto ad interazioni con la materia derivando il formalismo generale per un qualsiasi numero di famiglie di neutrini, ci concentreremo quindi sul caso più semplice di due famiglie, ricavando dei risultati nell'ipotesi di materia a densità costante; nel Capitolo 3 tratteremo infine le interazioni non standard dei neutrini, introducendo il formalismo nel caso queste entrino nel processo di produzione e rilevamento o durante la propagazione, svilupperemo quindi i calcoli completi di oscillazione di due famiglie di neutrini in presenza di NSIs sia nel vuoto, sia nella materia a densità costante, quest'ultimo derivato sia introducendo alcune approssimazioni, valide a livello fisico, sia nel caso più generale in cui queste non siano valide, concluderemo infine riassumendo i vincoli attuali presenti sulle NSIs.

Alcuni calcoli verranno svolti in modo completo in Appendice A, per dare più continuità al lavoro. Inoltre durante tutto lo sviluppo di questa tesi verranno utilizzate le unità naturali $c = \hbar = 1$.

Capitolo 1

Oscillazione dei neutrini nel vuoto

1.1 Introduzione

Il fenomeno di oscillazione dei neutrini è dovuto ad una discrepanza fra autostati di sapore e autostati di massa. Infatti, mentre il sapore dei leptoni carichi (e,μ,τ) è determinato cinematicamente (quindi, avendo tutti la stessa carica, è definito univocamente dalla loro massa), il sapore dei neutrini è determinato dal leptone carico con cui si accompagnano nelle interazioni deboli, il che porta alla possibilità di una non corrispondenza biunivoca tra massa e sapore. Come in meccanica quantistica non si possono conoscere contemporaneamente posizione e velocità di una particella, così non è possibile determinare simultaneamente sapore e massa di un neutrino.

Gli autostati di sapore risultano quindi, in generale, combinazioni lineari degli autostati di massa. Indicheremo con $|\nu_\alpha\rangle$, dove $\alpha = e, \mu, \tau$, gli autostati di sapore, chiamati anche *neutrini di sapore*, e con $|\nu_k\rangle$, dove $k = 1, 2, 3$, gli autostati di massa[1], chiamati anche *neutrini di massa*, definiti dall'Hamiltoniano della particella libera

$$\mathcal{H}|\nu_k\rangle = E_k|\nu_k\rangle$$

con autovalori di energia

$$E_k = \sqrt{\vec{p}_k^{\,2} + m_k^2}\ .$$

La relazione tra le due basi può essere allora scritta come[2]

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\dagger_{e1} & U^\dagger_{e2} & U^\dagger_{e3} \\ U^\dagger_{\mu 1} & U^\dagger_{\mu 2} & U^\dagger_{\mu 3} \\ U^\dagger_{\tau 1} & U^\dagger_{\tau 2} & U^\dagger_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix}$$

[1]Qui si è implicitamente assunto che il numero di neutrini di massa sia uguale a tre, come il numero di neutrini di sapore. In realtà il numero di neutrini di massa deve solamente soddisfare al fatto di essere maggiore o uguale a 3, per generare i tre differenti sapori. Nel caso in cui vi fossero più di tre neutrini di massa, verrebbero generati ulteriori neutrini di sapore; tali neutrini aggiuntivi risultano sterili, ovvero interagiscono con la materia ordinaria solo mediante interazione gravitazionale.

[2]Il simbolo † indica l'aggiunto hermitiano; nel caso di una matrice corrisponde al complesso coniugato della matrice trasposta.

o sinteticamente

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U^\dagger_{\alpha k} |\nu_k\rangle \tag{1.1}$$

e viceversa

$$|\nu_k\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle \tag{1.2}$$

dove U è denominata *matrice di mescolamento* unitaria.

1.2 Generalità sulla matrice di mescolamento

Dall'unitarietà di tale matrice derivano le seguenti relazioni utili in seguito

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1} \qquad \sum_\alpha U^\dagger_{\alpha k} U_{\alpha j} = \delta_{jk} \qquad \sum_k U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} = \delta_{\alpha\beta} \ . \tag{1.3}$$

Da ciò risulta immediato verificare che una matrice unitaria conserva l'ortonormalità tra le basi che collega; scegliendo, ad esempio, degli autostati di massa ortonormali

$$\langle \nu_k | \nu_j \rangle = \delta_{kj}$$

l'ortonormalità degli autostati di sapore discende di conseguenza

$$\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \ .$$

In generale una matrice unitaria di ordine N è completamente descritta da N^2 parametri reali indipendenti, divisi in

$$\frac{N(N-1)}{2} \qquad \text{angoli di mescolamento}$$

e

$$\frac{N(N+1)}{2} \qquad \text{fasi} \qquad .$$

Nel nostro caso, però, non tutti questi parametri risulteranno indipendenti; dall'invarianza della lagrangiana dell'interazione debole sotto rifasamenti è infatti possibile ridurre di $2N-1$ il numero di fasi fisiche, ottenendo perciò

$$\frac{N(N+1)}{2} - (2N-1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \qquad \text{fasi indipendenti,}$$

per cui la matrice di mescolamento risulta completamente descritta da

$$\frac{N(N-1)}{2} + \frac{(N-1)(N-2)}{2} = (N-1)^2 \qquad \text{parametri indipendenti.}$$

Ci sarà utile in seguito particolarizzare al caso di due e tre famiglie di neutrini:

- nel caso di due famiglie di neutrini si ha un solo angolo di mescolamento e nessuna fase fisica, la forma generale della matrice di mescolamento risulta pertanto[3]

$$U = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \tag{1.4}$$

  dove il dominio dell'angolo è dato dalla particolare parametrizzazione della matrice;

- nel caso di tre famiglie di neutrini si hanno tre angoli di mescolamento e una sola fase fisica, la forma generale di tale matrice si può scrivere pertanto come[4]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

  dove vale $\cos\vartheta_{ij} = c_{ij}$ e $\sin\vartheta_{ij} = s_{ij}$, δ_{13} è invece chiamata *fase di Dirac*, il cui significato è da attribuirsi in relazione alla natura di Dirac dei neutrini. Nel caso 3×3 la matrice di mescolamento viene denominata matrice *PMNS*, Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata, e il suo ruolo risulta evidente se espressa come prodotto di tre matrici

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  ognuna corrispondente ad una rotazione rispetto a due elementi della base.

Per completezza, introduciamo di seguito la forma generale della matrice di mescolamento nel caso di neutrini di Majorana[5]. L'aggiunta di un termine nella lagrangiana dell'interazione debole che tenga conto di tale natura rimuove l'invarianza sotto alcuni

[3] Per chiarezza, tale matrice corrisponde, in riferimento alla relazione (1.2), a

$$U = \begin{pmatrix} U_{\alpha k} & U_{\beta k} \\ U_{\alpha j} & U_{\beta j} \end{pmatrix} .$$

[4] Al contrario di una matrice unitaria 2×2, non è possibile descrivere con una forma generale univoca una matrice unitaria 3×3 a causa di varie possibili parametrizzazioni, vi è ad esempio un'arbitrarietà sulla scelta della fase da considerare fisica. Di seguito si è preferito esplicitare la forma ricavata in [1], paragrafo (4.3.2), per il mescolamento dei quark, la cui generalità permette di utilizzarla anche nel nostro caso.

[5] Nel 1937 Ettore Majorana introdusse la possibilità che un fermione potesse essere la sua stessa antiparticella, in opposizione alla teoria di Dirac in cui risultano due entità distinte. Dato che i neutrini sono gli unici fermioni neutri, essi sono gli unici a poter avere una natura di Majorana, la quale, introducendo meno parametri indipendenti, potrebbe risultare più naturale. Per tale motivo, nella maggior parte delle teorie BSM i neutrini risultano descritti come particelle di Majorana, mentre nel Modello Standard risultano fermioni di Dirac.

rifasamenti, aumentando di conseguenza il numero di fasi indipendenti. Nel caso di tre famiglie di neutrini la matrice di mescolamento risulterà perciò descritta da tre angoli di mescolamento e tre fasi indipendenti, per un totale di sei parametri indipendenti, portando a un'elevata varietà di possibili parametrizzazioni di tale matrice. Con riferimento a [1], paragrafo (6.3.1), risulta comodo esprimerla come prodotto di due matrici

$$U = U^D U^M \tag{1.6}$$

dove U^D è la matrice introdotta in (1.5) e

$$U^M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda_3} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

con λ_1 e λ_2 denominate *fasi di Majorana.*

Derivazione standard dell'oscillazione dei neutrini nel vuoto

1.3 Derivazione standard dell'oscillazione dei neutrini nel vuoto

Per la derivazione standard dell'oscillazione dei neutrini nel vuoto ci avvarremo di quattro approssimazioni:

(a) *equal momentum assumption*: assumiamo che tutti i neutrini di massa abbiano lo stesso momento; nonostante sia un ipotesi irrealistica e senza giustificazioni, risulta irrilevante nella derivazione delle probabilità di oscillazione;

(b) *light-ray approximation*: approssiamo la velocità dei neutrini pari a quella della luce, ipotesi giustificata dalle elevate energie dei neutrini in confronto alla loro piccola massa;

(c) *plane-wave approximation*: descriviamo i neutrini come onde piane; nonostante un'onda piana non possa descrivere una particella, meglio descritta da pacchetti d'onda, anche tale approssimazione risulta trascurabile nel più dei casi;

(d) infine, come risulta dal paragrafo 1.1, abbiamo assunto che i neutrini prodotti dalle interazioni deboli si presentino nei tre autostati di sapore; in realtà i neutrini prodotti risentono anche di un contributo derivante dalle differenti masse degli autostati di massa, effetto trascurabile nella maggior parte degli esperimenti.

Supponiamo di avere al tempo $t = 0$ un neutrino di sapore puro

$$|\nu_\alpha(t = 0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle \ . \tag{1.8}$$

L'evoluzione temporale risulta allora immediata se lo si esprime nella base dei neutrini di massa, per i quali, come detto, vale

$$i\frac{d}{dt}|\nu_k(t)\rangle = \mathcal{H}|\nu_k(t)\rangle \tag{1.9}$$

dove $\mathcal{H}$ è l'Hamiltoniano della particella libera, da cui

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t}\ |\nu_k\rangle\ .$$

Sfruttando perciò la relazione (1.1) si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(t)\rangle &= \sum_k U^\dagger_{\alpha k}|\nu_k(t)\rangle = \sum_k U^\dagger_{\alpha k} e^{-iE_k t}|\nu_k\rangle = \\ &= \sum_\beta \left(\sum_k U^\dagger_{\alpha k} e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle \end{aligned} \tag{1.10}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la relazione (1.2).

Si può quindi notare come, partendo da uno stato di sapore puro, si è giunti ad una sovrapposizione dei tre stati di sapore[6], introducendo di fatto la possibilità di rilevare un neutrino di sapore diverso da quello di partenza con una probabilità pari a

$$P_{\nu_\alpha\to\nu_\beta}(t) = |\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t)\rangle|^2 = \sum_{k,j} U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j} e^{-i(E_k - E_j)t}\ , \tag{1.11}$$

da ciò deriva il fenomeno dell'*oscillazione dei neutrini.*

Dall'espressionde della probabilità in (1.11) risulta ovvio che non è possibile valutare la natura, di Dirac o di Majorana, dei neutrini attraverso esperimenti di oscillazione. Utilizzando infatti le forme descritte in (1.6) e (1.7) si ha

$$U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j} = (U^M_{k\alpha})^*(U^D_{k\alpha})^* U^D_{\beta k} U^M_{\beta k} U^D_{\alpha j} \underbrace{U^M_{\alpha j}(U^M_{j\beta})^*}_{\mathbb{1}}(U^D_{j\beta})^*$$

ma U^M commuta con U^D, essendo diagonale, da cui

$$U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j} = (U^D_{k\alpha})^* U^D_{\beta k} U^D_{\alpha j}(U^D_{j\beta})^*$$

in cui i termini relativi alla natura di Majorana del neutrino si elidono. Per valutare la natura del neutrino è quindi necessario cercare altre strade, che rendano possibile una chiara distinzione dei fenomeni. Un possibile esperimento è il *doppio decadimento beta senza neutrini* $0\nu\beta\beta$, nel quale la natura di Majorana del neutrino permette ai due neutrini prodotti dal decadimento beta di annichilire, fenomeno altrimenti vietato per due particelle di Dirac; per approfondimenti si veda, ad esempio, [1] Paragrafo 14.3.

Se ci mettiamo in approssimazione relativistica $m_k \ll |\vec{P}_k|$, vale

$$E_k = \sqrt{\vec{p}_k^{\,2} + m_k^2} \simeq E + \frac{m_k^2}{2E} \tag{1.12}$$

da cui

[6] Ciò è valido nel caso in cui la matrice di mescolamento non sia diagonale, come accade nella realtà.

$$E_k - E_j \simeq \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} \qquad , \qquad \Delta m_{kj}^2 = m_k^2 - m_j^2 \tag{1.13}$$

che sostituita in (1.11) dà[7]

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L, E) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^\dagger U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^\dagger \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \tag{1.14}$$

dove si è resa esplicita la dipendenza dalla distanza rilevatore-sorgente, L, e dall'energia del neutrino. Gli esperimenti di oscillazione non forniscono, pertanto, informazioni riguardo ai valori assoluti delle masse dei neutrini, ma solamente sulla loro differenza quadratica. Si nota inoltre che se i neutrini fossero particelle di massa nulla, come postulato dal Modello Standard, tale fenomeno non potrebbe avvenire; ponendo infatti $\Delta m_{kj}^2 = 0$ in (1.14) si ottiene

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L, E) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^\dagger U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^\dagger = \underbrace{\sum_k U_{\alpha k}^\dagger U_{\beta k}}_{\delta_{\alpha\beta}} \underbrace{\sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^\dagger}_{\delta_{\alpha\beta}} = \delta_{\alpha\beta}$$

dove si sono sfruttate le relazioni di unitarietà in (1.3), la probabilità di transizione a un neutrino di sapore $|\nu_\beta\rangle$ con $\beta \neq \alpha$ risulta, perciò, nulla.

A volte risulta più comodo esprimere, equivalentemente, la (1.14) nella forma

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L, E) = \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{k>j} U_{\alpha k}^\dagger U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^\dagger \exp\left(-2\pi i \frac{L}{L_{kj}^{\mathrm{osc}}}\right)\right] \tag{1.15}$$

oppure

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} &- 4 \sum_{k>j} \mathrm{Re}\left[U_{\alpha k}^\dagger U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^\dagger\right] \sin^2\left(\pi \frac{L}{L_{kj}^{\mathrm{osc}}}\right) \\ &+ 2 \sum_{k>j} \mathrm{Im}\left[U_{\alpha k}^\dagger U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^\dagger\right] \sin\left(2\pi \frac{L}{L_{kj}^{\mathrm{osc}}}\right) \end{aligned} \tag{1.16}$$

dove si è introdotta la *lunghezza di oscillazione*

$$L_{kj}^{\mathrm{osc}} = \frac{4\pi E}{\Delta m_{kj}^2} \ ,$$

ovvero la distanza alla quale la fase di oscillazione in (1.14) risulta pari a 2π.

Dalla (1.16) è infatti facilmente valutabile la *probabilità di sopravvivenza* di un neutrino, $P_{\nu_\alpha \to \nu_\alpha}$ (in opposizione alla *probabilità di transizione* $P_{\nu_\alpha \to \nu_{\beta \neq \alpha}}$), ottenendo[8]

[7] In approssimazione relativistica vale $t \simeq L$.

[8] Infatti, nel caso in cui $\beta = \alpha$, i termini tra parentesi quadrate nella (1.16) sono reali, essendo dei moduli quadri, eliminando così il contributo dell'ultimo termine.

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\alpha}(L,E) = 1 - 4\sum_{k>j} |U_{\alpha k}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \sin^2\left(\pi \frac{L}{L^{\text{osc}}_{kj}}\right) \ . \tag{1.17}$$

La forma della probabilità in (1.16) rende inoltre immediata la generalizzazione al caso degli antineutrini: l'analogo della (1.14) vale

$$P_{\bar\nu_\alpha \to \bar\nu_\beta}(L,E) = \sum_{k,j} U_{\alpha k} U^\dagger_{\beta k} U^\dagger_{\alpha j} U_{\beta j} \exp\left(-i\frac{\Delta m^2_{kj} L}{2E}\right) \tag{1.18}$$

dove il quadruplo prodotto della matrice di mescolamento risulta essere il complesso coniugato rispetto al caso dei neutrini, il che comporta come unico effetto il cambiamento di segno della parte immaginaria in (1.16)

$$\begin{aligned} P_{\bar\nu_\alpha \to \bar\nu_\beta}(L,E) = \delta_{\alpha\beta} &- 4\sum_{k>j} \mathrm{Re}\left[U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j}\right] \sin^2\left(\pi\frac{L}{L^{\text{osc}}_{kj}}\right) \\ &- 2\sum_{k>j} \mathrm{Im}\left[U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j}\right] \sin\left(2\pi\frac{L}{L^{\text{osc}}_{kj}}\right) \ . \end{aligned} \tag{1.19}$$

La (1.15) risulta invece utile nel caso in cui l'incertezza sull'energia dei neutrini o sulla distanza sorgente-rilevatore non permetta di valutare il contributo dell'esponenziale nella probabilità di oscillazione, mediandolo a zero, da cui la *probabilità di oscillazione mediata*

$$\langle P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} \rangle = \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 \ , \tag{1.20}$$

dove scompare la dipendenza da L e E. Tale effetto riguarda anche il caso in cui $L \gg L^{\text{osc}}_{kj} \ \forall k, j$, per il quale l'oscillazione dell'esponenziale complesso risulta troppo elevata per poter essere valutata con precisione. Un esperimento volto a misurare Δm^2_{kj} dovrà quindi avere $L \sim L^{\text{osc}}_{kj}$, in modo da ottenere un contributo dell'esponenziale non trascurabile.

1.4 Oscillazione di due neutrini

La particolarizzazione al caso di due neutrini, oltre al fatto di semplificare i calcoli, trova applicazione nel caso in cui l'esperimento non sia sensibile al mescolamento di tre neutrini. Consideriamo allora due neutrini di sapore[9], $|\nu_\alpha\rangle$ e $|\nu_\beta\rangle$, e due neutrini di massa, $|\nu_1\rangle$ e $|\nu_2\rangle$; supponiamo inoltre $m_1 < m_2$, in modo da definire $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$.

Con riferimento alla (1.17) è quindi immediato ottenere

[9] α e β possono essere sia stati di sapore puro (ν_e,ν_μ,ν_τ), sia combinazioni di questi $\nu_\beta = c_\mu \nu_\mu + c_\tau \nu_\tau$ con $c_\mu^2 + c_\tau^2 = 1$, come accade ad esempio negli esperimenti di scomparsa di ν_e, in quanto non distinguono ν_μ e ν_τ.

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \to \nu_\alpha}(L, E) &= 1 - 4\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \\ &= 1 - \sin^2(2\vartheta)\sin^2\left(\pi \frac{L}{L^{\text{osc}}}\right) \end{aligned} \tag{1.21}$$

dove si è introdotta la lunghezza di oscillazione $L^{\text{osc}} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}$. La probabilità di transizione risulta allora, per unitarietà,

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L, E) = 1 - P_{\nu_\alpha \to \nu_\alpha} = \sin^2(2\vartheta)\sin^2\left(\pi \frac{L}{L^{\text{osc}}}\right) \ . \tag{1.22}$$

Se valgono inoltre le condizioni nella (1.20), la probabilità di oscillazione mediata vale

$$\langle P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} \rangle = \frac{1}{2}\sin^2 2\vartheta \ .$$

Capitolo 2

Oscillazione dei neutrini nella materia

2.1 Caso generale

I neutrini che si propagano nella materia sono soggetti a fenomeni di scattering dovuti all'interazione debole. Supponendo una densità della materia pari a quella terrestre ed energie dei neutrini confrontabili con le energie dei neutrini solari, si può dimostrare[1] che il contributo dato da fenomeni di scattering incoerente è trascurabile, mentre lo stesso non vale per fenomeni di scattering coerente col mezzo di propagazione, che si dividono in interazioni di corrente carica e di corrente neutra:

- il potenziale di corrente neutra di cui risentono i neutrini è dato dalla somma dei contributi dovuti a tutti i fermioni presenti, che approssimeremo essere solamente elettroni, protoni ($p = uud$) e neutroni ($n = udd$), e vale

  $$V_{NC} = \sum_f V_{NC}^f = \sum_f \sqrt{2} G_F N_f g^f \qquad f \in \text{fermioni}$$

  dove G_F è la costante di Fermi, N_f è la densita del fermione f e g^f è la costante di accoppiamento debole con il fermione f. Supponendo che la materia sia elettricamente neutra, ovvero $N_e = N_p$, dato che[2] $g^e = -g^p$ i contributi dovuti a elettroni e protoni si elidono, mentre rimane il contributo dato dai neutroni

  $$V_{NC} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} G_F N_n \tag{2.1}$$

  a cui risente ogni neutrino;

- il potenziale di corrente carica è invece dato solamente dall'interazione con gli elettroni

  $$V_{CC} = \sqrt{2} G_F N_e \tag{2.2}$$

[1] [1], Introduzione al Capitolo 9.
[2] Dove $g^p = 2g^u + g^d$.

del quale risente solamente il neutrino elettronico.

Si ha quindi che un neutrino di sapore α immerso nella materia risente del potenziale

$$V_\alpha = V_{CC}\delta_{\alpha e} + V_{NC} = \sqrt{2}G_F\left(N_e\delta_{\alpha e} - \frac{1}{2}N_n\right) \ . \tag{2.3}$$

L'Hamiltoniano di tale particella è allora

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$$

dove $\mathcal{H}_0$ è l'Hamiltoniano della particella libera definito in (1.9) e $\mathcal{H}_1$ è l'Hamiltoniano dovuto agli effetti della materia, definito da

$$\mathcal{H}_1 \left|\nu_\alpha\right\rangle = V_\alpha \left|\nu_\alpha\right\rangle \ .$$

Per valutare l'evoluzione temporale definiamo l'ampiezza di oscillazione[3]

$$\psi_{\alpha\beta}(t) = \langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t)\rangle \qquad\qquad \psi_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta} \ , \tag{2.4}$$

possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\psi_{\alpha\beta}(t) &= \mathcal{H}\psi_{\alpha\beta}(t) = \langle\nu_\beta|\mathcal{H}_0|\nu_\alpha(t)\rangle + \langle\nu_\beta|\mathcal{H}_1|\nu_\alpha(t)\rangle = \\ &= \sum_k U_{\beta k}\left\langle\nu_k|\mathcal{H}_0|\nu_\alpha(t)\right\rangle + V_\beta\left\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t)\right\rangle = \sum_k U_{\beta k}E_k\left\langle\nu_k|\nu_\alpha(t)\right\rangle + V_\beta\psi_{\alpha\beta}(t) = \\ &= \sum_k U_{\beta k}E_k\sum_\eta U^*_{k\eta}\left\langle\nu_\eta|\nu_\alpha(t)\right\rangle + V_\beta\psi_{\alpha\beta}(t) = \sum_{k,\eta} U_{\beta k}E_kU^*_{k\eta}\psi_{\alpha\eta}(t) + V_\beta\psi_{\alpha\beta}(t) = \\ &= \sum_\eta\left(\sum_k U_{\beta k}E_kU^*_{k\eta} + \delta_{\beta\eta}V_\beta\right)\psi_{\alpha\eta}(t) \ . \end{aligned}$$

e introducendo l'approssimazione relativistica $E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E} = E + \frac{m_1^2}{2E} + \frac{\Delta m_{k1}^2}{2E}$ otteniamo

[3] Risulta immediato il calcolo della probabilita di oscillazione

$$P_{\nu_\alpha\to\nu_\beta}(t) = \left|\psi_{\alpha\beta}(t)\right|^2 \ .$$

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dx}\psi_{\alpha\beta}(x) &= \sum_\eta \left[\sum_k U_{\beta k} \left(E + \frac{m_1^2}{2E} + \frac{\Delta m_{k1}^2}{2E} \right) U_{k\eta}^* + \delta_{\beta\eta} \left(V_{CC}\delta_{\alpha e} + V_{NC} \right) \right] \psi_{\alpha\eta}(x) \\
&= \sum_\eta \left[\left(E + \frac{m_1^2}{2E} \right) \sum_k U_{\beta k} U_{k\eta}^* + \sum_k U_{\beta k} \frac{\Delta m_{k1}^2}{2E} U_{k\eta}^* + \delta_{\beta\eta}\delta_{\alpha e} V_{CC} + \delta_{\beta\eta} V_{NC} \right] \psi_{\alpha\eta}(x) \\
&= \sum_\eta \left[\left(E + \frac{m_1^2}{2E} \right) \delta_{\beta\eta} + \sum_k U_{\beta k} \frac{\Delta m_{k1}^2}{2E} U_{k\eta}^* + \delta_{\beta\eta}\delta_{\alpha e} V_{CC} + \delta_{\beta\eta} V_{NC} \right] \psi_{\alpha\eta}(x) \\
&= \left(E + \frac{m_1^2}{2E} + V_{NC} \right) \psi_{\alpha\beta}(x) + \sum_\eta \left[\sum_k U_{\beta k} \frac{\Delta m_{k1}^2}{2E} U_{k\eta}^* + \delta_{\beta\eta}\delta_{\alpha e} V_{CC} \right] \psi_{\alpha\eta}(x) \; .
\end{aligned}
$$

Dato che la probabilità di oscillazione è pari al modulo quadro di $\psi_{\alpha\beta}$, è possibile eliminare il primo termine tramite un cambiamento di fase[4]

$$
\psi_{\alpha\beta}(x) \to \psi_{\alpha\beta}(x) \exp\left[-i \left(E + \frac{m_1^2}{2E} \right) x - i \int_0^x V_{NC}(x') dx' \right]
$$

che lascia invariata la fisica del problema; risulta quindi

$$
i\frac{d}{dx}\psi_{\alpha\beta}(x) = \sum_\eta \left(\sum_k U_{\beta k} \frac{\Delta m_{k1}^2}{2E} U_{\eta k}^* + \delta_{\beta e}\delta_{\eta e} V_{CC} \right) \psi_{\alpha\eta}(x) \; . \tag{2.5}
$$

Spesso è più comodo esprimere tale relazione in forma matriciale, valida per un qualsiasi numero di famiglie di neutrini,

$$
i\frac{d}{dx}\Psi_\alpha = \mathcal{H}_F \Psi_\alpha \tag{2.6}
$$

dove $\mathcal{H}_F$ è l'Hamiltoniana efficace

$$
\mathcal{H}_F = \frac{1}{2E} \left(U \mathbb{M}^2 U^\dagger + \mathbb{A} \right) \tag{2.7}
$$

che nel caso di tre famiglie di neutrini si esplicita in

$$
\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha e} \\ \psi_{\alpha\mu} \\ \psi_{\alpha\tau} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}
$$

con $A_{CC} = 2EV_{CC} = 2\sqrt{2} E G_F N_e$.

[4]Si ricorda che

$$
\frac{d}{dx} \int_0^x f(x') dx' = f(x) \; .
$$

2.2 Oscillazione di due neutrini nella materia

Data la complicatezza dei calcoli che si incontrano nel continuare lo sviluppo nel caso di tre famiglie, risulta più utile, ai fini della comprensione degli effetti che stanno dietro a questa trattazione, particolarizzare al caso di due famiglie di neutrini; siano queste[5] ν_e e ν_μ per il sapore e ν_1 e ν_2 per i neutrini di massa.

Supponiamo di avere un neutrino elettronico che si propaga nella materia, ovvero

$$\Psi_e = \begin{pmatrix} \psi_{ee}(0) \\ \psi_{e\mu}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'evoluzione temporale è descritta allora dalla particolarizzazione[6] della (2.7)

$$i\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{4E}\begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\vartheta + A_{CC} & \Delta m^2 \sin 2\vartheta \\ \Delta m^2 \sin 2\vartheta & \Delta m^2 \cos 2\vartheta - A_{CC} \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}_F} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

dove abbiamo definito, per brevità, $\Delta m^2 = \Delta m^2_{12}$ e $\vartheta = \vartheta_{12}$. La matrice $\mathcal{H}_F$ risulta diagonalizzabile, di autovalori $\pm\frac{\Delta m^2_M}{4E}$, con

$$\Delta m^2_M = \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\vartheta - A_{CC})^2 + (\Delta m^2 \sin 2\vartheta)^2} \tag{2.10}$$

e di rispettivi autostati $|\nu_1^M\rangle$ e $|\nu_2^M\rangle$, che chiamiamo *autostati di massa nella materia.* Dato che la definizione di massa di questi autostati tiene già conto dell'effetto dell'interazione debole, si ha

$$m^2_{M1} + m^2_{M2} = m^2_1 + m^2_2 + A_{CC}$$

da cui

$$m^2_{M1,2} = \frac{1}{2}\left(m^2_1 + m^2_2 + A_{CC} \pm \Delta m^2_M\right) \tag{2.11}$$

il cui andamento è riportato in figura 2.1.

[5] Dato che ν_μ e ν_τ risentono dello stesso potenziale nella materia, il caso in cui si considerano ν_e e ν_τ risulta del tutto analogo.

[6] Tale risultato è ricavato in Appendice

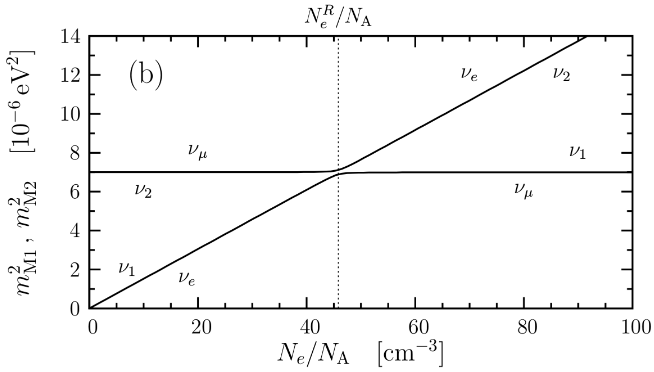


Figura 2.1: Andamento delle masse efficaci nella materia in funzione della densità elettronica; è possibile notare che alla risonanza la loro differenza quadratica risulta minima. Figura tratta da [1] pg. 336.

In questa base l'Hamiltoniana ha l'ovvia forma

$$\mathcal{H}_M = \frac{1}{4E}\begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & 0 \\ 0 & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

chiamata *Hamiltoniana efficace nella base delle masse nella materia.* É possibile allora ottenere la matrice di cambiamento di base, U_M, tra i neutrini di sapore nel vuoto e i neutrini di massa nella materia attraverso la relazione

$$U_M^T \mathcal{H}_F U_M = \frac{1}{4E}\begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & 0 \\ 0 & \Delta m_M^2 \end{pmatrix}$$

e la matrice U_M risulta essere

$$U_M = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_M & \sin\vartheta_M \\ -\sin\vartheta_M & \cos\vartheta_M \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

con ϑ_M definito da[7]

$$\tan 2\vartheta_M = \frac{\tan 2\vartheta}{1 - \frac{A_{CC}}{\Delta m^2 \cos 2\vartheta}}\ , \tag{2.14}$$

il cui andamento è riportato in Figura 2.2. Tornerà utile in seguito ricavare, tramite semplici relazioni trigonometriche, le espressioni

$$\cos 2\vartheta_M = \frac{\Delta m^2 \cos 2\vartheta - A_{CC}}{\Delta m_M^2} \qquad \sin 2\vartheta_M = \frac{\Delta m^2 \sin 2\vartheta}{\Delta m_M^2}\ . \tag{2.15}$$

Tale matrice permette quindi di esprimere, in analogia con il vuoto, i neutrini di sapore nella base degli autostati di massa nella materia e viceversa

[7] É utile notare come ϑ_M dipenda dalla densità di elettroni, infatti si ricorda $A_{CC} = 2\sqrt{2}EG_FN_e$.

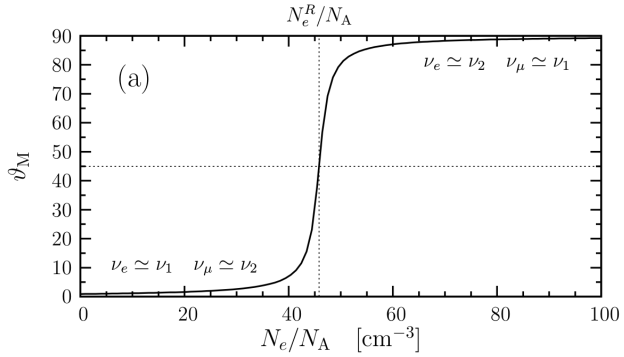


Figura 2.2: Andamento di ϑ_M in funzione della densità elettronica; è possibile notare come alla risonanza si abbia $\vartheta_M = \pi/4$. Figura tratta da [1] pg. 336.

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} = U_M \begin{pmatrix} |\nu_1^M\rangle \\ |\nu_2^M\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_M\,|\nu_1^M\rangle + \sin\vartheta_M\,|\nu_2^M\rangle \\ -\sin\vartheta_M\,|\nu_1^M\rangle + \cos\vartheta_M\,|\nu_2^M\rangle \end{pmatrix} \; . \tag{2.16}$$

Si nota dalla (2.14) che è presente una risonanza quando[8]

$$A_{CC}^R = \Delta m^2 \cos 2\vartheta \; ,$$

denominato *effetto MSW*, in onore di Mikheev, Smirnov e Wolfenstein. A tale valore di A_{CC} corrisponde $\theta_M^R = \frac{\pi}{4}$, che rende massimale il mescolamento in (2.16). Infatti, alla risonanza, la differenza quadratica delle masse nella materia risulta minima $\Delta m_M^2|_R = \Delta m^2 \sin 2\vartheta$, rendendo più semplice il passaggio tra i due stati. É infine utile notare che, siccome A_{CC} è positivo, tale effetto può essere presente solo per $\vartheta < \frac{\pi}{4}$.

É possibile riscrivere la (2.9), in una forma più utile in seguito, sostituendo a Ψ_e la Φ_e definita come

$$\Phi_e = \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\nu_1^M|\nu_e(t)\rangle \\ \langle\nu_2^M|\nu_e(t)\rangle \end{pmatrix}$$

con $\Psi_e = U_M \Phi_e$. Si ha allora

$$i\frac{d}{dx}\left(U_M\Phi_e\right) = \mathcal{H}_F U_M \Phi_e$$
$$i\left(\frac{d}{dx}U_M\right)\Phi_e + iU_M\frac{d}{dx}\Phi_e = \underbrace{U_M U_M^T}_{\mathbb{1}}\mathcal{H}_F U_M \Phi_e$$

[8] Alla risonanza corrisponde una densità elettronica

$$N_e^R = \frac{\Delta m^2 \cos 2\vartheta}{2\sqrt{2}EG_F} \; .$$

ma $U_M^T \mathcal{H}_F U_M = \mathcal{H}_M$, da cui

$$iU_M \frac{d}{dx}\Phi_e = U_M \mathcal{H}_M \Phi_e - i\left(\frac{d}{dx}U_M\right)\Phi_e$$

che moltiplicata a sinistra per U_M^T dà

$$i\frac{d}{dx}\Phi_e = \mathcal{H}_M \Phi_e - iU_M^T\left(\frac{d}{dx}U_M\right)\Phi_e\ . \tag{2.17}$$

Svolgendo i calcoli, risulta

$$U_M^T\left(\frac{d}{dx}U_M\right) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_M & -\sin\vartheta_M \\ \sin\vartheta_M & \cos\vartheta_M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\vartheta_M \frac{d\vartheta_M}{dx} & \cos\vartheta_M \frac{d\vartheta_M}{dx} \\ -\cos\vartheta_M \frac{d\vartheta_M}{dx} & -\sin\vartheta_M \frac{d\vartheta_M}{dx} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\vartheta_M \sin\vartheta_M \frac{d\vartheta_M}{dx} + \cos\vartheta_M \sin\vartheta_M \frac{d\vartheta_M}{dx} & \cos\vartheta_M^2 \frac{d\vartheta_M}{dx} + \sin\vartheta_M^2 \frac{d\vartheta_M}{dx} \\ -\sin\vartheta_M^2 \frac{d\vartheta_M}{dx} - \cos\vartheta_M^2 \frac{d\vartheta_M}{dx} & \cos\vartheta_M \sin\vartheta_M \frac{d\vartheta_M}{dx} - \cos\vartheta_M \sin\vartheta_M \frac{d\vartheta_M}{dx} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\vartheta_M}{dx} \\ -\frac{d\vartheta_M}{dx} & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

che inserita nella (2.17) fornisce la forma

$$i\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E}\begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & -4iE\frac{d\vartheta_M}{dx} \\ 4iE\frac{d\vartheta_M}{dx} & \Delta m_M^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{pmatrix} \phi_{e1}(0) \\ \phi_{e2}(0) \end{pmatrix} = (U_M^0)^T \begin{pmatrix} \psi_{e1}(0) \\ \psi_{e2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_M^0 & -\sin\vartheta_M^0 \\ \sin\vartheta_M^0 & \cos\vartheta_M^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_M^0 \\ \sin\vartheta_M^0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

dove ϑ_M^0 è l'angolo di mescolamento nella materia valutato nel punto di creazione nel neutrino elettronico. I risultati ottenuti sinora hanno una validità del tutto generale; per continuare lo sviluppo è invece necessario particolarizzare la forma della densità.

2.3 Materia a densità costante

Tale approssimazione trova particolare utilizzo nello studio dell'oscillazione dei neutrini attraverso il mantello terrestre[9]. Se la densità della materia è costante, si nota dalla (2.18) che le evoluzioni temporali si disaccoppiano, portando a

[9] Negli esperimenti a lunga distanza, come l'esperimento Opera, il quale studia il fascio di neutrini all'interno del Gran Sasso provenienti dal CERN, è necessario far viaggiare i neutrini all'interno del mantello terrestre per raggiungere la destinazione desiderata, a causa della curvatura della Terra.

$$\begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_M^0 e^{i\frac{\Delta m_M^2}{4E}x} \\ \sin\vartheta_M^0 e^{-i\frac{\Delta m_M^2}{4E}x} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} &= U_M \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_M & \sin\vartheta_M \\ -\sin\vartheta_M & \cos\vartheta_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta_M^0 e^{i\frac{\Delta m_M^2}{4E}x} \\ \sin\vartheta_M^0 e^{-i\frac{\Delta m_M^2}{4E}x} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\Delta m_M^2}{4E}x}\cos^2\vartheta_M + e^{-i\frac{\Delta m_M^2}{4E}x}\sin^2\vartheta_M \\ -e^{i\frac{\Delta m_M^2}{4E}x}\cos\vartheta_M\sin\vartheta_M + e^{-i\frac{\Delta m_M^2}{4E}x}\cos\vartheta_M\sin\vartheta_M \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove si è sostituito $\vartheta_M^0 = \vartheta_M$, grazie alla costanza della densità. Si ha allora

$$\begin{aligned} \psi_{e\mu} &= -\cos\vartheta_M\sin\vartheta_M\left(e^{i\frac{\Delta m_M^2}{4E}x} - e^{-i\frac{\Delta m_M^2}{4E}x}\right) = -2i\cos\vartheta_M\sin\vartheta_M\sin\frac{\Delta m_M^2}{4E}x \\ &= -i\sin 2\vartheta_M\sin\frac{\Delta m_M^2}{4E}x \end{aligned}$$

e quindi

$$P_{\nu_e\to\nu_\mu} = |\psi_{e\mu}|^2 = \sin^2 2\vartheta_M\sin^2\left(\frac{\Delta m_M^2}{4E}x\right) \tag{2.20}$$

$$P_{\nu_e\to\nu_e} = 1 - P_{\nu_e\to\nu_\mu} = 1 - \sin^2 2\vartheta_M\sin^2\left(\frac{\Delta m_M^2}{4E}x\right) \quad , \tag{2.21}$$

dove la seconda si è ricavata per unitarietà.

Tali risultati sono del tutto analoghi alle rispettive probabilità di oscillazione nel vuoto in (1.22) e (1.21), a patto di sostituire l'angolo di mescolamento e la differenza quadratica delle masse con i loro rispettivi valori efficaci nella materia; si nota infatti che se $N_e \to 0$ si riottengono le espressioni nel vuoto.

Capitolo 3

Interazioni non standard dei neutrini

3.1 Introduzione

La conferma sperimentale dell'oscillazione dei neutrini ha stabilito in modo chiaro che il Modello Standard deve essere visto come una teoria efficace, valida fino alla scala elettrodebole, di una teoria più ampia. Ad oggi non vi è una teoria univocamente accettata, ma un ventaglio di possibili candidate, denominate teorie BSM, *Beyond Standard Model*, che puntano a spiegare, tramite aggiunte, modifiche o concetti completamente nuovi, le controversie e le mancanze del Modello Standard.

Uno degli effetti introdotto da tali modelli è la possibile esistenza di nuove interazioni, NSIs[1], che collegano le particelle note attraverso l'esistenza di nuovi mediatori non ancora osservati[2]. Dai dati sperimentali è possibile porre una stima inferiore alla massa di tali particelle, M_{NP}[3], per le quali ci si aspetta, analogamente alle interazioni note, che l'intensità delle interazioni venga soppressa di un fattore pari a $1/M_{\mathrm{NP}}^2$; l'intensità relativa rispetto alle interazioni deboli[4] risulta quindi

$$\epsilon \sim \frac{M_{\mathrm{W}}^2}{M_{\mathrm{NP}}^2} \,.$$

Una stima sperimentale di tale parametro impone quindi di fatto un limite inferiore alla massa dei nuovi mediatori; dato che ad oggi non vi è una chiara conferma sperimentale dell'esistenza di nuove interazioni, la stima di ϵ risulta molto bassa, costringendo $M_{\mathrm{NP}} \gg M_{\mathrm{W}} \simeq 80\mathrm{GeV}$.

Nel seguito non ci riferiremo ad una particolare teoria BSM, ma tratteremo le nuove interazioni in uno schema model-independent, ovvero minimizzando le assunzioni necessarie allo studio dei fenomeni.

[1] *Non-Standard Interactions.*

[2] Nonostante inizialmente con NSIs si intendevano interazioni mediate da nuove particelle, col tempo sono entrate in questa categoria anche le interazioni note con fermioni super pesanti non previsti dal Modello Standard.

[3] Il pedice NP indica la dicitura *New Physics.*

[4] Si è preso il riferimento con le interazioni deboli in quanto sono queste ad intervenire nello studio dei neutrini, campo d'interesse di questa tesi.

Gli effetti delle nuove interazioni sull'oscillazione dei neutrini, in linea di principio, possono presentarsi su tre livelli diversi: nella produzione, nella propagazione attraverso la materia e nel rilevamento. La probabilità di oscillazione, in ogni caso, si potrà scrivere come

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = |A_{\text{osc}} + A_{\text{NP}}|^2 = |A_{\text{osc}}|^2 + |A_{\text{NP}}|^2 + 2\text{Re}\left(A^*_{\text{osc}} A_{\text{NP}}\right)$$

dove A_{osc} e A_{NP} sono rispettivamente le ampiezze di oscillazione dovute alle interazioni standard e non. Data la piccola entità delle interazioni non standard, il contributo dato da $|A_{\text{NP}}|^2$ risulta trascurabile, mentre compare il termine di interferenza $2\text{Re}\left(A^*_{\text{osc}} A_{\text{NP}}\right)$ che, sotto alcune condizioni, può risultare di ordine sufficiente da produrre deviazioni dall'andamento standard $|A_{\text{osc}}|^2$. Se consideriamo ad esempio l'oscillazione di neutrini μ e τ, trascurando il neutrino elettronico, e supponendo

$$x = \frac{\Delta m^2 L}{4E} \ll 1$$

si ha $A_{\text{osc}}(\nu_\mu \to \nu_\tau) \simeq ix$ da cui, introducendo il contributo $A_{\text{NP}}(\nu_\mu \to \nu_\tau) = \epsilon_{\mu\tau}$, si ottiene

$$P_{\nu_\mu \to \nu_\tau} \simeq x^2 + |\epsilon_{\mu\tau}|^2 + 2x\text{Im}\left(\epsilon_{\mu\tau}\right)$$

nella quale si distingue il primo termine di oscillazione pura e il termine di interferenza $2x\text{Im}\left(\epsilon_{\mu\tau}\right)$. Se l'intensità delle nuove interazioni è molto piccola, $\epsilon \ll x$, allora il termine di interferenza risulta l'unico modo di osservare effetti non standard

$$P^{\epsilon \ll x}_{\nu_\mu \to \nu_\tau} \simeq x^2 + 2x\text{Im}\left(\epsilon_{\mu\tau}\right) \ . \tag{3.1}$$

3.2 Interazioni non standard nella produzione e rilevamento

Le interazioni non standard che intervengono nel processo di produzione e rilevamento dei neutrini non devono, in via generale, sottostare ad alcuna condizione di simmetria. Ciò può portare, ad esempio, alla possibilità di una violazione del sapore, in cui il sapore del neutrino prodotto può non essere lo stesso del leptone carico che l'ha prodotto, ma risulta una sovrapposizione dei vari autostati di sapore. Infatti, se da un lato la rivelazione di un neutrino muonico da un fascio di neutrini elettronici può essere imputato all'oscillazione durante il tragitto dalla sorgente al detector, dall'altro ciò può essere dovuto alla non ortogonalità tra lo stato del neutrino prodotto e quello rilevato.

Supponiamo che tali interazioni siano regolate da costanti analoghe, formalmente, alla costante di Fermi G_F, che chiamiamo quindi

$$G^p_{\alpha\beta} \qquad p = s, d$$

dove p si riferisce a interazioni che entrano nelle produzione, s, o nel rilevamento, d, e indicano l'intensità con cui il leptone carico α interagisce con il neutrino ν_β. É allora possibile esprimere lo stato del neutrino prodotto o rilevato accompagnato dal leptone carico α come[5]

[5] Per amor di chiarezza, si vuol qui dare una breve spiegazione di tale forma: dato che le interazioni non standard rendono possibile la violazione del sapore, la produzione di un neutrino muonico, che chiamiamo

$$|\nu_\alpha^p\rangle = \frac{G_F\delta_{\alpha\beta} + G^p_{\alpha\beta}}{\sqrt{|G_F + G^p_{\alpha\alpha}|^2 + \sum_{\gamma\neq\alpha}|G^p_\alpha\gamma|^2}}\,|\nu_\beta\rangle \tag{3.2}$$

dove il denominatore è introdotto con lo scopo di normalizzare lo stato. Risulta utile in seguito introdurre il parametro adimensionale

$$\epsilon^p_{\alpha\beta} = \frac{G^p_{\alpha\beta}}{\sqrt{|G_F + G^p_{\alpha\alpha}|^2 + \sum_{\gamma\neq\alpha}|G^p_\alpha\gamma|^2}} \tag{3.3}$$

che considereremo come perturbazione, dato il piccolo valore, ovvero trascureremo termini al secondo ordine in esso. Definendo inoltre per brevità

$$g^p_\alpha = \frac{G_F}{\sqrt{|G_F + G^p_{\alpha\alpha}|^2 + \sum_{\gamma\neq\alpha}|G^p_\alpha\gamma|^2}}$$

è possibile riscrivere la (3.2) nella forma

$$|\nu_\alpha^p\rangle = (g^p_\alpha\delta_{\alpha\beta} + \epsilon^p_{\alpha\beta})\,|\nu_\beta\rangle \tag{3.4}$$

e tenendo solo termini al primo ordine in $G^p_{\alpha\beta}$,per cui vale[6] $g^p_\alpha \simeq 1 - \mathrm{Re}\,(\epsilon_{\alpha\alpha})$, si ha

$$|\nu_\alpha^p\rangle = (\delta_{\alpha\beta} - \mathrm{Re}\,(\epsilon^p_{\alpha\alpha}) + \epsilon^p_{\alpha\beta})\,|\nu_\beta\rangle\ \ . \tag{3.5}$$

ν^s_μ, non è attribuibile con certezza ad un determinato leptone carico; analogamente se si ha un fascio di elettroni questi potranno produrre sia ν_e, sia ν_μ e sia ν_τ. La forma utilizzata vuole quindi rendere conto di tale indeterminazione, pesando lo stato del neutrino rilevato o prodotto su tutti i contributi provenienti dai diversi canali di interazione, dove il peso è dato dalle probabilità di interazione.

[6]Trascurando termini al secondo ordine in $G^p_{\alpha\beta}$ si ha

$$g^p_\alpha \simeq \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{\mathrm{Re}\left(G^p_{\alpha\alpha}\right)}{G_F}}} \simeq 1 - \frac{\mathrm{Re}\,(G^p_{\alpha\alpha})}{G_F}$$

ma

$$\epsilon^p_{\alpha\alpha} = \frac{G^p_{\alpha\alpha}}{\sqrt{|G_F + G^p_{\alpha\alpha}|^2 + \sum_{\gamma\neq\alpha}|G^p_\alpha\gamma|^2}} \simeq \frac{G^p_{\alpha\alpha}}{G_F}\frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{\mathrm{Re}\left(G^p_{\alpha\alpha}\right)}{G_F}}} \simeq \frac{G^p_{\alpha\alpha}}{G_F}\left(1 - \frac{\mathrm{Re}\,(G^p_{\alpha\alpha})}{G_F}\right) \simeq \frac{G^p_{\alpha\alpha}}{G_F}$$

da cui

$$g^p_\alpha \simeq 1 - \mathrm{Re}\,(\epsilon^p_{\alpha\alpha})\ \ .$$

Risulta allora immediato valutare la probabilità di oscillazione a distanza zero, dovuta alla non ortogonalità tra lo stato prodotto e quello rilevato, come menzionato precedentemente: considerando un $|\nu_e^s\rangle$ prodotto, la probabilità di rilevare un $|\nu_\mu^d\rangle$ vale[7]

$$P^{x=0}_{\nu_e\to\nu_\mu} = |\langle\nu_\mu^d|\nu_e^s\rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} \epsilon^{d*}_{\mu e} & 1-\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\mu\mu}\right) & \epsilon^{d*}_{\mu\tau} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{ee}\right) \\ \epsilon^s_{e\mu} \\ \epsilon^s_{e\tau} \end{pmatrix} \right|^2$$
$$\simeq |\epsilon^d_{\mu e}|^2 + |\epsilon^s_{e\mu}|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\epsilon^d_{\mu e}\epsilon^s_{e\mu}\right) \tag{3.6}$$

dove si sono tenuti solo termini fino al second'ordine nelle $\epsilon^p_{\alpha\beta}$, non si considerano perciò processi in cui entrano in gioco due interazioni non standard, che assumiamo essere trascurabili. Queste nuove interazioni rendono quindi possibile rilevare neutrini di sapore diverso da quello atteso dal Modello Standard anche a distanza nulla, ovvero anche se non interviene il fenomeno dell'oscillazione descritto nel primo capitolo. Nonostante tale effetto entri solo al second'ordine, è relativamente semplice una sua osservazione sperimentale, infatti, non essendo previsto dalle interazioni standard, non è influenzato dalle incertezze presenti su queste.

Notiamo come ciò descritto finora può essere riassunto matematicamente attraverso l'introduzione di una matrice di nuova fisica

$$\begin{pmatrix} \nu_e^s \\ \nu_\mu^s \\ \nu_\tau^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_e^p + \epsilon^s_{ee} & \epsilon^s_{e\mu} & \epsilon^s_{e\tau} \\ \epsilon^s_{\mu e} & g_\mu^p + \epsilon^s_{\mu\mu} & \epsilon^s_{\mu\tau} \\ \epsilon^s_{\tau e} & \epsilon^s_{\tau\mu} & g_\tau^p + \epsilon^s_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} . \tag{3.7}$$

Su tale matrice, come già detto, non è possibile imporre alcuna condizione senza perdere di generalità, va trattata quindi come un arbitraria matrice complessa.

3.3 Calcolo di oscillazioni non standard di due neutrini nel vuoto

Con il formalismo introdotto nel paragrafo precedente è possibile studiare l'oscillazione non standard dei neutrini nel vuoto, dove le NSIs entrano quindi solamente nel processo di produzione e rilevamento. Per semplicità di calcoli considereremo un modello a due famiglie di neutrini, ν_μ e ν_τ; per i risultati completi per un modello a tre famiglie si rimanda a [2, 3, 4]. Molti dei risultati ottenuti nei seguenti paragrafi verranno svolti completamente in Appendice, per non appesantire troppo la lettura.

[7] Per brevità gli stati sono stati scritti nella base

$$|\nu_e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\nu_\mu\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\nu_\tau\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La particolarizzazione della (3.5) risulta

$$|\nu_\mu^{s,d}\rangle = \left[1 + i\ \mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^{s,d}\right)\right]|\nu_\mu\rangle + \epsilon_{\mu\tau}^{s,d}|\nu_\tau\rangle \tag{3.8}$$

$$|\nu_\tau^{s,d}\rangle = \epsilon_{\tau\mu}^{s,d}|\nu_\mu\rangle + \left[1 + i\ \mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^{s,d}\right)\right]|\nu_\tau\rangle \tag{3.9}$$

che riscritti nella base degli autostati di massa danno

$$|\nu_\mu^{s,d}\rangle = \left[\left(1 + i\ \mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^{s,d}\right)\right)U_{\mu k} + \epsilon_{\mu\tau}^{s,d}U_{\tau k}\right]|\nu_k\rangle \tag{3.10}$$

$$|\nu_\tau^{s,d}\rangle = \left[\epsilon_{\tau\mu}^{s,d}U_{\mu k} + \left(1 + i\ \mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^{s,d}\right)\right)U_{\tau k}\right]|\nu_k\rangle \tag{3.11}$$

per i quali utilizzeremo la seguente parametrizzazione della matrice di mescolamento

$$U = \begin{pmatrix} U_{\mu 1} & U_{\mu 2} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix} . \tag{3.12}$$

3.3.1 Calcolo di $P_{\nu_\mu\to\nu_\tau}$

La probabilità di transizione di un neutrino muonico in uno tauonico nel vuoto è data da

$$P_{\nu_\mu\to\nu_\tau} = |\langle\nu_\tau^d|\nu_\mu^s(t)\rangle|^2 \tag{3.13}$$

con

$$|\nu_\mu^s(t)\rangle = \sum_k \left[\left(1 + i\ \mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^{s}\right)\right)U_{\mu k} + \epsilon_{\mu\tau}^{s}U_{\tau k}\right]e^{-iE_k t}|\nu_k\rangle \tag{3.14}$$

da cui

$$\begin{aligned}\langle\nu_\tau^d|\nu_\mu^s(t)\rangle &= \sum_k \left[\epsilon_{\tau\mu}^{d*}U_{\mu k}^* + \left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^{d}\right)\right)U_{\tau k}^*\right]\left[\left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^{s}\right)\right)U_{\mu k} + \epsilon_{\mu\tau}^{s}U_{\tau k}\right]e^{-iE_k t} \\ &= \sum_k \left[\epsilon_{\tau\mu}^{d*}|U_{\mu k}|^2 + \epsilon_{\mu\tau}^{s}|U_{\tau k}|^2 + \left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^{d}\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^{s}\right)\right)U_{\mu k}U_{\tau k}^*\right]e^{-iE_k t} .\end{aligned}$$

Vale allora[8]

$$P_{\nu_\mu\to\nu_\tau} = |\langle\nu_\tau^d|\nu_\mu^s(t)\rangle|^2 =$$

$$\begin{aligned}= \Bigg| &\left[\epsilon_{\tau\mu}^{d*}\cos^2\vartheta + \epsilon_{\mu\tau}^{s}\sin^2\vartheta + \left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^{d}\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^{s}\right)\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\right] + \\ &+ \left[\epsilon_{\tau\mu}^{d*}\sin^2\vartheta + \epsilon_{\mu\tau}^{s}\cos^2\vartheta - \left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^{d}\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^{s}\right)\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\right]e^{-i(E_2-E_1)t}\Bigg|^2\end{aligned}$$

[8]Si sfrutterà più volte la relazione

$$|A+B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2\mathrm{Re}\left(A^* B\right) .$$

e introducendo l'approssimazione relativistica $(E_2 - E_1)t \simeq \frac{\Delta m^2 L}{2E}$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta + 2\mathrm{Re}\left[\left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\tau\tau}\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\mu}\right)\right)\cos\vartheta\sin\vartheta(\epsilon^{d*}_{\tau\mu}\cos^2\vartheta + \epsilon^s_{\mu\tau}\sin^2\vartheta)\right] + \\
&\quad + \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta - 2\mathrm{Re}\left[\left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\tau\tau}\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\mu}\right)\right)\cos\vartheta\sin\vartheta(\epsilon^{d*}_{\tau\mu}\sin^2\vartheta + \epsilon^s_{\mu\tau}\cos^2\vartheta)\right] + \\
&\quad + 2\mathrm{Re}\Big\{\left[\epsilon^d_{\tau\mu}\cos^2\vartheta + \epsilon^{s*}_{\mu\tau}\sin^2\vartheta + \left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\tau\tau}\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\mu}\right)\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\right]\cdot \\
&\quad \cdot\left[\epsilon^{d*}_{\tau\mu}\sin^2\vartheta + \epsilon^s_{\mu\tau}\cos^2\vartheta - \left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\tau\tau}\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\mu}\right)\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\right]e^{-i\frac{\Delta m^2 L}{2E}}\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right)\left[\sin^2(2\vartheta) - \sin(4\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right)\right] + \\
&\qquad\qquad + \sin\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right)\sin(2\vartheta)\ \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right)\ . \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Definendo $\frac{\Delta m^2 L}{4E} = x$, si nota che per $\sin(x) \sim 1$ i termini correttivi derivanti dalle NSIs intervengono all'ordine ϵ, che risultano quindi trascurabili rispetto al termine previsto dal modello standard[9] $\sin^2 x \sin^2(2\vartheta) \sim 1$. In un esperimento volto a misurare gli effetti non standard si dovrà allora avere $\sin x \ll 1$, ad esempio ponendo il rilevatore a breve distanza dalla sorgente, oppure selezionando opportunamente l'energia dei neutrini da rilevare; infatti, in tale condizione, lo sviluppo della (3.15) risulta

$$P^{x\ll 1}_{\nu_\mu\to\nu_\tau} = x^2\sin^2(2\vartheta) + 2x\sin(2\vartheta)\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right) \qquad (3.16)$$

analogo nella forma[10] alla (3.1), dove si sono trascurati ordini superiori a x^2 e $x\epsilon$. L'intensità relativa degli effetti non standard è perciò dell'ordine ϵ/x, quindi, per x piccoli tali che $\epsilon \sim x$, risulta possibile che le NSIs intervengano significativamente nel fenomeno di oscillazione.

3.3.2 Calcolo di $P_{\nu_\mu\to\nu_\mu}$

Tale risultato sarà utile nella verifica della conservazione dell'unitarietà della probabilità di oscillazione, che ricordiamo data da

$$P_{\nu_\mu\to\nu_\tau} = 1 - P_{\nu_\mu\to\nu_\mu} \qquad (3.17)$$

dove

$$P_{\nu_\mu\to\nu_\mu} = |\langle\nu^d_\mu|\nu^s_\mu(t)\rangle|^2$$

Utilizzando le relazioni in (3.10) e (3.14) si ottiene

[9] Per $\vartheta = \vartheta_{23}$ si è utilizzato il valore riportato in [5].
[10] L'analogia risulta più chiara sostituendo $x\sin(2\vartheta) \leftrightarrow x$.

$$\begin{aligned}\langle\nu_\mu^d|\nu_\mu^s(t)\rangle &= \sum_k \left[\left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^d\right)\right) U_{\mu k}^* + \epsilon_{\mu\tau}^{d*} U_{\tau k}^*\right] \left[(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right))U_{\mu k} + \epsilon_{\mu\tau}^s U_{\tau k}\right] e^{-iE_k t} \\ &= \sum_k \left[\left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^d\right)\right) |U_{\mu k}|^2 + \epsilon_{\mu\tau}^{d*} U_{\mu k} U_{\tau k}^* + \epsilon_{\mu\tau}^s U_{\mu k}^* U_{\tau k}\right] e^{-iE_k t}\end{aligned}$$

da cui

$$P_{\nu_\mu \to \nu_\mu} = |\langle\nu_\mu^d|\nu_\mu^s(t)\rangle|^2 =$$

$$\begin{aligned}&= \Bigg| \left[\left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^d\right)\right) \cos^2\vartheta + (\epsilon_{\mu\tau}^{d*} + \epsilon_{\mu\tau}^s) \cos\vartheta \sin\vartheta\right] + \\ &\quad + \left[\left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^d\right)\right) \sin^2\vartheta - (\epsilon_{\mu\tau}^{d*} + \epsilon_{\mu\tau}^s) \cos\vartheta \sin\vartheta\right] e^{-i\frac{\Delta m^2 L}{2E}} \Bigg|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \cos^4\vartheta + 2\cos^3\vartheta \sin\vartheta \ \mathrm{Re}\left[\left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^d\right)\right)(\epsilon_{\mu\tau}^{d*} + \epsilon_{\mu\tau}^s)\right] + \\ &\quad + \sin^4\vartheta - 2\cos\vartheta \sin^3\vartheta \ \mathrm{Re}\left[\left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^d\right)\right)(\epsilon_{\mu\tau}^{d*} + \epsilon_{\mu\tau}^s)\right] + \\ &\quad + 2\mathrm{Re}\Bigg\{ \left[\left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^d\right)\right) \cos^2\vartheta + (\epsilon_{\mu\tau}^d + \epsilon_{\mu\tau}^{s*}) \cos\vartheta \sin\vartheta\right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^d\right)\right) \sin^2\vartheta - (\epsilon_{\mu\tau}^{d*} + \epsilon_{\mu\tau}^s) \cos\vartheta \sin\vartheta\right] e^{-i\frac{\Delta m^2 L}{2E}} \Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 1 - \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right)\left[\sin^2(2\vartheta) - \sin(4\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon_{\mu\tau}^s + \epsilon_{\mu\tau}^d\right)\right] - \\ &\qquad - \sin\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right) \sin(2\vartheta)\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\tau}^s - \epsilon_{\mu\tau}^d\right) \ . \end{aligned} \tag{3.18}$$

e per $x \ll 1$ vale

$$P_{\nu_\mu \to \nu_\mu}^{x \ll 1} = 1 - x^2 \sin^2(2\vartheta) - 2x \sin(2\vartheta)\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\tau}^s - \epsilon_{\mu\tau}^d\right) \ . \tag{3.19}$$

Da (3.15) e (3.18) è quindi possibile valutare l'unitarietà

$$P_{\nu_\mu \to \nu_\tau} + P_{\nu_\mu \to \nu_\mu} =$$

$$= 1 + \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sin(4\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon_{\mu\tau}^d + \epsilon_{\tau\mu}^d\right) + \sin(\Delta t) \sin(2\vartheta)\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\tau}^d - \epsilon_{\tau\mu}^d\right) \tag{3.20}$$

che risulta conservata solo nel caso in cui $\epsilon_{\mu\tau}^d = -\epsilon_{\tau\mu}^{d*}$. Dato che non vi è alcun motivo di imporre tale vincolo, le interazioni non standard nel vuoto in generale violano l'unitarietà.

Per completezza dei risultati, riportiamo di seguito la probabilità $P_{\nu_\tau \to \nu_\tau}$, il cui metodo di calcolo risulta del tutto analogo a quello utilizzato per $P_{\nu_\mu \to \nu_\mu}$

$$P_{\nu_\tau \to \nu_\tau} = 1 - \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\left[\sin^2(2\vartheta) + \sin(4\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\tau\mu} + \epsilon^d_{\tau\mu}\right)\right]$$
$$- \sin(\Delta t)\sin(2\vartheta)\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\tau\mu} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right) \ .$$

3.4 Interazioni non standard nella propagazione

Gli effetti non standard nella propagazione originano dalla presenza di nuovi fenomeni di scattering nella materia dovuti a interazioni non standard fra le particelle, che si aggiungono a quelli presentati in Paragrafo 2.1. Come già detto, non dovendo sottostare ad alcun vincolo, tali scattering possono introdurre interazioni fra particelle vietate dalle simmetrie presenti nel Modello Standard.

Il potenziale nel quale è immerso un neutrino α nella materia, introdotto in (2.3), viene quindi modificato nel seguente modo

$$V_\alpha = \sqrt{2}G_F\left(n_e\delta_{\alpha e} - \frac{1}{2}n_n\right) + \sqrt{2}G_F \sum_{f=e,n,p} n_f \epsilon^m_{\alpha f} \tag{3.21}$$

dove n_f sono le densità dei fermioni presenti nel mezzo (supponiamo solo elettroni, neutroni e protoni) mentre $\epsilon^m_{\alpha f}$ rappresenta la costante di accoppiamento non standard con il fermione f. L'Hamiltoniano efficace nella materia, introdotto in (2.7), risulta di conseguenza

$$\mathcal{H}_{\mathrm{NP}} = \frac{1}{2E}\left(U\mathbb{M}^2U^\dagger + \mathbb{A}_{\mathrm{NP}}\right) \tag{3.22}$$

dove $\mathbb{A}_{\mathrm{NP}}$ nel caso di tre famiglie di neutrini varrà

$$\mathbb{A}_{\mathrm{NP}} = \begin{pmatrix} A_{CC} + \sum_f A^f \epsilon^{m,f}_{ee} & \sum_f A^f \epsilon^{m,f}_{e\mu} & \sum_f A^f \epsilon^{m,f}_{e\tau} \\ \sum_f A^f \epsilon^{m,f}_{\mu e} & \sum_f A^f \epsilon^{m,f}_{\mu\mu} & \sum_f A^f \epsilon^{m,f}_{\mu\tau} \\ \sum_f A^f \epsilon^{m,f}_{\tau e} & \sum_f A^f \epsilon^{m,f}_{\tau\mu} & \sum_f A^f \epsilon^{m,f}_{\tau\tau} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

con $A^f = \sqrt{2}\ G_F n_f$. Si ricorda che in meccanica quantistica l'operatore hamiltoniano deve essere hermitiano, in modo da aver autovalori dell'energia reali e misurabili. Dato che è facilmente dimostrabile che il termine $U\mathbb{M}^2U^\dagger$ risulta di per sè hermitiano, la matrice $\mathbb{A}_{\mathrm{NP}}$ dovrà allora sottostare anch'essa alle condizioni di hermitianità[11]

$$\epsilon^{m,f}_{\alpha\alpha} \in \mathbb{R} \qquad\qquad \alpha = e, \mu, \tau \tag{3.24}$$

$$\epsilon^{m,f}_{\alpha\beta} = \left(\epsilon^{m,f}_{\beta\alpha}\right)^* \qquad \alpha \neq \beta \qquad \alpha, \beta = e, \mu, \tau \ . \tag{3.25}$$

La forma completa della probabilità di oscillazione dei neutrini, che tiene conto delle NSIs in tutti e tre i livelli, si presenta quindi come

[11] Si nota che tale ragionamento non è valido per i termini in (3.7), in quanto tale matrice non corrisponde ad un operatore hamiltoniano.

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(t) = |\langle \nu_\beta^d | \nu_\alpha^s(t) \rangle|^2 = \left| \; [(g_\beta^d \delta_{\beta\eta} + \epsilon_{\beta\eta}^{p*}) \langle \nu_\eta |][(g_\alpha^s \delta_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma}^p) | \nu_\gamma \rangle (t)] \; \right|^2$$
$$= | \; (g_\beta^d \delta_{\beta\eta} + \epsilon_{\beta\eta}^{p*})(g_\alpha^s \delta_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma}^p) \psi_{\gamma\eta}(t) \; |^2 \tag{3.26}$$

con le $\psi_{\gamma\eta}(t)$ date dagli evoluti temporali mediante H_{NP}

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_{\alpha e} \\ \psi_{\alpha\mu} \\ \psi_{\alpha\tau} \end{pmatrix} = \mathcal{H}_{\mathrm{NP}} \begin{pmatrix} \psi_{\alpha e} \\ \psi_{\alpha\mu} \\ \psi_{\alpha\tau} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.27}$$

Tale forma andrà quindi particolarizzata a seconda dei vari casi, ad esempio per lo studio di $\nu_\mu \to \nu_\tau$ si ha

$$P_{\nu_\mu \to \nu_\tau}(t) = | \; \epsilon_{\tau e}^s \psi_{e\mu}(t) + \epsilon_{\tau\mu}^s \psi_{\mu\mu}(t) + \left[1 + \mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^s - \epsilon_{\mu\mu}^d\right)\right] \psi_{\tau\mu}(t) + \epsilon_{\mu e}^{d*} \psi_{\tau e}(t) + \epsilon_{\mu\tau}^{d*} \psi_{\tau\tau}(t) \; |^2$$

dove si trascurano termini di ordine superiore al primo nelle $\epsilon_{\alpha\beta}^p$.

3.5 Calcolo di oscillazioni non standard di due neutrini nella materia a densità costante

Data la complessità dei calcoli che si incontrano nel continuare lo sviluppo in tre famiglie di neutrini, consideriamo il caso più semplice di due famiglie, ν_μ e ν_τ, nella materia a densità costante, che ci permetterà di comprendere meglio il formalismo introdotto nel paragrafo precedente; i risultati completi si possono comunque trovare in [2, 3, 4]. La particolarizzazione della (3.23) al caso di un neutrino muonico e un neutrino tauonico risulta allora

$$\tilde{A}_{\mathrm{NP}} = \begin{pmatrix} \sum_f A_f \epsilon_{\mu\mu}^{mf} & \sum_f A_f \epsilon_{\mu\tau}^{mf} \\ \sum_f A_f \epsilon_{\tau\mu}^{mf} & \sum_f A_f \epsilon_{\tau\tau}^{mf} \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \epsilon_{\tau\mu}^{mf} = \epsilon_{\mu\tau}^{mf*} \tag{3.28}$$

da cui si ottiene[12]

$$\mathcal{H}_{\mathrm{NP}} = \frac{1}{4E} \left[\begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\vartheta & \Delta m^2 \sin 2\vartheta \\ \Delta m^2 \sin 2\vartheta & \Delta m^2 \cos 2\vartheta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4E \sum_f A_f \epsilon_{\mu\mu}^{mf} & 4E \sum_f A_f \epsilon_{\mu\tau}^{mf} \\ 4E \sum_f A_f \epsilon_{\tau\mu}^{mf} & 4E \sum_f A_f \epsilon_{\tau\tau}^{mf} \end{pmatrix} \right] \tag{3.30}$$

[12] La parametrizzazione della matrice di mescolamento utilizzata è

$$U = \begin{pmatrix} U_{\mu 1} & U_{\mu 2} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad . \tag{3.29}$$

dove $\Delta m^2 = m_3^2 - m_2^2$ e $\vartheta = \vartheta_{23}$.
Definendo inoltre

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha\mu} \\ \psi_{\alpha\tau} \end{pmatrix} \qquad \alpha = \mu, \tau$$

l'evoluzione temporale in (3.27) sarà data da

$$i\frac{d}{dx}\Psi_\alpha = \mathcal{H}_{\rm NP}\Psi_\alpha \ , \tag{3.31}$$

da cui

$$\Psi_\alpha(t) = e^{-i\mathcal{H}_{\rm NP}t}\Psi_\alpha(0) \tag{3.32}$$

risulta quindi necessario valutare l'esponenziale $e^{-i\mathcal{H}_{\rm NP}t}$. A tal fine esprimiamo $\mathcal{H}_{\rm NP}$ in una forma più semplice, separando la (3.28) in

$$\begin{pmatrix} 4E\sum_f A_f\epsilon_{\mu\mu}^{mf} & 4E\sum_f A_f\epsilon_{\mu\tau}^{mf} \\ 4E\sum_f A_f\epsilon_{\tau\mu}^{mf} & 4E\sum_f A_f\epsilon_{\tau\tau}^{mf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & 4E\sum_f A_f\epsilon_{\mu\tau}^{mf} \\ 4E\sum_f A_f\epsilon_{\tau\mu}^{mf} & -\delta \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

con

$$\delta = 2E\left[\sum_f A_f\left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf}\right)\right] \qquad \text{e} \qquad \delta = 2E\left[\sum_f A_f\left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} + \epsilon_{\tau\tau}^{mf}\right)\right] \ .$$

Infatti, dato che il primo addendo in (3.33) è proporzionale all'identità, esso non porta alcun contributo alla (3.31), essendo eliminabile tramite un rifasamento non fisico[13]

$$\Psi_\alpha(t) \to \Psi_\alpha(t)e^{-i\gamma t} \ ,$$

ottenendo quindi

$$\mathcal{H}_{\rm NP} = \frac{1}{4E}\begin{pmatrix} -\Delta m^2\cos 2\vartheta + 2E\sum_f A_f\left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf}\right) & \Delta m^2\sin 2\vartheta + 4E\sum_f A_f\epsilon_{\mu\tau}^{mf} \\ \Delta m^2\sin 2\vartheta + 4E\sum_f A_f\epsilon_{\mu\tau}^{mf} & \Delta m^2\cos 2\vartheta - 2E\sum_f A_f\left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf}\right) \end{pmatrix}$$

che è possibile riscrivere nella forma

$$\mathcal{H}_{\rm NP} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & -\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4E}\left[-\Delta m^2\cos 2\vartheta + 2E\sum_f A_f\left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf}\right)\right] \\ \beta = \frac{1}{4E}\left[\Delta m^2\sin 2\vartheta + 4E\sum_f A_f\epsilon_{\mu\tau}^{mf}\right] \end{cases} \ . \tag{3.34}$$

[13] Si ricorda infatti che le osservabili dipendono da $|\Psi_\alpha|^2$.

É allora semplice valutare l'esponenziale

$$e^{-i\mathcal{H}_{\rm NP}t} = \mathbb{1} - it\mathcal{H}_{\rm NP} - \frac{t^2}{2}\mathcal{H}_{\rm NP}^2 + i\frac{t^3}{6}\mathcal{H}_{\rm NP}^3 + \frac{t^4}{24}\mathcal{H}_{\rm NP}^4 + \dots$$

infatti le potenze di $\mathcal{H}_{\rm NP}$ sono date da

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\rm NP}^2 &= \begin{pmatrix} \alpha^2 + |\beta|^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + |\beta|^2 \end{pmatrix} = (\alpha^2 + |\beta|^2)\ \mathbb{1} \\ \mathcal{H}_{\rm NP}^3 &= (\alpha^2 + |\beta|^2)\mathcal{H}_{\rm NP} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} e^{-i\mathcal{H}_{\rm NP}t} &= \mathbb{1} - it\mathcal{H}_{\rm NP} - \frac{t^2}{2}(\alpha^2 + |\beta|^2)\mathbb{1} + i\frac{t^3}{6}(\alpha^2 + |\beta|^2)\mathcal{H}_{\rm NP} + \frac{t^4}{24}(\alpha^2 + |\beta|^2)^2\mathbb{1} + \dots \\ &= \mathbb{1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}\left(t\sqrt{\alpha^2 + |\beta|^2}\right)^{2n} - \frac{i}{\sqrt{\alpha^2 + |\beta|^2}}\mathcal{H}_{\rm NP}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}\left(t\sqrt{\alpha^2 + |\beta|^2}\right)^{2n+1} \\ &= \mathbb{1}\cos(\gamma t) - \frac{i}{\gamma}\mathcal{H}_{\rm NP}\sin(\gamma t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma t) - \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha & -\frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta \\ -\frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta^* & \cos(\gamma t) + \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.35}$$

dove si è definito $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + |\beta|^2}$.

Per non complicare i calcoli, valutiamo fin da subito i termini di tale matrice al prim'ordine in ϵ. Ricordando le definizioni dei parametri α e β introdotti in (3.34), l'espressione per γ risulta

$$\gamma \approx \frac{\Delta m^2}{4E}\left[1 + \frac{2E}{\Delta m^2}\sum_f A_f\left[2\sin 2\vartheta\epsilon_{\mu\tau}^{mf} - \cos 2\vartheta\left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf}\right)\right]\right] \tag{3.36}$$

da cui

$$\frac{1}{\gamma} \approx \frac{4E}{\Delta m^2}\left[1 - \frac{2E}{\Delta m^2}\sum_f A_f\left[2\sin 2\vartheta\epsilon_{\mu\tau}^{mf} - \cos 2\vartheta\left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf}\right)\right]\right] \tag{3.37}$$

utile in seguito. Si ottiene quindi, definendo $x = \frac{\Delta m^2 t}{4E}$ con $t \simeq L$ in approssimazione relativistica,

$$\cos(\gamma t) = \cos x - \sin x\frac{L}{2}\sum_f A_f\left[2\sin 2\vartheta\epsilon_{\mu\tau}^{mf} - \cos 2\vartheta\left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf}\right)\right]$$

$$\sin(\gamma t) = \sin x + \cos x \frac{L}{2} \sum_f A_f \left[2\sin 2\vartheta \epsilon_{\mu\tau}^{mf} - \cos 2\vartheta \left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf} \right) \right]$$

che, per motivi analoghi a quelli che hanno portato alla (3.16), sviluppiamo[14] in $x \ll 1$

$$\begin{aligned} \cos(\gamma t) &= 1 - \frac{x^2}{2} - x\frac{L}{2} \sum_f A_f \left[2\sin 2\vartheta \epsilon_{\mu\tau}^{mf} - \cos 2\vartheta \left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf} \right) \right] \\ \sin(\gamma t) &= x + \frac{L}{2} \sum_f A_f \left[2\sin 2\vartheta \epsilon_{\mu\tau}^{mf} - \cos 2\vartheta \left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf} \right) \right] \end{aligned}$$

dove si sono trascurati ordini superiori a x^2 e $x\epsilon$. I termini della matrice (3.35) valgono perciò

$$\begin{aligned} &\cos(\gamma t) \pm \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - x\frac{L}{2}\Sigma - \\ &\quad \pm i\frac{4E}{\Delta m^2}\left[1 - \frac{2E}{\Delta m^2}\Sigma\right]\left[x + \frac{L}{2}\Sigma - x^2\frac{L}{4}\Sigma\right]\frac{1}{4E}\left[-\Delta m^2\cos 2\vartheta + 2E\sum_f A_f\left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - x\frac{L}{2}\Sigma \mp ix\cos 2\vartheta \pm i\frac{L}{2}\sum_f A_f\left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf}\right) \end{aligned} \tag{3.38}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} &-\frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta^{(*)} = \\ &\quad = \frac{4E}{\Delta m^2}\left[1 - \frac{2E}{\Delta m^2}\Sigma\right]\left[x + \frac{L}{2}\Sigma - x^2\frac{L}{4}\Sigma\right]\frac{1}{4E}\left[\Delta m^2\sin 2\vartheta + 4E\sum_f A_f\left(\epsilon_{\mu\tau}^{mf}\right)^{(*)}\right] \\ &\quad = -ix\sin 2\vartheta - iL\sum_f A_f\left(\epsilon_{\mu\tau}^{mf}\right)^{(*)} \end{aligned} \tag{3.39}$$

dove si è definito, per brevità, $\Sigma = \sum_f A_f \left[2\sin 2\vartheta \epsilon_{\mu\tau}^{mf} - \cos 2\vartheta \left(\epsilon_{\mu\mu}^{mf} - \epsilon_{\tau\tau}^{mf} \right) \right]$.

L'evouzione temporale è allora facilmente valutabile

$$\begin{pmatrix} \psi_{\alpha\mu}(t) \\ \psi_{\alpha\tau}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma t) - \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha & -\frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta \\ -\frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta^* & \cos(\gamma t) + \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\alpha\mu}(0) \\ \psi_{\alpha\tau}(0) \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

[14] I calcoli esatti per x generico verranno svolti in seguito.

con

$$\begin{pmatrix} \psi_{\mu\mu}(0) \\ \psi_{\mu\tau}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \psi_{\tau\mu}(0) \\ \psi_{\tau\tau}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

3.5.1 Calcolo approssimato della probabilità di oscillazione in $x \ll 1$

La probabilità di oscillazione di un neutrino muonico in un neutrino tauonico risulta

$$P^{x\ll 1}_{\nu_\mu\to\nu_\tau} = |\langle \nu^d_\tau | \nu^s_\mu(t)\rangle|^2$$

con[15], da (3.8) e (3.9),

$$\begin{aligned}\langle \nu^d_\tau | \nu^s_\mu(t)\rangle &= \epsilon^{d*}_{\tau\mu}\,\langle \nu_\mu | \nu_\mu(t)\rangle + \langle \nu_\tau | \nu_\mu(t)\rangle + \epsilon^s_{\mu\tau}\,\langle \nu_\tau | \nu_\tau(t)\rangle \\ &= \epsilon^{d*}_{\tau\mu}\psi_{\mu\mu}(t) + \psi_{\mu\tau}(t) + \epsilon^s_{\mu\tau}\psi_{\tau\tau}(t) \ .\end{aligned}$$

Sostituendo i valori delle ψ da (3.40) si ha

$$\begin{aligned}\langle \nu^d_\tau | \nu^s_\mu(t)\rangle &= \epsilon^{d*}_{\tau\mu}\left[\cos(\gamma t) - \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha\right] - \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta^* + \epsilon^s_{\mu\tau}\left[\cos(\gamma t) + \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha\right] \\ &= \epsilon^{d*}_{\tau\mu}\left[1 + ix\cos 2\vartheta\right] - i\left[x\sin 2\vartheta + L\sum_f A_f \epsilon^{mf*}_{\mu\tau}\right] + \epsilon^s_{\mu\tau}\left[1 - ix\cos 2\vartheta\right]\end{aligned}$$

dove si sono trascurati ordini superiori a x^2 e $x\epsilon$, quindi

$$\begin{aligned}P^{x\ll 1}_{\nu_\mu\to\nu_\tau} &= \left[x^2\sin^2 2\vartheta + 2x\sin 2\vartheta L\sum_f A_f \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right)\right] + 2x\sin 2\vartheta \mathrm{Re}\left[i\left(\epsilon^{d*}_{\tau\mu} + \epsilon^s_{\mu\tau}\right)\right] \\ &= x\sin 2\vartheta\left(x\sin 2\vartheta + 2L\sum_f A_f \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right)\right) - 2x\sin 2\vartheta \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right) \ .\end{aligned} \tag{3.41}$$

In modo del tutto analogo è possibile calcolare la probabilità di sopravvivenza del neutrino muonico

$$P^{x\ll 1}_{\nu_\mu\to\nu_\mu} = |\langle \nu^d_\mu | \nu^s_\mu(t)\rangle|^2$$

con

[15]Si sono trascurati i termini diagonali $\epsilon^p_{\alpha\alpha}$ con $p = s, d$, in quanto, dai calcoli svolti per l'oscillazione con NSIs nel vuoto, si è osservato che questi non entrano nella probabilità di oscillazione al prim'ordine. Dato che le correzioni dovute alle interazioni non standard nella materia sono all'ordine ϵ, queste non possono modificare in alcun modo il contributo dei termini sopracitati, che rimangono quindi trascurabili al prim'ordine.

$$
\begin{aligned}
\langle \nu_\mu | \nu_\mu(t) \rangle &= \psi_{\mu\mu}(t) + \epsilon^{d*}_{\mu\tau}\psi_{\mu\tau}(t) + \epsilon^{s}_{\mu\tau}\psi_{\tau\mu}(t) \\
&= \left[\cos(\gamma t) - \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha\right] - \frac{i\epsilon^{d*}_{\mu\tau}}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta^* - \frac{i\epsilon^{s}_{\mu\tau}}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta \\
&= -ix\sin 2\vartheta(\epsilon^{s}_{\mu\tau} + \epsilon^{d*}_{\mu\tau}) + \left[1 - \frac{x^2}{2} - x\frac{L}{2}\Sigma + ix\cos 2\vartheta - i\frac{L}{2}\sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\right]
\end{aligned}
$$

ottenendo

$$
\begin{aligned}
P^{x\ll 1}_{\nu_\mu\to\nu_\mu} &= (1 - x^2 + \cos^2 2\vartheta x^2) + 2\mathrm{Re}\Bigg\{\left(1 - \frac{x^2}{2} - ix\cos 2\vartheta\right)\cdot \\
&\quad\cdot\left[-ix\sin 2\vartheta(\epsilon^{s}_{\mu\tau} + \epsilon^{d*}_{\mu\tau}) - x\frac{L}{2}\Sigma - i\frac{L}{2}\sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\right]\Bigg\} \\
&= 1 - x\sin 2\vartheta\left(x\sin 2\vartheta + 2L\sum_f A_f \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right)\right) + 2x\sin 2\vartheta\,\mathrm{Im}\left(\epsilon^{s}_{\mu\tau} - \epsilon^{d}_{\mu\tau}\right) .
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Si può allora valutare l'unitarietà

$$
P^{x\ll 1}_{\nu_\mu\to\nu_\tau} + P^{x\ll 1}_{\nu_\mu\to\nu_\mu} = 1 + 2x\sin 2\vartheta\,\mathrm{Im}\left(\epsilon^{d}_{\tau\mu} - \epsilon^{d}_{\mu\tau}\right) \tag{3.43}
$$

che è verificata solo nel caso in cui $\mathrm{Im}\left(\epsilon^{d}_{\tau\mu}\right) = \mathrm{Im}\left(\epsilon^{d}_{\mu\tau}\right)$. Tale risultato è equivalente alla (3.20) in approssimazione $x \ll 1$, in particolar modo si nota che i termini delle interazioni non standard nella materia non modificano l'unitarietà al prim'ordine.

Il calcolo di $P^{x\ll 1}_{\nu_\tau\to\nu_\tau}$ risulta del tutto analogo a quanto appena svolto per $P^{x\ll 1}_{\nu_\mu\to\nu_\mu}$, infatti non vi sono caratteristiche asimmetriche tra i due neutrini, e vale

$$
P^{x\ll 1}_{\nu_\tau\to\nu_\tau} = 1 - x\sin 2\vartheta\left(x\sin 2\vartheta + 2L\sum_f A_f \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right)\right) + 2x\sin 2\vartheta\,\mathrm{Im}\left(\epsilon^{s}_{\tau\mu} - \epsilon^{d}_{\tau\mu}\right) .
$$

3.5.2 Calcolo della probabilità di oscillazione in x generico

L'approssimazione di $x \ll 1$ introdotta nel paragrafo precedente trova la sua giustificazione nell'attuale sensibilità dei detector, la quale permette di visualizzare gli effetti delle NSIs solo nel caso in cui il contributo delle oscillazioni standard risulti piccolo, come descritto dalla (3.1). É interessante comunque ricavare le espressioni delle probabilità di oscillazione sotto generiche condizioni di lavoro, non imponendo quindi vincoli sulla distanza dalla sorgente oppure sull'energia dei neutrini.

I termini della matrice dell'evoluzione temporale in (3.40) non approssimati risultano

$$
\begin{aligned}
&\cos(\gamma t) \pm \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha = \\
&= \cos x - \sin x \frac{L}{2}\sum_f A_f \left[2\sin 2\vartheta \epsilon^{mf}_{\mu\tau} - \cos 2\vartheta\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\right] \pm \\
&\quad \pm \frac{i}{\Delta m^2}\left[1 - \frac{2E}{\Delta m^2}\Sigma\right]\left[\sin x + \cos x \frac{L}{2}\Sigma\right]\left[-\Delta m^2 \cos 2\vartheta + 2E\sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\right] \\
&= \cos x - \sin x \frac{L}{2}\sum_f A_f \left[2\sin 2\vartheta \epsilon^{mf}_{\mu\tau} - \cos 2\vartheta\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\right] \pm \\
&\quad \pm \frac{i}{\Delta m^2}\Bigg[- \Delta m^2 \cos 2\vartheta \sin x + \Delta m^2 \cos 2\vartheta \frac{L}{2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)\Sigma + \\
&\qquad\qquad + 2E \sin x \sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&-\frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta^{(*)} = \\
&= -\frac{i}{\Delta m^2}\left[\Delta m^2 \sin 2\vartheta \sin x - \Delta m^2 \sin 2\vartheta \frac{L}{2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)\Sigma + 4E\sin x\sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right)^{(*)}\right] .
\end{aligned}
$$

Calcolo di $P_{\nu_\mu \to \nu_\tau}$ in x generico

La probabilità di transizione di un neutrino muonico in uno tauonico è data ora da

$$P_{\nu_\mu \to \nu_\tau} = |\langle \nu^d_\tau | \nu^s_\mu(t)\rangle|^2$$

con

$$
\begin{aligned}
\langle \nu^d_\tau | \nu^s_\mu(t)\rangle &= \epsilon^{d*}_{\tau\mu}\left[\cos(\gamma t) - \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha\right] - \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta^* + \epsilon^s_{\mu\tau}\left[\cos(\gamma t) + \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha\right] \\
&= \epsilon^{d*}_{\tau\mu}\left[\cos x + i\cos 2\vartheta \sin x\right] + \epsilon^s_{\mu\tau}\left[\cos x - i\cos 2\vartheta\sin x\right] - \\
&\quad - \frac{i}{\Delta m^2}\Bigg[\Delta m^2 \sin 2\vartheta \sin x - \Delta m^2 \sin 2\vartheta \frac{L}{2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)\Sigma + \\
&\qquad\qquad + 4E\sin x \sum_f A_f \epsilon^{mf}_{\mu\tau}\Bigg]
\end{aligned}
$$

da cui

$$P_{\nu_\mu\to\nu_\tau} =$$

$$= \frac{1}{(\Delta m^2)^2}\Bigg\{(\Delta m^2)^2 \sin^2 2\vartheta \sin^2 x +$$
$$+ 2\Delta m^2 \sin 2\vartheta \sin x \left[-\Delta m^2 \sin 2\vartheta \frac{L}{2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \mathrm{Re}\,(\Sigma) + 4E \sin x \sum_f A_f \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right)\right]\Bigg\}$$
$$+ 2\sin 2\vartheta \sin x \mathrm{Re}\left\{i\left[\epsilon^{d*}_{\tau\mu}(\cos x + i\cos 2\vartheta \sin x) + \epsilon^{s}_{\mu\tau}(\cos x - i\cos 2\vartheta \sin x)\right]\right\}$$

$$= \sin^2 2\vartheta \sin^2 x + \sin^2 x \sin 4\vartheta \mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right) - \sin 2\vartheta \sin(2x) \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right) +$$
$$+ 2\sin 2\vartheta \frac{\sin^2 x}{x} L \sum_f A_f \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right) -$$
$$- \sin^2 2\vartheta \sin x\, L\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)\sum_f A_f \left[2\sin 2\vartheta \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right) - \cos 2\vartheta\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\right]\ . \qquad (3.44)$$

Si nota che nell'approssimazione di $x \ll 1$, $\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \simeq 0$ al prim'ordine per cui l'ultimo termine diventa trascurabile, mentre $\frac{\sin^2 x}{x} \simeq x$, si riottiene quindi il risultato in (3.41). Eliminando inoltre gli effetti delle NSIs nella materia, si osserva facilmente che tale espressione risulta del tutto analoga[16] alla (3.15) nel vuoto.

Calcolo di $P_{\nu_\mu\to\nu_\mu}$ in x generico

L'espressione esatta della probabilità di sopravvivenza di un neutrino muonico è data da

$$P_{\nu_\mu\to\nu_\mu} = |\langle\nu^d_\mu|\nu^s_\mu(t)\rangle|^2$$

con

$$\begin{aligned}\langle\nu_\mu|\nu_\mu(t)\rangle &= \psi_{\mu\mu}(t) + \epsilon^{d*}_{\mu\tau}\psi_{\mu\tau}(t) + \epsilon^s_{\mu\tau}\psi_{\tau\mu}(t)\\ &= \left[\cos(\gamma t) - \frac{i}{\gamma}\sin(\gamma t)\alpha\right] - \frac{i\epsilon^{d*}_{\mu\tau}}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta^* - \frac{i\epsilon^s_{\mu\tau}}{\gamma}\sin(\gamma t)\beta\\ &= -i\sin x \sin 2\vartheta(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^{d*}_{\mu\tau}) + \Bigg\{\cos x - \sin x\frac{L}{2}\Sigma - \frac{i}{\Delta m^2}\Bigg[-\Delta m^2 \cos 2\vartheta \sin x +\\ &\quad + \Delta m^2 \cos 2\vartheta \frac{L}{2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)\Sigma + 2E\sin x \sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\Bigg]\Bigg\}\end{aligned}$$

da cui

[16] A causa della diversa scelta della parametrizzazione della matrice di mescolamento in (3.12) e (3.29), le due espressioni saranno uguali a meno di $\vartheta \leftrightarrow -\vartheta$.

$$
\begin{aligned}
&P_{\nu_\mu\to\nu_\mu} = \\
&= \cos^2 x + \cos^2 2\vartheta \sin^2 x + 2\mathrm{Re}\Bigg\{ (\cos x - i\cos 2\vartheta \sin x) \Bigg[-\Sigma \left(\sin x \frac{L}{2} + i\cos 2\vartheta \frac{L}{2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \right) - \\
&\quad - i\frac{2E}{\Delta m^2} \sin x \sum_f A_f \left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau} \right) - i \sin 2\vartheta \sin x \left(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^{d*}_{\mu\tau} \right) \Bigg] \Bigg\} \\
&= 1 - \sin^2 2\vartheta \sin^2 x + \sin 2\vartheta \sin 2x \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\mu\tau} \right) - \sin 4\vartheta \sin^2 x \mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^d_{\mu\tau} \right) - \\
&\quad - \sin 2x \sin 2\vartheta \; L \sum_f A_f \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau} \right) - \\
&\quad - \sin x \cos 2\vartheta \; L \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \sum_f A_f \left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau} \right) + \sin 4\vartheta L \left(\frac{\sin 2x}{2x} - 1 \right) \sum_f A_f \mathrm{Im}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau} \right) - \\
&\quad - \cos^2 2\vartheta \sin x L \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \sum_f A_f \left[2\sin 2\vartheta \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau} \right) - \cos 2\vartheta \left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau} \right) \right] \;, \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

per la quale vale un discorso analogo a quanto detto per la (3.44), dove si osserva che nell'approssimazione $x \ll 1$ vale anche $\left(\frac{\sin 2x}{2x} - 1\right) \simeq 0$ al prim'ordine. Si nota inoltre che il contributo proporzionale a $x\mathrm{Re}\,(\epsilon)$ in (3.41) e (3.42) proviene da due termini diversi: $\frac{\sin^2 x}{x}$ in (3.44) e $\sin 2x$ in (3.45). In particolar modo nella verifica dell'unitarietà questi non si elideranno, al contrario di quanto accade in (3.43), portando quindi ad una dipendenza dai parametri ϵ^m delle NSIs nella materia.

Per completezza dei risultati si fornisce di seguito l'espressione per la probabilità di sopravvivenza di un neutrino tauonico. Dato che non vi sono termini che differenzino tale neutrinio da quello muonico, lo svolgimento del calcolo risulta del tutto analogo a quanto visto per (3.45) e vale

$$
\begin{aligned}
&P_{\nu_\tau\to\nu_\tau} = \\
&= 1 - \sin^2 2\vartheta \sin^2 x + \sin 2\vartheta \sin 2x \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\tau\mu} - \epsilon^d_{\tau\mu} \right) + \sin 4\vartheta \sin^2 x \mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\tau\mu} + \epsilon^d_{\tau\mu} \right) - \\
&\quad - \sin 2x \sin 2\vartheta \; L \sum_f A_f \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau} \right) - \\
&\quad - \sin x \cos 2\vartheta \; L \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \sum_f A_f \left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau} \right) - \sin 4\vartheta L \left(\frac{\sin 2x}{2x} - 1 \right) \sum_f A_f \mathrm{Im}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau} \right) - \\
&\quad - \cos^2 2\vartheta \sin x L \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \sum_f A_f \left[2\sin 2\vartheta \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau} \right) - \cos 2\vartheta \left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau} \right) \right] \;. \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

3.6 Vincoli attuali sulle NSIs

I vincoli attuali sulle NSIs nella propagazione sono dovuti principalmente ai dati delle oscillazioni di neutrini atmosferici, solari e quelli prodotti dagli acceleratori. Tali effetti risultano invece trascurabili in esperimenti sui neutrini prodotti dai reattori nucleari, che sono invece importanti nella valutazione delle NSIs nella produzione e rilevamento. Nell'analisi delle interazioni non standard nella propagazione, espliciteremo di seguito solamente i limiti imposti su $\epsilon_{\alpha\beta}^{md}$, ovvero considerando le interazioni con il quark down; la determinazione dei valori riguardanti il quark up e l'elettrone risulterà infatti del tutto analoga.

Per quanto riguarda gli esperimenti sui neutrini atmosferici, è possibile separare il settore $\nu_\mu - \nu_\tau$ da ν_e, considerando nulli tutti i termini che li collegano. Si può allora fornire una stima dell'effetto delle NSIs osservando la probabilità di sopravvivenza di neutrini e antineutrini muonici al variare dell'angolo zenitale sotto il quale vengono rilevati, tramite il quale si determina la lunghezza del tragitto percorso all'interno del materiale terrestre e le varie densità incontrate. In Figura 3.1 riportiamo gli andamenti della probabilità di sopravvivenza con (linee tratteggiate) e senza (linea continua) NSIs per valori dell'angolo zenitale pari a $\cos\vartheta_z = -0.3$ (a sinistra), -0.6 (in centro), -1 (a destra). L'analisi dei dati sperimentali in confronto con quelli attesi teoricamente permette quindi di porre dei limiti superiori, che dalle stime più recenti, utilizzando i dati raccolti da IceCube-79 e DeepCore, risultano [7]

$$|\epsilon_{\mu\tau}^{md}| \lesssim 6 \times 10^{-3} \qquad\qquad |\epsilon_{\tau\tau}^{md} - \epsilon_{\mu\mu}^{md}| \lesssim 3 \times 10^{-2}$$

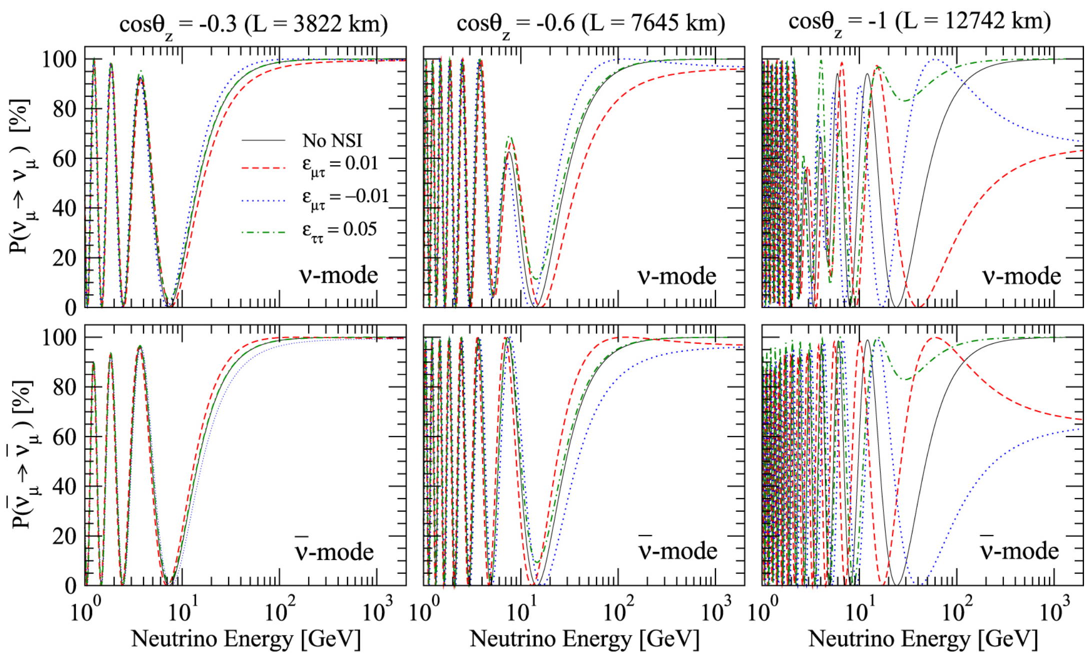


Figura 3.1: Probabilità di sopravvivenza di un neutrino (sopra) e antineutrino (sotto) muonico in funzione dell'energia del neutrino per differenti valori dell'angolo zenitale d'incidenza (tra parentesi sono riportate le lunghezze dei tragitti all'interno del materiale terrestre). Figura tratta da [6].

con un CL al 90%. Si nota che l'effetto delle NSIs risulta più evidente alle alte energie e, ovviamente, si discosta sempre di più dalle previsioni standard all'aumentare della distanza percorsa nella materia.

Prendendo in considerazione il settore $\nu_e - \nu_\tau$ è invece possibile valutare il contributo dato da $\epsilon_{\tau\tau}^{md}$, ϵ_{ee}^{md} e $\epsilon_{e\tau}^{md}$, per i quali vale la relazione [8]

$$\epsilon_{\tau\tau}^{md} \sim \frac{3|\epsilon_{e\tau}^{md}|^2}{1 + 3\epsilon_{ee}^{md}} \, .$$

In [8] è inoltre dimostrato che i dati ottenuti dai neutrini atmosferici non possono porre dei vincoli a ϵ_{ee}^{md}, perciò, in generale, è possibile ottenere delle regioni permesse di $\epsilon_{e\tau}^{md}$ e $\epsilon_{\tau\tau}^{md}$ al variare di ϵ_{ee}^{md}, come si può vedere in Figura 3.2. Ad esempio, per $\sin^2\vartheta_{23} = 0.5$ e $\epsilon_{ee}^{md} = -0.5,\ 0,\ 0.5$ si ha $\epsilon_{e\tau}^{md} \lesssim 0.08,\ 0.11,\ 0.18$ rispettivamente, con un CL al 90%.

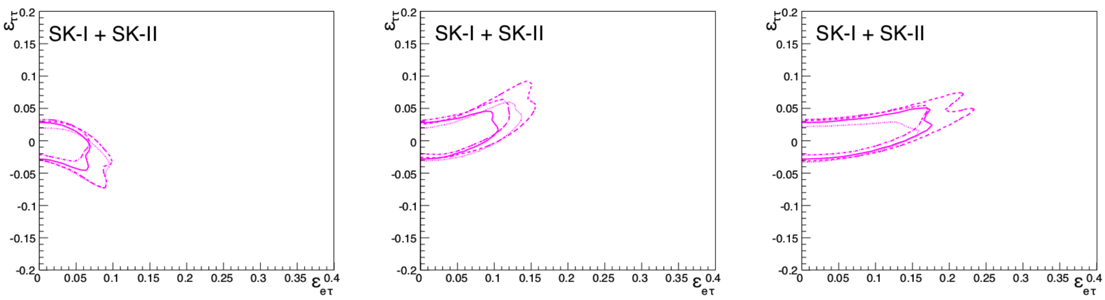
Per quanto riguarda $\epsilon_{\mu\tau}^{md}$, la collaborazione MINOS ha ottenuto, confrontando gli andamenti teorici in Figura 3.1 con i dati provenienti da esperimenti su neutrini prodotti dagli acceleratori, la seguente stima [10]

$$-0.067 < \epsilon_{\mu\tau}^{md} < 0.023$$

con un CL del 90%. In [11] si sono invece analizzati i neutrini solari, il cui comportamento dipende dai parametri

$$\begin{aligned}\epsilon_D = {} & \cos\vartheta_{13}\sin\vartheta_{13}\mathrm{Re}\left[e^{i\delta_{13}}\left(\sin\vartheta_{23}\epsilon_{e\mu}^{md} + \cos\vartheta_{23}\epsilon_{e\tau}^{md}\right)\right] - \left(1+\sin^2\vartheta_{13}\right)\cos\vartheta_{23}\sin\vartheta_{23}\mathrm{Re}\left(\epsilon_{\mu\tau}^{md}\right) - \\ & - \frac{\cos^2\vartheta_{13}}{2}\left(\epsilon_{ee}^{md} - \epsilon_{\mu\mu}^{md}\right) + \frac{\sin^2\vartheta_{23} - \sin^2\vartheta_{13}\cos^2\vartheta_{23}}{2}\left(\epsilon_{\tau\tau}^{md} - \epsilon_{\mu\mu}^{md}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_N = {} & \cos\vartheta_{13}\left(\cos\vartheta_{23}\epsilon_{e\mu}^{md} - \sin\vartheta_{23}\epsilon_{e\tau}^{md}\right) + \\ & + \sin\vartheta_{13}e^{-i\delta_{13}}\left[\sin^2\vartheta_{23}\epsilon_{\mu\tau}^{md} - \cos^2\vartheta_{23}\left(\epsilon_{\tau\tau}^{md}\right)^* + \cos\vartheta_{23}\sin\vartheta_{23}\left(\epsilon_{\tau\tau}^{md} - \epsilon_{\mu\mu}^{md}\right)\right]\end{aligned}$$



(a)$\varepsilon_{ee} = -0.50$ (b)$\varepsilon_{ee} = 0.00$ (c)$\varepsilon_{ee} = 0.50$

Figura 3.2: Regioni permesse nel piano $\epsilon_{e\tau}^{md} - \epsilon_{\tau\tau}^{md}$ per differenti valori di ϵ_{ee}^{md}. La linea continua vale per $\left(\sin^2\vartheta_{23},\ \Delta m_{23}^2\right) = \left(0.5,\ 1.7\times10^{-3}\ \mathrm{eV}^2\right)$, la linea tratteggiata $\left(\sin^2\vartheta_{23},\ \Delta m_{23}^2\right) = \left(0.5,\ 2.7\times10^{-3}\ \mathrm{eV}^2\right)$, quella puntinata $\left(\sin^2\vartheta_{23},\ \Delta m_{23}^2\right) = \left(0.39,\ 2.1\times10^{-3}\ \mathrm{eV}^2\right)$ e quella puntinata e tratteggiata $\left(\sin^2\vartheta_{23},\ \Delta m_{23}^2\right) = \left(0.61,\ 1.7\times10^{-3}\ \mathrm{eV}^2\right)$. Figura tratta da [9].

ottenendo i vincoli

$$-0.25 < \epsilon_D < -0.02 \qquad \text{e} \qquad -0.14 < \epsilon_N < 0.12$$

con un CL del 90%.

In Tabella 3.1 riassumiamo quindi i vincoli attuali sulle NSIs nella propagazione.

Per lo studio delle NSIs nella produzione e rilevamento i dati vengono implementati anche dall'utilizzo di *short baseline detectors*, ovvero rilevatori posti a breve distanza dalla sorgente in modo da trascurare effetti di oscillazione nella materia, per i quali in cui la probabilità di una violazione del sapore è data dalla (3.6). Nonostante in tali rilevatori gli eventi registrati siano rari, in quanto le NSIs entrano solo al second'ordine, le stime così ottenute risulteranno più affidabili, in quanto non risentono di incertezze derivanti dall'oscillazione standard.

Data l'elevata quantità di parametri liberi introduciamo l'assunzione $\epsilon^s_{\alpha\beta} = \left(\epsilon^d_{\beta\alpha}\right)^*$, la cui spiegazione è fornita in [2]. Si riportano in Figura 3.3 le stime ottenute in [2] confrontando simulazioni numeriche con i dati derivanti dagli esperimenti T2K, *long baseline detector*, e Double Chooz, *short baseline detector*, in Figura 3.4 invece tali simulazioni sono state confrontate con i dati di NOνA, *short baseline detector*, attraverso l'implementazione di una simulazione di un ipotetico esperimento, DC-200 [12], simile a Double Chooz ma con un *long baseline detector*.

Si può notare che per alcuni parametri, ad esempio $\epsilon^s_{\mu\tau} = \epsilon^{d*}_{\tau\mu}$ e $\epsilon^d_{\tau\mu} = \epsilon^{s*}_{\mu\tau}$, non è possibile fornire una stima stringente. Infatti questi non entrano in modo sensibile in nessuno degli

Tabella 3.1: Vincoli sugli effetti delle NSIs nella materia con un CL al 90%. Nell'ultima colonna vengono indicate le referenze nelle quali tali vincoli vengono ricavati.

Parametro NSIs	Vincolo	Referenza
$\epsilon^{md}_{ee} - \epsilon^{md}_{\mu\mu}$	$(0.02, 0.51)$	[11]
$\epsilon^{md}_{\tau\tau} - \epsilon^{md}_{\mu\mu}$	$(-0.01, 0.03)$	[11]
$\epsilon^{md}_{\tau\tau} - \epsilon^{md}_{\mu\mu}$	$(-0.049, 0.049)$	[9]
$\epsilon^{md}_{\tau\tau} - \epsilon^{md}_{\mu\mu}$	$(-0.036, 0.031)$	[7]
$\epsilon^{md}_{e\mu}$	$(-0.09, 0.04)$	[11]
$\epsilon^{md}_{\mu\tau}$	$(-0.01, 0.01)$	[11]
$\epsilon^{md}_{\mu\tau}$	$(-0.011, 0.011)$	[9]
$\epsilon^{md}_{\mu\tau}$	$(-6.1 \times 10^{-3}, 5.6 \times 10^{-3})$	[7]
$\epsilon^{md}_{e\tau}$	$(-0.13, 0.14)$	[11]
$\epsilon^{md}_{e\tau}$ (per $\epsilon^{md}_{ee} = -0.5$)	$(-0.05, 0.05)$	[9]
$\epsilon^{md}_{e\tau}$ (per $\epsilon^{md}_{ee} = 0.5$)	$(-0.19, 0.13)$	[9]

esperimenti sopracitati (per le espressioni complete delle probabilità di oscillazione si veda [2]). Inoltre ad alcuni valori delle fasi dei parametri corrispondono delle indeterminazioni sul modulo dello stesso parametro. A tali fasi, infatti, il contributo di questi parametri alle probabilità di oscillazione risulta nullo.

Dalle stime sopra fornite sulle NSIs, nella produzione, rilevamento e propagazione, non vi è quindi, ad oggi, nessuna evidenza sperimentale della loro esistenza.

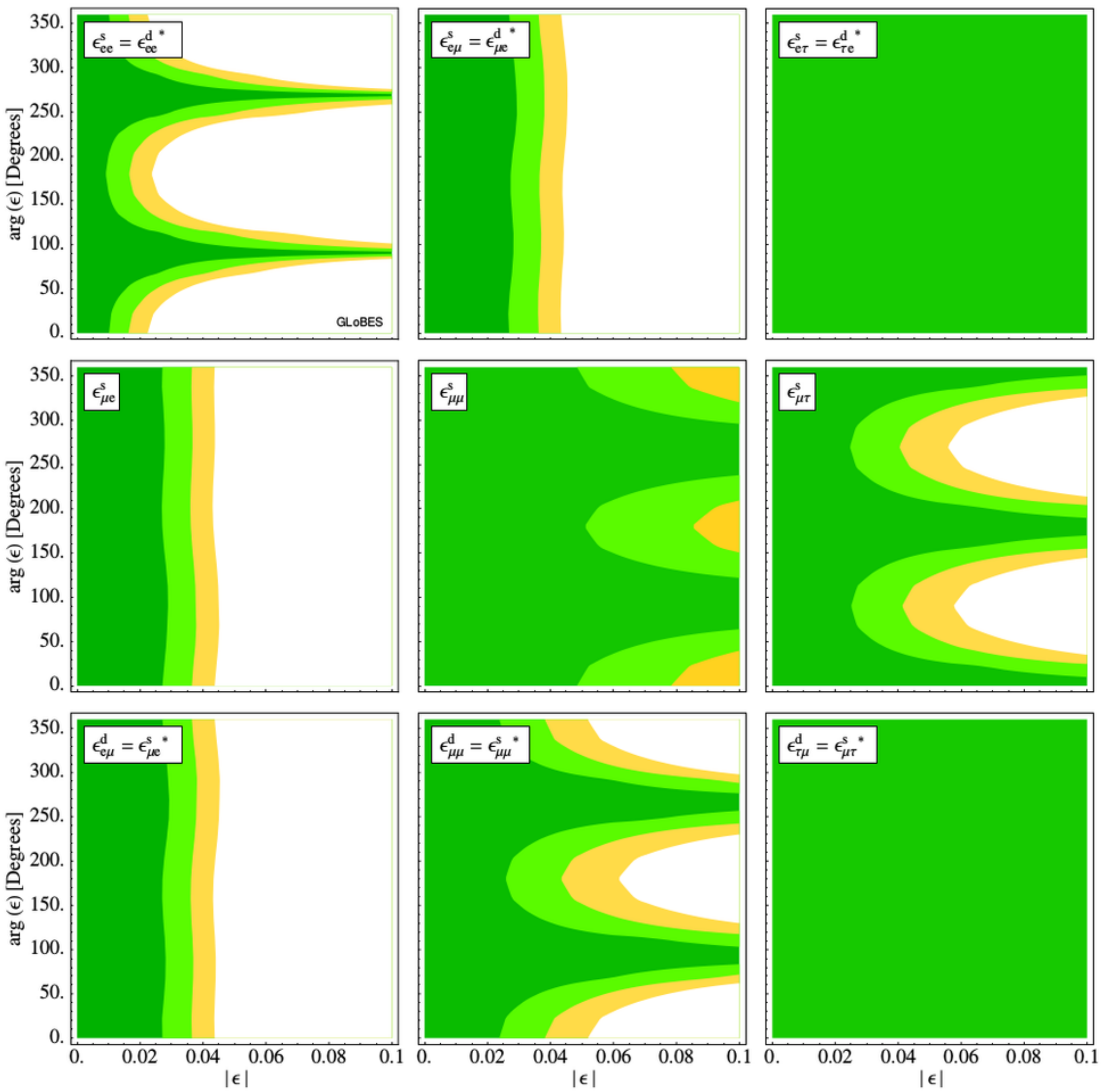


Figura 3.3: Stime dei parametri delle NSIs nella produzione e rilevamento attraverso i dati forniti dagli esperimenti T2K e Double Chooz. La regione chiara indica un CL al 68%, quella intermedia un CL al 95% e quella più scura al 99.7%. Figura tratta da [2].

Vi sono però diversi progetti di esperimenti futuri con lo scopo di migliorare tali stime. Per quanto riguarda le NSIs nella materia si distinguono i progetti Hyper-Kamiokande [13], LBNE [14], LBNO [15], IceCube Deep Core e PINGU, questi ultimi due sono estensioni dell'esperimento IceCube alle basse energie. Per le NSIs nella produzione e rilevamento invece si distinguono i progetti JUNO [16], RENO-50 [17], ISODAR [18] e LENA [19].

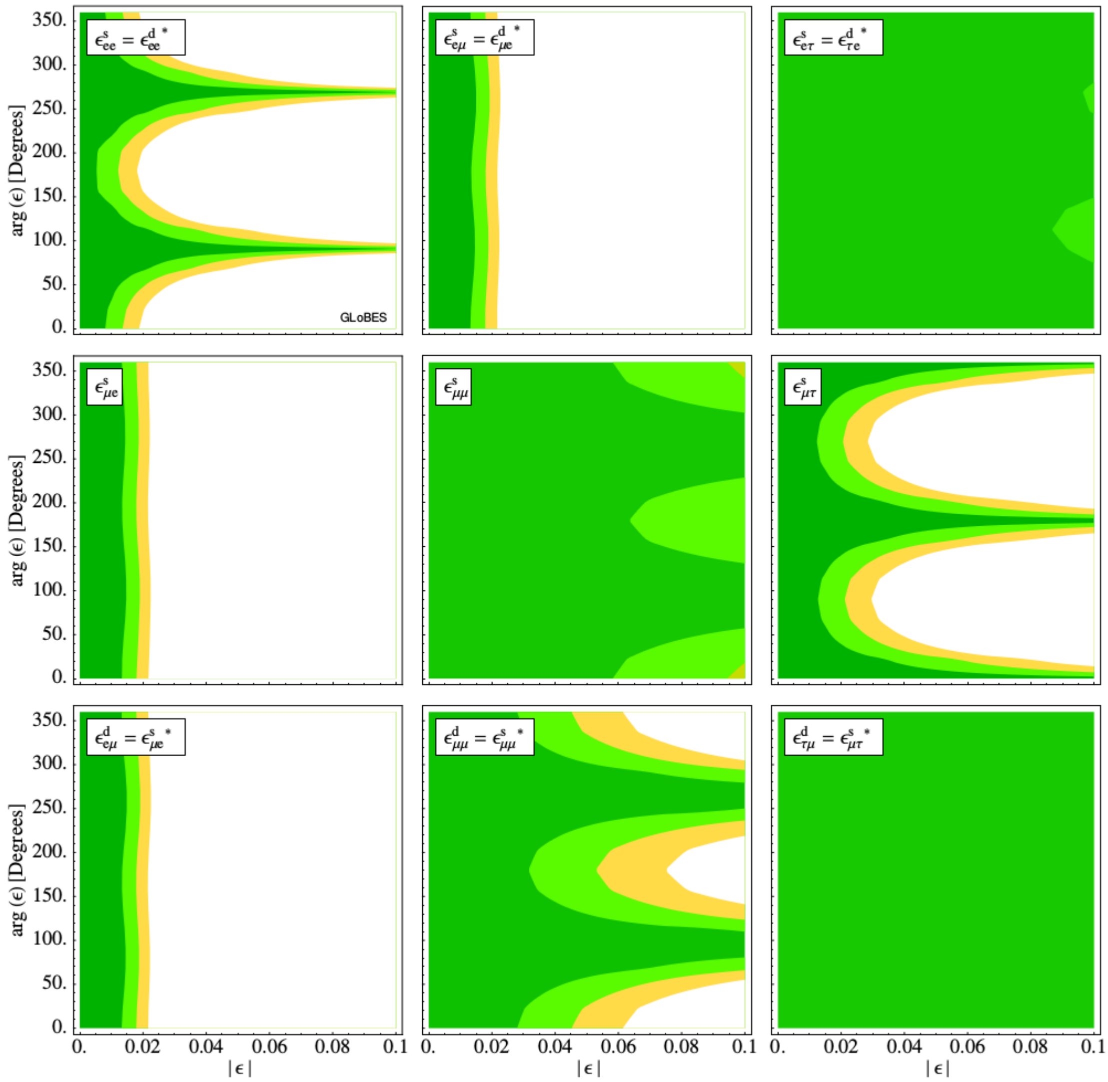


Figura 3.4: Stime dei parametri delle NSIs nella produzione e rilevamento attraverso i dati forniti dall'esperimento NOνA, con l'implementazione di simulazioni numeriche derivanti dall'esperimento ipotetico DC-200. La regione chiara indica un CL al 68%, quella intermedia un CL al 95% e quella più scura al 99.7%. Figura tratta da [2].

Appendice A

Svolgimento completo di alcuni risultati

A.1 Risoluzione della (1.16)

Riprendiamo la (1.14)

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L, E) = \sum_{k,j} U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j} \exp\left(-i \frac{\Delta m^2_{kj} L}{2E}\right) \tag{A.1}$$

e dividiamo i casi in cui $k = j$ e $k \neq j$:

- per $k = j$ si hanno i termini

$$\sum_k U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha k} U^\dagger_{\beta k} e^0 = \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2$$

- per $k \neq j$ si può riscrivere la (A.1) come una somma di termini del tipo

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L, E) = \sum_{k \neq j} A_{kj} \qquad A_{kj} = U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j} \exp\left(-i \frac{\Delta m^2_{kj} L}{2E}\right) .$$

Si nota però che[1] $A_{jk} = A^*_{kj}$, da cui $A_{kj} + A_{jk} = A_{kj} + A^*_{kj} = 2\mathrm{Re}[A_{kj}]$, quindi

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L, E) = \sum_{k \neq j} A_{kj} = 2\mathrm{Re}\left[\sum_{k>j} A_{kj}\right] . \tag{A.2}$$

Si ottiene, così, la (A.1) nella forma

[1] Dove il simbolo * indica il complesso coniugato.

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L,E) = \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{k>j} U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j} \exp\left(-2\pi i \frac{L}{L^{\mathrm{osc}}_{kj}}\right)\right] \tag{A.3}$$

dove si è introdotta la lunghezza di oscillazione L^{osc}_{kj}.

Tramite le relazioni di unitarietà della matrice di mescolamento, è possibile riscrivere il primo termine come

$$\sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 = \delta_{\alpha\beta} - 2\sum_{k>j} \mathrm{Re}\left[U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j}\right], \tag{A.4}$$

infatti

$$\begin{aligned}\delta_{\alpha\beta} &= \sum_k U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} \sum_j U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j} = \sum_{k,j} U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j} = \\ &= \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2\sum_{k>j} \mathrm{Re}\left[U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j}\right]\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato un risultato analogo a quanto fatto per la (A.2).

Separando ora l'esponenziale complesso in parte reale e parte immaginaria e sostituendo la (A.4) nella (A.3) si ottiene

$$\begin{aligned}P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L,E) = \delta_{\alpha\beta} &- 2\sum_{k>j} \mathrm{Re}\left[U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j}\right]\left[1 - \cos\left(2\pi \frac{L}{L^{\mathrm{osc}}_{kj}}\right)\right] \\ &+ 2\sum_{k>j} \mathrm{Im}\left[U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j}\right] \sin\left(2\pi \frac{L}{L^{\mathrm{osc}}_{kj}}\right)\end{aligned}$$

da cui, sostituendo $\frac{1-\cos\vartheta}{2} = \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$, si arriva alla forma desiderata

$$\begin{aligned}P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L,E) = \delta_{\alpha\beta} &- 4\sum_{k>j} \mathrm{Re}\left[U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j}\right] \sin^2\left(\pi \frac{L}{L^{\mathrm{osc}}_{kj}}\right) \\ &+ 2\sum_{k>j} \mathrm{Im}\left[U^\dagger_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^\dagger_{\beta j}\right] \sin\left(2\pi \frac{L}{L^{\mathrm{osc}}_{kj}}\right) \ .\end{aligned}$$

A.2 Risoluzione della (2.9)

La particolarizzazione delle grandezze in (2.8) è immediata

$$\mathbb{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{CC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Tali matrici si possono riscrivere come

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta m^2 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\Delta m^2 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix} \\ \mathbb{A} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_{CC} & 0 \\ 0 & A_{CC} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_{CC} & 0 \\ 0 & -A_{CC} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove i primi termini si possono trascurare in quanto proporzionali alla matrice identità, e quindi eliminabili tramite un cambiamento di fase

$$\Psi_e \to \Psi_e \exp\left(-i\,\frac{\Delta m^2 + A_{CC}}{4E}\,x\right) .$$

Svolgendo quindi le banali moltiplicazioni matriciali, con la matrice di mescolamento U definita in (1.4), si ottiene la forma desiderata.

A.3 Risoluzione della (2.14)

Cerchiamo U_M nella forma

$$U_M = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_M & \sin\vartheta_M \\ -\sin\vartheta_M & \cos\vartheta_M \end{pmatrix} .$$

Riscrivendo $\mathcal{H}_F$ come

$$\mathcal{H}_F = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

con

$$A = A_{CC} - \Delta m^2 \cos 2\vartheta \qquad B = \Delta m^2 \sin 2\vartheta$$

e scrivendo, per brevità, $\cos\vartheta_M = c$, $\sin\vartheta_M = s$, $\cos 2\vartheta_M = c_2$ e $\sin 2\vartheta_M = s_2$, abbiamo

$$U_M^T \mathcal{H}_F U_M = U_M^T \begin{pmatrix} Ac - Bs & As + Bc \\ As + Bc & -Ac + Bs \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Ac^2 - Bcs - As^2 - Bcs & Acs + Bc^2 + Acs - Bs^2 \\ Acs - Bs^2 + Acs + Bc^2 & As^2 + Bcs - Ac^2 + Bcs \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Ac_2 - Bs_2 & As_2 + Bc_2 \\ As_2 + Bc_2 & -Ac_2 + Bs_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$As_2 + Bc_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tan 2\vartheta_M = -\frac{B}{A} = \frac{\Delta m^2 \sin 2\vartheta}{\Delta m^2 \cos 2\vartheta - A_{CC}} = \frac{\tan 2\vartheta}{1 - \frac{A_{CC}}{\Delta m^2 \cos 2\vartheta}} \ .$$

A.4 Svolgimento della (3.22)

$$P_{\nu_\mu \to \nu_\tau} = |\langle \nu_\tau^d | \nu_\mu^s(t) \rangle|^2 =$$

$$= \Bigg| \left[\epsilon_{\tau\mu}^{d*} \cos^2\vartheta + \epsilon_{\mu\tau}^s \sin^2\vartheta + \left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^d\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right)\right) \cos\vartheta \sin\vartheta \right] +$$
$$+ \left[\epsilon_{\tau\mu}^{d*} \sin^2\vartheta + \epsilon_{\mu\tau}^s \cos^2\vartheta - \left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^d\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right)\right) \cos\vartheta \sin\vartheta \right] e^{-i(E_2 - E_1)t} \Bigg|^2$$

$$= \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + 2\mathrm{Re}\left[1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^d\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right) \cos\vartheta \sin\vartheta (\epsilon_{\tau\mu}^{d*} \cos^2\vartheta + \epsilon_{\mu\tau}^s \sin^2\vartheta)\right] +$$
$$+ \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta - 2\mathrm{Re}\left[\left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^d\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right)\right) \cos\vartheta \sin\vartheta (\epsilon_{\tau\mu}^{d*} \sin^2\vartheta + \epsilon_{\mu\tau}^s \cos^2\vartheta)\right] +$$
$$+ 2\mathrm{Re}\Bigg\{ \left[\epsilon_{\tau\mu}^d \cos^2\vartheta + \epsilon_{\mu\tau}^{s*} \sin^2\vartheta + \left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^d\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right)\right) \cos\vartheta \sin\vartheta\right] \cdot$$
$$\cdot \left[\epsilon_{\tau\mu}^{d*} \sin^2\vartheta + \epsilon_{\mu\tau}^s \cos^2\vartheta - \left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\tau\tau}^d\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon_{\mu\mu}^s\right)\right) \cos\vartheta \sin\vartheta\right] e^{-i\frac{\Delta m^2 L}{2E}} \Bigg\}$$

$$= 2\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + 2\cos\vartheta \sin\vartheta \left[\cos^2\vartheta \mathrm{Re}\left(\epsilon_{\tau\mu}^d\right) + \sin^2\vartheta \mathrm{Re}\left(\epsilon_{\mu\tau}^s\right)\right] -$$
$$- 2\cos\vartheta \sin\vartheta \left[\sin^2\vartheta \mathrm{Re}\left(\epsilon_{\tau\mu}^d\right) + \cos^2\vartheta \mathrm{Re}\left(\epsilon_{\mu\tau}^s\right)\right] +$$
$$+ 2\mathrm{Re}\left\{ \cos\vartheta \sin\vartheta [-\cos\vartheta \sin\vartheta + \epsilon_{\tau\mu}^{d*} \sin^2\vartheta + \epsilon_{\mu\tau}^s \cos^2\vartheta - \epsilon_{\tau\mu}^d \cos^2\vartheta - \epsilon_{\mu\tau}^{s*} \sin^2\vartheta] e^{-i\frac{\Delta m^2 L}{2E}} \right\}$$

$$= 2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta + 2\cos\vartheta\sin\vartheta\cos(2\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon^d_{\tau\mu} - \epsilon^s_{\mu\tau}\right) +$$
$$+ \sin(2\vartheta)\Big\{\sin\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right)\left[\cos^2\vartheta\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau}\right) - \sin^2\vartheta\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\tau\mu}\right) + \sin^2\vartheta\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau}\right) -\right.$$
$$\left. - \cos^2\vartheta\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\tau\mu}\right)\right] + \cos\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right)\left[-\cos\vartheta\sin\vartheta + \cos^2\vartheta\mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau}\right) + \sin^2\vartheta\mathrm{Re}\left(\epsilon^d_{\tau\mu}\right) -\right.$$
$$\left.\left. - \sin^2\vartheta\mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau}\right) - \cos^2\vartheta\mathrm{Re}\left(\epsilon^d_{\tau\mu}\right)\right]\right\}$$

$$= 2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta + 2\cos\vartheta\sin\vartheta\cos(2\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon^d_{\tau\mu} - \epsilon^s_{\mu\tau}\right) +$$
$$+ 2\cos\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\left[-\cos\vartheta\sin\vartheta + \cos(2\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right)\right] +$$
$$+ 2\sin\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\ \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right)$$

$$= \sin^2(2\vartheta)\sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) - \sin(4\vartheta)\sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right)\mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right) +$$
$$+ 2\sin\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\ \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right)$$

$$= \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right)\left[\sin^2(2\vartheta) - \sin(4\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right)\right] + \sin\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right)\sin(2\vartheta)\ \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\tau\mu}\right)\ .$$

A.5 Svolgimento della (3.25)

$$P_{\nu_\mu\to\nu_\mu} = |\langle\nu^d_\mu|\nu^s_\mu(t)\rangle|^2 =$$

$$= \Big|\left[\left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\mu}\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\mu\mu}\right)\right)\cos^2\vartheta + \left(\epsilon^{d*}_{\mu\tau} + \epsilon^s_{\mu\tau}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\right] +$$
$$+ \left[\left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\mu}\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\mu\mu}\right)\right)\sin^2\vartheta - \left(\epsilon^{d*}_{\mu\tau} + \epsilon^s_{\mu\tau}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\right]e^{-i\frac{\Delta m^2 L}{2E}}\Big|^2$$

$$= \cos^4\vartheta + 2\cos^3\vartheta\sin\vartheta\ \mathrm{Re}\left[\left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\mu}\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\mu\mu}\right)\right)\left(\epsilon^{d*}_{\mu\tau} + \epsilon^s_{\mu\tau}\right)\right] +$$
$$+ \sin^4\vartheta - 2\cos\vartheta\sin^3\vartheta\ \mathrm{Re}\left[\left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\mu}\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\mu\mu}\right)\right)\left(\epsilon^{d*}_{\mu\tau} + \epsilon^s_{\mu\tau}\right)\right] +$$
$$+ 2\mathrm{Re}\Big\{\left[\left(1 - i\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\mu}\right) + i\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\mu\mu}\right)\right)\cos^2\vartheta + \left(\epsilon^d_{\mu\tau} + \epsilon^{s*}_{\mu\tau}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\right]\cdot$$

$$\cdot \left[\left(1 + i\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\mu}\right) - i\mathrm{Im}\left(\epsilon^d_{\mu\mu}\right)\right)\sin^2\vartheta - (\epsilon^{d*}_{\mu\tau} + \epsilon^s_{\mu\tau})\cos\vartheta\sin\vartheta\right] e^{-i\frac{\Delta m^2 L}{2E}} \Bigg\}$$

$$= \cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta + 2\cos\vartheta\sin\vartheta\cos(2\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon^d_{\mu\tau} + \epsilon^s_{\mu\tau}\right) +$$
$$+ 2\mathrm{Re}\left\{[\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta - \cos^3\vartheta\sin\vartheta(\epsilon^{d*}_{\mu\tau} + \epsilon^s_{\mu\tau}) + \cos\vartheta\sin^3\vartheta(\epsilon^d_{\mu\tau} + \epsilon^{s*}_{\mu\tau})]e^{-i\frac{\Delta m^2 L}{2E}}\right\}$$

$$= \cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta + \sin(2\vartheta)\cos(2\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon^d_{\mu\tau} + \epsilon^s_{\mu\tau}\right) +$$
$$+ 2\cos\frac{\Delta m^2 L}{2E}[\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta - \cos^3\vartheta s\mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^d_{\mu\tau}\right) + \cos\vartheta\sin^3\vartheta\mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^d_{\mu\tau}\right)]+$$
$$+ 2\sin\frac{\Delta m^2 L}{2E}[-\cos^3\vartheta\sin\vartheta\ \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\mu\tau}\right) - \cos\vartheta\sin^3\vartheta\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\mu\tau}\right)]$$

$$= \cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta + \sin(2\vartheta)\cos(2\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon^d_{\mu\tau} + \epsilon^s_{\mu\tau}\right) + 2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\cos\frac{\Delta m^2 L}{2E} -$$
$$- \cos(2\vartheta)\sin(2\vartheta)\cos\frac{\Delta m^2 L}{2E}\ \mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^d_{\mu\tau}\right) - \sin(\frac{\Delta m^2 L}{2E})\sin(2\vartheta)\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\mu\tau}\right)$$

$$= 1 - 2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta + 2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\cos\frac{\Delta m^2 L}{2E} + \sin(4\vartheta)\sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right)\mathrm{Re}\left(\epsilon^d_{\mu\tau} + \epsilon^s_{\mu\tau}\right) -$$
$$- \sin(\frac{\Delta m^2 L}{2E})\sin(2\vartheta)\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\mu\tau}\right)$$

$$= 1 - \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right)[\sin^2(2\vartheta) - \sin(4\vartheta)\mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^d_{\mu\tau}\right)] - \sin(\frac{\Delta m^2 L}{2E})\sin(2\vartheta)\mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\mu\tau}\right) \ .$$

A.6 Svolgimento della (3.42)

$$P^{x\ll 1}_{\nu_\mu\to\nu_\mu} =$$

$$= (1 - x^2 + \cos^2 2\vartheta x^2)+$$
$$+ 2\mathrm{Re}\left\{\left(1 - \frac{x^2}{2} - ix\cos 2\vartheta\right)\left[-ix\sin 2\vartheta(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^{d*}_{\mu\tau}) - x\frac{L}{2}\Sigma - i\frac{L}{2}\sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\right]\right\}$$

$$= (1 - \sin^2 2\vartheta x^2) + 2\mathrm{Re}\Big[-ix\sin 2\vartheta(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^{d*}_{\mu\tau}) - x\frac{L}{2}\Sigma -$$
$$- x\cos 2\vartheta\frac{L}{2}\sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right) - i\frac{L}{2}\sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\Big]$$

$$= (1 - \sin^2 2\vartheta x^2) + 2\Bigg\{ x \sin 2\vartheta \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\mu\tau}\right) -$$

$$- x\frac{L}{2}\sum_f A_f \left[2\sin 2\vartheta \epsilon^{mf}_{\mu\tau} - \cos 2\vartheta\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\right] - x\cos 2\vartheta \frac{L}{2}\sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\Bigg\}$$

$$= 1 - x\sin 2\vartheta \left(x \sin 2\vartheta + 2L\sum_f A_f \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right)\right) + 2x\sin 2\vartheta \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\mu\tau}\right) \ .$$

A.7 Svolgimento della (3.45)

$$P_{\nu_\mu \to \nu_\mu} =$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 2\vartheta \sin^2 x + 2\mathrm{Re}\Bigg\{(\cos x - i\cos 2\vartheta \sin x)\cdot$$

$$\cdot\Bigg[-\Sigma\left(\sin x\frac{L}{2} + i\cos 2\vartheta\frac{L}{2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)\right) -$$

$$- i\frac{2E}{\Delta m^2}\sin x\sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right) - i\sin 2\vartheta \sin x\left(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^{d*}_{\mu\tau}\right)\Bigg]\Bigg\}$$

$$= 1 - \sin^2 2\vartheta \sin^2 x - 2\Bigg\{\cos x\Bigg[\mathrm{Re}(\Sigma)\sin x\frac{L}{2} - \mathrm{Im}(\Sigma)\left(\cos 2\vartheta\frac{L}{2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)\right) -$$

$$- \sin 2\vartheta \sin x \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\mu\tau}\right)\Bigg] + \cos 2\vartheta \sin x\Bigg[\mathrm{Im}(\Sigma)\sin x\frac{L}{2} + \mathrm{Re}(\Sigma)\left(\cos 2\vartheta\frac{L}{2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)\right) +$$

$$+ \frac{2E}{\Delta m^2}\sin x\sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right) + \sin 2\vartheta \sin x \mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^d_{\mu\tau}\right)\Bigg]\Bigg\}$$

$$= 1 - \sin^2 2\vartheta \sin^2 x + \sin 2\vartheta \sin 2x \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\mu\tau}\right) - \sin 4\vartheta \sin^2 x \mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^d_{\mu\tau}\right) -$$

$$- \sin 2x\frac{L}{2}\sum_f A_f\left[2\sin 2\vartheta \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right) - \cos 2\vartheta\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\right] - \cos 2\vartheta\frac{\sin^2 x}{x}L\sum_f A_f\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right) -$$

$$- \sin 4\vartheta L \sin^2 x\sum_f A_f \mathrm{Im}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right) + \cos x \sin 4\vartheta L\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)\sum_f A_f \mathrm{Im}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right) -$$

$$- \cos^2 2\vartheta \sin x L\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)\sum_f A_f\left[2\sin 2\vartheta \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right) - \cos 2\vartheta\left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \sin^2 2\vartheta \sin^2 x + \sin 2\vartheta \sin 2x \mathrm{Im}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} - \epsilon^d_{\mu\tau}\right) - \sin 4\vartheta \sin^2 x \mathrm{Re}\left(\epsilon^s_{\mu\tau} + \epsilon^d_{\mu\tau}\right) - \\
&\quad - \sin 2x \sin 2\vartheta \; L \sum_f A_f \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right) - \\
&\quad - \sin x \cos 2\vartheta \; L \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \sum_f A_f \left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right) + \sin 4\vartheta L \left(\frac{\sin 2x}{2x} - 1\right) \sum_f A_f \mathrm{Im}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right) - \\
&\quad - \cos^2 2\vartheta \sin x L \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \sum_f A_f \left[2 \sin 2\vartheta \mathrm{Re}\left(\epsilon^{mf}_{\mu\tau}\right) - \cos 2\vartheta \left(\epsilon^{mf}_{\mu\mu} - \epsilon^{mf}_{\tau\tau}\right)\right] \; .
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] C. Giunti e C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, Oxford University Press (2007).

[2] J. Kopp, M. Lindner e T. Ota, *Non-standard neutrino interactions in reactor and superbeam experiments*, Phys. Rev. D **77** 013007 (2008).

[3] M.C. Gonzalez-Garcia, Y. Grossman, A. Gusso e Y. Nir, *New CP Violation in Neutrino Oscillations*, Phys. Rev. D **64** 096006 (2001).

[4] T. Kikuchi, H. Minakata e S. Uchinami, *Perturbation Theory of Neutrino Oscillation with Nonstandard Neutrino Interactions*, JHEP **0903** 114 (2009).

[5] F. Capozzi, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino e A. Palazzo, *Neutrino masses and mixings: Status of known and unknown 3ν parameters*, Nuclear Physics B **908** 218-234 (2016).

[6] O. G. Miranda e H. Nunokawa, *Non standard neutrino interactions: current status and future prospects*, New Journal of Physics **17** (2015).

[7] A. Esmaili e A. Y. Smirnov, *Probing Non-Standard Interaction of Neutrinos with IceCube and DeepCore*, JHEP **1306** 026 (2013).

[8] A. Friedland e C. Lunardini, *Test of tau neutrino interactions with atmospheric neutrinos and K2K data*, Phys.Rev. D **72** 053009 (2005).

[9] G. Mitsuka et al. [Super-Kamiokande Collaboration], *Study of Non-Standard Neutrino Interactions with Atmospheric Neutrino Data in Super-Kamiokande I and II*, Phys. Rev. D **84** 072011 (2011).

[10] P. Adamson et al. [MINOS Collaboration], *Search for flavor-changing non-standard neutrino interactions by MINOS*, Phys. Rev. D **88** 072011 (2013).

[11] M. C. Gonzalez Garcia e M. Maltoni, *Determination of matter potential from global analysis of neutrino oscillation data*, JHEP **1309** 152 (2013).

[12] P. Huber, J. Kopp, M. Lindner, M. Rolinec e W. Winter, *From Double Chooz to Triple Chooz - Neutrino Physics at the Chooz Reactor Complex*, JHEP **05** 072 (2006).

[13] K. Abe et al. [Hyper-Kamiokande Working Group], *Letter of Intent: The Hyper-Kamiokande Experiment — Detector Design and Physics Potential —*, arXiv:1109.3262 (2011).

[14] C. Adams et al. [LBNE Collaboration], *The Long-Baseline Neutrino Experiment: Exploring Fundamental Symmetries of the Universe*, arXiv:1307.7335 (2014).

[15] T. Patzak [LAGUNA-LBNO Collaboration], *LAGUNA-LBNO: Large Apparatus studying Grand Unification and Neutrino Astrophysics and Long Baseline Neutrino Oscillations*, J. Phys. Conf. Ser. **375** 042056 (2012).

[16] Y. F. Li, J. Cao, Y. Wang e L. Zhan, *Unambiguous Determination of the Neutrino Mass Hierarchy Using Reactor Neutrinos*, Phys. Rev. D **88** 013008 (2013).

[17] S. B. Kim, *New results from RENO and prospects with RENO-50*, arXiv:1412.2199 (2014).

[18] J. M. Conrad et al., *Precision $\bar{\nu}_e$-electron scattering measurements with IsoDAR to search for new physics*, Phys. Rev. D **89** 072010 (2014).

[19] M. Wurm et al., *The next-generation liquid-scintillator neutrino observatory LENA*, Astropart. Phys. **35** 685 (2012).