

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
Galileo Galilei

Corso di Laurea Triennale in Astronomia

**MODELLI DI INFLAZIONE
CON TERMINE CINETICO CANONICO E NON
E CONFRONTO CON I DATI OSSERVATIVI**

Laureando

Sarah Libanore

Matricola: 1069114

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

ANNO ACCADEMICO 2015/2016

Sommario

Introduzione alla teoria dell'Inflazione.

Confronto dei parametri descrittivi e degli spettri di potenza di modelli di Inflazione caotica nei casi con termine cinetico canonico e potenziale dipendente dal campo in modo quadratico o quartico e in un caso avente termine cinetico non canonico e potenziale esponenziale.

Vincoli ottenuti sul valore di tali parametri dai dati del satellite PLANCK dell'ESA.

Indice

Introduzione	2
1 La Teoria dell'Inflazione	4
1.1 Hot Big Bang Theory	4
1.1.1 Descrizione dell'Universo	4
1.1.2 Problemi e incongruenze con i dati	5
1.2 Il modello dell'Inflazione	7
1.2.1 Risoluzione dei problemi di <i>HBBT</i>	7
1.2.2 Dinamica inflazionaria	8
1.2.3 Tipologie di inflazione	10
1.2.4 Perturbazioni del campo	11
1.2.5 Uscita dall'inflazione	11
2 Analisi dei parametri inflazionari	13
2.1 Condizioni di <i>slow roll</i>	13
2.2 Studio della dinamica inflazionaria	14
2.2.1 Potenziale quadratico	14
2.2.2 Potenziale quartico	15
2.2.3 PLI canonica	16
2.2.4 PLI non canonica	17
2.3 <i>E-folding number</i>	19
2.3.1 Potenziale quadratico	20
2.3.2 Potenziale quartico	20
2.3.3 PLI canonica	20
2.3.4 PLI non canonica	20
2.4 Spettri di potenza delle fluttuazioni	21
2.4.1 Potenziale quadratico	23
2.4.2 Potenziale quartico	24
2.4.3 PLI canonica	25
2.4.4 PLI non canonica	25
2.5 Uscita dall'inflazione	26
2.5.1 Potenziale quadratico	26
2.5.2 Potenziale quartico	27
2.5.3 PLI canonica	27
2.5.4 PLI non canonica	27
2.6 Confronto tra i modelli presentati	29
3 Vincoli osservativi	33
3.1 Il satellite PLANCK	33
3.1.1 Principali ambiti di indagine	33
3.1.2 Stime dei parametri inflazionari	35
3.1.3 Ricostruzione del potenziale e dello spettro	37
3.2 Confronto tra dati e modelli	37
3.2.1 Potenziale quadratico	38
3.2.2 Potenziale quartico	39
3.2.3 PLI canonica	39
3.2.4 PLI non canonica	40
Conclusioni	40
Bibliografia	41

Introduzione

La Cosmologia rappresenta la branca dell'Astronomia dedicata allo studio dell'Universo nel suo insieme: essa ne analizza la geometria, ne modella le strutture, ne indaga l'origine e ne studia l'evoluzione, facendo convergere conoscenze legate alla fisica delle particelle, alla Relatività Generale, alla teoria dei campi, all'astrofisica delle alte energie e a tantissimi altri ambiti del sapere umano.

Tra gli argomenti di ricerca più attivi di questa disciplina, vi è oggi l'elaborazione della teoria dell'Inflazione: essa si propone di descrivere le primissime epoche cosmiche, nelle quali l'intero spazio ha subito un'improvvisa e accelerata espansione. Nonostante la struttura generale sia già stata formulata, non è ancora stato scelto un modello preciso per parametrizzare questa fase evolutiva: sono state avanzate molteplici proposte, le quali sono tutt'oggi confrontate sia a livello teorico sia con riferimento ai dati raccolti grazie a molteplici osservazioni sia da terra sia dallo spazio.

In questo elaborato ci si propone di presentare la teoria dell'Inflazione, confrontando tra loro e con i più recenti dati osservativi alcuni tra i modelli esistenti. In particolare

- nel capitolo 1 si presenta la precedente teoria dell'Hot Big Bang e se ne evidenziano i problemi che hanno portato alla proposta della teoria inflazionaria. Si descrivono poi le caratteristiche principali di quest'ultima, relative in particolare alla dinamica che essa prevede, all'esistenza in essa di uno spettro di perturbazioni e alla necessità di uscita dalla fase che essa parametrizza. Si presentano inoltre le principali tipologie di modelli che sono state introdotte negli anni.
- nel capitolo 2 si analizzano alcuni dei parametri descrittivi dell'Inflazione, con particolare riferimento alla dinamica, allo spettro di perturbazioni e all'uscita da essa. Ognuno di tali parametri è approfondito in riferimento a quattro modelli teorici che vengono confrontati a fine capitolo. Nello studio proposto, si utilizzano diverse approssimazioni, in modo da rendere più semplice e più scorrevole la trattazione.
- nel capitolo 3 si presentano i risultati relativi alle osservazioni del satellite PLANCK dell'ESA, con particolare riferimento ai vincoli che essi forniscono per i parametri inflazionari. Questi vengono poi confrontati con i modelli analizzati in precedenza, in modo tale da poterne valutare la validità.

Scopo dello scritto è quello di approfondire le basi necessarie per questo ambito della ricerca, evidenziando come essa si sviluppi grazie a progressivi aggiusta-

menti e mediante il contributo di molteplici lavori. Al momento non è ancora possibile indicare se esista un modello che possa essere considerato valido per descrivere completamente l'Inflazione: le diverse formulazioni proposte sono tutte sottoposte a prove e correzioni, in modo tale che in futuro esse possano convergere alla creazione di un unico paradigma inflazionario.

Capitolo 1

La Teoria dell'Inflazione

1.1 Hot Big Bang Theory

La cosmologia ha subito un notevole sviluppo nel Novecento, grazie all'enorme quantità di nuove scoperte e di dati raccolti: lo sviluppo di nuove tecnologie, gli strumenti via via più precisi, la facilità sempre maggiore della comunicazione tra gruppi di ricerca diversi hanno permesso a questo ramo dell'astronomia di strutturarsi e di elaborare i primi modelli per la spiegazione della struttura, della nascita e dell'evoluzione dell'Universo Locale e a grande scala. Il risultato finale di quegli anni di ricerche, dibattiti, smentite e riconferme è noto come teoria del Big Bang caldo *HBBT*: esso presenta una descrizione della geometria dello spaziotempo fondata sulla Relatività Generale e permette di inquadrare la maggior parte delle informazioni raccolte con le osservazioni in un'accurata cornice teorica.

1.1.1 Descrizione dell'Universo

HBBT si fonda su quello che è noto come principio cosmologico: l'Universo deve apparire identico a tutti gli osservatori comoventi in uno stesso tempo cosmico, pertanto esso deve essere omogeneo e isotropo. La sua geometria è descritta dalla cosiddetta metrica di Robertson-Walker:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.1)$$

in cui ds è l'intervallo spaziotemporale, t il tempo cosmico, ovvero il tempo proprio del sistema comoving, (r, θ, ϕ) le componenti polari della coordinata spaziale e k la costante di curvatura, la quale può essere riscalata in modo tale da valere -1 nel caso di Universo aperto, 0 nel caso piatto, $+1$ nel caso chiuso. $a(t)$ è invece il fattore di scala che permette di trasformare le coordinate comoving (r, θ, ϕ) definite sul substrato cosmico nelle coordinate variabili in funzione dell'espansione cosmica.

Quest'ultima è descritta tramite le equazioni della dinamica cosmica:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H^2 = \frac{8\pi}{3m_p^2}\rho - \frac{k}{a^2} & \text{equazione di Friedmann} \\ \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 & \text{equazione di continuità per un fluido} \\ H = \frac{\dot{a}}{a} & \text{parametro di Hubble} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

dove $\rho(t)$ rappresenta la densità di energia o di materia a seconda di quale componente domini l'espansione, $p(t)$ la pressione e $m_p = 1.22 \cdot 10^{29} \text{GeV}$ la massa-energia di Planck. Scegliendo di utilizzare le unità naturali $c = 1$, $\hbar = 1$, il valore di quest'ultima è legato a quello della Costante di Gravitazione Universale dall'espressione $G = m_p^{-2}$. Con $\dot{}$ è indicata la derivata rispetto al tempo d/dt . Queste equazioni possono essere riscritte anche utilizzando i tensori di Riemann e di energia-momento, in modo da ottenere le equazioni di Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$.

Combinando le equazioni 1.2, è possibile ottenere:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3m_p^2}(\rho + 3p) \quad (1.3)$$

È utile definire il parametro di densità $\Omega = \frac{8\pi}{3m_p^2} \frac{\rho}{H^2}$: esso può definito in relazione sia alla densità totale, sia alla densità delle varie componenti (come ad esempio radiazione, materia, energia oscura).

Ω , inserito nell'equazione di Friedmann presentata in 1.2, fornisce la relazione

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2} \quad (1.4)$$

HBBT, specificate le seguenti condizioni iniziali (cfr [4])

- equilibrio termodinamico
- $\Omega(t_i) \simeq 1$
- $T_i \simeq 10^{12} K$
- asimmetria barionica
- spettro di potenza delle fluttuazioni di densità

permette di dare una spiegazione a numerosi dati osservativi tra cui l'espansione dell'Universo, lo spettro della radiazione CMB, l'esistenza di una strutturazione a grande scala, l'età delle strutture cosmiche più antiche, e, tramite l'elaborazione di un modello di nucleosintesi, l'abbondanza di elementi leggeri.

1.1.2 Problemi e incongruenze con i dati

Nonostante l'accuratezza di questi risultati, *HBBT* introduce alcune questioni che necessitano, per essere risolte, della modifica di almeno una parte del modello.

Innanzitutto, un primo problema è legato al valore di Ω : dalle misure dinamiche ad esso connesse, si stima che il suo ordine di grandezza debba essere attorno ad 1; risolvendo l'equazione (1.3) nei casi dominati dalla componente radiativa (in cui $\rho \propto a^{-4} \Rightarrow a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$) o dalla componente materiale (per cui $\rho \propto a^{-3} \Rightarrow a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$), si nota però che $\ddot{a} < 0$. Ciò, inserito nell'equazione (1.4), implica che $\Omega = 1$ sia un punto di equilibrio instabile e durante l'espansione Ω si allontana da 1, dal momento che $a^2 H^2$ decresce.

Una seconda questione è legata all'elevato grado di omogeneità misurata nella CMB, il quale presuppone che sulla superficie di ultimo scattering fosse presente una condizione di equilibrio termodinamico. Esso viene raggiunto tramite le interazioni che possono verificarsi tra le particelle nelle zone in cui vi sia connessione causale: definito l'orizzonte di una particella come la superficie sferica centrata in essa e avente raggio $R_H(t) = a(t) \int_{t_*}^t \frac{1}{a(t')} dt'$, detto t_* il momento del Big Bang. Si ha che solo eventi avvenuti all'interno di esso possono influenzare la dinamica della particella presa in considerazione, in quanto R_H è la distanza percorsa da una particella avente velocità pari a quella della luce man mano che l'Universo si espande. La dimensione dell'orizzonte di particella è dunque quella delle zone causalmente connesse in una certa era.

La dimensione delle aree di superficie di ultimo scattering in cui l'equilibrio termodinamico è verificato è pertanto $a(t_{rec}) \int_{t_*}^{t_{rec}} \frac{1}{a(t)} dt \ll a(t_0) \int_{t_{rec}}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt$ con t_{rec} il momento dell'emissione e t_0 il tempo cosmico attuale: l'ultima equazione è ottenuta considerando come evolve il fattore di scala. Manca quindi una spiegazione alla forte termalizzazione della CMB, in quanto le particelle che oggi occupano l'Universo osservabile non possono aver comunicato prima dell'emissione della radiazione.

Per lo stesso motivo, anche le disomogeneità della CMB non sono spiegabili: le perturbazioni da cui le strutture dell'Universo (galassie in particolare) dovrebbero essersi originate, sono distribuite su una scala troppo elevata per essersi formate prima dell'emissione della radiazione.

È inoltre presente un'incongruenza tra quanto viene osservato e ciò che prevede la teoria: si suppone che nella *radiation dominated era* (epoca cosmica fino a $t \sim 10^4 yr$ in cui densità e pressione sono determinate in prima approssimazione dalla sola componente relativistica), a seguito della rottura di simmetrie preesistenti si siano formati dei difetti topologici, come i monopoli magnetici. Essi, essendo dotati di massa, avrebbero partecipato all'espansione più lentamente della radiazione e sarebbero in questo modo diventati ben presto la componente dinamica dominante. Questo però contrasta sia con la mancanza di osservazioni di tali particelle sia con la durata stimata per la *radiation dominated era*, la quale dovrebbe essere accorciata nel caso in cui esse si sostituissero alla radiazione nel guidare l'espansione.

I cosiddetti *flatness problem*, *horizon problem* e *relic particle problem* possono essere spiegati all'interno della *HBBT* solo introducendo delle vincolanti condizioni iniziali. In particolare, si dovrebbe avere $|\Omega - 1| < \mathcal{O}(10^{-16})$ al tempo della nucleosintesi primordiale $t \sim 1s$ (cfr [6]); lo spettro di densità per ottenere la termalizzazione e, allo stesso tempo, le irregolarità necessarie per la formazione delle strutture ha un limitato grado di libertà; i difetti topologici dovrebbero essere in qualche modo "diluiti", in modo tale da non poter influenzare la dinamica e da non poter essere osservati al tempo attuale.

1.2 Il modello dell'Inflazione

Una prima soluzione per risolvere i problemi presentati in 1.1.2 ampliando il modello *HBBT* fu fornita da Guth nel 1981 e prevede l'introduzione di una fase di espansione accelerata, detta inflazione. Essa non si sostituisce ad *HBBT*, ma inserisce una nuova dinamica nei primi istanti di vita dell'Universo; questa evolve poi in modo tale da restituire un'evoluzione descrivibile con *HBBT* e corredata con condizioni a contorno tali da dare origine ai vincoli precedentemente descritti.

Sebbene la spiegazione fisica di questa fase e il modello utilizzato per descriverla siano oggi molto diversi da quelli inizialmente formulati, l'inflazione è diventata un tassello fondamentale nell'interpretazione della storia dell'Universo ed è uno dei campi di studio più vivi della cosmologia contemporanea.

1.2.1 Risoluzione dei problemi di *HBBT*

L'inflazione prevede che, per un certo intervallo temporale, il fattore $a(t)$ si sia evoluto con $\ddot{a}(t) > 0$: da (1.2) questo implica $\frac{d(1/aH)}{dt} < 0$ e da (1.3) $p < -\frac{p}{3}$.

La piattezza dell'Universo di oggi può essere in questo modo immediatamente spiegata: l'aumento di aH determina in (1.4) un progressivo rapido avvicinamento di Ω al valore 1. Se tale avvicinamento è sufficientemente elevato, la fase di allontanamento successiva all'inflazione prevista da *HBBT* potrà comunque implicare $\Omega \simeq 1$ al tempo attuale. Un'ulteriore espansione dell'Universo porterà, nel futuro, ad un allontanamento da questo valore.

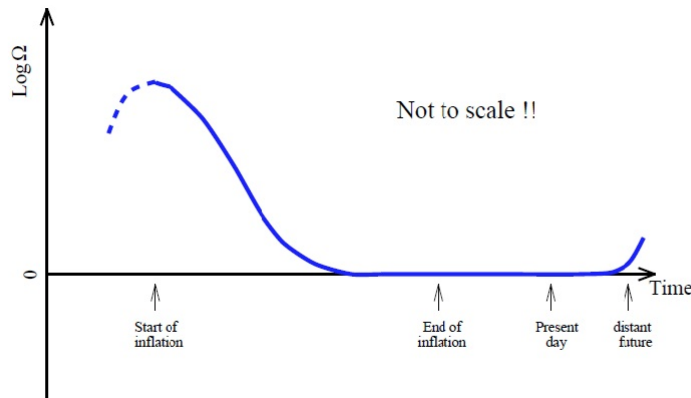


Figura 1.1: Possibile evoluzione di Ω . La parte tratteggiata mostra il periodo precedente all'inflazione, in cui la possibile evoluzione del termine non può essere studiata. Durante l'inflazione Ω è portata estremamente vicino al valore 1, in modo tale che solo in un lontano futuro l'espansione di *HBBT* determinerà un allontanamento da esso. Figura tratta da [6]

Anche il problema dell'orizzonte trova soluzione se si riescono a creare le condizioni per cui $a(t_{rec}) \int_{t_*}^{t_{rec}} \frac{1}{a(t)} dt \gg a(t_0) \int_{t_{rec}}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt$: questo può essere interpretato dicendo che la luce ha attraversato una distanza maggiore prima

dell'emissione della CMB rispetto a quanta ne abbia percorsa da quel momento ad oggi.

Alternativamente, è possibile analizzare la situazione valutando come varia la dimensione dell'orizzonte delle particelle R_H rispetto a quella del raggio di Hubble $R_c = H^{-1}$, rappresentante la distanza in un dato istante di un oggetto comoving con l'espansione rispetto all'osservatore. Durante l'inflazione, R_c cresce più lentamente di R_H , portando la zona in cui vi è connessione causale ad avere scala maggiore di quella del raggio di Hubble; in seguito, la crescita di R_c torna ad essere più rapida, come previsto da *HBBT*; questo può essere dimostrato risolvendo le equazioni (1.2) inserendo gli opportuni valori per ρ . Si ha dunque che una zona in cui è verificato l'equilibrio termodinamico può assumere nell'inflazione dimensione maggiore dell'attuale Universo osservabile e in questo modo è possibile giustificare la forte omogeneità e isotropia della CMB.

Allo stesso modo, è possibile spiegare le zone di anisotropia come fluttuazioni quantistiche casuali presenti in R_H , le quali sono state portate dall'espansione accelerata ad occupare l'intera regione dell'Universo attuale.

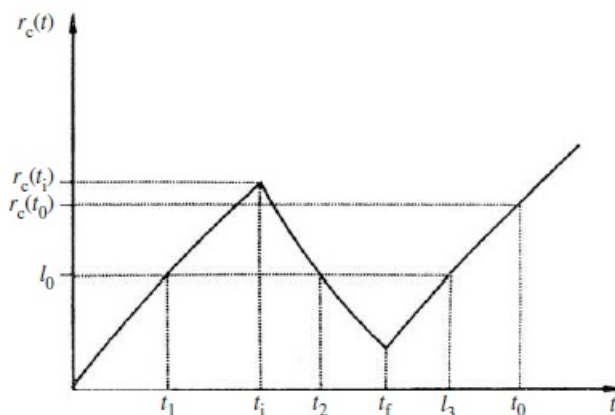


Figura 1.2: Evoluzione del raggio di Hubble comoving $r_c = R_c(a_0/a)$, con a_0 fattore di scala attuale, rispetto ad una fissata dimensione comoving dell'orizzonte di particella l_0 . L'infazione si verifica tra t_i e t_f . Negli intervalli $t_1 < t < t_2$ e $t > t_3$, l_0 è interno al raggio di Hubble. In $t_2 < t < t_3$ invece la dimensione di l_0 è superiore a quella dell'Universo osservabile: questo è l'intervallo che permette di giustificare l'isotropia della CMB come descritto nel testo. In *HBBT* invece l_0 entrerebbe in r_c all'istante t_0 e non potrebbe più uscirne, pertanto zone non in contatto causale a quell'epoca non potrebbero mai diventarlo e la termalizzazione sarebbe impossibile. Figura tratta da [4]

Per quanto riguarda la presenza delle *relic particle*, nella fase di inflazione la loro densità diminuisce più velocemente della densità di energia: esse risulteranno quindi non osservabili oggi perchè estremamente diluite nell'Universo.

1.2.2 Dinamica inflazionaria

L'idea alla base del modello di espansione inflazionaria è l'esistenza di un campo scalare omogeneo ϕ , detto inflatone: nei primi istanti di vita dell'Univer-

so, la densità di energia ad esso associata rappresenta il contributo dominante per la dinamica.

I campi scalari sono largamente utilizzati per descrivere le particelle di spin zero e sono spesso associati alla rottura spontanea di una simmetria con conseguente transizione di fase; le leggi del moto associate ad essi possono essere ricavate studiando l'integrale sul tempo della Lagrangiana $\mathcal{L} = K(\phi, \dot{\phi}, t) - V(\phi, T)$ in modo tale da ottenere il valore di aspettazione di ϕ . Nella precedente equazione, $K(\phi, \dot{\phi}, t)$ rappresenta il termine cinetico mentre $V(\phi, T)$ è il potenziale efficace associato al campo e dipendente dalla temperatura T : esso rappresenta una forma di energia di legame interna (crf [6], [4]). Allo stato attuale della ricerca, esistono diverse forme per il termine cinetico e il potenziale $V(\phi)$, distinguibili tramite un set di parametri vincolabili tramite le osservazioni; alcune tipologie verranno presentate nel paragrafo 1.2.3 e analizzate nel capitolo 2.

È possibile, in alternativa al procedimento descritto, confrontare il tensore energia-impulso di Einstein del campo con quello di un fluido perfetto in modo tale da ottenere le espressioni per la densità di energia effettiva e per la pressione del campo:

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \\ p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \end{cases} \quad (1.5)$$

Inserendo le espressioni (1.5) nell'equazione di continuità del fluido riportata in (1.2) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}2\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'(\phi)\dot{\phi} + 3H\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right) &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\phi}\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}^2 + V'(\phi)\dot{\phi} &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

dove con ' è indicata la derivata rispetto a ϕ , $d/d\phi$. Considerando un Universo piatto in cui $k = 0$, le equazioni per descrivere la dinamica cosmica possono quindi essere espresse come:

$$\begin{cases} H^2 = \frac{8\pi}{3m_p^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

È possibile creare un'analogia tra le equazioni (1.7) e quelle della dinamica di una particella sottoposta ad una forza $-\partial V/\partial\phi$ frenata da un termine viscoso proporzionale a $3H$.

Essendo $\ddot{a} < 0 \Leftrightarrow p < -\frac{\rho}{3}$ da (1.3), si ottiene che durante l'inflazione $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$: il termine potenziale domina rispetto a quello cinetico, pertanto è possibile utilizzare una serie di approssimazioni denominate *slow roll* (si veda in dettaglio il paragrafo 2.1) per studiare più facilmente la dinamica dell'espansione.

1.2.3 Tipologie di inflazione

Nel corso degli anni sono stati proposti diversi modelli di inflazione, i quali differiscono sia per il loro termine cinetico sia per il termine potenziale.

Il primo modello inflazionario proposto da Guth, noto come *Old inflation*, supponeva che avvenisse una transizione di fase in piccole bolle, sottoposte poi ad una fase di accrescimento. Uno studio di tale scenario mostra però che l'ingrandimento non sarebbe mai stato sufficiente per permettere alla bolla di raggiungere le dimensioni dell'Universo oggi osservabile; allo stesso tempo, l'espansione sarebbe stata così rapida da impedire a più bolle di fondersi fino a raggiungere tale dimensione. La *Old inflation* dà dunque vita ad un Universo altamente disomogeneo, in aperto contrasto con i dati raccolti grazie alla CMB: per questo motivo, è stata presto abbandonata (cfr [4]).

I molteplici modelli oggi esistenti sono suddivisi in più classi:

- *Type I models*: il valore iniziale del campo ϕ è elevato e diminuisce via via che il potenziale $V(\phi)$ evolve verso il suo minimo, nel quale l'inflazione ha termine
- *Type II models*: il valore iniziale del campo ϕ è piccolo e aumenta via via che il potenziale $V(\phi)$ evolve verso il suo minimo, nel quale l'inflazione ha termine
- *Type III models*: detti anche modelli ibridi, prevedono che il termine dell'inflazione sia dovuto alla presenza di un secondo campo scalare ψ che diventa via via dominante rispetto a ϕ

Vengono indicati come canonici i modelli in cui la Lagrangiana assume la semplice forma $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$; i modelli non canonici presentano invece termine cinetico più complesso.

All'interno dei *Type I* assumono una grande importanza i modelli di inflazione caotica: essi prevedono l'esistenza di un singolo campo ϕ avente potenziale $V(\phi)$ che in certe zone soddisfa le condizioni *slow roll* (si veda 2.1) e che possiede un minimo in cui l'inflazione termina. Caratteristica fondamentale di questi modelli è che le condizioni iniziali su ϕ sono distribuite in modo casuale: una piccola zona in cui il valore di ϕ è sufficientemente adeguato può dar vita all'Universo oggi osservabile.

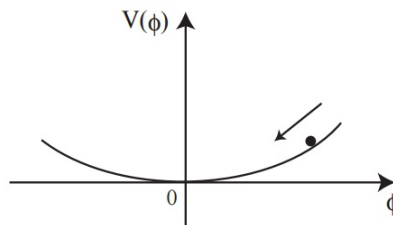


Figura 1.3: Rappresentazione schematica di un caso di potenziale per un modello di inflazione caotica: il valore di ϕ diminuisce via via che il potenziale si avvicina al minimo. Figura tratta da [11]

Esistono diversi tipi di inflazione caotica: nel capitolo 2 verranno analizzati due casi polinomiali, aventi rispettivamente potenziale quadratico $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ e quartico $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4$, e un caso di inflazione *power-law* (PLI) avente potenziale esponenziale $V(\phi) = V_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{2}{q}}\left(\frac{\phi}{m_p}\right)\right]$, proposto per la prima volta in [8].

Verrà poi evidenziato come i modelli PLI siano incompleti senza un opportuno meccanismo di uscita (si veda il paragrafo 1.2.5): verrà dunque studiato anche il caso di inflazione ibrida proposto nell'articolo [10], avente termine cinetico non canonico $X\left(\frac{X}{m_p^4}\right)^{\alpha-1}$ con $X = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ e potenziale esponenziale.

1.2.4 Perturbazioni del campo

La teoria dell'inflazione fornisce uno strumento per ricavare gli spettri di potenza delle perturbazioni di densità necessari a spiegare da un lato la formazione delle strutture a grande scala, come per esempio le galassie, e dall'altro la presenza delle anisotropie nella CMB.

Come anticipato nel paragrafo 1.2.1, l'origine delle perturbazioni è da ricercare nel principio d'indeterminazione della meccanica quantistica: considerata la dimensione comoving di un'irregolarità, essa si trova inizialmente all'interno del raggio di Hubble R_c ; durante la fase di inflazione, si assiste inizialmente all'uscita da R_c e successivamente al rientro in esso: in questo modo tutte le perturbazioni, generate quando ancora vi è legame causale, rimangono "congelate" nel momento in cui esso cessa di essere presente e, in seguito, diventano visibili su grande scala perchè rientrano nella zona di Universo osservabile.

Uno studio accurato delle perturbazioni generate nella fase di inflazione può essere trovato in [11]: analizzando come un campo perturbato $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ di parte omogenea ϕ_0 e fluttuazioni $\delta\phi$ modifica la metrica di Robertson-Walker e le equazioni di Einstein, è possibile evidenziare l'esistenza di due diversi spettri, quello di densità (perturbazioni scalari) e quello legato alle onde gravitazionali (perturbazioni tensoriali). Quest'ultimo è trascurato in genere negli studi delle strutture a grande scala, mentre può fornire ulteriori anisotropie nella CMB analizzata su grandi scale angolari.

L'andamento dell'ampiezza delle fluttuazioni non è descrivibile in modo analitico, se non nei soli casi PLI, e può essere studiato tramite l'analisi di Fourier.

1.2.5 Uscita dall'inflazione

Per poter essere considerato accettabile, un modello inflazionario deve comprendere al proprio interno un meccanismo tale da poter consentire il passaggio, dopo un certo intervallo temporale, alle condizioni dinamiche di *HBBT*. Ciò implica la necessità di una decelerazione dell'espansione: essa risulta immediatamente implicata in alcune formulazioni, mentre in altre dev'essere costruita mediante l'inserimento di un secondo campo scalare. Questo problema si verifica, per esempio, nei modelli PLI: si può allora considerare che il potenziale $V(\phi)$ approssimi nella fase inflazionaria un potenziale più generale, nel quale una seconda componente risulta dominante dopo un certo tempo. In questo

modo, è possibile consentire il passaggio alla *radiation e matter dominated era* successive (cfr [10]).

Nella fase di uscita dall'inflazione, l'Universo vive una fase di *reheating*: in prossimità del minimo di potenziale, l'effetto di smorzamento che aveva garantito le condizioni di *slow roll* (si veda paragrafo 2.1) diminuisce e il campo scalare inizia ad oscillare rapidamente intorno ad esso (è possibile visualizzare tale situazione in figura 1.3). In questa fase, l'energia potenziale di ϕ viene trasferita alla radiazione e l'Universo viene termalizzato; nei primi momenti il processo è esplosivo e implica la creazione di particelle di materia. È necessario allora modellare il *reheating* in modo tale da impedire una nuova formazione delle *relic particles* che erano state in precedenza disperse: numerosi studi sono oggi attivi in questo campo, in attiva collaborazione tra cosmologia e fisica particellare.

Capitolo 2

Analisi dei parametri inflazionari

I vari modelli che nel tempo sono stati proposti per descrivere la dinamica inflazionaria, possono essere caratterizzati grazie ad una serie di parametri descrittivi delle diverse proprietà che la teoria prevede. Essi sono particolarmente utili sia in quanto permettono un confronto tra i diversi andamenti teorici, sia perchè costituiscono degli osservabili con cui è possibile valutare la validità di questi ultimi.

2.1 Condizioni di *slow roll*

Per risolvere con maggior facilità le equazioni della dinamica dell'inflazione, è possibile considerare la condizione di *slow roll*: il valore del campo ϕ evolve molto lentamente al variare di $V(\phi)$, in quanto l'energia cinetica risulta trascurabile se confrontata con quella potenziale. In particolare, ci si pone nella situazione in cui

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \\ \ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \end{cases} \quad (2.1)$$

in modo tale da ridurre le espressioni (1.7) a
$$\begin{cases} H^2 \simeq \frac{8\pi}{3m_p^2} V(\phi) \\ 3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi) \end{cases}$$

Le condizioni di *slow roll* possono essere studiate definendo i parametri

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{m_p^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \\ \eta = \frac{m_p^2}{8\pi} \left(\frac{V''}{V} \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

dove ϵ definisce la forma del potenziale, mentre η ne definisce la curvatura (cfr [6]). Confrontando le equazioni (2.1) con (2.2) si può dedurre che

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{m_p^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \\ &= \frac{m_p^2}{16\pi} \left(\frac{-3H\dot{\phi}8\pi}{3m_p^2 H^2} \right) = \frac{4\pi\dot{\phi}^2}{m_p^2 H^2} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \frac{1}{3V} \\ &\ll 1\end{aligned}\quad (2.3)$$

e, similmente, $|\eta| \ll 1$. Queste condizioni sono necessarie (ma non sufficienti) a garantire che l'inflazione proceda in condizioni di *slow roll*.

È possibile verificare che le condizioni precedenti derivano direttamente dall'ipotesi di inflazione: essendo $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2$, posto $\ddot{a} > 0$ si

ha che (2.3) discende da $-\frac{\dot{H}}{H^2} < 1$ una volta sostituite le espressioni ottenute da (2.1) e (2.2). La validità delle condizioni di *slow roll* è dunque sufficiente per l'attuarsi dell'inflazione; essa non è però una condizione strettamente necessaria, nonostante venga spesso presupposta.

2.2 Studio della dinamica inflazionaria

2.2.1 Potenziale quadratico

Uno dei casi più semplici di inflazione caotica prevede l'utilizzo di un termine potenziale di tipo quadratico

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.4)$$

dove m è la massa, ovvero una proprietà intrinseca, del campo scalare.

I parametri di *slow roll* (2.2) si riducono a $\epsilon = \frac{m_p^2}{16\pi} \left(\frac{m^2 \phi}{\frac{1}{2} m^2 \phi^2} \right)^2 = \frac{m_p^2}{4\pi \phi^2}$ e $\eta = \frac{m_p^2}{8\pi} \frac{m^2}{\frac{1}{2} m^2 \phi^2} = \epsilon$. Quando $\epsilon = \eta \ll 1$ risulta semplice studiare l'andamento del campo medio ϕ in funzione del tempo, in quanto le equazioni (1.7) si riducono a

$$\begin{cases} H^2 = \frac{8\pi}{3m_p^2} \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ 3H\dot{\phi} + m^2 \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H = -\frac{m^2 \phi}{3\dot{\phi}} \\ \frac{m^4 \phi^2}{9\dot{\phi}^2} - \frac{4\pi}{3m_p^2} m^2 \phi^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H = -\frac{m^2 \phi}{3\dot{\phi}} \\ \dot{\phi}^2 = \frac{m^2 m_p^2}{12\pi} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \pm \frac{m m_p}{2\sqrt{3\pi}} \quad (2.6)$$

Integrando l'equazione (2.6) tra $t_* = 0$ e t , scegliendo un valore iniziale per il campo scalare ϕ_i e mantenendo solo il segno $-$ in quanto ϕ deve diminuire

(l'inflazione caotica è una *Type 1*, si veda il paragrafo 1.2.3), si ottiene la legge

$$\phi = \phi_i - \frac{mm_p}{2\sqrt{3\pi}}t \quad (2.7)$$

Dal momento poi che $H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{4\pi}{3m_p^2}m^2\phi^2}$, sostituendo la (2.7) si può ricavare l'andamento del fattore di scala dell'espansione in funzione del tempo cosmico

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \frac{m}{m_p} \phi &= \frac{da}{dt} \frac{1}{a} \\ \int_{a_i}^{a(t)} \frac{da}{a} &= \int_0^t \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \frac{m}{m_p} \left(\phi_i - \frac{mm_p}{2\sqrt{3\pi}}t \right) dt \\ \log a(t) - \log a_i &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \frac{m}{m_p} \phi_i t - \frac{m^2 t^2}{6} \\ a(t) &= a_i \exp \left[2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{m}{m_p} \left(\phi_i t - \frac{mm_p}{4\sqrt{3\pi}} t^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nelle equazioni precedenti e in quelle che seguono, con \log è indicato il logaritmo in base naturale e .

2.2.2 Potenziale quartico

Analogamente a quanto fatto in 2.2.1, è possibile studiare l'andamento del parametro di Hubble e del fattore di scala nel caso di potenziale quartico

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad (2.9)$$

in cui λ rappresenta la proprietà intrinseca al campo e dove i parametri di *slow roll* si possono valutare dalle equazioni (2.2) come $\epsilon = \frac{m_p^2}{\pi\phi^2}$ e $\eta = \frac{3m_p^2}{2\pi\phi^2} = \frac{3}{2}\epsilon$.

Le equazioni per $\phi(t)$ risultano

$$\begin{cases} H^2 = \frac{8\pi}{3m_p^2} \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\ 3H\dot{\phi} + \lambda\phi^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H = -\frac{\lambda\phi^3}{3\dot{\phi}} \\ \frac{\lambda^2\phi^6}{9\dot{\phi}^2} = \frac{8\pi}{3m_p^2} \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \end{cases} \quad \begin{cases} H = -\frac{m^2\phi}{3\dot{\phi}} \\ \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right) = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}}m_p \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow \int_{\phi_i}^{\phi} \frac{d\phi}{\phi} = \int_0^t -\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}}m_p dt \quad \Rightarrow \log \phi - \log \phi_i = -\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}}m_p t \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \phi = \phi_i \exp \left(-\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}}m_p t \right) \quad (2.12)$$

Il segno $-$ è stato scelto affinché l'evoluzione di ϕ sia in accordo con la definizione di *Type I* (si veda il paragrafo 1.2.3).

A differenza di quanto si è ottenuto in 2.2.1, il calcolo dell'evoluzione del fattore di scala $a(t)$, sostituendo alla prima delle equazioni del sistema (2.10) l'espressione (2.12), risulta

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} = H &= \frac{\lambda \phi_i^3 \exp\left(-3\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} m_p t\right)}{3\phi_i \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} m_p \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} m_p t\right)} \\ &= \frac{1}{m_p} \sqrt{\frac{2\lambda\pi}{3}} \phi_i^2 \exp\left(-2\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} m_p t\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{a_i}^{a(t)} \frac{da}{a} &= \int_0^t \frac{1}{m_p} \sqrt{\frac{2\lambda\pi}{3}} \phi_i^2 \exp\left(-2\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} m_p t\right) dt \\ \Rightarrow \log a(t) - \log a_i &= \frac{\pi}{m_p^2} \phi_i^2 \exp\left(-2\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} m_p t\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a(t) = a_i \exp\left[\frac{\pi}{m_p^2} \phi_i^2 \exp\left(-2\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} m_p t\right)\right] \quad (2.14)$$

Il caso di potenziale quartico prevede allora sia per il termine medio del campo ϕ sia per il fattore di scala $a(t)$ una crescita più veloce di quella fornita dal caso di potenziale quadratico.

2.2.3 PLI canonica

Come caso di PLI canonica, si considera il caso avente potenziale analogo a quello poi utilizzato in 2.2.4 in analogia con quanto proposto in [10]. Si ha cioè

$$V(\phi) = V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{\phi}{m_p}\right) \quad (2.15)$$

I parametri (2.2) in questo caso sono $\epsilon = \frac{1}{8q\pi}$, $\eta = \frac{1}{4q\pi} = 2\epsilon$.

Si utilizzano anche questa volta le equazioni *slow roll* per ottenere l'andamento di ϕ

$$\begin{cases} H^2 = \frac{8\pi}{3m_p^2} V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{\phi}{m_p}\right) \\ 3H\dot{\phi} - \frac{1}{m_p} \sqrt{\frac{2}{q}} V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{\phi}{m_p}\right) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} H = \frac{1}{3m_p\dot{\phi}} \sqrt{\frac{2}{q}} V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{\phi}{m_p}\right) \\ \frac{V_0}{3q\dot{\phi}^2} \exp\left(-2\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{\phi}{m_p}\right) = 4\pi \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{\phi}{m_p}\right) \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} H = \frac{1}{3m_p \dot{\phi}} \sqrt{\frac{2}{q}} V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{\phi}{m_p}\right) \\ \dot{\phi} = \frac{V_0}{2\sqrt{3q\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{\phi}{m_p}\right) \end{cases} \quad (2.18)$$

Integrando tra 0 e t , ponendo per semplicità $\phi_i = 0$, si può ottenere

$$\begin{aligned} \int_0^{\phi(t)} \exp\left(\frac{\phi}{\sqrt{2qm_p}}\right) d\phi &= \int_0^t \frac{V_0}{2\sqrt{3q\pi}} dt \\ \Rightarrow \exp\left(\frac{\phi}{\sqrt{2qm_p}}\right) - 1 &= \frac{V_0}{2qm_p\sqrt{6\pi}} t \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\phi}{\sqrt{2qm_p}} &\simeq \log\left(\frac{V_0}{2qm_p\sqrt{6\pi}} t\right) \\ \Rightarrow \phi &\simeq \sqrt{2qm_p} \log\left(\frac{V_0}{2qm_p\sqrt{6\pi}} t\right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sostituendo poi (2.20) nella prima equazione del sistema (2.16) e inglobando le costanti in un unico termine C si può ottenere l'andamento del fattore di scala

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} = H &= C \exp\left[-\frac{1}{2m_p} \sqrt{\frac{2}{q}} \sqrt{2qm_p} \log\left(\frac{V_0}{2\sqrt{6\pi}m_p q} t\right)\right] \\ &= C \frac{2\sqrt{6\pi}m_p q}{V_0} \frac{1}{t} \\ &= C' \frac{q}{t} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{a_i}^{a(t)} \frac{da}{a} &= \int_0^t \frac{q}{t} dt \\ \Rightarrow \log a(t) - \log a_i &= C' \log t^q \\ a(t) &\propto t^q \end{aligned} \quad (2.22)$$

Come è possibile notare confrontando le equazioni (2.20) e (2.22) con quelle ottenute nei casi nei paragrafi 2.2.1 e 2.2.2, la PLI prevede sia per ϕ sia per $a(t)$ una crescita molto più lenta rispetto a quella dei casi con potenziale quadratico e quartico.

2.2.4 PLI non canonica

Per studiare un caso di PLI con termine non canonico, si fa riferimento a quanto proposto in [8]: posto $X = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ viene scelta come Lagrangiana del sistema una generalizzazione di quella standard, definita come

$$\mathcal{L} = X \left(\frac{X}{M^4}\right)^{\alpha-1} - V(\phi) \quad (2.23)$$

con α fattore adimensionale e M di dimensione analoga alla massa; la (2.23) si riduce alla Lagrangiana con termine cinetico canonico nel caso in cui $\alpha = 1$.

È possibile ridefinire le equazioni (1.5) come

$$\begin{cases} \rho = 2X \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \right) - \mathcal{L} \\ p = \mathcal{L} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = 2X \left[\left(\frac{X}{M^4} \right)^{\alpha-1} + (\alpha-1) \frac{X}{M^4} \left(\frac{X}{M^4} \right)^{\alpha-2} \right] - X \left(\frac{X}{M^4} \right)^{\alpha-1} + V(\phi) \\ p = X \left(\frac{X}{M^4} \right)^{\alpha-1} - V(\phi) \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = (2\alpha-1)X \left(\frac{X}{M^4} \right)^{\alpha-1} + V(\phi) \\ p = X \left(\frac{X}{M^4} \right)^{\alpha-1} - V(\phi) \end{cases} \quad (2.26)$$

in cui per il secondo passaggio è stata sostituita l'espressione (2.23).

A differenza di quanto fatto nei paragrafi 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3, gli autori di [10] propongono di assumere in partenza un'evoluzione del fattore di scala di tipo PLI con $a(t) \propto t^q$ e di ricavare partendo da essa il potenziale adatto per ottenere la Lagrangiana (2.23).

Sostituendo dunque le (2.26) alle equazioni che permettono di studiare il fattore di scala, ovvero (1.3) e la prima di (1.7), si ha

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3m_p^2} \rho \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3m_p^2} (\rho + 3p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{3m_p^2 q^2}{8\pi t^2} \\ p = -\frac{m_p^2 q(q-1)}{4\pi t^2} - \frac{\rho}{3} = \frac{2m_p^2 q}{8\pi t^2} - \frac{3q^2 m_p^2}{8\pi t^2} \end{cases} \quad (2.27)$$

L'ultima espressione, definito il parametro $w = \frac{2}{3q} - 1 \Leftrightarrow q = \frac{2}{3(1+w)}$, può essere ridotta a $p = w\rho$.

Sommando tra loro le equazioni del sistema (2.26) e definendo il parametro $\mu = \frac{M}{m_p}$, è possibile ottenere un'espressione per $\dot{\phi}$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(\rho+p)M^{4(\alpha-1)}}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \\ &= \left[\frac{2^\alpha (w+1) 3q m_p^2 M^{4(\alpha-1)}}{8\pi \alpha t^2} \right]^{\frac{1}{2\alpha}} \\ &= m_p^2 \left(\frac{2^\alpha q \mu^{4(\alpha-1)}}{8\pi \alpha} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} (m_p t)^{-\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nel caso in cui $\alpha = 1$, l'espressione (2.28) si ridurrebbe a $\frac{d\phi}{dt} \propto (2q)^{\frac{1}{2}}(m_p t)^{-1}$, pertanto integrando si troverebbe $t(\phi) \propto \exp\left(\frac{\phi}{m_p \sqrt{2q}}\right)$, analogo all'inverso dell'espressione trovata in (2.20).

Sostituendo (2.28) alla seconda espressione di (2.26) si può ottenere il potenziale

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{X^\alpha}{M^{4(\alpha-1)}} - p \\ &= \frac{\mu^{4(\alpha-1)} t^{-2} m^{4\alpha-2}}{M^{4(\alpha-1)}} - w \frac{3m_p^2 q^2}{8\pi t^2} \\ &= \frac{3m_p^4 q^2}{8\pi} \left[\frac{1 - (2\alpha - 1)w}{2\alpha} \right] (m_p t)^{-2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nel caso $\alpha = 1$, sostituendo l'espressione per t si può ritrovare l'andamento $V(\phi) = V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{\phi}{m_p}\right)$ ottenuto in 2.2.3.

Nel caso invece di $\alpha \neq 1$ da (2.28) si può ottenere $\frac{d\phi}{dt} \propto (m_p t)^{-\frac{1}{\alpha}}$ e, integrando e invertendo, $t(\phi) \propto -\phi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$. Sostituendo nella (2.29) si può allora ottenere (cfr [10]) un potenziale con andamento *power law* inverso

$$V(\phi) = V_0 \left(\frac{m_p}{\phi}\right)^s \quad \text{con} \quad s = \frac{2\alpha}{\alpha-1}, V_0 = M^4 \left(\frac{1 - (2\alpha - 1)w}{2\alpha}\right) \left(\frac{s^{2\alpha} (3q)^{2\alpha-1}}{\alpha 6^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (2.30)$$

Il potenziale dipende allora da tre parametri indipendenti: M , $\alpha \Leftrightarrow s$, $q \Leftrightarrow w$. Sostituendo (2.30) e (2.26) nella (2.27) si può verificare che si è in questo modo ottenuto un andamento PLI per $a(t)$.

È infine possibile calcolare anche per questo caso il valore dei parametri di *slow roll*: $\epsilon = \frac{m_p^2}{16\pi} s^2 \phi^{-1}$, $\eta = \frac{m_p^2}{8\pi} s(s+1) \phi^{-2}$ (cfr [10]).

2.3 E-folding number

A seconda del modello adottato e della durata dell'intervallo temporale (t_i, t_f) in cui esso è definito, è possibile descrivere l'ammontare dell'espansione prodotta dall'inflazione tramite il numero di *e-folding*, definito come

$$N = \log \frac{a_f}{a_i} = \int_{t_i}^{t_f} H dt \simeq -\frac{8\pi}{m_p^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi \quad (2.31)$$

dove la seconda espressione è ottenuta integrando $H = \frac{\dot{a}}{a}$ e la successiva è ottenuta dividendo tra loro le equazioni del sistema (1.7) in condizioni di *slow roll*, in modo da ottenere $H = -\frac{8\pi}{3m_p^2} \frac{V}{V'} \frac{3d\phi}{dt}$.

Tale parametro è molto utile per un primo confronto dei modelli con quanto viene dedotto dai dati osservativi: esso può essere infatti messo in relazione con il parametro $|\Omega - 1| \propto H^{-2}$ (si veda l'equazione (1.4)) in quanto, considerando

H quasi costante durante l'inflazione, si ha

$$\frac{|\Omega_f - 1|}{|\Omega_i - 1|} \simeq \left(\frac{a_i}{a_f}\right)^2 = e^{-2N} \quad (2.32)$$

Come si è visto nei paragrafi 1.1.2 e 1.2.1, uno dei grandi meriti dell'inflazione è quello di risolvere il *flatness problem*: affinché questo sia verificato, è però necessario che $|\Omega_f - 1| \lesssim 10^{-60}$ (cfr [11]). Assumendo $\Omega_i \simeq 1$, si deduce che il numero di *e-folding* minimo dev'essere $N \gtrsim 70$. Un analogo stima può essere fatta valutando l'*horizon problem*.

Questo valore viene stimato nel momento in cui termina il periodo di inflazione: in prima approssimazione, esso può essere considerato come l'istante in cui le condizioni di *slow roll* non sono più soddisfatte, ovvero quando $\epsilon \simeq 1$.

2.3.1 Potenziale quadratico

Integrando l'ultima espressione di (2.31) con il potenziale definito in (2.4), è possibile ottenere per il numero di *e-folding* l'espressione $N \simeq -\frac{4\pi}{m_p^2} \frac{\phi_f^2 - \phi_i^2}{2}$.

Nel paragrafo 2.2.1 si era dimostrato che $\epsilon = \frac{m_p^2}{4\pi\phi^2}$: è possibile allora stimare $|\phi_f| \simeq \frac{m_p}{\sqrt{4\pi}}$ e ottenere

$$N \simeq 2\pi \left(\frac{\phi}{m_p}\right)^2 - \frac{1}{2} \quad (2.33)$$

Per soddisfare il vincolo $N \gtrsim 70 \Rightarrow \phi_i \gtrsim 3m_p$ (cfr [11]).

2.3.2 Potenziale quartico

Con procedimento analogo a quello sviluppato in 2.3.1, si può dimostrare che $N \simeq \phi \left(\frac{\phi_i}{m_p}\right)^2 - 1$ e che il numero minimo di *e-folding* corrisponde a $\phi_i \gtrsim 4.5m_p$.

2.3.3 PLI canonica

É possibile notare dal calcolo dei parametri *slow roll* effettuato nel paragrafo 2.2.3 che essi non dipendono dal valore di ϕ ; come si vedrà in seguito nel paragrafo 2.5, questa situazione riscontrata in PLI è indicata come *graceful exit problem* (cfr [10]) e impedisce la descrizione della fase di *reheating* con conseguente ritorno ad *HBBT*. É dunque necessario modificare il modello definendo un campo ϕ che permetta tale transizione: verrà analizzato a tal proposito il caso proposto da [10].

2.3.4 PLI non canonica

Con riferimento ad un modello PLI in cui sia stato definito un secondo campo ψ in modo da permettere la fase di uscita dall'inflazione (si veda il paragrafo 2.5), in analogia a quanto proposto in [10] si definisce $N' = -N$ come il numero di *e-folding* calcolato rispetto alla fine del periodo di inflazione. In questo modo,

dividendo tra loro le equazioni (1.2) in condizioni di *slow roll* in modo inverso rispetto a quello utilizzato nei paragrafi 2.3.1 e 2.3.2, si ottiene

$$\frac{d\phi}{dN'} = -\frac{\dot{\phi}}{H} \quad (2.34)$$

È possibile stimare $\frac{d\phi}{dN'}$ nel caso della Lagrangiana (2.23) come descritto in [10] e, scelti i valori arbitrari $\alpha = 6$, $q = 50$, si ottiene come valore minimo del campo iniziale $\phi_i \simeq 0.24m_p$. Per la stima si è posto $N' = 60$, ottenendo in questo modo un parametro di *slow roll* $\epsilon = 1.1/q$; nel caso in cui si fosse posto $N' = 70$ il valore sarebbe stato $\epsilon = 1.07/q$, in quanto il potenziale non varia molto la sua forma in questo intervallo di *e-folding*.

2.4 Spettri di potenza delle fluttuazioni

Per descrivere una generica perturbazione vengono utilizzate le onde piane: ogni componente evolve linearmente in modo indipendente su una diversa scala e la loro sovrapposizione può essere studiata nello spazio delle trasformate di Fourier in termini di vettori d'onda di componente \bar{k} . Si parla allora di spettro delle perturbazioni di densità (scalare o tensoriale, come già evidenziato nel paragrafo 1.2.4): esso rappresenta un campo random e può essere analizzato tramite alcune proprietà statistiche.

Definito un volume V_u (che può per semplicità comprendere l'intero Universo) e indicate con $\rho(\bar{x})$ la densità in un punto e con $\langle \rho \rangle$ la densità media, una perturbazione di densità è definita come

$$\begin{aligned} \delta(\bar{x}) &= \frac{\rho(\bar{x}) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} \delta_{\bar{k}} \quad \text{in termini di trasformata di Fourier} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Si ha che $\langle \delta(\bar{x}) \rangle = 0$ e $\delta(\bar{x}) = \delta^*(\bar{x})$ essendo una quantità reale: sostituendo nella (2.35) si ottiene $\langle \delta_{\bar{k}} \rangle = 0$ e $\delta_{\bar{k}} = \delta_{-\bar{k}}^*$. Si ha che $\langle \delta_{\bar{k}} \delta_{\bar{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{k} + \bar{k}') P(|\bar{k}|)$: $(2\pi)^3$ è il termine scelto per la normalizzazione; $\delta^{(3)}(\bar{k} + \bar{k}')$ rappresenta la funzione di Dirac ed è diversa da 0 solo se $\bar{k} = -\bar{k}'$, pertanto la sua presenza indica che i modi con diversa k sono tra loro scorrelati e vi è, a seguito dell'omogeneità, invarianza per traslazioni; $P(|\bar{k}|)$ rappresenta invece l'invarianza per rotazioni dovuta all'isotropia e viene indicato come spettro di potenza di $\delta_{\bar{k}}$. Solitamente si assume che tale spettro abbia un andamento a legge di potenza del tipo $P(|\bar{k}|) = Ak^n$ (cfr [5]), dove A rappresenta l'ampiezza delle perturbazioni, k il numero d'onda e n viene chiamato *spectral index* (si distingue tra n_s per le perturbazioni scalari e n_t per le tensoriali; tutto ciò che verrà d'ora in poi definito è valido in entrambi i casi).

Si definisce la varianza come $\sigma^2 = \langle \delta^2(\bar{x}) \rangle = 1/2\pi^2 \int_0^\infty P(|\bar{k}|) k^2 dk$; si nota che $\delta_{\bar{k}}^2 \propto P(|\bar{k}|)$. Per garantire la convergenza dell'integrale, scelto uno spettro a legge di potenza è necessario porre $n > -3$ se $k \rightarrow 0$ altrimenti si ha un caso di divergenza in IR, e $n < 3$ se $k \rightarrow \infty$ per evitare la divergenza in UV.

É utile definire la funzione di correlazione tra due punti

$$\begin{aligned}\xi(\bar{r}) &= \langle \delta(\bar{x})\delta(\bar{x} + \bar{r}) \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P(|\bar{k}|) e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}} \quad \text{teorema di Wiener-Khintchine} \quad (2.36) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(|\bar{k}|) \frac{\sin kr}{kr} k^2 dk\end{aligned}$$

dove per l'ultimo passaggio sono state separate le integrazioni nelle tre coordinate polari, è stato calcolato l'integrale nelle componenti angolari ed è stata sostituita la funzione sferica di Bessel di ordine 0: $j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}$. Nel caso di perturbazioni gaussiane, è sufficiente $\xi(\bar{r})$ per descrivere la distribuzione di probabilità dello spettro; in casi più complessi è necessario definire un maggior numero di correlazioni.

É facile verificare che $\xi(0) = \langle \sigma^2 \rangle$. Tale quantità può essere espressa anche utilizzando lo spettro adimensionale $\Delta(|\bar{k}|) = \frac{1}{2\pi^2} P(|\bar{k}|) k^3$, in quanto risulta $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(|\bar{k}|) d \log k$. Per garantire la convergenza dell'integrale attorno a 0 (in tutti gli altri casi la presenza della funzione di Bessel assicura già la convergenza), è necessario effettuare un filtraggio definendo una *window function* $W(kr)$ che funga da filtro passa-basso e tagli le frequenze maggiori (alcuni esempi sono presentati in [5]).

Le fluttuazioni di densità possono essere collegate con quelle del potenziale gravitazionale, in quanto $\nabla^2 \varphi \propto \delta(\bar{x}) \Rightarrow k^2 \varphi_{\bar{k}} \propto \delta_{\bar{k}} \Rightarrow P_\varphi(|\bar{k}|) \propto P(|\bar{k}|) k^{-4}$; per quanto riguarda lo *spectral index*, si definisce $n_\varphi = n - 4$.

Per descrivere le perturbazioni cosmologiche, lo spettro maggiormente utilizzato è quello di Harrison-Zel'dovich, detto anche *scale-invariant spectrum*.

Perturbando le equazioni della dinamica inflazionaria (1.7) e decomponendone le fluttuazioni in termini di Fourier, si può mostrare (cfr [5]) che per ogni modo k si ottiene un'equazione analoga a quella di un oscillatore armonico smorzato: tramite la teoria quantistica è dunque possibile calcolare l'ampiezza delle oscillazioni attese nel momento in cui esse entrano nel raggio di Hubble (si veda il paragrafo 1.2.1), in quanto lo spettro di perturbazione del campo adimensionale gravitazionale risulta $\Delta_\varphi^2 \propto k^{n-1}$. Se $n = 1$ lo spettro risulta costante; nel caso in cui, invece, vi siano dei *tilt* si parla di spettro rosso se $n < 1$ o spettro blu se $n > 1$.

É possibile dimostrare (cfr [5]) che lo *scalar spectral index* può essere calcolato per mezzo dei parametri di *slow roll* nel momento t_* dell'uscita della scala delle perturbazioni dal raggio di Hubble nelle prime fasi dell'inflazione: si può ottenere $n_s = 1 + 2\eta_* - 6\epsilon_*$. Il *tensor scalar index* dipende invece solamente dalla forma del potenziale, pertanto viene calcolato come $n_t = -2\epsilon$ (cfr [5], [6]). L'ampiezza delle perturbazioni può essere calcolata come

$$\begin{aligned}\delta_k &= \sqrt{\frac{512\pi}{75}} \frac{V^{\frac{3}{2}}}{m_p^3 |V'|} \Big|_{k=aH} \quad \text{scalare} \\ A_k &= \sqrt{\frac{32}{75}} \frac{V^{\frac{1}{2}}}{m_p^2} \Big|_{k=aH} \quad \text{tensoriale}\end{aligned} \quad (2.37)$$

dove la normalizzazione dipende dal numero di potenza di k incluso (cfr [6]) e i calcoli sono svolti nel momento in cui $k = aH$, ovvero quando la scala delle

perturbazioni esce dal raggio di Hubble: questo, come descritto nel paragrafo 2.3, si verifica quando $\epsilon \simeq 1$ e $N \simeq 60/70$. Si può dimostrare (cfr [6]) che in questo caso vale la condizione

$$\frac{d \log k}{d \phi} = \frac{8\pi V}{m_p^2 V'} \quad (2.38)$$

I parametri (2.37) possono essere calcolati anche tramite gli *spectral index*, in quanto risulta

$$\begin{aligned} \delta_k^2 &\propto k^{n_s-1}, \quad A_k^2 \propto k^{n_t} \\ \Rightarrow \quad n_s - 1 &= \frac{d \log \delta_k^2}{d \log k}, \quad n_t = \frac{d \log A_k^2}{d \log k} \end{aligned} \quad (2.39)$$

È utile definire $r = \frac{\Delta_{tensore}^2}{\Delta_{scalare}^2} = \frac{P_t}{P_s}$, in modo da poter studiare l'importanza relativa dei due campi di perturbazione.

2.4.1 Potenziale quadratico

Per stimare l'ampiezza delle perturbazioni di densità, è necessario calcolare $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ al termine dell'inflazione: essa si verifica quando $\phi \simeq 3m_p$ (si veda il paragrafo 2.3).

Si ha allora (cfr [6])

$$\begin{aligned} \delta_k &= \sqrt{\frac{512\pi}{75} \frac{27m^3 m_p^3}{3\sqrt{8}m_p^3 m^2 m_p}} \simeq 12 \frac{m}{m_p} \\ A_k &= \sqrt{\frac{32}{75} \frac{3mm_p}{\sqrt{2}m_p^2}} \simeq 1.4 \frac{m}{m_p} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Le espressioni ottenute in (2.40) possono essere confrontate con le misure di $\delta_{\bar{k}}$ e $A_{\bar{k}}$ raccolte dai dati osservativi (si veda più in dettaglio il capitolo 3), in modo tale da poter ottenere una stima di m .

È possibile, combinando le espressioni (2.39) e (2.38), calcolare gli *spectral index*, in quanto

$$\begin{aligned} n_s - 1 &= \frac{d \log \delta_k^2}{d \log k} = \frac{d \log \delta_k^2}{d \phi} \frac{d \phi}{d \log k} \\ &= \frac{d \log \frac{512\pi}{75} \frac{V^3}{m_p^6 V'^2}}{d \phi} \bigg|_{k=aH} \frac{m_p^2 V'}{8\pi V} \bigg|_{k=aH} \\ &\simeq \frac{d \log 3 \frac{m^4 \phi^4}{m_p^6}}{d \phi} \bigg|_{k=aH} \frac{m_p^2}{4\pi \phi} \bigg|_{k=aH} \\ &\simeq \frac{4 \cdot 0.08 m_p^2}{\phi^2} \bigg|_{k=aH} = - \frac{0.32 m_p^2}{9 m_p^2} \simeq -0.03 \\ \Rightarrow \quad n_s &= 0.97 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Il segno negativo è dovuto alla convenzione utilizzata nell'orientare l'asse temporale.

$$\begin{aligned}
n_t &= \frac{d \log A_k^2}{d \log k} = \frac{d \log A_k^2}{d \phi} \frac{d \phi}{d \log k} \\
&= \frac{d \log \frac{32}{75} \frac{V}{m_p^4}}{d \phi} \Big|_{k=aH} \frac{m_p^2 V'}{8 \pi V} \Big|_{k=aH} \\
&= \frac{2}{\phi} \Big|_{k=aH} \frac{m_p^2}{4 \pi \phi} \Big|_{k=aH} \\
&\simeq \frac{2}{\phi} \frac{0.08 m_p^2}{\phi} \Big|_{k=aH} \simeq \frac{0.16}{9} \\
&\simeq 0.02
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Il rapporto tra il contributo tensoriale e quello scalare alle perturbazioni può essere calcolato applicando la definizione e ricordando che $P_s = \delta_k^2$, $P_t = A_k^2$: si ha che $r = \frac{P_t}{P_s}$, sostituendo le espressioni degli spettri con gli opportuni coefficienti numerici, $r \simeq 0.1$.

2.4.2 Potenziale quartico

In analogia a quanto svolto nel paragrafo 2.4.1, anche le caso di potenziale quartico $V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda \phi^4$ è possibile calcolare l'ampiezza delle perturbazioni di densità. Ricordando dai paragrafi 2.2.2 e 2.3.2 che al momento dell'uscita dall'inflazione si ha $\epsilon = \frac{m_p^2}{\pi \phi}$ e $\phi \simeq 4.5 m_p^2$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\delta_k &= \sqrt{\frac{512 \pi}{75} \frac{\lambda^{\frac{3}{2}} (4.5 m_p)^6}{2^3 m_p^3 \lambda (4.5 m_p)^3}} \simeq 52.7 \sqrt{\lambda} \\
A_k &= \sqrt{\frac{32}{75} \frac{3 m m_p}{\sqrt{2} m_p^2}} \simeq 6.6 \sqrt{\lambda}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Per quanto riguarda gli *spectral index*, procedendo come in (2.41) e (2.42), si ha

$$\begin{aligned}
n_s - 1 &= \frac{d \log \frac{512 \pi}{75} \frac{\lambda \phi^6}{4^3 m_p^6}}{d \phi} \Big|_{k=aH} \frac{m_p^2 \lambda \phi^2}{8 \pi \frac{1}{4} \lambda \phi^4} \Big|_{k=aH} \\
&= \frac{6}{\phi} \Big|_{k=aH} \frac{m_p^2}{2 \pi \phi} \Big|_{k=aH} \\
&\simeq \frac{6 \cdot 0.16 m_p^2}{\phi^2} \Big|_{k=aH} = - \frac{0.96 m_p^2}{4.5^2 m_p^2} \simeq -0.05 \\
\Rightarrow n_s &= 0.95
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
n_t &= \frac{d \log \frac{32 \lambda \phi^4}{75 4 m_p^4}}{d \phi} \Big|_{k=aH} \frac{m_p^2}{2 \pi \phi} \Big|_{k=aH} \\
&= \frac{4}{\phi} \Big|_{k=aH} \frac{m_p^2}{2 \pi \phi} \Big|_{k=aH} \\
&\simeq \frac{4 \cdot 0.16 m_p^2}{\phi \phi} \Big|_{k=aH} \simeq \frac{0.16}{4.5^2} \\
&\simeq 0.03
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Il rapporto tensore-scalare risulta $r = \frac{P_t}{P_s}$ e, effettuando il calcolo, $r \simeq 0.2$.

2.4.3 PLI canonica

È possibile definire (cfr [10], [11]) lo spettro di potenza delle perturbazioni scalari e tensoriali nella PLI proposta in [8] come

$$P_s(|\bar{k}|) = \left(\frac{k^3}{2\pi^2} \right) |R_{\bar{k}}|^2, \quad P_t(|\bar{k}|) = 2 \left(\frac{k^3}{2\pi^2} \right) |h_{\bar{k}}|^2 \tag{2.46}$$

dove con $R_{\bar{k}} =$

Utilizzando il potenziale introdotto nel paragrafo 2.2.3, nel caso in cui siano soddisfatte le condizioni di *slow roll* è possibile dimostrare che (cfr [10])

$$n_s = 1 - \frac{2}{q-1}, \quad n_t = n_s - 1 \simeq -\frac{2}{q}, \quad r \simeq \frac{16}{q} \tag{2.47}$$

2.4.4 PLI non canonica

Nel caso di PLI non canonica proposta in [10] e già introdotta nel paragrafo 2.2.4, l'evoluzione dello spettro di potenza delle perturbazioni scalari risulta più complesso, in quanto il suo andamento dipende dal fattore adimensionale α . Si può ricavare (cfr [10]) che

$$\begin{aligned}
P_s(k) &= \left(\frac{1}{72\pi^2 c_s} \right) \left(\left(\frac{\alpha 6^\alpha}{\mu^{4(\alpha-1)}} \right) \left(\frac{1}{m_p^{14\alpha-8}} \right) \left(\frac{V(\phi)^{5\alpha-2}}{V'(\phi)^{2\alpha}} \right) \right)_{aH=c_s k}^{\frac{1}{2\alpha-1}} \\
&= \left(\frac{q}{24\pi^2 c_s} \right) \left(\frac{1 - (2\alpha-1)w}{2\alpha} \right)^{\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}} \left(\frac{V(\phi)}{m_p^4} \right)_{aH=c_s k}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

con, nel caso del modello studiato, $c_s = \frac{1}{\sqrt{2\alpha-1}}$. La seconda equazione è ottenuta sostituendo le espressioni per il potenziale che si erano ottenute in (2.29) e (2.30). Tale espressione dev'essere calcolata nel momento di uscita dal raggio di Hubble di una particella dotata di velocità c_s (detta velocità del suono): utilizzando l'espressione per il fattore di scala $a(t) = a_i(t/t_i)^q$, è possibile ricavare il valore di $V(\phi)/m_p^4$ in relazione ad un numero d'onda k_* arbitrario e prefissato.

Si può allora ottenere (cfr [10])

$$P_s(|\bar{k}|) = A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{-\frac{2}{q-1}} \quad \text{con} \quad A_s = \left(\frac{q}{24\pi^2 c_s} \right) \left(\frac{1 - (2\alpha - 1)w}{2\alpha} \right)^{\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}} g c_s^{\frac{2}{q-1}}$$

$$g = 3q^2 \left(\frac{1 - (2\alpha - 1)w}{2\alpha} \right) \left(\left(m_p t_i \right)^{q-1} \left(-\frac{t_i k_*}{a_i q} \right) \right)^{-\frac{2}{q-1}} \quad (2.49)$$

Nel caso in cui valgano le condizioni di *slow roll*, il coefficiente dello spettro scalare si riduce a $A_s \simeq \frac{qg}{24\pi^2 c_s}$, mentre lo spettro di potenza delle perturbazioni tensoriali ha la stessa forma del caso canonico (cfr [10])

$$P_t(k) = \left(\frac{2}{3\pi^2} \right) \left(\frac{V(\phi)}{m_p^4} \right)_{aH=k}$$

$$= A_t \left(\frac{k}{k_*} \right)^{-\frac{2}{q-1}} \quad \text{con} \quad (2.50)$$

$$A_t = \frac{2}{3\pi^2} g$$

Per ricavare gli *spectral index*, è possibile considerare $n_t = \frac{d \log P_t(k)}{d \log k} = -\frac{2}{q-1}$ e, come in (2.47), $n_s = n_t + 1 = \frac{q-3}{q-1}$: tale risultato, essendo indipendente da α , è comune per PLI canonica e non canonica. Per quanto riguarda il rapporto tensore-scalare, si ha $r = \frac{P_t}{P_s} = \frac{A_t}{A_s} \simeq \frac{16}{q\sqrt{2\alpha-1}}$: il valore di r diminuisce all'aumentare di α (si vedano le conseguenze nel capitolo 3).

2.5 Uscita dall'inflazione

Come anticipato nel paragrafo 1.2.5, il modello dell'inflazione deve poter fornire un meccanismo di uscita dalla fase di espansione accelerata, in modo tale da poter restituire le condizioni necessarie al successivo sviluppo secondo le leggi di *HBBT*. A seconda del modello utilizzato, la transizione può essere implicata nell'evoluzione stessa del fattore di scala, oppure deve essere aggiunta modificando il campo ϕ in fase di uscita.

2.5.1 Potenziale quadratico

Utilizzando l'equazione (2.8) è possibile valutare quando avviene l'uscita dall'inflazione studiando quando il segno di \ddot{a} diventa negativo (si veda paragrafo 1.2.1):

$$a(t) = a_i \exp [A(\phi_i t - Bt^2)]$$

$$\Rightarrow \dot{a}(t) = a_i (A\phi_i - 2Bt) \exp [A(\phi_i t - Bt^2)] \quad (2.51)$$

$$\Rightarrow \ddot{a}(t) = 2a_i B(1 - A\phi_i t + 2Bt^2) \exp [A(\phi_i t - Bt^2)]$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}(t) < 0 &\Leftrightarrow 2Bt^2 - A\phi_i t + B < 0 \Leftrightarrow \\ \frac{A\phi_i - \sqrt{A^2\phi_i^2 - 8B}}{4B} < t < \frac{A\phi_i + \sqrt{A^2\phi_i^2 - 8B}}{4B} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Nelle equazioni (2.51), (2.51) sono state condensate in A , B le costanti presenti in (2.8).

Si nota che il fattore di scala ottenuto con il potenziale (2.4) presenta derivata seconda negativa dopo un certo tempo $t_f = \frac{A\phi_i - \sqrt{A^2\phi_i^2 - 8B}}{4B}$, il cui valore dipende dalla stima di m , a_i e ϕ_i e dev'essere posto in relazione con il numero di *e-folding* minimo necessario alla soluzione di *horizon* e *flatness problem* (si veda paragrafo 2.3). Il limite destro dell'intervallo indicato in (2.52) non viene mai raggiunto, in quanto appena cambia il segno di $\ddot{a}(t)$ il fattore di scala inizia ad evolvere secondo le leggi di *HBBT* e cambiano le condizioni su t .

In questo modello l'uscita dalla fase inflazionaria è dunque intrinseca nell'evoluzione stessa di $a(t)$ ed è sufficiente ϕ per guidare la dinamica cosmica.

2.5.2 Potenziale quartico

Analogamente a quanto svolto nel paragrafo 2.5.1, è possibile studiare il segno di $\ddot{a}(t)$ nel caso in cui il fattore di scala evolva come ricavato in (2.14), ottenendo

$$\begin{aligned} a(t) &= a_i \exp(A \exp(-Bt)) \\ \Rightarrow \dot{a}(t) &= -a_i AB \exp(-2Bt) \exp(A \exp(-Bt)) \\ \Rightarrow \ddot{a}(t) &= a_i AB^2 \exp(-2Bt) \exp(A \exp(-Bt))(-2 + A \exp 2Bt) \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\ddot{a}(t) < 0 \Leftrightarrow \exp(-2Bt) < \frac{A}{2} \Leftrightarrow t > \frac{1}{2B} \log \frac{A}{2} \quad (2.54)$$

Anche in questo caso l'uscita dall'inflazione è intrinseca nell'evoluzione del fattore di scala e avviene dopo un tempo $t = \frac{1}{2B} \log \frac{A}{2}$, in cui i fattori A , B conglobano tutte le costanti dell'equazione (2.14) e dipendono dunque da λ e ϕ_i .

2.5.3 PLI canonica

Come chiaramente emerge dall'evoluzione di $a(t)$ ricavata in (2.22), una PLI canonica come quella proposta in [8] non permette l'uscita dalla fase di inflazione: questo problema, noto come *graceful exit problem*, può essere risolto solo definendo un potenziale più generico, di cui (2.15) rappresenti un'approssimazione nella fase centrale di inflazione. Ciò può essere fatto facilmente modificando la Lagrangiana: in questo modo, però, ci si riporta al caso di PLI non canonica affrontato nel paragrafo 2.5.4.

2.5.4 PLI non canonica

La Lagrangiana (2.23) può presentare, come dimostrato nel paragrafo 2.2.4, una PLI con potenziale di andamento $V(\phi) \propto \phi^{-s}$, con $s = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$.

Tale risultato può essere però ottenuto (cfr [10]) anche definendo il potenziale come

$$V(\phi) = V_0 \left(\left(\frac{\phi}{m_p} \right)^{-\frac{s}{2}} - \left(\frac{\phi}{m_p} \right)^{\frac{s}{2}} \right)^2 \quad (2.55)$$

in quanto, come evidenziato in [10], il calcolo dei parametri di *slow roll* al raggiungimento del numero di *e-folding* in cui avviene l'uscita dall'inflazione dà un risultato molto vicino a quello della PLI canonica.

Il potenziale (2.55) può essere approssimato con due diversi andamenti per $\phi < m_p$ (*left branch*), in cui $V(\phi) \propto \phi^{-s}$, e per $\phi > m_p$ (*right branch*), in cui $V(\phi) \propto \phi^s$. Come evidenziato in figura 2.1, in $\phi = m_p$ è presente un minimo con $V(\phi) = 0$: attorno a questo punto (cfr [10]), il campo oscilla determinando la fase di *reheating* (si veda il paragrafo 1.2.5).

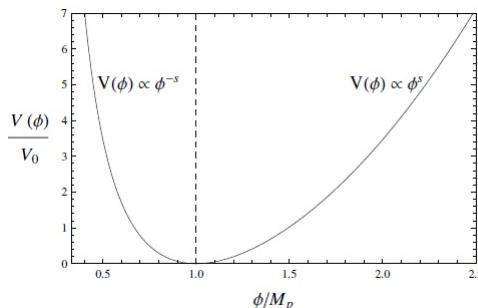


Figura 2.1: Andamento del potenziale (2.55) nel caso $\alpha = 6$. La linea verticale posta a $\phi = m_p$ separa il *right* e *left branch* descritti nel testo. Figura tratta da [10]

Il *left branch* del potenziale (2.55) guida l'evoluzione del termine medio del campo ϕ così come era stata descritta nel paragrafo 2.2.4. Essa termina prima del raggiungimento di $V(\phi) = 0$: infatti, in questo punto utilizzando le equazioni (2.26) e ricordando che $\alpha > 1$ si ottiene

$$\begin{cases} \rho = (2\alpha - 1)X \left(\frac{X}{M^4} \right)^{\alpha-1} \\ p = X \left(\frac{X}{M^4} \right) \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2\alpha - 1} > 0 \quad (2.56)$$

Riconsiderando l'equazione (1.3), si può allora notare che $\frac{\ddot{a}}{a} \propto -\rho \left(1 + 3\frac{p}{\rho} \right) \Rightarrow \ddot{a} < 0$ e la fase inflazionaria risulta conclusa.

Il momento esatto di termine dell'inflazione si può ottenere valutando quando $\epsilon = 1$: utilizzando la definizione del parametro di *slow roll* e sostituendovi (2.55) si può dimostrare che questo avviene per $\phi \simeq 0.91m_p$ (cfr [10]).

Il *right branch* di (2.55), invece, rappresenta una possibile inflazione caotica guidata da un potenziale $V(\phi) \propto \phi^s$. Come indicato in [10], in questo caso si ottiene come *spectral index*

$$n_s = 1 - \frac{2(4\alpha - 3)}{4N(\alpha - 1) + 2\alpha - 1} \quad (2.57)$$

dove N rappresenta il numero di *e-folding*.

2.6 Confronto tra i modelli presentati

Si riportano nelle tabelle 2.1, 2.2, 2.3 i risultati ottenuti nei paragrafi precedenti con riferimento ai modelli di inflazione con potenziale quadratico, quartico, PLI canonico e PLI non canonico.

$V(\phi)$	$\phi(t)$	$a(t)$
$\frac{1}{2}m^2\phi^2$	$\phi_i - \frac{mm_p}{2\sqrt{3\pi}}t$	$a_i \exp\left[2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\frac{m}{m_p}\left(\phi_i t - \frac{mm_p}{4\sqrt{3\pi}}t^2\right)\right]$
$\frac{1}{4}\lambda\phi^4$	$\phi_i \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}}m_p t\right)$	$a_i \exp\left[\frac{\pi}{m_p^2}\phi_i^2 \exp\left(-2\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}}m_p t\right)\right]$
$V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{q}}\frac{\phi}{m_p}\right)$	$\sqrt{2q}m_p \log\left(\frac{V_0}{2qm_p\sqrt{6\pi}}t\right)$	$\propto t^q$
$V_0\left(\frac{m_p}{\phi}\right)^s$	$m_p\sqrt{2q}\log t$	$\propto t^q$

Tabella 2.1: Confronto, nei casi di potenziale studiati nei paragrafi precedenti, di: evoluzione del termine medio del campo $\phi(t)$ e fattore di scala $a(t)$

$V(\phi)$	ϵ	η	N
$\frac{1}{2}m^2\phi^2$	$\frac{m_p^2}{4\pi\phi^2}$	ϵ	$2\pi\left(\frac{\phi}{m_p}\right)^2 - \frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}\lambda\phi^4$	$\frac{m_p^2}{\pi\phi^2}$	$\frac{3}{2}\epsilon$	$\phi\left(\frac{\phi_i}{m_p}\right)^2 - 1$
$V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{q}}\frac{\phi}{m_p}\right)$	$\frac{1}{8q\pi}$	2ϵ	–
$V_0\left(\frac{m_p}{\phi}\right)^s$	$\frac{m_p^2}{16\pi}s^2\phi^{-1}$	$\frac{m_p^2}{8\pi}s(s+1)\phi^{-2}$	–

Tabella 2.2: Confronto, nei casi di potenziale studiati nei paragrafi precedenti, di: parametri *slow roll*; numero di *e-folding*

$V(\phi)$	δ_k	A_k	n_s	r
$\frac{1}{2}m^2\phi^2$	$12\frac{m}{m_p}$	$1.4\frac{m}{m_p}$	0.97	0.1
$\frac{1}{4}\lambda\phi^4$	$52.7\sqrt{\lambda}$	$6.6\sqrt{\lambda}$	0.95	0.2
$V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{q}}\frac{\phi}{m_p}\right)$	$\sqrt{\left(\frac{k^3}{2\pi^2}\right) R_k ^2}$	$\sqrt{2\left(\frac{k^3}{2\pi^2}\right) h_k ^2}$	$1 - \frac{2}{q-1}$	$\frac{16}{q}$
$V_0\left(\frac{m_p}{\phi}\right)^s$	$\sqrt{A_s\left(\frac{k}{k_*}\right)^{-\frac{2}{q-1}}}$	$A_t\left(\frac{k}{k_*}\right)^{-\frac{2}{q-1}}$	$\frac{q-3}{q-1}$	$\frac{16}{q\sqrt{2\alpha-1}}$

Tabella 2.3: Confronto, nei casi di potenziale studiati nei paragrafi precedenti, di: spettri di potenza delle perturbazioni scalari δ_k e tensoriali A_k , *scalar spectral index* n_s e rapporto tensore-scalare r

Per visualizzare schematicamente gli andamenti di ϕ e di $a(t)$ in funzione del tempo nei vari casi studiati, sono state elaborate le figure 2.2, 2.3. Chiaramente, tutti gli andamenti rappresentati sono a puro titolo di esempio: sarebbero necessari un'analisi accurata ed una valutazione dei parametri collegata ai dati osservativi (si veda in dettaglio il capitolo 3) per dare un valore scientifico a quanto mostrato.

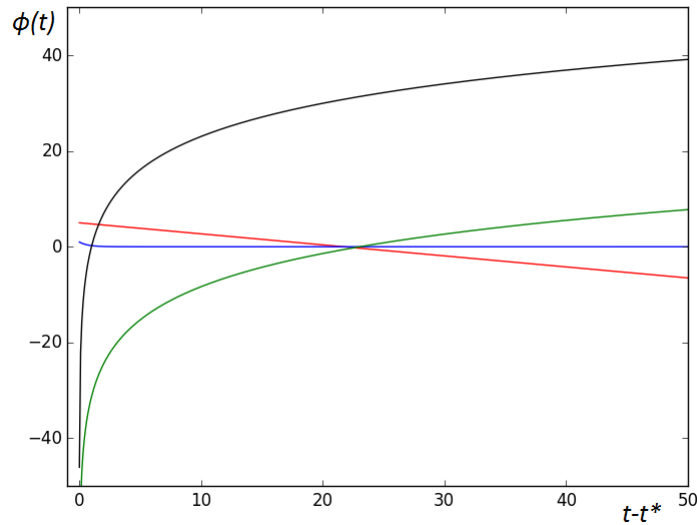


Figura 2.2: Confronto tra gli andamenti dell'evoluzione di ϕ nei casi con potenziale quadratico (rosso), quartico (blu), della PLI canonica (verde) e della PLI non canonica (nero). Sull'asse delle ascisse il tempo è riscalato in modo tale da porre come origine l'istante t^* di inizio dell'inflazione. Per questa rappresentazione per semplicità di calcolo sono stati posti $m_p = 1$, $m = \sqrt{2}$, $\lambda = 4$, $V_0 = 1$, $q = 50$, $\alpha = 6$ (questi ultimi sono i valori proposti da [10], utili per lo studio successivo). Grafico elaborato con Python IDLE

Si nota dal grafico 2.2 che $\phi(t)$ nei casi quadratico e quartico diminuisce all'aumentare del tempo, mentre nelle PLI il suo valore aumenta. La decrescita per il potenziale quadratico procede con il ritmo costante di un andamento lineare, mentre per quello quartico è inizialmente più rapida ma poi si assesta asintoticamente a 0. Per quanto riguarda le PLI, invece, la crescita risulta logaritmica in entrambi i casi; non è stato in questo caso considerato il problema della *graceful exit* descritto nel paragrafo 2.5.

Per quanto riguarda il grafico 2.3, invece, innanzitutto si nota che la crescita con potenziale quartico è la più lenta. La più rapida risulta essere quella con potenziale quadratico, mentre il fattore di scala delle PLI rimane inizialmente quasi costante, per poi aumentare rapidamente e superare (all'esterno del grafico presentato) la dimensione raggiunta con la crescita quadratica.

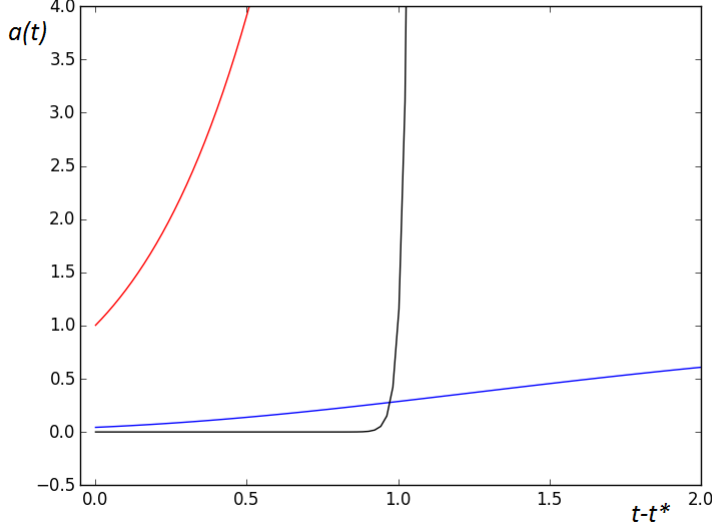


Figura 2.3: Confronto tra gli andamenti dell'evoluzione di $a(t)$ nei casi con potenziale quadratico (rosso), quartico (blu), della PLI canonica (verde) e della PLI non canonica (nero). Questi ultimi due risultano sovrapposti. Sull'asse delle ascisse il tempo è riscalato in modo tale da porre come origine l'istante t^* di inizio dell'inflazione. Per questa rappresentazione per semplicità di calcolo sono stati posti $m_p = 1$, $m = \sqrt{2}$, $\lambda = 4$, $V_0 = 1$, $q = 50$, $\alpha = 6$ (questi ultimi sono i valori proposti da [10], utili per lo studio successivo). Grafico elaborato con Python IDLE

Possono poi essere confrontati tra loro gli spettri di potenza delle fluttuazioni e i relativi indici per mezzo della tabella 2.3. Si nota che, mentre nei casi di potenziale quadratico e quartico lo spettro può essere descritto in dipendenza dei soli parametri m , m_p e λ , nei casi di PLI la dipendenza da k non può essere eliminata: l'andamento dello spettro dipende da quanti numeri d'onda vengono utilizzati nella rappresentazione di Fourier per descriverlo.

Per quanto riguarda lo *scalar spectral index*, mentre i valori nei casi quadratico e quartico sono stati ben determinati (cfr [6]), nei casi di PLI dipendono dalla scelta di q e α . Scelti come valori quelli proposti in [10], $q = 50$, $\alpha = 6$ si ottiene quanto riportato in tabella 2.4.

	n_s	r
PLI canonica	0.959	0.32
PLI non canonica	0.959	0.06

Tabella 2.4: Valori dello *scalar spectral index* e del rapporto tensore-scalare per le PLI descritte nel testo, calcolati ponendo $q = 50$, $\alpha = 6$ come proposto in [10], nelle espressioni riportate in tabella 2.3

Si nota dalla tabella 2.4 che n_s risulta molto simile per la PLI canonica e quella non canonica proposta in [10]; il valore del rapporto tensore-scalare risul-

ta invece molto diverso nei due casi. In particolare, la PLI canonica fornisce una quantità di perturbazioni tensoriali (onde gravitazionali) molto superiore: questo fatto permette di fornire un discriminante nella scelta del modello migliore grazie al confronto delle misure di n_s e r fatte sulla CMB (si veda il capitolo 3).

Capitolo 3

Vincoli osservativi

I parametri descritti nel capitolo 2, in particolare lo *scalar spectral index* e il rapporto tensore-scalare, costituiscono alcuni tra i principali osservabili della cosmologia inflazionaria.

I dati oggi più accurati sono stati raccolti grazie al satellite PLANCK dell'Agencia Spaziale Europea ESA, attivo dal 2009 al 2013. Essi sono stati combinati con quelli delle precedenti missioni COBE (NASA, 1989-1993) e WMAP (NASA, 2001-2010) e degli strumenti dei telescopi a terra, in particolare BICEP2/Keck Array (attivo in Antartide), in modo tale da ottenere uno strumento atto a ricavare dallo studio della CMB quante più informazioni possibili.

3.1 Il satellite PLANCK

Il satellite PLANCK è stato lanciato il 19 Marzo 2009 e ha osservato ininterrottamente dal 12 Agosto dello stesso anno fino al 23 Ottobre 2013, scansionando in modo completo il cielo due volte ogni anno. Gli strumenti presenti a bordo hanno permesso di raccogliere dati relativi alla temperatura in nove frequenze, comprese tra i 25 e i 1000 GHz, e relativi alla polarizzazione in sette, comprese tra 30 e 353 GHz; la risoluzione angolare utilizzata varia tra 5' e 33'. I primi risultati sono stati pubblicati nel 2013; nel 2015 sono state distribuite analisi e mappe più accurate; ulteriori revisioni e approfondimenti sono previsti per il 2016.

3.1.1 Principali ambiti di indagine

Le pubblicazioni del 2015 relative ai dati di PLANCK hanno permesso di ottenere risultati in diversi ambiti dell'astrofisica e della cosmologia; nella maggioranza dei casi esse hanno confermato, ponendo limiti più accurati, quanto era già stato ottenuto con le pubblicazioni del 2013 e con le precedenti relative a WMAP. Il confronto tra questi tre gruppi di dati è stato possibile solo dopo una calibrazione fotometrica, ottenuta confrontando i valori ottenuti tra 30 e 353 GHz per i dipoli orbitale e Solare: essi sono visualizzabili come delle modulazioni, variabili in ampiezza e direzione, nella CMB dovute ai moti relativi del satellite rispetto al baricentro del Sistema Solare e di quest'ultimo rispetto al sistema comoving.

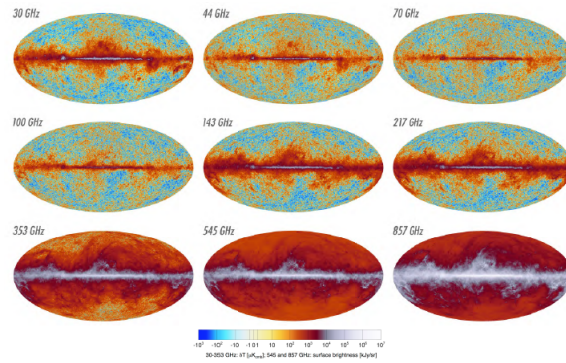


Figura 3.1: Mappe di temperatura ricavate dai dati di PLANCK nelle nove frequenze indicate. Figura tratta da [1]

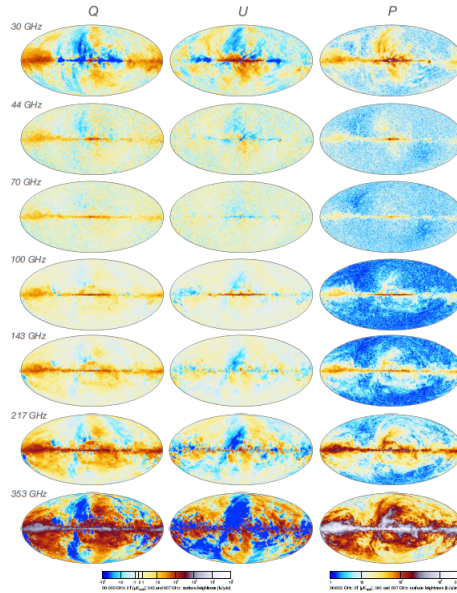


Figura 3.2: Mappe di polarizzazione elaborate grazie ai dati di PLANCK nelle sette frequenze indicate. Q e U rappresentano i parametri di Stokes relativi al grado e all'ellisse di polarizzazione mentre P è l'intensità totale. Figura tratta da [1]

Il primo risultato importante è la realizzazione delle mappe di temperatura e di polarizzazione della CMB rispettivamente nelle nove e nelle sette frequenze analizzate: da esse, visibili nelle figure 3.1 e 3.2, è poi possibile ricavare una serie di informazioni. Per quanto riguarda l'emissione in queste temperature, sono stati distinti otto diversi meccanismi che ne sono causa, sia interni alla nostra Galassia sia nelle sue immediate vicinanze. Essi sono dovuti agli effetti di sincrotrone e di free-free, alla *spinning dust*, all'emissione termica della polvere e delle sorgenti SZ, alle righe molecolari e delle tre transizioni di CO. Il contributo delle varie componenti è riportato in figura 3.3. Per quanto riguarda

la polarizzazione, invece, essa è principalmente legata alla CMB, alla radiazione di sincrotrone e a quella termica.

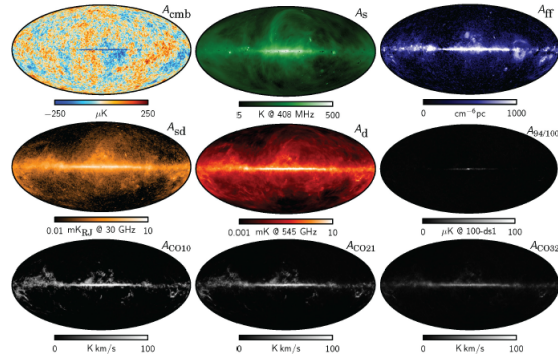


Figura 3.3: Mappe derivate dai dati di PLANCK e WMAP a 408 MHz, rappresentanti da sinistra a destra le emissioni di CMB, sincrotrone, free-free nella prima riga; *spinning dust*, emissione termica della polvere e righe molecolari nella seconda riga; tre transizioni di CO nella terza. Le sorgenti termiche SZ non sono state riportate in quanto il loro contributo risulta essere nettamente inferiore. Figura tratta da [1]

L'analisi dei dati raccolti con PLANCK ha permesso anche l'individuazione e la realizzazione di cataloghi relativi a tre diversi tipi di oggetti cosmici: le sorgenti compatte galattiche ed extragalattiche (PCCS2); gli ammassi di galassie che, distorcendo la CMB grazie all'effetto Compton inverso, si configurano come sorgenti Sunyaev-Zel'dovich SZ (PSZ2); i *Galactic Cold Clumps*, sorgenti più fredde dell'ambiente circostante ($T \simeq 13/14.5$ K), visibili grazie ad un eccesso di radiazione simultaneo nelle tre bande a 857, 545 e 353 GHz e distribuiti per la maggior parte ad una distanza massima di 2 kpc dal Sole (PGCC).

Altro nucleo fondamentale di informazioni ricavate grazie a PLANCK è quello relativo ai limiti sui parametri cosmologici. Innanzitutto, lo studio della CMB conferma che ci troviamo in un Universo spazialmente piatto e in espansione, la cui dinamica è oggi dominata dalla *cold dark matter* e dalla costante cosmologica Λ . Le strutture a grande scala sono l'evoluzione di un primordiale spettro di perturbazioni adiabatiche Gaussiane e *scale-invariant*; sono presenti evidenze dei tre tipi di neutrino ed è possibile effettuare misurazioni relative al loro flusso.

Lo spettro di potenza angolare delle anisotropie di temperatura e polarizzazione permette, tra le altre cose, di vincolare i sei parametri richiesti dal modello che descrive la struttura cosmica; tra essi sono presenti lo *scalar spectral index* n_s e il rapporto tensore-scalare r .

3.1.2 Stime dei parametri inflazionari

Tra le pubblicazioni del 2015 inerenti le analisi dei dati di PLANCK, [2] presenta i vincoli dedotti relativamente ai modelli di inflazione: essi sono stati elaborati utilizzando gli spettri di temperatura e polarizzazione raccolti coi diversi strumenti del satellite, combinati con le mappe di BICEP2 e WMAP in modo da ridurre gli intervalli di incertezza e da rendere i risultati indipendenti da eventuali parametri liberi.

Per quanto riguarda i valori di n_s e r , è possibile definire diversi range, tra loro compatibili, a seconda dei set di dati che vengono via via inclusi; i valori stimati variano se gli indici sono presi singolarmente o se vengono combinati con la presenza del *tensor scalar index*. Nella tabella 3.1 sono riportati alcuni dei valori dedotti, accompagnati dai relativi intervalli di incertezza.

	TT+lowP	TT,TE,EE+lowP	TT+lowP+lensing	<i>tensor added</i>
n_s	0.9655 ± 0.0062	0.9645 ± 0.0049	0.9677 ± 0.0060	0.9655 ± 0.058
$r_{0.002}$	< 0.10	< 0.10	< 0.11	$< 0.09^\bullet$

Tabella 3.1: Valori stimati dai dati di PLANCK per n_s e r , scelto $k_* = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$. Il livello di confidenza delle stime è di 68% CL, ad eccezione del caso di r *tensor added*, indicato con \bullet , in cui si ha 95% CL. Le diverse colonne fanno riferimento a valori calcolati includendo via via un maggior numero di dati. Valori ricavati da [2]

Come si nota dalla tabella 3.1, uno spettro di tipo Harrison-Zel'dovich con $n_s = 1$ non è compatibile con le misure effettuate; più probabili risultano gli spettri rossi.

Il valore di r dipende molto dalla scala a cui le misure vengono effettuate: se si utilizzasse $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ (scala più ampia), tutti i set di dati fornirebbero $r < 0.27$.

Dai dati di PLANCK emerge anche che per alti valori di k lo spettro di potenza della temperatura risente di una netta diminuzione di intensità: ciò può essere descritto utilizzando per lo spettro un andamento o con taglio esponenziale, come ad esempio $P_s(k) = P_0 \left(1 - \exp \left(\left(-\frac{k}{k_c} \right)^{\lambda_c} \right) \right)$, o con legge di potenza definita a tratti, come per esempio $P_s(k) = \begin{cases} A_{low} \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1+\delta} & \text{se } k \leq k_b \\ A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1} & \text{se } k \geq k_b \end{cases}$.

Possono infine essere posti dei limiti anche ai valori dei parametri di *slow roll*. Infatti, definite le *Hubble flow functions* come le derivate temporali del parametro di Hubble

$$\epsilon_{(i+1)} = \frac{\dot{\epsilon}_i}{H\epsilon_i} \quad \text{con} \quad \epsilon_1 = -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (3.1)$$

è possibile calcolare (cfr [2])

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon_1 \left(\frac{1 - \frac{\epsilon_1}{3} + \frac{\epsilon_2}{6}}{1 - \frac{\epsilon_1}{3}} \right)^2 \\ \eta = \frac{2\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2}{2} - \frac{2\epsilon_1^2}{3} + \frac{5\epsilon_1\epsilon_2}{6} - \frac{\epsilon_2^2}{12} - \frac{\epsilon_2\epsilon_3}{6}}{1 - \frac{\epsilon_1}{3}} \end{cases} \quad (3.2)$$

Dai dati di PLANCK, posti $\epsilon_3 = \epsilon_4 = 0$, risulta $\epsilon < 0.0068$ con 95% CL e $\eta < -0.010_{-0.0069}^{+0.0045}$ con 68% CL.

3.1.3 Ricostruzione del potenziale e dello spettro

È possibile analizzare i dati di PLANCK in modo tale da costruire un potenziale che descriva l'espansione inflazionaria nel range di parametri osservabili senza inserire assunzioni sulla dinamica operante oltre i suoi limiti, stabiliti grazie al numero di *e-folding* (si veda il paragrafo 2.3).

A priori, ogni forma di potenziale potrebbe essere resa accettabile modellando i parametri in modo tale da ottenere uno spettro di fluttuazioni compatibile con quello misurato. Si nota però, espandendo $V(\phi)$ in serie di Taylor all'intorno del valore ϕ_* assunto dal campo nel momento in cui k_* esce dal raggio di Hubble, e calcolando i parametri ϵ , η , n_s e r ad esso legati, che l'andamento descritto dai dati può essere ben riprodotto fermando la serie al quarto ordine (cfr [2]). Allo stesso modo, se si ricostruisce l'andamento di $H(\phi)$ grazie ad una somma di polinomi e si calcolano i parametri di *slow roll* ad essa connessi, anche in questo caso bastano i primi ordini per ottenere la forma voluta.

È possibile allora assumere che i modelli di inflazione aventi potenziale di forma piuttosto liscia, senza deviazioni troppo grandi dalla condizione di *slow roll* e descritti da una semplice legge parametrica siano sufficienti per spiegare l'andamento dei dati.

Un ragionamento analogo può essere fatto sullo spettro di potenza delle perturbazioni scalari: è possibile dimostrare (cfr [2]) che le deviazioni statistiche da un andamento *power law* $P(|\bar{k}|) \propto k^{n_s-1}$ sono sufficientemente piccole da giustificare la scelta di tale legge per descrivere le fluttuazioni.

In particolare, tre metodi diversi convergono a questa forma per lo spettro (per una descrizione accurata si veda [2]): è possibile assumere una *power law* modulata da una funzione che vi introduca le possibili variazioni, per poi testarla attraverso le simulazioni Monte Carlo, evidenziando come le deviazioni dall'andamento primario non siano statisticamente importanti. È possibile in alternativa ricreare uno spettro sul piano $\log k - \log P(|\bar{k}|)$ formato da tratti lineari delimitati da un numero variabile di punti, distribuiti in modo arbitrario in un caso o equispaziati nell'altro, per poi confrontarne l'andamento con quello sperimentale. Si può così notare che gli andamenti compatibili si hanno o nei casi più semplici, riconducibili agli spettri *power law*, o nei casi in cui il numero di punti utilizzato è estremamente elevato: la validità di tali casi viene esclusa in quanto essi risultano eccessivamente complessi e non compatibili con la diffusa opinione che una buona teoria fisica sia descritta dal minor numero possibile di parametri.

Si ha pertanto che le perturbazioni nella CMB sono descrivibili tramite uno spettro *power law* per la maggioranza dei valori di k ($0.008 \text{ Mpc}^{-1} \lesssim k \lesssim 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$) e che eventuali deviazioni da tale andamento sono ascrivibili al rumore o alla varianza; per valori piccoli di k si riscontra una diminuzione dell'intensità, la quale però non dipende da un'inattendibilità del modello, ma potrebbe o essere intrinseca nella forma della CMB stessa o dipendere dall'elevato valore della varianza presente in questo intervallo.

3.2 Confronto tra dati e modelli

Le previsioni fatte per mezzo dei modelli di inflazione possono essere confrontate con i dati raccolti da PLANCK, in modo tale da valutarne la validità.

Tale confronto può essere effettuato utilizzando tre diverse metodologie (cfr [2]):

- lo spettro delle perturbazioni scalari può essere parametrizzato a livello fenomenologico, ovvero l'equazione teorica $P_s(|\bar{k}|) = \frac{k^3}{2\pi^2}|R_{\bar{k}}|^2$, dove $R_{\bar{k}}$ è la fluttuazione sulla curvatura, può essere confrontato con $P_s(|\bar{k}|) = A_s \left(\frac{k}{k_*}\right)^B$, dove A_s rappresenta l'ampiezza della perturbazione scalare, k_* è il valore scelto per definire la scala e l'esponente B può essere trovato attraverso uno sviluppo in serie di n_s e del relativo *running of spectral index* $\frac{dn_s}{d \log k}$. Analogamente si può sviluppare lo spettro delle perturbazioni tensoriali, utilizzando al posto di $|R_k|$ l'ampiezza dei due stati di polarizzazione $|h_{\bar{k}}^+|$ e $|h_{\bar{k}}^\times|$
- viene espressa in forma analitica la dipendenza dello spettro delle perturbazioni in condizioni di *slow roll* dal parametro di Hubble e dalle *Hubble flow functions* (3.1), in modo che risulti $n_s - 1 = -2\epsilon_1 - \epsilon_2 - 2\epsilon_1^2 - (2C + 3)\epsilon_1\epsilon_2 - C\epsilon_2\epsilon_3$ con $C = \log 2 + \gamma_E - 2$ dove con γ_E è indicata la costante di Eulero-Mascheroni
- quando le condizioni di *slow roll* non sono completamente soddisfatte e non sono possibili approssimazioni analitiche degli spettri, il metodo utilizzato è completamente numerico

In [2] è possibile trovare un'accurata analisi dei limiti di validità di diversi modelli di inflazione, riassunti nella figura 3.4. In seguito, nei paragrafi 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 e 3.2.4, verranno discussi i soli casi di potenziale quadratico, quartico e legato alla PLI canonica e non canonica analizzati nel capitolo 2.

3.2.1 Potenziale quadratico

I modelli il cui potenziale può essere descritto da un singolo monomio possono essere genericamente indicati con

$$V(\phi) = \lambda m_p^4 \left(\frac{\phi}{m_p}\right)^n \quad (3.3)$$

(in questo caso il parametro λ generalizza la m utilizzata nel capitolo 2) e nel caso di approssimazione *slow roll* si possono calcolare (cfr [2]) i parametri dello spettro delle fluttuazioni come

$$n_s - 1 \simeq -2(n+2)(4N_* + n) \quad , \quad r \simeq \frac{16n}{4N_* + n} \quad (3.4)$$

dove $N_* = 70$ rappresenta il numero di *e-folding* al termine dell'inflazione.

Nel caso di potenziale quadratico $n = 2$ e si ha pertanto $n_s = 0.972$ (compatibile con quanto riportato in tabella 2.3), $r = 0.11$.

Come anticipato nel paragrafo 2.4.1, il calcolo di n_s permette di stimare il valore del parametro m inserito nel potenziale: già con i dati di COBE si era ottenuto $m \simeq 10^{-6}m_p$ (cfr [6]).

Confrontati con i dati osservativi (si veda la figura 3.4), i valori stimati attraverso questo modello non rientrano però nei limiti fissati da PLANCK: per questo motivo, l'andamento quadratico non è ritenuto una valida descrizione per il potenziale che determina l'inflazione.

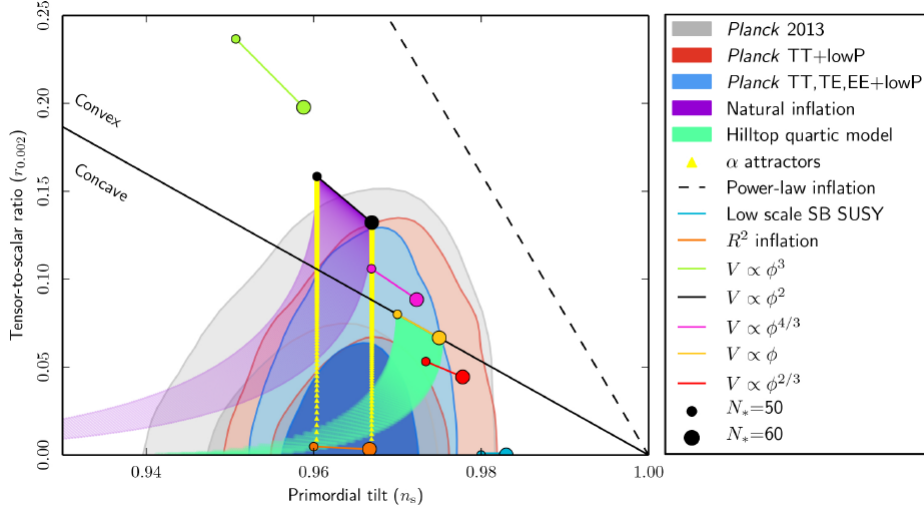


Figura 3.4: Valori dello *scalar spectral index* n_s e del rapporto tensore-scalare r relativi ai diversi modelli di inflazione e confrontati con i limiti dedotti dalle analisi dei dati di PLANCK. Si nota in particolare la presenza dei modelli con potenziale quadratico e con PLI canonica, descritti in 2; la validità di tali modelli dedotta dai dati osservativi è discussa nei paragrafi 3.2.1 e 3.2.3. Figura tratta da [2]

3.2.2 Potenziale quartico

Utilizzando la formula (3.4) riportata nel paragrafo 3.2.1 con $n = 4$, si ottengono i valori $n_s = 0.958$ (compatibile con quanto riportato in tabella 2.3), $r = 0.23$: anche in questo caso i dati di PLANCK smentiscono la validità di questo modello; è possibile dimostrare (cfr [1]) che tutti i modelli con potenziale $V(\phi) \propto \phi^{2p}$ con $p \geq 1$ non sono compatibili con le osservazioni.

3.2.3 PLI canonica

Come descritto nel paragrafo 2.2.3, la PLI con termine cinetico canonico è dovuta ad un potenziale con andamento esponenziale (cfr [8]): ponendosi nel caso più generale, nel quale anche il potenziale (2.15) può essere fatto rientrare, esso assume la forma

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(1 - \exp\left(\frac{q\phi}{m_p}\right) + \dots \right) \quad (3.5)$$

L'analisi dello spettro di potenza di tale potenziale permette di stimare lo *scalar spectral index* e il rapporto tensore-scalare come (cfr [2])

$$n_s - 1 \simeq -q^2 \exp\left(-\frac{q\phi}{m_p}\right) \frac{2 + \exp\left(-\frac{q\phi}{m_p}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{q\phi}{m_p}\right)\right)^2}, \quad r \simeq \frac{8q^2 \exp\left(-\frac{2q\phi}{m_p}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{q\phi}{m_p}\right)\right)^2} \quad (3.6)$$

Confrontando gli andamenti (3.6) con quelli dei dati di PLANCK nella figura 3.4 e nella successiva 3.5, si nota che i valori stimati attraverso la PLI con termine canonico non sono completamente compatibili con quelli di PLANCK: anche questo modello sembra dunque necessitare di correzioni per poter essere accettato.

3.2.4 PLI non canonica

Come anticipato nel paragrafo 3.2.3, i parametri degli spettri di potenza ottenuti per la PLI con termine cinetico canonico non rientrano nei limiti fissati dai dati PLANCK. È possibile, tuttavia, modificare l'andamento di ϕ e di $V(\phi)$ introducendo nuovi parametri attraverso i quali migliorare la compatibilità tra teoria e osservazioni: questo è ciò che, per esempio, è stato proposto in [10] e descritto nei paragrafi 2.2.4, 2.4.4 e 2.5.4.

Come si può notare dalla figura 3.5, variando il valore di α e di q è possibile avvicinare i valori di n_s e r della PLI non canonica a quelli ottenuti da PLANCK: una buona compatibilità si ha, per esempio, nel caso $\alpha = 6$, $q = 50$ già proposti in tabella 2.4.

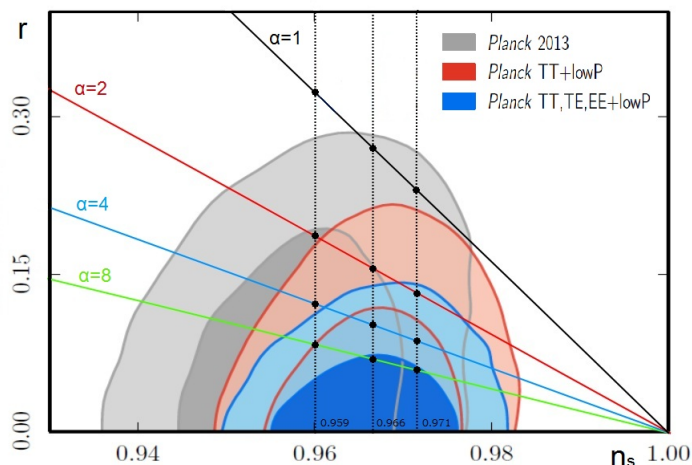


Figura 3.5: Compatibilità tra n_s e r ottenuti dai dati PLANCK e ricavati attraverso le PLI al variare dei parametri α e q . Le rette sono calcolate per $\alpha = 1$ (PLI canonica, nera), $\alpha = 2$ (rosso), $\alpha = 4$ (azzurro), $\alpha = 8$ (verde). I punti sono ottenuti nel caso $q = 50$ ($n_s = 0.959$), $q = 60$ ($n_s = 0.966$) e $q = 70$ ($n_s = 0.971$). La scala risulta diversa da quella riportata nella figura 3.4 perchè si è usato r calcolato sulla scala di 0.05 Mpc^{-1} anzichè $r_{0.002}$. Figura tratta da [2] per i dati di PLANCK e rielaborata come in [10] per ottenere le rette delle PLI

La formulazione di PLI non canonica proposta in [10] fornisce quindi un risultato estremamente valido, in quanto perfettamente compatibile con quanto ricavato dalle analisi PLANCK.

Conclusioni

In questo elaborato è stato affrontato lo studio della teoria dell'Inflazione con particolare riferimento ai modelli aventi potenziale quadratico o quartico e a due casi di *Power Law Inflation*, aventi rispettivamente termine cinetico canonico e non.

Di tali modelli, sono state derivate o presentate le equazioni necessarie a stimare

- potenziale $V(\phi)$
- parametri di *slow roll* ϵ, η
- evoluzione del termine medio del campo $\phi(t)$ e del fattore di scala $a(t)$
- numero di *e-folding* N al termine della fase inflazionaria e possibilità di uscita da essa
- spettri di potenza delle fluttuazioni scalari $\delta_{\bar{k}}$ e tensoriali $A_{\bar{k}}$
- *scalar e tensor spectral index* n_s e n_t
- rapporto tensore-scalare r

I parametri n_s e r sono stati anche confrontati con i limiti che ad essi vengono posti grazie alle analisi del 2015 dei dati di PLANCK. È emerso che i modelli di Inflazione con potenziale dipendente dal campo secondo un semplice monomio sono sfavoriti, in quanto i loro spettri si discostano da quelli misurati. I modelli PLI invece presentano diverse possibilità: mentre il modello di Harrison-Zel'dovich è smentito da un valore di n_s che sembra propendere per gli spettri rossi, il caso con termine cinetico canonico proposto in [8] ha parametri che sembrano non essere compatibili con i dati. Il caso di PLI proposta invece in [10] permette di stimare dei valori che rientrano nei limiti posti da PLANCK. Allo stesso tempo, tale modello permette di giustificare l'uscita dalla fase di inflazione, cosa che nel caso canonico non è permessa e costituisce il cosiddetto *graceful exit problem*.

Il modello presentato in [10] costituisce allora un valido candidato per la descrizione dell'Inflazione: esso, ovviamente, non è l'unico ma rappresenta un esempio di quella che potrebbe essere la strada da intraprendere per arrivare un giorno a comprendere appieno questo fenomeno.

Bibliografia

- [1] R. Adam et al. (2015),
Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results
ASTRONOMY & ASTROPHYSICS MANUSCRIPT
arXiv:astro-ph/1502.01582v2
- [2] P.A.R. Ade et al. (2015),
Planck 2015 results. XX. Constraints on Inflation
ASTRONOMY & ASTROPHYSICS MANUSCRIPT
arXiv:astro-ph/1502.02114v
- [3] C. Coles, F. Lucchin (2002),
COSMOLOGY-The origin and evolution of Cosmic structure Second Edition
Chapter 2 - The Friedmann models
JOHN WILEY & SONS, Ltd
Baffins Lanes, Chichester
- [4] C. Coles, F. Lucchin (2002),
COSMOLOGY-The origin and evolution of Cosmic structure Second Edition
Chapter 7 - Phase transitions and Inflation
JOHN WILEY & SONS, Ltd
Baffins Lanes, Chichester
- [5] C. Coles, F. Lucchin (2002),
COSMOLOGY-The origin and evolution of Cosmic structure Second Edition
Chapter 13 - Cosmological perturbations
JOHN WILEY & SONS, Ltd
Baffins Lanes, Chichester
- [6] A.R. Liddle (1999),
An introduction to Cosmological Inflation
arXiv:astro-ph/9901124v1
- [7] A.R. Liddle (2003),
AN INTRODUCTION TO MODERN COSMOLOGY- Second Edition
Chapter 13 - The Inflationary Universe
JOHN WILEY & SONS, Ltd
Baffins Lanes, Chichester
- [8] F. Lucchin, S. Matarrese (1985),
Power law inflation
PHYSICAL REVIEW D 32, 1316
- [9] F. Lucchin, S. Matarrese, S. Mollerach (1993),
Blue perturbation spectra from Inflation
arXiv:astro-ph/9309054v1
- [10] V. Sahni, S. Unnikrishnan (2013),
Resurrecting power law Inflation in the light of Planck results
JOURNAL OF COSMOLOGY AND ASTROPARTICLE PHYSICS
topscience:JCAP10 (2013) 063
- [11] S. Tsujikawa (2003),
Introductory review of Cosmic Inflation
arXiv:hep-ph/0304257v1