Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
Corso di Laurea in Fisica

Tesi di laurea

Simmetrie e correnti elettromagnetiche nascoste

Relatore:
Dott. Luca Martucci

Candidato:
Tommaso Bertolini
Matricola 1073356

Anno Accademico 2015-2016

Sommario

Recentemente si è compreso che sistemi fisici in cui il campo elettromagnetico è accoppiato a vari tipi di materia sono caratterizzati dalla presenza di infinite simmetrie nascoste. L'obiettivo della tesi è di presentare, in una formulazione uniforme, l'identificazione di queste simmetrie, la derivazione delle corrispondenti correnti e cariche conservate ed esaminare questi risultati in alcuni modelli concreti.

Indice

Introduzione

L'elettromagnetismo è invariante sotto trasformazioni di simmetria "di gauge" parametrizzate da una fase che può variare in modo arbitrario lungo lo spaziotempo. Tale invarianza è naturalmente legata alla nozione di carica elettrica, associata alla trasformazione globale ottenuta prendendo la fase costante. Tutto ciò è ben noto fin quasi dalla fondazione della teoria ed è perciò sorprendente che solo in anni recentissimi sia stato fatto notare come questa invarianza di gauge possa produrre, in aggiunta alla solita corrente elettrica, infinite ulteriori correnti conservate. Tali correnti sono associate a trasformazioni di gauge locali con andamento asintotico non banale, dette "large gauge transformations", e sono state utilizzate in elettrodinamica quantistica per dare una spiegazione più fondamentale di alcune proprietà delle ampiezze di scattering (i cosiddetti "soft theorems").

Le large gauge transformations rivestono un'importanza simile, se non maggiore, all'interno della relatività generale, dove il loro ruolo è stato compreso con maggiore anticipo: a partire dagli anni Sessanta del secolo scorso è fiorente la discussione sulle simmetrie asintotiche, con applicazioni a temi che spaziano dalla (problematica) definizione di energia totale in sistemi con gravità al problema dell'informazione nella fisica quantistica dei buchi neri.

Motivato da questo contesto, lo scopo di questa tesi è ripercorrere, in ambito classico, i principali strumenti per trattare le simmetrie di una teoria di campo, con particolare attenzione alla simmetria di gauge dell'elettrodinamica classica. Nel capitolo 1 si rivisitano i teoremi di Noether e le loro conseguenze sulle leggi di conservazioni e sulle equazioni del moto. Nel capitolo 2 si approfondisce la discussione di questi risultati nel caso di simmetrie locali; si ricavano le infinite correnti conservate legate all'invarianza di gauge $U(1)$, discutendo le cariche associate e il loro legame con la scelta di gauge. Nel capitolo 3 si tratta il problema dal punto di vista Hamiltoniano: si applica la teoria dei sistemi vincolati al caso elettromagnetico e si mostra come le infinite cariche ottenute nel contesto Lagrangiano emergano naturalmente da richieste di consistenza della teoria.

Convenzioni In tutto il documento si usano le unità di misura del sistema di Gauss razionalizzato; la velocità della luce è posta a 1, e in coordinate cartesiane la metrica di Minkowski è rappresentata dalla matrice $diag(1, -1, -1, -1)$.

Capitolo 1

Simmetrie e cariche conservate

Un gran numero di sistemi fisici presenta invarianza sotto qualche trasformazione: traslazioni, trasformazioni di Lorentz, trasformazioni di scala, e molte altre. Tali trasformazioni sono dette simmetrie. Un risultato fondamentale della fisica teorica è la possibilità di ottenere da queste simmetrie delle leggi di conservazione. Nel formalismo Lagrangiano è possibile sfruttare queste invarianze grazie ai teoremi di Noether.

1.1 Teoremi di Noether

Descriviamo sommariamente l'approccio lagrangiano a una teoria di campo classica. Nella seguente discussione ci occuperemo solamente di lagrangiane dipendenti da derivate prime dei campi, anche se esistono estensioni a casi più generali. Consideriamo uno spazio-tempo di Minkowski n-dimensionale $M = \mathbb{R}^{1,n-1}$.

Consideriamo una teoria di m campi dinamici $\phi_{a=1,\dots m}$. Nel seguito, dove comparirà la scrittura ϕ senza indici, si intenderà fare riferimento alla collezione di tutti i campi.

Ricordiamo che, dato un funzionale $F(\phi)$, questo si dice differenziabile (secondo Gateaux) in ϕ se, $\forall\chi$ in un opportuno spazio di funzioni, esiste il limite $\frac{d}{d\epsilon}F(\phi+\epsilon\chi)\Big|_{\epsilon=0}$ come funzionale lineare nelle χ:

$$\frac{d}{d\epsilon}F(\phi+\epsilon\chi)\Big|_{\epsilon=0} = \int_M \chi_a(x)\frac{\delta F}{\delta\phi_a}(x)\, d^n x$$

La $\frac{\delta F}{\delta\phi_a}(x)$ è detta derivata funzionale di F rispetto a X_a. Al primo ordine, potremmo scrivere la variazione $\delta F = F(\phi+\delta\phi) - F(\phi)$ come

$$\delta F = \int_M \delta\phi_a(x)\frac{\delta F}{\delta\phi_a}(x)\, d^n x$$

L'azione è un funzionale $S[\phi]$ dei campi, e per località chiediamo che sia esprimibile nella forma

$$S = \int_M \mathscr{L}(x, \phi, \partial\phi)\, d^n x$$

dove $\mathscr{L}(x, \phi, \partial\phi)$ è la (densità) Lagrangiana. Le equazioni del moto dei campi si ricavano dal principio di azione stazionaria: imponendo $\delta S[\phi] = 0$ si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \left(\delta\phi_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_a} + \partial_\mu \delta\phi_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right) d^n x \\ &= \int \delta\phi_a \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right) d^n x = 0\end{aligned}$$

si riconduce a:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} = 0 \tag{1.1}$$

Nel seguito ci si riferirà ai termini

$$L^a = \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \tag{1.2}$$

come *derivate di Eulero* di $\mathscr{L}$.

Supponiamo ora che l'azione sia invariante sotto certe trasformazioni. Consideriamo trasformazioni del tipo

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto y^\mu = y^\mu(x) \\ \phi(x) &\mapsto \tilde{\phi}(y) = \tilde{\phi}(\phi(x), x) \end{aligned} \tag{1.3}$$

dove $y(x)$ è un diffeomorfismo. Affinché questa sia una trasformazione di simmetria, richiediamo che sia

$$S[\tilde{\phi}] = S[\phi] \tag{1.4}$$

Cioè:

$$\int_{\tilde{M}} \mathscr{L}(y, \tilde{\phi}, \tilde{\partial}\tilde{\phi})\, d^n y = \int_M \mathscr{L}(x, \phi, \partial\phi)\, d^n x$$

dove $\tilde{\partial}$ indica le derivate rispetto alle nuove variabili y. Cambiando variabili, e indicando con $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|$ il modulo del determinante della Jacobiana di $y(x)$, possiamo scrivere:

$$\int_M \left[\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \mathscr{L}(y, \tilde{\phi}, \tilde{\partial}\tilde{\phi}) - \mathscr{L}(x, \phi, \partial\phi) \right] d^n x = 0$$

Si vede, quindi, che l'azione è invariante sotto le trasformazioni (1.3) se l'integrando è una divergenza totale

$$|\frac{\partial y}{\partial x}|\mathscr{L}(y,\tilde{\phi},\tilde{\partial}_\mu\tilde{\phi}) - \mathscr{L}(x,\phi,\partial_\mu\phi) = \partial_\nu\Lambda^\nu \tag{1.5}$$

assumendo che Λ^μ non contribuisca a eventuali termini di bordo. Diremo che una lagrangiana è invariante se $\partial_\nu\Lambda^\nu = 0$, mentre la teoria è invariante se vale (1.4). Se le trasformazioni (1.3) dipendono regolarmente da un certo numero di parametri, è spesso sufficiente esaminare le trasformazioni infinitesime

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi'(x') &= \phi(x) + \bar{\delta}\phi(x) \end{aligned} \tag{1.6}$$

É utile definire anche la cosiddetta variazione in forma,

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$$

Osserviamo che la variazione in forma commuta con le derivate:

$$\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\phi'(x) - \partial_\mu\phi(x) = \partial_\mu\delta\phi$$

Espandendo in serie di Taylor possiamo scrivere: $\phi'(x') = \phi'(x)+\delta x^\mu\partial_\mu\phi'(x)+\mathcal{O}(\delta^2)$, che inserita nella definizione di variazione in forma, ci dà la relazione al primo ordine:

$$\delta\phi(x) = \bar{\delta}\phi(x) - \delta x^\mu\partial_\mu\phi(x)$$

Possiamo ora riscrivere la variazione della densità di Lagrangiana in un modo che ci sarà più utile in seguito. Per la (1.5) assumiamo che $|\frac{\partial y}{\partial x}|\mathscr{L}(y,\tilde{\phi},\tilde{\partial}_\mu\tilde{\phi}) - \mathscr{L}(x,\phi,\partial_\mu\phi)$ sia una divergenza. Osserviamo preliminarmente che

$$|\frac{\partial x'}{\partial x}| = |\frac{\partial x+\delta x}{\partial x}| = \left|\mathbb{1} + (\partial_\nu\delta x^\mu)_{\nu\mu}\right| \cong 1 + \partial_\mu\delta x^\mu$$

Procediamo allora sostituendo quanto trovato e aggiungendo e sottraendo $\mathscr{L}(x,\phi'(x),\partial\phi'(x))$ al primo membro della (1.5). Ometteremo di indicare la dipendenza dalle derivate dei campi nella densità di lagrangiana per brevità; al primo ordine nelle variazioni si ha:

$$\begin{aligned} &(1+\partial_\mu\delta x^\mu)\mathscr{L}(x',\phi'(x')) - \mathscr{L}(x,\phi(x)) = \\ &= \mathscr{L}(x',\phi'(x')) + \partial_\mu\delta x^\mu\mathscr{L}(x',\phi'(x')) - \mathscr{L}(x,\phi'(x)) + \mathscr{L}(x,\phi'(x)) - \mathscr{L}(x,\phi(x)) \\ &= \partial_\mu\delta x^\mu\mathscr{L}(x',\phi'(x')) + \frac{d}{dx^\mu}(\mathscr{L}(x,\phi'(x))\delta x^\mu + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\bar{\delta}\partial_\mu\phi_a \\ &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right) + \partial_\mu(\mathscr{L}\delta x^\mu) \\ &= L^a\delta\phi_a + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a + \mathscr{L}\delta x^\mu\right) = \partial_\mu\Lambda^\mu \end{aligned} \tag{1.7}$$

Con le L^a definite in 1.2.

Ora abbiamo tutto il necessario per enunciare il primo teorema di Noether.

Teorema 1.1.1 (Noether, I)**.** *Se l'azione è invariante per trasformazioni di un gruppo a r parametri, allora esistono r combinazioni lineari delle derivate di Eulero che sono divergenze.*

Dimostrazione. Sia ϵ la variabile che parametrizza il gruppo. Le variazioni δx^μ , $\delta\phi_a$ sono lineari nei parametri (le variazioni infinitesime sono l'espansione al primo ordine dei parametri)

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \epsilon^i \Delta_i x^\mu \\ \delta\phi_a &= \epsilon^i \Delta_i \phi_a \end{aligned} \tag{1.8}$$

E anche la funzione Λ che compare nella (1.5) lo sarà, e scriveremo $\Lambda = \epsilon^i \tilde{\Lambda}_i$. Recuperando la (1.7) riscriviamo:

$$\begin{aligned} 0 &= L^a \delta\phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta\phi_a + \mathscr{L} \delta x^\mu \right) - \partial_\mu \Lambda^\mu \\ &= L^a \epsilon^i \Delta_i \phi_a + \epsilon^i \partial_\mu K_i^\mu \\ &= \epsilon(L^a \Delta_i \phi_a + \partial_\mu K_i^\mu) = 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dove nella seconda riga si è posto

$$K_i^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \Delta_i \phi_a + \mathscr{L} \Delta_i x^\mu - \tilde{\Lambda}_i^\mu \tag{1.10}$$

Eliminando l' ϵ deve seguire l'annullarsi del termine tra parentesi, da cui si conclude che

$$L^a \Delta_i \phi_a = -\partial_\mu K_i^\mu \tag{1.11}$$

cioè esistono combinazioni lineari delle derivate di Eulero che sono divergenze. Ciò significa che, "on-shell"[1], abbiamo $\partial_\mu K_i^\mu = 0$. □

Una K che soddisfi $\partial_\mu K^\mu = 0$ è detta una corrente conservata; vedremo che una simile K può portare alla definizione di quantità conservate lungo l'evoluzione del sistema Le leggi di conservazione che si ricavano dal teorema 1.1.1 sono talvolta chiamate *deboli* in quanto valgono solo per le soluzioni delle equazioni di E.-L.

Le trasformazioni per cui si applica questo risultato sono dette *simmetrie rigide* o *globali*, in quanto gli ϵ che le parametrizzano non dipendono dalle coordinate spazio-temporali.

Supponiamo ora, invece, che le le simmetrie siano locali, cioè che i parametri delle trasformazioni siano funzioni delle coordinate. Questo è il caso,

[1] con la seguente terminologia intendiamo "una volta imposte le equazioni del moto"

per esempio, delle simmetrie di gauge in elettromagnetismo. Vedremo con il seguente risultato come, se la teoria presenta invarianza sotto una simile classe di trasformazioni, le equazioni del moto risultino dipendenti tra di loro. In un certo senso, la presenza di questa libertà sotto un'ampia classe di trasformazioni rende il problema sottodeterminato, cioè sembrerebbe che vi siano più gradi di libertà che equazioni indipendenti. Ciò che accade in molti casi di interesse è che configurazioni di campi che sono collegate da una di queste trasformazioni, vengono considerate equivalenti in quanto descrivono lo stesso stato fisico. Introducendo dei vincoli per selezionare, tra le tante equivalenti, una particolare classe di configurazioni, si riducono i gradi di libertà del sistema che, in questo modo, non presenta più la degenerazione che aveva in origine.

Teorema 1.1.2 (Noether, II)**.** *Se l'azione è invariante per trasformazioni di un gruppo parametrizzato da una funzione arbitraria, allora esiste un'identità che coinvolge le derivate di Eulero L^a.*

Dimostrazione. Dimostriamolo limitatamente al caso in cui le variazioni siano del tipo:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \epsilon(x)\Delta x^\mu \\ \delta\phi^a &= \epsilon(x)g^a(x) + \partial_\mu\epsilon(x)f^{a\mu}(\phi, x) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Il teorema fu in origine dimostrato per variazioni con derivate di ordine arbitrario, ma per noi sarà sufficiente limitarci a quanto indicato. Scegliamo le $\epsilon(x)$ in modo che svaniscano sul bordo del dominio di integrazione. Con l'annullarsi di un termine di bordo possiamo scrivere:

$$0 = \delta S = \int L_a\delta\phi^a\, d^n x = \int L_a[\epsilon(x)g^a(x) + \partial_\mu\epsilon(x)f_k^{a\mu}(\phi, x)]$$

allora, spostando la derivata del secondo addendo, e con un'integrazione otteniamo:

$$0 = \int \epsilon(x)\,[L_a g^a(x) - \partial_\mu(L_a f^{a\mu}(\phi, x))]\, d^n x$$

che per l'arbitrarierà delle ϵ implica:

$$L_a g^a(x) - \partial_\mu(L_a f^{a\mu}(\phi, x) = 0 \tag{1.13}$$

Queste sono le identità cercate. □

Si noti che queste identità valgono senza bisogno di imporre le equazioni del moto, e mostrano che le equazioni della teoria non sono indipendenti tra loro.

1.2 Cariche conservate

Avendo ottenuto da simmetrie globali una corrente che soddisfa $\partial_\mu K^\mu = 0$ on-shell, è possibile ottenere delle quantità conservate nella teoria. Per contretizzare, poniamoci inizialmente nel dominio $\mathbb{R}^{1,3}$ in coordinate $(t, \bar{x})$. Sia $\Omega = [t_1, t_2] \times B(r)$ dove $B(r)$ è la palla spaziale di raggio r .

Chiaramente $\int_\Omega \partial_\mu K^\mu \, d^4x = 0$. Denotanto con Σ_1, Σ_2 le regioni spaziali a t_1, t_2 e con S la superficie "laterale" di questo cilindro 4-dimensionale ($S = I \times S^2_{(r)}$), e con n il versore normale a queste,

$$0 = \int_\Omega \partial_\mu K^\mu \, d^4x = -\int_{\Sigma_1} K^\mu n_\mu \, d\Sigma + \int_{\Sigma_2} K^\mu n_\mu \, d\Sigma + \int_S K^\mu n_\mu \, d\Sigma$$

Se K^μ si annulla rapidamente su S, come spesso accade nel caso $r \to \infty$, abbiamo che:

$$Q(t_1) = \int_{\Sigma_1} K^0 \, d\Sigma = \int_{\Sigma_2} K^0 \, d\Sigma = Q(t_2)$$

cioè la carica $Q(t)$ definita da $\int_{t \equiv cost} K^\mu n_\mu \, d\Sigma$ è costante nel tempo[2]. Nel caso in cui non si annullasse il termine di flusso attraverso la superficie spaziale (per esempio nel caso in cui la regione di integrazione sia spazialmente limitata) l'equazione di continuità dice comunque che la variazione di carica in quella regione è opposta al flusso uscente da questa: la carica non può scomparire in un punto e riapparire in un altro, deve muoversi "con continuità".

Potremmo, in generale, essere intessati non solo a superfici a t costante: in coordinate diverse, il parametro dell'evoluzione dinamica potrebbe essere un altro.

Quanto detto si estende però naturalmente a una formulazione geometrica più intrinseca, purchè si annulli il termine di bordo $\int_S K^\mu n_\mu \, d\Sigma$

Sia V la regione di integrazione voluta[3], con bordo $\partial V = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup S$ dove $\Sigma_{1,2}$ sono le superfici di interesse, allora, se $K = K_\mu dx^\mu$ (intesa come 1-forma differenziale) si annulla su S

$$\int_V \partial_\mu K^\mu d^n x = \int_V d(*K) = \int_{\partial V} *K = {}^4 - \int_{\Sigma_1} *K + \int_{\Sigma_2} *K = 0$$

$$Q_1 = \int_{\Sigma_1} *K = \int_{\Sigma_2} *K = Q_2$$

Dove d è il differenziale esterno e $*$ è il duale di Hodge. Nella seconda uguaglianza si è usato il teorema di Stokes, e nella terza il fatto che K si annulli su S.

[2] Si può inoltre dimostrare che una carica così definita è uno scalare di Lorentz se K si annulla all'infinito spaziale con sufficiente rapidità.

[3] Con, ovviamente, le necessarie regolarità.

[4] Il segno meno nel caso in cui l'orientazione indotta sulle due superfici da V sia opposta.

1.2.1 Un esempio

Consideriamo la lagrangiana:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - D_\mu\varphi\bar{D}^\mu\bar{\varphi} + V(\varphi\bar{\varphi}) \tag{1.14}$$

che descrive campi elettromagnetici accoppiati ad un campo scalare complesso. Con D_μ si è indicata la derivata covariante $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$, e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. $\mathscr{L}$ è invariante per le trasformazioni globali

$$\varphi(x) \to \varphi(x)e^{iq\alpha} \tag{1.15}$$

dove α è un parametro costante. L'invarianza si verifica notando che φ compare sempre accoppiato a $\bar{\varphi}$. Le equazioni del modo per A sono:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = i[\bar{\varphi}D^\mu\varphi - \varphi D^\mu\bar{\varphi}] =: j^\nu \tag{1.16}$$

Applichiamo il primo teorema di Noether all'invarianza di gauge globale. La variazione dei campi è:

$$\begin{aligned} \delta\varphi(x) &= \varphi(x)e^{iq\alpha} - \varphi(x)|_{\mathcal{O}(\epsilon)} \\ &= \varphi(x)(1 + iq\alpha) - \varphi(x) = iq\alpha\varphi(x) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Quindi

$$\Delta\varphi(x) = iq\varphi \tag{1.18}$$

Quindi la corrente conservata, secondo la (1.10), è: $K^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\varphi}}\Delta\bar{\varphi}$, perchè i potenziali A non variano, e si calcola essere:

$$\begin{aligned} K^\mu &= (-iq(\varphi\partial^\mu\bar{\varphi} - \bar{\varphi}\partial^\mu\varphi) + 2q^2A^\mu\varphi\bar{\varphi}) \\ &= i[\bar{\varphi}D^\mu\varphi - \varphi D^\mu\bar{\varphi}] \end{aligned} \tag{1.19}$$

Il teorema di dice che on-shell si conserva la corrente $\partial_\mu K^\mu = \partial_\mu j^\mu = 0$ che compare in $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$. La corrente di particelle è conservata.

Se decidiamo di rendere locali le trasformazioni globali 1.15, per mantenere l'invarianza della Lagrangiana dobbiamo far variare anche A:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \to& \varphi(x)e^{iq\alpha(x)} \\ A_\mu(x) \to& A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Possiamo applicare il secondo teorema di Noether. Scriviamo le variazioni dei campi nella forma indicata da 1.12:

$$\begin{aligned} \delta A^\mu = \alpha(x)\cdot 0 + \partial_\nu\alpha(x)g^{\mu\nu} \quad &\to g^{0,1,2,3} = 0 \quad f^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \\ \delta\varphi(x) = \alpha(x)\cdot iq + \partial_\nu\alpha(x)\cdot 0 \quad &\to g^{\varphi} = iq \quad f^{\varphi\nu} = 0 \\ \delta\bar{\varphi}(x) = \delta\bar{\varphi(x)} \quad &\to g^{\bar{\varphi}} = -iq \quad f^{\bar{\varphi}\nu} = 0 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Da cui l'identità del secondo teorema di Noether è:

$$iq(L^{\varphi} - L^{\bar{\varphi}}) - \partial_\mu L^\mu = 0 \tag{1.22}$$

Il caso più semplice con $\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$, con j^μ sorgente esterna non dinamica, presenta una differenza.

Qui non è più vero che l'invarianza di gauge implica $\partial_\mu j^\mu = 0$, semmai il contrario: dobbiamo richiedere che $\partial_\mu j^\mu = 0$ affinchè l'azione sia gauge-invariante.

Le identità di Noether sono:

$$\partial_\mu L^\mu = 0 \rightarrow \partial_\mu(\partial_\nu F^{\mu\nu} - j^\mu) = 0 \tag{1.23}$$

ma non mostrano granchè di nuovo: facilmente si poteva già notare che $\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ per antisimmetria di F, e $\partial_\mu j^\mu = 0$ per ipotesi.

Capitolo 2

Applicazioni all'invarianza di gauge U(1)

Avevamo visto che la lagrangiana

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - D_\mu\varphi\bar{D}^\mu\bar{\varphi} + V(\varphi\bar{\varphi}) \tag{2.1}$$

è invariante per le trasformazioni di gauge locali

$$\begin{aligned} \varphi(x) \to& \varphi(x)e^{iq\alpha(x)} \\ A_\mu(x) \to& A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

note come trasformazioni di gauge locali. Queste, tuttavia, non rientrano nella classe di trasformazioni considerate per il primo teorema di Noether, quindi soffermiamoci a chiarire come si possa utilizzare quel risultato nel caso di simmetrie locali.

2.1 Correnti per simmetrie locali

Nonostante il primo teorema di Noether fornisca correnti conservate da simmetrie globali, è possibile sfruttarlo anche in presenza di simmetrie locali. Per non appesantire la notazione consideriamo un solo campo ϕ.

Supponiamo che l'azione sia invariante per le trasformazioni che producono sui campi le variazioni $\delta_\epsilon\phi$, dove $\epsilon(x)$ è una funzione arbitraria ("infinitesima") che parametrizza le trasformazioni locali, nella forma presentata in (1.1.2).

$$\delta_\epsilon\phi = \epsilon(x)g(x) + \partial_\mu\epsilon(x)f^\mu(\phi, x) \tag{2.3}$$

Fissata una funzione ϵ, poniamo

$$\epsilon(x) = \varepsilon\lambda(x)$$

Possiamo allora pensare le 2.3 come trasformazioni globali di parametro ε

$$\delta\phi = \varepsilon\left[\lambda(x)g(x) + \partial_\mu\lambda(x)f^\mu(\phi, x)\right] \tag{2.4}$$

Da queste, con i metodi precedentemente indicati otteniamo, allora, una corrente K^μ con $\partial_\mu K^\mu = 0$ on-shell, e K^μ dipenderà dalla funzione λ che abbiamo scelto, $K^\mu(\lambda)$.

Prima di procedere oltre vediamo una caratteristica peculiare della corrente prodotta tramite simmetrie locali, ovvero che la sua carica si può sempre ridurre ad un integrale su una superficie di codimensione 2.

Dal secondo teorema di Noether avevamo ottenuto l'identità:

$$N := Lg(x) - \partial_\mu(Lf^\mu(\phi, x)) = 0 \tag{2.5}$$

Ora, osserviamo che utilizzando la (2.3) possiamo scrivere:

$$L\delta_\epsilon\phi = Lg(x)\epsilon(x) + Lf^\mu(\phi, x)\partial_\mu\epsilon(x) = Lg\epsilon - \epsilon\partial_\mu(Lf^\mu) + \partial_\mu(\epsilon Lf^\mu) = \epsilon N + \partial_\mu S^\mu \tag{2.6}$$

Dove si è definito

$$S^\mu = \lambda Lf^\mu \tag{2.7}$$

Ripensando al primo teorema di Noether, si può ricordare come si era arrivati a scrivere:

$$L\delta\phi = -\partial_\mu K^\mu$$

off-shell. Allora K, che è la corrente per le simmetrie globali, ed S obbediscono alla stessa equazione, con la differenza che $S = 0$ se imponiamo le equazioni del moto. Possiamo, dunque, scrivere:

$$\partial_\mu(-K^\mu + S^\mu) = 0$$

Il che implica, essendo il dominio semplicemente connesso, che

$$K^\mu = S^\mu + \partial_\nu \tilde{K}^{\nu\mu} \tag{2.8}$$

con $\tilde{K}$ antisimmetrica nei due indici. Poichè $S = 0$ on-shell, otteniamo quindi il risultato anticipato, cioè che on-shell possiamo ridurre la carica ad un integrale su una superficie di codimensione 2. Nel caso di coordinate $(x^0, \bar{x})$ avevamo:

$$Q(t) = \int_{x^0 \equiv t} K^0\, d^{n-1}x =^{(2.8)} \int_{x^0 \equiv t} \partial_i K^{0\,i}\, d^{n-1}x = \int_{\partial\Sigma, x^0 \equiv t} n_i K^{0\,i}\, d^{n-1}x \tag{2.9}$$

in un modo analogo a quanto succede nel calcolo della carica elettrica attraverso la legge di gauss, $\nabla \cdot \bar{E} = \rho$

$$Q = \int \rho d^3x = \int \nabla \cdot \bar{E} d^3x = \int_{\Sigma_\infty} \bar{E} \cdot \bar{n} d\Sigma \tag{2.10}$$

In modo indipendente dalle coordinate potremmo scrivere la 2.8 nel linguaggio delle forme differenziali come

$$d * (-K + S) = 0 \implies *K = - * S + d\omega \tag{2.11}$$

Dove $\omega = *\tilde{K}$. In modo del tutto analogo, si arriva a

$$\int_{\Sigma} *K = \int_{\partial\Sigma} *\tilde{K} \tag{2.12}$$

Non dobbiamo dimenticare che le nostre correnti K^μ dipendevano da quale funzione arbitraria $\epsilon(x)$ avevamo fissato per ricavarne una simmetria globale, $K^\mu = K^\mu(\lambda)$. Chiaramente, allora, anche $\tilde{K}$ ne dipenderà, e ci si imbatte a questo punto in una distizione:

- se i parametri $\lambda(x)$ delle trasformazioni si annullano sul bordo del dominio di integrazione, la carica che si definisce è nulla. Si parla in letteratura di *"small" gauge transformations.*
- se le trasformazioni sono non banali sul bordo, può essere possibile definire una carica. Si parla di *"large" gauge transformation.*

2.1.1 Applicazione all'elettromagnetismo

A questo punto possiamo tornare alla trattazione dell'esempio menzionato ad inizio sezione, con lagrangiana

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - D_\mu\phi\bar{D}^\mu\bar{\phi} + V(\varphi\bar{\varphi}) \tag{2.13}$$

e le trasformazioni di gauge locali menzionate in 2.2.
Le variazioni dei campi erano state scritte in (1.21). La corrente che si conserva grazie all'invarianza di gauge locale (resa "globale" con le tecniche menzionate in precedenza) è:

$$\begin{aligned} K^\mu =& \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_a}\delta\phi_a = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu A_\nu}\delta A_\nu + \lambda j^\mu \\ K^\mu =& -F^{\mu\nu}\partial_\nu\lambda + \lambda j^\mu \end{aligned} \tag{2.14}$$

dove j^μ è la corrente che compare nelle equazioni del moto di A^μ.

Nel caso di $\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$, con j^μ sorgente esterna non dinamica, produce la stessa corrente:

$$K^\mu = F^{\mu\nu}\partial_\nu\lambda - \lambda j^\mu \tag{2.15}$$

In entrambi i casi, la due-forma di corrente $\tilde{K}$ è $\lambda F_{\mu\nu}$

2.2 Gauge fixing e cariche asintotiche

Siamo in presenza di una simmetria locale: le ϵ del capitolo 1 sono i parametri delle trasformazioni di gauge.

Configurazioni di potenziali che differiscono per una trasformazione di gauge sono fisicamente equivalenti. Solitamente si procede effettuando una scelta di gauge, ovvero imponendo alcuni vincoli che, all'interno della classe di equivalenza, individuino configurazioni di potenziali con determinate proprietà. Si escludono così le trasformazioni che portano i campi della teoria in configurazioni equivalenti. Abbiamo visto, però, che queste simmetrie locali possono produrre cariche non banali nel caso in cui non si annullino all'infinito; questa caratteristica è spesso posseduta dalle trasformazioni di gauge residue, che sembrano così candidate a produrre delle correnti conservate. Come questo accada dipende dal gauge scelto: nella prossima sezione seguiamo le strade di [1] e [2, 3].

2.2.1 Gauge di Coulomb

Imponiamo per gauge fixing $A_0 = 0$. Questo lascia liberi parametri α tali che $\partial_0 \alpha = 0$.

Come ulteriore condizione chiediamo allora $\partial_i A^i = 0$; la scelta è detta gauge di Coulomb. Questo impone sui parametri di gauge:

$$\partial_0 \alpha = 0 = \nabla^2 \alpha \tag{2.16}$$

Ciò elimina le small gauge transformations: se infatti $\alpha(\bar{x})$ soddisfa $\nabla^2 \alpha = 0$, α deve essere non banale all'infinito spaziale. Un esempio di soluzione può essere la funzione $\alpha(r, \Theta) = r^l Y_l^m(\Theta)$, dove Y_l^m è un'armonica sferica e con Θ si sono indicate le variabili angolari. Queste α formano le *large gauge transformations* considerate in [1]. Come suggerimento per la loro rilevanza fisica, presentiamo la seguente linea di pensiero.

Consideriamo campi elettromagnetici liberi, inizialmente nulli all'istante $t = 0$. Essendo il gauge fissato, i potenziali che li descrivono devono essere necessariamente nulli. Diamo come condizione iniziale anche $\partial_0 A_i(0, \bar{x}) = 0$. Eseguiamo a questo punto una trasformazione di gauge residua di parametro α che soddisfi le (2.16), ottenendo $A_i = \partial_i \alpha$.

Affinchè i nuovi potenziali soddisfino ancora le condizioni di annullamento all'infinito, dovremo modicarne l'andamento oltre una certa distanza $|\bar{x}| \sim \lambda$. Al di fuori di questa regione limitata, il potenziale non può più essere di puro gauge (non può contemporaneamente essere $A_i = \partial_i \alpha$ ed avere un buon andamento all'infinito), dunque lì i campi saranno diversi da zero.

Durante l'evoluzione temporale, per causalità, i campi E e B rimangono nulli attorno all'origine fino a che non arriva l'informazione da oltre $|\bar{x}| \sim \lambda$. In un certo senso, queste *large transformation* "rompono spontaneamente" la simmetria dello stato di vuoto, portando una configurazione a campi nulli in una con evoluzione non banale.

2.2.2 Corrente

La corrente che si ottiene per le *large gauge transformation* (2.16) è:

$$K^\mu = \partial_i \alpha F^{\mu i} - \alpha j^\mu \tag{2.17}$$

Il problema è che non possiamo sperare, come in sezione I, di definire cariche integrando e trascurando i contributi di K all'infinito spaziale: essendo $\nabla^2\alpha = 0$, α è divergente in $r = +\infty$. Anche prendendo j a supporto compatto, rimane un termine proporzionale a αF che non consente l'integrazione su tutto lo spazio.

Cerchiamo a questo punto di capire almeno che aspetto dovrebbero avere le cariche prodotte da questa simmetria; senza restringerci al gauge di Coulomb (che, abbiamo visto, ci lascia con delle α patologiche per quanto riguarda l'andamento asintotico), proviamo a scrivere la carica in alcuni semplici casi. Si assumerà che i parametri α considerati ammettano limite finito per $r \to \infty$ e che $\partial_r \alpha$ svanisca all'infinito.

Quadricorrente a simmetria sferica Scriviamo, sfruttando le equazioni del moto, $K^0 = \partial_i(\alpha F^{0i})$. È noto che i campi prodotti da tale configurazione sono asintoticamente coulombiani. Allora si ha:

$$\begin{aligned} Q &= \int K^0 \, d^3x = \int \partial_i(\alpha F^{0i}) \, d^3x \\ &= \lim_{r\to\infty} \int \alpha \bar{E} \cdot \bar{n} r^2 \, d\Omega = \frac{q}{4\pi} \lim_{r\to\infty} \int \alpha \, d\Omega \end{aligned}$$

Dove q è la carica elettrica totale: $q = \int j^0 \, d^3x$. Scomponendo α in armoniche sferiche, si osserva che, per la simmetria sferica del campo coulombiano, l'unica carica non nulla è quella per $\alpha = Y_0^0 = cost$, che riproduce la carica elettrica totale. La carica è chiaramente conservata.

Campi di velocità Dal fatto che $Q = \lim_{r\to\infty} \int \alpha \bar{E} \cdot \bar{n} r^2 \, d\Omega$ vediamo che se i campi si annullano più velocemente di $\frac{1}{r^2}$ la carica che si definisce è nulla a meno che non si considerino delle α divergenti all'infinito spaziale. Volendo evitare questi comportamenti, scegliamo un campo che abbia l'andamento indicato: quello prodotto da una particella in moto uniforme. Il campo è:

$$\bar{E} = \frac{e}{4\pi R^2 \gamma^2} \frac{\bar{m} - \bar{v}}{(1 - \bar{m} \cdot \bar{v})^3}$$

Con $R = |\bar{x} - \bar{y}(\bar{t})|$ e $\bar{m} = \frac{\bar{x} - \bar{y}(\bar{t})}{|\bar{x} - \bar{y}(\bar{t})|}$. Il vettore $\bar{y}(\bar{t})$ descrive la posizione della particella all'istante di tempo (ritardato) $\bar{t}$.

Nel limite di grandi distanze dovremmo considerare l'espansione in r delle grandezze indicate. Il risultato a cui si arriva dopo qualche calcolo è:

$$\bar{E} \cdot \bar{n} \approx \frac{1}{4\pi r^2 \gamma^2} \frac{1}{(1 - v^2 \sin^2\theta)^{3/2}}$$

Dove θ è l'angolo tra la velocità e il versore di posizione. Prendendo l'asse z nella direzione di volo della particella, otteniamo

$$Q = \int \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \alpha \, d\Omega$$

Anche in questo caso la carica è conservata: usando la relazione [1] $\bar{B} = \bar{n} \times \bar{E}$ e il fatto che $\partial_r \alpha = 0$ si mostra che il flusso è nullo.

Anche qui, per α costante si ritrova (come atteso dalla forma della corrente) l'usuale carica elettrica, con la novità che, in assenza di simmetria sferica, esistono altre cariche non nulle.

2.2.3 Gauge radiale avanzato e ritardato

Un modo per produrre correnti integrabili è proposto in [2, 3]. Gli autori sono interessati a fenomeni di scattering, quindi le coordinate adottate e superfici considerate sono scelte di conseguenza.

Per descrivere la situazione dopo lo scattering si usano le coordinate ritardate $u, r, z, \bar{z}$ dove r è la distanza radiale dall'origine,

$$\begin{aligned} u =& t - r \\ z =& e^{i\varphi} tg \frac{\theta}{2} \qquad \theta, \varphi \text{ angoli polare e azimutale} \end{aligned} \tag{2.18}$$

In queste coordinate la metrica di Minkowski[2] è:

$$g = -du^2 - 2dudr + 2r^2 \gamma_{z\bar{z}} dz d\bar{z} \tag{2.19}$$

dove $\gamma_{z\bar{z}} = \frac{2}{(1+z\bar{z})^2}$ e nei prodotti si intende $dudr = \frac{1}{2}(du \otimes dr + dr \otimes du)$.

Per la situazione prima dello scattering è utilizzata, invece, la coordinata avanzata $v = t - r$. Saremo interessati a descrivere la situazione "molto prima" dello scattering e "molto dopo" lo scattering. A tal proposito consideriamo come regione di integrazione un diamante causale nel limite di estensione infinita. Il bordo dello spazio-tempo sarà identificato con le due regioni:

- $\mathscr{I}^-$: infinito di tipo luce passato, si identifica con i punti di origine, nel passato, delle traiettorie di tipo luce ;
- $\mathscr{I}^+$: infinito di tipo luce futuro, si identifica con i punti di arrivo, nel futuro, delle traiettorie di tipo luce ;

Nelle coordinate scelte $\mathscr{I}^+$ è la superficie $\mathbb{R} \times S^2$ a $r \to +\infty$ parametrizzata da $u, z, \bar{z}$; il bordo di $\mathscr{I}^+$ si trova a $u = \pm\infty$ e lo denotiamo con $\mathscr{I}^+_\pm$.

[1] valida nell'approssimazione di grandi distanze

[2] $diag(-1, 1, 1, 1)$ in coordinate cartesiane

Le equazioni del moto per i campi di gauge sono:

$$\nabla^\nu F_{\nu\mu} = j_\mu \tag{2.20}$$

dove $F = dA$ e j è la corrente conservata di materia.
L'invarianza di gauge è:

$$A \sim A + d\Lambda \tag{2.21}$$

In coordinate:$A_a \sim A_a + \partial_a \Lambda$ con $a = r, u, z, \bar{z}$. Possiamo fissare il gauge richiedendo:

$$A_r = 0$$

Per far ciò basta eseguire una trasformazione con:

$$\Lambda = -\int A_r\, dr(r, u, z\bar{z}) + c(u, z, \bar{z})$$

cioè Λ è una primitiva di A_r in r, più una funzione costante in r. Chiedendo, inoltre, come condizione al contorno che $A_u|_{\mathscr{I}^+} = 0$, si determina c come una funzione $\epsilon(z, \bar{z})$ dipendente dalle sole coordinate angolari. Queste $\epsilon(z, \bar{z})$ generano trasformazioni di gauge $A \to A + d\epsilon$ che sono non banali all'infinito e cambiano l'andamento al bordo di A. Esse costituiscono le large gauge transformation considerate in [2, 3] .

Discutiamo gli andamenti asintotici relativamente alla coordinata radiale. In linea di principio $\mathcal{A}_{z,\bar{z}}$ potrà essere $\mathcal{O}(1)$ in $\mathscr{I}^+$. Dalla condizione $A_u|_{\mathscr{I}^+} = 0$ assumiamo che $\mathcal{A}_u$ sia $\mathcal{O}(r^{-1})$ in $\mathscr{I}^+$, e quindi avremo le seguenti espansioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_z(r, u, z, \bar{z}) &= A_z(u, z\bar{z}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} A_z^{(n)}(u, z, \bar{z}) \\ \mathcal{A}_u(r, u, z, \bar{z}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} A_u^{(n)}(u, z, \bar{z}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ora vediamo gli andamenti asintotici delle componenti di F: ogni derivata in r abbasserà l'ordine di una unità. Scriveremo, in espasione in serie: $F_{\mu\nu}(r, u, z, \bar{z}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} F_{\mu\nu}^{(n)}(u, z, \bar{z})$ e gli ordini dominanti saranno:

$$\begin{aligned} F_{z\bar{z}} &= \mathcal{O}(1) = \partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z \\ F_{ur} &= \mathcal{O}(r^{-2}) = -\partial_r \mathcal{A}_u = \frac{A_u}{r^2} \\ F_{uz} &= \mathcal{O}(1) = \partial_u A_z + \mathcal{O}(r^{-1}) \\ F_{rz} &= \mathcal{O}(r^{-2}) = -\partial_r \mathcal{A}_z = \frac{A_z^{(1)}}{r^2} \end{aligned}$$

Un analogo andamento asintotico è assunto su $\mathscr{I}^-$.

Le equazioni del moto per A sono $\nabla^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$

Essendo ∇ la connessione di Levi-Civita, possiamo scriverla così:

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha F_{\beta\nu} = g^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha F_{\beta\nu} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} F_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma_{\alpha\nu} F_{\beta\gamma} \right) \tag{2.23}$$

dove i coefficienti della connessione si calcolano da:

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\nu} \right) \tag{2.24}$$

Dove $g^{\mu\nu}$ è l'inversa di $g_{\mu\nu}$,

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \gamma_{z\bar{z}}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \gamma_{z\bar{z}}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \Gamma^u_{ua} = 0 & \Gamma^r_{ru} = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma^r_{rr} = 0 & \Gamma^r_{rz} = \dfrac{1}{r} \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma^z_{zz} = -\dfrac{2\bar{z}}{r^2(1+z\bar{z})} & \Gamma^z_{zr} = \dfrac{1}{r} \end{array}$$

Scriviamo la componente u dell'equazione, valutata su $\mathscr{I}^+$. Dopo qualche calcolo, si osserva che l'ordine dominante è il $\mathcal{O}(r^{-2})$. A quell'ordine si può ottenere allora:

$$\gamma \partial_u A_u = \partial_u (\partial_z A_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} A_z) + \gamma r^2 j_u \tag{2.25}$$

2.2.4 Carica

La corrente è sempre la $K_\mu = g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \epsilon \mathcal{F}_{\sigma\mu} - \epsilon j_\mu$. Poichè la divergenza è nulla, deve essere:

$$0 = \int_M \partial_\mu K^\mu \, d^4x = \int_M d(*K) = \int_{\partial M} *K \tag{2.26}$$

$$= \int_{\mathscr{I}^+ \cup \mathscr{I}^-} *K \tag{2.27}$$

Quindi sono opposti i due integrali su $\mathscr{I}^{\pm}$, che sono

$$Q^{+} = \int_{\mathscr{I}^{+}} * \left[\left(F_{\mu\nu} \nabla^{\nu} \epsilon \right) dx^{\mu} - \epsilon j \right] \tag{2.28}$$

e l'analogo su $\mathscr{I}^{-}$. Vediamo di esplicitarlo.

Su $\mathscr{I}^{+}$ si ha $dr = 0$, quindi

$$\begin{aligned} *K\Big|_{\mathscr{I}^{+}} &= \frac{1}{3!} (*K)_{\mu_1\mu_2\mu_3} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon^{\lambda}_{\mu_1\mu_2\mu_3} K_{\lambda} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \\ &= \frac{1}{3!} \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\lambda\mu_1\mu_2\mu_3} K^{\lambda} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \\ &= -r^2 \gamma_{z\bar{z}} \frac{1}{3!} K^{r} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 r \mu_2\mu_3} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \\ &= -r^2 \gamma_{z\bar{z}} K^{r} du \wedge dz \wedge d\bar{z} \\ &= r^2 \gamma_{z\bar{z}} \left(K_u - K_r \right) du \wedge dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

Ma la componente r è $F_{rw} g^{w\bar{w}} \partial_w \epsilon + j_r = j_r + \frac{1}{r^2\gamma}(F_{rz}\partial_{\bar{z}}\epsilon) + \frac{1}{r^2\gamma}(F_{r\bar{z}}\partial_z\epsilon) = j_r + \mathcal{O}(r^{-3})$ e dalle equazioni del moto [3] si trova che anche j_r è $\mathcal{O}(r^{-3})$ e quindi non dà contributo all'integrale su $\mathscr{I}^{+}$. Quindi rimaniamo con:

$$Q^{+} = \int_{\mathscr{I}^{+}} \partial_u A_z \partial_{\bar{z}} \epsilon + \partial_u A_{\bar{z}} \partial_z \epsilon - \epsilon j_u r^2 \gamma \, du dz d\bar{z} = \left[\int r^2 \gamma_{z\bar{z}} \epsilon F_{ru} \, d^2 z \right]^{\mathscr{I}^{+}_{+}}_{\mathscr{I}^{+}_{-}} \tag{2.29}$$

Dove nel secondo passaggio abbiamo usato la 2.25. Come in [2], si nota che in assenza di cariche massive stabili, il termine su $\mathscr{I}^{+}_{+}$ scompare: i campi nel lontano futuro si annullano poichè le correnti che li generano si sono annullate ad un tempo finito. I campi di radiazione, invece, raggiungono $\mathscr{I}^{+}$ prima di $u = +\infty$.

[3]

$$\begin{aligned} \nabla_a F^{a}_{r} =& - \partial_r F_{ur} + \frac{1}{r^2\gamma} \left(\partial_z F_{\bar{z}r} + \partial_{\bar{z}} F_{zr} \right) \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r^2\gamma} F_{zr} \right) - \frac{2\bar{z}}{r^2(1+z\bar{z})} \frac{1}{r^2\gamma} F_{\bar{z}r} + \frac{1}{r} \partial_r \mathcal{A}_u \\ &- \frac{2z}{r^2(1+z\bar{z})} \frac{1}{r^2\gamma} F_{zr} - \frac{1}{r} \frac{1}{r^2\gamma} F_{\bar{z}z} - \frac{1}{r^2\gamma} F_{z\bar{z}} \\ =& \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3} \right) = j_r \end{aligned}$$

Capitolo 3

Formulazione Hamiltoniana

Si è mostrato nel capitolo 1, come, in presenza di una Lagrangiana invariante "di gauge", le equazioni del moto non siano indipendenti (teorema 1.1.2).

Viceversa, c'è un legame tra Lagrangiane degeneri ($det\left(\frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}\partial\dot{q}}\right) = 0$) e la presenza di funzioni arbitrarie nelle soluzioni delle equazioni del moto, ma è più delicato. Ciò richiede, inoltre, delle attenzioni aggiuntive nella formulazione Hamiltoniana, che, però, possono mostrare degli interessanti risultati, si veda [4] per il caso gravitazionale. Vediamo ora come tutto questo si applichi al caso elettromagnetico.

3.1 Il caso elettromagnetico

Ricordiamo brevemente come si descrive l'evoluzione temporale di un sistema Hamiltoniano in teoria di campo. Abbiamo in mente l'applicazione all'elettromagnetismo, quindi usiamo da subito i potenziali A come campi della teoria. Le parentesi di Poisson al tempo t tra due funzionali $F, G(A,\pi)$, dipendenti dai campi e dai momenti, si definiscono come:

$$\{F,G\}|_{x^0=t} := \int \frac{\delta F}{\delta A_\mu(x)}\frac{\delta G}{\delta \pi^\mu(x)} - \frac{\delta F}{\delta \pi^\mu(x)}\frac{\delta F}{\delta \pi^\mu(x)}\, d^3x|_{x^0=t} \tag{3.1}$$

L'Hamiltoniana H propriamente detta si ricava dalla densità di Hamiltoniana $\mathscr{H}$

$$H(t) = \int \mathscr{H}\, d^3x \tag{3.2}$$

la variazione nel tempo del funzionale F è data da:

$$\dot{F}(t) = \{F, H(t)\} \tag{3.3}$$

Vorremo descrivere in questo modo anche l'evoluzione delle nostre variabili dinamiche. Associamo, allora, al valore dei campi $A_\mu(t,\bar{x})$ in un punto, il funzionale:

$$A_\mu(t,\bar{x}) = \int \delta^3(\bar{x}-\bar{y})A_\mu(t,\bar{y})\, d^3y \tag{3.4}$$

In questo modo si avrà

$$\frac{\delta A_\mu(t,\bar{x})}{\delta A_\nu(t,\bar{y})} = \delta^\nu_\mu \delta^3(\bar{x}-\bar{y}) \quad \text{e} \quad \frac{\delta A_\mu(t,\bar{x})}{\delta \pi^\nu(t,\bar{y})} = 0 \tag{3.5}$$

e in modo analogo per i momenti. Possiamo così scrivere l'evoluzione temporale come:

$$\begin{cases} \dot{A}_\mu(t,\bar{x}) = \{A_\mu(t,\bar{x}), H(t)\} = \frac{\delta H}{\delta \pi^\mu} \\ \dot{\pi}^\mu(t,\bar{x}) = \{\pi^\mu(t,\bar{x}), H(t)\} = -\frac{\delta H}{\delta A_\mu} \end{cases} \tag{3.6}$$

Veniamo dunque alla situazione che ci siamo proposti di studiare. Poniamoci in coordinate cartesiane $(t,\bar{x})$; iniziamo con il costruire un'opportuna Hamiltoniana. La Lagrangiana è

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Vorremmo a questo punto definire i momenti

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_0 A_\mu} \tag{3.7}$$

e invertirli per trovare le "velocità" $\partial_0 A_\mu$ come funzioni dei momenti e dei potenziali. Fatto questo, si otterrebbe la (densità di) Hamiltoniana tramite la

$$\mathscr{H}_0 = \pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathscr{L} \tag{3.8}$$

Ma ci imbattiamo subito in un inconveniente:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_0 A_\mu} = -F^{0\mu}$$

da cui vediamo che $\pi^0 = 0$, che non ci dà alcuna speranza di ricavare $\partial_0 A_0$.

Una tale difficoltà è dovuta al carattere degenere della lagrangiana elettromagnetica e, più in generale, si presenta in tutti i casi in cui $det\left(\frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}\right) = 0$. Quello che è accade è che, tra le relazioni (3.7), una di queste si rivela essere un vincolo sullo spazio delle fasi, che costringe π^0 ad essere nullo.

Nonostante questa complicazione, è ancora possibile scrivere un'Hamiltoniana che riproduca la dinamica del sistema, tramite una procedura originariamente dovuta a P. Dirac e P. Bergmann.

Scriviamo per ora l'Hamiltoniana canonica come indicato da (3.8). Iniziamo riscrivendo la lagrangiana in un modo più utile:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\left(F^{0i}F_{0i} + F^{ij}F_{ij} + F^{i0}F_{i0}\right) = -\frac{1}{2}\pi_i \pi^i - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}$$

e esprimiamo le velocità in funzione dei momenti:

$$\partial_0 A_i = \partial_i A_0 - \pi_i$$

Da cui la densità di Hamiltoniana canonica è

$$\mathscr{H}_0 = \pi^i \partial_0 A_i - \mathscr{L} = -\frac{1}{2}\pi^i \pi_i + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}$$

Questa, a causa del vincolo $\pi^0 = 0$ è definita solo su un sottoinsieme dello spazio delle fasi completo; per porvi rimedio, dobbiamo scrivere l'hamiltoniana

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + v(x)\pi^0 \tag{3.9}$$

dove $v(x)$ è una funzione arbitraria. Questa $\mathscr{H}$ va pensata come priva di vincoli; solo una volta che sono state ottenute le equazioni del moto si impone $\pi^0 = 0$.

Dobbiamo, però, sincerarci che il vincolo $\pi^0 = 0$ sia mantenuto nel tempo. Calcoliamone le parentesi di Poisson

$$\{\pi^0(t,\bar{x}), H(t)\} = \{\pi^0(t,\bar{x}), \int \pi^i \partial_i A_0 \, d^3x\} = \partial_i \pi^i(t,\bar{x})$$

Che, a priori, non è zero. Dobbiamo, perciò, imporre l'ulteriore vincolo $\partial_i \pi^i = 0$ [1], che a sua volta va inserito nell'hamiltoniana. Si ottiene così l'Hamiltoniana *primaria*

$$H_p = \int \mathscr{H}_0 \, d^3x + \int v\pi^0 + u\partial_i \pi^i \, d^3x \tag{3.10}$$

dove u, come v, è una funzione arbitraria delle coordinate. Calcolando $\{\partial_i \pi^i, H_p\}$ si trova che è proporzionale a $\partial_i \partial_j F^{ij} = 0$ e quindi non si introducono nuovi vincoli.

A questo punto abbiamo ottenuto l'Hamiltoniana cercata; essa tiene conto dei vincoli dovuti alla degenerazione della Lagrangiana e assicura che siano mantenuti nel tempo. L'evoluzione temporale di un funzionale G si scrive:

$$\dot{G} \approx \{G, H_p\} = \{G, H_0\} + v\{G, \pi^0\} + u\{G, \partial_i \pi\} \tag{3.11}$$

Dove con il simbolo $\approx$ si intende che le parentesi di Poisson sono calcolate come se le A e π fossero indipendenti, e successivamente applicando i vincoli.

Il caso di campi elettromagnetici accoppiati a una sorgente esterna, per cui $\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F \cdot F - A \cdot j$, è del tutto analogo: l'unica differenza è che nel vincolo compare $\partial_i \pi^i - j^0 = 0$.

3.1.1 Vincoli come generatori di trasformazioni di gauge

Se definiamo le cariche

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int v\pi^0 \, d^3x \\ Q_2 &= \int u\partial_i \pi^i \, d^3x \end{aligned} \tag{3.12}$$

[1] che, ricordando l'espressione dei momenti, non è altro che la legge di Gauss.

si può osservare che sono conservate nel tempo, perchè lo sono i vincoli:

$$\dot{Q} = \{Q, H(t)\} = 0$$

Tuttavia non danno alcuna informazione, dato che, sempre a causa dei vincoli, $Q_1 = Q_2 = 0$ se imponiamo $\pi^0 = 0 = \partial_i \pi^i$. Possiamo ad ogni modo recuperare grazie a Q_1 e Q_2 una caratteristica fondamentale della Lagrangiana da cui eravamo partiti, ovvero l'invarianza di gauge.

Per vederlo, consideriamo le cariche Q come generatrici di trasformazioni canoniche: queste inducono sulle variabili dinamiche le seguenti trasformazioni infinitesime

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \{A_\mu, Q\} \\ \delta \pi^\mu &= \{\pi^\mu, Q\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Vediamo di esplicitarle. Nel caso di $Q_1 = \int v\pi^0 \, d^3x$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \delta_1 A_\mu = \{A_\mu, \int v\pi^0 \, d^3x\} = v(x)\delta^0_\mu \\ \delta_1 \pi^\mu = \{\pi^\mu, \int v\pi^0 \, d^3x\} = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Che, nel caso in cui v dipenda unicamente dalla variabile temporale ($\partial_i v = 0$), scrivendo $v = \partial_0 \epsilon$ si riconduce a una trasformazione di gauge di parametro $\epsilon(t)$. Osserviamo che, come deve essere, la trasformazione di gauge non agisce sui momenti (si ricordi che erano dati dai campi elettrici). Nel caso di $Q_2 = \int u \partial_i \pi^i \, d^3x$ abbiamo invece:

$$\begin{aligned} \delta_2 A_\mu &= \{A_\mu(x)\,, \int u(y)\partial_i \pi^i(y) d^3y\,\} \\ &= \int \delta(x-z)\, \delta^i_\mu \, \partial_i u \, d^3z = \delta^i_\mu u \\ \delta_2 \pi^\mu &= \{\pi^\mu, \int u(y)\partial_i \pi^i(y) d^3y\,\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Che sono trasformazioni di gauge di parametro u nel caso in cui $\partial_0 u = 0$. Di nuovo, come atteso, non influenzano i campi elettrici.

Vediamo in questo modo come la stessa invarianza di gauge che, tramite il secondo teorema di Noether ci aveva segnalato la mancata indipendenza delle equazioni del moto, la quale ci aveva a sua volta costretto alla costruzione di un'Hamiltoniana vincolata, viene fatta riemergere proprio da questi vincoli.

3.2 Termini di bordo

Nella sezione precedente si sono calcolate con disinvoltura le parentesi di Poisson dell'Hamiltoniana e dei vincoli. L'uso delle parentesi di Poisson in presenza di una teoria di campo descritta da un'Hamiltoniana con vincoli necessiterebbe, tuttavia, di qualche cautela aggiuntiva. Per scrivere le equazioni di Hamilton nella forma

$$\dot{A}_\mu = \frac{\delta H}{\delta \pi^\mu}$$
$$\dot{\pi}^\mu = -\frac{\delta H}{\delta A_\mu}$$

Dovremmo assicurarci di poter scrivere la variazione dell'Hamiltoniana nella forma

$$\delta H = \int \frac{\delta H}{\delta A_\mu}\delta A_\mu + \frac{\delta H}{\delta \pi^\mu}\delta \pi^\mu \, d^3x$$

ma per farlo è solitamente necessaria l'eliminazione di qualche termine di bordo. Se però questi integrali contengono delle funzioni arbitrarie, può non essere garantito il loro annullarsi. Per avere allora delle parentesi di Poisson ben definite bisogna tenere conto di questi contributi eventualmente modificando l'Hamiltoniana. Questa è la strada percorsa in [4] nel 1974, che, nel contesto della relatività generale, ha portato a leggi di conservazione per il momento, la cui definizione è stata legata ad un'invarianza per trasformazioni di coordinate con andamento non banale all'infinito. Ci si propone ora di seguire la stessa linea di pensiero nel caso dell'elettromagnetismo.

Se cerchiamo scrivere la variazione dell'Hamiltoniana arriviamo a:

$$\delta H_p = \int (\cdots)\delta A_\mu + (\cdots)\delta \pi_\mu + u\partial_i \delta \pi^i \, d^3x$$

Per scrivere l'ultimo termine come $\int \partial_i u \, \delta\pi^i \, d^3x$ dovremmo poter dire che si annulla $\int \partial_i(u\delta\pi^i)\, d^3x$. A meno di imporre condizioni asintotiche per la (per il momento arbitraria) funzione u, questo non possiamo garantirlo. Si può proseguire osservando che $\int \partial_i(u\delta\pi^i)\, d^3x = \delta\left(\int \partial_i(u\pi^i)\, d^3x\right) = \delta B$ e sottraendo B all'Hamiltoniana, in modo che acquisti la derivabilità che avevamo fin qui assunto. Si potrebbe comunque discutere sull'alternativa: imporre condizioni asintotiche su u. Questo è in linea di principio possibile, ma corriamo il rischio di perdere delle informazioni sul sistema.

L'Hamiltoniana corretta diventa allora:

$$\tilde{H} = H_p - \int u\pi^i d\Sigma_i$$

Nel caso general-relativistico considerato in [4] l'hamiltoniana priva della correzione si annulla imponendo le equazioni del moto. Si ottiene allora una nuova quantità conservata (dovendo essere $\tilde{H}$ costante) data dal termine di bordo. Si osserva, poi, che quell'integrale di superficie è proprio la carica conservata relativa all'invarianza dell'azione sotto particolari trasformazioni di coordinate. Qui non abbiamo la stessa fortuna, ma possiamo comunque osservare che il termine $-\int u\pi^i d\Sigma_i$ è in realtà una vecchia conoscenza, incontrata nel capitolo 2.

Notiamo che, come abbiamo corretto l'Hamiltoniana, così dovremmo correggere anche la carica Q_2 che conteneva il termine problematico $u\partial_i\pi^i$. Questa diventa:

$$Q = \int u(\partial_i\pi^i - j^0)\, d^3x - \int u\pi^i d\Sigma_i \tag{3.16}$$

A causa della correzione, la carica non è più nulla: imposte le equazioni del moto, l'unico contributo è quello di bordo, che, riscritto, diventa:

$$-\int u\pi^i d\Sigma_i = -\int \partial_i(u\pi^i) d^3x = \int \partial_\mu u F^{0\mu} + u\partial_\mu F^{0\mu} d^3x \tag{3.17}$$

Questo non è altro che la carica della simmetria di gauge residua che avevamo considerato.

Vediamo se è ancora conservata. Scriviamo Q come

$$Q = \int -\partial_i u\pi^i - j^0\, d^3x$$

Senza omettere i dettagli abbiamo:

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= \{Q, H\} \\
&= \int -\frac{\delta Q}{\delta\pi^i}\frac{\delta H}{\delta A_i}\, d^3x = -\int \partial_i u\partial_k F^{ki} \\
&= -\int \partial_k(\partial_i u F^{ki}) + \partial_k\partial_i u F^{ki}\, d^3x \\
&= -\int \partial_i u F^{ki}\, d\Sigma_k
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Nella seconda riga si è usato il fatto che $\frac{\delta H}{\delta A_i} = \frac{\delta}{\delta A_i}\left(\frac{1}{4}F^{hk}F_{hk}\right) = -\partial_k F^{ki}$ e nella terza l'antisimmetria di F e il fatto che le derivate su u commutino. Vediamo così che la nuova carica Q non si conserva in ogni possibile situazione, ma solo quando il flusso in (3.18) si annulla. Ricordando il capitolo 2, questa è esattamente la stessa condizione che si aveva per la conservazione della carica definita al livello lagrangiano tramite la corrente (2.14). Vediamo così che queste infinite cariche conservate emergono spontaneamente da una richiesta di consistenza della formulazione Hamiltoniana dell'elettromagnetismo; la loro interpretazione classica è, tuttavia, ancora oggetto di discussione.

Bibliografia

[1] M. Mirbabayi e M. Simonović. «Weinberg Soft Theorems from Weinberg Adiabatic Modes». In: *ArXiv e-prints* (feb. 2016). arXiv: `1602.05196 [hep-th]`.

[2] T. He et al. «New symmetries of massless QED». In: *Journal of High Energy Physics* 10, 112 (ott. 2014), p. 112. arXiv: `1407.3789 [hep-th]`.

[3] D. Kapec, M. Pate e A. Strominger. «New Symmetries of QED». In: *ArXiv e-prints* (giu. 2015). arXiv: `1506.02906 [hep-th]`.

[4] T. Regge e C. Teitelboim. «Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity». In: *Annals of Physics* 88 (nov. 1974), pp. 286–318.

[5] S. G. Avery e B. U. W. Schwab. «Noether's second theorem and Ward identities for gauge symmetries». In: *Journal of High Energy Physics* 2, 31 (feb. 2016), p. 31. arXiv: `1510.07038 [hep-th]`.

[6] K. Sundermeyer, cur. *Constrained Dynamics*. Vol. 169. Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag. 1982.