

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
“GALILEO GALILEI”

CORSO DI LAUREA IN FISICA

TESI DI LAUREA

**I LIVELLI DI LANDAU SU SUPERFICI CON GEOMETRIE
NON BANALI**

Laureando

Stefano De Angelis

Relatore

Prof. Kurt Lechner

ANNO ACCADEMICO 2015/2016

Indice

1	Introduzione	5
1.1	I livelli di Landau	5
1.2	Effetto Hall quantistico	5
1.2.1	Effetto Hall quantistico intero	6
1.2.2	Effetto Hall quantistico frazionario	7
1.3	Invarianza di gauge e Hamiltoniana	7
2	I livelli di Landau sul piano	8
2.1	Soluzione in gauge simmetrica	9
2.2	Soluzione in gauge asimmetrica	10
2.3	Degenerazione dei livelli di Landau su una superficie di area finita	11
3	I livelli di Landau sul cilindro e sul toro	12
3.1	Autostati dei livelli di Landau sul cilindro	12
3.2	Autostati dei livelli di Landau sul toro	13
4	I livelli di Landau sulla sfera	15
4.1	Monopolo magnetico e quantizzazione di Dirac	15
4.2	Hamiltoniana e momento angolare totale del sistema	16
4.3	I livelli di Landau sulla sfera	17
5	Gli autostati del sistema sulla sfera	18
5.1	Il potenziale vettore	18
5.2	Generalizzazione dello spazio di Hilbert	19
5.3	Coordinate generalizzate	20
5.4	Operatori di creazione e annichilazione	22
5.5	Livello di Landau più basso	23
5.6	Livelli di Landau eccitati	24
6	Conclusioni	25
A	Coordinate sferiche	27
B	Regole di commutazione del momento angolare orbitale in presenza di un campo magnetico	27

1 Introduzione

1.1 I livelli di Landau

Il moto di una particella libera carica nel vuoto è descritto dalla semplice Hamiltoniana del corpo libero

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e}. \quad (1.1)$$

Applicando un campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, descritto dal *potenziale vettore* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (la relazione tra queste due grandezze è $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})$), l'Hamiltoniana del sistema, mediante la *sostituzione minimale*, risulta essere:

$$H = \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right)^2, \quad (1.2)$$

dove e è la carica elettrica della particella e c è *velocità della luce*.

Si vincoli ora il moto della particella ad un piano infinito e sia $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}$ costante e perpendicolare al piano. Lo spettro della (1.2) è composto da un insieme discreto di livelli di energia ϵ_n , che vengono detti *livelli di Landau*. Si dimostra [1] che

$$\epsilon_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.3)$$

dove $\omega_c = eB/m_e c$ è la *frequenza di ciclotrone*, $\hbar$ è la *costante di Planck ridotta* ed n è un numero intero.

Il problema che si propone di risolvere in questo lavoro è lo studio dei livelli di Landau per superfici differenti, con particolare attenzione al caso della sfera. Il capitolo corrente fungerà da base per la trattazione seguente: si spiegherà in che contesto è stato introdotto lo studio dei livelli di Landau e si mostrerà come questi in generale siano indipendenti dal potenziale vettore scelto per descrivere il campo magnetico. Nel secondo capitolo si studia la soluzione dei livelli di Landau su un piano infinito, utilizzando due scelte del potenziale vettore differenti. Entrambe queste soluzioni verranno richiamate nel terzo capitolo, imponendo opportune condizioni di periodicità, per definire gli autovalori e gli autostati del problema per una superficie cilindrica e per un toro. Gli ultimi due capitoli saranno focalizzati sulla soluzione del problema su una superficie sferica: nel dettaglio, nel quarto capitolo si indagherà lo spettro dell'Hamiltoniana, dimostrando che tende a quello del piano infinito all'aumentare del raggio; mentre, nel quinto capitolo si cercheranno gli autostati del sistema. Per tutte queste soluzioni si metterà in risalto la degenerazione dei diversi livelli di Landau, oltre che il loro valore. Infine, nel sesto capitolo si metteranno a confronto i risultati trovati per le diverse superfici.

1.2 Effetto Hall quantistico

In fisica dello stato solido i livelli di Landau hanno importanza rilevante nella spiegazione dell'*effetto Hall quantistico*.

L'*effetto Hall* si manifesta quando ad una lastra metallica (la si pensi di forma rettangolare) viene applicato un campo elettrico $\mathbf{E}$ parallelo al piano in cui è contenuta (in modo che sia parallelo a due lati opposti e perpendicolare ai restanti due) ed un campo magnetico $\mathbf{B}$ perpendicolare al piano. In questo caso le particelle interessate dal moto sono gli elettroni. Si indica sulla lastra una direzione longitudinale x , parallela a $\mathbf{E}$, e una direzione trasversale y , perpendicolare ad esso. Se si vanno a chiudere in un circuito due lati opposti, si osservano due correnti, una longitudinale e una trasversale. La *forza di*

Lorentz $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, infatti, porta ad un accumulo di cariche sui lati opposti che sono paralleli al campo elettrico. Quindi, si è in presenza di una differenza di potenziale trasversale, detta *potenziale di Hall* V_y . Se si indica con I_x la corrente longitudinale, da argomentazioni di tipo classico [2], si trova la relazione

$$\rho_H := \rho_{xy} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{B}{n_e e c}, \quad (1.4)$$

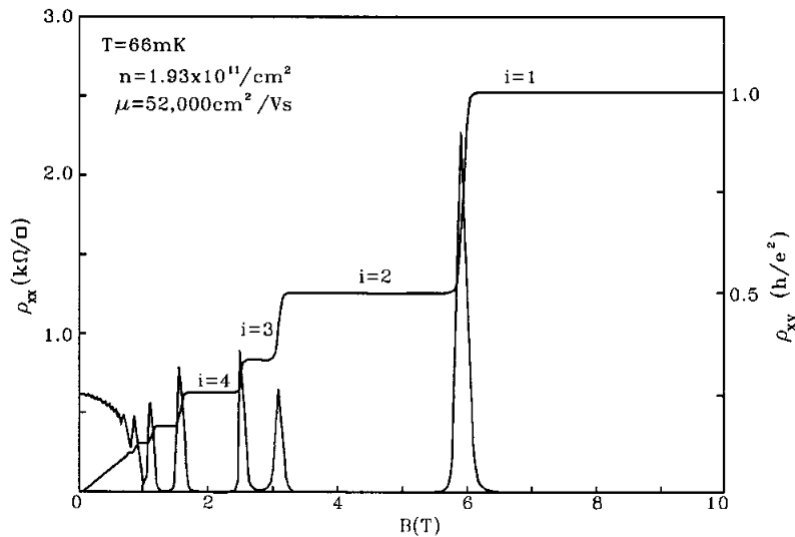
dove n_e è la densità superficiale di elettroni e ρ_H viene chiamata la *resistenza di Hall*. Si può notare che ρ_H è proporzionale all'intensità B del campo magnetico.

1.2.1 Effetto Hall quantistico intero

Nel 1980 Klaus von Klitzing, durante lo studio dell'effetto Hall di un gas elettronico bidimensionale, osservò [3] una variante dell'effetto classico. Infatti, a basse temperature, quando l'energia termica $k_B T$ è significativamente più bassa di $\hbar\omega_c$, ovvero dell'energia di separazione tra i livelli di Landau ϵ_n , ρ_{xy} mostra i cosiddetti *plateaux*, cioè zone in cui rimane costante al variare del campo magnetico. In corrispondenza di questi plateaux la *resistenza longitudinale* $R_{xx} = V_x/I_x$ (V_x è la differenza di potenziale longitudinale) si annulla e la resistenza di Hall assume i valori di *esatta quantizzazione*

$$\rho_H = \frac{h}{ne^2}, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

Inoltre, si è osservato che i plateaux si presentano attorno a valori del campo magnetico per cui la quantità $n_e \hbar c / e B$, denominata *fattore di riempimento*, assume valori interi. Nel seguente grafico [4] sono riportati i risultati sperimentali: si riportano nel grafico i valori sperimentali della resistenza di Hall ρ_{xy} e della resistività longitudinale $\rho_{xx} = R_{xx}(L_y/L_x)$, dove L_x e L_y sono rispettivamente la dimensione longitudinale e trasversale della lastra.



Una peculiarità del fenomeno è che la precisione della quantizzazione è essenzialmente indipendente dalle condizioni e dalla geometria del sistema considerato.

Per la spiegazione teorica dell'effetto Hall quantistico intero, è necessario osservare dalla (1.4), che una descrizione di tipo classico è errata. Lo studio del sistema rende, quindi, necessario l'approccio della meccanica quantistica, come mostrato da Laughlin [5]. La comprensione del fenomeno deriva dalla soluzione del problema per elettroni non interagenti, combinata all'analisi di *scattering* per le interazioni con i fononi del reticolo e con le impurezze. Per una spiegazione dettagliata si rimanda a [2].

Infine, per quanto visto nella (1.5), grazie all'effetto Hall quantistico intero è possibile definire uno standard naturale per la resistenza elettrica, detta *costante di von Klitzing*:

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25812.8 \, \Omega. \quad (1.6)$$

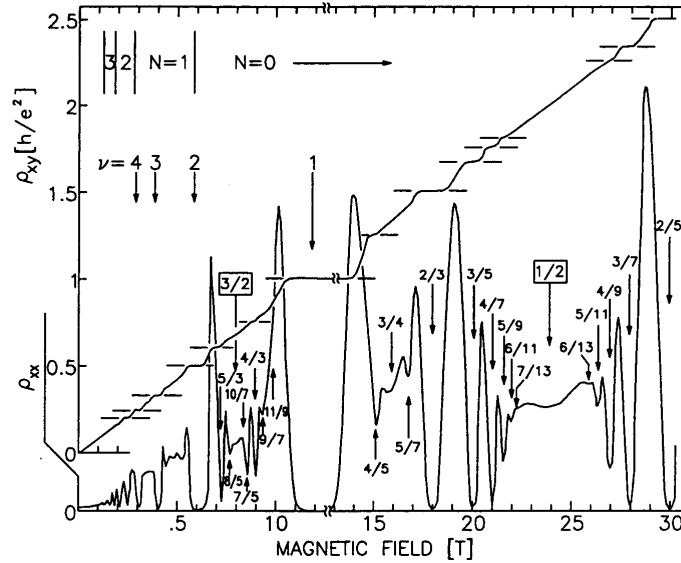
1.2.2 Effetto Hall quantistico frazionario

I successivi esperimenti, a temperature più basse e campi magnetici di intensità più elevata, sulla resistenza di Hall portarono, nel 1982, Tsui, Störmer e Gossard [6] alla misura di un plateau per cui si aveva $n = 1/3$. Misure successive portarono, in generale, a valori *frazionari* dell'unità fondamentale per la resistenza:

$$\rho_H = \frac{h}{f e^2} \quad \text{con } f = \frac{p}{q}, \quad q = 2m + 1, \text{ e } p, m \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

La spiegazione teorica di questa variante dell'effetto Hall quantistico fu mostrata nel 1983 da Laughlin [7], il quale spiegò l'esistenza di plateaux per ogni $n = 1/q$, con q numero intero dispari. In particolare, nelle condizioni per l'effetto Hall quantistico frazionario gioca un ruolo fondamentale l'interazione coulombiana elettrone-elettrone. Nell'ambito di questa spiegazione teorica, viene introdotto lo studio dei livelli di Landau in superfici con geometrie non banali [7], [8], [9].

Nel grafico seguente [4] vengono mostrati alcuni risultati più recenti.



1.3 Invarianza di gauge e Hamiltoniana

Dal punto di vista classico, nel sistema costituito da una particella carica in moto in un campo magnetico, il campo fisicamente rilevante è $\mathbf{B}(\mathbf{x})$. Le *equazioni di Maxwell* garantiscono che $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ sia una *forma esatta*

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.8)$$

Dunque è possibile scrivere il campo magnetico in termini di un *potenziale vettore* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ definito $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (1.9)$$

Dalla relazione (1.8) segue che il potenziale vettore è definito a meno di una trasformazione di gauge

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla\Lambda(\mathbf{x}), \quad (1.10)$$

dove $\Lambda(\mathbf{x})$ è una funzione scalare. Come mostrato nella (1.2), H dipende direttamente da $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e non dal campo magnetico. Quindi, non si avrebbe una definizione univoca dell'Hamiltoniana e, in particolare

$$H' := \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}'(\mathbf{x}) \right)^2 \neq H. \quad (1.11)$$

Si consideri un *operatore unitario* associato alla trasformazione di gauge individuata dalla funzione $\Lambda(\mathbf{x})$

$$U = \exp \left(\frac{ie}{c\hbar} \cdot \Lambda(\mathbf{x}) \right). \quad (1.12)$$

La relazione fondamentale che lega H' a H è

$$U H U^\dagger = H'. \quad (1.13)$$

Questa relazione si ottiene rapidamente se si considerano le seguenti relazioni, nelle quali si tiene conto della definizione quantistica della quantità di moto $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$:

$$U \mathbf{p} U^\dagger = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \nabla\Lambda(\mathbf{x}); \quad (1.14)$$

$$U \mathbf{A}(\mathbf{x}) U^\dagger = \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (1.15)$$

Di conseguenza, le coppie $(H', \psi' = U\psi)$ e (H, ψ) descrivono la stessa fisica.

Tuttavia, nel caso particolare del problema dei livelli di Landau su una superficie sferica l'equazione (1.8) non sarà più valida $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Infatti, per avere un campo magnetico costante su tale superficie, che avrà dunque un flusso attraverso la sfera non-nullo, sarà richiesta l'introduzione di un monopolo magnetico *fittizio* nel centro della sfera, che è fissato come origine del sistema di riferimento considerato. Questa considerazione porta ad affermare che non è possibile definire un potenziale vettore in maniera triviale. Ma se si considera un cammino γ_1 che termina nell'origine e si estende fino all'infinito *-stringa di Dirac-*, è possibile definire un potenziale vettore $A_1(\mathbf{x})$ sul dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma_1$. Analogamente considerando un secondo cammino γ_2 , si definisce $A_2(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \gamma_2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \gamma_1 \cup \gamma_2, \\ \nabla \times (\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_1(\mathbf{x})) &= 0 \Rightarrow \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \nabla\Lambda(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Si può dimostrare che i due potenziali vettori sono uguali a meno di una trasformazione di gauge definita in $\mathbb{R}^3$ privato di un semipiano che ha come bordi γ_1 e γ_2 .

2 I livelli di Landau sul piano

Si studierà inizialmente il problema di Landau su un piano infinito. Di seguito si mostreranno esplicitamente le soluzioni in gauge simmetrica e non, poiché sarà utile richiamarle entrambe per la soluzione del problema nelle geometrie differenti dal piano. Si assumerà che il moto delle cariche sia confinato al piano (x, y) e il verso del campo magnetico individui l'asse z : $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

2.1 Soluzione in gauge simmetrica

Il potenziale vettore considerato in questo caso è

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0 \right). \quad (2.1)$$

La forma della (1.2) che deriva da questa definizione è

$$H = \frac{1}{2m_e} \left[\left(p_x + \frac{eB}{2c}y \right)^2 + \left(p_y - \frac{eB}{2c}x \right)^2 \right], \quad (2.2)$$

dove si è omessa la dipendenza dalla variabile z , la cui dinamica da questo punto sarà disaccoppiata dalla dinamica sul piano. Per risolvere il problema agli autovettori e autovalori è conveniente introdurre due nuovi operatori bidimensionali: l'operatore *momento dinamico*

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \quad (2.3)$$

e l'operatore *pseudo-momento dinamico*

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \right). \quad (2.4)$$

Gli operatori di creazione e di distruzione associati al momento dinamico si definiscono rispettivamente come segue:

$$\hat{\pi}^\dagger = \frac{l}{\sqrt{2}\hbar} (\pi_x - i\pi_y), \quad \hat{\pi} = \frac{l}{\sqrt{2}\hbar} (\pi_x + i\pi_y). \quad (2.5)$$

dove $l = \sqrt{\hbar c/eB}$ è la *lunghezza magnetica*. In maniera speculare si definiscono

$$\tilde{\pi}^\dagger = \frac{l}{\sqrt{2}\hbar} (\tilde{\pi}_x + i\tilde{\pi}_y), \quad \tilde{\pi} = \frac{l}{\sqrt{2}\hbar} (\tilde{\pi}_x - i\tilde{\pi}_y). \quad (2.6)$$

Omettendo i passaggi algebrici, per gli operatori appena definiti si verificano le proprietà

$$[\hat{\pi}, \hat{\pi}^\dagger] = 1, \quad (2.7)$$

$$[\tilde{\pi}, \tilde{\pi}^\dagger] = 1, \quad (2.8)$$

$$[\hat{\pi}, \tilde{\pi}] = [\hat{\pi}, \tilde{\pi}^\dagger] = [\hat{\pi}^\dagger, \tilde{\pi}] = [\hat{\pi}^\dagger, \tilde{\pi}^\dagger] = 0, \quad (2.9)$$

$$H = \omega_c \hbar \left(\hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.10)$$

Dalle relazioni (2.7) segue che l'*operatore numero*

$$N = \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} \quad (2.11)$$

ha autovalori n interi non negativi. Da ciò e dalla (2.10) segue che gli autovalori dell'Hamiltoniano sono

$$\epsilon_n = \omega_c \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.12)$$

Analogamente, le relazioni (2.8) definiscono un operatore

$$M = \tilde{\pi}^\dagger \tilde{\pi}, \quad (2.13)$$

con autovalori m interi non negativi. Tramite la (2.9), si mostra che gli operatori N e M commutano

$$[N, M] = [H, M] = 0, \quad (2.14)$$

quindi ammettono una base di autofunzioni comuni. Pertanto gli autovalori n e m dei rispettivi operatori sono buoni numeri quantici per la descrizione degli stati del sistema, che indicheremo quindi come $\varphi_{n,m}$. Sia $\mathbf{L}$ il momento angolare orbitale; tramite semplici passaggi algebrici si verifica la relazione

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = L_z \mathbf{e}_z = \hbar(M - N) \mathbf{e}_z. \quad (2.15)$$

Quindi $n + 1$ determina il livello di Landau, mentre la differenza $m - n$ individua il momento angolare attorno all'origine. Lo stato fondamentale a momento angolare nullo $\varphi_{0,0}$ è descritto da una funzione che soddisfa entrambe le seguenti equazioni:

$$\hat{\pi} \varphi_{0,0} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left[l \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2l} (x + iy) \right] \varphi_{0,0} = 0, \quad (2.16)$$

$$\tilde{\pi} \varphi_{0,0} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left[l \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2l} (x - iy) \right] \varphi_{0,0} = 0. \quad (2.17)$$

Da queste segue che lo stato fondamentale è descritto dall'autofunzione normalizzata dell'Hamiltoniano

$$\varphi_{0,0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{4l^2} \right), \quad (2.18)$$

e un sistema completo e ortonormale di autostati dell'Hamiltoniana è dato da

$$\varphi_{n,m} = \frac{(\hat{\pi}^\dagger)^n (\tilde{\pi}^\dagger)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \varphi_{0,0}. \quad (2.19)$$

Infatti, utilizzando l'algebra (2.7) e (2.8) si dimostra come $\hat{\pi}^\dagger$ e $\tilde{\pi}^\dagger$ si comportano come operatori di innalzamento rispettivamente per i numeri quantici associati agli operatori N (2.11) (ovvero all'Hamiltoniana H (2.10)) e M (2.13). In particolare, si verifica dalle relazioni (2.9) che applicare l'operatore $\hat{\pi}^\dagger$ non modifica il numero quantico m , ovvero

$$[\hat{\pi}^\dagger, M] = 0; \quad (2.20)$$

inoltre, l'operatore $\tilde{\pi}^\dagger$ lascia invariato il numero quantico che indica il livello di Landau

$$[\tilde{\pi}^\dagger, N] = [\tilde{\pi}^\dagger, H] = 0. \quad (2.21)$$

$\varphi_{m,n}$ è dunque l'autostato dell'elettrone nei livelli di Landau $n + 1$ e con momento angolare $L_z = \hbar(m - n)$.

Da questo punto si indicherà con D_n la *degenerazione* del $n + 1$ -esimo livello di Landau. Poiché $m \in \mathbb{N}$, segue per il piano infinito

$$D_n^p = \infty \quad \forall n. \quad (2.22)$$

2.2 Soluzione in gauge asimmetrica

Il potenziale vettore considerato per descrivere il sistema in *gauge asimmetrica* è

$$\mathbf{A} = (-By, 0, 0). \quad (2.23)$$

L'Hamiltoniano (1.2) assume la forma

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{eB}{c} y \right)^2 + p_y^2 \right], \quad (2.24)$$

che non dipende dalla coordinata x . È immediato, quindi, fattorizzare le funzioni d'onda del sistema in modo che siano onde piane lungo l'asse x :

$$\psi_{n,k}(x, y) = \exp(ikx) \phi_{n,k}(y). \quad (2.25)$$

Applicando la (2.24) alla (2.25) si ottiene

$$\begin{aligned} H\psi_{n,k}(x, y) &= \frac{\exp(ikx)}{2m_e} \left[p_y^2 + \left(\frac{eB}{c} y + \hbar k \right)^2 \right] \phi_{n,k}(y) \\ &= \exp(ikx) \left[\frac{p_y^2}{2m_e} + \frac{1}{2} m_e \omega_c^2 (y + y_0)^2 \right] \phi_{n,k}(y) = \epsilon_{n,k} \exp(ikx) \phi_{n,k}(y), \end{aligned} \quad (2.26)$$

con $y_0 = kl^2$. La (2.26) è l'equazione di un oscillatore armonico sull'asse y traslato della quantità $-y_0$. Gli autovalori sono quindi identici al problema in gauge simmetrica $\epsilon_{n,k} = \epsilon_n$ (2.12), come previsto in §1.3. Le funzioni d'onda possono essere scritte come

$$\psi_{n,k}(x, y) = \frac{1}{\pi^{1/4} a^{1/2} \sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{(y + y_0)^2}{2a^2}\right) H_n\left(\frac{y + y_0}{a}\right) \exp(ikx), \quad (2.27)$$

dove $a = \sqrt{\hbar/m_e \omega_c}$ e H_n è il polinomio di Hermite di grado n . Si noti che $\psi_{n,k}(x, y)$ sono autofunzionali dell'Hamiltoniano per il potenziale vettore considerato. Gli autostati (normalizzabili) del sistema sono dati da un'opportuna sovrapposizione *continua* di $\psi_{n,k}$ al variare di k .

2.3 Degenerazione dei livelli di Landau su una superficie di area finita

La seguente trattazione è limitata allo stato fondamentale LLL (Lowest Landau Level) e ha lo scopo di dare un argomento *qualitativo* per la degenerazione di tale livello nel caso di una superficie limitata di area ν . Per questa trattazione si farà riferimento alle funzioni d'onda per la gauge simmetrica, trattando la descrizione delle coordinate del piano in termini della coordinata complessa $w = x + iy$. Dalle definizioni (2.5) e (2.6), si ha

$$w = -\sqrt{2}il (\tilde{\pi}^\dagger - \hat{\pi}). \quad (2.28)$$

Quindi l'autostato (2.19) del sistema nel LLL ($n = 0$), con un valore generico $m\hbar$ del momento angolare (2.15), è descritto da

$$\varphi_{0,m}(w, \bar{w}) = \frac{i^m}{\sqrt{2^{m+1} \pi m! l^{m+1}}} w^m \exp\left(-\frac{|w|^2}{4l^2}\right). \quad (2.29)$$

Infatti, sostituendo (2.28) in (2.29) si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi_{0,m}(w, \bar{w}) &= \frac{(\tilde{\pi}^\dagger - \hat{\pi})^m}{\sqrt{2\pi m! l}} \exp\left(-\frac{|w|^2}{4l^2}\right) \\ &= \frac{(\tilde{\pi}^\dagger - \hat{\pi})^m}{\sqrt{m!}} \varphi_{0,0}(w, \bar{w}) \\ &= \frac{(\tilde{\pi}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} \varphi_{0,0}(w, \bar{w}), \end{aligned} \quad (2.30)$$

che coincide con il risultato (2.19) per $n = 0$.

Si nota, innanzitutto, che il generico autostato dell'Hamiltoniano nel LLL si può scrivere come combinazione lineare delle (2.29), ovvero $\phi_0(w, \bar{w}) = f(w) \exp(-|w|^2/(4l^2))$, dove $f(w)$ è una funzione olomorfa.

Sia D_0 la degenerazione del LLL. Poiché la superficie ha area finita, ci si aspetta che la funzione d'onda che scrive la particella si annulli rapidamente ai bordi. Si considera come stima della dimensione dell'orbitale il raggio r_m per cui il modulo della (2.29) abbia un massimo; ovvero

$$\left. \frac{\partial}{\partial |w|} |\varphi_{0,m}(w, \bar{w})| \right|_{|w|=r_m} = 0, \quad (2.31)$$

che restituisce $r_m = \sqrt{2ml}$. Si consideri una superficie finita di forma circolare di raggio $R \sim r_{D_0}$ ed area $\nu = \pi R^2$. Una stima della degenerazione è

$$D_0 \sim \frac{R^2}{2l^2} = \frac{eB}{hc} \nu = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (2.32)$$

dove $\Phi = B\nu$ è il flusso di campo magnetico e $\Phi_0 = hc/e$ è il flusso elementare di campo magnetico. Quindi, la degenerazione D_0 ha un valore confrontabile con il numero di flussi elementari che passano per la superficie.

3 I livelli di Landau sul cilindro e sul toro

Se sul piano infinito (x, y) , considerato in precedenza, si definisce la relazione di equivalenza $x \sim x + l_1$, con l_1 costante, la superficie che si ottiene è topologicamente equivalente ad un cilindro. Definire una seconda equivalenza $y \sim y + l_2$, con l_2 costante, rende la superficie equivalente ad un toro. Da queste osservazioni sarà possibile definire gli autostati dei livelli di Landau sul cilindro e sul toro partendo da quelli del piano infinito. Si può intuire, da quanto appena detto, che gli autovalori saranno i medesimi del piano.

3.1 Autostati dei livelli di Landau sul cilindro

Sia $l_1 = 2\pi r$, dove r è il raggio del cilindro. Dalla (2.24) è immediato che l'Hamiltoniano, nel caso della gauge asimmetrica considerata, è invariante rispetto a traslazioni lungo l'asse x . Il dominio *naturale* dell'Hamiltoniano sul cilindro è dato dalle funzioni d'onda tali che

$$\psi(x + 2\pi r p, y) = \psi(x, y) \quad \forall (x, y), \quad \text{con } p \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Considerando l'invarianza per traslazione dell'asse x della (2.24), applicare H ad una funzione di questo genere non porta fuori dal dominio. Si impone la condizione di raccordo (3.1) alle soluzioni del tipo (2.27). Il risultato è la quantizzazione del momento lungo l'asse x $\hbar k$:

$$\psi_{n,k_q}(x, y) = \frac{1}{\pi^{3/4} a^{1/2} \sqrt{2^{n+1} n!}} \exp\left(-\frac{(y + y_0)^2}{2a^2}\right) H_n\left(\frac{y + y_0}{a}\right) \exp(ik_q x), \quad (3.2)$$

dove $k_q = q/r$ e $q \in \mathbb{Z}$.

L'arbitrarietà del numero quantico q , una volta fissato n , porta ad affermare che la degenerazione dei livelli di Landau per il cilindro è

$$D_n^c = \infty \quad \forall n. \quad (3.3)$$

3.2 Autostati dei livelli di Landau sul toro

Per la soluzione sul toro si è fatto riferimento alla soluzione proposta in [9]. L'Hamiltoniano considerato in questo caso è quello in gauge simmetrica (2.2). Si scelgono per la seguente trattazione $l_1 = 1$ e $l_2 = \nu$, sicché ν è l'area della superficie del toro; quindi le relazioni di equivalenza saranno

$$\begin{aligned} x + u &\sim x & \text{con } u \in \mathbb{Z}, \\ y + v\nu &\sim y & \text{con } v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

H (1.2) per una gauge arbitraria non è invariante rispetto a traslazioni dell'asse x e y . Se si cercassero funzioni d'onda bi-periodiche invarianti rispetto a traslazioni del tipo

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + u, \\ y &\rightarrow y + v\nu, \end{aligned} \quad (3.5)$$

applicare H porterebbe fuori dal dominio, che di conseguenza non può contenere autofunzioni dell'Hamiltoniano. Applicando le traslazioni (3.5) al potenziale vettore si ottiene

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{B}{2}(-v\nu, u, 0). \quad (3.6)$$

Tuttavia la (3.6) corrisponde ad una trasformazione di gauge con parametro

$$\Lambda(\mathbf{x}) = -\frac{B}{2}v\nu x + \frac{B}{2}uy + \frac{\hbar c}{ie}C(u, v), \quad (3.7)$$

dove $C(u, v)$ è una funzione immaginaria pura. Applicando alle funzioni d'onda l'operatore unitario (1.12) associato a questa trasformazione di gauge si ha la nuova condizione di quasi periodicità al bordo per le autofunzioni:

$$\phi(x + u, y + v\nu) = \exp \left[\frac{i}{2l^2} (-v\nu x + uy) + C(u, v) \right] \phi(x, y). \quad (3.8)$$

Si verifica che questa regola di periodicità vale anche per funzioni del tipo $\hat{\pi}^\dagger \phi$, $\hat{\pi} \phi$ e, di conseguenza, $H\phi$. Tuttavia, è necessario verificarne la consistenza, imponendo che spostamenti generici lungo x e y commutino tra loro e che gli spostamenti lungo due direzioni distinte formino un gruppo discreto generato da due elementi. Si faccia l'ipotesi (verificata a posteriori) che, per $u \cdot v = 0$, $C(u, v) = 0$. Siano, quindi, U e V gli operatori associati alle trasformazioni

$$U\phi(x, y) = \phi(x + u, y) \quad \text{e} \quad V\phi(x, y) = \phi(x, y + v\nu). \quad (3.9)$$

La condizione da verificare è che sia

$$UV\phi(x, y) = VU\phi(x, y). \quad (3.10)$$

Si trova

$$\begin{aligned} UV\phi(x, y) &= \exp \left[\frac{i}{2l^2} (-v\nu x + uy) \right] \exp \left[\frac{i}{2l^2} (uv\nu) \right] \phi(x, y), \\ VU\phi(x, y) &= \exp \left[\frac{i}{2l^2} (-v\nu x + uy) \right] \exp \left[-\frac{i}{2l^2} (uv\nu) \right] \phi(x, y). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Quindi la condizione (3.10) assume la seguente forma

$$\exp \left(i \frac{\nu}{l^2} uv \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu}{l^2} = 2\pi t \quad \text{con } t \in \mathbb{N}; \quad (3.12)$$

$$\Phi = B\nu = 2\pi t \frac{\hbar c}{e} = t\Phi_0; \quad (3.13)$$

ovvero il flusso di campo magnetico Φ attraverso la superficie del toro è quantizzato, ovvero può assumere solo valori multipli del flusso elementare $\Phi_0 = \hbar c/e$. Da quanto appena scritto, si determina anche $C(u, v)$:

$$C(u, v) = iuv \frac{\nu}{2l^2} = i\pi tuv. \quad (3.14)$$

Sia $x_1 = x + u_1$, $y_1 = y + v_1\nu$ e $x_2 = x_1 + u_2$, $y_2 = y_1 + v_2\nu$. Si verifica, infine, che gli spostamenti lungo le due direzioni soddisfano la proprietà gruppale richiesta. Quindi,

$$\phi(x + (u_1 + u_2), y + (v_1 + v_2)\nu) = \phi(x_2, y_2), \quad (3.15)$$

che permette di affermare che le condizioni (3.8) sono effettivamente consistenti.

Una volta precisato il dominio dell'Hamiltoniano, ovvero le funzioni che soddisfano le condizioni (3.8) con $C(u, v)$ dato dalla (3.14), si cercano le autofunzioni del LLL. Poiché le $\hat{\pi}^\dagger \phi$ soddisfano le condizioni (3.8), gli autostati relativi a livelli di Landau più alti si ottengono applicando l'operatore $\hat{\pi}^\dagger$. Dalle osservazioni del §2.3, si può scrivere

$$\phi_0(w, \bar{w}) = f(w) \exp\left(-\frac{|w|^2}{4l^2}\right), \quad (3.16)$$

dove $f(w)$ è una funzione olomorfa; si definisce

$$f(w) = g(w) \exp\left(-\frac{w^2}{4l^2}\right) \quad (3.17)$$

e, imponendo le condizioni di quasi periodicità (3.8) alla (3.16) e tenendo presente la (3.13) e la (3.17), si ottiene la condizione di raccordo per le funzioni $g(w)$:

$$g(w + u + v\nu) = \exp[\pi t (v^2\nu - 2ivw)] g(w), \quad (3.18)$$

dalla quale è evidente che $g(w + u) = g(w + 1) = g(w)$, ovvero ha periodicità 1. $g(w)$ si può, quindi, sviluppare in serie di Fourier

$$g(w) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j \exp(i2\pi w j) \quad (3.19)$$

e imponendo che soddisfi (3.18) si ottiene la relazione ricorsiva

$$C_{j+vt} = C_j \exp\left\{-\frac{\pi\nu}{t} [(vt + j)^2 - j^2]\right\}. \quad (3.20)$$

La relazione precedente stabilisce che al massimo t coefficienti $a_j = C_j$ possano essere fissati arbitrariamente. Tramite la (3.20) si scrive $g(w)$ come

$$\begin{aligned} g(w) &= \sum_{j=1}^t a_j \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \exp[i2\pi (j + vt) w] \exp\left\{-\frac{\pi\nu}{t} [(vt + j)^2 - j^2]\right\} \\ &= \sum_{j=1}^t c_j \theta\left[\frac{j/t}{0}\right](tw|it\nu) \quad \text{con } c_j = a_j \exp[\pi\nu t j^2/t]; \end{aligned} \quad (3.21)$$

$\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z|w)$ è la funzione θ di caratteristiche reali α e β e argomento $(z|w)$

$$\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z|w) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp \left[i\pi(\alpha + j)^2 w + i2\pi(j + \alpha)(z + \beta) \right], \quad (3.22)$$

per la quale si mostra che i termini della somma tendono rapidamente a zero e la serie converge. Le autofunzioni del LLL sono quindi

$$\phi_{0,j}(w, \bar{w}) = \theta \begin{bmatrix} j/t \\ 0 \end{bmatrix} (tw|itv) \exp \left(\frac{w^2 - |w|^2}{4t^2} \right) \quad \text{con } j = 1, \dots, t, \quad (3.23)$$

dove

$$D_0^t = t = \Phi/\Phi_0 \quad (3.24)$$

è la degenerazione del LLL. Si noti che il risultato coincide con la stima (2.32), trovata qualitativamente per una superficie piana di area finita. Gli autostati per $n \geq 1$ sono

$$\phi_{n,j} = (\hat{\pi}^\dagger)^n \phi_{0,j} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ e } j = 1, \dots, t, \quad (3.25)$$

e hanno la medesima degenerazione del livello di Landau più basso

$$D_n^t = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \forall n. \quad (3.26)$$

4 I livelli di Landau sulla sfera

Un vantaggio della formulazione del problema dei livelli di Landau in geometria sferica è che questa formalmente non presenta condizioni al contorno. Tuttavia, l'ambiguità nella scelta della stringa di Dirac, ovvero del potenziale vettore $\mathbf{A}$, richiederà, come nel caso del toro, la quantizzazione del flusso magnetico. Per la dimostrazione rigorosa di questa affermazione si rimanda al lavoro di Hurst [10]. Data la simmetria del sistema, la soluzione verrà sviluppata in *coordinate sferiche*, che vengono brevemente trattate in appendice A.

Per semplicità di scrittura, si considera il caso particolare di una particella con carica negativa (un elettrone) $-e < 0$, il cui moto è vincolato ad una superficie sferica con campo magnetico radiale uscente. La soluzione è facilmente riconducibile al caso generale.

L'introduzione del problema sulla sfera è dovuto ad Haldane [8], il quale ne ha mostrato lo spettro energetico e gli autostati per il livello di Landau più basso. Di seguito si tratta il problema degli autovalori dell'Hamiltoniana come prima analisi del problema.

4.1 Monopolo magnetico e quantizzazione di Dirac

Si indica con B il modulo del campo magnetico radiale (uscente) sulla superficie sferica. Il flusso di campo magnetico sulla sfera è quindi

$$\Phi = 4\pi R^2 B. \quad (4.1)$$

Per la soluzione dei livelli di Landau è necessario definire un potenziale vettore $\mathbf{A}$ che descriva il campo magnetico:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.2)$$

Il flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa di un campo magnetico definito dall'equazione (4.2) è nullo. Questo risultato è contraddizione con (4.1). Per spiegare questa

incompatibilità si estende la definizione del campo magnetico all'intero spazio tridimensionale, in cui si fissa il sistema di riferimento nel centro della sfera; l'estensione naturale ad $\mathbb{R}^3$ è

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = BR^2 \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}. \quad (4.3)$$

Il campo magnetico (4.3) può essere visto come il campo prodotto da un *monopolo magnetico fittizio* posto nell'origine del sistema di riferimento e con *carica magnetica*

$$g = 4\pi R^2 B = \Phi > 0 \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{g}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}. \quad (4.4)$$

Quindi, la (1.8) diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = g\delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (4.5)$$

Come già detto in §1.3, questo risultato porta ad affermare che non è possibile definire un potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ univoco su tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$.

In presenza di un monopolo magnetico, la *condizione di quantizzazione di Dirac* [11] impone

$$eg = 2\pi\hbar cd \quad \text{con } d \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Tenendo presente le relazioni (4.4) e (4.6), si calcola l'intensità del campo magnetico sulla sfera

$$B = \frac{\hbar c}{2e} \cdot \frac{d}{R^2}; \quad (4.7)$$

quindi il numero di flussi elementari che attraversano la superficie è

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{4\pi R^2 B}{\hbar c/e} = d, \quad (4.8)$$

che coincide con l'intero d proprio della quantizzazione di Dirac.

4.2 Hamiltoniana e momento angolare totale del sistema

Il momento angolare orbitale della particella sulla sfera è

$$\mathbf{L}_{\text{orb}} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\pi} = \mathbf{r} \times \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right), \quad (4.9)$$

dove $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)$ è il momento dinamico della particella introdotto dalla (2.3) (si è tenuto conto che la carica dell'elettrone è $-e$) e $\mathbf{r} = R\mathbf{e}_r$. In meccanica Hamiltoniana $\boldsymbol{\pi} = m_e \mathbf{v}$, dove $\mathbf{v}$ è la velocità della particella. Poiché il moto è vincolato alla sfera si deduce che $\mathbf{r} \perp \boldsymbol{\pi}$ e

$$\mathbf{L}_{\text{orb}}^2 = R^2 \boldsymbol{\pi}^2 = R^2 \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2. \quad (4.10)$$

Dunque, per la (1.2) e per la (4.10), si può riscrivere l'Hamiltoniana del sistema

$$H = \frac{\mathbf{L}_{\text{orb}}^2}{2m_e R^2} = \frac{\omega_c}{2l_0 \hbar} \mathbf{L}_{\text{orb}}^2, \quad (4.11)$$

dove si definisce il semintero positivo

$$l_0 = \frac{d}{2}. \quad (4.12)$$

A questo punto si verifica che le componenti cartesiane del momento angolare orbitale non soddisfano l'algebra di $SU(2)$. Di seguito si userà la notazione $i, j, k = x, y$ o z ; il calcolo viene svolto in dettaglio nell'appendice B.

$$[L_{\text{orb}}^i, L_{\text{orb}}^j] = i\hbar\epsilon^{ijk} \left(L_{\text{orb}}^k - \frac{eBR^2}{c} e_r^k \right) = i\hbar\epsilon^{ijk} (L_{\text{orb}}^k - l_0 \hbar e_r^k); \quad (4.13)$$

$$[L_{\text{orb}}^i, e_r^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}e_r^k. \quad (4.14)$$

Questo dice che $\mathbf{L}_{\text{orb}}$ non è il generatore delle rotazioni attorno all'origine. Infatti, il *momento angolare totale* $\mathbf{L}$ del sistema è la somma di due termini

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{orb}} + \mathbf{L}_{\text{em}}, \quad (4.15)$$

dove $\mathbf{L}_{\text{em}}$ è il momento angolare del campo elettromagnetico. La particella che si trova in $\mathbf{r}$ genera un campo elettrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = -\frac{e}{4\pi} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}. \quad (4.16)$$

Il momento angolare del campo elettromagnetico è

$$\mathbf{L}_{\text{em}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{r}' \times (\mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')) d^3x' = \frac{eg}{4\pi c} \frac{\mathbf{r}}{r} = l_0 \hbar \mathbf{e}_r, \quad (4.17)$$

dove $\mathbf{B}(\mathbf{r}')$ è il campo (4.3) in $\mathbf{r}'$; quindi il momento angolare totale risulta

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{orb}} + l_0 \hbar \mathbf{e}_r, \quad (4.18)$$

che soddisfa l'algebra di $SU(2)$

$$[L^i, L^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}L^k, \quad (4.19)$$

come si verifica facilmente tramite la (4.13), la (4.14) e la proprietà

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{L}_{\text{orb}} = \mathbf{L}_{\text{orb}} \cdot \mathbf{e}_r = 0. \quad (4.20)$$

4.3 I livelli di Landau sulla sfera

Per quanto visto in (4.19), esistono degli autostati $|l, m\rangle$ di $\mathbf{L}^2$ e L^z tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 |l, m\rangle &= \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle, \\ L^z |l, m\rangle &= \hbar m |l, m\rangle, \end{aligned} \quad (4.21)$$

dove $l \in \mathbb{N}/2$ e $m = -l, -l+1, \dots, l$. Inoltre, da (4.18) e (4.20) si ottiene

$$L_r := \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_r = l_0 \hbar, \quad (4.22)$$

ovvero

$$L_r |l, m\rangle = l_0 \hbar |l, m\rangle. \quad (4.23)$$

Sempre dalla (4.18) si ha

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}_{\text{orb}}^2 + l_0^2 \hbar^2, \quad (4.24)$$

dalla quale segue che $l(l+1) \geq l_0^2$, ovvero

$$0 \leq l_0 \leq l. \quad (4.25)$$

$l_0 \hbar$ è la proiezione del momento angolare totale lungo la direzione individuata dal versore $\mathbf{e}_r$, quindi dalle relazioni (4.23) e (4.25) si giunge al risultato

$$l = l_0 + n, \quad (4.26)$$

dove n è un intero non negativo.

Dalla (4.24) si trova immediatamente

$$\mathbf{L}_{\text{orb}}^2 = \mathbf{L}^2 - \hbar^2 l_0^2; \quad (4.27)$$

dunque gli autovalori dell'Hamiltoniana (4.11) sono

$$\varepsilon_n = \frac{\omega_c}{2l_0\hbar} [\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 l_0^2] = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} + \frac{n(n+1)}{2l_0} \right), \quad (4.28)$$

dove n , quindi, individua il $n+1$ -esimo livello di Landau. Si nota che, rispetto agli autovalori trovati per superfici trovate per il piano, il cilindro e il toro, i livelli di Landau sulla sfera presentano un termine aggiuntivo $\hbar\omega_c n(n+1)/d$, dove $d = 2l_0$.

È possibile determinare anche la degenerazione dei livelli di Landau. Infatti, l'autovalore $\hbar^2 l(l+1)$ di $\mathbf{L}^2$ ha degenerazione $2l+1$. Dalla prima relazione (4.28), si ha quindi che la degenerazione sulla sfera del $n+1$ -esimo livelli di Landau è

$$D_n^s = 2l+1 = 2l_0 + 2n + 1 = d + 2n + 1. \quad (4.29)$$

A differenza di quanto visto per le superfici considerate in precedenza, la degenerazione dipende dal livello di Landau considerato per un termine $2n$. Inoltre, nel LLL ($n=0$) si ha che la D_0^s differisce da D_0^t per un termine unitario.

Infine, si può notare che al crescere del raggio della sfera i livelli di Landau tendono a quelli del piano infinito. Infatti, la relazione (4.8) afferma che, considerando l'intensità del campo magnetico B costante sulla superficie, per $R \rightarrow \infty$, $l_0 = d/2$ diverge come il quadrato di R e quindi

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\rightarrow \epsilon_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \\ D_n^s &\rightarrow D_n^p = \infty \quad \forall n. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dunque, il termine aggiuntivo dipende dalla curvatura della superficie. Al crescere del raggio questa tende a zero e si ritrova il risultato (2.12), con la medesima degenerazione.

5 Gli autostati del sistema sulla sfera

Il questo ultimo capitolo si risolve il problema degli autostati per l'Hamiltoniana (4.11) per il problema sulla superficie sferica.

5.1 Il potenziale vettore

Per trovare gli autostati del sistema è necessario scegliere un potenziale vettore tale che

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{g}{4\pi} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}. \quad (5.1)$$

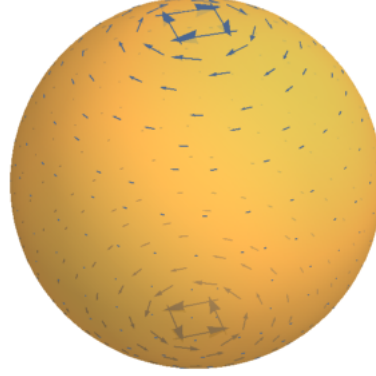
Un potenziale conveniente è quello antisimmetrico in z , che in coordinate cartesiane si scrive

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{g}{4\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Utilizzando le relazioni (4.6) e (4.12), sulla superficie in coordinate sferiche si ottiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mathbf{e}_\varphi \frac{\hbar c l_0}{e R} \cot \theta, \quad (5.3)$$

che presenta due singolarità simmetriche ai poli per $\theta = 0, \pi$. Questi divergenze non hanno alcun significato dal punto di vista fisico; rispecchiano, tuttavia, l'impossibilità di formulare un potenziale vettore triviale in presenza di un monopolo magnetico. Si riporta di seguito una rappresentazione del potenziale vettore sulla sfera.



Tenendo presenti le relazioni (A.4) e (A.6), si trova che il momento angolare orbitale (4.9) in coordinate sferiche è

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\text{orb}}(\theta, \varphi) &= -i\hbar \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{eR}{c} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \\ &= -i\hbar \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\theta l_0 \hbar \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Quindi dalla (4.18) il momento angolare totale del sistema è

$$\mathbf{L}(\theta, \varphi) = -i\hbar \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + l_0 \hbar \left(\mathbf{e}_\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \mathbf{e}_r \right). \quad (5.5)$$

5.2 Generalizzazione dello spazio di Hilbert

Da quanto affermato nel §4.3, segue immediatamente che autostati associati all'autovalore $\hbar^2 l(l+1)$ dell'operatore $\mathbf{L}^2$ sono autostati dell'Hamiltoniana del sistema per l'autovalore ε_n (4.28), dove n ed l sono legati dalla relazione (4.26). Si indicano queste autofunzioni di H (4.11) come $\Psi_{n,m}$:

$$H\Psi_{n,m} = \varepsilon_n \Psi_{n,m}, \quad (5.6)$$

dove m è il numero quantico associato ad L^z (4.21).

A questo punto viene formulato il passaggio fondamentale della soluzione del problema degli autostati. È conveniente introdurre un terzo angolo $\psi \in [0, 2\pi[$ (non fisico), estendendo lo spazio ad S^3 . Si impone, per definizione di ψ , che lo *spazio di Hilbert fisico* del sistema è generato dalle autofunzioni $\Psi_{n,m}^{l_0}(\theta, \varphi, \psi)$ per cui l'operatore differenziale associato al terzo angolo ψ ha come autovalore l_0 . Ovvero,

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \psi} \Psi_{n,m}^{l_0}(\theta, \varphi, \psi) = l_0 \hbar \Psi_{n,m}^{l_0}(\theta, \varphi, \psi). \quad (5.7)$$

In questo spazio di Hilbert allargato, gli operatori precedentemente introdotti possono essere generalizzati effettuando la sostituzione

$$l_0 \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (5.8)$$

Dalla (5.5), effettuando la sostituzione (5.8), le componenti cartesiane del momento angolare totale diventano

$$\begin{aligned} L^x(\theta, \varphi, \psi) &= -i\hbar \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \right), \\ L^y(\theta, \varphi, \psi) &= -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \right), \\ L^z(\theta, \varphi, \psi) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

In analogia alla soluzione proposta nel §2.1, si introduce una terna di operatori $\mathbf{J}$ [10] - *pseudo-momento angolare* - di componenti

$$\begin{aligned} J^x(\theta, \varphi, \psi) &= -i\hbar \left(-\sin \psi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \psi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \psi} \right), \\ J^y(\theta, \varphi, \psi) &= -i\hbar \left(\cos \psi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \psi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \psi} \right), \\ J^z(\theta, \varphi, \psi) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Quindi lo spazio di Hilbert fisico è il sottospazio generato dagli stati $\Psi_{n,m}^{l_0}$ per cui il numero quantico l_0 individua la proiezione del momento angolare $\mathbf{J}$ lungo la direzione z , ovvero

$$J^z \Psi_{n,m}^{l_0} = l_0 \hbar \Psi_{n,m}^{l_0}. \quad (5.11)$$

Si verifica che $\mathbf{J}$, come del resto $\mathbf{L}$, soddisfa l'algebra di $SU(2)$

$$[J^i, J^j] = i\hbar \epsilon^{ijk} J^k, \quad [L^i, L^j] = i\hbar \epsilon^{ijk} L^k, \quad (5.12)$$

e che le componenti dei due operatori commutano tra loro

$$[J^i, L^j] = 0 \quad \forall i, j; \quad (5.13)$$

inoltre

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2, \quad (5.14)$$

che espresso in *coordinate angolari* assume la forma

$$\mathbf{J}^2(\theta, \varphi, \psi) = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{\cot \theta}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \psi} \right). \quad (5.15)$$

Infine, la relazione (4.22) diventa

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_r = J^z. \quad (5.16)$$

5.3 Coordinate generalizzate

Per formulare gli autostati vengono considerate delle nuove *coordinate generalizzate* $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, introdotte inizialmente da Haldane [8] e generalizzate in questo lavoro. Il diffeomorfismo che lega le coordinate $(\rho, \theta, \varphi, \psi)$, che descrivono uno spazio $\mathbb{R}^4$ ($\rho > 0$), alle coordinate (u, v) è

$$u = \rho \cos \frac{\theta}{2} \exp \left(i \frac{\varphi + \psi}{2} \right), \quad v = \rho \cos \frac{\theta}{2} \exp \left(-i \frac{\varphi - \psi}{2} \right). \quad (5.17)$$

Si considerano a questo punto gli operatori introdotti da Greiter [12] nelle nuove coordinate generalizzate:

$$\begin{aligned} L^x(u, v, \bar{u}, \bar{v}) &= \frac{\hbar}{2} \left(v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v} - \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \right); \\ L^y(u, v, \bar{u}, \bar{v}) &= \frac{i\hbar}{2} \left(v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \right); \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} L^z(u, v, \bar{u}, \bar{v}) &= \frac{\hbar}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \right); \\ J^x(u, v, \bar{u}, \bar{v}) &= \frac{\hbar}{2} \left(\bar{v} \frac{\partial}{\partial u} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial v} - v \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + u \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \right); \\ J^y(u, v, \bar{u}, \bar{v}) &= \frac{i\hbar}{2} \left(\bar{v} \frac{\partial}{\partial u} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial \bar{u}} - u \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \right); \\ J^z(u, v, \bar{u}, \bar{v}) &= \frac{\hbar}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} - \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Per mezzo delle relazioni (5.17) si può esprimere gli operatori (5.18) e (5.19) in termini operatori differenziali nelle coordinate $(\rho, \theta, \varphi, \psi)$. Si ottiene che quelli appena definiti corrispondono rispettivamente, in modo univoco, agli operatori (5.9) e (5.10); in particolare, risultato indipendenti da ρ , per lo stesso motivo per cui il momento angolare standard in coordinate sferiche non dipende dalla coordinata radiale. Senza perdita di generalità, quindi, è possibile porre $\rho = 1$:

$$|u|^2 + |v|^2 = \rho^2 = 1, \quad (5.20)$$

ovvero lo spazio è equivalente a S^3 .

Per $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{J}^2$ si verifica il risultato

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{J}^2 = L(L+1), \quad (5.21)$$

con

$$L = \frac{\hbar}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \right). \quad (5.22)$$

Dalle relazioni (5.18), (5.19), (5.21) e (5.22), si nota che gli operatori L^x , L^y , L^z , J^z e $\mathbf{L}^2$ sono invarianti per la trasformazione di *gauge*

$$u \rightarrow \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\right) u, \quad v \rightarrow \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\right) v. \quad (5.23)$$

Come si vede da (5.17), questa trasformazione corrisponde ad una traslazione

$$\psi \rightarrow \psi + \alpha. \quad (5.24)$$

Dunque, questa invarianza equivale all'arbitrarietà della coordinata ψ . Al termine della soluzione si sceglierà $\psi = 0$.

Un dei modi in cui si può esprimere nelle nuove coordinate generalizzate il versore radiale è

$$\mathbf{e}_r(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = \frac{\boldsymbol{\Omega}(u, v, \bar{u}, \bar{v})}{\|\boldsymbol{\Omega}(u, v, \bar{u}, \bar{v})\|}, \quad (5.25)$$

dove

$$\boldsymbol{\Omega}(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = \begin{pmatrix} u\bar{v} + v\bar{u} \\ -iu\bar{v} + iv\bar{u} \\ u\bar{u} - v\bar{v} \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Si verifica che in queste coordinate è ancora verificata la relazione (5.16)

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_r = J^z. \quad (5.27)$$

5.4 Operatori di creazione e annichilazione

Considerando sempre l'analogia con la soluzione del piano in gauge simmetrica, si definiscono gli operatori di creazione e distruzione associati a $\mathbf{L}$ e $\mathbf{J}$. Rispettivamente

$$\hat{L}^\dagger = \frac{L^x + iL^y}{\hbar}, \quad \hat{L} = \frac{L^x - iL^y}{\hbar} \quad (5.28)$$

e

$$\hat{J}^\dagger = \frac{J^x - iJ^y}{\hbar}, \quad \hat{J} = \frac{J^x + iJ^y}{\hbar}. \quad (5.29)$$

Le relazioni (5.18) e (5.19), permettono di esprimere gli operatori appena definiti nelle coordinate generalizzate. Sostituendo si ottiene

$$\hat{J}^\dagger(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = \bar{v} \frac{\partial}{\partial u} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial v}, \quad \hat{J}(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = u \frac{\partial}{\partial \bar{v}} - v \frac{\partial}{\partial \bar{u}}, \quad (5.30)$$

e

$$\hat{L}^\dagger(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = u \frac{\partial}{\partial v} - \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{u}}, \quad \hat{L}(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = v \frac{\partial}{\partial u} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{v}}. \quad (5.31)$$

Le regole di commutazione per gli operatori $\hat{L}^\dagger$ e $\hat{L}$ sono

$$[L^z, \hat{L}^\dagger] = \hbar \hat{L}^\dagger, \quad [L^z, \hat{L}] = -\hbar \hat{L}, \quad [\hat{L}^\dagger, \hat{L}] = \frac{2}{\hbar} L^z, \quad (5.32)$$

e, in maniera speculare, per $\hat{J}^\dagger$ e $\hat{J}$ si hanno

$$[J^z, \hat{J}^\dagger] = -\hbar \hat{J}^\dagger, \quad [J^z, \hat{J}] = \hbar \hat{J}, \quad [\hat{J}, \hat{J}^\dagger] = \frac{2}{\hbar} J^z. \quad (5.33)$$

È possibile esprimere l'Hamiltoniana (4.11) in termine dei nuovi operatori di creazione e distruzione. Utilizzando le relazioni (4.27), (5.11), (5.14), (5.16) e (5.33), si ottiene

$$\begin{aligned} H &= \frac{\omega_c}{2l_0\hbar} (\mathbf{L}^2 - (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{L})^2) \\ &= \frac{\omega_c}{2l_0\hbar} (\mathbf{J}^2 - (J^z)^2) \\ &= \frac{\hbar\omega_c}{4l_0} (\hat{J}^\dagger \hat{J} + \hat{J} \hat{J}^\dagger) \\ &= \frac{\hbar\omega_c}{2l_0} \left(\hat{J}^\dagger \hat{J} + \frac{J^z}{\hbar} \right) \\ &= \hbar\omega_c \left(\frac{1}{2l_0} \hat{J}^\dagger \hat{J} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Dalla terza regola di commutazione (5.33) segue che $\hat{J}^\dagger$ e $\hat{J}$ svolgono la medesima funzione degli operatori $\hat{\pi}^\dagger$ e $\hat{\pi}$ (2.5), ovvero sono gli operatori di innalzamento e abbassamento dei livelli di Landau sulla sfera. Gli operatori $\hat{J}^\dagger$ e $\hat{J}$, inoltre, non modificano la proiezione $m\hbar$ del momento angolare $\mathbf{L}$ lungo l'asse z , infatti

$$[\hat{J}^\dagger, L^z] = [\hat{J}, L^z] = 0. \quad (5.35)$$

$\hat{L}^\dagger$ e $\hat{L}$ alzano e abbassano di una unità il numero quantico m all'interno dello stesso livello di Landau, come nel caso del piano avveniva per gli operatori $\hat{\pi}^\dagger$ e $\hat{\pi}$ (2.6). Si può dedurre quanto appena affermato dalle regole di commutazione (5.32) e

$$[\hat{J}^\dagger, \hat{L}^\dagger] = [\hat{J}^\dagger, \hat{L}] = [\hat{J}, \hat{L}^\dagger] = [\hat{J}, \hat{L}] = 0. \quad (5.36)$$

5.5 Livello di Landau più basso

Gli autostati del livello di Landau più basso $\Psi_{0,m}^{l_0}$ sono quelli individuati dalle equazioni

$$\hat{J}\Psi_{0,m}^{l_0} = 0, \quad (5.37)$$

$$L^z\Psi_{0,m}^{l_0} = m\hbar\Psi_{0,m}^{l_0}, \quad (5.38)$$

$$S^z\Psi_{0,m}^{l_0} = l_0\hbar\Psi_{0,m}^{l_0}. \quad (5.39)$$

Si consideri la prima di queste equazioni: applicare H , espressa in termini di $\hat{J}^\dagger$ e $\hat{J}$ (5.34), porta al risultato

$$H\Psi_{0,m}^{l_0} = \frac{1}{2}\hbar\omega_c\Psi_{0,m}^{l_0}, \quad (5.40)$$

che coincide con il risultato (4.28) per $n = 0$.

In termini delle coordinate generalizzate, una base ortogonale completa di stati che descrivono il LLL è fornita da

$$\Psi_{0,m}^{l_0}(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = u^{l_0+m}v^{l_0-m}, \quad (5.41)$$

con $m = -l_0, -l_0 + 1, \dots, l_0$. La degenerazione del livello di Landau più basso è quindi

$$D_0^s = 2l_0 + 1 = d + 1, \quad (5.42)$$

dove d (4.8) è il numero di flussi elementari sulla superficie sferica.

Scrivendo le funzioni ottenute in termini delle coordinate angolari si ottiene

$$\Psi_{0,m}^{l_0}(\theta, \varphi, \psi) = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{l_0+m} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{l_0-m} \exp(im\varphi) \exp(il_0\psi). \quad (5.43)$$

La coordinata ψ contribuisce all'autostato del sistema solo per una fase, insignificante dal punto di vista fisico. Questo risultato deriva dall'invarianza dell'Hamiltoniana rispetto alle trasformazioni (5.23): dalla prima relazione delle (5.34), infatti, si nota che questa dipende unicamente da $\mathbf{L}^2$ e J^z , che a loro volta sono invarianti rispetto a questa trasformazione di *gauge*. Quindi, come detto in precedenza, si fissa $\psi = 0$.

Le funzioni di stato che descrivono il sistema nelle coordinate sferiche (θ, φ) , modulo la normalizzazione, si scrivono

$$\Psi_{0,m}(\theta, \varphi) = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{l_0+m} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{l_0-m} \exp(im\varphi). \quad (5.44)$$

In coordinate sferiche è evidente che per $m < -l_0$ o $m > l_0$, le funzioni (5.44) divergono e non possono essere autostati del sistema.

Il fattore di normalizzazione $K_{0,m}$ per $\Psi_{0,m}(\theta, \varphi)$, si trova risolvendo l'integrale

$$\int d\Omega \overline{\Psi_{0,m'}}(\theta, \varphi) \Psi_{0,m}(\theta, \varphi) = 4\pi \frac{(l_0+m)!(l_0-m)!}{(2l_0+1)!} \delta_{mm'}, \quad (5.45)$$

dove $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. Dunque si ottiene

$$K_{0,m} = \left(\frac{(2l_0+1)!}{4\pi(l_0+m)!(l_0-m)!} \right)^{1/2}. \quad (5.46)$$

5.6 Livelli di Landau eccitati

In §5.4 si è dimostrato che l'operatore $\hat{J}^\dagger$ si comporta come operatore di innalzamento del livello di Landau. Tuttavia, si nota che l'operatore $\hat{J}^\dagger$ altera la struttura dei livelli di Landau: infatti, dalla prima relazione di commutazione (5.33) si ottiene

$$J^z \hat{J}^\dagger \Psi_{n,m}^{l_0} = (l_0 - 1) \hbar \hat{J}^\dagger \Psi_{n,m}^{l_0} \quad (5.47)$$

Questa relazione afferma che, applicando l'operatore $\hat{J}^\dagger$ ad una autostato del livello di Landau n , lo stato ottenuto non è contenuto nello spazio di Hilbert fisico del sistema.

Il problema è risolto se, conoscendo l'autostato del n -esimo livello di Landau, se ne incrementa il flusso di campo magnetico da $2l_0$ a $2(l_0 + 1)$ e si applica di conseguenza l'operatore $\hat{J}^\dagger$. La funzione di stato risultante ha $l_0 \hbar$ come autovalore di J^z , quindi è contenuta nello spazio di Hilbert fisico e descrive uno stato del $n + 1$ -esimo livello di Landau.

Poiché sono note le autofunzioni dell'Hamiltoniano nel LLL più basso, è possibile scrivere una base ortogonale completa per il $n + 1$ -esimo livello di Landau come

$$\Psi_{n,m}^{l_0} = \left(\hat{J}^\dagger \right)^n \Psi_{0,m}^{l_0+n}, \quad (5.48)$$

dove $m = -l_0 - n, -l_0 - n + 1, \dots, l_0 + n$. La degenerazione del $n + 1$ -esimo livello di Landau è

$$D_n^s = d + 2n + 1, \quad (5.49)$$

ovvero la degenerazione cresce a seconda del livello di Landau come $2n$. Questa è una differenza sostanziale rispetto al risultato trovato per il toro, per il quale la degenerazione rimaneva costante. Si esprime, a questo punto, l'operatore $\hat{J}^\dagger$ in coordinate angolari

$$\hat{J}^\dagger(\theta, \varphi, \psi) = \exp(-i\psi) \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \psi} \right). \quad (5.50)$$

Si cerca, quindi, in maniera esplicita l'autofunzione $\Psi_{1,m}(\theta, \varphi)$. Applicando l'operatore $\hat{J}^\dagger(\theta, \varphi, \psi)$ alla funzione $\Psi_{0,m}^{l_0+1}(\theta, \varphi, \psi)$, un breve calcolo conduce al risultato

$$\Psi_{1,m}^{l_0}(\theta, \varphi, \psi) = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{l_0+m} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{l_0-m} [m - (l_0 + 1) \cos \theta] \exp(im\varphi + il_0\psi). \quad (5.51)$$

Si pone $\psi = 0$ che contribuisce alla funzione solo per una fase, come nel LLL. Il risultato è l'autofunzione dell'Hamiltoniana, modulo la normalizzazione, in coordinate sferiche

$$\Psi_{1,m}(\theta, \varphi) = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{l_0+m} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{l_0-m} [m - (l_0 + 1) \cos \theta] \exp(im\varphi), \quad (5.52)$$

dove $m = -l_0 - 1, -l_0, \dots, l_0 + 1$. Quindi, la degenerazione è $D_1^s = d + 3$, come previsto dalla (5.49). Si noti che il termine aggiuntivo rispetto alle autofunzioni del LLL, ovvero $[m - (l_0 + 1) \cos \theta]$, annulla le divergenze che altrimenti si avrebbero per $m = -l_0 - 1$ e per $m = l_0 + 1$.

Si dimostra in generale [13] che gli autostati del sistema per $n + 1$ -esimo livello di Landau in coordinate sferiche possono essere espressi in termini di *polinomi di Jacobi*

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d}{dx} \left((1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n \right). \quad (5.53)$$

Questi polinomi sono ortogonali e formano una base completa di $L^2([-1, +1])$. Per una trattazione dettagliata si rimanda a [14].

Il risultato generale è

$$\Psi_{n,m}(\theta, \varphi) = K_{n,m} \exp(im\varphi) \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{l_0+m} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{l_0-m} P_n^{(l_0-m, l_0+m)}(\cos \theta), \quad (5.54)$$

dove la costante di normalizzazione è

$$K_{n,m} = \left(\frac{n!(2l_0 + 2n + 1)(2l_0 + n)!}{4\pi(l - m + n)!(l + m + n)!} \right)^{1/2}. \quad (5.55)$$

6 Conclusioni

Quello che ci si era proposti per questo lavoro era il confronto delle soluzioni del problema dei livelli di Landau per geometrie differenti.

Si è mostrato che, per geometrie non banali con topologia riconducibile a quella di una superficie piana (il cilindro e il toro), l'equazione di Schrödinger può essere risolta definendo delle opportune condizioni al contorno alle funzioni di stato del piano; lo spettro dell'Hamiltoniana è il medesimo. Nel caso della sfera, invece, gli autovalori dell'Hamiltoniana presentano un termine aggiuntivo che dipende dalla curvatura. In particolare, si è mostrato come, per $R \rightarrow \infty$, la curvatura dello spazio tende a zero e gli autovalori tendono a quelli del piano.

Una delle caratteristiche fondamentali evidenziata nella trattazione del problema è la stretta connessione tra il numero di flussi elementari $\Phi_0 = hc/e$ che attraversano la superficie e la degenerazione dei livelli di Landau. In §2.3 per la superficie piana di area finita si è trovato che Φ/Φ_0 è una buona stima della degenerazione D_0 del LLL. Per un piano infinito, questo si traduce nel fatto che la degenerazione del LLL e di tutti gli stati eccitati D_n^p è infinita, come mostrato dal risultato (2.22). Nel caso del cilindro una delle due dimensioni è resa compatta, ma ciò non cambia la degenerazione D_n^c che risulta ancora infinita per ogni livello di Landau (3.3).

Per le superfici chiuse, affinché le soluzioni proposte siano consistenti, si è dovuto richiedere che il flusso attraverso la superficie sia quantizzato e, in particolare, sia un multiplo del flusso elementare. Per il toro e la sfera, si ha che Φ/Φ_0 è una buona stima della degenerazione. In particolare, la (3.26) afferma che il numero di flussi elementari sul toro è esattamente la degenerazione per ogni livello di Landau D_n^t . Per la sfera, invece, D_n^s è differente e dipende dal livello di Landau considerato, come mostrato in (4.29). Nel LLL i risultati di sfera e toro differiscono di una unità: questo risultato deriva dalla diversa geometria delle due superfici e, in particolare, dal diverso *genere*, come si può dimostrare tramite il *teorema dell'indice* [15], la cui trattazione non è stata approfondita in questo lavoro.

Infine, per quanto riguarda il caso particolare della sfera, si è generalizzato il formalismo introdotto da Haldane [8] per giungere alla formulazione degli autostati dell'Hamiltoniana in termini delle coordinate sferiche. Come si è già detto, il passaggio fondamentale nella soluzione formale è la generalizzazione dello spazio di Hilbert. L'introduzione delle coordinate generalizzate permette di lavorare facilmente con gli operatori introdotti e ne evidenzia le simmetrie. Lo svolgimento ricorda la soluzione del problema agli autovalori per l'atomo di idrogeno sfruttando il vettore di Laplace-Runge-Lenz, per la quale si rimanda a [16].

A Coordinate sferiche

La simmetria del problema introdotto nei capitoli 4 e 5 richiede l'analisi vettoriale in coordinate sferiche (r, θ, φ) , dove $\varphi \in [0, 2\pi[$ e $\theta \in [0, \pi]$. Vengono introdotte di seguito alcune delle proprietà fondamentali che sono state utilizzate nella trattazione precedente.

Vettori e campi vettoriali sono descritti rispettivamente da

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{A.2})$$

dove

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Da queste definizioni seguono

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \quad (\text{A.4})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{e}_\theta, & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{e}_r, & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} &= \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} &= \cos \theta \mathbf{e}_\varphi, & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

L'operatore nabla e il laplaciano in coordinate sferiche si rispettivamente

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{A.7})$$

B Regole di commutazione del momento angolare orbitale in presenza di un campo magnetico

In questa appendice si calcola il risultato più generale per le regole di commutazione del momento angolare orbitale, giungendo alla (4.13) per il campo magnetico introdotto nel problema. Un veloce calcolo porta alle regole di commutazione

$$[x^i, \pi^j] = i\hbar \delta^{ij}, \quad (\text{B.1})$$

$$[\pi^i, \pi^j] = -i\hbar \frac{e}{c} \partial^i A^j + i\hbar \frac{e}{c} \partial^j A^i = -i\hbar \frac{e}{c} F^{ij}, \quad (\text{B.2})$$

dove $\pi^i = -i\hbar \partial^i + eA^i/c$ è la componente i -esima del momento dinamico e F^{ij} è la componente ij del *tensor elettromagnetico* antisimmetrico.

Si svolge di seguito in dettaglio il calcolo del commutatore delle componenti cartesiane del momento angolare orbitale.

$$\begin{aligned} [L_{\text{orb}}^i, L_{\text{orb}}^l] &= [\epsilon^{ijk} x^j \pi^k, \epsilon^{lmn} x^m \pi^n] \\ &= \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} [x^j \pi^k, x^m \pi^n] \\ &= \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} (-x^j [x^m, \pi^k] \pi^n + x^m [x^j, \pi^n] + x^j x^m [\pi^k, \pi^n]), \\ &= i\hbar \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \left(x^j \delta^{mk} \pi^n + x^m \delta^{jn} \pi^k + x^m x^j \frac{e}{c} F^{nk} \right) \\ &= i\hbar \left[-x^l \pi^i + x^i \pi^l + \frac{e}{c} x^j (x^i F^{jl} + x^l F^{ji}) - x^j x^j \frac{e}{c} F^{il} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Tenendo conto delle relazioni $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k$ e $x^i x^i = r^2$, si trova il risultato generale

$$[L_{\text{orb}}^i, L_{\text{orb}}^l] = i\hbar\epsilon^{ijk} \left(L_{\text{orb}}^k - r^2 \frac{e}{c} B^k \right) + i\hbar \frac{e}{c} x^l (x^i F^{lj} + x^j F^{li}), \quad (\text{B.4})$$

il quale coincide con (4.13) nel caso $B^k = B e_r^k$. Infatti, per l'antisimmetria del tensore elettromagnetico il termine aggiuntivo è nullo.

Riferimenti bibliografici

- [1] L.D. Landau, *Diamagnetismus der Metalle*. Zeitschrift für Physik **64**, 629 (1930)
- [2] G. Morandi, *Quantum Hall Effect*. Bibliopolis, Napoli (1988).
- [3] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, *New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance*. Physical Review Letters **45**, 494 (1980).
- [4] D.C. Tsui, *Nobel Lecture: Interplay of disorder and interaction in two-dimensional electron gas in intense magnetic fields*. Reviews of Modern Physics **71**, 891 (1999).
- [5] R.B. Laughlin, *Quantized Hall conductivity in two dimensions*. Physical Review B **23**, 5632 (1981).
- [6] D.C. Tsui, H.L. Stormer and A.C. Gossard, *Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit*. Physical Review Letters **48**, 1559 (1982).
- [7] R.B. Laughlin, *Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations*. Physical Review Letters **50**, 1395 (1983).
- [8] F.D.M. Haldane, *Fractional quantization of the Hall effect: a hierarchy of incompressible quantum fluid states*. Physical Review Letters **51**, 605 (1983).
- [9] F.D.M. Haldane and E. H. Rezayi, *Periodic Laughlin-Jastrow wave functions for the fractional quantized Hall effect*. Physical Review Letters **54**, 237 (1985).
- [10] C. A. Hurst, *Charge Quantization and Nonintegrable Lie Algebras*. Annals of Physics **50**, 51 (1968).
- [11] P.A.M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*. Proceedings of the Royal Society of London A **133**, 60 (1931).
- [12] M. Greiter, *Landau level quantization on the sphere*. Physical Review B **83**, 115129 (2011).
- [13] M. Fierz, *Zur Theorie magnetisch geladener Teilehen*. Helvetica Physica Acta **17**, 27 (1944)
- [14] C. Rossetti, *Metodi matematici della Fisica*. Levrotto & Bella, Torino (2000).
- [15] E.V. Ferapontov and A.P. Veselov, *Integrable Schrödinger operators with magnetic fields: factorisation method on curved surfaces*. Journal of Mathematical Physics **42**, 590 (2001).
- [16] G. Sartori e M. Tonin, *Appunti di Istituzioni di Fisica Teorica*, Cleup Editore, Padova (1985)