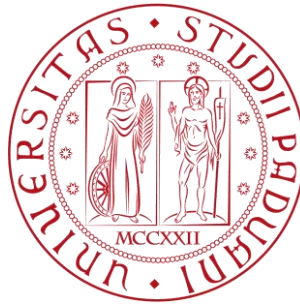




UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea

Effetto del motore controrotante e della ruota posteriore sterzante sulla dinamica della motocicletta

Relatore: Prof. Matteo Massaro

Correlatore: Dott. Nicola Dal Bianco

Laureando: Edoardo Marconi

Matricola 1079818

Anno Accademico 2015-2016

Ai miei genitori

Indice

Sommario	III
1 Introduzione: il metodo della manovra ottima	1
2 La manovra ottima come soluzione di un problema di controllo ottimo	5
2.1 Il principio di minimo di Pontryagin	9
2.2 Il controllo ottimo con vincoli unilaterali	11
2.3 Le coordinate spaziali	12
3 Metodi e modelli	15
3.1 Il modello della motocicletta	16
3.1.1 Corpi costituenti il modello	16
3.1.2 Gradi di libertà e ingressi.....	18
3.1.3 Il modello di pneumatico	20
3.1.4 Sospensioni.....	24
3.1.5 Forze aerodinamiche.....	26
3.1.6 Espressione dello sterzo posteriore.....	27
3.2 Vincoli	28
3.3 Cenni sulla modellizzazione dei circuiti	29
4 Studio del motore controrotante	31
4.1 Simulazioni di tempo minimo: rettilineo	35
4.1.1 Risultati delle simulazioni in rettilineo.....	35
4.2 Simulazioni di tempo minimo: curva ad U	41
4.2.1 Risultati delle simulazioni su curva ad U	42
4.3 Simulazioni di tempo minimo: percorso ad anello	53
4.3.1 Risultati delle simulazioni su percorso ad anello	53
4.4 Simulazioni di tempo minimo: chicane	56
4.4.1 Risultati delle simulazioni su chicane	56
4.5 Considerazioni conclusive sul motore controrotante.....	63
5 Studio del sistema di sterzo posteriore	65
5.1 Analisi cinetostatica	67

5.1.1	Risultati dell'analisi cinetostatica	68
5.2	Analisi nel dominio della frequenza: stabilità dei modi di vibrare	81
5.2.1	Confronto fra Matlab e Xoptima.....	81
5.2.2	Risultati dello studio dei modi di vibrare.....	84
5.3	Simulazioni di tempo minimo	85
5.3.1	Risultati delle simulazioni su curva ad U.....	86
5.3.2	Risultati delle simulazioni su chicane	91
5.4	Considerazioni conclusive sulla ruota posteriore sterzante.....	96
6	Conclusioni	99
	Bibliografia	101
	Appendice: caratteristiche della motocicletta	103

Sommario

L'utilizzo del motore controrotante è un argomento molto dibattuto nell'ambito della dinamica dei motocicli, tuttavia ad oggi non esiste un'evidenza oggettiva riguardo ai presunti vantaggi di questa soluzione, a dispetto del suo impiego anche in ambito motorsport.

Mentre nel mondo dei veicoli a quattro ruote l'utilizzo delle ruote posteriori sterzanti è una realtà industriale, per quanto riguarda i veicoli a due ruote non esistono realizzazioni di questo sistema, se non a livello di ricerca. Nonostante l'argomento sia già stato oggetto di alcune ricerche, un'analisi completa (configurazioni di equilibrio, risposta in frequenza, risposta nel dominio del tempo, ed in particolare simulazioni di tempo minimo) non è mai stata effettuata.

Il presente studio si propone pertanto di approfondire la conoscenza riguardo a queste due soluzioni, indagandone l'effetto sulla dinamica dei motocicli con lo scopo di individuare l'esistenza di eventuali vantaggi, oltre che di valutare l'entità degli stessi e identificare gli scenari in cui si presentano. A questo scopo si sono effettuate simulazioni di tempo minimo su diversi percorsi e, per lo sterzo posteriore, si sono inoltre studiate le configurazioni di equilibrio (analisi cinetostatica) e la risposta in frequenza (modi di vibrare).

Dopo un'introduzione alla teoria del controllo ottimo non lineare e al metodo della manovra ottima, si descriveranno gli aspetti più significativi dei metodi e dei modelli utilizzati; infine, saranno esposti i risultati ottenuti dalle indagini effettuate sul motore controrotante e sullo sterzo posteriore.

1 Introduzione: il metodo della manovra ottima

Grazie al fatto che uomo e motociclo hanno masse comparabili, i motociclisti usano i movimenti della parte superiore del loro corpo come input addizionale e questi gradi di libertà aggiuntivi permettono al pilota di esprimere uno stile di guida personale più di quanto non risulti possibile con altre tipologie di veicoli a motore. Inoltre, l'esperienza e l'abilità di guida giocano un ruolo importante nell'efficacia delle azioni di controllo e nella ripetibilità delle manovre. Di conseguenza, il pilota ha una grande influenza sulle prestazioni e sul comportamento dinamico del veicolo. È quindi chiaro che lo studio dei veicoli a due ruote non può essere svolto senza includere il pilota nel processo di valutazione.

Quantificare le prestazioni di un motociclo è perciò un'attività complessa a causa della grande variabilità di stili di guida, permessi dal numero di input che contribuiscono alla strategia di controllo, e del ruolo centrale della percezione soggettiva dell'esperienza di guida. Ciononostante, la valutazione oggettiva delle prestazioni di un motociclo è un obiettivo fondamentale per i progettisti di veicoli a due ruote sia commerciali che da corsa.

Una domanda fondamentale nel processo di valutazione è: data una specifica motocicletta, esiste un modo di condurla nella maniera più efficace possibile in base ad un determinato obiettivo? Se esiste, questo è detto *manovra ottima* e può essere usato come riferimento per confrontare e classificare altri motocicli simili. Se l'obiettivo è una definizione oggettiva delle prestazioni assolute, allora la manovra ottima è una misura della migliore prestazione intrinseca che può essere ricavata dalla macchina, prescindendo dalle capacità del pilota reale. D'altra parte, come detto, l'abilità e l'esperienza del pilota devono in qualche modo essere incluse nello studio. Per fare questo, la manovra ottima può essere cercata all'interno di quell'insieme di manovre che soddisfano anche le abilità e preferenze del pilota. Una tale manovra è ancora ottima, ma solo per lo specifico gruppo di piloti le cui abilità e preferenze sono state definite in modo oggettivo. Si può dire che la manovra ottima che rispetta le preferenze di guida dell'essere umano modella il modo in cui un pilota reale, appartenente ad un determinato gruppo, guida per raggiungere un certo scopo. Per questo motivo, essa è anche detta *manovra di riferimento*. Perciò, valutare le prestazioni dell'insieme pilota-motociclo richiede la definizione delle limitazioni e delle preferenze di guida di un certo gruppo di motociclisti.

È possibile reperire nella letteratura scientifica di settore svariati indici utilizzabili per quantificare le performance di una motocicletta e quanto facilmente essa viene controllata; alcuni di essi sono anche stati confrontati con dati sperimentali per alcune manovre standard. La maggior parte di questi indici sono combinati con l'opinione soggettiva del pilota in modo tale da valutare il sistema pilota-motociclo come un tutt'uno. In alternativa è possibile fare ricorso ad un metodo di valutazione oggettivo basato su quantità che includono anche il comportamento e le caratteristiche del pilota. Tuttavia, per raggiungere un tale scopo, è necessario tradurre le opinioni e preferenze personali in quantità misurabili.

Nel trattare del comportamento dinamico delle motociclette, è comune fare riferimento a due concetti fondamentali: manovrabilità e maneggevolezza. La *maneggevolezza* (handling) è intimamente legata alla facilità di guida di un veicolo in una certa manovra, mentre la *manovrabilità* (manoeuvrability) è l'espressione della massima prestazione raggiungibile dalla macchina per la medesima manovra, assumendo che il pilota sia in grado di condurla ai suoi limiti fisici. In altre parole, la manovrabilità è una caratteristica intrinseca della macchina, e quindi dipende esclusivamente dai parametri caratteristici del veicolo.

La manovra che genera la massima prestazione del motociclo rappresenta il modo più efficace per guidare la motocicletta e può pertanto essere definita *ottima*. Questa considerazione lega la misura della manovrabilità alla *manovra ottima*.

L'idea di utilizzare la manovra ottima per valutare le prestazioni di un motociclo richiede la formulazione di un problema di ottimizzazione per minimizzare una funzione obiettivo, che è la rappresentazione matematica della misura di manovrabilità o maneggevolezza. Il valore minimo di tale misura (ossia un unico valore scalare) è associato alla manovra migliore allo scopo di confrontare diverse motociclette. Questo approccio può essere adottato, per esempio, per guidare la progettazione dei motocicli da corsa. Il concetto può comunque essere esteso, spostando l'attenzione dalla quantificazione delle caratteristiche dinamiche di veicoli a due ruote alla valutazione della manovra in sé. In altre parole, dato un veicolo così com'è, con le proprie caratteristiche di manovrabilità e maneggevolezza, lo scopo è trovare il migliore modo di condurre la motocicletta in un determinato scenario, cercando di raggiungere un certo obiettivo.

Il problema di ottimizzazione che fornisce come soluzione la manovra ottima è costituito dai seguenti quattro elementi.

1) Il veicolo a due ruote, con le sue qualità di manovrabilità e maneggevolezza.

Il veicolo è caratterizzato dalla propria dinamica, comunemente descritta con un sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}) \quad (1.1)$$

dove $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ sono gli stati del sistema dinamico, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ sono i controlli e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ sono i parametri che identificano diversi sotto-sistemi. È utile notare che alcune caratteristiche del pilota possono essere modellizzate tramite equazioni differenziali da aggiungere a (1.1).

2) La manovra, da completare in un orizzonte temporale T a partire da tempo iniziale t_i .

Solitamente nella definizione della manovra vengono anche specificati gli stati iniziale e finale:

$$\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i \quad (1.2)$$

$$\mathbf{x}(t_i + T) = \mathbf{x}_f \quad (1.3)$$

dove t_i è il tempo iniziale e $t_i + T$ è il tempo finale.

3) I vincoli.

Essi contribuiscono alla definizione della manovra: per esempio, delimitano lo spazio all'interno del quale la manovra può essere eseguita. Talvolta i vincoli sono parte della definizione dell'obiettivo: essi potrebbero implementare aspetti di sicurezza, come il mantenimento di un certo margine dalla massima aderenza degli pneumatici o di una determinata distanza da un ostacolo. Infine, le preferenze e capacità del pilota sono rappresentate come un intervallo di valori che possono essere assunti da variabili di stato e controlli. Tutti questi vincoli possono essere bilaterali (equazioni) o unilaterali (diseguazioni) e possono essere attivi in un singolo punto (posizione temporale o spaziale, per esempio attraversare una certa posizione con una velocità predeterminata) e/o lungo l'intero percorso.

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq 0 \quad (1.4)$$

4) La funzione obiettivo (o costo), che definisce il concetto di ottimo.

Come già discusso, può essere una misura delle qualità del veicolo o un modo per specificare le proprietà della manovra che si intende generare (la più sicura, la più veloce, ecc.). Una definizione matematica generale della funzione obiettivo è:

$$\mathcal{F} = \Phi(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{x}(t_i + T)) + \int_{t_i}^{t_i+T} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}) dt \quad (1.5)$$

dove L è una funzione di costo integrale il cui valore deve essere minimizzato/massimizzato sull'orizzonte temporale T e Φ è un termine che misura il costo negli stati iniziale e/o finale.

Il concetto della manovra ottima ha la sua naturale controparte nella formulazione di un problema di controllo ottimo non lineare (Optimal Control Problem, OCP) basato sugli elementi appena descritti. Possiamo porre il problema di controllo ottimo come segue: trovare il controllo $\mathbf{u}$ che soddisfa i vincoli in maniera tale che la funzione obiettivo $\mathcal{F}$ abbia un minimo quando il sistema dinamico (1.1) transita dallo stato iniziale (1.2) allo stato finale (1.3). La manovra ottima è quella manovra che è associata al valore minimo della funzione obiettivo.

Se i limiti di controllo del pilota non sono inclusi nella formulazione del problema, la manovra ottima è la migliore manovra intrinseca che può essere ottenuta dalla macchina. Se l'influenza del pilota è presa in considerazione, allora la manovra ottima qualifica le proprietà del motociclo in relazione al punto di vista del pilota reale. Infine, se l'attenzione è posta sulla qualità della manovra, la manovra ottima è quella che meglio si adatta alle caratteristiche specificate dalla funzione obiettivo e dai vincoli.

Esempi di applicazione del calcolo di tempo minimo per veicoli a due e quattro ruote sono riportati in [1] - [5].

2 La manovra ottima come soluzione di un problema di controllo ottimo

La soluzione analitica di un problema di controllo ottimo (Optimal Control Problem, OCP) è possibile solamente in casi molto semplici, mentre quando il modello del motociclo risulta non lineare e soggetto a vincoli di diversa natura (equazioni, disequazioni non lineari, ecc.) l'unico metodo applicabile è la soluzione numerica.

Un problema di controllo ottimo è un problema di ottimizzazione vincolato con un *sistema dinamico* come vincolo. Si consideri il seguente problema ai valori iniziali (Initial Value Problem, IVP):

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_{init} \quad t \in (t_i, t_f) \quad (2.1)$$

dove $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ sono gli stati del sistema dinamico e $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ sono i controlli. Esso è talvolta chiamato *sistema dinamico controllato*. Si introduce ora una funzione di costo o funzione obiettivo $\mathcal{F}(\mathbf{u})$:

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{x}(t_i + T)) + \int_{t_i}^{t_i+T} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2.2)$$

che fornisce uno scalare, dove $\mathbf{x}(t)$ soddisfa (2.1) data l'evoluzione temporale dei controlli $\mathbf{u}(t)$. Il termine $\Phi(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{x}(t_i + T))$ è detto *costo iniziale/finale*, mentre $L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ rappresenta il costo lungo il percorso (*running cost*). Il controllo ottimo è una storia di controllo $\mathbf{u}(t)$ che determina $\mathbf{x}(t)$ attraverso il sistema dinamico (2.1) minimizzando la funzione di costo totale (2.2). Un problema di controllo ottimo viene classificato in base alla struttura della funzione obiettivo: se $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ contiene solo il costo iniziale/finale, il problema è detto di Mayer, se $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ contiene solo il termine integrale, si parla di problema di Lagrange, altrimenti, nel caso generale, si tratta di un problema di Bolza.

Una condizione necessaria per la soluzione del problema (2.1) con (2.2) è che la variazione prima della funzione $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$ sia nulla, dove:

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_i}^{t_f} [H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) - \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{x}'(t)] dt \quad (2.3)$$

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.4)$$

e (2.4) è chiamato Hamiltoniano. La variazione prima della funzione è indicata con $\delta\mathcal{J}$ ed è valutata come segue (derivata di Gâteaux):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{J} &= \frac{d}{d\alpha} \mathcal{J}(\mathbf{x} + \alpha\delta\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} + \alpha\delta\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u} + \alpha\delta\mathbf{u}) \Big|_{\alpha=0} \\ &= - \int_{t_i}^{t_f} [\boldsymbol{\lambda} \cdot \delta\mathbf{x}' + \delta\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x}'] dt \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_f} [\partial_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) \delta\mathbf{x} + \partial_{\boldsymbol{\lambda}} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) \delta\boldsymbol{\lambda} + \partial_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) \delta\mathbf{u}] dt \\ &\quad + \partial_{\mathbf{x}_i} \Phi(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{x}(t_f)) \delta\mathbf{x}_i + \partial_{\mathbf{x}_f} \Phi(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{x}(t_f)) \delta\mathbf{x}_f \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{\lambda}(t)$ sono i moltiplicatori di Lagrange o *co-stati*, utilizzati per soddisfare i vincoli (2.1). I termini $\delta\mathbf{x}, \delta\boldsymbol{\lambda}, \delta\mathbf{u}$ sono le *variazioni*, che possono essere scelte arbitrariamente a parte $\delta\mathbf{x}(t)$, poiché nel punto iniziale deve risultare $\delta\mathbf{x}(t_i) = 0$ affinché siano soddisfatte le condizioni al contorno. La funzione $\delta\mathbf{x}'(t)$ è la derivata di $\delta\mathbf{x}(t)$, è quindi possibile integrare per parti:

$$- \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \delta\mathbf{x}'(t) dt = \boldsymbol{\lambda}(t_i) \cdot \delta\mathbf{x}(t_i) - \boldsymbol{\lambda}(t_f) \cdot \delta\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}'(t) \cdot \delta\mathbf{x}(t) dt \quad (2.5)$$

Raccogliendo i termini che contengono le variazioni (e ricordando che $\delta\mathbf{x}(t_i) = 0$) si ottiene la seguente equazione:

$$0 = \frac{d\mathcal{J}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{t_i}^{t_f} [A \cdot \delta\mathbf{x} + B \cdot \delta\mathbf{u} + C \cdot \delta\boldsymbol{\lambda}] dt + D \cdot \delta\mathbf{x}(t_f) \quad (2.6)$$

dove

$$\begin{aligned}
A &= \partial_x^T H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}'(t) & B &= \partial_u^T H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) \\
C &= \partial_\lambda^T H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) - \mathbf{x}'(t) & D &= \partial_{\mathbf{x}(t_f)}^T \Phi(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{x}(t_f)) - \boldsymbol{\lambda}(t_f)
\end{aligned} \quad (2.7)$$

L'equazione (2.6) deve essere soddisfatta per qualunque variazione $\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\lambda}, \delta \mathbf{u}$, di conseguenza deve risultare $A=B=C=0$; inoltre, per l'arbitrarietà di $\delta \mathbf{x}(t_f)$, deve risultare anche $D=0$. Pertanto, la soluzione del problema di controllo ottimo (2.1) con (2.2) deve soddisfare il seguente problema alle condizioni al contorno (Boundary Value Problem, BVP):

$$\text{Equazioni:} \quad \mathbf{x}' = \partial_\lambda^T H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) \quad (2.8)$$

$$\text{Co-equazioni:} \quad \boldsymbol{\lambda}' = -\partial_x^T H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) \quad (2.9)$$

$$\text{Condizioni al contorno:} \quad \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \partial_{\mathbf{x}_f}^T \Phi(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{x}(t_f)) \quad (2.10)$$

Si noti che (2.8) corrisponde all'equazione differenziale ordinaria (Ordinary Differential Equation, ODE) (2.1), e (2.9) è un nuovo sistema di equazioni differenziali chiamate *co-equazioni*. L'ultima equazione in (2.10) è chiamata *condizione di trasversalità* (transversality condition). Infine, $\mathbf{u}(t)$ deve soddisfare l'equazione algebrica

$$\partial_u^T H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) = 0 \quad (2.11)$$

Se $\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)$ sono soluzioni di (2.8) - (2.11) e tale soluzione è un minimo, allora la variazione seconda di $\mathcal{J}$ deve essere non negativa:

$$\delta^2 \mathcal{J} = \frac{d^2}{d\alpha^2} \mathcal{J}(\mathbf{x} + \alpha \delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} + \alpha \delta \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u} + \alpha \delta \mathbf{u}) \Big|_{\alpha=0} \geq 0 \quad (2.12)$$

Scegliendo $\delta \mathbf{x}(t) = \delta \boldsymbol{\lambda}(t) = 0$ la condizione sulla variazione seconda si riduce a

$$\int_{t_i}^{t_f} \delta \mathbf{u}^T [\partial_u^2 H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t)] \delta \mathbf{u} dt \geq 0 \quad (2.13)$$

ed essendo $\delta \mathbf{u}(t)$ una funzione arbitraria segue che $\partial_u^2 H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t)$ è una matrice semi-definita positiva. Quindi (2.11) è un punto stazionario per la funzione $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t)$ con $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t$ fissati e

(2.13) implica che questo punto stazionario sia un minimo locale. Perciò $\mathbf{u}(t)$ è la soluzione del problema più generale

$$\mathbf{u}(t) = \operatorname{argmin}\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m | H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{v}, t)\}$$

Perciò la soluzione del problema di controllo ottimo (2.1) con (2.2) deve soddisfare il BVP:

$$\begin{aligned} \text{Equazioni:} & \quad \mathbf{x}' = \partial_{\boldsymbol{\lambda}}^T H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) \\ \text{Co-equazioni:} & \quad \boldsymbol{\lambda}' = -\partial_{\mathbf{x}}^T H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) \\ \text{Condizioni al} & \quad \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \partial_{\mathbf{x}_f}^T \Phi(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{x}(t_f)) \\ \text{contorno:} & \quad (2.14) \\ \text{Controlli (CTRL):} & \quad \mathbf{u}(t) = \operatorname{argmin}\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m | H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{v}, t)\} \end{aligned}$$

Si noti che le condizioni al contorno derivano dalla scelta di una variazione $\delta\mathbf{x}(t)$ che soddisfi $\delta\mathbf{x}(t_i) = 0$; in alternativa, è possibile scegliere $\delta\mathbf{x}(t)$ liberamente e imporre la condizione $\mathbf{x}(t_i) + \alpha\delta\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i$. Questo vincolo aggiuntivo viene imposto usando il moltiplicatore $\boldsymbol{\mu}$, il che fornisce la nuova funzione:

$$\mathcal{J}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{x}(t_i) + \alpha\delta\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}_i)$$

La minimizzazione di $\mathcal{J}^*$ porge la seguente variazione associata al problema di controllo ottimo (2.1) con (2.2):

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\mathcal{J}^*}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{d\mathcal{J}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + \delta\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}_i) + \boldsymbol{\mu} \cdot \delta\mathbf{x}(t_i) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} [A \cdot \delta\mathbf{x} + B \cdot \delta\mathbf{u} + C \cdot \delta\boldsymbol{\lambda}] dt + D \cdot \delta\mathbf{x}(t_f) + D \cdot \delta\mathbf{x}(t_f) + (E + \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta\mathbf{x}(t_i) \\ &\quad + \delta\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

dove A, B, C, D sono definiti in (2.7) ed E è definito come

$$E = \partial_{\mathbf{x}_i}^T \Phi(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{x}(t_f)) + \boldsymbol{\lambda}(t_i) \quad (2.15)$$

Ancora una volta, deve risultare $A=B=C=0$ e dall'arbitrarietà di $\delta \mathbf{x}(t_i), \delta \mathbf{x}(t_f), \delta \boldsymbol{\mu}$ segue che $D=0, E+\boldsymbol{\mu}=0$ e $\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i$. Si ottiene così (2.8) - (2.11). Si noti che $\boldsymbol{\mu}$ compare solo in $E+\boldsymbol{\mu}=0$ e perciò E può assumere qualunque valore che verrà compensato da $\boldsymbol{\mu}$. Di conseguenza, l'equazione $E+\boldsymbol{\mu}=0$ e il moltiplicatore $\boldsymbol{\mu}$ possono essere eliminati, e si ottiene nuovamente BVP (2.14).

2.1 Il principio di minimo di Pontryagin

Spesso i controlli $\mathbf{u}(t)$ sono contenuti in un insieme compatto $\mathcal{U}$, ossia,

$$\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U} \quad (2.16)$$

In tal caso, $\delta \mathbf{u}(t)$ non può essere arbitrario, ma deve soddisfare $\mathbf{u}(t) + \alpha \delta \mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$. Ciò complica la derivazione di una condizione necessaria usando solamente le variazioni. Un semplice euristico che consente di ricavare le condizioni necessarie consiste nell'utilizzo di una funzione barriera (barrier function o wall function):

$$p(\mathbf{u}, \varepsilon) = -\varepsilon \log \text{dist}(\mathbf{u}, \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{U}) \quad \text{dove} \quad \text{dist}(\mathbf{u}, \mathcal{A}) = \inf\{|\mathbf{u} - \mathbf{v}|, \mathbf{v} \in \mathcal{A}\} \quad (2.17)$$

Essa risulta piccola e positiva per $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ e tende a ∞ per $\mathbf{u} \notin \mathcal{U}$. Per esempio, per $\mathcal{U} = [-x_{\max}, x_{\max}]$ una possibile espressione analitica per la funzione barriera è:

$$p(\mathbf{u}, \varepsilon) = -\varepsilon \log \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{x_{\max}}\right) \quad (2.18)$$

La forma di $p(\mathbf{u}, \varepsilon)$ e l'effetto di ε sono mostrati in Figura 2.1.

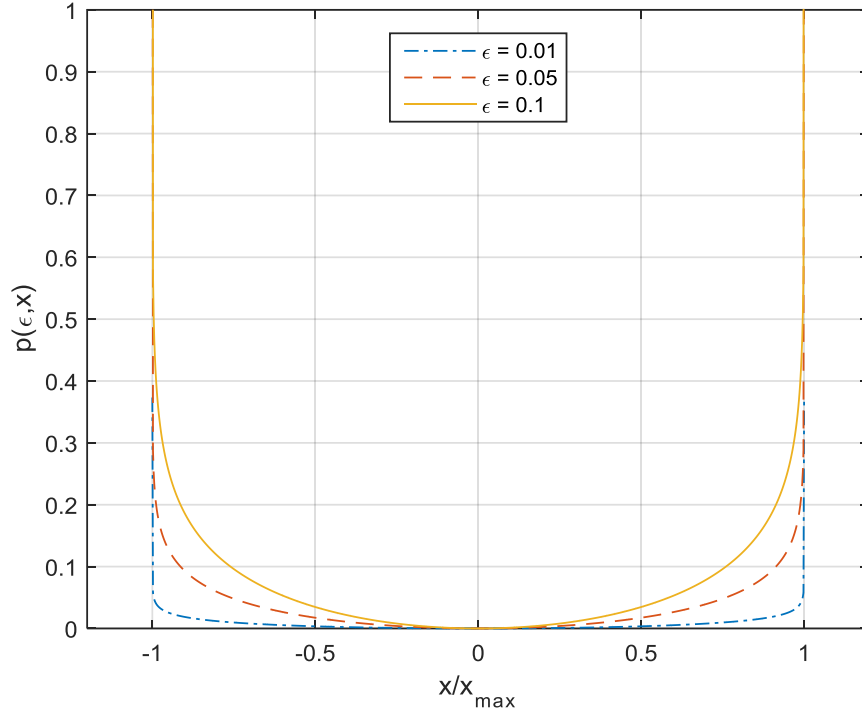


Figura 2.1: forma della funzione barriera (2.18) per diversi valori del parametro ε .

Inserendo la funzione barriera nella funzione obiettivo (2.2) si ottiene:

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{x}(t_i + T)) + \int_{t_i}^{t_i+T} [L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + p(\mathbf{u}(t), \varepsilon)] dt \quad (2.19)$$

Ripetendo la derivazione del BVP (2.14), ora con $\mathbf{u}(t)$ non vincolati, si giunge alle medesime equazioni differenziali e condizioni al contorno, mentre i controlli risultano modificati come segue:

$$\text{CTRL}': \quad \mathbf{u}(t) = \operatorname{argmin}\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m | H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{v}, t) + p(\mathbf{u}(t), \varepsilon)\} \quad (2.20)$$

Dalla definizione di $p(\mathbf{u}(t), \varepsilon)$ segue che $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$. Inoltre, al diminuire di ε il problema (2.20) approssima la seguente minimizzazione:

$$\text{CTRL}'': \quad \mathbf{u}(t) = \operatorname{argmin}\{\mathbf{v} \in \mathcal{U} | H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{v}, t)\} \quad (2.21)$$

Pertanto, la soluzione del problema di controllo ottimo (2.1) con (2.2) e controlli delimitati da (2.16) è equivalente al BVP (2.14) con l'equazione dei controlli sostituita da CTRL''. L'equazione (2.21) è parte del Principio di minimo di Pontryagin (Pontryagin Minimum Principle, PMP), che fornisce un problema alle condizioni al contorno equivalente al problema di controllo ottimo iniziale.

2.2 Il controllo ottimo con vincoli unilaterali

In molte applicazioni controlli e stati sono soggetti a vincoli unilaterali, così che si hanno disequazioni del tipo:

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq 0 \quad \text{dove} \quad \mathcal{C}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} C_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ C_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ C_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

che sono aggiunte al BVP. L'introduzione di disequazioni complica l'approccio variazionale, ma l'uso di funzioni barriera permette di ridurre nuovamente il problema alla forma descritta nella sezione precedente. Come si è visto, una funzione barriera è una funzione continua e positiva sull'intero dominio che va ad ∞ quando $\mathbf{x}$ si avvicina al valore limite. Un esempio di funzione barriera per $C_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ è $b(C_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$, dove:

$$b(x) = -\varepsilon \cdot \log(x)$$

oppure

$$b(x) = \frac{1}{x}$$

Questo tipo di barriera conduce a sistemi non lineari, la cui soluzione è estremamente difficoltosa. In alternativa è possibile fare uso di funzioni penalità (penalty functions) che sono varianti regolarizzate della funzione $[x]^+ = \max(x, 0)$ e hanno la forma analitica che segue:

$$p(h, n) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left(\frac{x}{h}\right)^n & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Il comportamento di (2.22) è mostrato in Figura 2.2. Tale funzione è nulla per valori non positivi di x e cresce molto rapidamente per $x > h$ e n positivo. Il parametro h determina il grado di influenza della penalità.

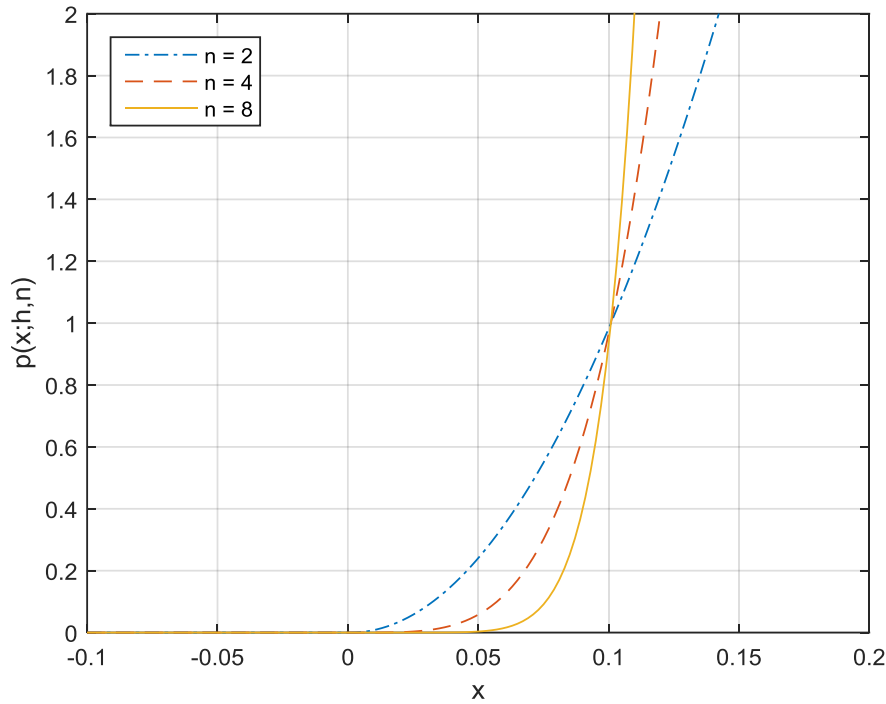


Figura 2.2: forma della funzione barriera (2.22) per $h=0.1$ e diversi valori del parametro n .

2.3 Le coordinate spaziali

Nella formulazione del problema di controllo ottimo risulta conveniente operare un cambio di coordinate da quelle cartesiane $x(t), y(t), \Psi(t)$ a quelle curvilinee $s(t), n(t), \alpha(t)$. In tal modo la modellizzazione della strada risulta più semplice ed è immediato imporre i relativi vincoli.

Le coordinate curvilinee sono:

- 1) la posizione della motocicletta lungo la linea media della strada $s(t)$;
- 2) l'orientazione della motocicletta rispetto alla tangente alla linea media della strada $\alpha(t)$;
- 3) lo spostamento laterale $n(t)$.

La relazione fra coordinate cartesiane e coordinate curvilinee viene stabilita definendo le relative derivate (ossia le velocità):

$$\frac{d}{dt}s(t) = \frac{-\cos(\alpha(t)) \cdot u(t) + \sin(\alpha(t)) \cdot v(t)}{n(t) \cdot K(s(t)) - 1} \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt}n(t) = \sin(\alpha(t)) \cdot u(t) + \cos(\alpha(t)) \cdot v(t) \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{(n(t) \cdot K(s(t)) - 1) \left(\frac{d}{dt}\Psi(t) \right) + K(s(t))(\cos(\alpha(t)) \cdot u(t) - \sin(\alpha(t)) \cdot v(t))}{n(t) \cdot K(s(t)) - 1} \quad (2.25)$$

dove $u(t)$ e $v(t)$ sono le componenti del vettore velocità di un punto di riferimento del motociclo (tipicamente il baricentro), proiettate nel sistema di riferimento mobile.

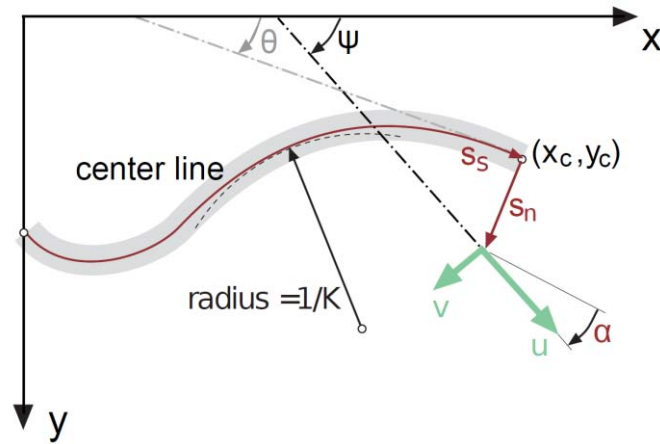


Figura 2.3: trasformazione da coordinate cartesiane a coordinate curvilinee. La strada è definita mediante la sua linea media, descritta come una sequenza di segmenti. Ciascuno di essi è caratterizzato dalle grandezze: lunghezza, curvatura (inverso del raggio di curvatura), semi-larghezze destra e sinistra della strada. Il punto di coordinate (x_c, y_c) è la proiezione del punto di riferimento del veicolo sulla linea media della strada.

Per riformulare l'equazione (1.1) nel dominio dello spazio, si consideri l'insieme delle variabili di stato $\mathbf{x}(s)$ come funzione di s anziché di t e si calcoli la derivata totale rispetto a s :

$$\frac{d\mathbf{x}(s(t))}{ds} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \quad (2.26)$$

Sia $s_v = ds(t)/dt$, che si può ottenere risolvendo (2.23). Usando (2.26) per valutare le derivate che compaiono in (1.1) e cambiando variabile da t a s si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} \cdot s_v = \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s, \mathbf{p}) \quad (2.27)$$

In questo nuovo sistema di coordinate i vincoli che impongono al veicolo di rimanere all'interno della geometria della strada sono del tipo:

$$W_L(s) \leq n(s) \leq W_R(s) \quad (2.28)$$

dove $W_L(s)$ e $W_R(s)$ rappresentano rispettivamente le semi-larghezze sinistra e destra della strada, che nel caso generale possono essere variabili lungo il percorso, ossia al variare della coordinata s .

È importante notare che il cambio di coordinate spaziali che è stato effettuato fa sì che il dominio di integrazione sia ora fissato e pari alla lunghezza totale del circuito considerato. Ciò rappresenta un considerevole vantaggio ai fini della convergenza dei metodi numerici adottati per la soluzione del problema di controllo ottimo.

3 Metodi e modelli

La ricerca ha previsto la modellazione e la simulazione di un motociclo mediante opportuni software. In sintesi, la procedura seguita è stata la seguente:

- modellizzazione multibody del sistema meccanico del veicolo e derivazione delle equazioni del moto tramite l'utilizzo del software Maple (software di Computer Aided Symbolic Mathematics) e della libreria MBSymba (www.multibody.net), che agevola il processo di modellizzazione grazie a comandi specifici per la realizzazione di modelli multibody;
- utilizzo delle librerie XOptima per la formulazione del problema di controllo ottimo nonlineare sotto forma di two-point-boundary-value-problem (TPBVP) e generazione del codice C++ necessario per risolverlo;
- soluzione del problema generato mediante il solutore Mechatronix (risultato di una collaborazione tra Università di Padova e Università di Trento).

L'avvio delle simulazioni consiste nell'esecuzione, dalla console dei comandi, di file scritti in linguaggio Ruby. In essi sono contenuti tutti i parametri necessari alla simulazione, in particolare:

- la descrizione della strada;
- i dati del motociclo (geometria, inerzie, caratteristiche degli pneumatici e delle sospensioni, aerodinamica, curve di coppia del motore, rapporti del cambio);
- fattori di scalatura, utili ai fini di una più agevole convergenza dei metodi numerici;
- condizioni al contorno;
- parametri che determinano la forma di funzioni che descrivono vari aspetti del comportamento del motociclo (per esempio, i movimenti della parte superiore del corpo del pilota, le forze aerodinamiche, le forze generate dalle sospensioni), che sono definite esternamente al modello e mappate in fase di esecuzione dei documenti Maple, prima della generazione dei file C++;
- parametri caratterizzanti l'esecuzione della simulazione (penalty, numero massimo di iterazioni, tolleranza massima a cui si considera raggiunta la convergenza).

Nella sezione seguente si descriveranno gli aspetti fondamentali del modello utilizzato. Esso è stato sviluppato a partire dai modelli realizzati all'interno del gruppo di ricerca Motorcycle Dynamics Research Group (MDRG) dell'Università di Padova, già utilizzati in precedenti ricerche e validati per confronto con dati sperimentali di telemetria.

3.1 Il modello della motocicletta

Le principali grandezze che definiscono la geometria del motociclo sono mostrate in Figura 3.1.

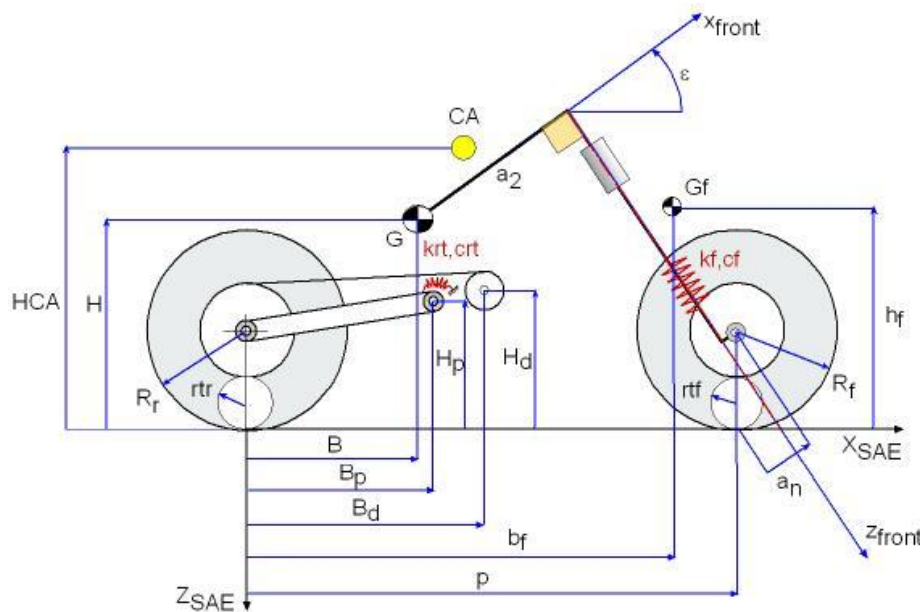


Figura 3.1: parametri geometrici fondamentali di una motocicletta. Sono inoltre mostrati il sistema di riferimento SAE (centrato nel punto di contatto della ruota posteriore, asse x orizzontale, contenuto nel piano stradale, parallelo al piano di simmetria del veicolo e positivo nel verso di avanzamento, asse z verticale e positivo verso il basso, asse y che completa la terna levogira) e il sistema di riferimento del gruppo anteriore (assi x_{front} e z_{front}).

3.1.1 Corpi costituenti il modello

Il modello multibody della motocicletta è costituito da un insieme di corpi rigidi fra loro interconnessi. In particolare, essi sono:

- il gruppo posteriore (che include il telaio della motocicletta, il serbatoio, la parte inferiore del corpo del pilota e parte della sospensione posteriore e del forcellone);
- il motore;
- la parte superiore del corpo del pilota;
- il gruppo anteriore (che include il manubrio, i componenti sospesi della forcella, il cannotto e le piastre di sterzo);
- la massa non sospesa posteriore (che include le pinze dei freni posteriori e parte del forcellone);
- la massa non sospesa anteriore (che include le pinze dei freni anteriori e parte della forcella);
- le ruote (anteriore e posteriore).

Il motore è collegato rigidamente al telaio della motocicletta, pertanto la sua massa è compresa in quella del gruppo posteriore. Tuttavia, il modello prevede la definizione di un corpo separato, dotato di inerzia ma privo di massa, al fine di rappresentare gli effetti dei componenti rotanti del motore (momenti giroscopici e trasferimenti di carico). Settando un apposito parametro (“*engine_sign*”) è possibile impostare le caratteristiche di tale effetto, come mostrato in Tabella 3.1:

Tabella 3.1

<i>engine_sign</i>	EFFETTO
+1	Motore tradizionale (o rotante)
-1	Motore controrotante
0	Effetti giroscopici del motore trascurati

Il corpo che rappresenta l’inerzia del motore comprende anche il contributo dell’albero primario del cambio; in accordo con le soluzioni tecniche più comunemente adottate per la realizzazione del motore controrotante, il verso di rotazione dell’albero primario non è influenzato dal valore del parametro *engine_sign*, ossia tale albero ruota sempre in verso opposto rispetto alla rotazione delle ruote, sia per motore tradizionale che per motore controrotante.

La parte superiore del corpo del pilota è modellizzata come un corpo separato, a cui sono permesse rotazioni attorno a due assi passanti per il punto rappresentativo della posizione della

sella, in modo tale da riprodurre i movimenti laterale (rollio) e longitudinale (beccheggio) dei piloti reali. Ciò genera uno spostamento del baricentro del busto del pilota rispetto al veicolo, mentre gli effetti dinamici sono trascurati. I movimenti del pilota possono essere definiti tramite relazioni con altre grandezze che caratterizzano lo stato del veicolo: ad esempio, il movimento longitudinale può essere correlato alla forza longitudinale globale agente sul motociclo (pilota in posizione più avanzata in accelerazione e più eretta in decelerazione); l'utilizzo di un filtro passa-basso permette l'eliminazione di eventuali rapide variazioni delle variabili. Per gli studi effettuati, i parametri inerziali della parte superiore del corpo del pilota sono stati trascurati e l'intera massa e inerzia del pilota è compresa nei dati relativi al motociclo: il pilota risulta quindi un corpo rigido solidale al veicolo.

3.1.2 Gradi di libertà e ingressi

I gradi di libertà del modello, riportati in Figura 3.2, sono i seguenti:

- u : velocità longitudinale;
- v : velocità laterale;
- z : scuotimento verticale del telaio;
- φ : angolo di rollio;
- ψ : angolo di imbardata;
- μ : angolo di beccheggio;
- δ : angolo di sterzo;
- zsf : deformazione lineare della sospensione anteriore;
- θ_s : deformazione torsionale della sospensione posteriore.

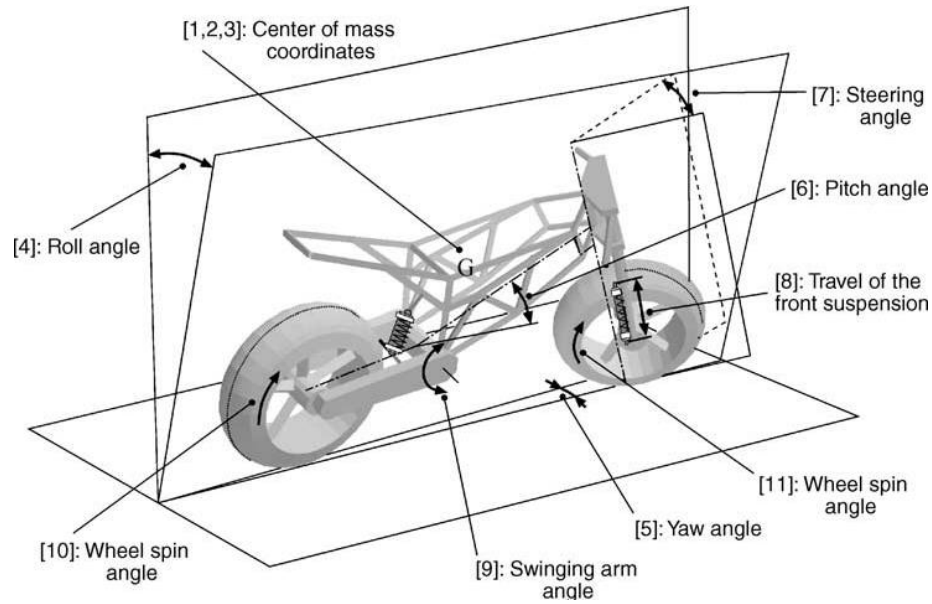


Figura 3.2: gradi di libertà di una motocicletta (priva di sterzo posteriore). Nel modello utilizzato, la rotazione delle ruote non costituisce un grado di libertà, poiché essa risulta determinata in base all'ipotesi di puro rotolamento longitudinale.

Le velocità longitudinale u e laterale v sono le componenti della velocità assoluta dell'origine del sistema di riferimento T1 (mostrato nella seguente Figura 3.3), espresse in T1 stesso.

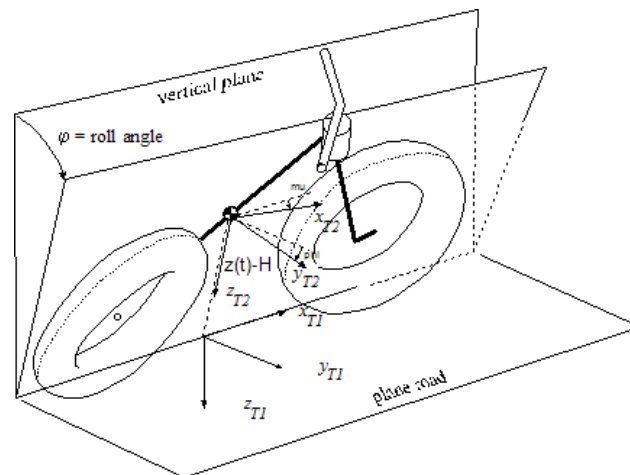


Figura 3.3: sistema di riferimento mobile T1. Esso ha origine nella proiezione al suolo (lungo il piano di simmetria del veicolo) del centro di massa della motocicletta e assi orientati similmente a quelli della terna SAE. In figura è mostrato anche il riferimento T2, solidale al telaio: esso è ottenuto da T1 mediante una rotazione attorno all'asse x corrispondente all'angolo di rollio φ , una traslazione lungo l'asse z pari a $z-H$ (che fa coincidere l'origine con il centro di massa del veicolo) e una rotazione attorno all'asse y corrispondente all'angolo di beccheggio μ . T2 è la terna di riferimento a partire dalla quale vengono definiti i diversi corpi costituenti il modello.

Il modello considerato implementa anche la flessibilità laterale della forcella, rappresentata mediante una rigidità concentrata costituita da una molla torsionale che permette il movimento relativo fra avantreno e retrotreno (grado di libertà aggiuntivo, β , consistente in una rotazione attorno all'asse contrassegnato in Figura 3.1 con x_{front}). Tuttavia nelle simulazioni svolte questo aspetto non è stato tenuto in conto e le equazioni che lo regolano non sono quindi state inserite nel problema.

Per lo studio dello sterzo posteriore si aggiunge un ulteriore grado di libertà, costituito dall'angolo di sterzo posteriore (δ_r). Esso è modellizzato come una rotazione della ruota posteriore attorno ad un asse verticale (angolo di inclinazione dell'asse di sterzo nullo) passante per il suo centro.

Gli ingressi del sistema sono:

- τ : coppia di sterzo;
- sr : forza longitudinale dello pneumatico posteriore, normalizzata rispetto al peso totale;
- sf : forza longitudinale dello pneumatico anteriore, normalizzata rispetto al peso totale.

Per lo studio dello sterzo posteriore si aggiunge un ulteriore input, costituito dallo sterzo posteriore ($\delta_{r,u}$).

3.1.3 Il modello di pneumatico

Il modello di pneumatico implementato tiene conto della forma della carcassa, descritta dai parametri mostrati in Figura 3.4.

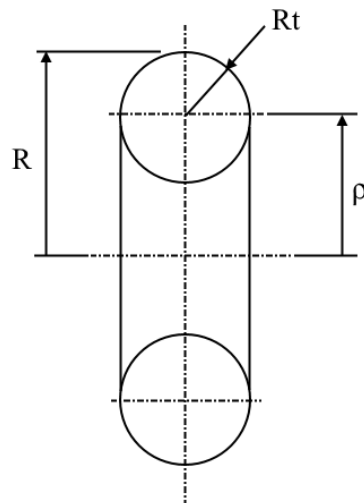


Figura 3.4: geometria della carcassa dello pneumatico. R è il raggio della ruota, R_t è il raggio della sezione trasversale e ρ è il raggio dell'asse del toroide. Naturalmente, risulta $\rho = R - R_t$.

In Figura 3.5 sono riportate le forze e i momenti che agiscono su uno pneumatico, nonché il sistema di riferimento utilizzato per descriverli.

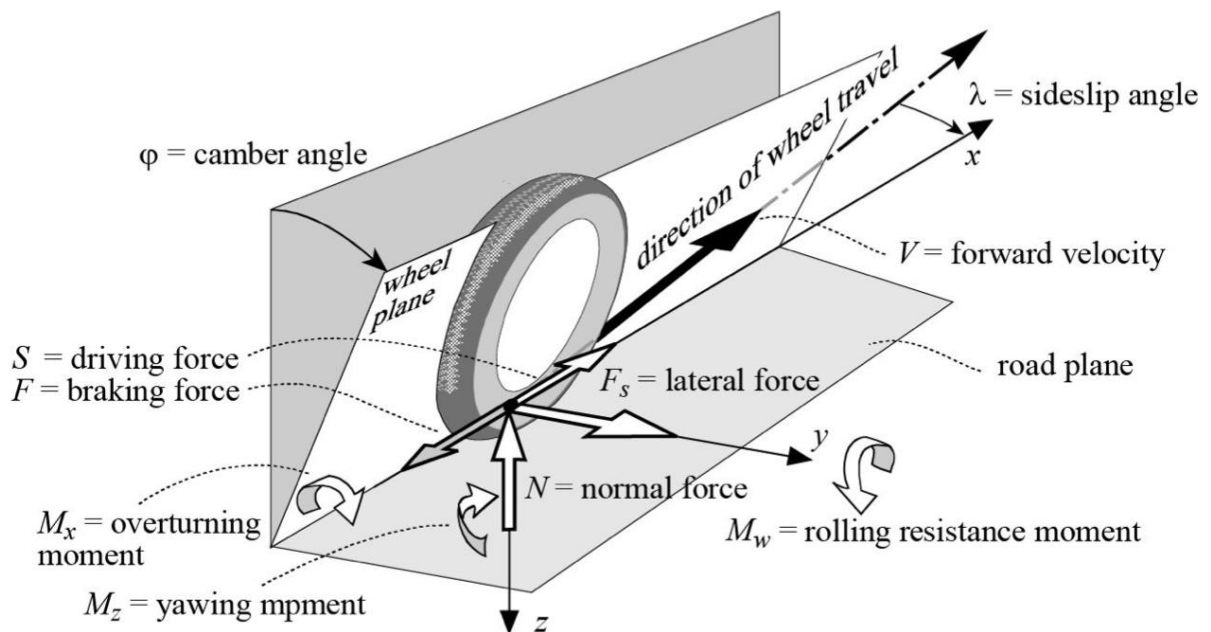


Figura 3.5: forze e momenti agenti sullo pneumatico. Il sistema di riferimento dello pneumatico ha origine nel punto di contatto, asse x orizzontale, parallelo al piano di simmetria della ruota e positivo nella direzione di avanzamento, asse z verticale diretto verso il basso e asse y che completa la terna levogira.

Il modello implementa le forze in tutte e tre le direzioni:

- x: forza longitudinale = S ;
- y: forza laterale = F ;
- z: forza verticale = N .

Per quanto riguarda i momenti, il modello prevede le componenti lungo y e z, espresse mediante le espressioni seguenti:

$$M_y = u \cdot N \quad \text{RESISTENZA AL ROTOLAMENTO}$$

$$M_z = mr \cdot \varphi \cdot N \cdot (1 + tw \cdot \varphi^2) + \quad \text{COMPONENTE DI TWISTING}$$

$$+ksa \cdot N \cdot \lambda \quad \text{COMPONENTE DI AUTO-ALLINEAMENTO}$$

Per le simulazioni effettuate, si sono assegnati valori nulli ai coefficienti u , mr , tw , ksa , pertanto sugli pneumatici non risulta applicato alcun momento.

Il modello costitutivo che permette la valutazione delle forze agenti sugli pneumatici calcola il carico verticale facendo uso di uno schema di tipo molla-smorzatore, il cui ingresso è costituito dalla compenetrazione ξ , ottenuta valutando la componente z in terna SAE del punto di contatto dello pneumatico. Il carico verticale è quindi fornito dall'equazione:

$$N = N_0 + k_p \cdot \xi + c_p \cdot \frac{d\xi}{dt} \quad (3.1)$$

Il termine N_0 rappresenta il carico statico, fornito dalle espressioni seguenti:

$$\text{ANTERIORE:} \quad N_{F0} = M \cdot g \cdot \frac{B}{p} \quad (3.2)$$

$$\text{POSTERIORE:} \quad N_{R0} = M \cdot g \cdot \left(1 - \frac{B}{p}\right) \quad (3.3)$$

dove M è la massa totale (motociclo + pilota), g è l'accelerazione di gravità, B è la posizione longitudinale del baricentro e p è il passo del veicolo (si veda anche Figura 3.1 per la definizione dei parametri geometrici).

L'angolo di deriva (o di sideslip) λ è calcolato come:

$$\lambda = -\arctan \frac{V_N}{V_S} \quad (3.4)$$

dove V_N e V_S sono le velocità laterale e longitudinale del punto di contatto, fornite direttamente da uno specifico comando della libreria MBSymba.

È ora possibile calcolare l'espressione della forza laterale a regime, per la quale si assume per semplicità una dipendenza lineare dall'angolo di rollio e dall'angolo di deriva:

$$F_{regime} = N \cdot (k_\varphi \cdot \varphi + k_\lambda \cdot \lambda) = K_\varphi \cdot \varphi + K_\lambda \cdot \lambda \quad (3.5)$$

dove k_φ e k_λ sono le rigidità adimensionali di rollio e di deriva e K_φ e K_λ sono le corrispondenti quantità dimensionali, che si ottengono per moltiplicazione con il carico verticale N .

Com'è noto, le forze laterali degli pneumatici non si originano istantaneamente: esse richiedono un certo intervallo di tempo per raggiungere il valore di regime corrispondente ai valori assunti dagli angoli di rollio e di deriva e pertanto, in condizioni dinamiche, seguono con un certo ritardo le variazioni degli angoli da cui dipendono. Tale ritardo dipende essenzialmente dalla flessibilità della carcassa dello pneumatico. Dal momento che il modello di pneumatico utilizzato non considera le deformazioni radiali, laterali e circonferenziali dello stesso, è necessario introdurre un'equazione di rilassamento addizionale al fine di tenere conto del ritardo di risposta:

$$\frac{\sigma}{V} \cdot \frac{dF}{dt} + F = N \cdot (k_\varphi \cdot \varphi + k_\lambda \cdot \lambda) \quad (3.6)$$

dove σ è la lunghezza di rilassamento e V la velocità del punto di contatto (approssimabile con la sua componente longitudinale V_S per piccoli angoli di deriva).

Per imporre il rispetto della massima aderenza messa a disposizione dal contatto dello pneumatico con la strada, anche in condizioni di forze laterale e longitudinale combinate, si utilizza una penalty che implementa l'ellisse di aderenza, rappresentata dalla disequazione:

$$\frac{\left(\frac{s}{\mu_x}\right)^2 + \left(\frac{f}{\mu_y}\right)^2}{n^2} < 1 \quad (3.7)$$

dove s , f e n sono le forze degli pneumatici adimensionalizzate rispetto al peso totale $M \cdot g$, mentre μ_x e μ_y sono i coefficienti di attrito in direzione longitudinale e trasversale.

3.1.4 Sospensioni

La sospensione posteriore è descritta mediante un modello lineare, in cui le forze generate da molla e ammortizzatore sono fornite dalle espressioni:

$$F_{molla,post.} = precarico + k \cdot z \quad (3.8)$$

$$F_{amm.,post.} = c \cdot \dot{z} \quad (3.9)$$

dove $z = \theta_s$ rappresenta la rotazione del forcellone e $\dot{z}$ la sua derivata.

La sospensione anteriore è invece descritta da un modello polinomiale più complesso. La forza della molla anteriore è fornita da un polinomio di quinto grado:

$$F_{molla,ant.} = precarico + k_1 \cdot z + k_2 \cdot z^2 + k_3 \cdot z^3 + k_4 \cdot z^4 + k_5 \cdot z^5 \quad (3.10)$$

dove $z = zsf$ è la corsa lineare della sospensione anteriore. In particolare, i dati utilizzati prevedono solamente il termine lineare e quello cubico, in aggiunta al termine costante che rappresenta il precarico. La forza dell'ammortizzatore posteriore è fornita da:

$$F_{amm.,ant.} = extension(\dot{z}) - compression(-\dot{z}) \quad (3.11)$$

dove $\dot{z}$ è la velocità di deformazione lineare della sospensione e $extension(x)$ e $compression(x)$ sono due funzioni contenenti un polinomio di settimo grado e con valore prossimo a zero per valori negativi della variabile x :

$$\frac{1}{2}(c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + c_4 \cdot x^4 + c_5 \cdot x^5 + c_6 \cdot x^6 + c_7 \cdot x^7) \left(1 + \frac{F_{scale} \cdot x}{\sqrt{F_{scale}^2 \cdot x^2 + 1}} \right) \quad (3.12)$$

dove F_{scale} è un opportuno fattore di scala. Mediante tale espressione, il cui andamento è descritto in Figura 3.6, $extension(x)$ fornisce la forza dell'ammortizzatore per velocità di deformazione positive e $compression(x)$ per velocità di deformazione negative. Per gli studi effettuati, sono stati considerati solo i termini lineari, con uguali coefficienti di smorzamento in estensione e in compressione.

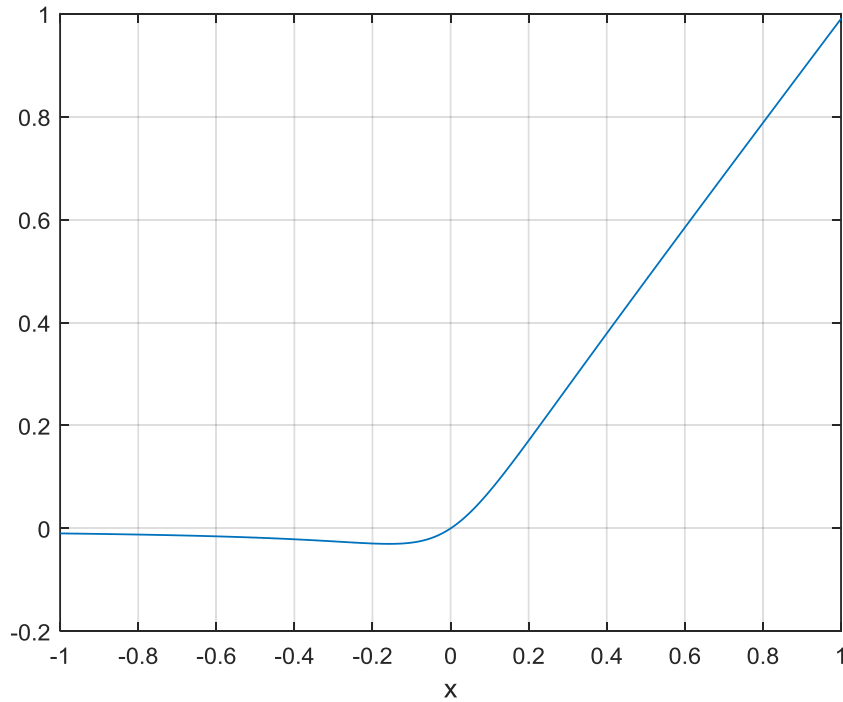


Figura 3.6: grafico della funzione (3.12) per $F_{scale} = 5$, $c_1 = 1$ e $c_2, \dots, c_7 = 0$

È utile evidenziare che cambiare il modello di sospensione da utilizzare non richiede la riscrittura del modello del motociclo, grazie al fatto che le funzioni qui descritte vengono caricate *runtime* in base alle opzioni specificate nei file Ruby.

3.1.5 Forze aerodinamiche

Le forze aerodinamiche agenti sul motociclo sono la portanza (lift) e la resistenza aerodinamica (drag), entrambe applicate nel centro di pressione:

$$F_{lift} = k_L \cdot V_x^2 \quad (3.13)$$

$$F_{drag} = \frac{1}{2} \cdot V_x^2 \cdot DragTraction(sr + sf) \cdot DragRoll(\varphi) \quad (3.14)$$

DragRoll è un polinomio di quinto grado che permette di modellizzare la variazione della resistenza aerodinamica con l'angolo di rollio. In esso, per il presente studio, sono assunti diversi da zero solo i coefficienti dei termini di grado 0 e 2. *DragTraction* consente di tenere conto dell'influenza sull'aerodinamica della diversa posizione che il pilota assume nelle fasi di accelerazione e decelerazione. Questo fattore è funzione della somma delle forze longitudinali degli pneumatici e ha la forma seguente (mostrata in Figura 3.7):

$$\frac{1}{2}right + \frac{1}{2}left + \frac{\text{atan}(\text{sharpness} \cdot (x - x_0))(right - left)}{\pi} \quad (3.15)$$

dove *left* e *right* rappresentano il valore della funzione rispettivamente a $-\infty$ e $+\infty$, mentre il parametro *sharpness* descrive la transizione fra questi due valori. Il parametro *left* è pari al prodotto $C_D \cdot A$ in fase di decelerazione, mentre *right* è il valore in accelerazione.

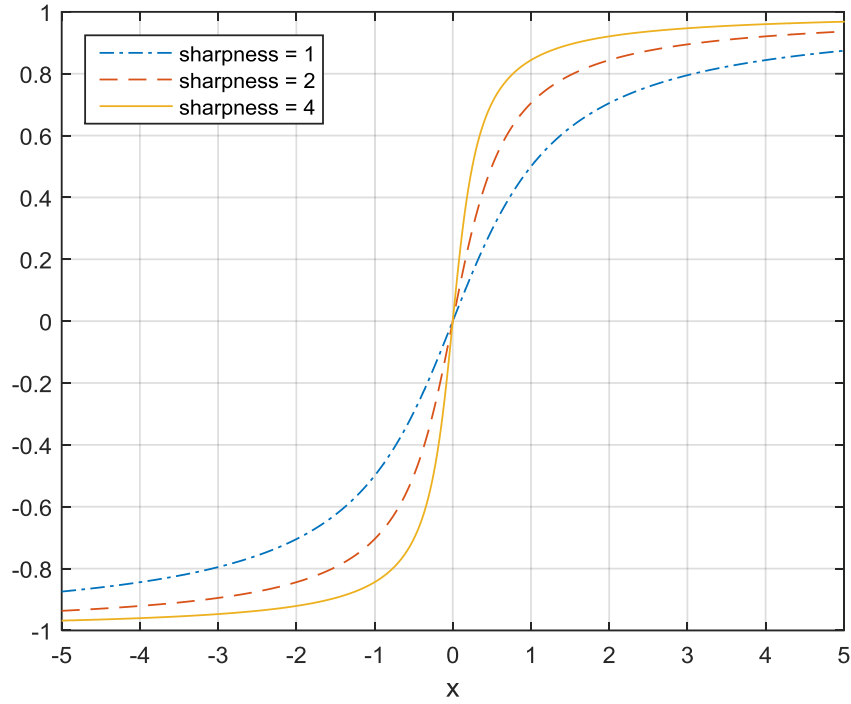


Figura 3.7: grafico della funzione (3.15) per $x_0 = 0$, $left = -1$, $right = 1$ e diversi valori del parametro sharpness.

3.1.6 Espressione dello sterzo posteriore

Per lo studio degli effetti di un sistema di sterzo posteriore sulla dinamica della motocicletta, si è implementata nel modello la possibilità di sterzare la ruota posteriore attorno ad un asse verticale (angolo di inclinazione dell'asse di sterzo nullo) passante per il suo centro. L'angolo di sterzo posteriore viene definito mediante una relazione che lo lega all'angolo di sterzo anteriore e ad un controllo aggiuntivo:

$$\delta_r = K_\delta \cdot \delta + K_u \cdot \delta_{r,u} \quad (3.16)$$

dove δ_r è l'angolo di sterzo posteriore, δ l'angolo di sterzo anteriore e $\delta_{r,u}$ l'angolo di sterzo posteriore determinato dal relativo controllo. In particolare, $\delta_{r,u}$ è costituito dall'uscita di un filtro passa-basso del primo ordine, che permette di eliminare le oscillazioni ad alta frequenza eventualmente presenti nel segnale del controllo $\delta_{r,ctrl}$ determinato dalla soluzione del problema di controllo ottimo:

$$\tau_{\delta_r} \cdot \frac{d\delta_{r,u}}{dt} + \delta_{r,u} = \delta_{r,MAX} \cdot \delta_{r,ctrl} \quad (3.17)$$

In tale espressione, τ_{δ_r} rappresenta la costante di tempo, che determina la frequenza di taglio del filtro, mentre il fattore di scala $\delta_{r,MAX}$ permette di definire il massimo angolo di sterzo posteriore (il controllo $\delta_{r,ctrl}$ viene fatto variare nell'intervallo $[-1,1]$).

Settando i valori dei parametri K_δ e K_u in (3.16) è possibile variare il comportamento dello sterzo posteriore: ponendo $K_u = 1$ e $K_\delta = 0$ si ottiene uno sterzo posteriore con controllo indipendente, mentre assegnando $K_u = 0$ e $K_\delta \neq 0$ lo sterzo posteriore avrà un angolo in rapporto fisso con quello anteriore (in tal caso, infatti, risulta $\frac{\delta_r}{\delta} = K_\delta$).

3.2 Vincoli

Affinché il controllo ottimo rispecchi il comportamento di un pilota reale, è necessario introdurre un certo numero di vincoli. In particolare, le simulazioni riportate in questa tesi utilizzano i seguenti valori limite:

- massimo angolo di sterzo: $0.2 \text{ rad} \approx 11.5^\circ$;
- massima coppia di sterzo: 160 Nm.

Inoltre, le velocità di variazione delle azioni di controllo esercitate dal pilota virtuale sono limitate mediante l'azione di un filtro passa basso del primo ordine, che elimina le alte frequenze dai segnali dei controlli calcolati dalla manovra ottima. L'equazione che descrive il filtro è:

$$\tau_{CTRL} \cdot \frac{d}{dt} CTRL + CTRL = CTRL_{MAX} \cdot CTRL_{OCP} \quad (3.18)$$

dove $CTRL$ costituisce il generico controllo agente sul modello matematico della motocicletta (ossia l'azione di controllo del pilota), $CTRL_{OCP}$ rappresenta il corrispondente ingresso del problema di controllo ottimo (variabile fra -1 e $+1$), $CTRL_{MAX}$ è un fattore di scala e τ_{CTRL} è la costante di tempo del filtro che ne determina la frequenza di taglio. Un filtro passa basso di questo tipo agisce su ciascuno dei controlli, con i parametri caratteristici riportati in Tabella 3.2.

Tabella 3.2

CONTROLLO	τ_{CTRL}	FREQUENZA DI TAGLIO	$CTRL_{MAX}$
Coppia di sterzo	0.3 s	0.53 Hz	160 Nm
Forza longitudinale anteriore	0.3 s	0.53 Hz	1.7
Forza longitudinale posteriore	0.3 s	0.53 Hz	1.7

Le forze longitudinali si intendono normalizzate rispetto al peso totale del motociclo Mg .

Per le simulazioni con sterzo posteriore controllato indipendentemente, si aggiunge un ulteriore filtro passa basso, come descritto nella precedente sezione 3.1.6. I relativi parametri caratteristici sono mostrati nella seguente Tabella 3.3:

Tabella 3.3

CONTROLLO	τ_{CTRL}	FREQUENZA DI TAGLIO	$CTRL_{MAX}$
Angolo di sterzo posteriore	0.16 s	1 Hz	0.2 rad

Ulteriori vincoli, necessari a modellizzare le limitazioni del sistema fisico reale, riguardano:

- i limiti della strada;
- l'aderenza degli pneumatici;
- la curva di coppia del motore o la sua potenza massima;
- il carico verticale minimo sugli pneumatici (il cui annullamento corrisponde al sollevamento della ruota dal piano stradale).

3.3 Cenni sulla modellizzazione dei circuiti

Oltre a rendere possibile la simulazione di manovre standard (cambio di corsia, curva ad U, ecc.) al fine di valutare le caratteristiche di manovrabilità e maneggevolezza di un veicolo, il metodo della manovra ottima consente anche di riprodurre un intero giro di un circuito reale. A questo scopo, è richiesta una opportuna modellizzazione delle piste: per effettuare simulazioni su circuiti reali è infatti necessario descrivere i tracciati in modo tale che il solutore possa leggerne le caratteristiche. In particolare, i dati minimi richiesti sono la curvatura e la larghezza della carreggiata lungo la coordinata curvilinea, a cui è possibile aggiungere ulteriori grandezze,

come per esempio l'altitudine (le cui variazioni, per alcuni circuiti, hanno un effetto non trascurabile sui risultati finali).

La tipologia di modellizzazione utilizzata nel presente studio prevede la scrittura dei dati in un formato che si può definire "per segmenti". La descrizione della strada avviene tramite una serie di sezioni successive, ciascuna caratterizzata dalle seguenti grandezze:

- lunghezza della sezione;
- curvatura (pari all'inverso del raggio di curvatura);
- dimensione della mesh usata nella simulazione;
- semi-larghezza destra e sinistra della carreggiata.

Per ottenere questo tipo di modellizzazione, si sfrutta un software CAD (Computer Aided Design) 2D per sovrapporre dei segmenti rettilinei e degli archi di cerchio ad un'immagine satellitare del circuito, in modo tale da riprodurre, nel modo più fedele possibile, la forma della strada.

Si segnala che altri tipi di solutori e di modelli richiedono una diversa descrizione del tracciato, definita "per punti": essa è ottenuta mediante un campionamento di punti lungo i due bordi del circuito e l'elaborazione dei dati grezzi mediante un problema di controllo ottimo.

4 Studio del motore controrotante

Figura 4.1 illustra il layout tradizionale della trasmissione di un motociclo sportivo.

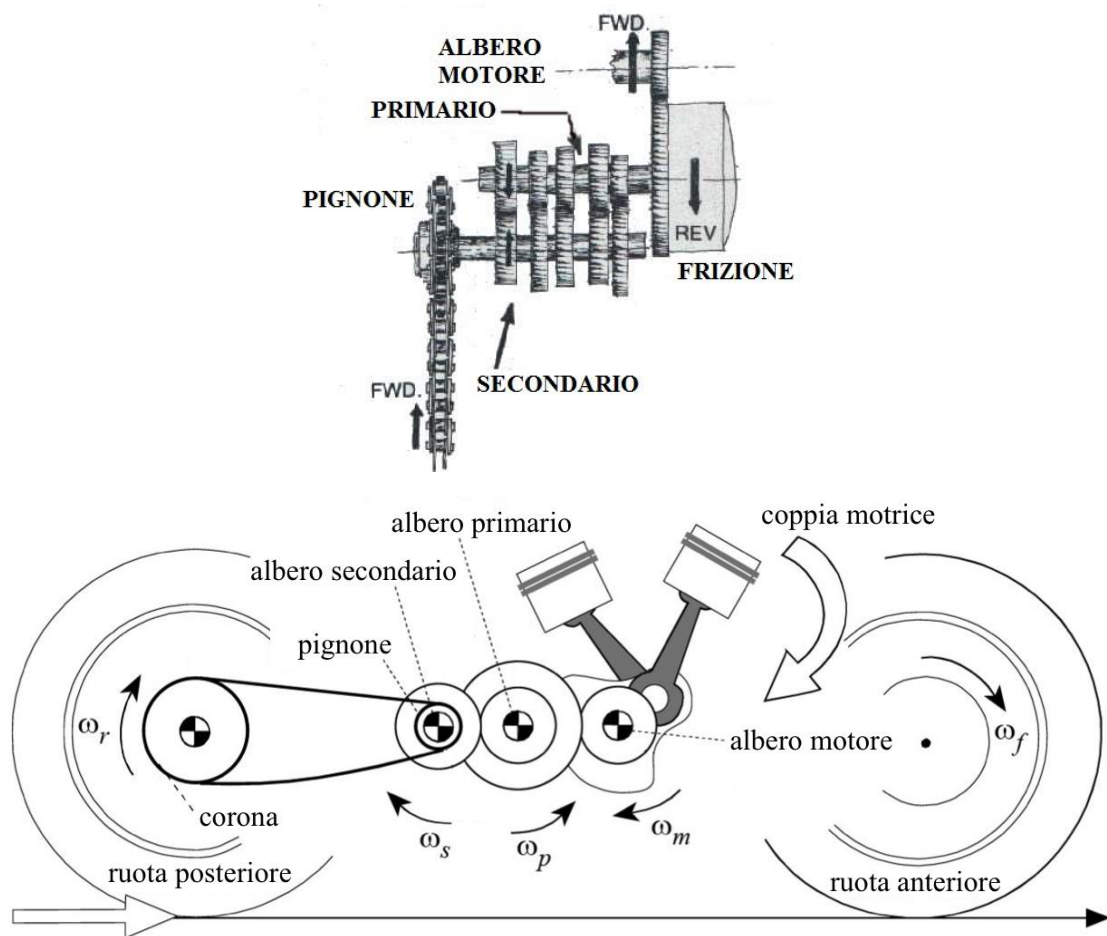


Figura 4.1: schema della trasmissione di un motociclo sportivo in configurazione tradizionale. Sono indicati i versi di rotazione di ciascuna parte rotante (da V. Cossalter, *Motorcycle Dynamics*, 2006).

Si può notare quanto segue.

- La rotazione del motore viene trasferita, attraverso la frizione, all'albero primario del cambio, il quale ha quindi verso di rotazione contrario a quello dell'albero motore; il rapporto di velocità ω_m/ω_p è quello della trasmissione primaria.
- Il moto rotatorio è poi trasmesso all'albero secondario del cambio, che ruota in verso opposto all'albero primario e quindi in modo concorde al motore; il rapporto di velocità ω_p/ω_s è determinato dalla marcia inserita.

- La trasmissione del moto alle ruote avviene tramite un meccanismo pignone-corona, che mantiene inalterato il verso di rotazione, che di conseguenza è ancora una volta uguale a quello del motore; il rapporto di velocità ω_s/ω_r , dato dal rapporto fra il numero di denti di corona e pignone, è detto rapporto di trasmissione finale.

La rotazione del motore influenza il comportamento del motociclo attraverso alcuni effetti dinamici, che vengono descritti nel seguito. Risulta perciò interessante esplorare la possibilità di modificare tali effetti, per esempio invertendo il verso del moto rotatorio del motore. Quella del motore controrotante è una soluzione tecnica effettivamente utilizzata, soprattutto nell'abito delle motociclette da corsa che competono nelle categorie di più alto livello. Le soluzioni costruttive più comuni, a cui si è fatto riferimento per la formulazione del modello matematico del motociclo, prevedono che solo il verso di rotazione del motore venga invertito, mentre gli alberi della trasmissione mantengono invariato il loro moto. Una configurazione di questo tipo può essere ottenuta tramite l'utilizzo di una ruota oziosa interposta fra motore e primario oppure sfruttando una delle ruote che comandano il meccanismo di distribuzione (distribuzione a cascata di ingranaggi) per prelevare il moto da trasmettere all'albero primario.

I principali fenomeni legati all'inerzia del motore che influiscono sul comportamento dinamico della motocicletta sono gli effetti giroscopici e i trasferimenti di carico.

Un effetto giroscopico viene generato da un corpo rigido che ruota attorno ad un asse $a-a$, che è a sua volta in rotazione attorno ad un secondo asse $b-b$ sghembo (non parallelo) al primo asse $a-a$. L'effetto giroscopico assume la forma di una coppia agente attorno ad un asse perpendicolare sia ad $a-a$, sia a $b-b$. Il modulo del momento giroscopico è pari al valore del momento della quantità di moto del corpo $I\omega$ attorno all'asse $a-a$ moltiplicato per la velocità di rotazione Ω attorno all'asse $b-b$; un fattore pari al seno dell'angolo fra ω e Ω permette di tenere conto dell'eventuale non perpendicolarità fra i due assi $a-a$ e $b-b$. La quantità di moto angolare è pari al momento d'inerzia polare I del corpo attorno all'asse $a-a$, moltiplicato per la velocità di rotazione ω attorno allo stesso asse.

Uno degli effetti giroscopici agenti su un motociclo è dovuto alla combinazione fra il moto di imbardata e la rotazione del motore. Figura 4.2 mostra come tale momento viene generato.

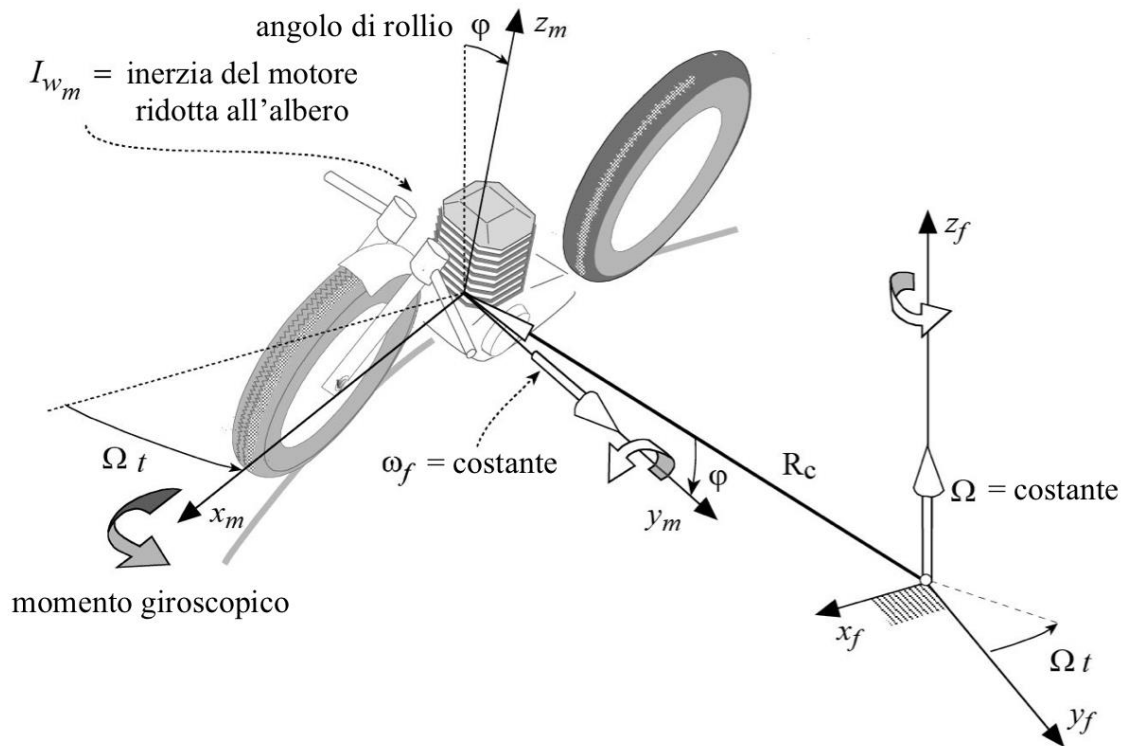


Figura 4.2: momento giroscopico generato durante il moto stazionario in curva da un motore con asse trasversale e verso di rotazione concorde con quello delle ruote.

Il valore del momento giroscopico risulta:

$$M \approx I_{w_m} \omega_m \Omega \cos \varphi \quad (4.1)$$

A causa dell'effetto giroscopico generato dal motore, l'equilibrio viene raggiunto inclinando la motocicletta di un angolo di rollio reale maggiore di quello che sarebbe necessario in assenza del momento giroscopico:

$$\Delta \varphi \approx \frac{I_{w_m} \omega_m \Omega \cos \varphi}{h \cdot \sqrt{(Mg)^2 + (MR_c \Omega^2)^2}} \quad (4.2)$$

Con motore controrotante, il momento giroscopico generato in curva ha verso opposto rispetto a quello relativo al caso di motore tradizionale, pertanto la variazione dell'angolo di rollio $\Delta \varphi$ si sottrae al valore teorico all'equilibrio. Il termine $I_{w_m} \omega_m$ esprime la quantità di moto angolare complessiva del motore, comprese la quantità di moto angolare dell'albero motore, degli alberi di trasmissione e di qualsiasi altro albero parallelo all'asse della ruota posteriore. Si evidenzia,

tuttavia, che l'albero primario e la trasmissione contribuiscono in misura minore all'effetto giroscopico rispetto al motore, in quanto possiedono inerzia minore e ruotano ad una velocità angolare inferiore.

Un ulteriore effetto dinamico dovuto alle parti rotanti del motore e della trasmissione è costituito dai trasferimenti di carico generati in fase di accelerazione e decelerazione. Queste forze, dovute all'accelerazione delle inerzie dei componenti considerati, sono spiegabili in base al principio di conservazione del momento angolare e si sommano ai trasferimenti di carico causati dalla forza longitudinale S degli pneumatici ($N_{tr} = S \cdot H/p$ dove H è l'altezza del baricentro e p è il passo, come mostrato in Figura 3.1). Si consideri, per esempio, la fase di accelerazione: nel caso la motocicletta sia dotata di motore tradizionale, il trasferimento di carico al posteriore risulterà accentuato dall'effetto dell'accelerazione dell'inerzia del motore. Ciò può costituire un vantaggio in condizioni di bassa aderenza, in quanto aumenta la massima forza di spinta che lo pneumatico posteriore può esercitare. Tuttavia, qualora l'accelerazione sia limitata dall'impennamento anziché dalla massima aderenza (come tipicamente accade in condizioni di asfalto asciutto e angoli di rollio contenuti), il maggiore trasferimento di carico riduce la massima accelerazione raggiungibile prima che il carico verticale sulla ruota anteriore si annulli; in una simile condizione, risulterebbe vantaggiosa la soluzione del motore controrotante, che riduce il trasferimento di carico al posteriore e aumenta quindi il limite di impennamento.

Allo scopo di studiare gli effetti del differente verso di rotazione del motore sulla dinamica della motocicletta, il modello descritto nel capitolo precedente è stato utilizzato per risolvere problemi di tempo minimo relativi a varie manovre (curva ad U, accelerazione in rettilineo, chicane, percorso ad anello) con l'obiettivo di osservare le differenze di comportamento fra il motociclo equipaggiato con motore tradizionale (o rotante) e quello con motore controrotante, in particolare riguardo ai seguenti aspetti:

- coppia di sterzo applicata dal pilota nei transitori (ingresso curva, cambio di direzione);
- diverso comportamento in accelerazione, al variare di alcune condizioni (accelerazione in rettilineo o in uscita di curva, bassa o alta aderenza degli pneumatici).

Nei grafici utilizzati per descrivere l'evoluzione delle diverse quantità durante l'esecuzione delle manovre, la soluzione con motore tradizionale viene identificata con la dicitura *normal*,

mentre il caso del motore controrotante è contrassegnato come *counter* (dall'inglese *counter-rotating*).

Per simulare diverse condizioni del fondo stradale, che riproducono l'aderenza tipica di un tracciato asciutto e di un tracciato bagnato, si è fatto uso dei seguenti valori per i coefficienti di attrito degli pneumatici:

- asfalto asciutto:
 - coefficiente di aderenza longitudinale: 1.2;
 - coefficiente di aderenza laterale: 1.4;
- asfalto bagnato:
 - coefficiente di aderenza longitudinale: 0.8;
 - coefficiente di aderenza laterale: 0.9.

4.1 Simulazioni di tempo minimo: rettilineo

Al fine di studiare il comportamento in accelerazione con motociclo non rollato e condizioni di aderenza variabili (asciutto e bagnato) si sono svolte simulazioni su un rettilineo di lunghezza pari a 930 m e con velocità iniziale di 10 m/s (36 km/h).

4.1.1 Risultati delle simulazioni in rettilineo

Le simulazioni mostrano che in condizioni di elevata aderenza (asfalto asciutto), il veicolo equipaggiato con motore controrotante risulta avvantaggiato. Infatti, fino ad una velocità di circa 70 m/s (250 km/h), l'accelerazione massima risulta limitata dal raggiungimento della condizione di impennamento (Figura 4.4), pertanto la soluzione controrotante, riducendo il trasferimento di carico al posteriore, consente un'accelerazione più elevata. Dopo il raggiungimento di questa velocità, circa 280 m dopo il punto iniziale, la massima accelerazione è determinata dalla potenza messa a disposizione dal motore (Figura 4.6) e le due configurazioni tendono ad avere un comportamento simile. La massima differenza assoluta di velocità è di circa 0.5 km/h e si verifica quando la motocicletta possiede una velocità prossima ai 250 km/h. In definitiva, su asfalto asciutto il motociclo con motore controrotante risulta più rapido, raggiungendo il traguardo in 14.548 s, contro i 14.566 s del veicolo convenzionale.

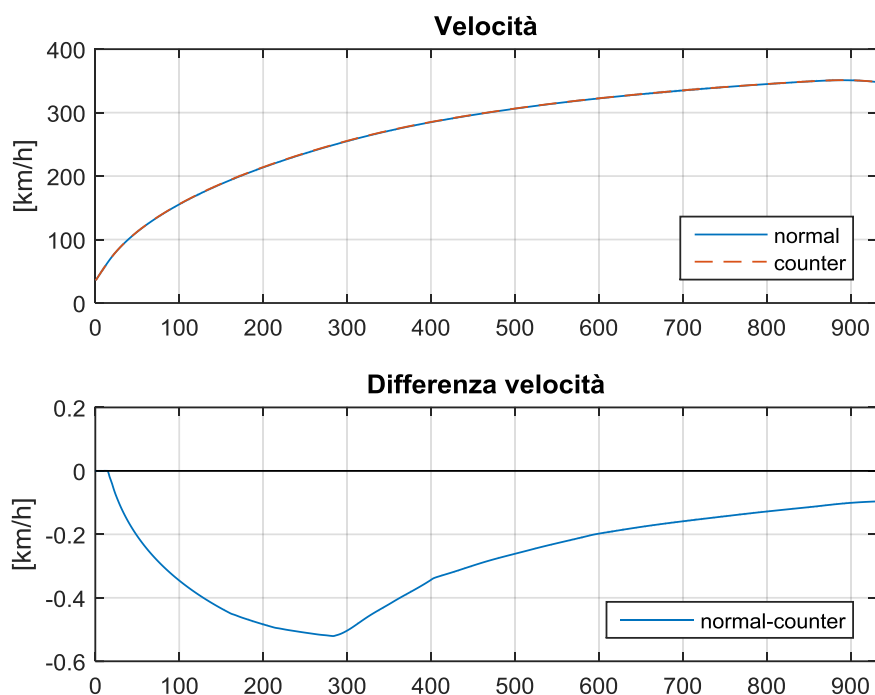


Figura 4.3: rettilineo, asfalto asciutto. Velocità di avanzamento. La maggiore accelerazione concessa dalla soluzione con motore controrotante fa sì che ad essa corrisponda una velocità più elevata nella prima parte del rettilineo.

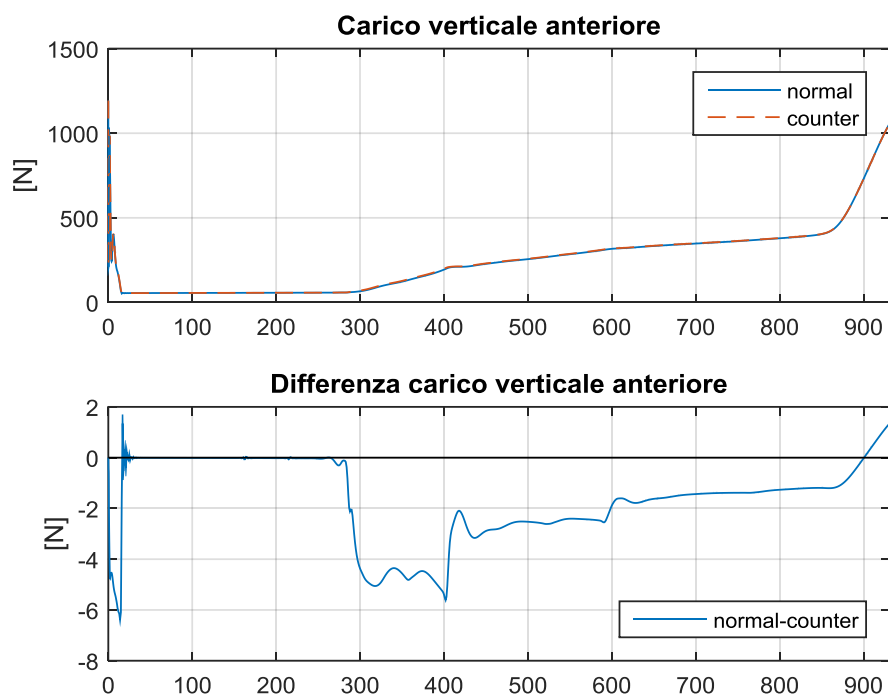


Figura 4.4: rettilineo, asfalto asciutto. Carico verticale sullo pneumatico anteriore. Si noti che fino a circa 280 m il carico è prossimo a zero: questo significa che si è prossimi alla condizione di impennamento e ciò limita l'accelerazione massima.

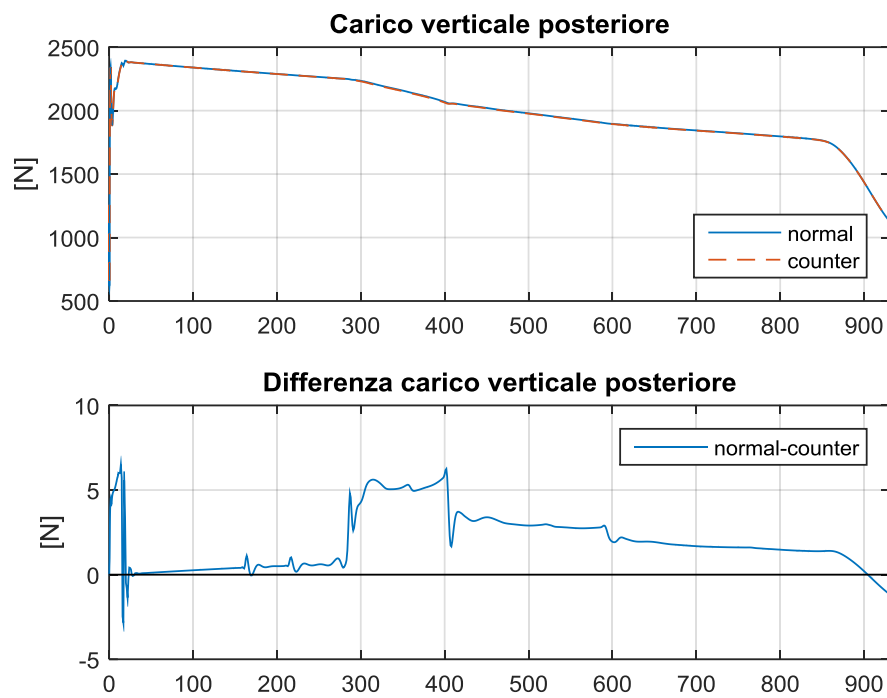


Figura 4.5: rettilineo, asfalto asciutto. Carico verticale sullo pneumatico posteriore.

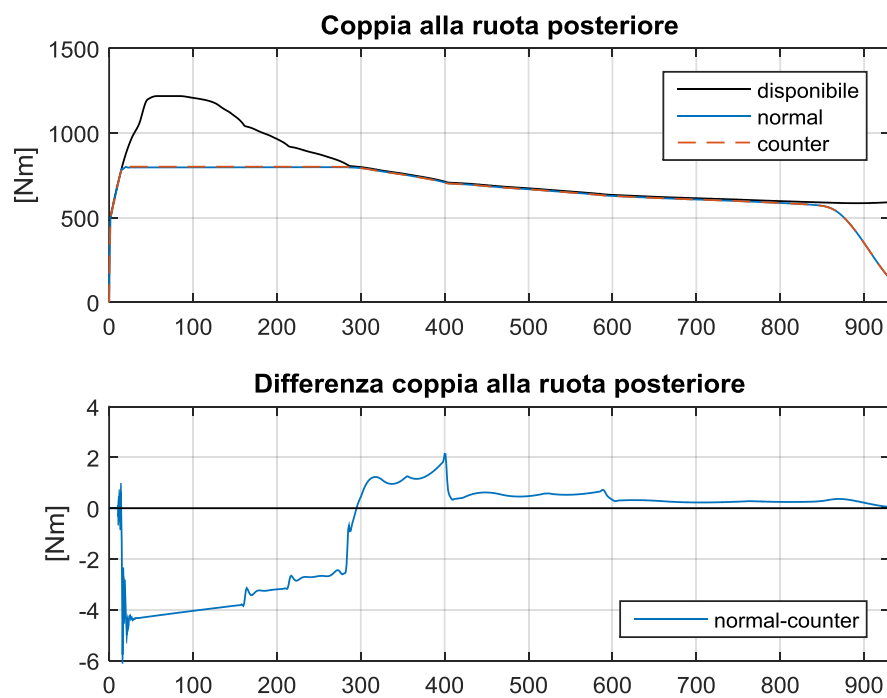


Figura 4.6: rettilineo, asfalto asciutto. Coppia utilizzata alla ruota posteriore. Dopo i 280 m, l'impennamento non è più critico e viene utilizzata tutta la coppia resa disponibile dal motore.

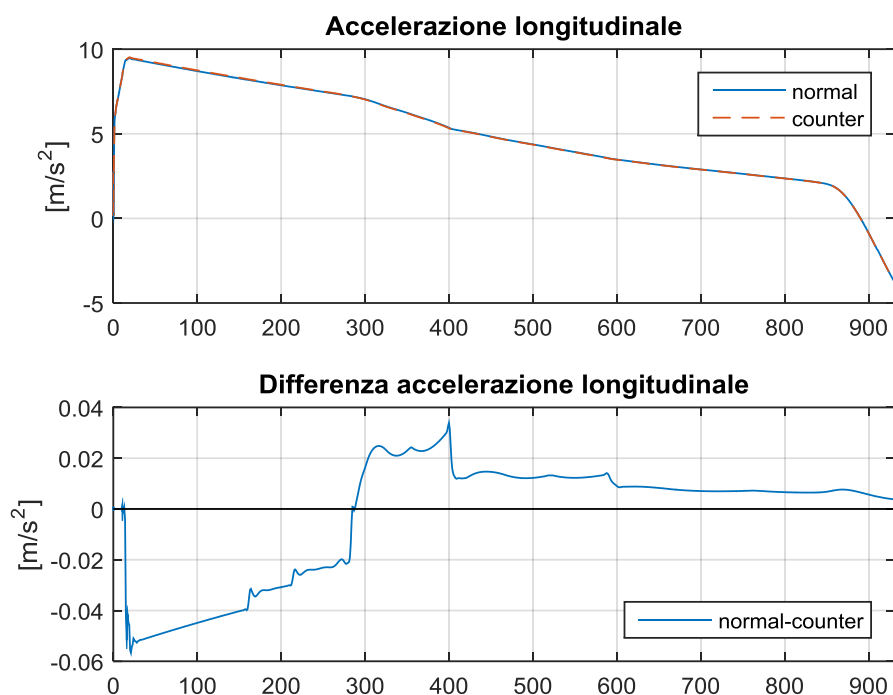


Figura 4.7: rettilineo, asfalto asciutto. Accelerazione longitudinale. Nella fase iniziale, la minore tendenza all'impennamento permette al veicolo con motore controrotante una maggiore accelerazione.

In condizioni di bassa aderenza (asfalto bagnato), è la motocicletta con motore tradizionale a risultare avvantaggiata: in questo caso, non è più l'impennamento a limitare l'accelerazione, ma l'aderenza dello pneumatico posteriore. Il maggiore trasferimento di carico che ha luogo utilizzando il motore rotante (Figura 4.10) permette di aumentare la massima forza longitudinale che lo pneumatico può esercitare e quindi la massima accelerazione ottenibile (Figura 4.12). La massima differenza assoluta di velocità, pari a circa 0.3 km/h, si verifica in prossimità dei 220 km/h. Il motociclo tradizionale copre la distanza prevista in 17.886 s, contro i 17.907 s richiesti dal veicolo dotato di motore controrotante.

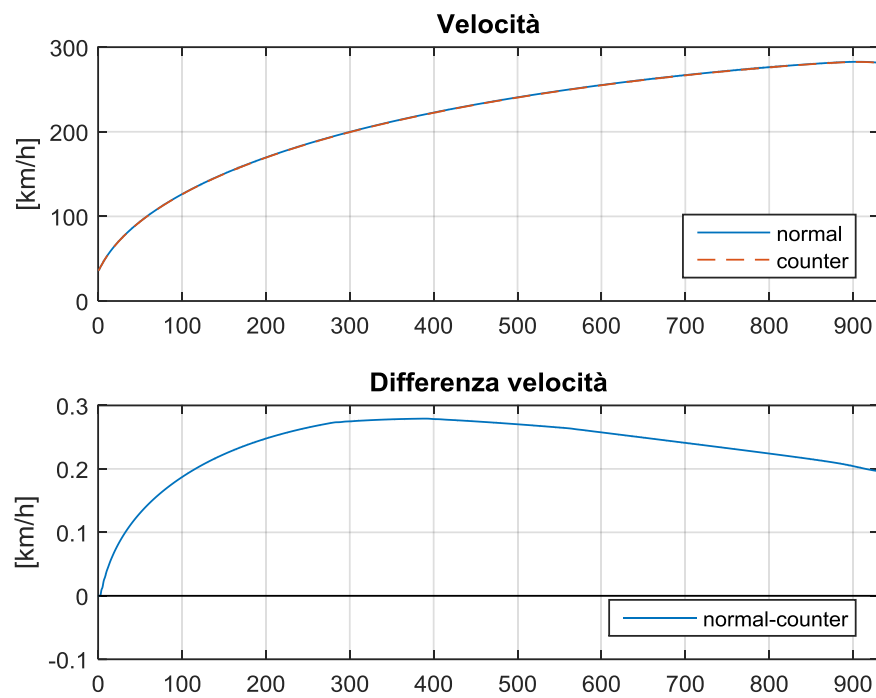


Figura 4.8: rettilineo, asfalto bagnato. Velocità di avanzamento. La configurazione tradizionale presenta una velocità maggiore lungo l'intera manovra.

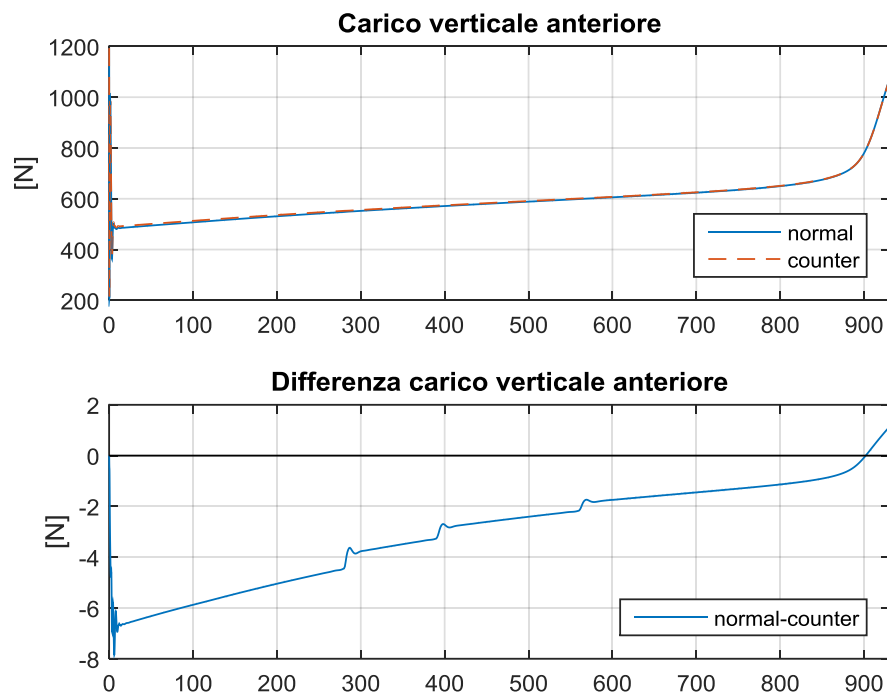


Figura 4.9: rettilineo, asfalto bagnato. Carico verticale sullo pneumatico anteriore. È evidente che la forza verticale all'anteriore non si avvicina mai al valore nullo: ciò indica che in questo caso l'impennamento non costituisce l'aspetto critico che limita l'accelerazione

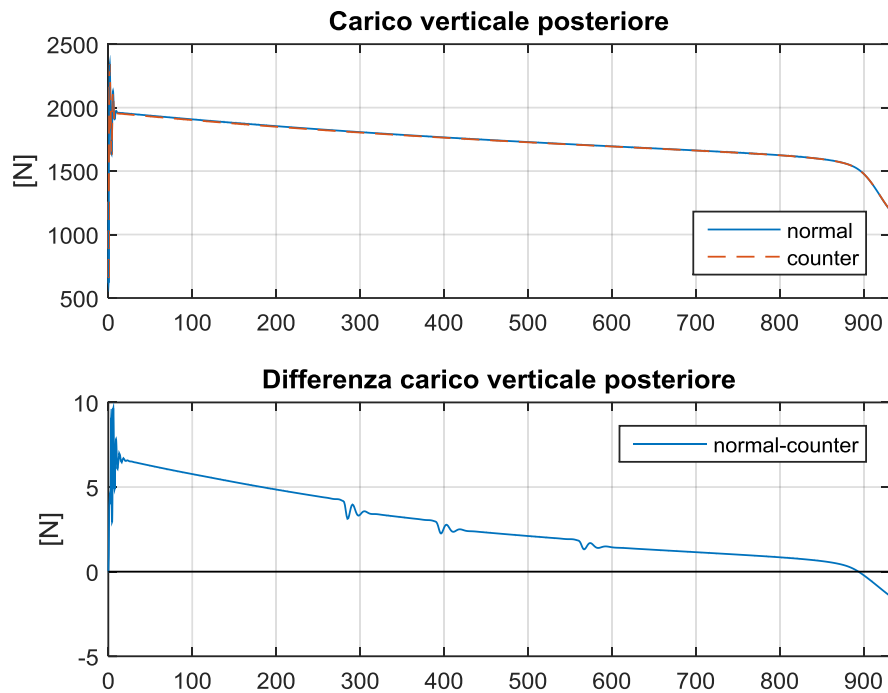


Figura 4.10: rettilineo, asfalto bagnato. Carico verticale sullo pneumatico posteriore. Si noti la maggiore forza verticale agente nel caso del motore rotante, causata dal trasferimento di carico al posteriore dovuto all'accelerazione delle componenti rotanti del motore stesso.

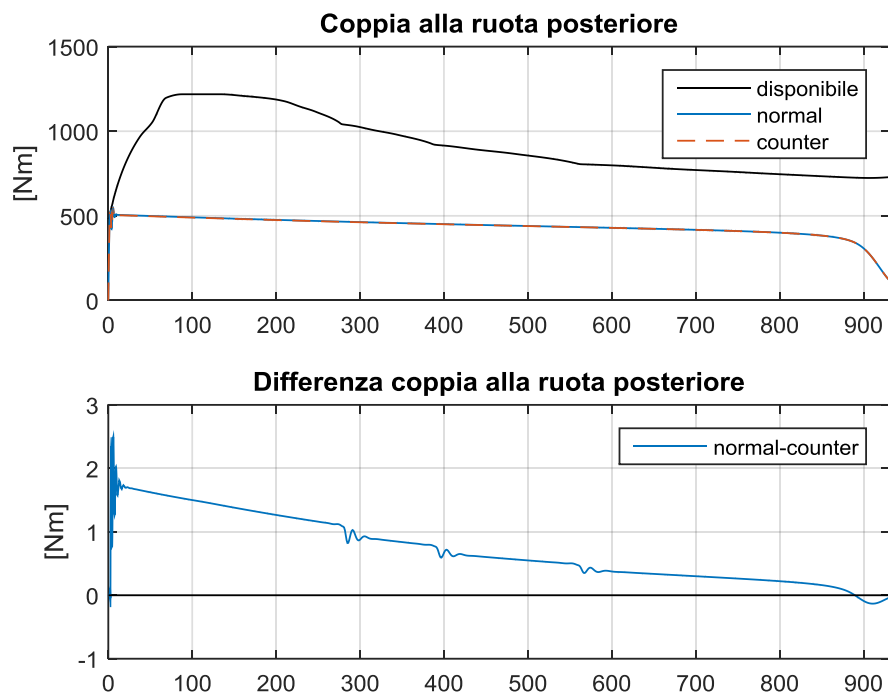


Figura 4.11: rettilineo, asfalto bagnato. Coppia utilizzata alla ruota posteriore. La massima aderenza dello pneumatico posteriore non consente in alcun punto l'utilizzo di tutta la coppia disponibile.

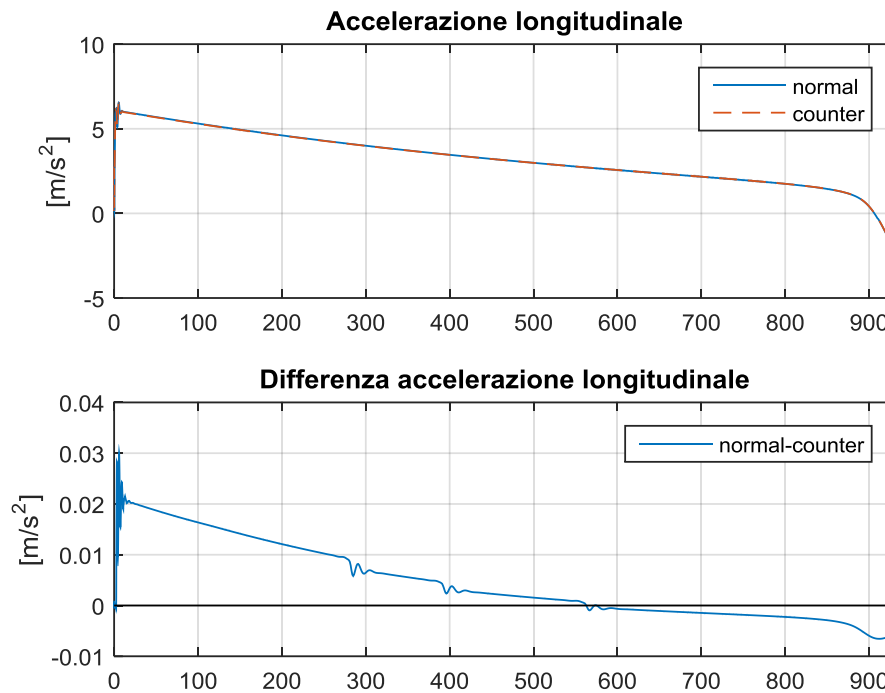


Figura 4.12: rettilineo, asfalto bagnato. Accelerazione longitudinale. La configurazione convenzionale è avvantaggiata dalla migliore trazione resa disponibile dal maggiore trasferimento di carico.

4.2 Simulazioni di tempo minimo: curva ad U

Ulteriori simulazioni sono state eseguite su un circuito che prevede una curva ad U di raggio costante, preceduta e seguita da tratti rettilinei. Lo scopo è, in questo caso, focalizzare l'attenzione sui seguenti aspetti:

- coppia applicata allo sterzo nel transitorio costituito dall'ingresso in curva;
- differente comportamento nella fase di accelerazione in uscita di curva, quando il motociclo possiede ancora un angolo di rollio non trascurabile.

La scelta del raggio di curvatura più adatto ad evidenziare eventuali differenze fra le soluzioni rotante e controrotante è stata effettuata in base alle seguenti considerazioni. In base alla massima aderenza degli pneumatici e alle caratteristiche di motore e cambio (massimo regime di rotazione e rapporti delle marce), la curva viene percorsa in prima marcia fino ad un valore del raggio di curvatura pari a circa 130 m. Fintanto che la curva presenta un raggio inferiore o uguale a questo valore, i valori massimi degli effetti giroscopici di motore e ruote, legati alla

velocità di imbardata, rimangono pressoché inalterati: infatti, si osserva che la maggiore velocità di rotazione, conseguente alla più alta velocità di percorrenza permessa da un più ampio raggio di curvatura, viene compensata dalla minore velocità di imbardata, così che il massimo momento giroscopico non risulta modificato in modo significativo. Per raggi di curvatura superiori a 130 m, invece, l'utilizzo di minori rapporti del cambio (percorrenza della curva in seconda o terza marcia) comporta che, pur aumentando la velocità con cui viene percorsa la curva, il motore si mantenga in un intervallo di velocità di rotazione abbastanza limitato, prossimo al limite massimo; questo, unito alla minore velocità di imbardata che viene raggiunta in una curva a raggio ampio, riduce il valore del momento giroscopico del motore. Al contrario, le ruote presentano una velocità di rotazione sempre crescente con la velocità di percorrenza, e questo fa sì che il loro momento giroscopico non subisca il calo che caratterizza il momento relativo al motore. Il contributo delle ruote, quindi, tende a prevalere su quello del motore, mascherandone gli effetti e rendendo più piccole le differenze esistenti fra le due configurazioni, rotante e controrotante. In base a quanto esposto, si è scelto di studiare il caso relativo ad un raggio di curvatura di 60m.

4.2.1 Risultati delle simulazioni su curva ad U

I tempi totali ottenuti in condizioni di elevata aderenza (asfalto asciutto) dalle due tipologie di motociclo favoriscono ancora una volta la soluzione controrotante (22.044 s, 0.011 s più veloce rispetto al motore convenzionale), tuttavia questo fatto è da imputare principalmente ai due rettilinei che precedono e seguono la curva, sui quali, come visto nella sezione precedente, il motore controrotante risulta avvantaggiato. È invece più interessante analizzare il diverso comportamento delle due configurazioni nelle varie fasi della curva: ingresso, percorrenza e uscita. I risultati ottenuti sono mostrati nelle figure che seguono.

In fase di ingresso, si può osservare in Figura 4.18 che il motore controrotante richiede una coppia di sterzo inferiore: la differenza massima, ottenuta fra 250 e 300 m, è pari al 8%, mentre il valore di picco, raggiunto a 360 m, presenta una differenza decisamente più contenuta (scarto di circa 0,6%). Inoltre, in Figura 4.19 si nota che la massima velocità di rollio conseguita nell'ingresso in curva (a circa 350 m dal punto iniziale) risulta leggermente maggiore per il motociclo con motore controrotante, con una differenza relativa di circa 1.6%.

Durante la percorrenza, si può notare un diverso angolo di rollio a centro curva per le due motociclette (Figura 4.20, da 450 a 550 m circa): in particolare, il veicolo equipaggiato con il motore controrotante ha un angolo di rollio inferiore grazie all'inversione del momento

giroscopico generato dal motore durante il moto di imbardata. Si evidenzia, tuttavia, come la differenza riscontrata sia estremamente contenuta, dell'ordine dello 0.3%: si ricorda, infatti, che il momento giroscopico prevalente è quello delle ruote, il quale agisce in modo identico su entrambi i veicoli. Quanto osservato nelle simulazioni conferma il comportamento previsto dall'equazione (4.2) per una curva in stato stazionario: ad ulteriore verifica di questo aspetto, si veda la sezione seguente riguardante la simulazione di un percorso ad anello.

È infine interessante osservare il comportamento in uscita di curva, fase in cui avviene un'accelerazione con il motociclo inizialmente rollato. Come si può notare dal profilo di velocità (Figura 4.14, fra 580 e 720 m) e dall'evoluzione dell'accelerazione longitudinale (Figura 4.17, in prossimità dei 600 m), il veicolo tradizionale risulta inizialmente avvantaggiato rispetto a quello dotato di motore controrotante. Nella parte iniziale dell'uscita di curva, infatti, la motocicletta possiede ancora un angolo di rollio elevato (Figura 4.20) e allo pneumatico posteriore è richiesto di generare contemporaneamente forze di contatto longitudinali e laterali. In questa condizione, non è l'impennamento a limitare l'accelerazione, ma l'aderenza massima degli pneumatici, dunque la soluzione tradizionale è favorita dal maggiore trasferimento di carico al posteriore. Tuttavia, la fase in cui il fattore critico è costituito dall'annullamento del carico verticale anteriore viene raggiunta rapidamente (Figura 4.15) e il veicolo con motore controrotante si avvantaggia grazie alla minore tendenza all'impennamento. Quanto detto suggerisce che il motore rotante potrebbe risultare una scelta vincente su tracciati caratterizzati da curve in successione e privi di lunghi rettilinei, sui quali può risultare vantaggiosa la capacità di accelerare con motociclo rollato, mentre l'impennamento risulta meno limitante.

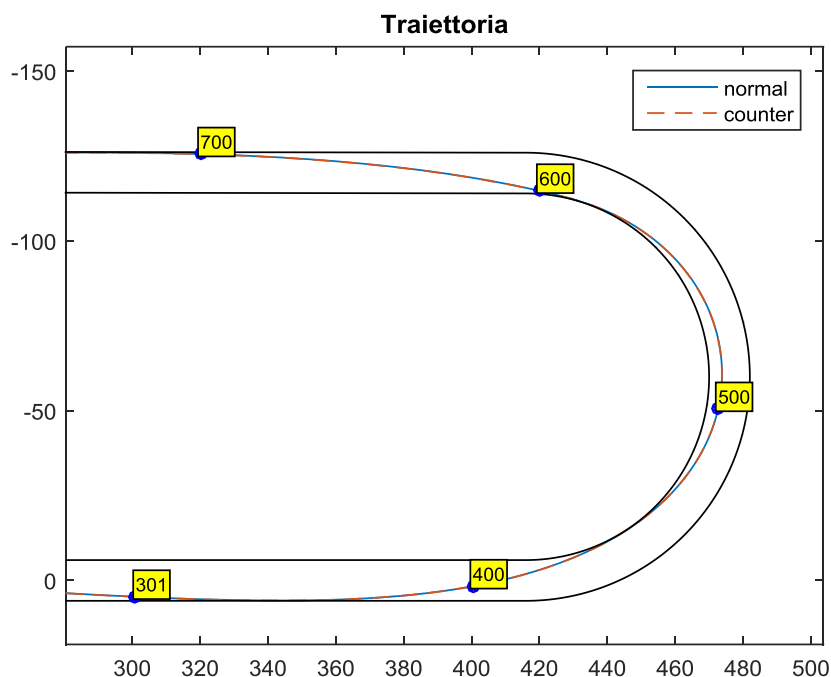


Figura 4.13: curva ad U, raggio 60 m, asfalto asciutto. Tracciato e traiettoria. La figura mostra un ingrandimento del tratto di percorso contenente il tornante; l'intero circuito comprende anche dei tratti rettilinei, di circa 400 m di lunghezza, prima e dopo la curva. Non ci sono differenze sensibili fra le traiettorie seguite dai veicoli dotati di motore tradizionale o controrotante.

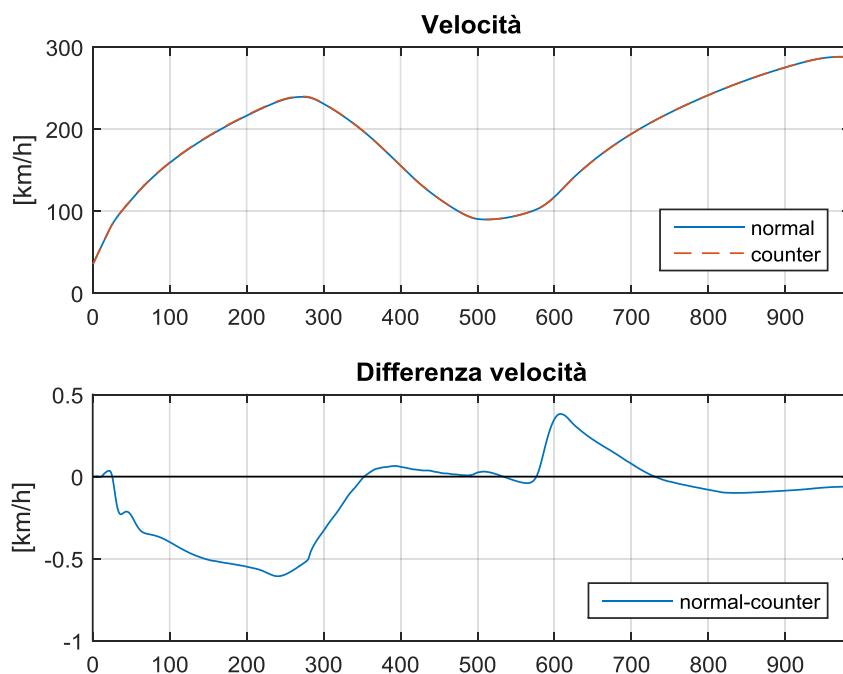


Figura 4.14: curva ad U, raggio 60 m, asfalto asciutto. Velocità di avanzamento. A partire da 580 m circa la soluzione rotante presenta è favorita dalla migliore accelerazione permessa dal trasferimento di carico; questo vantaggio tende a ridursi in quanto insorge quasi subito il problema dell'impennamento.

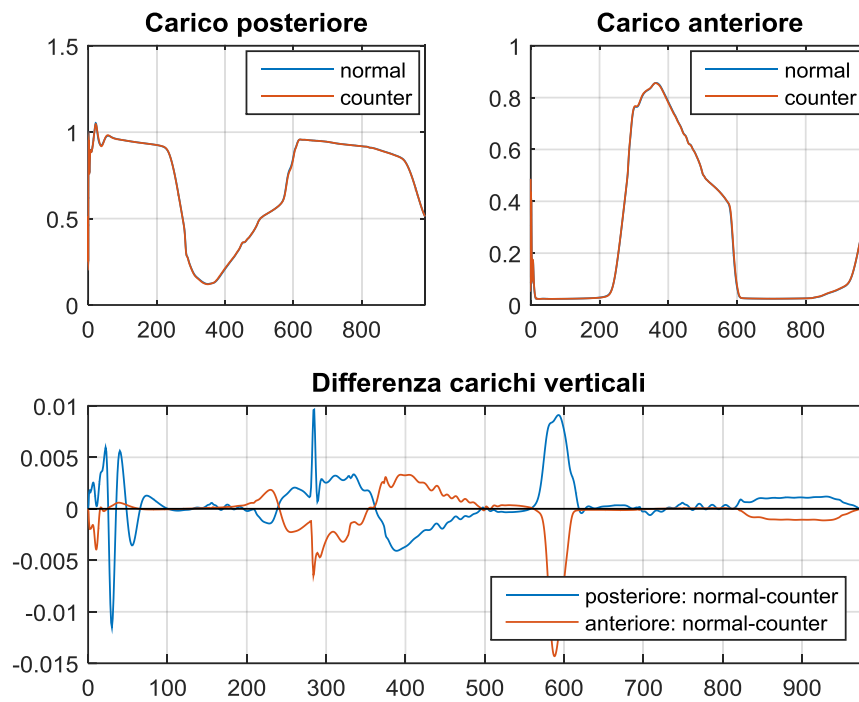


Figura 4.15: curva ad U, raggio 60 m, asfalto asciutto. Carichi verticali sugli pneumatici, normalizzati rispetto al peso totale Mg . A 600 m l'impennamento diventa il fattore limitante sull'accelerazione.

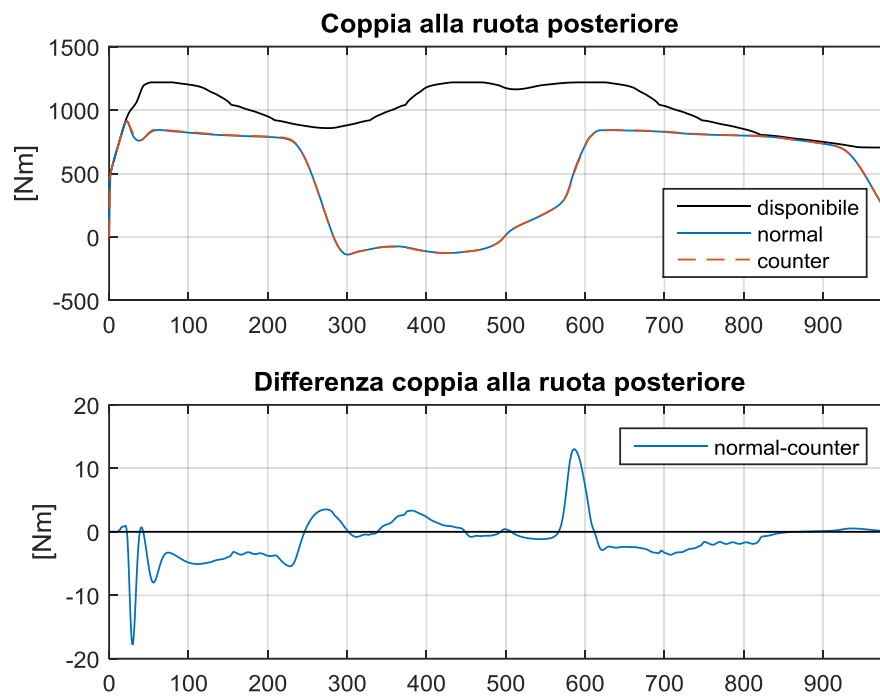


Figura 4.16: curva ad U, raggio 60 m, asfalto asciutto. Coppia utilizzata alla ruota posteriore.

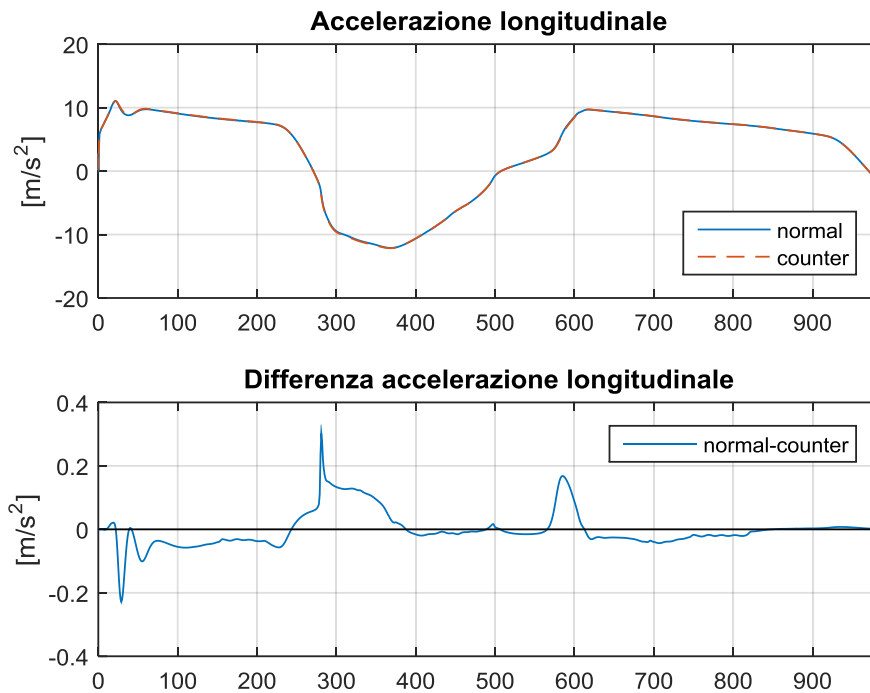


Figura 4.17: curva ad U, raggio 60 m, asfalto asciutto. Accelerazione longitudinale. Si noti a circa 580 m la differenza a favore del motore tradizionale, che determina la differenza di velocità visibile nel relativo grafico.

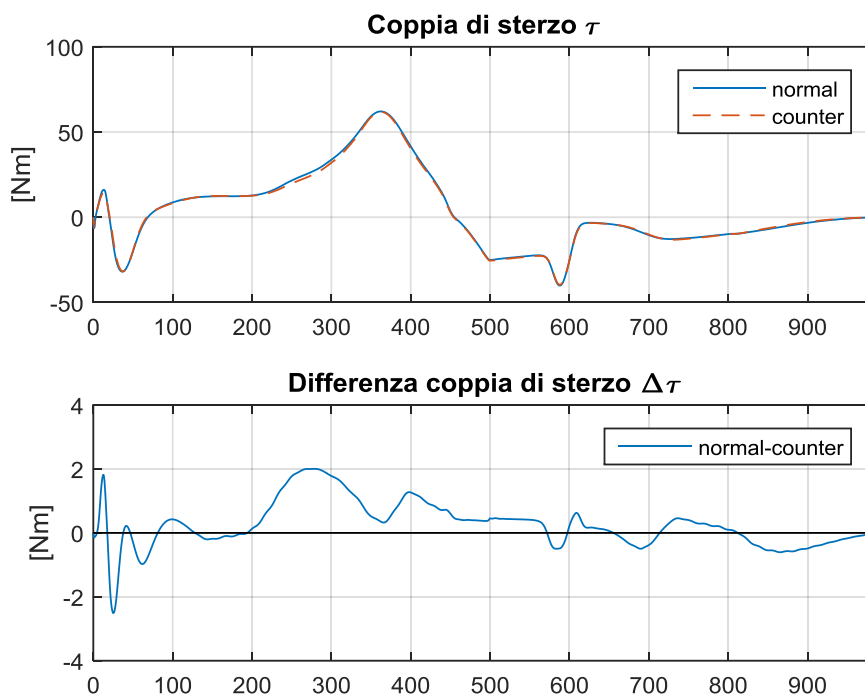


Figura 4.18: curva ad U, raggio 60 m, asfalto asciutto. Coppia di sterzo applicata al manubrio. Il motore controrotante richiede una coppia di sterzo in ingresso curva leggermente inferiore.

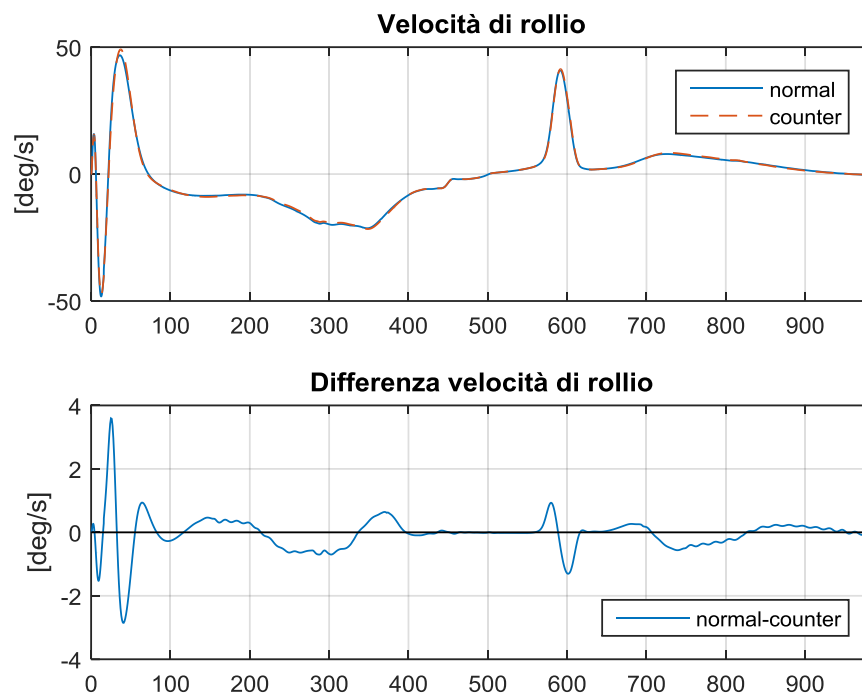


Figura 4.19: curva ad U, raggio 60 m, asfalto asciutto. Velocità di rollio.

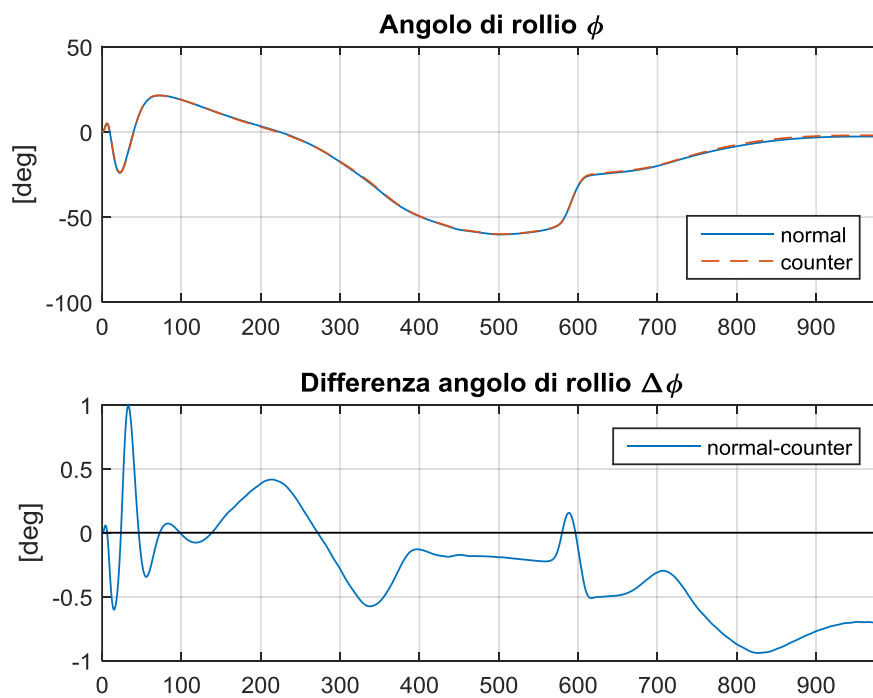


Figura 4.20: curva ad U, raggio 60 m, asfalto asciutto. Angolo di rollio. A centro curva il motore controrotante determina un angolo di rollio leggermente inferiore.

In condizioni di asfalto bagnato, la motocicletta dotata di motore tradizionale è avvantaggiata sia dalla maggiore accelerazione nella prima fase dell'uscita di curva, sia dalle migliori prestazioni in rettilineo: essa risulta pertanto più veloce di circa 0.022 s rispetto al veicolo con motore controrotante, con un tempo finale di 27.603 s.

Nella fase di ingresso in curva, la coppia al manubrio risulta inferiore di circa il 2.7% per il motociclo equipaggiato con motore controrotante (Figura 4.25). In questo caso tale differenza rimane pressoché la stessa anche per il valore di picco, raggiunto a circa 350 m. Come su asfalto asciutto, il motore controrotante consente un picco della velocità di rollio più elevato rispetto al caso tradizionale (Figura 4.26), con una differenza relativa di circa 1.8%.

A centro curva, l'angolo di rollio della motocicletta con motore controrotante risulta inferiore di circa lo 0.4% (Figura 4.27), in modo analogo a quanto visto in condizioni di elevata aderenza. Ancora una volta, si rimanda alle simulazioni su percorso ad anello per il risultato relativo alle condizioni di curva in stato stazionario.

Come già accennato, in uscita di curva il motore tradizionale è nettamente avvantaggiato: in questa fase, infatti, l'aspetto critico è costituito dall'aderenza degli pneumatici, in quanto alla necessità di accelerare con il veicolo ancora rollato si aggiunge l'aderenza non ottimale offerta dal fondo stradale bagnato. Un maggiore trasferimento di carico al posteriore è quindi decisamente preferibile, per la migliore trazione da esso garantita.

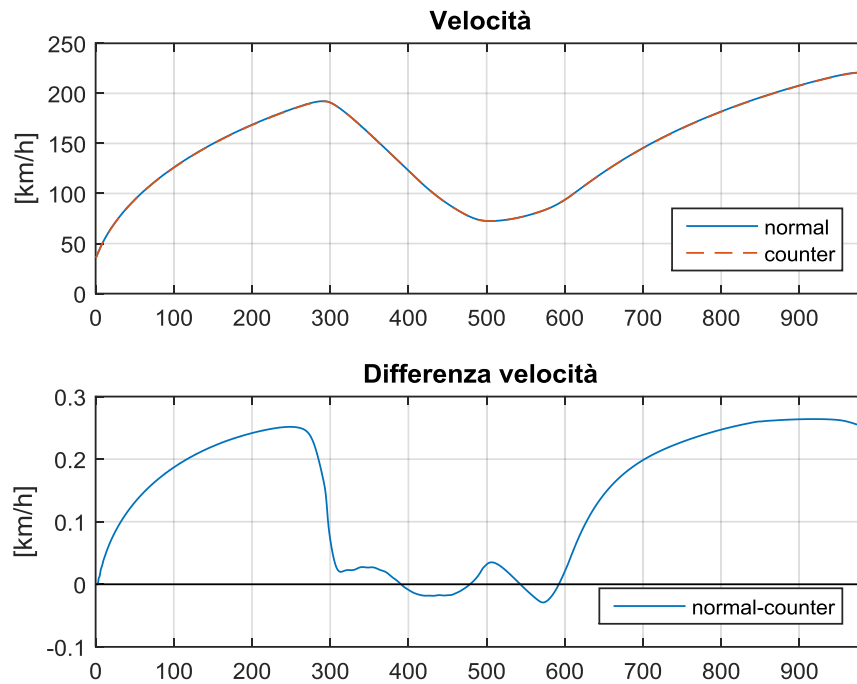


Figura 4.21: curva ad U, raggio 60 m, asfalto bagnato. Velocità di avanzamento. Il vantaggio del motore tradizionale nell'accelerazione su fondo bagnato è accentuato in uscita di curva dall'accoppiamento fra forze longitudinale e laterale degli pneumatici.

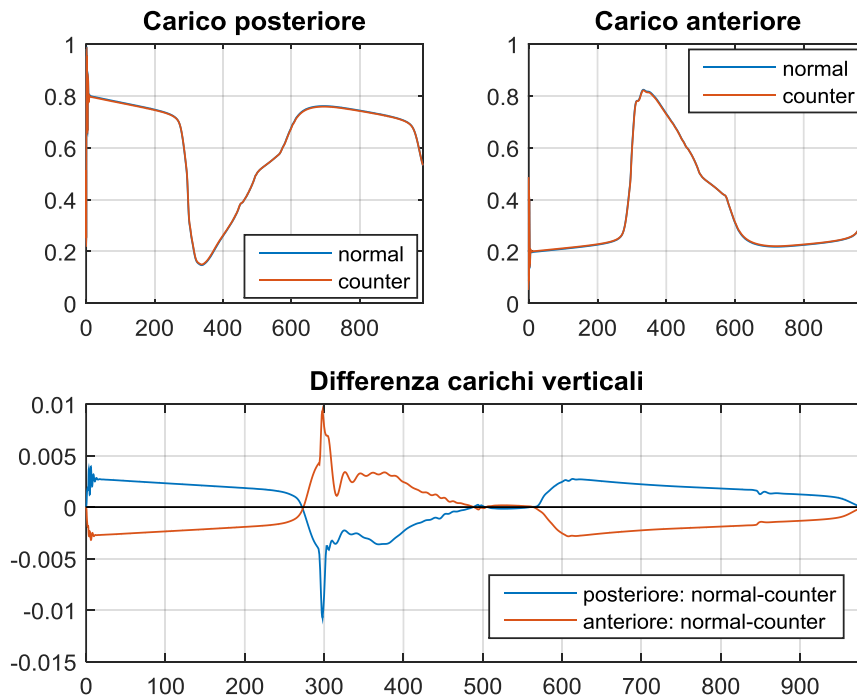


Figura 4.22: curva ad U, raggio 60 m, asfalto bagnato. Carichi verticali sugli pneumatici, normalizzati rispetto al peso totale Mg . A causa della bassa aderenza, la condizione di impennamento non viene mai raggiunta. Si noti il maggiore carico al posteriore in accelerazione per il veicolo dotato di motore tradizionale.

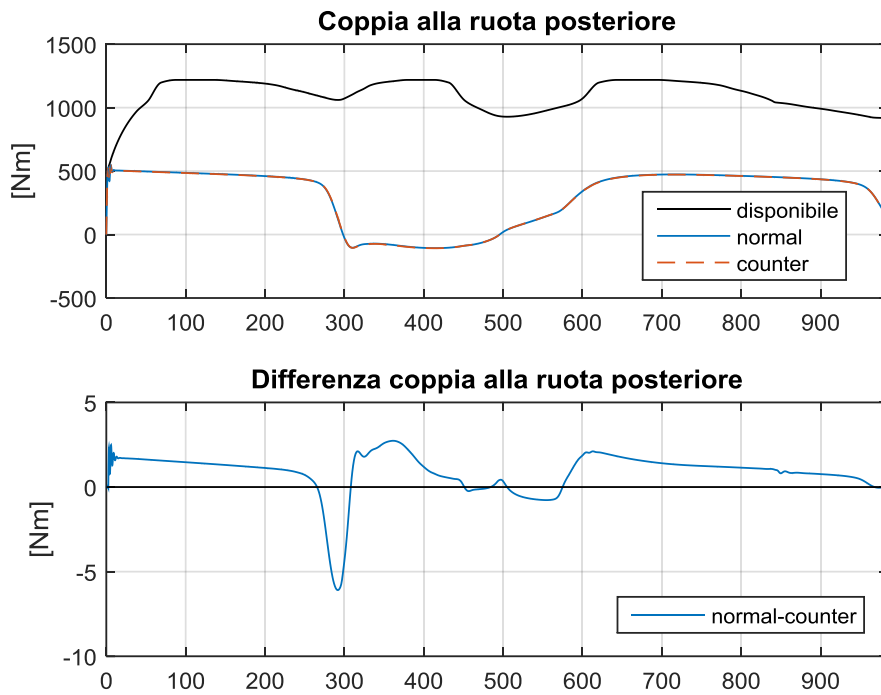


Figura 4.23: curva ad U, raggio 60 m, asfalto bagnato. Coppia utilizzata alla ruota posteriore.

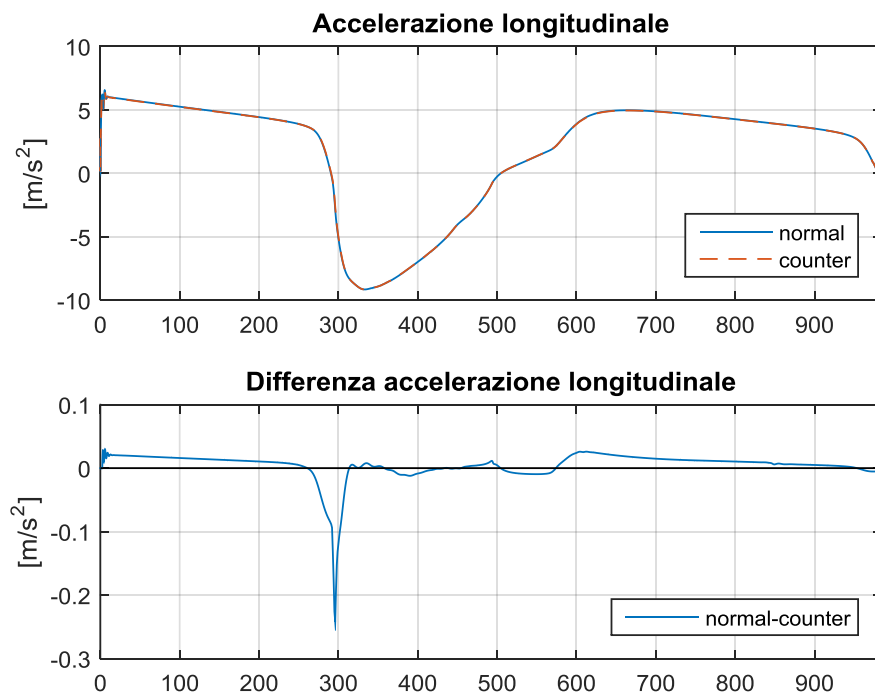


Figura 4.24: curva ad U, raggio 60 m, asfalto bagnato. Accelerazione longitudinale. La differenza di accelerazione è massima in uscita di curva, dove angolo di rollio e aderenza ridotta dal bagnato rendono critica l'aderenza degli pneumatici.

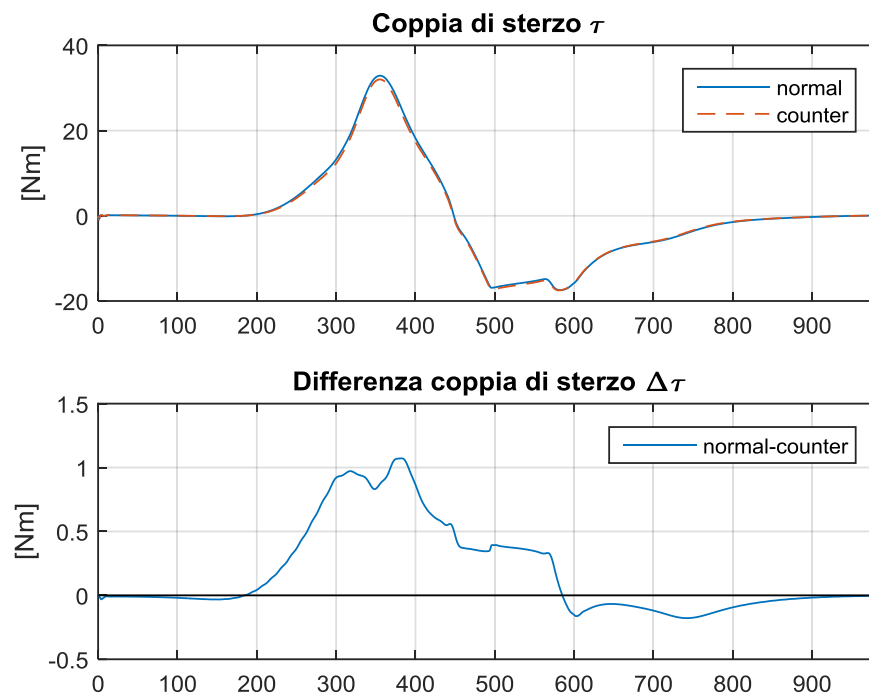


Figura 4.25: curva ad U, raggio 60 m, asfalto bagnato. Coppia di sterzo applicata al manubrio. Il motore controrotante comporta un valore inferiore della coppia di sterzo in ingresso di curva, risultando in una sensazione di maggiore maneggevolezza per il pilota.

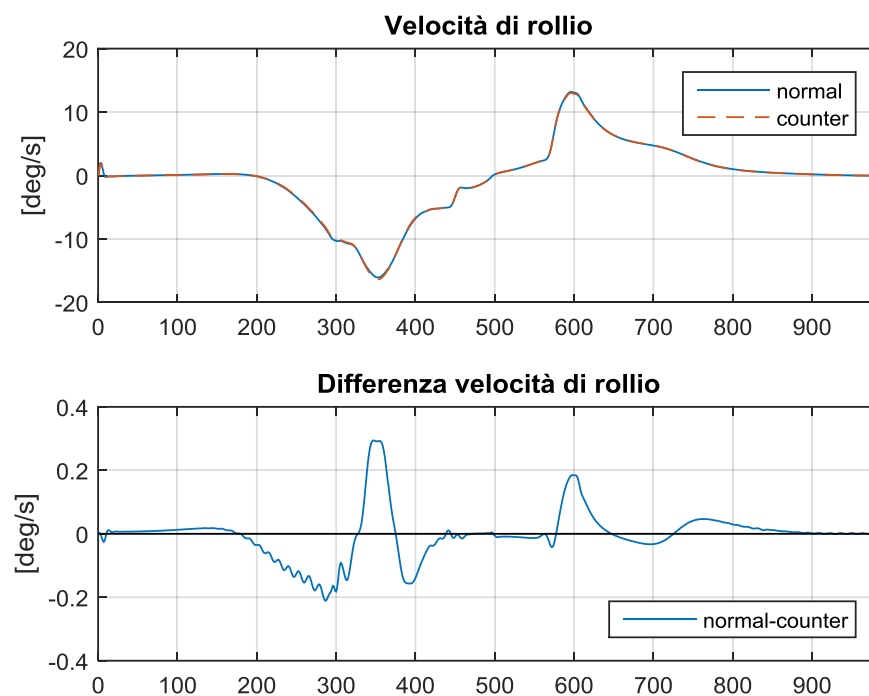


Figura 4.26: curva ad U, raggio 60 m, asfalto bagnato. Velocità di rollio.

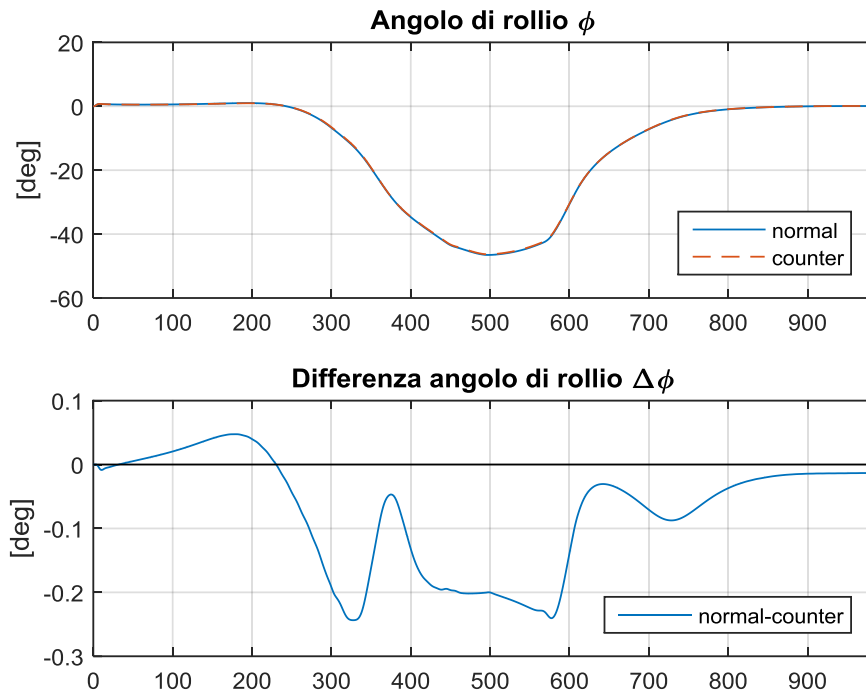


Figura 4.27: curva ad U, raggio 60 m, asfalto bagnato. Angolo di rollio. Il motore controrotante comporta un minore angolo di rollio a centro curva, seppur la differenza sia molto piccola.

È possibile effettuare un confronto oggettivo fra le due soluzioni anche mediante l'utilizzo di un opportuno coefficiente che misuri le capacità di maneggevolezza del veicolo nell'esecuzione della manovra considerata. Un parametro adatto a questo scopo è il coefficiente di Koch, definito dalla seguente relazione.

$$Koch\ index = \frac{\tau_{peak}}{\dot{\phi}_{peak} \cdot V} \quad (4.3)$$

dove τ_{peak} è il valore di picco della coppia di sterzo che si verifica in ingresso di curva, $\dot{\phi}_{peak}$ è il corrispondente picco della velocità di rollio e V è la velocità di avanzamento.

I valori che si ottengono sono mostrati in Tabella 4.1.

Tabella 4.1

Aderenza	Motore	$\tau \max$	$\dot{\varphi} \max$	V	Koch
–	–	[Nm]	[rad/s]	[m/s]	[N*s ² /rad]
Asciutto	Tradizionale	62.0883	0.3724	53.9902	3.0881
	Controrotante	61.7363	0.3778	53.9876	3.0268
Bagnato	Tradizionale	32.8817	0.2804	43.7003	2.6834
	Controrotante	32.0116	0.2855	43.6928	2.5662

Come previsto in base alle osservazioni precedenti, la motocicletta equipaggiata con motore controrotante risulta più maneggevole in entrambe le condizioni di aderenza: un valore piccolo dell'indice di Koch suggerisce infatti che, con un'elevata velocità di avanzamento, si ottiene un'alta velocità di rollio con un picco modesto della coppia di sterzo.

4.3 Simulazioni di tempo minimo: percorso ad anello

Al fine di verificare l'effettiva variazione dell'angolo di rollio determinata dal differente verso di rotazione del motore, prevista dalla formula (4.2), si sono svolte delle simulazioni su un tracciato circolare di raggio 60 m, del quale vengono percorsi due giri completi. Un tale circuito permette di osservare l'assetto relativo ad una condizione che approssima la curva in stato stazionario.

4.3.1 Risultati delle simulazioni su percorso ad anello

I risultati ottenuti sono riportati nelle figure seguenti. Come previsto dalla teoria, l'inversione del momento giroscopico prodotto dal motore in curva a causa del moto di imbardata comporta un minore angolo di rollio per la motocicletta con motore controrotante: gli angoli ottenuti nelle simulazioni effettuate con le due diverse configurazioni di motore differiscono di 0.19° su asfalto asciutto e di 0.20° su asfalto bagnato.

È possibile confrontare questi risultati con la stima teorica fornita dall'espressione (4.2). Il raggio di curvatura della traiettoria viene calcolato come:

$$R_c = \frac{V_G}{\dot{\psi}} \quad (4.4)$$

dove V_G è la velocità assoluta del baricentro e $\dot{\psi}$ la velocità di imbardata. Sostituendo i valori ricavati dalle simulazioni di tempo minimo, risulta un raggio di 55.6 m su asfalto asciutto e di 55.7 m su asfalto bagnato. La valutazione dell'espressione (4.2) fornisce valori della differenza dell'angolo di rollio a regime pari a 0.16° e 0.17° rispettivamente nel caso di motore convenzionale e controrotante, risultati compatibili con quanto ottenuto dalle simulazioni.

Si può notare che la variazione relativa dell'angolo di rollio fra motore tradizionale e motore controrotante è piuttosto contenuta, pari a circa lo 0.3–0.4%: si ricorda, infatti, la grande influenza del momento giroscopico delle ruote rispetto a quello del motore. La maggiore differenza osservabile nel caso di bassa aderenza è spiegabile considerando che, come si può notare nella formula (4.2), la variazione dell'angolo di rollio rispetto al valore ideale, non influenzato dagli effetti giroscopici del motore, dipende dal coseno dell'angolo di rollio e tale angolo risulta minore nel caso di asfalto bagnato.

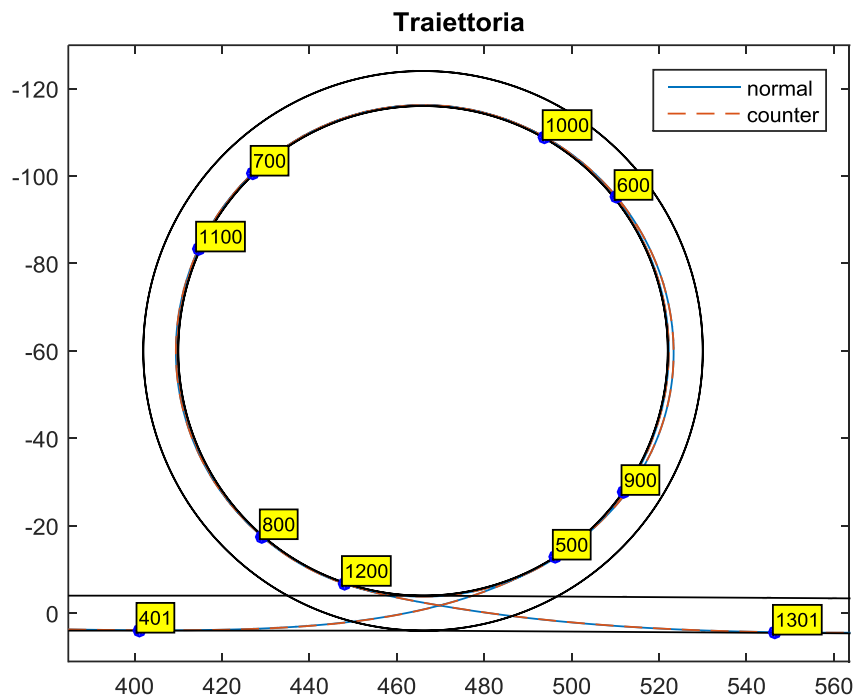


Figura 4.28: circuito ad anello, raggio 60 m, asfalto asciutto. Tracciato e traiettoria.

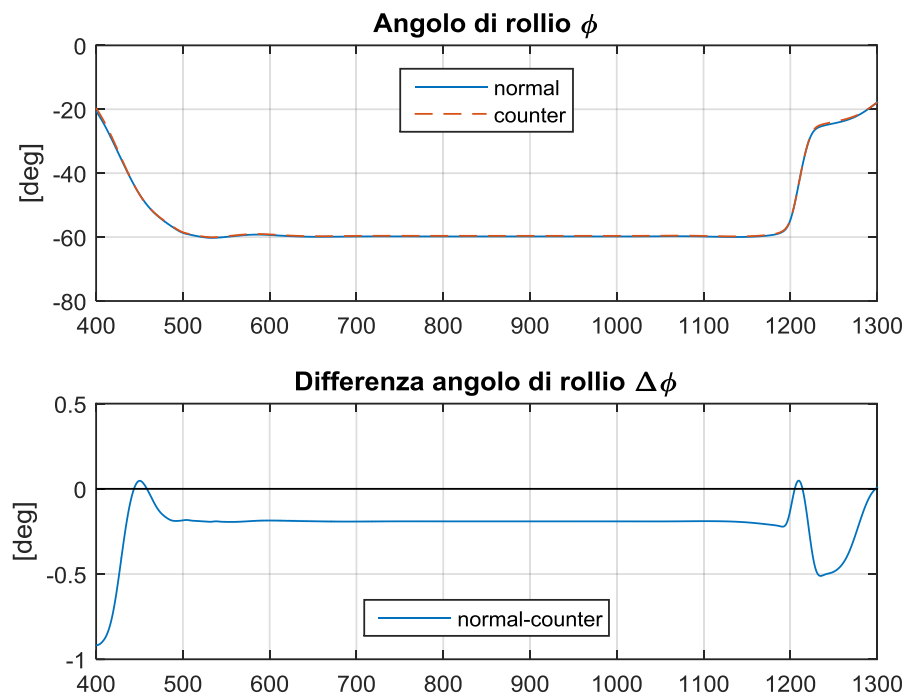


Figura 4.29: circuito ad anello, raggio 60 m, asfalto asciutto. Angolo di rollio.

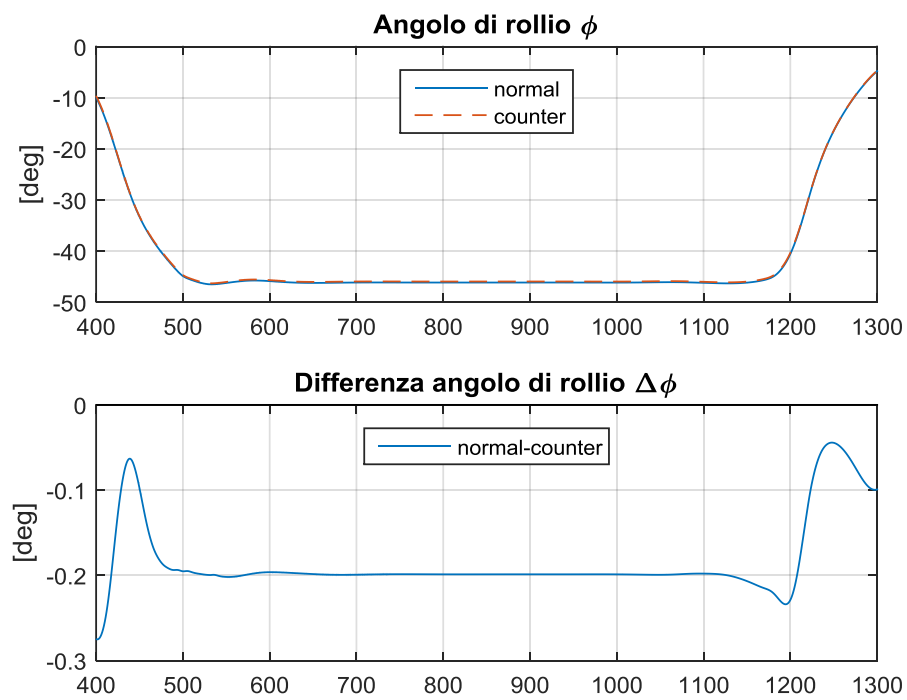


Figura 4.30: circuito ad anello, raggio 60 m, asfalto bagnato. Angolo di rollio.

4.4 Simulazioni di tempo minimo: chicane

Allo scopo di studiare in modo più approfondito le differenti caratteristiche di manovrabilità e maneggevolezza delle due soluzioni (tradizionale e controrotante), si è simulata la manovra di cambio di corsia, riprodotta mediante un circuito costituito da una chicane. In particolare, l'obiettivo è stato osservare il diverso comportamento riguardo ai seguenti aspetti: la coppia di sterzo applicata dal pilota sul manubrio e la massima velocità di rollio. Per il motociclo con motore controrotante, ci si aspetta una maggiore velocità di rollio e una minore coppia di sterzo, in quanto il momento giroscopico del motore, opposto a quello delle ruote, fa sì che il momento globale risulti inferiore rispetto al caso del motore convenzionale.

4.4.1 Risultati delle simulazioni su chicane

In condizioni di elevata aderenza (asfalto asciutto), la motocicletta con motore controrotante ha terminato la manovra in 15.022 s, 0.019 s più velocemente rispetto al veicolo tradizionale.

Da Figura 4.32 emerge che la soluzione controrotante consente una maggiore velocità in corrispondenza del cambio di direzione. Si noti, inoltre, il vantaggio del motore rotante nella prima fase dell'uscita di curva, fenomeno già osservato nelle simulazioni su curva ad U.

In Figura 4.33 si può osservare che il motore controrotante richiede generalmente una minore coppia di sterzo da parte del pilota: è possibile notare questa differenza già nella fase di ingresso in curva, seppure il picco (220 m circa dal punto iniziale) sia pressoché lo stesso per le due soluzioni di motore, mentre la differenza massima (pari al 6%) si verifica in corrispondenza del cambio di direzione (circa 300 m).

In Figura 4.34 si nota che il veicolo con il motore controrotante è in grado di esprimere una maggiore velocità di rollio in tutte le fasi della manovra, con una differenza relativa del 6.5% in ingresso (220 m) e del 4.2% nel cambio di direzione (300 m).

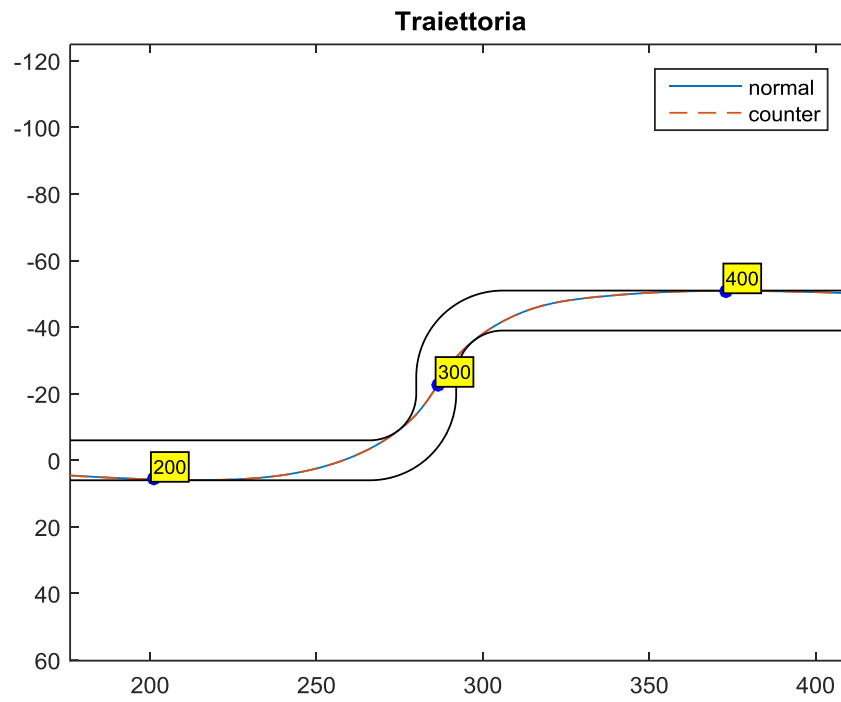


Figura 4.31: chicane, asfalto asciutto. Tracciato e traiettoria.

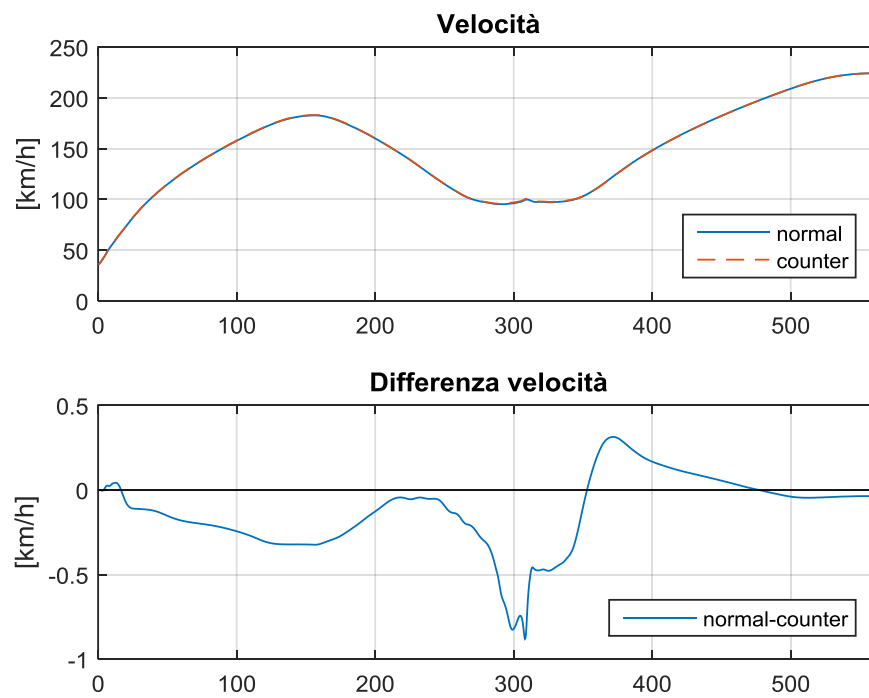


Figura 4.32: chicane, asfalto asciutto. Velocità di avanzamento.

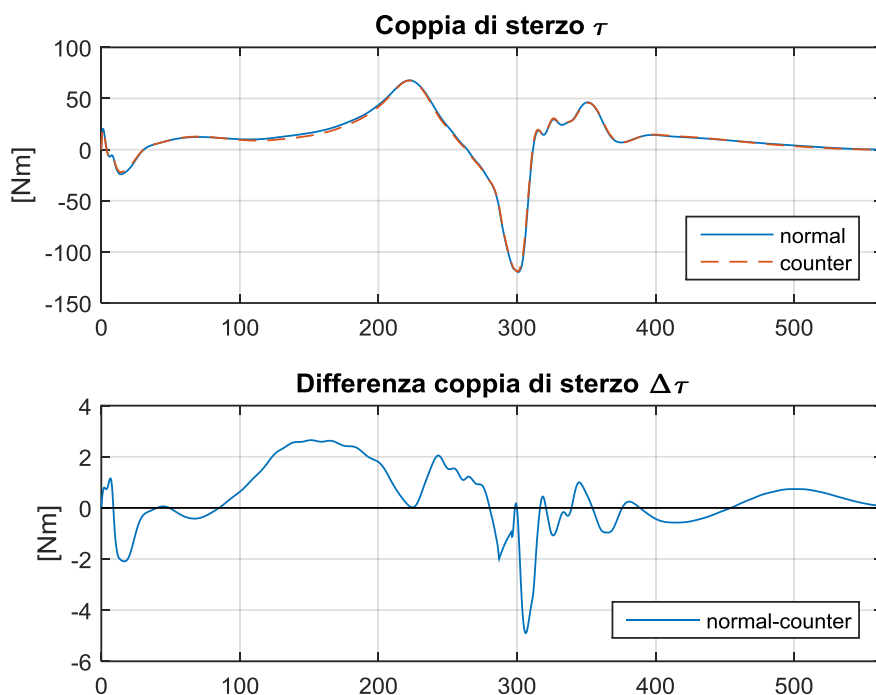


Figura 4.33: chicane, asfalto asciutto. Coppia di sterzo applicata al manubrio.

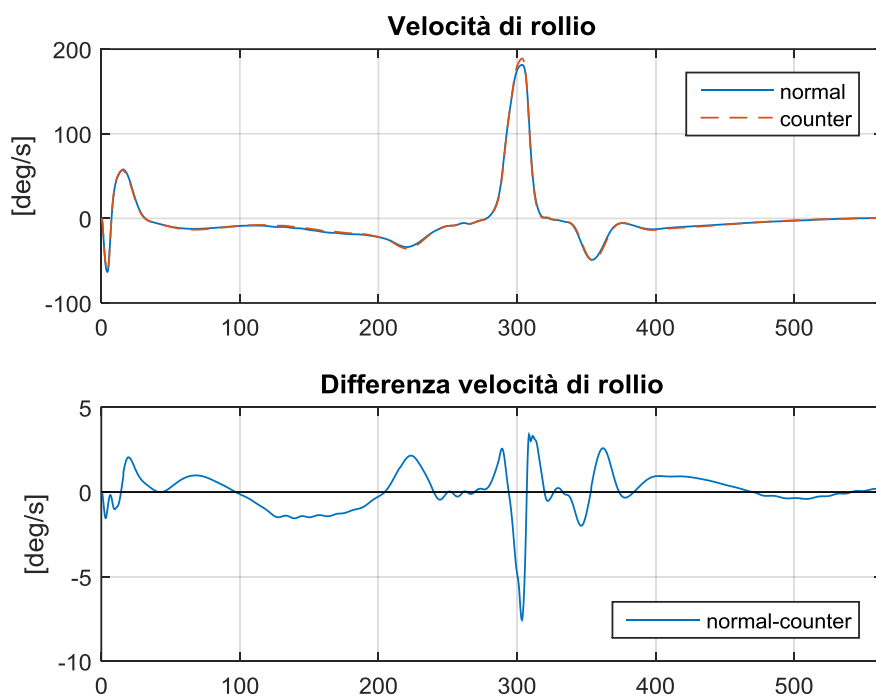


Figura 4.34: chicane, asfalto asciutto. Velocità di rollio.

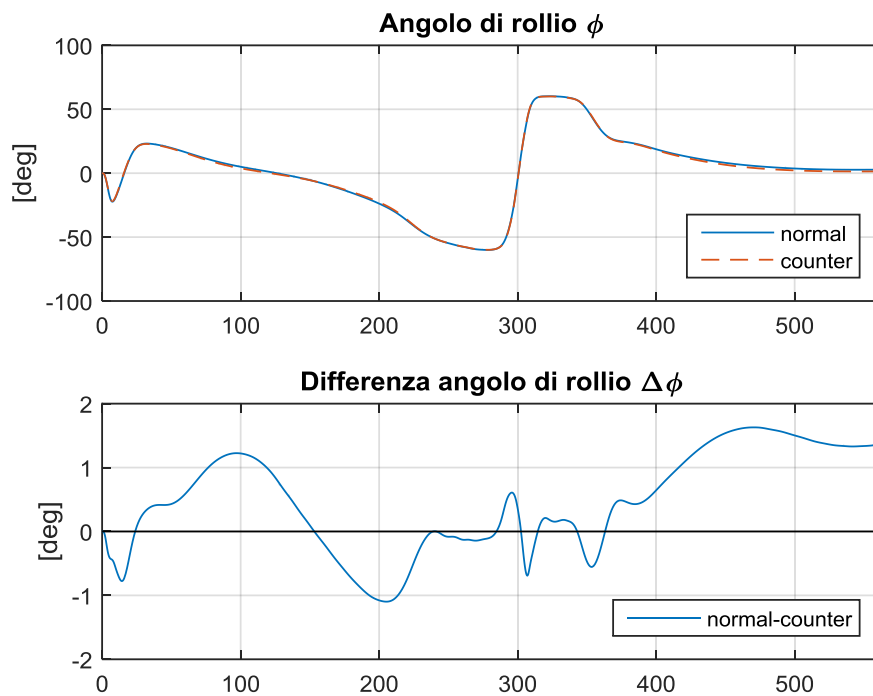


Figura 4.35: chicane, asfalto asciutto. Angolo di rollio.

Su asfalto bagnato, il motore rotante è più rapido di 0.012 s, con un tempo finale di 18.536 s. Rimangono valide le osservazioni fatte per le condizioni di asciutto, a parte per quanto riguarda la velocità a centro curva, che in questo caso non evidenzia differenze significative (Figura 4.36). La coppia di sterzo è minore nel caso controrotante (Figura 4.37), con differenze che vanno dal 2% in ingresso curva, fino a circa l'6.5% nel cambio di direzione. Infine, con la soluzione controrotante è possibile una maggiore velocità di rollio nelle fasi di ingresso e al centro della chicane (Figura 4.38), con differenze relative attorno al 3%.

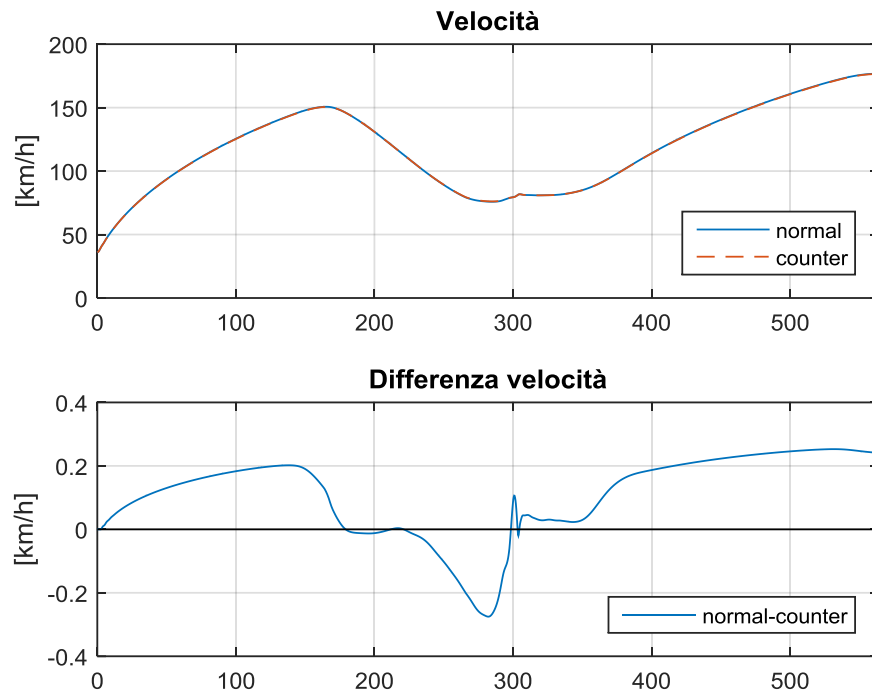


Figura 4.36: chicane, asfalto bagnato. Velocità di avanzamento.

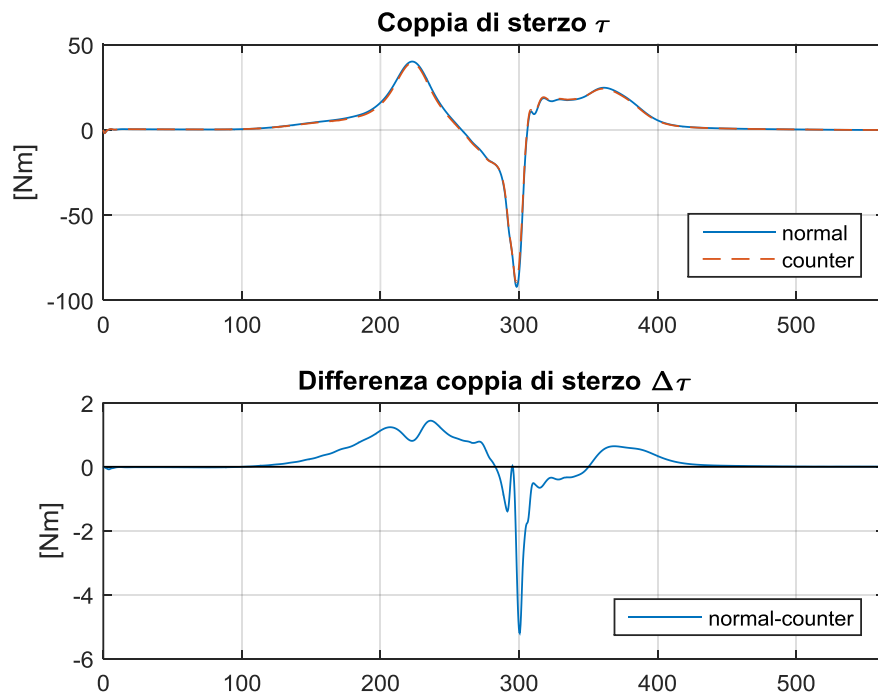


Figura 4.37: chicane, asfalto bagnato. Coppia di sterzo applicata al manubrio.

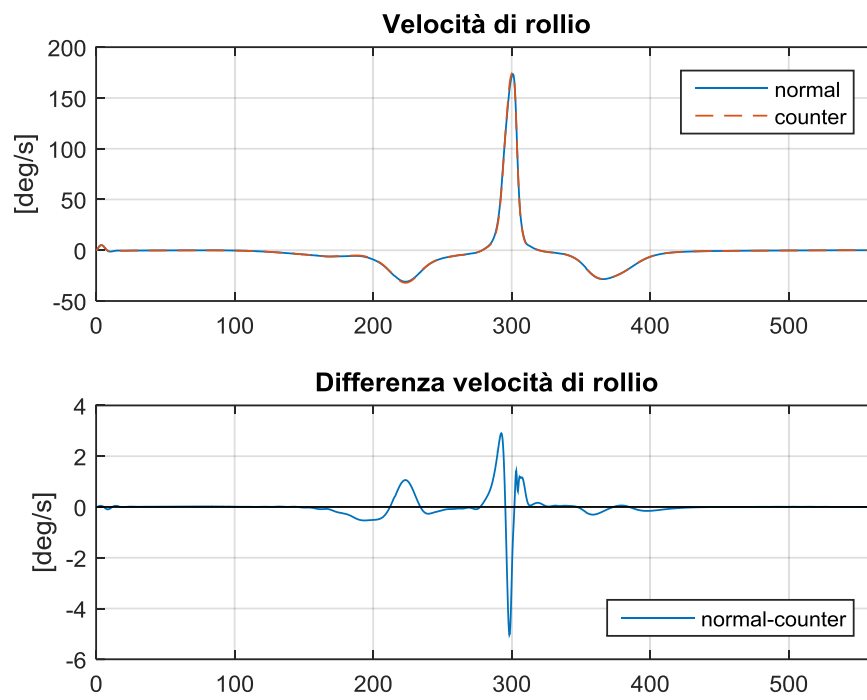


Figura 4.38: chicane, asfalto bagnato. Velocità di rollio.

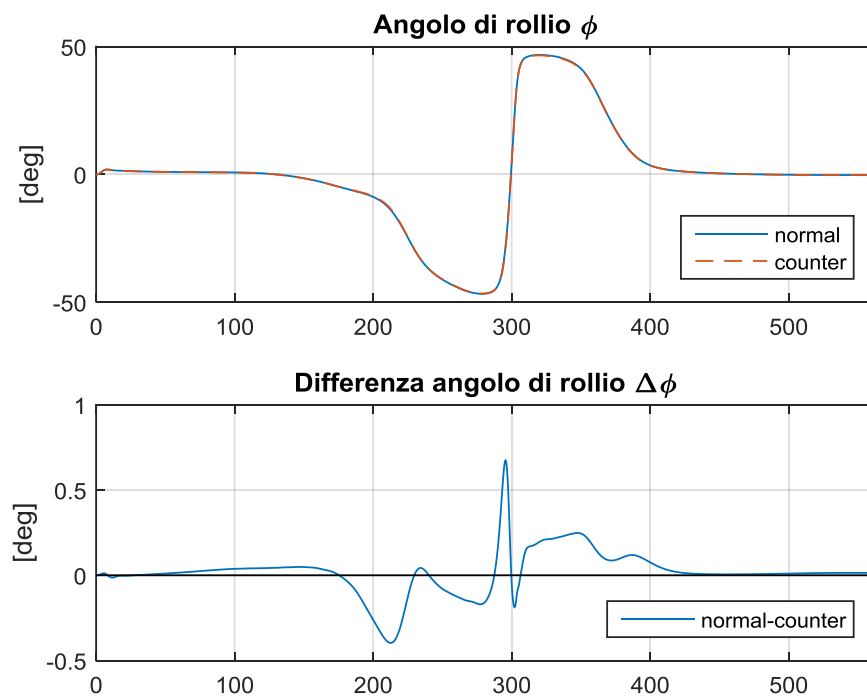


Figura 4.39: chicane, asfalto bagnato. Angolo di rollio.

Come si è fatto per la manovra di inversione (curva ad U), anche per la chicane è possibile quantificare con un opportuno coefficiente le doti di maneggevolezza del veicolo. In questo caso si fa uso del coefficiente di cambio di corsia, definito come segue:

$$\text{Lane Change Roll Index (LCRI)} = \frac{\tau_{p-p}}{\dot{\phi}_{p-p} \cdot V_{avg}} \quad (4.5)$$

dove τ_{p-p} e $\dot{\phi}_{p-p}$ sono le differenze da picco a picco della coppia di sterzo e della velocità di rollio, calcolate fra le fasi di ingresso e cambio di direzione, mentre V_{avg} è la velocità media durante la manovra. I risultati sono mostrati in Tabella 4.2.

Tabella 4.2

Aderenza	Motore	τ_{p-p}	$\dot{\phi}_{p-p}$	V_{avg}	LCRI
–	–	[Nm]	[rad/s]	[m/s]	[N*s²/rad]
Asciutto	Tradizionale	187.4016	3.7566	27.6716	1.8028
	Controrotante	186.8294	3.9239	27.7876	1.7135
Bagnato	Tradizionale	132.1536	3.5689	22.3502	1.6568
	Controrotante	128.5511	3.6108	22.3716	1.5914

La velocità è stata calcolata come media dei valori assunti in un intervallo di circa 100 m attorno al centro della chicane. In accordo con le osservazioni precedenti, in qualunque condizione di aderenza, la soluzione controrotante ottiene un valore inferiore del coefficiente di cambio di corsia e risulta pertanto la più maneggevole; essa è infatti in grado, ad una data velocità di avanzamento, di raggiungere maggiori variazioni di velocità di rollio pur con un input di coppia di sterzo inferiore.

4.5 Considerazioni conclusive sul motore controrotante

Il motore tradizionale risulta preferibile nelle situazioni in cui la criticità è costituita dall'aderenza degli pneumatici, tipicamente su asfalto bagnato: in tal caso, infatti, il maggiore trasferimento di carico al posteriore garantisce una migliore motricità e quindi una accelerazione maggiore. Questa soluzione può risultare conveniente anche in brevi rettilinei che seguono l'uscita da una curva, condizione in cui è richiesta la massima accelerazione a motocicletta ancora rollata.

La soluzione controrotante appare invece vantaggiosa in condizioni di aderenza elevata (asfalto asciutto), grazie alla minore tendenza all'impennamento. Inoltre, la minore coppia di sterzo e la maggiore velocità di rollio nei transitori, suggeriscono una sensazione di maggiore maneggevolezza per questo tipo di motore.

5 Studio del sistema di sterzo posteriore

L'idea di usare un sistema di sterzo applicato alle ruote posteriori per migliorare stabilità e maneggevolezza proviene dal mondo dei veicoli a quattro ruote. Un primo esempio è costituito dal veicolo fuoristrada militare 170VL costruito da Mercedes nel 1938. Nel 1962, uno studio di Mazda ha investigato gli effetti stabilizzanti di un sistema auto-sterzante posteriore. Negli anni '80, i maggiori costruttori giapponesi hanno realizzato vari esempi di autoveicoli a quattro ruote sterzanti, sia a livello di prototipo (Mazda MX-02) che di prodotto commerciale (Nissan e Honda). A partire dalla fine degli anni '90, anche i costruttori europei e americani si sono interessati a questa tecnologia.

I sistemi di sterzo posteriore che sono stati sperimentati e costruiti si possono suddividere nelle seguenti due famiglie:

- sistemi passivi, in cui il moto di sterzata delle ruote posteriori, limitato da meccanismi di tipo molla-smorzatore, è indotto dalle forze di contatto degli pneumatici;
- sistemi attivi, in cui lo sterzo posteriore viene controllato in funzione di altri parametri, come l'angolo di sterzo anteriore o la velocità di avanzamento.

Dagli studi effettuati in ambito automobilistico, è possibile ricavare alcune importanti linee guida sul comportamento e sulle caratteristiche dei veicoli dotati di un sistema di sterzo posteriore. A bassa velocità, il controllo dello sterzo posteriore dovrebbe produrre un'azione controsterzante al fine di ridurre il raggio di curvatura e rendere più agevoli le manovre a velocità ridotta. Alle velocità più alte, al contrario, le ruote anteriori e posteriori dovrebbero sterzare nella medesima direzione, in modo tale da limitare la velocità di imbardata e conseguire una maggiore stabilità.

In campo motociclistico, la possibilità di applicare un sistema di sterzo alla ruota posteriore è già stata presa in considerazione, come dimostrato dai numerosi brevetti reperibili. Ciononostante, la letteratura scientifica del settore riporta solo pochi esempi di studi su questa tematica. In effetti, malgrado le potenzialità offerte dallo sterzo posteriore in termini di miglioramento delle prestazioni, i costruttori hanno sempre preferito la soluzione classica, che garantisce sicurezza, affidabilità, semplicità costruttiva e convenienza economica. Vale la pena di puntualizzare che una motocicletta, se paragonata ad un autoveicolo, è intrinsecamente molto più sensibile agli effetti di un sistema di sterzo posteriore, a causa della minore inerzia

all'imbardata e al passo più contenuto. Ciò rende più complesso lo sviluppo di una affidabile tecnologia a due ruote sterzanti.

Una prima ricerca, realizzata all'Università di Tokyo [6], ha utilizzato un semplice modello a quattro gradi di libertà (Sharp, 1971) per studiare un sistema in grado di garantire un rapporto costante fra gli angoli di sterzo anteriore e posteriore. I risultati mostrano che un valore positivo del rapporto di sterzo aumenta la stabilità del weave, mentre si riduce quella del wobble. Lo studio ha indagato anche sull'effetto dell'angolo di inclinazione dell'asse di sterzo posteriore, mostrando una moderata influenza sulla stabilità.

Più tardi, il lavoro di due ricercatori della Honda [7] ha analizzato l'effetto stabilizzante sul modo di weave di un sistema auto-sterzante o passivo. Gli autori ipotizzano che le oscillazioni di weave siano sostenute dalla forza laterale di sideslip dello pneumatico posteriore e che pertanto sia possibile conseguire una maggiore stabilità riducendo l'angolo di deriva. Questo principio è stato applicato per stabilizzare una motocicletta sportiva stradale di media cilindrata, montando la ruota posteriore su un sistema di sterzo inclinato in modo tale da generare un'avancorsa positiva: grazie a tale geometria, la forza laterale dello pneumatico posteriore produce un effetto allineante che tende a ridurre l'angolo di deriva. Lo studio presenta sia simulazioni che dati sperimentali, suggerendo che Honda realizzò effettivamente un prototipo di motocicletta a due ruote sterzanti. I risultati hanno confermato che il modo di weave risulta molto stabilizzato dalla presenza dello sterzo posteriore, tuttavia i collaudatori non hanno apprezzato il grande cambiamento nel comportamento dinamico del veicolo indotto dalla presenza di questo sistema.

Uno studio effettuato presso l'Università di Padova [8] ha riguardato un sistema di sterzo posteriore attivo, in cui l'angolo di sterzo posteriore è funzione dell'angolo di sterzo anteriore attraverso una equazione differenziale del primo ordine. Ancora una volta, si è osservata l'incrementata stabilità del modo di weave; inoltre, l'utilizzo del metodo della manovra ottima ha permesso di evidenziare che lo sterzo posteriore consente anche un incremento delle prestazioni in termini di tempo sul giro rispetto al veicolo tradizionale.

Un lavoro più recente, presso la medesima Università [9], ha confrontato un sistema passivo e uno attivo in termini sia di stabilità che di effetti sulla maneggevolezza. La stabilità, studiata tramite l'analisi della risposta a eccitazioni impulsive, è stata valutata mediante un indice basato sull'energia cinetica associata al moto di rollio, in modo tale da poter confrontare le prestazioni di diversi sistemi indipendentemente da quali modi di vibrare vengono eccitati. Inoltre, a differenza degli studi precedenti, questa indagine si è concentrata su motociclette di peso e dimensioni elevati, caratterizzate quindi da passo, inerzie e flessibilità strutturali più elevati. Si

è trovato che il sistema passivo, riduce le oscillazioni di weave indotte da un impulso laterale. Al contrario, il wobble non risulta stabilizzato e anzi diventa instabile in frenata, richiedendo l'inibizione dello sterzo posteriore all'attivazione dei freni. Le simulazioni di maneggevolezza hanno mostrato che il veicolo dotato del sistema di sterzo posteriore passivo è soggetto a oscillazioni inaspettate in fase di accelerazione, il che altera negativamente la percezione del pilota. Il sistema attivo aumenta la stabilità del modo di weave grazie al trasferimento di energia al modo di wobble; il rapporto fra gli angoli di sterzo determina la quantità di energia trasferita. Questo fenomeno spiega anche l'instabilità osservabile in condizioni di frenata, fase in cui il wobble risulta di per sé poco stabile. Un ulteriore effetto del sistema attivo è la riduzione della frequenza di weave all'aumentare del rapporto fra gli sterzi, il che può facilitare il controllo da parte del pilota una volta che le oscillazioni fossero innescate. Per quanto riguarda la maneggevolezza, il sistema attivo si comporta in modo neutrale durante l'accelerazione, non modificando le sensazioni del pilota rispetto ad un veicolo convenzionale privo di sterzo posteriore.

Il lavoro qui presentato mira ad approfondire ulteriormente la conoscenza riguardo agli effetti che un sistema di sterzo posteriore può avere sul comportamento dinamico di una motocicletta. Per fare questo è stata svolta un'analisi completa di questo sistema, comprendente lo studio dell'assetto, l'analisi nel dominio della frequenza (stabilità dei modi di vibrare) e quella nel dominio del tempo (simulazioni di tempo minimo).

5.1 Analisi cinetostatica

La prima fase dello studio riguardante il sistema di sterzo posteriore applicato ad un motociclo ha previsto l'analisi cinetostatica del sistema, ossia l'esame dell'assetto all'equilibrio in curva. Per fare questo, si è utilizzato il software XOptima per risolvere la configurazione di equilibrio corrispondente ad una curva percorsa in stato stazionario. L'accelerazione laterale (indicata con " a_y ") è stata fissata a 10 m/s^2 mentre la velocità (indicata con " V_0 ") è stata variata da 10 a 30 m/s con incrementi di 5 m/s (la velocità è intesa come risultante delle componenti u e v definite nel paragrafo 3.1.2). Per quanto riguarda lo sterzo posteriore, è stato imposto un valore fisso per il rapporto fra gli angoli di sterzo posteriore e anteriore; in particolare, per questo parametro, nominato "Steer Ratio" (SR), si sono scelti valori compresi fra -0.5 e $+0.5$, con incrementi di 0.1. SR compare nella seguente espressione, che viene aggiunta al sistema per rendere possibile la soluzione del problema di equilibrio:

$$\delta_r = SR \cdot \delta \quad (5.1)$$

Si noti che SR ha un significato analogo al coefficiente K_δ che compare nell'espressione (3.16). Si evidenzia inoltre che, quando SR assume valori positivi, le rotazioni delle ruote anteriore e posteriore sono concordi (i.e. entrambe orarie o entrambe antiorarie), al contrario a valori negativi di SR corrispondono rotazioni opposte in verso per le due ruote.

5.1.1 Risultati dell'analisi cinetostatica

Figura 5.1 mostra l'andamento dell'angolo di sterzo anteriore al variare dei parametri sopra citati. L'osservazione di questa grandezza è finalizzata principalmente a verificare che la configurazione di equilibrio trovata corrisponda a quella aspettata: in particolare, si è controllato che l'angolo di sterzo sia sempre positivo, cioè rivolto all'interno della curva, come in effetti accade. In accordo con quanto è atteso, l'angolo di sterzo anteriore è maggiore per le configurazioni con $SR > 0$ e per le velocità più basse. Si nota, inoltre, come il parametro SR influenzi maggiormente il valore all'equilibrio della variabile studiata per le basse velocità: tuttavia si può osservare che fra il valore massimo di δ , ottenuto per $SR = +0.5$, e il valore minimo, corrispondente a $SR = -0.5$, esiste un rapporto, pari a circa 3.4, che non è influenzato in modo significativo dalla velocità.

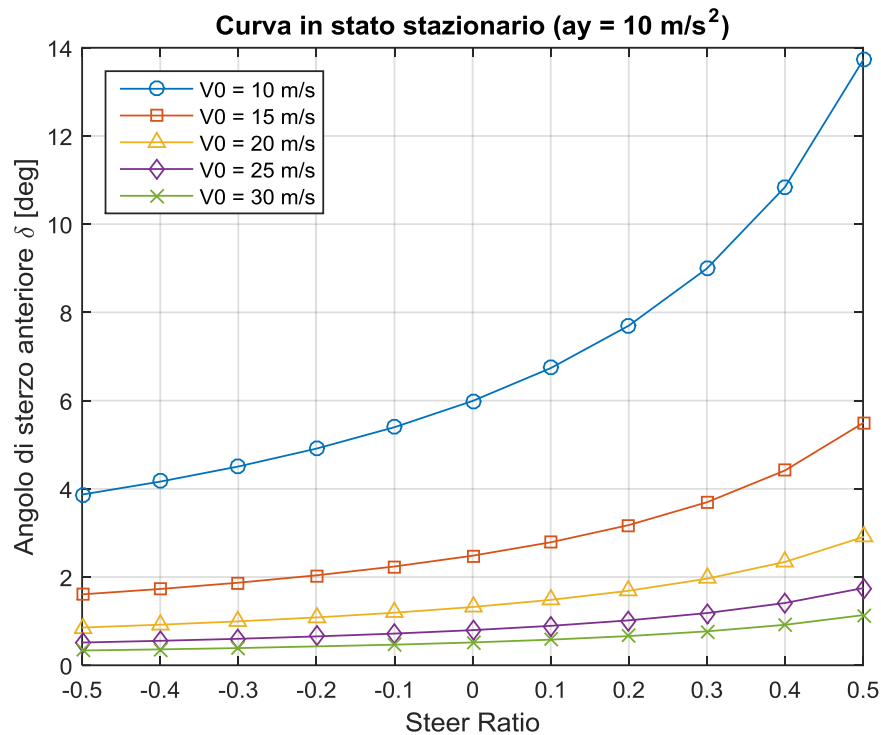


Figura 5.1: configurazione di equilibrio, angolo di sterzo anteriore.

Figura 5.2 riporta l'evoluzione dell'angolo di rollio della motocicletta. Valori positivi di SR consentono di raggiungere l'equilibrio ad un angolo inferiore, ma questo effetto è sensibile solo a bassa velocità e per SR elevato: ad una velocità di 10 m/s , $SR = +0.5$ produce un angolo circa 1° inferiore rispetto alla soluzione priva di sterzo posteriore ($SR = 0$). A velocità più elevate, la variazione è dell'ordine del decimo di grado.

È possibile osservare che, a parità di SR , l'angolo di rollio aumenta al crescere della velocità. Ipotizzando che questo fenomeno possa essere dovuto agli effetti giroscopici delle ruote, si sono ripetute le simulazioni annullando i dati di inerzia delle stesse. I risultati, mostrati in Figura 5.3, suggeriscono tuttavia che sia un'altra la causa della differenza osservata, in quanto si ottiene il medesimo andamento generale, semplicemente traslato ad angoli di rollio circa 0.5° inferiori.

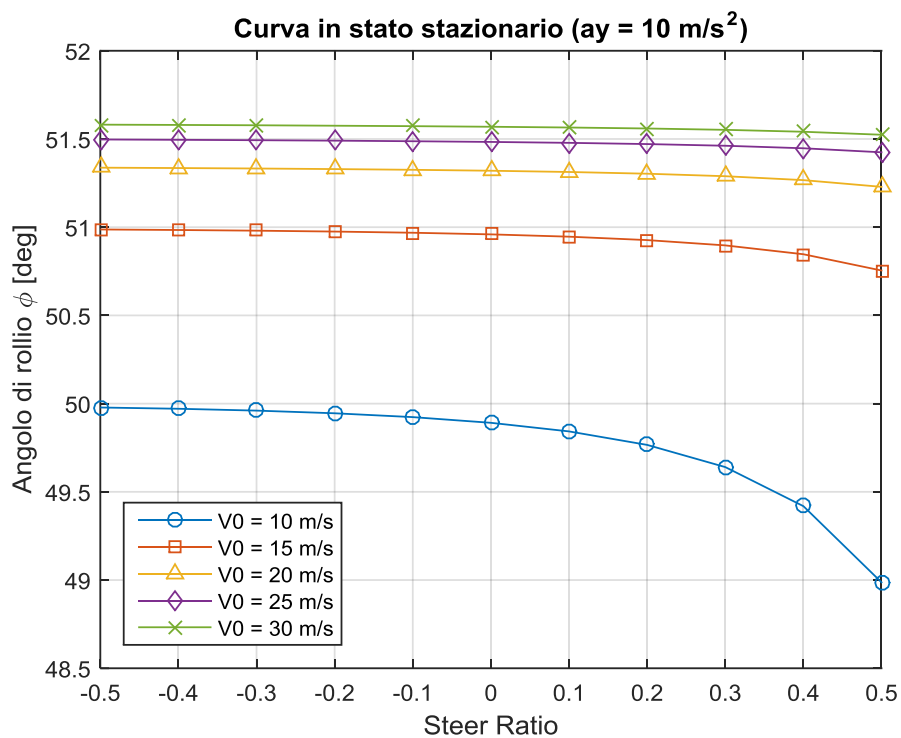


Figura 5.2: configurazione di equilibrio, angolo di rollio.

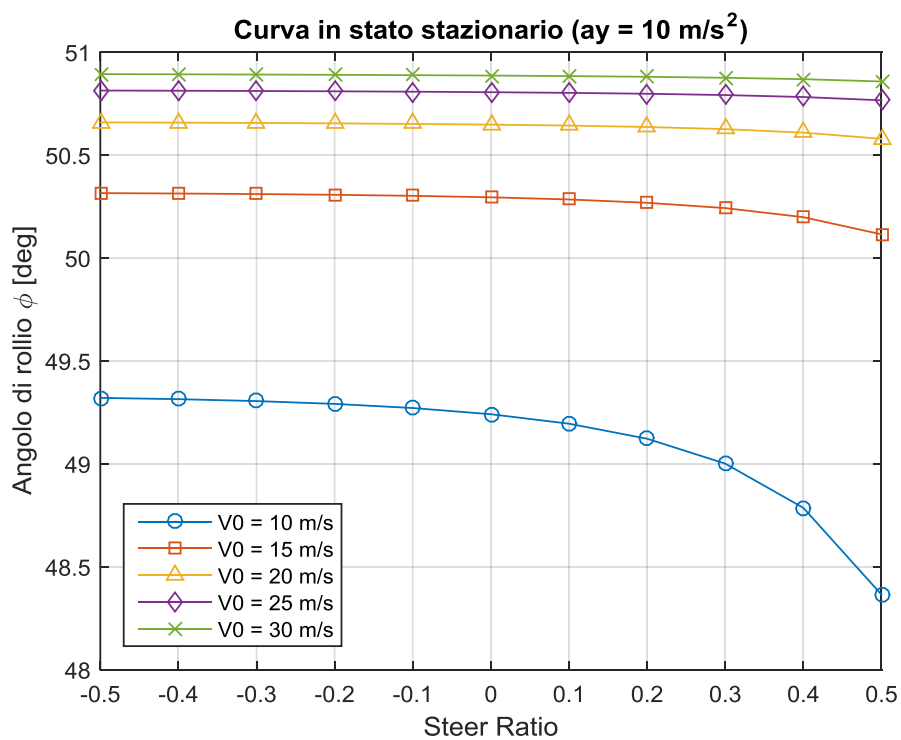


Figura 5.3: configurazione di equilibrio con effetti giroscopici delle ruote trascurati, angolo di rollio.

Figura 5.5 descrive la variazione dell'angolo di sideslip del veicolo, definito come:

$$\beta = \text{atan} \frac{v}{u} \quad (5.2)$$

dove u e v sono rispettivamente le velocità longitudinale e laterale (si vedano la sezione 3.1.2 e Figura 2.3 per ulteriori dettagli). Nello studio dell'assetto di un veicolo in curva in stato stazionario, si fa generalmente riferimento alla seguente classificazione del comportamento riguardante l'angolo di sideslip: la velocità a cui risulta $\beta = 0$ è nominata *velocità tangente*; per velocità inferiori a questo valore il veicolo percorre la traiettoria circolare nella configurazione detta *nose-out* (a cui corrisponde $\beta > 0$), mentre a velocità superiori si verifica l'assetto chiamato *nose-in* ($\beta < 0$). Le due diverse configurazioni sono rappresentate in Figura 5.4. Da Figura 5.5 è possibile osservare che anche il motociclo oggetto di questo studio presenta il comportamento tipico appena descritto. È inoltre possibile individuare il valore della velocità tangente, pari a 20 m/s qualora si consideri la motocicletta sprovvista di sterzo posteriore ($SR = 0$).

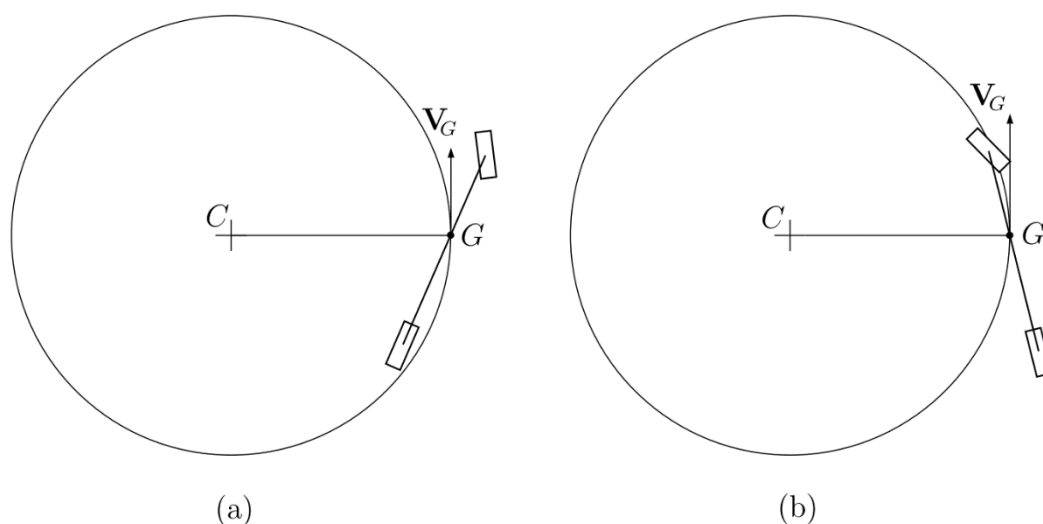


Figura 5.4: condizioni in curva in stato stazionario: (a) nose-out, (b) nose-in.

L'angolo di sideslip β è una delle grandezze maggiormente influenzate dall'azione del sistema di sterzo posteriore: all'aumentare di SR dal valore minimo -0.5 a quello massimo $+0.5$, l'angolo di sideslip tende ad aumentare; ancora una volta si rileva una maggiore influenza di SR a velocità ridotta. Si nota, poi, che l'assetto all'equilibrio prevede valori dell'angolo β sia

positivi che negativi e che all'aumentare della velocità cresce il valore di SR per il quale si verifica la transizione: i valori, ricavati per interpolazione lineare fra i punti corrispondenti alle simulazioni effettuate, sono riportati in Tabella 5.1.

Tabella 5.1

V0 [m/s]	SR t.c. $\beta=0$
10	β sempre positivo
15	-0.29
20	0.01
25	0.24
30	0.41

Una conseguenza di un valore non nullo dell'angolo di sideslip β è la nascita di un trasferimento di carico longitudinale dovuto alla componente ax^* dell'accelerazione laterale lungo il piano di simmetria del veicolo. Come si può osservare in Figura 5.6, quando l'equilibrio prevede $\beta > 0$ (configurazione nose-out), la componente ax^* è rivolta verso l'anteriore e provoca quindi un aumento del corrispondente carico verticale; al contrario, qualora si verifichi la condizione $\beta < 0$ (configurazione nose-in), la componente ax^* ha verso opposto e il trasferimento di carico conseguente avviene verso il posteriore. A conferma di quanto osservato, si vedano i risultati di Figura 5.7 e Figura 5.8, relativi ai carichi verticali sugli pneumatici: all'aumentare di SR , il carico anteriore aumenta e quello posteriore si riduce, avvicinando (soprattutto alla velocità più bassa fra quelle considerate) la condizione ideale di uguale distribuzione dei carichi sui due pneumatici.

Un ulteriore effetto legato alla presenza di un angolo di sideslip diverso da zero è relativo alla variazione della forza di resistenza aerodinamica. Una corretta caratterizzazione del veicolo dal punto di vista del comportamento aerodinamico richiederebbe una mappa che fornisca la variazione delle forze al variare dell'angolo di incidenza; tuttavia, una tale mappa non è disponibile nel modello utilizzato, che prevede invece la dipendenza delle forze aerodinamiche dalla componente della velocità del baricentro lungo il piano di simmetria della motocicletta. Tale componente risulta tanto minore quanto maggiore è il modulo dell'angolo β e ciò provoca una corrispondente riduzione della forza di drag all'allontanarsi di β dal valore nullo.

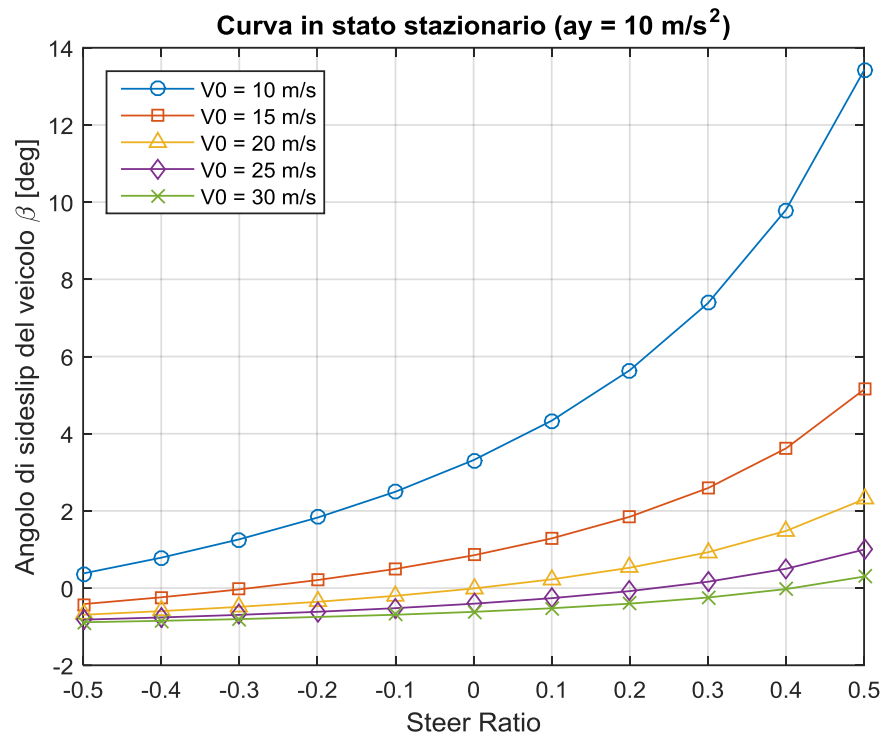


Figura 5.5: configurazione di equilibrio, angolo di sideslip del veicolo.

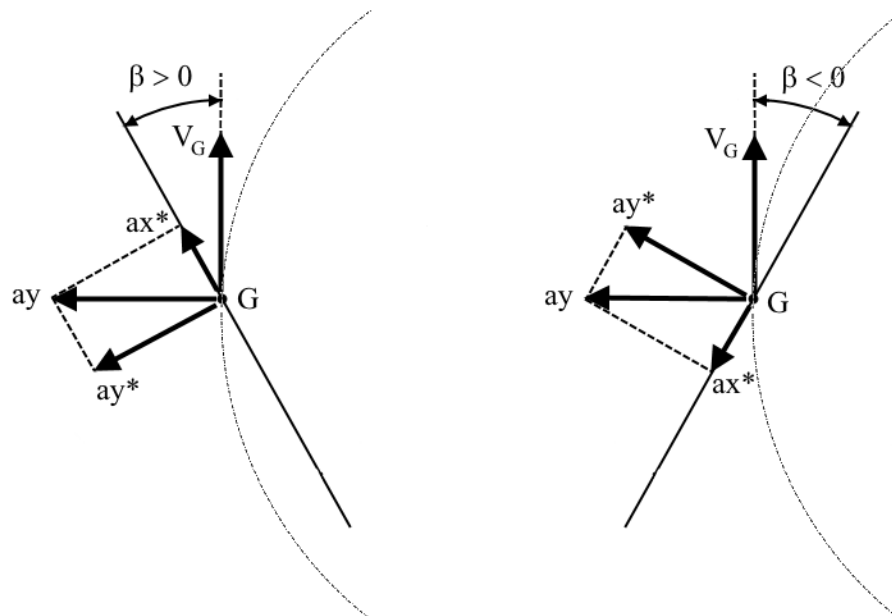


Figura 5.6: scomposizione dell'accelerazione laterale nelle sue componenti in terna mobile ax^* e ay^* .

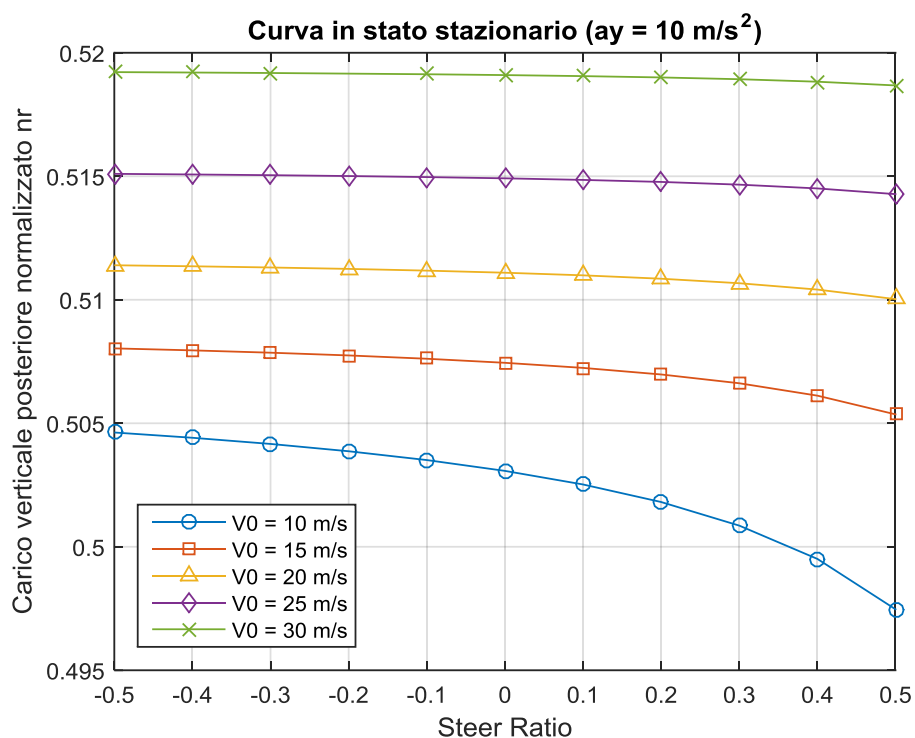


Figura 5.7: configurazione di equilibrio, carico verticale sullo pneumatico posteriore, normalizzato rispetto al peso totale Mg .

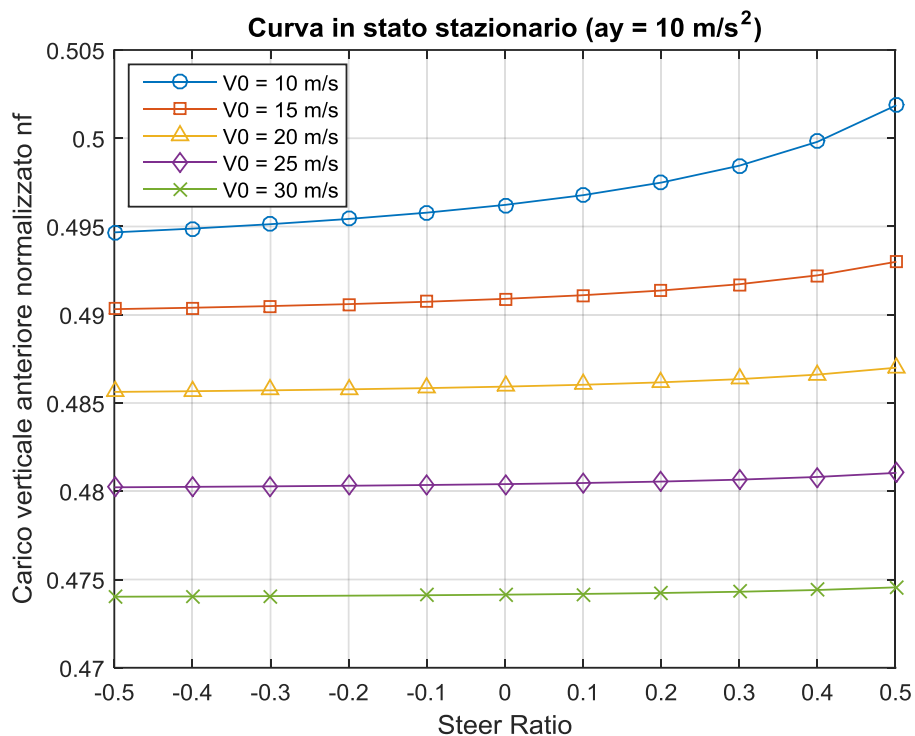


Figura 5.8: configurazione di equilibrio, carico verticale sullo pneumatico anteriore, normalizzato rispetto al peso totale Mg .

Figura 5.9 rappresenta l'angolo di deriva degli pneumatici anteriore e posteriore al variare dei parametri di controllo $V0$ e SR . Per la definizione dell'angolo di deriva λ si veda l'equazione (3.4). Si osserva una riduzione dell'angolo di deriva all'aumentare di SR : la variazione è più evidente a bassa velocità e per valori positivi elevati di SR , inoltre interessa principalmente lo pneumatico anteriore.

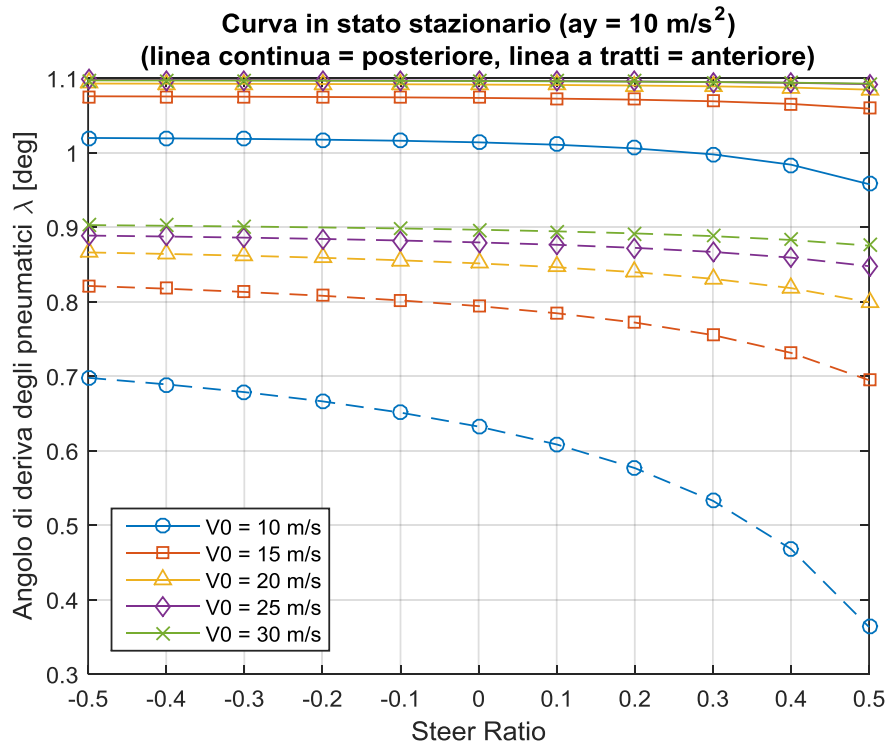


Figura 5.9: configurazione di equilibrio, angolo di deriva degli pneumatici.

Figura 5.10 mostra l'utilizzo della massima aderenza degli pneumatici mediante il parametro espresso dal membro di sinistra della disequazione (3.7). È possibile osservare che all'aumentare di SR si verifica un minore utilizzo dell'aderenza degli pneumatici: ricordando che le simulazioni svolte prevedono un valore fissato dell'accelerazione laterale, ciò indica che un rapporto positivo fra gli angoli di sterzo consente l'ottenimento di maggiori accelerazioni laterali prima che venga raggiunto il limite di aderenza degli pneumatici.

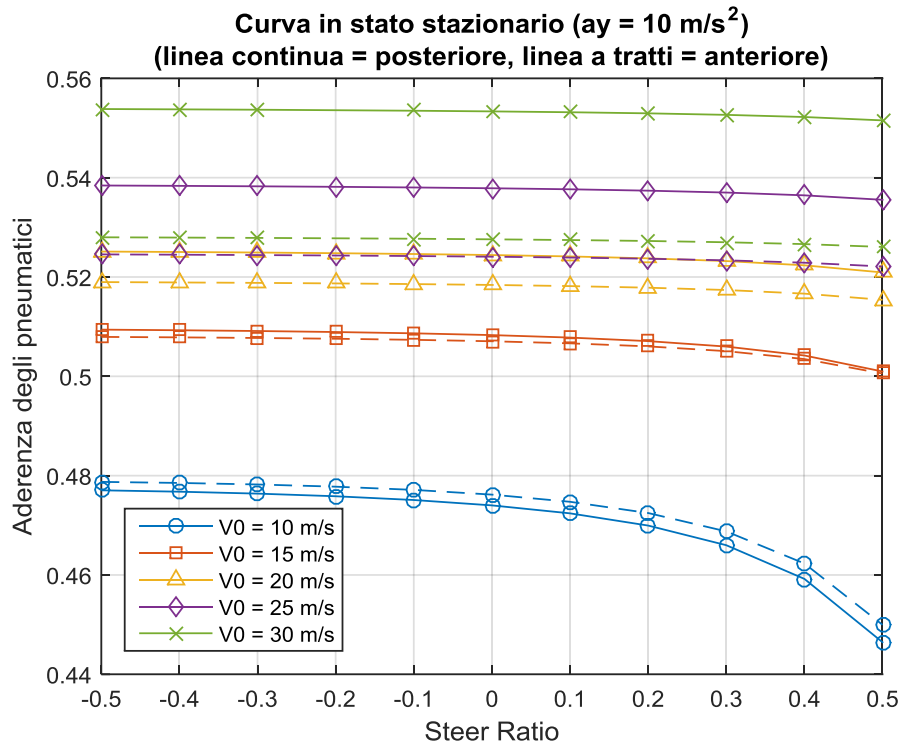


Figura 5.10: configurazione di equilibrio, utilizzo degli pneumatici.

Quanto discusso è confermato dai risultati di Figura 5.11, Figura 5.12, Figura 5.13 e Figura 5.14, in cui sono riportati i punti dell'ellisse di aderenza utilizzati nella percorrenza della curva in stato stazionario. In particolare, osservando i grafici relativi allo pneumatico posteriore, si nota che all'aumentare di SR non solo si riduce la componente laterale della forza generata dallo pneumatico, ma anche la componente longitudinale risulta inferiore: ciò suggerisce che il mantenimento di una velocità costante richiede una forza di spinta minore.

Allo scopo di verificare se questo fenomeno sia legato alla variazione della forza aerodinamica connessa con il diverso valore assunto dall'angolo di sideslip del veicolo, si sono ripetute le simulazioni annullando le forze aerodinamiche. I risultati, riportati in Figura 5.15, Figura 5.16, Figura 5.17 e Figura 5.18, mostrano che anche in questo caso si ottiene il medesimo andamento qualitativo già osservato in precedenza, con una riduzione di entrambe le componenti della forza dello pneumatico posteriore all'aumentare di SR . Questo suggerisce l'esistenza di altri fattori, oltre a quello aerodinamico, che influenzano la resistenza all'avanzamento. Ricordando quanto osservato in Figura 5.9, si può spiegare il fenomeno descritto in base al minore angolo di deriva che si ottiene per valori positivi di SR : la minore dissipazione di energia (dovuta allo scivolamento laterale degli pneumatici) che si verifica quando l'angolo di deriva è ridotto può concorrere all'abbassamento della forza longitudinale necessaria al mantenimento della velocità imposta.

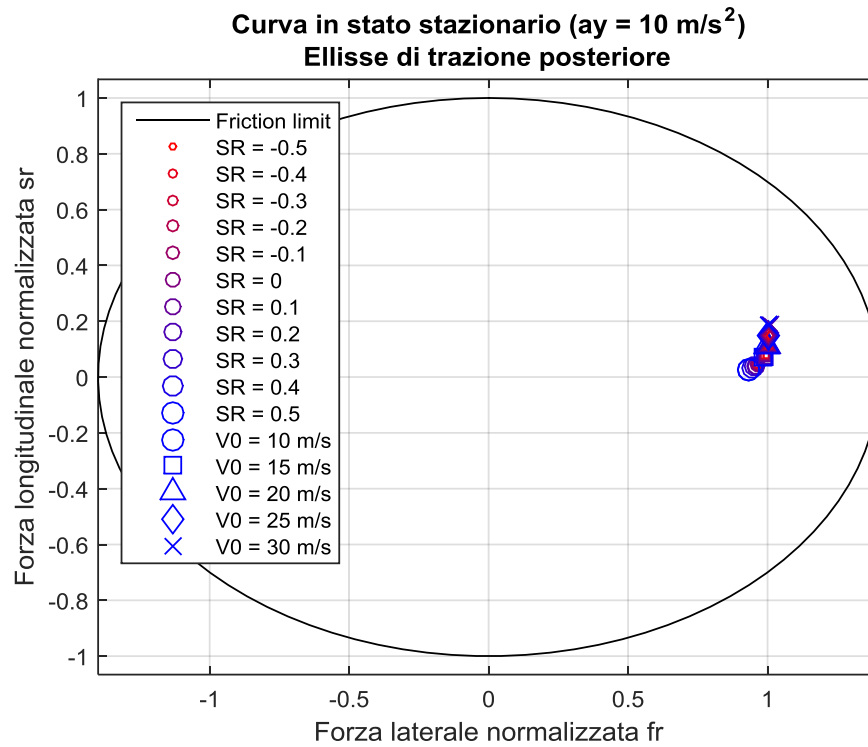


Figura 5.11: configurazione di equilibrio, ellisse di aderenza dello pneumatico posteriore. Le forze sono normalizzate rispetto al peso totale Mg .

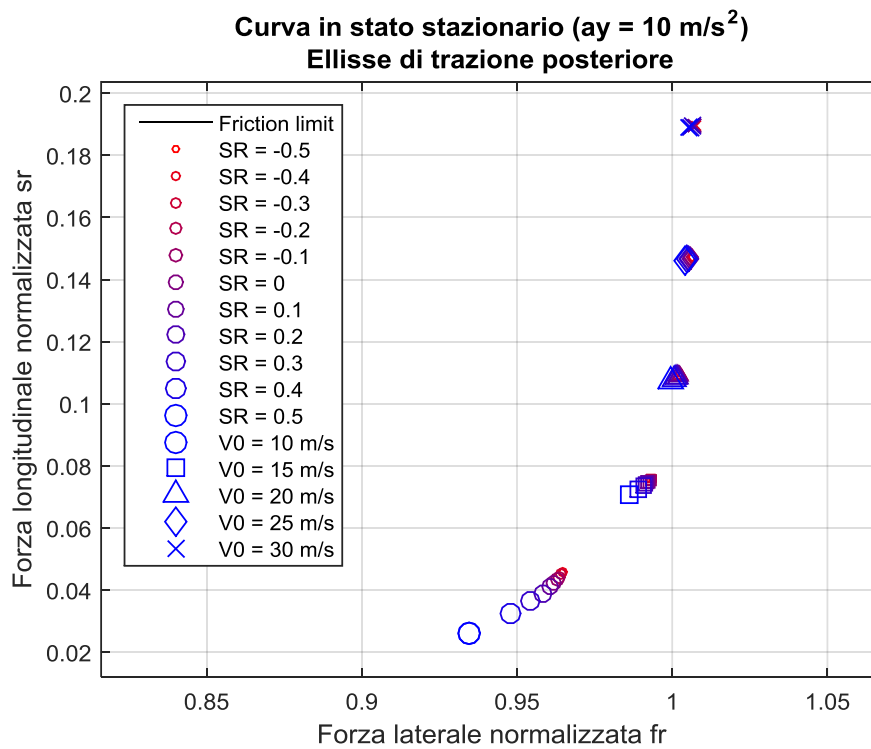


Figura 5.12: configurazione di equilibrio, ingrandimento dei punti utilizzati nell'ellisse di aderenza dello pneumatico posteriore. Le forze sono normalizzate rispetto al peso totale Mg .

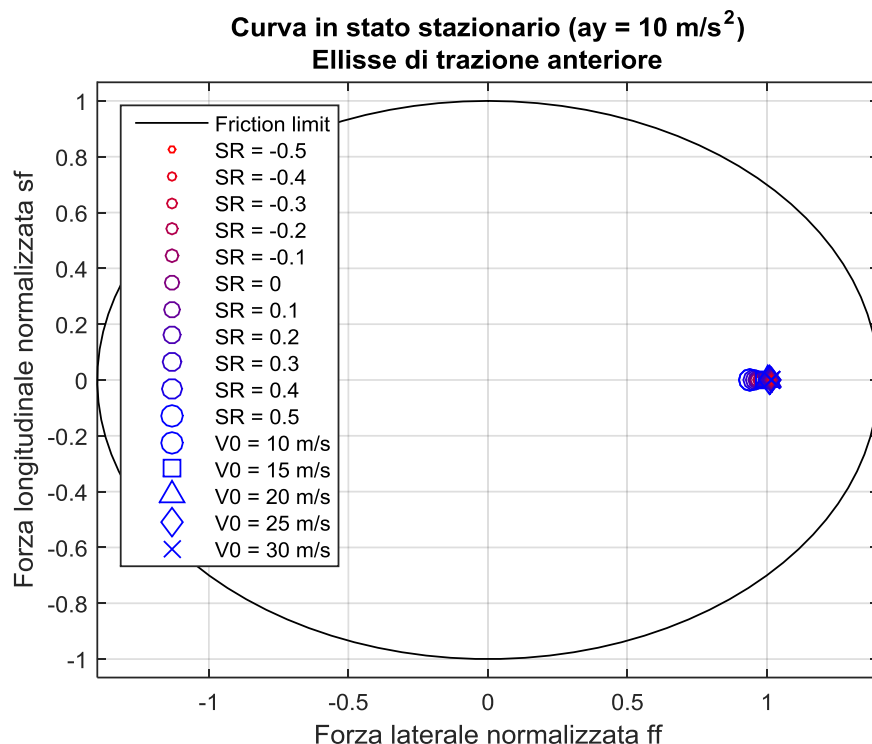


Figura 5.13: configurazione di equilibrio, ellisse di aderenza dello pneumatico anteriore. Le forze sono normalizzate rispetto al peso totale Mg .

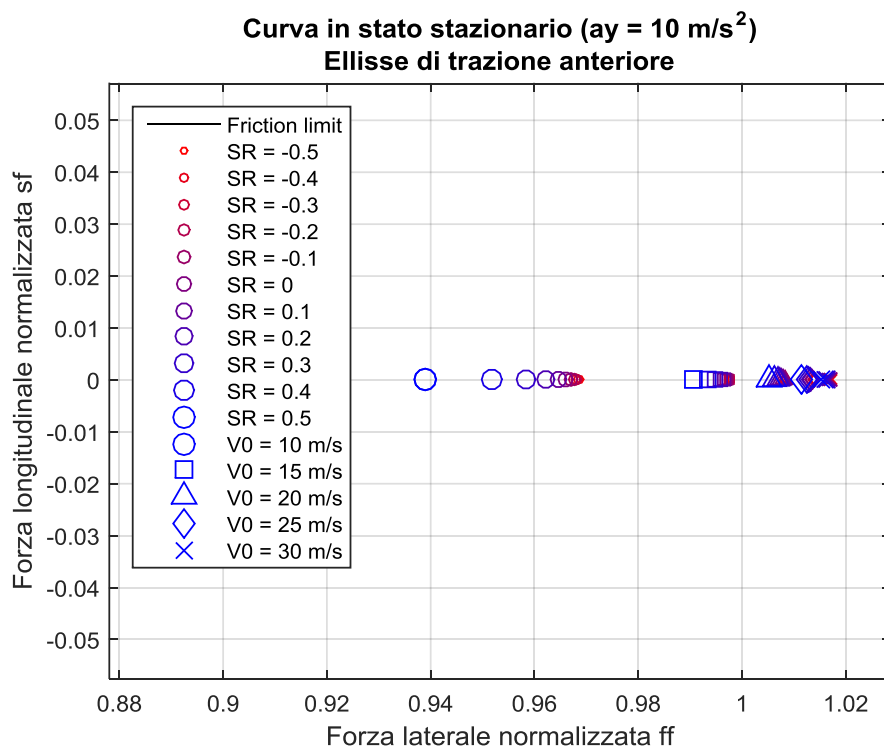


Figura 5.14: configurazione di equilibrio, ingrandimento dei punti utilizzati nell'ellisse di aderenza dello pneumatico anteriore. Le forze sono normalizzate rispetto al peso totale Mg .

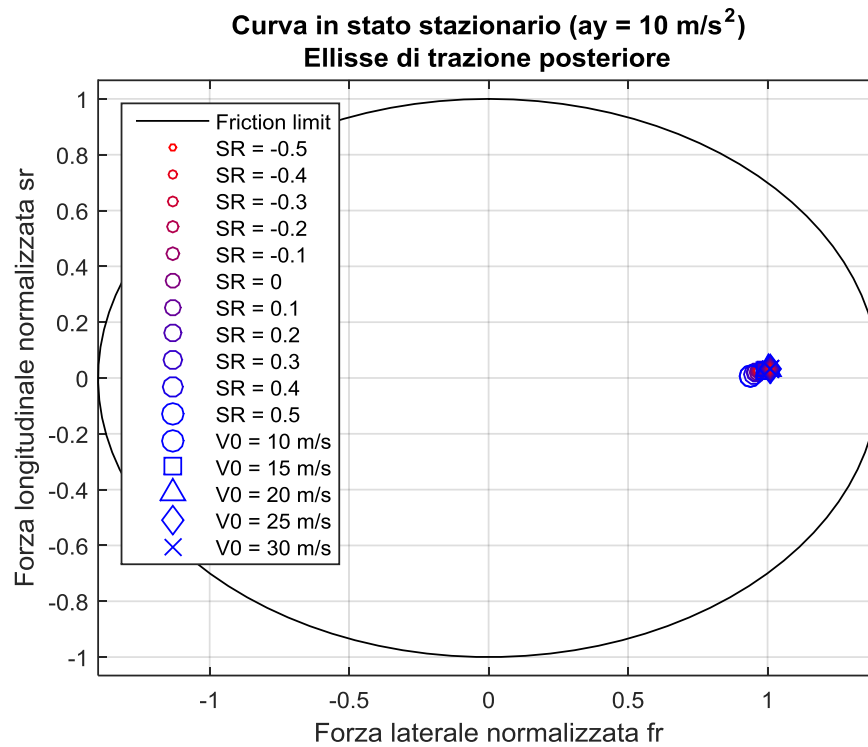


Figura 5.15: configurazione di equilibrio in assenza di forze aerodinamiche, ellisse di aderenza dello pneumatico posteriore. Le forze sono normalizzate rispetto al peso totale Mg .

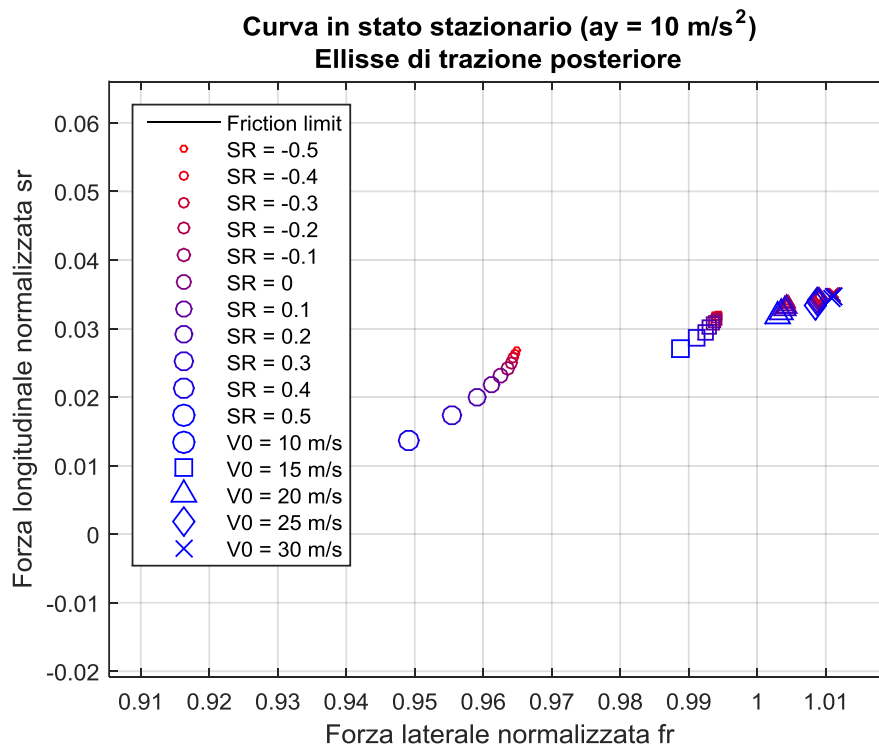


Figura 5.16: configurazione di equilibrio in assenza di forze aerodinamiche, ingrandimento dei punti utilizzati nell'ellisse di aderenza dello pneumatico posteriore. Le forze sono normalizzate rispetto al peso totale Mg .

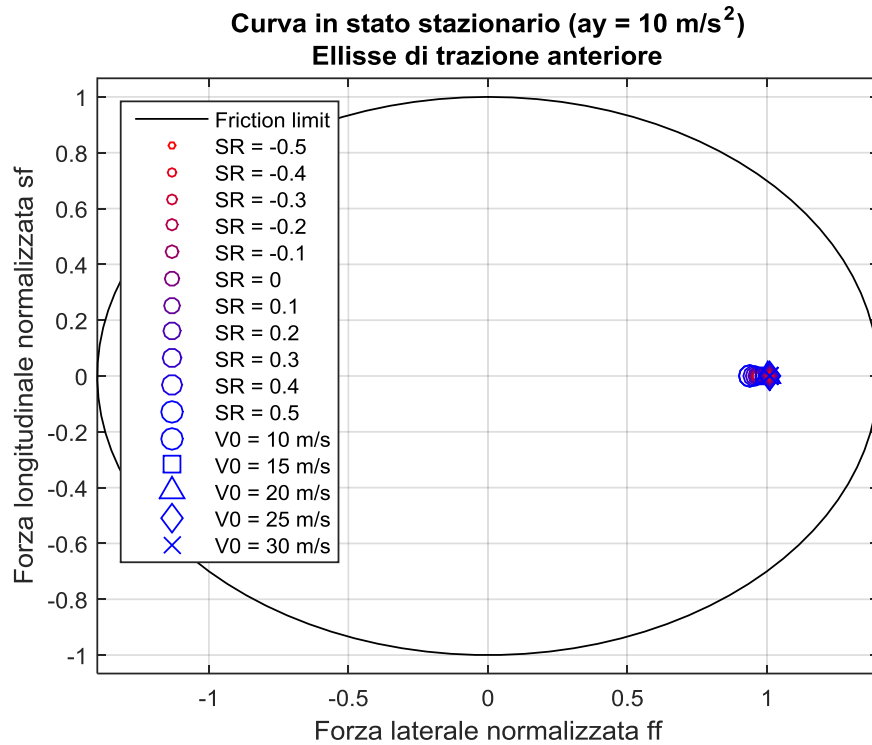


Figura 5.17: configurazione di equilibrio in assenza di forze aerodinamiche, ellisse di aderenza dello pneumatico anteriore. Le forze sono normalizzate rispetto al peso totale Mg .

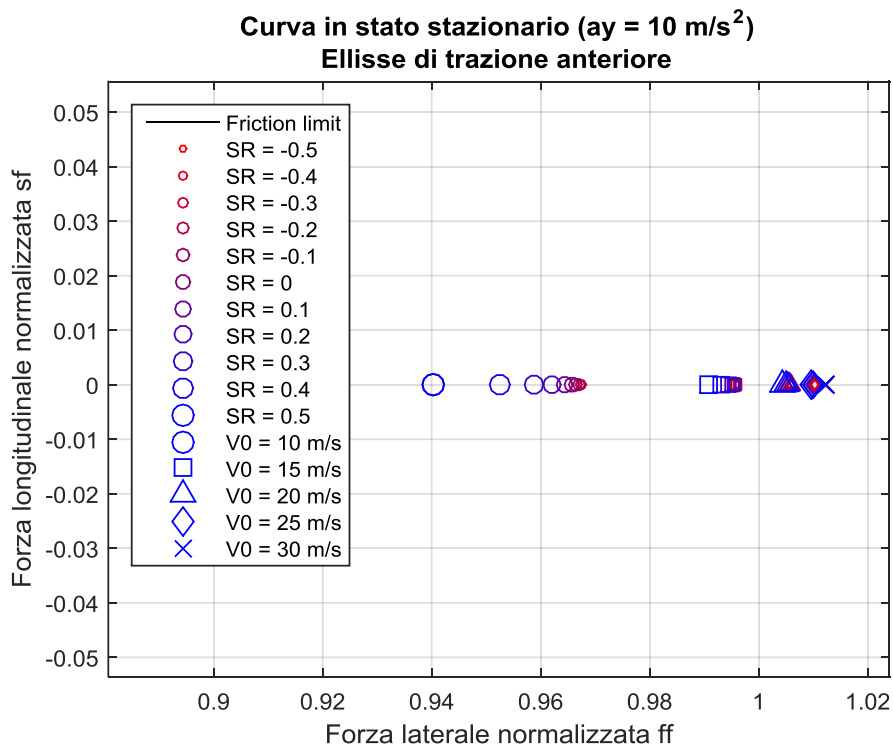


Figura 5.18: configurazione di equilibrio in assenza di forze aerodinamiche, ingrandimento dei punti utilizzati nell'ellisse di aderenza dello pneumatico anteriore. Le forze sono normalizzate rispetto al peso totale Mg .

5.2 Analisi nel dominio della frequenza: stabilità dei modi di vibrare

Per effettuare l'analisi nel dominio della frequenza, la prima operazione è consistita nella linearizzazione delle equazioni che descrivono il problema attorno alla generica posizione $\mathbf{x}_0$. Ciò è stato effettuato in ambiente Maple, utilizzando il comando *linearize* disponibile nella libreria MBSymba. In seguito alla linearizzazione, è stato possibile riscrivere il problema nella forma:

$$\begin{cases} E\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (5.3)$$

dove $\mathbf{x}$ sono le variabili di stato, $\dot{\mathbf{x}}$ le loro derivate, $\mathbf{u}$ i controlli e $\mathbf{y}$ le variabili osservate. In questa formulazione, A , B , C , D ed E dipendono dal punto $\mathbf{x}_0$ in cui si è effettuata la linearizzazione. Le matrici, ricavate mediante il comando *GenerateMatrix* del pacchetto di Maple *LinearAlgebra*, sono infine state importate in Matlab, in cui si sono sostituiti i valori $\mathbf{x}_0$ corrispondenti alla configurazione di equilibrio calcolata con XOptima.

Dal punto di vista numerico, è conveniente ricondurre il sistema alla forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (5.4)$$

che garantisce maggiore velocità e precisione di calcolo. A questo punto, è stato creato uno *state space* con le matrici A , B , C e D , da cui è possibile ricavare gli autovalori.

Si mette in evidenza che XOptima fornisce già gli autovalori come output delle simulazioni Open Loop, tuttavia l'utilizzo della procedura descritta permette maggiore controllo e versatilità, oltre a consentire il calcolo delle funzioni di trasferimento fra le grandezze di maggiore interesse.

5.2.1 Confronto fra Matlab e Xoptima

Per valutare la correttezza dei risultati forniti dal metodo proposto, è stato preliminarmente effettuato un confronto fra gli autovalori calcolati con i due strumenti, Matlab e XOptima. I risultati, riportati in Figura 5.19 e Figura 5.20, mostrano un'ottima compatibilità dei risultati, con differenze relative massime dell'ordine di 10^{-4} .

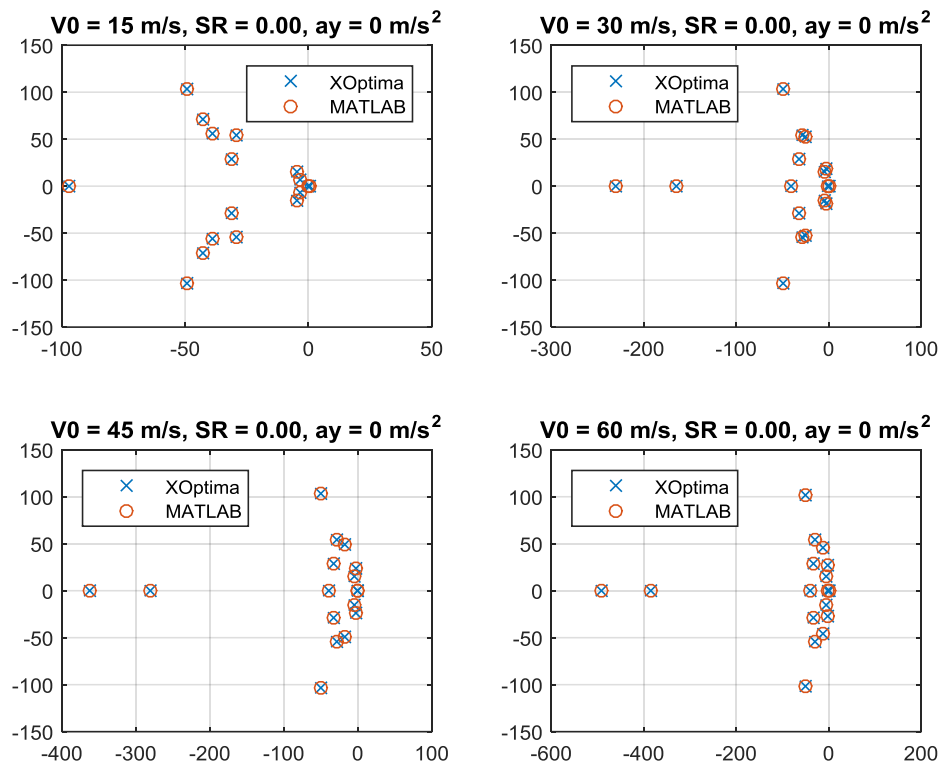


Figura 5.19: confronto fra gli autovalori ottenuti con Matlab e con XOptima, per diversi valori della velocità di avanzamento V_0 , in condizioni di marcia rettilinea.

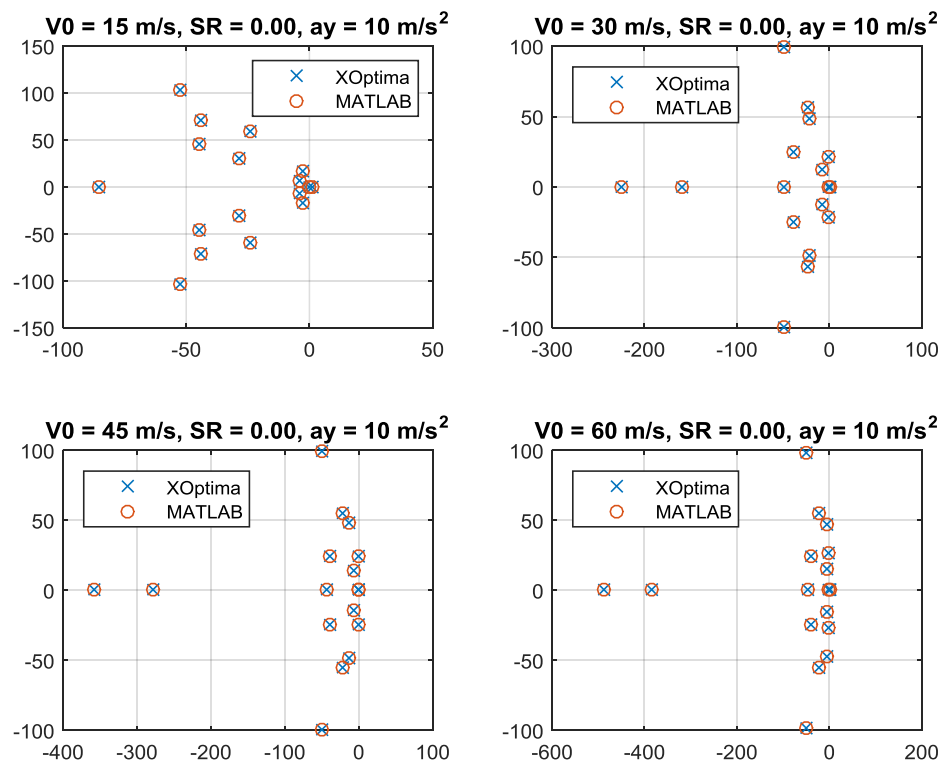


Figura 5.20: confronto fra gli autovalori ottenuti con Matlab e con XOptima, per diversi valori della velocità di avanzamento V_0 , in curva con accelerazione laterale a_y pari a 10 m/s^2 .

Si desidera far notare che il confronto è stato effettuato esclusivamente per $SR = 0$. Ciò è dovuto al fatto che, in questa fase dello studio, la relazione fra gli angoli di sterzo anteriore e posteriore è stata inserita nel problema attraverso l'equazione aggiuntiva (5.1) anziché mediante il coefficiente K_δ dell'equazione (3.16). Di conseguenza, essendo lo sterzo posteriore inserito nel modello come controllo, XOptima calcola correttamente la configurazione di equilibrio, ma trascura la relazione fra gli angoli di sterzo anteriore e posteriore nel calcolo dei modi di vibrare. L'approccio adottato è motivato dalla maggiore versatilità così ottenuta: in questo modo, infatti, la relazione fra gli angoli di sterzo viene inserita nel calcolo dei modi di vibrare effettuato in Matlab mediante la creazione di un anello di retroazione tramite la funzione *feedback* (Figura 5.21). Nonostante in questo caso *sys2* sia costituito semplicemente da un guadagno, atto a rappresentare il rapporto costante fra i due angoli di sterzo, è possibile sostituire ad esso una funzione di trasferimento più complessa, potendo in tal modo studiare l'effetto di altri tipi di relazione fra gli angoli di sterzo.

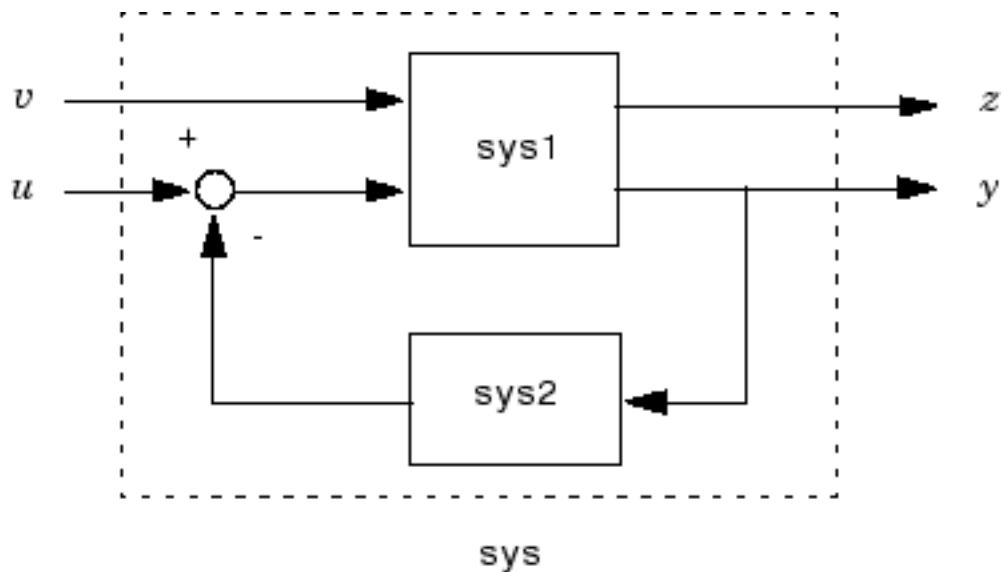


Figura 5.21: sistema dinamico con anello di retroazione. È mostrato il caso generale, in cui solo alcune delle variabili di ingresso e uscita sono coinvolte nella retroazione. Nel caso presente, y corrisponde all'angolo di sterzo anteriore e u all'angolo di sterzo posteriore.

5.2.2 Risultati dello studio dei modi di vibrare

Per lo studio della stabilità dei modi di vibrare, sono state svolte simulazioni con velocità V_0 variabile fra 3 e 60 m/s e si sono utilizzati tre valori del rapporto fra gli angoli di sterzo SR , pari a -0.5 , 0 e $+0.5$.

I risultati relativi alle prove in rettilineo sono mostrati in Figura 5.22. È possibile notare che i modi di vibrare maggiormente influenzati dalla presenza dello sterzo posteriore sono il wobble e il weave. In particolare, si osserva che un valore positivo del parametro SR conduce ad una maggiore stabilità del modo di weave e ad una minore stabilità del wobble; inoltre, ad una data velocità, la frequenza di weave risulta ridotta nel caso di SR positivo, il che rende l'oscillazione più facilmente gestibile dal pilota. Al contrario, un valore negativo di SR fa in modo che il weave diventi instabile a velocità superiori a circa 30 m/s, mentre il wobble risulta sempre più smorzato all'aumentare della velocità, fino a diventare sovracritico (e quindi non oscillante) sopra circa 24 m/s. Come atteso, in rettilineo i modi di vibrare nel piano (hop anteriore e posteriore, beccheggio e scuotimento verticale) non vengono influenzati dalla presenza dello sterzo posteriore.

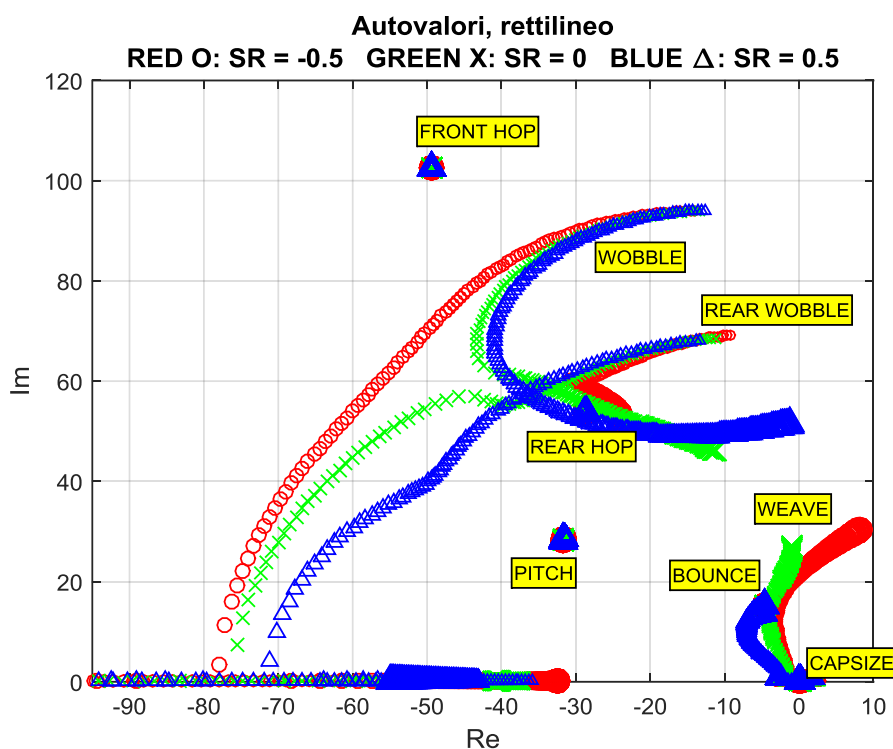


Figura 5.22: luogo delle radici in rettilineo, velocità variabile fra 3 e 60 m/s. La velocità è crescente nel verso in cui aumenta la dimensione del marker.

Le simulazioni in curva, i cui risultati sono riportati in Figura 5.23, ripropongono le medesime osservazioni viste nel caso della marcia rettilinea, tuttavia in questo caso l'accoppiamento fra i modi di vibrare nel piano e quelli fuori dal piano fa in modo che tutti i modi vengano modificati dalla presenza dello sterzo posteriore. Ancora una volta sono evidenti gli effetti opposti sui modi di weave e di wobble.

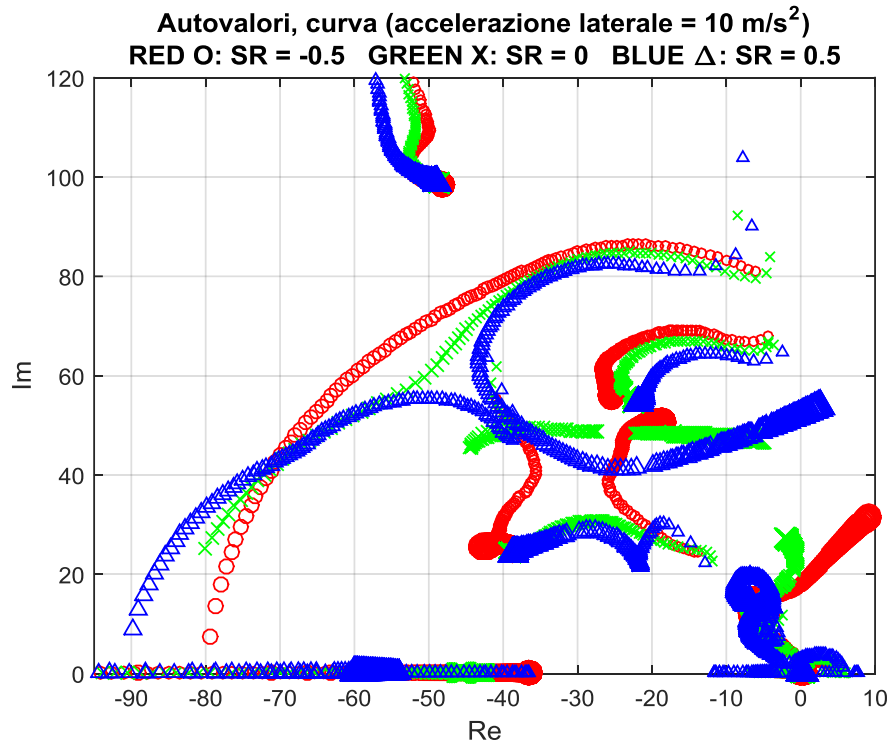


Figura 5.23: luogo delle radici in curva, velocità variabile fra 3 e 60 m/s. La velocità è crescente nel verso in cui aumenta la dimensione del marker.

5.3 Simulazioni di tempo minimo

Al fine di approfondire la conoscenza sugli effetti del sistema di sterzo posteriore sulle prestazioni e sulle doti di maneggevolezza del veicolo, si sono svolte delle simulazioni di tempo minimo su due tipi di circuito, la curva ad U e la chicane. Ciascuna manovra è stata eseguita con tre diverse configurazioni dello sterzo posteriore (fra parentesi le sigle utilizzate per identificare ognuna delle soluzioni nella legenda delle figure che seguono):

- sterzo posteriore controllato in maniera indipendente (*ctr*);
- rapporto fra gli angoli di sterzo posteriore e anteriore pari a -0.5 (*neg*);
- rapporto fra gli angoli di sterzo posteriore e anteriore pari a 0 (*nul*);
- rapporto fra gli angoli di sterzo posteriore e anteriore pari a $+0.5$ (*pos*).

Le diverse leggi di funzionamento sono ottenute impostando i valori dei coefficienti K_δ e K_u nell'equazione (3.16) come descritto nel paragrafo 3.1.6.

Come detto nella sezione 3.2, nel caso del controllo indipendente dello sterzo posteriore si fa uso di un filtro passa basso per ottenere l'effettivo angolo di sterzo posteriore da quello calcolato dal controllo ottimo. Per le simulazioni effettuate si è utilizzata una frequenza di taglio di 1 Hz: tale scelta è stata effettuata dopo aver osservato che con un valore di 0.5 Hz i vantaggi derivanti dal controllo aggiuntivo risultavano troppo esigui e che con 2 Hz insorgono marcate oscillazioni dello sterzo posteriore. Il massimo angolo di sterzo posteriore è stato fissato a 0.2 rad, pari a circa 11° , ossia il medesimo valore utilizzato per l'angolo di sterzo anteriore.

Oltre ad osservare in che modo il pilota virtuale scelga di utilizzare lo sterzo posteriore, sono stati calcolati gli indici di handling che permettono di valutare le eventuali differenze nelle qualità di maneggevolezza introdotte dalle diverse leggi di funzionamento dello sterzo posteriore.

5.3.1 Risultati delle simulazioni su curva ad U

La soluzione del problema di controllo ottimo è descritta nelle figure seguenti. Figura 5.24 non evidenzia scarti apprezzabili nelle traiettorie seguite nei diversi casi analizzati. In Figura 5.25 si nota che il veicolo con sterzo posteriore controllato possiede una velocità maggiore di tutte le altre varianti in tutti i punti del tracciato successivi all'ingresso in curva, ma in particolare nella fase di uscita, dopo i 600 m dal punto iniziale. Proprio in corrispondenza di questa distanza, è possibile osservare nelle figure Figura 5.29 e Figura 5.30 che il veicolo con controllo separato per lo sterzo posteriore è più rapido a ridurre il proprio angolo di rollio, il che può spiegare il vantaggio in termini di velocità (l'aderenza degli pneumatici diviene meno limitante e consente una maggiore accelerazione). La maggiore velocità di rollio è tuttavia accompagnata anche da un picco della coppia di sterzo superiore (Figura 5.28). È infine interessante notare in Figura 5.27 che il pilota virtuale utilizza in diverse fasi un angolo di sterzo posteriore concorde e di modulo maggiore rispetto a quello anteriore.

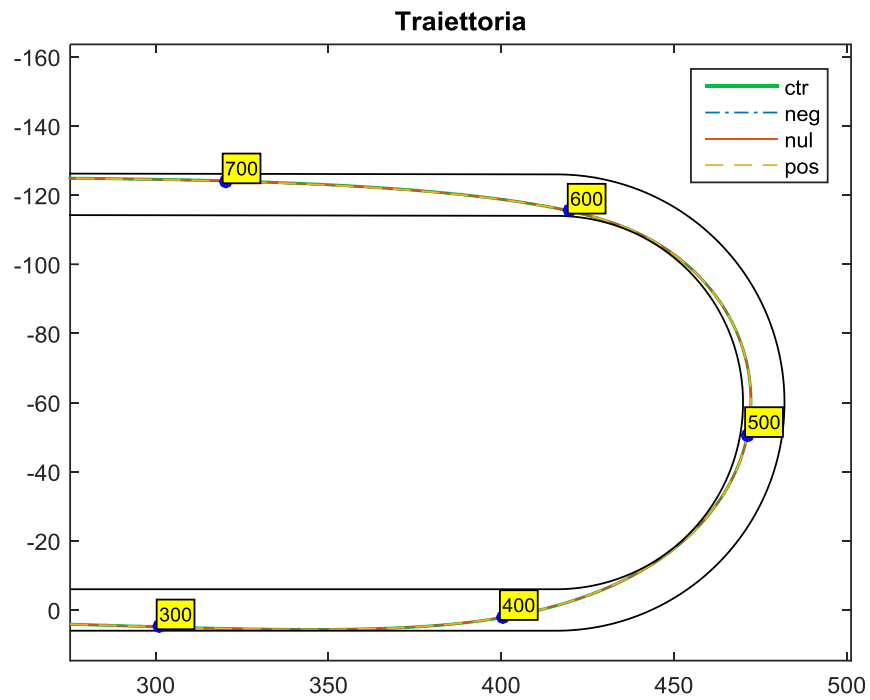


Figura 5.24: curva ad U, raggio 60 m. Tracciato e traiettoria. Ingrandimento del tratto contenente il tornante.

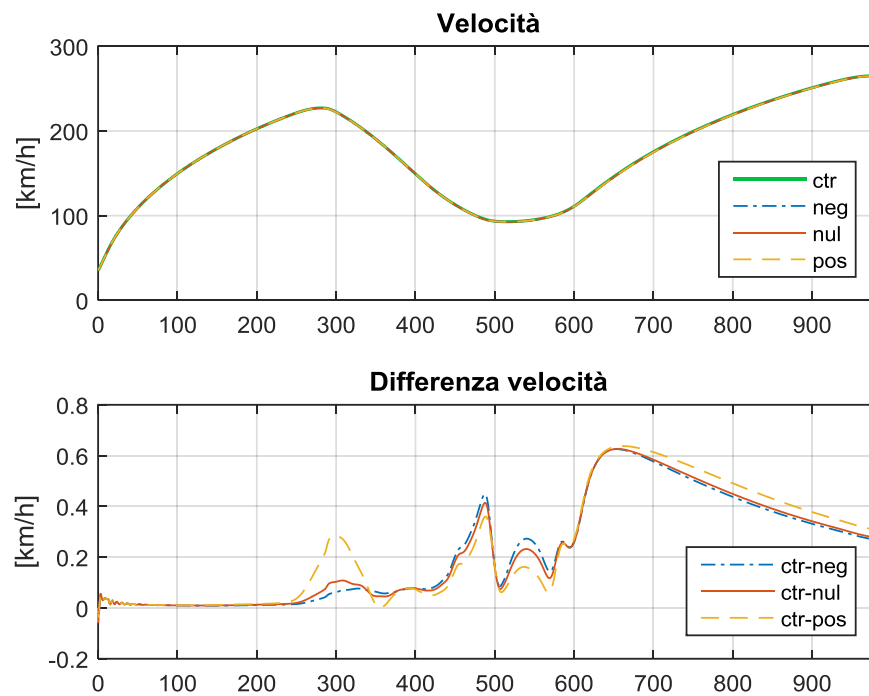


Figura 5.25: curva ad U, raggio 60 m. Velocità di avanzamento.

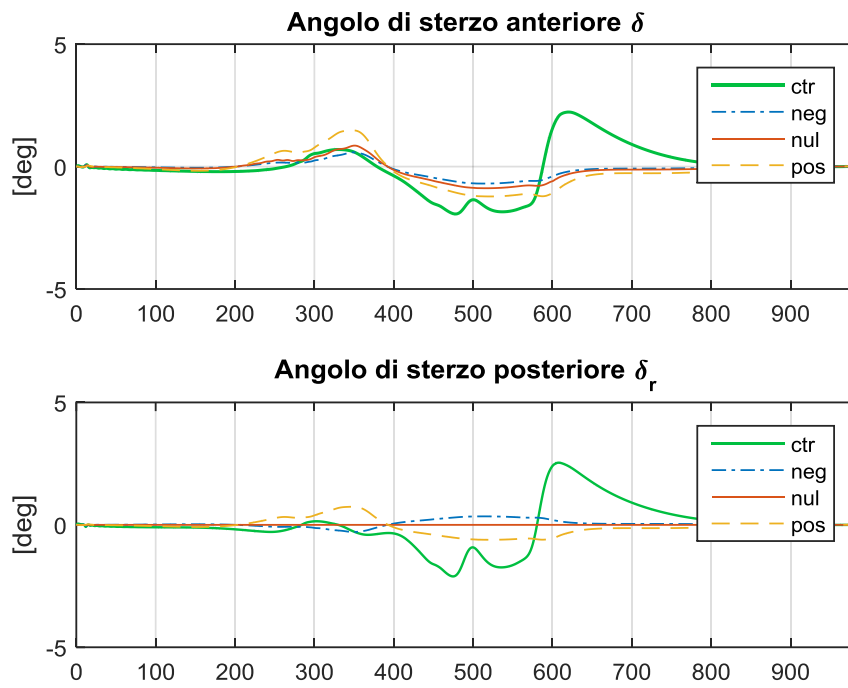


Figura 5.26: curva ad U, raggio 60 m. Angoli di sterzo anteriore e posteriore.

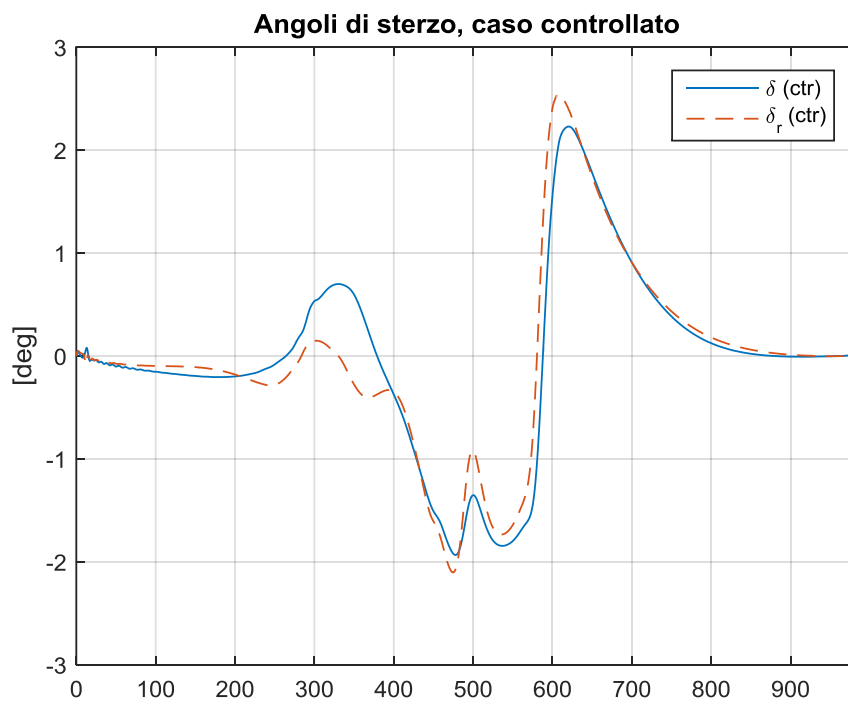


Figura 5.27: curva ad U, raggio 60 m. Angoli di sterzo anteriore e posteriore nel caso di sterzo posteriore controllato in modo indipendente.

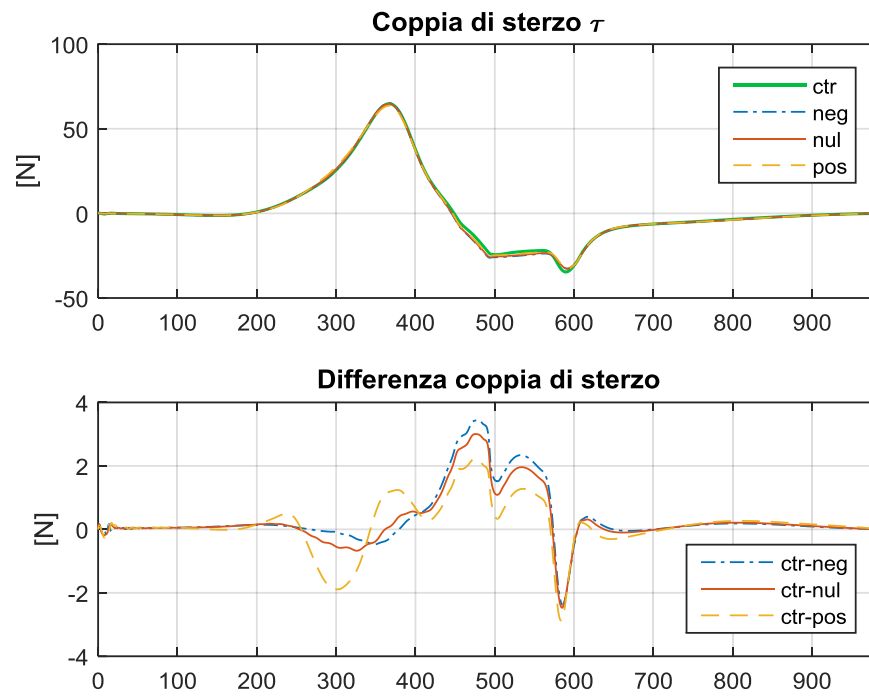


Figura 5.28: curva ad U, raggio 60 m. Coppia di sterzo applicata al manubrio.

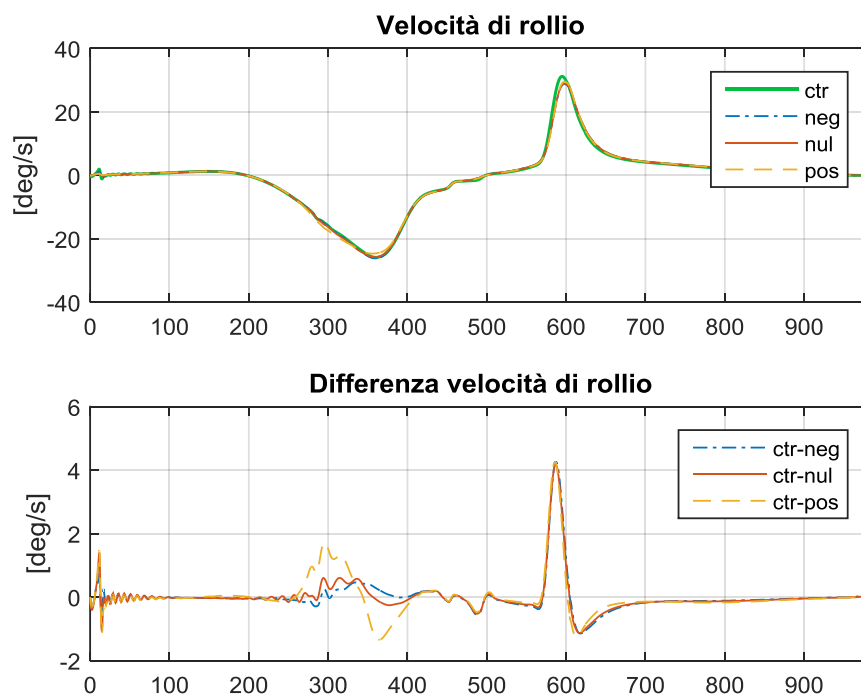


Figura 5.29: curva ad U, raggio 60 m. Velocità di rollio.

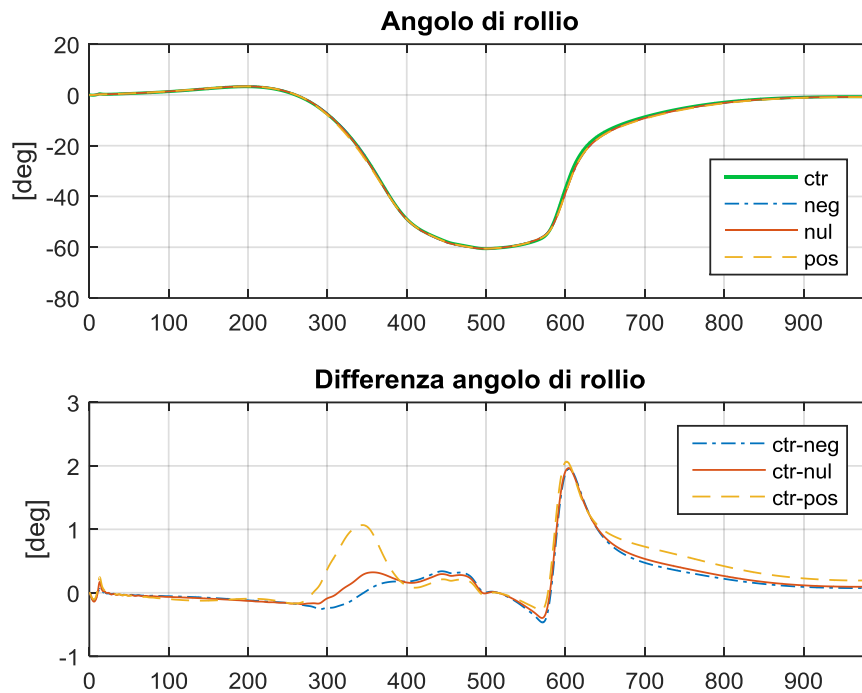


Figura 5.30: curva ad U, raggio 60 m. Angolo di rollio.

Tabella 5.2 riporta i tempi ottenuti con ciascuna configurazione di sterzo posteriore e il calcolo dell'indice di Koch, definito dall'espressione (4.3), qui riportata per comodità di lettura.

$$Koch\ index = \frac{\tau_{peak}}{\dot{\phi}_{peak} \cdot V}$$

Tabella 5.2

δ_r	Tempo	$\tau\ max$	$\dot{\phi}_{dot}\ max$	V	Koch
–	[s]	[Nm]	[rad/s]	[m/s]	[N*s ² /rad]
Controllato	23.019	64.8323	0.4514	49.8917	2.8788
–0.5* δ	23.054	65.1304	0.4564	50.0541	2.8508
0	23.052	64.7601	0.4503	50.0231	2.8746
+0.5* δ	23.051	63.6548	0.4303	50.4688	2.9312

Si vede come lo sterzo posteriore controllato consenta un sensibile miglioramento della prestazione massima, permettendo di ottenere il tempo migliore, circa 0.03 s più basso rispetto ai tempi relativi alle configurazioni con rapporto fisso fra i due angoli di sterzo. Fra queste

ultime, quella con rapporto positivo risulta la più rapida, mentre quella con rapporto negativo è la più lenta; le differenze, tuttavia, sono in questo caso molto modeste, dell'ordine di 0.001 s. Per quanto riguarda i risultati relativi all'indice di Koch, il caso con sterzo posteriore controllato consegue un valore di questo parametro non lontano da quello relativo al veicolo privo di sterzo posteriore: questo significa che l'utilizzo ottimale dello sterzo posteriore non modifica l'entità dello sforzo richiesto da parte del pilota per ottenere certi valori di velocità di rollio, non alterando quindi la sensazione di maneggevolezza. La configurazione con rapporto negativo ottiene il valore minimo dell'indice di Koch, il che significa che, ad una certa velocità, essa richiede una minore coppia di sterzo per conseguire una determinata velocità di rollio, oppure che, sempre a velocità fissata, con una data coppia di sterzo è possibile ottenere una maggiore velocità di rollio. L'opposto vale per la configurazione con rapporto positivo fra gli angoli di sterzo, a cui corrisponde il valore massimo dell'indice di Koch.

5.3.2 Risultati delle simulazioni su chicane

La soluzione del problema di controllo ottimo è descritta nelle figure seguenti. Anche in questo caso non si riscontrano differenze sensibili fra le traiettorie (Figura 5.31) e il pilota virtuale fa uso in alcune fasi di angoli di sterzo posteriori concordi e di modulo maggiore rispetto ai corrispondenti angoli anteriori (Figura 5.34).

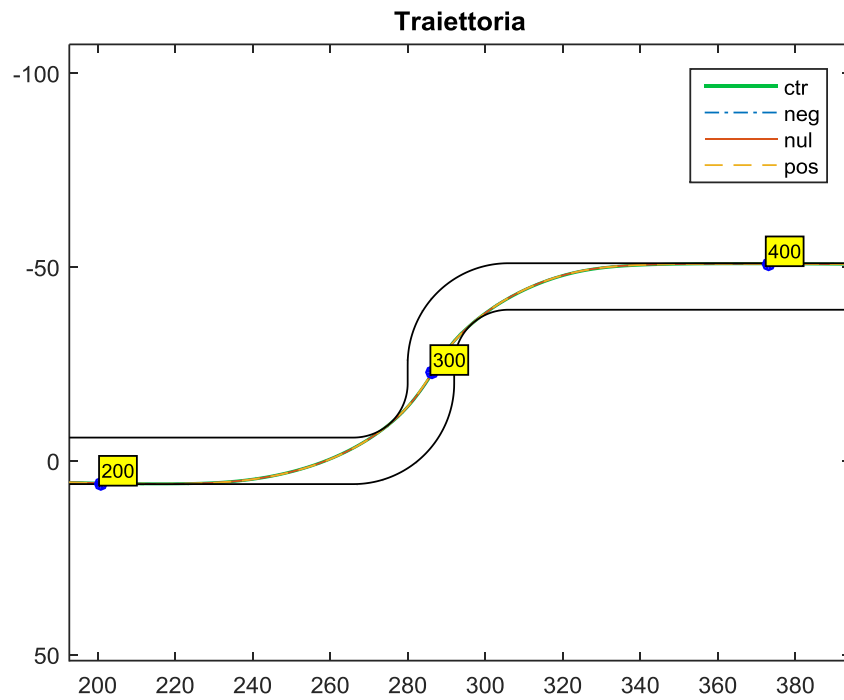


Figura 5.31: chicane. Tracciato e traiettoria. Ingrandimento del tratto contenente il cambio di direzione.

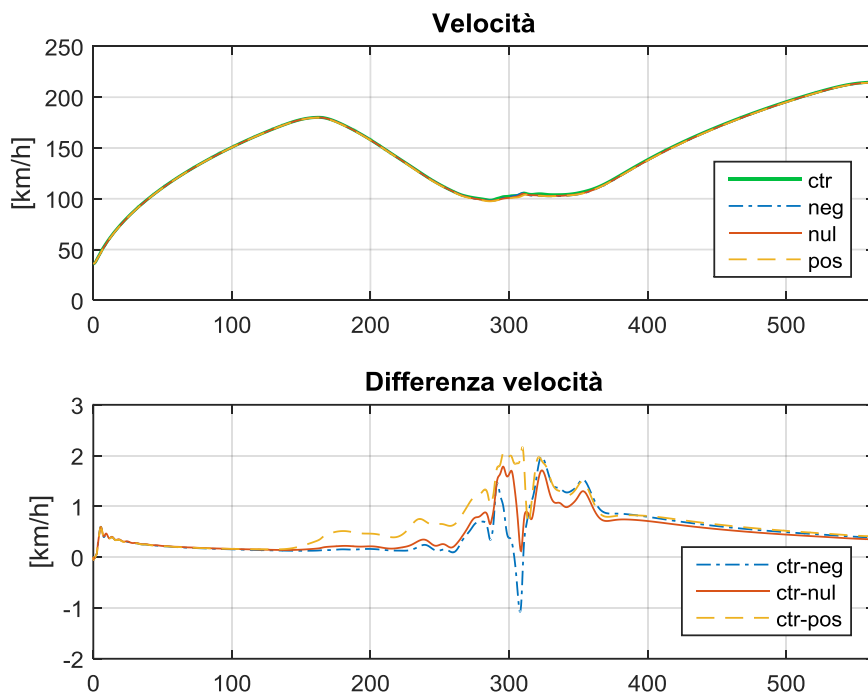


Figura 5.32: chicane. Velocità di avanzamento.

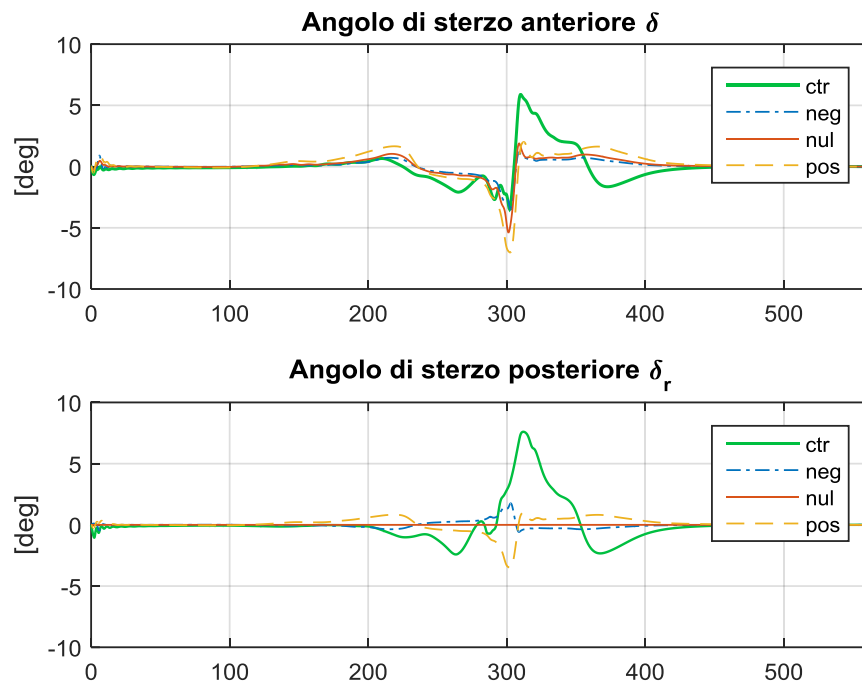


Figura 5.33: chicane. Angoli di sterzo anteriore e posteriore.

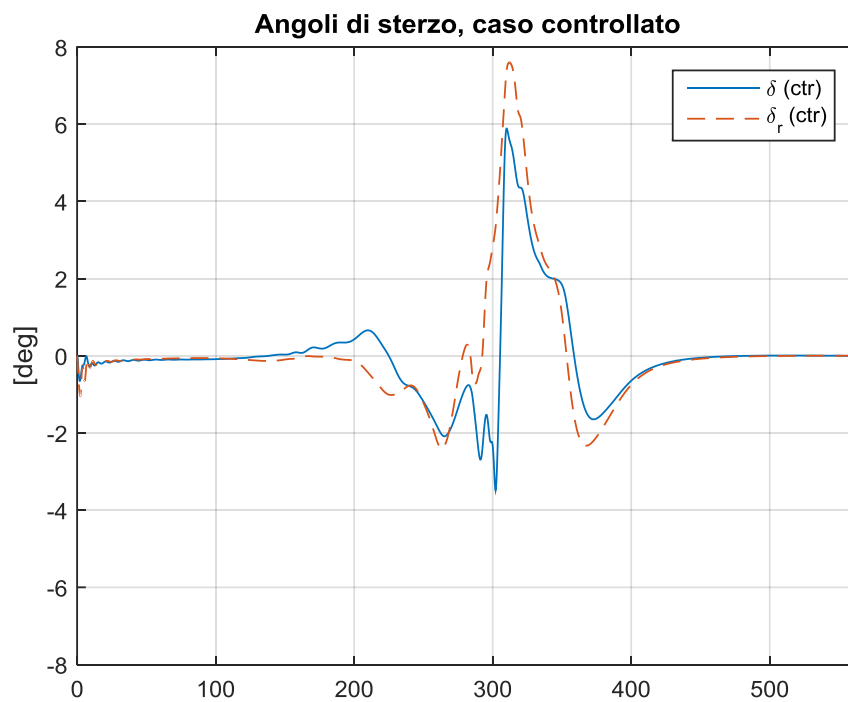


Figura 5.34: chicane. Angoli di sterzo anteriore e posteriore nel caso di sterzo posteriore controllato in modo indipendente.

Effetto del motore controrotante e della ruota posteriore sterzante sulla dinamica della motocicletta

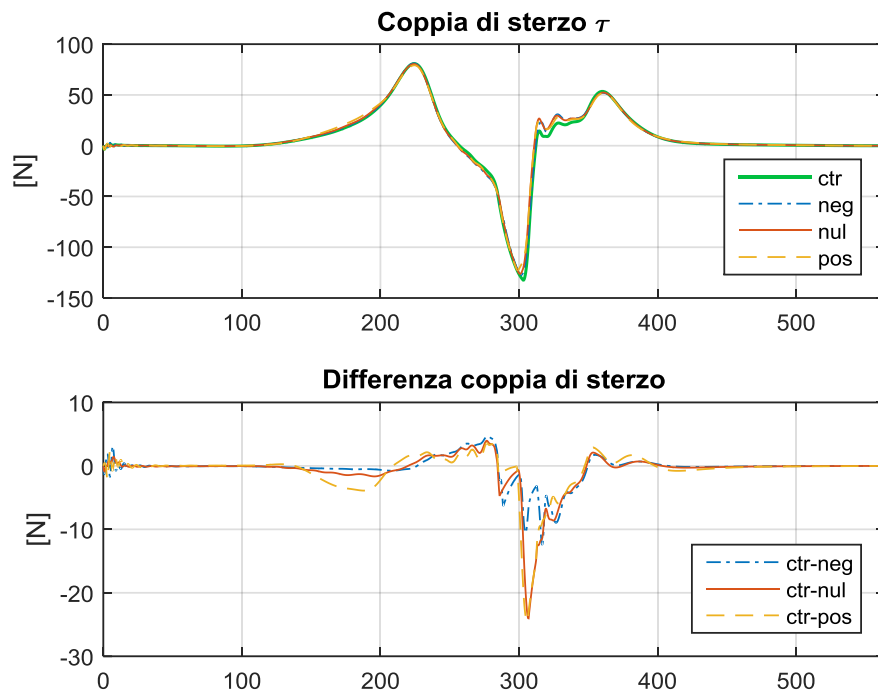


Figura 5.35: chicane. Coppia di sterzo applicata al manubrio.

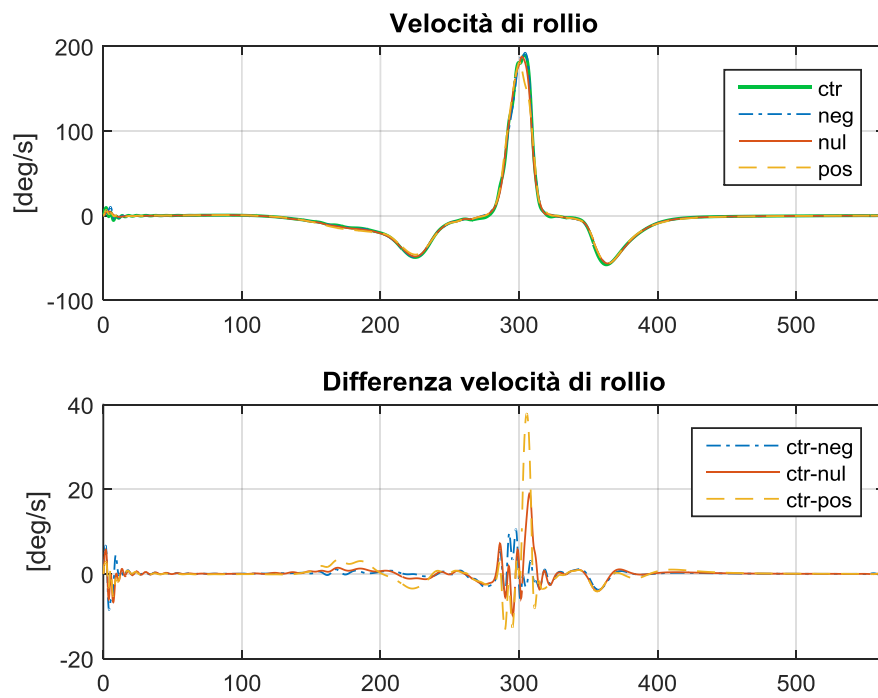


Figura 5.36: chicane. Velocità di rollio.

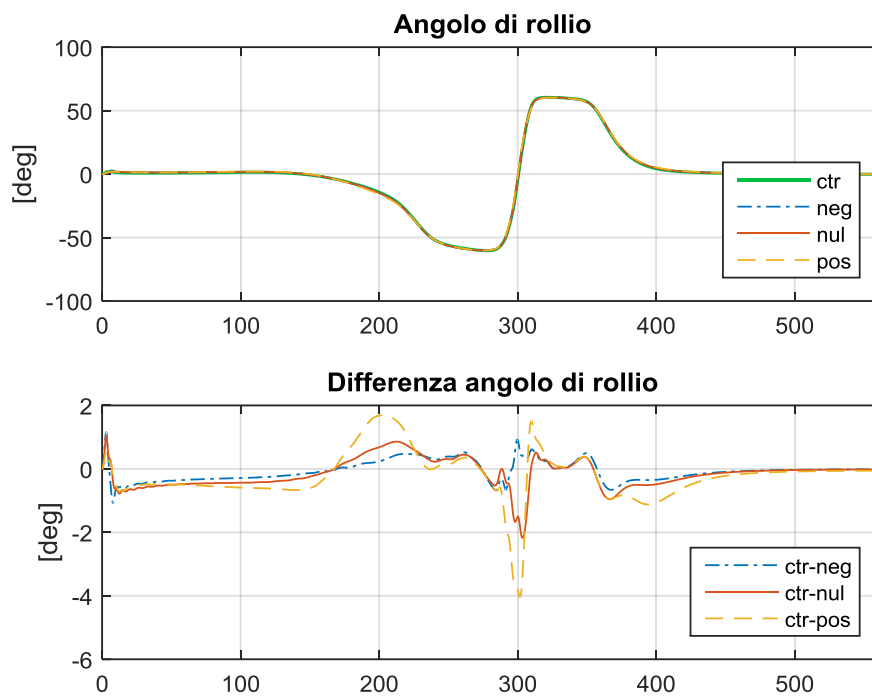


Figura 5.37: chicane. Angolo di rollio.

Tabella 5.3 riporta i tempi ottenuti con ciascuna configurazione di sterzo posteriore e il calcolo dell'indice di cambio corsia, definito dall'espressione (4.5), qui riportata per comodità di lettura.

$$\text{Lane Change Roll Index (LCRI)} = \frac{\tau_{p-p}}{\dot{\phi}_{p-p} \cdot V_{avg}}$$

Tabella 5.3

δ_r	Tempo	τ_{p-p}	$\dot{\phi}_{p-p}$	V_{avg}	LCRI
–	[s]	[Nm]	[rad/s]	[m/s]	[N*s ² /rad]
Controllato	15.273	213.1776	4.1762	28.8246	1.7709
$-0.5 \cdot \delta$	15.338	208.6311	4.2197	28.6104	1.7281
0	15.342	206.5526	4.1247	28.5653	1.7531
$+0.5 \cdot \delta$	15.361	201.7812	3.9689	28.4532	1.7868

Anche nel cambio di corsia la motocicletta con sterzo posteriore controllato risulta la più veloce, con un tempo inferiore di 0.065 s rispetto al secondo miglior tempo. In questo caso, fra le

configurazioni con rapporto fra gli angoli di sterzo fissato, è quella con rapporto negativo ad essere la più rapida, con un vantaggio di 0.004 s sul veicolo sprovvisto di sterzo posteriore e di 0.023 s su quello con rapporto positivo fra gli sterzi.

Per quanto riguarda i risultati relativi all'indice di cambio corsia, lo sterzo controllato consegue il secondo valore più alto, principalmente a causa del valore di coppia di sterzo, che è il più elevato. Il valore più basso dell'indice di maneggevolezza corrisponde al caso con rapporto negativo fra gli angoli di sterzo, che consegue infatti la massima differenza fra i picchi di velocità di rollio. Il valore massimo dell'indice di cambio corsia, invece, compete al caso di rapporto positivo fra gli angoli di sterzo: a questa configurazione corrisponde il minimo valore del dato relativo alla coppia di sterzo, tuttavia anche la differenza fra i picchi di velocità di rollio e la velocità di avanzamento media sono le più basse, portando al risultato osservato.

5.4 Considerazioni conclusive sulla ruota posteriore sterzante

La presente trattazione ha rivelato come un opportuno utilizzo dello sterzo posteriore sia in grado di offrire diversi vantaggi dinamici.

L'analisi cinetostatica ha evidenziato la possibilità di limitare l'utilizzo degli pneumatici per generare una determinata accelerazione laterale per mezzo di un rapporto positivo fra gli angoli di sterzo, configurazione che consente inoltre di aumentare la stabilità del weave, come si è visto nello studio nel dominio della frequenza. La minore stabilità del modo di wobble che consegue da questo tipo di funzionamento non dovrebbe costituire un problema, in quanto l'introduzione di un ammortizzatore di sterzo potrebbe smorzare questo tipo di oscillazioni, con conseguente leggerezza destabilizzazione del weave che però risulta molto smorzato in partenza.

Le simulazioni di controllo ottimo hanno infine mostrato come lo sterzo posteriore possa portare un vantaggio non trascurabile nelle prestazioni del veicolo in termini di tempo richiesto per completare una certa manovra; tuttavia, l'ottenimento di tale vantaggio prestazionale richiede una legge complessa di controllo dello sterzo posteriore, e l'individuazione di una correlazione con lo sterzo anteriore non ha dato risultati soddisfacenti. Per completare la ricerca, si suggerisce pertanto di investigare sulla possibilità di esprimere l'angolo di sterzo posteriore per mezzo di una funzione di trasferimento complessa, che lo legghi anche ad altre grandezze, come per esempio la velocità di avanzamento, l'angolo di rollio, la velocità di rollio o la velocità di imbardata. Fra le modalità di funzionamento a rapporto fissato fra gli angoli di sterzo, le due

manovre analizzate non permettono di individuare una configurazione che sia nettamente preferibile a quella tradizionale priva di sterzo posteriore.

6 Conclusioni

L'obiettivo della ricerca è stato l'indagine degli effetti del motore controrotante e dello sterzo posteriore sul comportamento dinamico di una motocicletta.

Il motore controrotante, argomento di grande attualità soprattutto per i motocicli da competizione, è stato studiato mediante simulazioni di controllo ottimo, riproducendo alcune manovre tipiche: l'accelerazione in rettilineo, l'inversione ad U, un percorso ad anello circolare e il cambio di corsia o chicane. La soluzione controrotante è risultata vantaggiosa in condizioni di elevata aderenza, in quanto permette accelerazioni superiori grazie alla minore tendenza all'impennamento; inoltre, per il fatto che, invertendo il verso di rotazione del motore, il suo momento giroscopico si sottrae a quello delle ruote, il veicolo equipaggiato con motore controrotante ha evidenziato una migliore maneggevolezza, con velocità di rollio più elevate e coppie di sterzo inferiori (migliori indici di handling). La motocicletta tradizionale, il cui motore si muove nello stesso verso delle ruote, è invece risultata preferibile nelle condizioni in cui l'aderenza degli pneumatici limita l'accelerazione, come su asfalto bagnato o nel breve transitorio in uscita di curva che precede l'insorgere dell'impennamento. In sintesi, nessuna delle due soluzioni è preferibile all'altra in qualunque situazione, inoltre le differenze riscontrabili non sono mai di entità tale da indirizzare la scelta in modo netto: è quindi giustificato il dibattito riguardante l'utilizzo di questa soluzione tecnica.

Lo sterzo posteriore è una tecnologia ormai diffusa nel mondo delle quattroruote, ma per quanto concerne i motocicli non ne esistono esempi sul mercato e anche a livello di ricerca sono pochi gli articoli che trattano il problema. Si è quindi proposta un'indagine completa di questo sistema, comprendente l'analisi dell'assetto all'equilibrio, lo studio della stabilità dei modi di vibrare e simulazioni di tempo minimo atte a valutare prestazioni e caratteristiche di maneggevolezza. È emerso che un angolo di sterzo posteriore concorde a quello anteriore consente un minore ingaggio degli pneumatici a parità di accelerazione laterale; in questo caso, inoltre, si ottiene una maggiore stabilità del modo di weave, sia in rettilineo che in curva. Le simulazioni di tempo minimo hanno evidenziato che la possibilità di gestione indipendente dello sterzo posteriore costituisce un vantaggio prestazionale non trascurabile.

L'individuazione di una legge che riproduca, mediante una relazione con altre grandezze, l'andamento dell'angolo di sterzo posteriore calcolato dal problema di controllo ottimo è risultata, tuttavia, molto complessa.

Bibliografia

Articoli e tesi

- [1] Cossalter, V. and Lio, M. D. and Lot, R. and Fabbri, L., ‘A general method for the evaluation of vehicle manoeuvrability with special emphasis on motorcycles’, *Vehicle System Dynamics*, 1999, pp.113-135, vol.31.
- [2] Bobbo, S. and Cossalter, V. and Massaro, M. and Peretto, M. (2008) ‘Application of the “Optimal Maneuver Method” for enhancing racing motorcycle performance’, *SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems*, Aprile 2009, Vol. 1, No. 1, pp.1311-1318.
- [3] Tavernini, D. and Massaro, M. and Velenis, E. and Katzourakis, D. I. and Lot, R., ‘Minimum time cornering: The effect of road surface and car transmission layout’, *Vehicle System Dynamics*, 2013, 10(51), pp.1533-1547.
- [4] Tavernini, D. and Velenis, E. and Lot, R. and Massaro, M., ‘The Optimality of the Handbrake Cornering Technique’, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2014, 4(136).
- [5] D. Tavernini, *Sport vehicles and virtual riders modeling*, Tesi di Dottorato, 2013
- [6] Fujioka, T. and Matsui, A. (1993) ‘Improving the straight running stability of motorcycles using a two-wheel steering system’, *Proc. 1993 SAE Small Engine Technology Conference*, SAE Paper No. 931552, pp.661–668.
- [7] Hikichi, T. and Tezuka, Y. (1995) ‘Study on improving the motorcycle high speed stability using a rear wheel self-steering system’, *Proc. 1995 SAE International Congress and Exposition*, SAE Paper No. 950198, pp.1–11.

- [8] Cesari, C. (2000) *Analysis of the Dynamic Behavior of A Motorcycle Equipped with Interlinked Front and Rear Steering Systems*, Degree Thesis, Library of the Mechanical Engineering Dept., Dissertation Service, University of Padova (in Italian).
- [9] Maggio, F. and Cossalter, V. (2008) ‘How a rear steering system may improve motorcycle dynamics’, *Int. J. Vehicle Design*, Vol. 46, No. 3, pp.328–346.
- [10] M. Massaro, R. Sartori, R. Lot (2011) ‘Numerical investigation of engine-to- slip dynamics for motorcycle traction control applications’, *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 49:3, 419-432.

Libri

V. Cossalter, *Motorcycle Dynamics*, Lulu Press, 2006

M. Guiggiani, *The Science of Vehicle Dynamics*, Springer, 2014

F. Biral, E. Bertolazzi, M. Da Lio, *The Optimal Manoeuvre*, capitolo quinto di M. Tanelli, M. Corno, S. Savaresi, *Modelling, Simulation and Control of Two-Wheeled Vehicles*, Wiley, 2014

A. E. Bryson Jr., *Dynamic Optimization*, Addison Wesley Longman, 1999

H. B. Pacejka, *Tire and Vehicle Dynamics – Second Edition*, Butterworth-Heinemann, 2006

Appendice: caratteristiche della motocicletta

Veicolo		
Massa totale (veicolo + pilota)	M	250 kg
Altezza baricentro	H	0.69 m
Posizione longitudinale baricentro	B	0.73 m
Passo	p	1.500 m
Avancorsa normale	a_n	0.1 m
Angolo di inclinazione dello sterzo	ε	25.8°
Altezza perno forcellone	H_p	0.47 m
Posizione longitudinale perno forcellone	B_p	0.60 m
Altezza pignone	H_d	0.48 m
Posizione longitudinale pignone	B_d	0.68 m
Momento d'inerzia al rollio	I_x	18 kg m ²
Momento d'inerzia al beccheggio	I_y	50 kg m ²
Momento d'inerzia all'imbardata	I_z	40 kg m ²
Momento d'inerzia misto	I_{xz}	-2 kg m ²
Coefficiente di resistenza aerodinamica (accelerazione)	$C_D A$	0.202 m ²
Coefficiente di resistenza aerodinamica (decelerazione)	$C_D A$	0.508 m ²
Coefficiente di lift	C_L	0.03 Ns ² /m ²
Altezza centro aerodinamico	HCA	0.514 m
Posizione longitudinale centro aerodinamico	BCA	0.743 m
Ammortizzatore di sterzo		20 Nms/rad
Gruppo anteriore		
Massa	M_f	30 kg
Altezza baricentro	h_f	0.55 m
Posizione longitudinale baricentro	b_f	1.360 m
Momento d'inerzia secondo l'asse x	I_{fx}	2.5 kg m ²
Momento d'inerzia secondo l'asse y	I_{fy}	3.0 kg m ²
Momento d'inerzia secondo l'asse z	I_{fz}	0.48 kg m ²

Ruota e pneumatico posteriore		
Massa non sospesa	U_{m_r}	25 kg
Inerzia assiale	I_{w_r}	0.67 kg m^2
Raggio di rotolamento	R_r	0.33 m
Raggio del toroide (sezione trasversale)	R_{t_r}	0.095 m
Rigidezza strutturale radiale	k_{p_r}	154000 N/m
Smorzamento radiale	c_{p_r}	200 Ns/m
Rigidezza alla deriva (non dimensionale)	k_{λ_r}	15 1/rad
Rigidezza al rollio (non dimensionale)	k_{ϕ_r}	0.8 1/rad
Lunghezza di rilassamento	σ_r	0.15 m
Coefficiente d'attrito longitudinale	μ_x	1.0*
Coefficiente d'attrito laterale	μ_y	1.4*
Ruota e pneumatico anteriore		
Massa non sospesa	U_{m_f}	11 kg
Inerzia assiale	I_{w_f}	0.41 kg m^2
Raggio di rotolamento	R_f	0.30 m
Raggio del toroide (sezione trasversale)	R_{t_f}	0.06 m
Rigidezza strutturale radiale	k_{p_f}	157000 N/m
Smorzamento radiale	c_{p_f}	200 Ns/m
Rigidezza alla deriva (non dimensionale)	k_{λ_f}	13 1/rad
Rigidezza al rollio (non dimensionale)	k_{ϕ_f}	0.9 1/rad
Lunghezza di rilassamento	σ_f	0.12 m
Coefficiente d'attrito longitudinale	μ_x	1.0*
Coefficiente d'attrito laterale	μ_y	1.4*
Motore		
Potenza massima	200 kW	
Curva di coppia	2000 RPM	32 Nm
	7000	93
	8000	101
	9000	115
	10000	117
	11000	117
	12000	117

	13000	116
	14000	114.5
	14500	113
	15000	110
	15500	107
	16500	95
	17000	40
Trasmissione		
Rapporto primaria		1.559
1 ^a marcia		2.429
2 ^a marcia		2.133
3 ^a marcia		1.889
4 ^a marcia		1.647
5 ^a marcia		1.450
6 ^a marcia		1.316
Raggio corona	R_c	0.11 m
Raggio pignone	R_p	0.04 m
Sospensione posteriore		
Precarico molla		-15 Nm
Rigidezza molla		18500 Nm/rad
Coefficiente di smorzamento		925 Nms/rad
Sospensione anteriore		
Precarico molla		-40 N
Rigidezza lineare molla		25000 N/m
Rigidezza cubica molla		350000 N/m ³
Coefficiente di smorzamento in estensione		1000 Ns/m
Coefficiente di smorzamento in compressione		1000 Ns/m

*: salvo diversamente specificato nel testo.