

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Soluzioni classiche per la stringa relativistica

RELATORE:

Prof. Stefano Giusto

LAUREANDO:

Francesco Stampa

Anno Accademico 2015/2016

Indice

1	Introduzione	5
2	Azione della stringa relativistica	9
3	Equazioni del moto e quantità conservate	15
3.1	Equazioni del moto	15
3.2	Quantità conservate	17
4	Stringa ripiegata in AdS_3	21
4.1	Equazioni del moto	22
4.2	Moto di una stringa ripiegata in rotazione	23
4.3	Studio della funzione $f(\sigma)$	24
4.4	Quantità conservate	28

Capitolo 1

Introduzione

Il presente lavoro di tesi si occupa dello sviluppo di una teoria relativistica non quantistica del moto di una stringa elementare.

Con l'espressione *stringa elementare* si intende una generalizzazione del concetto di punto materiale largamente diffuso in Fisica: essa sta a definire un'entità dotata di una singola dimensione (a differenza del punto, a cui non viene assegnata alcuna dimensione), ma che non è per questo costituita da oggetti più piccoli opportunamente disposti. Si svilupperà, per intendersi, la dinamica di una stringa che non è composta né da atomi, né da particelle subatomiche, ma che rappresenta il componente più piccolo e fondamentale della realtà.

Questa generalizzazione della teoria delle particelle puntiformi ha un interesse particolare per la Fisica moderna: la sostituzione del punto materiale con la stringa elementare quale entità che compone la materia a livello primario è stata storicamente il primo passo nella formulazione della teoria delle stringhe.

La teoria delle stringhe è uno dei prodotti relativamente più recenti della fisica teorica: è solo dagli anni '70 del secolo scorso che si è manifestato questo nuovo modo di interpretare la realtà davanti ai nostri occhi, e da allora la sua popolarità non ha fatto che crescere esponenzialmente.

L'aspetto che l'ha fatta emergere tra tutte le teorie che ogni anno vengono proposte, e che ne ha garantito la fama presso anche i non addetti ai lavori, è l'unificazione che permette di raggiungere tra il Modello Standard e la Relatività Generale: il primo è una teoria quantistica di campo, e come tale è sempre risultato incompatibile con la seconda.

Le teorie non quantistiche (dette *classiche*) hanno sempre mostrato problemi di consistenza dovuti alla comparsa di risultati infiniti nel calcolo di alcune quantità che invece sarebbero dovute essere finite e ben determinate. Volendo fare un esempio si possono citare le divergenze ultraviolette dell'elettromagnetismo classico: quando si tenta di calcolare l'energia del campo elettrico di una carica puntiforme si ottiene un valore infinito; questa incongruenza è stata superata con l'avvento della QED (acronimo di *elettrodinamica quantistica*) ed in generale la procedura di rinormalizzazione introdotta dalle teorie quantistiche di campo ha permesso di rendere consistenti quasi tutte le teorie classiche. La Relatività Generale però fa eccezione: non si è trovato nessuno stratagemma per procedere alla sua rinormalizzazione.

La teoria delle stringhe si candida come alternativa a tale procedimento e riesce a superare anche quest'ultima incompatibilità, proponendo un'elegante formulazione della gravità quantistica.

Spiegare come ciò sia possibile coinvolge il sopracitato passaggio dal formalismo del punto

materiale a quello della stringa elementare. Nella teoria delle stringhe infatti ogni particella puntiforme viene sostituita da un particolare modo di vibrazione di una microscopica stringa fondamentale. Ogni quark ha un determinato modo di vibrazione corrispondente, ogni leptone un altro, ed anche le particelle mediatrici delle interazioni fondamentali si possono collegare ai propri rispettivi modi di vibrazione: in particolare uno di questi stati corrisponde al gravitone, ossia il quanto del campo gravitazionale. In questo senso si può dire che la teoria delle stringhe riesce a completare la tanto sfuggente quantizzazione della gravità.

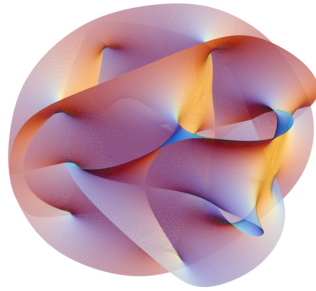


Figura 1.1: Rappresentazione artistica dello spazio in cui si muovono le stringhe

Va ora specificato che non esiste una sola teoria delle stringhe. Una prima suddivisione può essere fatta tra le teorie che prevedono l'esistenza di sole stringhe chiuse (ossia per le quali non esistono estremi) e quelle che accettano anche le stringhe aperte, dotate cioè di due capi distinti. Poiché è previsto che le stringhe aperte possano formarne di chiuse congiungendo i propri estremi non vengono considerate teorie nelle quali sono presenti solo stringhe aperte. Una seconda distinzione invece si può operare tra le teorie di stringa bosonica e le teorie di superstringa. Le prime introducono solamente vibrazioni che corrispondono a bosoni, mentre non prevedono l'esistenza di fermioni: per questo motivo vengono considerate non realistiche, ma sono relativamente semplici e permettono di sviluppare concetti ed eseguire calcoli comunque utili. Le superstringhe al contrario ammettono stati corrispondenti sia a bosoni che a fermioni: dal fatto che queste due categorie di particelle siano legate dalla *supersimmetria* deriva il nome assegnato a questo genere di teorie.

Semplificando all'estremo è stato detto che la teoria delle stringhe consiste nella descrizione quantistica del moto di una stringa: i modi di vibrazione citati poco sopra devono infatti rispettare le condizioni imposte dalle regole di quantizzazione.

Non bisogna però dimenticare che la teoria deve essere in accordo con la Relatività Ristretta, prima ancora di passare ad una formulazione quantistica. È proprio a questo livello che si inserisce ed acquista interesse l'elaborato di tesi: si studierà la dinamica di una stringa elementare in maniera consistente con la Relatività Ristretta (per questo motivo si parla di *stringa relativistica*), senza procedere con la quantizzazione della teoria (ossia limitandosi alle *soluzioni classiche* delle equazioni del moto).

Per rendere la trattazione più generale e più interessante si ricaveranno le equazioni del moto per una stringa relativistica che si muove in uno spaziotempo curvo, una scelta che troverà la sua motivazione nel Capitolo 4, quando si renderà necessario indagare il comportamento di una stringa in uno spazio Anti de Sitter. Inoltre non verrà mai specificato il numero di dimensioni dello spazio in cui si muove la stringa, poiché a livello classico esso può essere deciso arbitrariamente. Procedendo con la quantizzazione invece si noterebbe che il numero di dimensioni spaziali deve assumere determinati valori ben precisi affinché la trattazione

sia consistente: le teorie di stringa bosonica necessitano ad esempio di 26 dimensioni, mentre quelle di superstringa ne prevedono 10. Il formalismo classico da noi sviluppato invece produrrà dei risultati che saranno validi per uno spazio con un numero qualsiasi di dimensioni.

La tesi si compone di tre capitoli oltre all'introduzione. Nel *Capitolo 2* si comincia con la scrittura dell'azione per una stringa relativistica, che come vedremo può essere presentata in due formulazioni diverse (ma equivalenti) a seconda della convenienza.

Nel *Capitolo 3* si utilizzeranno i risultati della sezione precedente per ricavare le equazioni del moto, introducendo poi il teorema di Noether come metodo per derivare le quantità conservate lungo le soluzioni di esse; quando sarà possibile ci si ricondurrà al caso particolare di uno spazio piatto, mostrando risultati che potranno risultare familiari al lettore.

Nel *Capitolo 4* infine si userà il formalismo sviluppato per studiare il moto di una stringa in un determinato spazio curvo, detto Anti de Sitter. Come verrà in seguito spiegato più nel dettaglio, questo caso particolare ha una certa importanza per la Fisica teorica degli ultimi decenni: la cosiddetta corrispondenza AdS/CFT infatti propone una dualità tra la dinamica di una stringa all'interno di questo spazio e un'importante teoria di campo conforme. Si è mostrato effettivamente che alcuni risultati ottenuti con metodi molto laboriosi all'interno di quest'ultima teoria si possono ricavare, stabilendo le giuste corrispondenze tra i due sistemi, anche nell'ambito della teoria di stringa, il tutto però attraverso procedimenti più semplici.

Capitolo 2

Azione della stringa relativistica

Il primo passo per ricavare le equazioni del moto di una stringa relativistica è la scrittura dell'azione: per far ciò partiamo dall'assunzione che l'azione di una stringa debba essere un funzionale della sua traiettoria.

Analogamente al moto di una particella, che traccia nello spaziotempo una linea detta *world-line*, una stringa nel suo moto traccia una superficie, detta *world-sheet*: proprio come nei corsi di Relatività si ricava l'azione di una particella moltiplicando la lunghezza della sua world-line per una costante che restituisca la corretta unità di misura, così otterremo l'azione di una stringa (detta *azione di Nambu-Goto*) moltiplicando la superficie del suo world-sheet per uno scalare.

Questo modo di agire è piuttosto naturale e ci assicura che l'azione sia a sua volta uno scalare di Lorentz, ossia che non sia dipendente dalla scelta di sistema di riferimento effettuata: infatti la superficie del world-sheet è, come vedremo, la medesima per qualsiasi osservatore. Ciò è a sua volta sufficiente per garantire che le equazioni del moto che si otterranno applicando il principio variazionale siano invarianti per trasformazioni di Lorentz e quindi consistenti con la teoria della relatività.

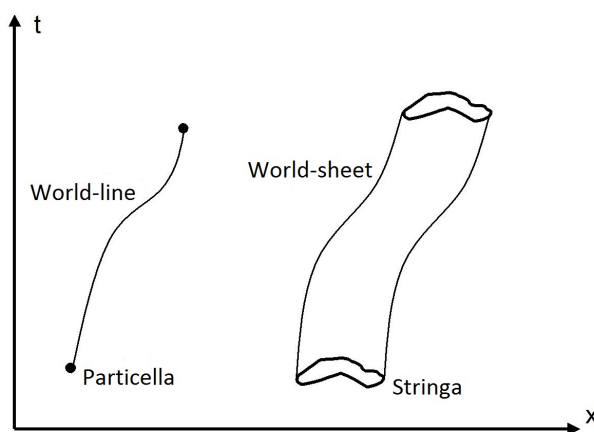


Figura 2.1: World-line e world-sheet

Andiamo quindi a vedere come possiamo esprimere l'area del world-sheet. Come preannunciato, invece di restringerci ad uno spazio piatto analizziamo il caso in cui il world-sheet è

immerso in uno spazio curvo, ossia quando è una sottovarietà di una varietà n -dimensionale. Partiamo dal caso in cui il nostro spazio curvo ha segnatura $(n, 0)$, ossia si tratta di una varietà riemanniana. Sappiamo ora che una superficie può essere parametrizzata con due variabili e quindi, denominando questi due parametri ξ^0 e ξ^1 , il world-sheet viene identificato dalla funzione di n componenti $\vec{x}(\xi^0, \xi^1)$. Si può dimostrare inoltre che l'area di questa superficie è data da

$$A = \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^0} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^0}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^0} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right)^2} \quad (2.1)$$

dove l'integrazione è svolta sul dominio dei parametri e il puntino rappresenta il prodotto scalare dello spazio tangente alla varietà nella quale è immersa la superficie in esame.

Per dare una giustificazione della (2.1) partiamo considerando un rettangolo infinitesimo nello spazio dei parametri, di lati $d\xi^0$ e $d\xi^1$: vogliamo trovare l'area dA del pezzetto di superficie immagine di questo rettangolo sotto l'applicazione \vec{x} . In generale il pezzetto di superficie sarà un parallelogramma di lati $d\vec{v}_0$ e $d\vec{v}_1$, immagini rispettivamente dei vettori $(d\xi^0, 0)$ e $(0, d\xi^1)$, per cui si può scrivere $d\vec{v}_0 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^0} d\xi^0$ e $d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1$. Usando ora la formula per l'area di un parallelogramma, e avendo definito θ l'angolo tra i vettori $d\vec{v}_0$ e $d\vec{v}_1$, si ha

$$dA = |d\vec{v}_0| |d\vec{v}_1| \sin \theta = |d\vec{v}_0| |d\vec{v}_1| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{|d\vec{v}_0|^2 |d\vec{v}_1|^2 - |d\vec{v}_0 \cdot d\vec{v}_1|^2} \cos^2 \theta$$

Riscrivendo il tutto in termini di prodotti scalari e recuperando le espressioni per $d\vec{v}_0$ e $d\vec{v}_1$ viste sopra si ottiene

$$dA = d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^0} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^0}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^0} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right)^2}$$

da cui integrando sul dominio dei parametri si ritrova la (2.1).

Vale la pena anche di soffermarsi un istante sulla definizione di prodotto scalare dello spazio tangente. Scegliendo un sistema di coordinate x^1, \dots, x^n sulla varietà, ricordiamo innanzitutto che uno spazio curvo è dotato di una metrica $ds^2 = dx^i dx^j G_{ij}(x)$ dove $G_{ij}(x)$ è il tensore metrico della varietà e gli indici i e j variano da 1 a n . Si può identificare ora ogni punto di quest'ultima con una n -upla x^i : prendiamo allora sulla varietà un punto x^i e altri due punti ad esso infinitesimamente vicini y^i e z^i , definendo sullo spazio tangente alla varietà nel punto x^i i vettori infinitesimi $\delta y^i \equiv y^i - x^i$ e $\delta z^i \equiv z^i - x^i$. Definiamo quindi il prodotto scalare tra i vettori dello spazio tangente $\delta y \cdot \delta z \equiv \delta y^i \delta z^j G_{ij}(x) \equiv \delta y^i \delta z_i$.

Per ricavare l'area di una superficie nello spaziotempo della relatività il procedimento è analogo a quello visto sopra: il risultato sarà in una forma molto simile alla (2.1), con l'unica accortezza che la segnatura della metrica della varietà non è più $(n, 0)$, bensì $(n-1, 1)$. Questo segno meno per la coordinata temporale all'interno della metrica fa sì che l'argomento della radice che compare nella (2.1) diventi negativo e quindi per avere una quantità positiva è necessario cambiare segno alla differenza, ottenendo

$$A = \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^0} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^0} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^0}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right)} \quad (2.2)$$

Possiamo subito notare che la quantità così scritta è uno scalare di Lorentz: il fatto che i vettori coinvolti siano legati tra loro solamente da prodotti scalari garantisce infatti che il risultato del calcolo sia il medesimo per qualsiasi osservatore, giacché il prodotto scalare tra due vettori è sempre un invariante.

Introduciamo adesso un piccolo cambio nella notazione: d'ora in avanti utilizzeremo il simbolo maiuscolo X^μ (con $\mu = 0, 1, \dots, n-1$) per indicare le n funzioni che identificano la superficie del world-sheet nello spaziotempo, mentre il simbolo minuscolo x^μ indicherà semplicemente le n coordinate fissate sullo spaziotempo. Questa scelta ci permetterà di poter distinguere tra le funzioni e le coordinate senza bisogno di dover aggiungere ogni volta l'argomento (ξ^0, ξ^1) al simbolo X^μ . Inoltre il puntino del prodotto scalare verrà sostituito d'ora in avanti dalla scrittura come somma sulle componenti che abbiamo visto sopra, ossia $\vec{X} \cdot \vec{Y} = X^\mu Y^\nu G_{\mu\nu}(X^\alpha)$.

Ora che abbiamo trovato il modo di esprimere la superficie del world-sheet, e che abbiamo mostrato che è un invariante di Lorentz, per scrivere l'azione completa non ci resta che moltiplicare quanto ottenuto per uno scalare che ci restituisca le unità di misura corrette di un'azione, ossia $\frac{[Massa] \times [Lunghezza]^2}{[Tempo]}$. L'area in (2.2) ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato e si vede con un rapido calcolo che per ottenere il dimensionamento corretto occorre una costante che abbia le dimensioni di $\frac{[Forza]}{[Velocità]} = \frac{[Massa]}{[Tempo]}$. Sembra perciò l'idea più naturale moltiplicare l'area per $\frac{T_0}{c}$, dove T_0 è la tensione della stringa e c è la velocità della luce nel vuoto.

Aggiungendo un segno meno per ragioni di consistenza (è necessario ad esempio affinché studiando il limite in cui le dimensioni della stringa tendono a zero ci si riconduca all'azione di una particella) possiamo quindi scrivere l'azione di Nambu-Goto per una stringa relativistica

$$S_{NB} = -\frac{T_0}{c} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^0} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^1} G_{\mu\nu}(X)\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^0} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^0} G_{\mu\nu}(X)\right) \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^1} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^1} G_{\mu\nu}(X)\right)} \quad (2.3)$$

L'azione appena scritta può essere presentata in una formulazione leggermente più compatta introducendo la matrice 2×2 (il cui vero significato sarà chiarito in seguito) $\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} G_{\mu\nu}(X)$, con α e β che assumono i valori 0 e 1:

$$S_{NB} = -\frac{T_0}{c} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{-\det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} G_{\mu\nu}(X)\right)}$$

Usando questa espressione compatta si potrebbe mostrare che l'azione di Nambu-Goto è invariante anche per riparametrazioni oltre che per trasformazioni di Lorentz: questa caratteristica discende dal fatto che si sta costruendo l'azione di una stringa elementare, non composta da altri oggetti più piccoli. L'impossibilità di tenere traccia dei singoli "punti" che classicamente dovrebbero costituire la stringa comporta l'assenza di una parametrizzazione privilegiata per il world-sheet, che invece dovrebbe esistere se si potessero distinguere i vari elementi costituenti della stringa.

L'azione di Nambu-goto ha il vantaggio di essere ricavabile in maniera relativamente rapida con argomenti già usati per il moto di una particella, ma presenta uno svantaggio considerevole: è presente al suo interno una radice quadrata. Questa radice, che può sembrare innocua ad un primo sguardo, è in realtà piuttosto problematica, poiché rende complicata la scrittura

delle equazioni del moto attraverso l'applicazione del principio variazionale.

Di conseguenza risulta comodo introdurre un'azione equivalente, detta *azione di Polyakov*, che sia più facile da trattare in un procedimento che coinvolge calcoli di variazioni. L'azione di Polyakov ha la forma

$$S_P = -\frac{T_0}{2c} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} G_{\mu\nu}(X) \quad (2.4)$$

dove abbiamo introdotto $g_{\alpha\beta}$, una metrica bidimensionale ausiliaria definita sul world-sheet (detta appunto *metrica di world-sheet*) con segnatura $(1, 1)$: $g^{\alpha\beta}$ è la sua inversa e g è suo il determinante (che, a causa della segnatura, è negativo e quindi necessita di un segno meno sotto la radice). Più correttamente bisognerebbe specificare che la metrica $g^{\alpha\beta}$ è funzione dei parametri ξ^0 e ξ^1 , ossia bisognerebbe scrivere $g^{\alpha\beta}(\xi)$ (dove con ξ si intende una dipendenza sia da ξ^0 che da ξ^1): nel seguito ometteremo l'argomento tranne quando necessario per evidenziare la dipendenza da esso.

Questa azione di Polyakov mantiene l'invarianza per trasformazioni di Poincaré propria dell'azione di Nambu-Goto, poiché anche in essa i vettori coinvolti sono legati tra loro con prodotti scalari e la metrica di world-sheet introdotta non viene modificata né da traslazioni, né da trasformazioni di Lorentz. Oltre a quella per il gruppo di Poincaré l'azione di Polyakov presenta altre due fondamentali invarianze: rimane infatti immutata per riparametrizzazioni del world-sheet (esattamente come l'altra forma) e per trasformazioni di Weyl. Trattiamole ora nel dettaglio: ci serviranno in un secondo momento per ricavare le equazioni del moto di una stringa.

Sotto una riparametrizzazione $\xi \rightarrow \tilde{\xi}(\xi)$ vediamo come trasformano i singoli componenti dell'azione di Polyakov:

- $d^2\xi \equiv d\xi^0 d\xi^1 \rightarrow d^2\tilde{\xi} = \left| \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi} \right| d^2\xi = (\det M) d^2\xi$ dove si è indicata con $M = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi}$ la matrice jacobiana del diffeomorfismo.
- $g_{\alpha\beta}(\xi) \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\xi}) = g_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \tilde{\xi}^\alpha} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial \tilde{\xi}^\beta}$ poiché la distanza tra due punti sul world-sheet non deve dipendere dalla scelta della parametrizzazione, ossia $ds^2 = g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \tilde{g}_{\alpha\beta} d\tilde{\xi}^\alpha d\tilde{\xi}^\beta$.
- $\sqrt{-g} \rightarrow \sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-g} (\det M)^{-1}$ poiché $\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \tilde{\xi}^\alpha} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial \tilde{\xi}^\beta} = g_{\gamma\delta} (M^{-1})^\gamma_\alpha (M^{-1})^\delta_\beta = [(M^{-1})^T g (M^{-1})]_{\alpha\beta}$ da cui $\det \tilde{g} = (\det g) (\det M^{-1})^2 = (\det g) (\det M)^{-2}$.
- $\partial_\alpha X^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \rightarrow \frac{\partial X^\mu}{\partial \tilde{\xi}^\alpha} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \tilde{\xi}^\alpha} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\beta}$ e analogamente per $\partial_\beta X^\nu \equiv \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}$.
- $g^{\alpha\beta}(\xi) \rightarrow \tilde{g}^{\alpha\beta}(\tilde{\xi}) = g^{\gamma\delta} \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial \xi^\gamma} \frac{\partial \tilde{\xi}^\beta}{\partial \xi^\delta}$ poiché $g^{\alpha\beta}$ è l'inversa di $g_{\alpha\beta}$.

Da quanto appena esposto risulta evidente che $d^2\xi \sqrt{-g}$ è invariante sotto diffeomorfismi, come pure $g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$. Il tensore metrico dello spaziotempo $G_{\mu\nu}(X^\alpha)$ è necessariamente indipendente dalla scelta di parametro effettuata e quindi possiamo concludere che l'azione di Polyakov è effettivamente invariante per riparametrizzazioni del tipo $\xi \rightarrow \tilde{\xi}(\xi)$.

Una trasformazione di Weyl invece agisce soltanto sul tensore metrico del world-sheet $g_{\alpha\beta}$ e lo trasforma in $\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{\Omega(\xi)} g_{\alpha\beta}$, dove $\Omega(\xi)$ è una qualsiasi funzione dei parametri. Si tratta quindi di un'operazione di riscaldamento locale della metrica di world-sheet, come si può vedere in Figura 2.2.

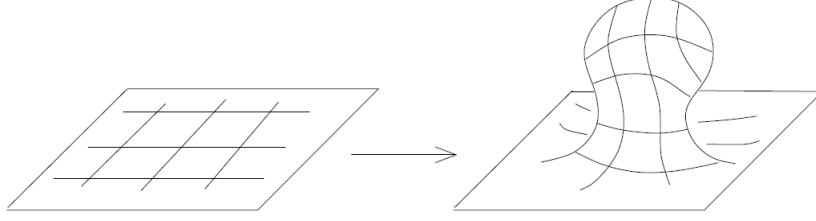


Figura 2.2: Trasformazione di Weyl

Mostriamo come l'azione di Polyakov sia effettivamente invariante sotto queste trasformazioni, descrivendo anche in questo caso in che modo cambiano i suoi fattori:

- $g^{\alpha\beta} \longrightarrow \tilde{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} e^{-\Omega(\xi)}$
- $\sqrt{-g} \longrightarrow \sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-g} e^{\Omega(\xi)}$ poiché in un generico *world-volume* a m dimensioni si dimostra facilmente che il determinante di $g_{\alpha\beta}$ scala con un fattore $e^{m\Omega(\xi)}$

Notiamo quindi che $\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}$ resta immutato sotto trasformazioni di Weyl e che questa invarianza esiste solamente per un world-volume bidimensionale, ossia un world-sheet. Dato che le trasformazioni di Weyl agiscono solamente sulla metrica di world-sheet l'azione intera risulta invariante sotto di esse.

Torniamo ora alla relazione tra l'azione di Polyakov e quella di Nambu-Goto: abbiamo affermato che sono equivalenti, ossia che conducono alle stesse equazioni del moto, ma non lo si è ancora dimostrato. Bisogna riuscire insomma a ottenere la seconda partendo dalla prima. Per far ciò bisogna notare che l'azione di Polyakov ha due enti dinamici indipendenti, su entrambi i quali si può applicare il principio variazionale: da una parte ci sono le coordinate X^μ della stringa nello spaziotempo, dall'altra c'è la metrica di world-sheet $g_{\alpha\beta}$. Utilizzando il calcolo delle variazioni sulle coordinate si ottengono le equazioni del moto per la stringa, mentre utilizzandolo sulla metrica ausiliaria otteniamo le equazioni del moto per $g_{\alpha\beta}$, che ci permetteranno di ritrovare l'azione di Nambu-Goto. Vediamo come.

Calcoliamo la variazione dell'azione in corrispondenza della variazione della metrica $g_{\alpha\beta}$:

$$\delta_{[g_{\alpha\beta}]} S_P = \frac{d}{da} S(g_{\alpha\beta} + a\delta g_{\alpha\beta}) \Big|_{a=0} = \int d^2\xi \frac{d}{da} \mathcal{L} \left(g^{\alpha\beta} + a\delta g^{\alpha\beta}, \sqrt{-\det(g_{\alpha\beta} + a\delta g_{\alpha\beta})} \right) \Big|_{a=0}$$

dove abbiamo definito la densità di lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{2c} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}$$

Se si svolge la derivata rispetto ad a nel dettaglio, tenendo a mente che se $|a \delta g_{\alpha\beta}| \ll 1$ vale l'approssimazione $\det(g_{\alpha\beta} + a\delta g_{\alpha\beta}) = \det(g_{\alpha\beta}) [1 + \text{tr}(a g^{-1} \delta g)] = g + a g g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ e che $g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}$ (poiché $g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = \text{cost} \Rightarrow \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = 0$), si ottiene

$$\begin{aligned} \delta_{[g_{\alpha\beta}]} S_P &= \int d^2\xi \delta g^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sqrt{-g}} \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta} \right] = \\ &= -\frac{T_0}{2c} \int d^2\xi \delta g^{\alpha\beta} \left[\sqrt{-g} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu} - g^{\gamma\delta} \partial_\gamma X^\mu \partial_\delta X^\nu G_{\mu\nu} \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta} \right] \end{aligned}$$

Da questa equazione notiamo ora che la variazione dell'azione rispetto a $g_{\alpha\beta}$ si annulla per ogni $\delta g^{\alpha\beta}$ se e solo se

$$\sqrt{-g}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu} - \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\gamma\delta}\partial_\gamma X^\mu\partial_\delta X^\nu G_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} = 0$$

ossia se e solo se

$$\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\partial_\gamma X^\mu\partial_\delta X^\nu G_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}$$

Ma poiché $\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\partial_\gamma X^\mu\partial_\delta X^\nu G_{\mu\nu}$ non ha indici liberi si tratta semplicemente di un numero e quindi possiamo concludere che $g_{\alpha\beta}$ è proporzionale al membro di sinistra, ossia

$$g_{\alpha\beta} \propto \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}$$

Abbiamo quindi dimostrato che la metrica di world-sheet è proporzionale alla metrica indotta su di esso (la possiamo definire $\gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}$) dalla metrica $G_{\mu\nu}$ dello spaziotempo in cui è immerso: questa metrica indotta è proprio la matrice 2×2 che avevamo introdotto nella forma compatta dell'azione di Nambu-Goto. Imponiamo ora che la costante di proporzionalità tra la metrica di world-sheet e quella indotta sia positiva, cosicché un vettore che sia di tipo tempo (o spazio) secondo la prima, sia di tipo tempo (rispettivamente spazio) anche per la seconda. Possiamo allora scrivere

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}f^2(\xi) = \gamma_{\alpha\beta}f^2(\xi) \quad (2.5)$$

dove $f(\xi)$ è una generica funzione reale dei parametri ξ^0 e ξ^1 che, essendo elevata al quadrato, garantisce che la costante di proporzionalità di cui si è discusso poco fa sia positiva.

Con un rapido calcolo si può dimostrare che dalla (2.5) discendono due conseguenze: $g = f^4(\xi)\gamma$ (dove γ sta ad indicare il determinante della metrica $\gamma_{\alpha\beta}$) e $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{f^2(\xi)}\gamma^{\alpha\beta}$. Da queste uguaglianze si ricava ora $\sqrt{-g}g^{\alpha\beta} = \sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}$ che ci permette infine di dimostrare l'equivalenza dell'azione di Polyakov e quella di Nambu-Goto:

$$\begin{aligned} S_P &= -\frac{T_0}{2c} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{-g}g^{\alpha\beta} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} G_{\mu\nu} = -\frac{T_0}{2c} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} G_{\mu\nu} = \\ &= -\frac{T_0}{2c} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} = -\frac{T_0}{2c} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{-\gamma} \cdot 2 = \\ &= -\frac{T_0}{c} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{-\det(\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu})} = S_{NB} \end{aligned}$$

Capitolo 3

Equazioni del moto e quantità conservate

3.1 Equazioni del moto

Ora che siamo riusciti a scrivere l'azione della stringa relativistica in una forma che sia comoda da trattare, possiamo procedere con il calcolare le equazioni del moto per la stringa stessa. Applicheremo come preannunciato il principio variazionale, ma prima di procedere in questo senso è conveniente semplificare l'azione di Polyakov (2.4), utilizzando l'invarianza per riparametrazioni e per trasformazioni di Weyl dimostrata nel capitolo precedente.

Il nostro scopo è quello di rendere il più semplice possibile il tensore metrico di world-sheet $g_{\alpha\beta}$. Partiamo osservando che $g_{\alpha\beta}$ è necessariamente simmetrico e quindi si può scrivere nella forma $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00}(\xi) & g_{01}(\xi) \\ g_{01}(\xi) & g_{11}(\xi) \end{pmatrix}$.

Notiamo perciò che $g_{\alpha\beta}$ ha tre componenti indipendenti, che di conseguenza non potranno essere del tutto determinate da una riparametrazione del tipo $\xi^0 \rightarrow \tilde{\xi}^0(\xi^0, \xi^1)$ e $\xi^1 \rightarrow \tilde{\xi}^1(\xi^0, \xi^1)$, poiché essa permette di fissare solamente due gradi di libertà. Possiamo però richiedere che le componenti del tensore metrico trasformato $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ soddisfino le condizioni $\tilde{g}_{01}(\tilde{\xi}) = 0$ e $\tilde{g}_{00}(\tilde{\xi}) + \tilde{g}_{11}(\tilde{\xi}) = 0$ in modo che si possa scrivere $\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{\Omega(\tilde{\xi})} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Non resta che effettuare ora una trasformazione di Weyl $\tilde{g}_{\alpha\beta} \rightarrow e^{-\Omega(\tilde{\xi})} \tilde{g}_{\alpha\beta}$ per ottenere infine il tensore metrico $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ che è il più semplice ottenibile e fornisce (grazie all'invarianza dell'azione sotto le trasformazioni effettuate) le stesse equazioni del moto della metrica di partenza.

L'azione di Polyakov assume dunque una forma semplificata:

$$S_P = -\frac{T_0}{2c} \int d\xi^0 d\xi^1 \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X^\alpha) \quad (3.1)$$

dove abbiamo anche evidenziato la dipendenza della metrica di spaziotempo $G_{\mu\nu}$ dalle coordinate del world-sheet X^α . Possiamo anche ridefinire per comodità la densità di lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{2c} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X^\alpha) \quad (3.2)$$

Procediamo a questo punto con la derivazione delle equazioni del moto: calcoliamo la variazione dell'azione in corrispondenza di una variazione della coordinata X^μ

$$\begin{aligned}
\delta_{[X^\mu]} S_P &= -\frac{T_0}{2c} \int d\xi^0 d\xi^1 \eta^{\alpha\beta} \frac{d}{da} \left[\partial_\alpha (X^\mu + a\delta X^\mu) \partial_\beta (X^\nu + a\delta X^\nu) G_{\mu\nu}(X + a\delta X) \right] \Big|_{a=0} = \\
&= -\frac{T_0}{2c} \int d\xi^0 d\xi^1 \eta^{\alpha\beta} \left[\partial_\alpha (\delta X^\mu) \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta (\delta X^\nu) G_{\mu\nu}(X) + \right. \\
&\quad \left. + \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X^\gamma} \delta X^\gamma \right] = \\
&= -\frac{T_0}{2c} \int d\xi^0 d\xi^1 \left[2\partial_\alpha (\delta X^\mu) \partial^\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X^\gamma} \delta X^\gamma \right] = \\
&= -\frac{T_0}{2c} \int d\xi^0 d\xi^1 \left[2\partial_\alpha (\delta X^\mu \partial^\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(X)) - 2\partial_\alpha (\partial^\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(X)) \delta X^\mu + \right. \\
&\quad \left. + \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X^\gamma} \delta X^\gamma \right] = \\
&= -\frac{T_0}{2c} \int d\xi^0 d\xi^1 \delta X^\gamma \left[\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X^\gamma} - 2\partial_\alpha (\partial^\alpha X^\nu G_{\gamma\nu}(X)) \right]
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo imposto le necessarie condizioni al contorno per far annullare il termine $2\partial_\alpha (\delta X^\mu \partial^\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(X))$.

Di conseguenza questa variazione dell'azione è uguale a zero per ogni δX^μ se e solo se

$$\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X^\gamma} - 2\partial_\alpha (\partial^\alpha X^\nu G_{\gamma\nu}(X)) = 0 \quad (3.3)$$

che è l'equazione del moto di una stringa in uno spazio curvo, ossia su una varietà con tensore metrico $G_{\mu\nu}(X)$.

Possiamo ora notare che questa equazione si riduce ad una forma ben nota nel caso particolare di uno spazio piatto, ossia nel caso in cui il tensore metrico della varietà in cui si muove la stringa sia il tensore dello spaziotempo di Minkowski $G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu}$. Si ha infatti $\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X^\gamma} = 0$ e $\partial^\alpha X^\nu G_{\gamma\nu}(X) = \partial^\alpha X^\nu \eta_{\gamma\nu}$ da cui si ottiene l'equazione del moto

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\nu = 0 \quad (3.4)$$

che è la familiare equazione delle onde o equazione di d'Alembert.

Si verifica facilmente che la (3.4) ha come soluzione

$$X^\nu(\xi^0, \xi^1) = F^\nu(\xi^0 + \xi^1) + G^\nu(\xi^0 - \xi^1)$$

dove $F^\nu(u)$ e $G^\nu(u)$ sono due funzioni arbitrarie di una variabile. Si mostra altrettanto facilmente che imponendo la condizione al contorno $\frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^1} \Big|_{\xi^1=0} = 0$ ci si restringe alle soluzioni del tipo

$$X^\nu(\xi^0, \xi^1) = X^\nu(\xi^0 + \xi^1) + X^\nu(\xi^0 - \xi^1) \quad (3.4 \text{ bis})$$

dove $X^\nu(u)$ è a sua volta una funzione arbitraria di una variabile. La soluzione per l'equazione delle onde è quindi la somma di una perturbazione propagantesi nella direzione positiva di ξ^1 e di una propagantesi nella direzione opposta.

Tornando alla forma generale dell'equazione del moto (3.3) ricordiamo che bisogna tenere conto anche del vincolo che discende dalle equazioni del moto per la metrica di world-sheet, ossia $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu} f^2(\xi)$, da cui $\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} f^{-2}(\xi)$. Poiché α e β possono assumere solo i valori 0 e 1, andiamo a vedere quali sono le condizioni che derivano nello specifico da questo vincolo.

- Se $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ oppure $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ si ha $\partial_0 X^\mu \partial_1 X^\nu G_{\mu\nu} = 0$
- Se $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ si ha $\partial_0 X^\mu \partial_0 X^\nu G_{\mu\nu} = -f^{-2}(\xi)$
- Se infine $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ si ha $\partial_1 X^\mu \partial_1 X^\nu G_{\mu\nu} = f^{-2}(\xi)$.

Di conseguenza si hanno nel complesso due condizioni:

$$\partial_0 X^\mu \partial_1 X^\nu G_{\mu\nu} = 0 \quad (3.5)$$

e

$$\partial_0 X^\mu \partial_0 X^\nu G_{\mu\nu} + \partial_1 X^\mu \partial_1 X^\nu G_{\mu\nu} = 0 \quad (3.6)$$

che devono essere soddisfatte insieme all'equazione del moto vera e propria (3.3).

Bisogna ora osservare che la scelta dei parametri ξ , operata insieme ad un'opportuna trasformazione di Weyl per ottenere $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, non fissa completamente la gauge: rimane infatti un'invarianza residua che possiamo utilizzare, nel caso di uno spazio piatto, per assegnare un significato intuitivo al parametro ξ^0 .

Andando a definire le coordinate di *lightcone* $\xi^+ \equiv \xi^0 + \xi^1$ e $\xi^- \equiv \xi^0 - \xi^1$ la metrica di world-sheet porge

$$ds^2 = -(d\xi^0)^2 + (d\xi^1)^2 = -d\xi^+ d\xi^-$$

Operando un cambio di coordinate del tipo $\xi^+ \rightarrow \tilde{\xi}^+(\xi^+)$ e $\xi^- \rightarrow \tilde{\xi}^-(\xi^-)$ la metrica trasforma con la comparsa di un fattore moltiplicativo $ds^2 \rightarrow d\tilde{s}^2 = \Omega^2(\xi) ds^2$ che può quindi essere eliminato con un'appropriata trasformazione di Weyl. Infatti si ha

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{\xi}^+ d\tilde{\xi}^- = -\frac{\partial \tilde{\xi}^+}{\partial \xi^+} d\xi^+ \frac{\partial \tilde{\xi}^-}{\partial \xi^-} d\xi^- \equiv \Omega^2(\xi) ds^2$$

Sfruttiamo ora questo ultimo grado di libertà per definire completamente la gauge. Utilizzando la componente 0 della soluzione (3.4 bis), notiamo che è lecito scegliere due parametri $\tilde{\xi}^+$ e $\tilde{\xi}^-$ tali che

$$X^0(\tilde{\xi}) = k \frac{\tilde{\xi}^+ + \tilde{\xi}^-}{2} = k \tilde{\xi}^0$$

ossia mettersi in quella che viene definita *gauge statica*, con k costante necessaria per ragioni dimensionali: in questa gauge quindi la coordinata ξ^0 è proporzionale al tempo e pertanto verrà spesso indicata con il simbolo τ . Per la coordinata di world-sheet ξ^1 invece verrà utilizzata la lettera σ : variando da zero ad un valore massimo σ_c , essa descriverà la posizione lungo la stringa.

3.2 Quantità conservate

Nel seguito acquisteranno importanza alcune quantità che risultano conservate nel moto di una stringa: per questo motivo richiamiamo brevemente il procedimento che si utilizza per ottenere delle quantità conservate a partire da certe proprietà della densità di lagrangiana.

Sia data una teoria di campo con densità di lagrangiana $\mathcal{L}(\phi^a(\xi), \partial_\alpha \phi^a(\xi)) \equiv \frac{\partial \phi^a(\xi)}{\partial \xi^\alpha}$, dove $\phi^a(\xi)$ sono i campi coinvolti, in generale dipendenti dalle coordinate ξ^α dello spazio di riferimento. Si consideri ora una variazione infinitesima di questi campi $\phi^a(\xi) \rightarrow \phi^a(\xi) + \delta\phi^a(\xi)$, tale che $\delta\phi^a(\xi) = \epsilon^i h_i^a(\phi)$, dove le ϵ^i formano un insieme di costanti infinitesime: se la

densità di lagrangiana \mathcal{L} è invariante sotto questa trasformazione allora il teorema di Noether assicura che le correnti j_i^α definite da

$$\epsilon^i j_i^\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^a)} \delta \phi^a \quad (3.7)$$

soddisfano l'equazione di continuità

$$\partial_\alpha j_i^\alpha = 0$$

Precisiamo che nel simbolo j_i^α l'indice i sta a distinguere le varie correnti, mentre l'indice α serve per contrassegnare le diverse componenti di una stessa corrente e quindi varia da 0 a $n - 1$.

Dall'equazione di continuità deriva infine l'eventuale conservazione della carica

$$Q_i \equiv \int d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^{n-1} j_i^0$$

(ottenuta integrando la componente temporale della corrente i -esima sulle coordinate spaziali) lungo le soluzioni del moto: si può infatti avere, imponendo le necessarie condizioni al contorno, che valga $\frac{dQ_i}{d\xi^0} = 0$.

Come esempio prendiamo una stringa che si muove in uno spaziotempo di Minkowski, ossia piatto: poiché il tensore metrico della varietà è in questo caso $\eta_{\mu\nu}$ la densità di lagrangiana risulta essere

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{2c} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} = -\frac{T_0}{2c} (-\partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu)$$

Notiamo quindi che i campi che avevamo indicato sopra come $\phi^a(\xi)$ coincidono in questa lagrangiana con le coordinate della stringa X^μ : poiché \mathcal{L} dipende solo dalle derivate di X^μ una trasformazione dei campi che la lascia invariata è

$$X^\mu \rightarrow X^\mu + \epsilon^\mu$$

dove ϵ^μ è un vettore costante. Si tratta dunque di una traslazione spaziotemporale costante e perciò

$$\delta \phi^\mu = \delta X^\mu = \epsilon^\mu$$

Possiamo adesso costruire la corrente conservata utilizzando la (3.7):

$$\epsilon^\mu j_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \epsilon^\mu$$

Sia chiaro che l'indice μ (che varia da 0 a $n - 1$) ha sostituito i nel contrassegnare le varie correnti conservate, mentre l'indice α (che può assumere i valori 0 e 1) distingue le componenti della singola corrente.

Cancellando il fattore ϵ^μ si ottiene

$$j_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)}$$

ossia

$$(j_\mu^0, j_\mu^1) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 X^\mu)}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 X^\mu)} \right) = \frac{T_0}{c} (\partial_0 X_\mu, -\partial_1 X_\mu)$$

L'equazione di continuità per questa corrente ci restituisce un risultato già noto: si ha infatti

$$\partial_\alpha j_\mu^\alpha = \partial_0 j_\mu^0 + \partial_1 j_\mu^1 = \frac{T_0}{c}(\partial_0 \partial_0 X_\mu - \partial_1 \partial_1 X_\mu) = \frac{T_0}{c}(-\partial_0 \partial^0 X_\mu - \partial_1 \partial^1 X_\mu) = -\frac{T_0}{c} \partial_\alpha \partial^\alpha X_\mu$$

da cui

$$\partial_\alpha j_\mu^\alpha = 0 \iff \partial_\alpha \partial^\alpha X_\mu = 0$$

che è, come avevamo già visto, l'equazione del moto per una stringa in uno spazio piatto. Le cariche conservate p_μ si ottengono integrando la componente temporale della corrente j_μ sullo spazio, ovvero su σ (tenendo l'altra coordinata τ costante):

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_c} j_\mu^0(\tau, \sigma) d\sigma$$

Le cariche conservate sono state definite p_μ in quanto si tratta del momento spaziotemporale trasportato dalla stringa: sono state ricavate infatti integrando nello spazio la quantità $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 X^\mu)}$, ossia la derivata della densità di lagrangiana rispetto alla velocità $\partial_0 X^\mu$, che è la densità di momento canonica.

Indaghiamo ora la conservazione di p_μ :

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_c} \frac{\partial j_\mu^0}{\partial \tau} d\sigma = - \int_0^{\sigma_c} \frac{\partial j_\mu^1}{\partial \sigma} d\sigma = - j_\mu^1|_0^{\sigma_c}$$

Per una stringa chiusa le coordinate $\sigma = 0$ e $\sigma = \sigma_c$ identificano lo stesso punto, e quindi l'ultima quantità scritta si annulla: si ha perciò $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$, ossia il momento trasportato dalla stringa si mantiene costante al variare di τ . Per una stringa aperta invece occorre stabilire le condizioni al contorno dell'equazione del moto:

- Se si impongono le condizioni di estremi liberi $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 X^\mu)}(\tau, 0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 X^\mu)}(\tau, \sigma_c) = 0$ (così chiamate poiché non impongono vincoli sulla posizione degli estremi della stringa) si ottiene banalmente anche in questo caso $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$
- Se si impongono le condizioni di Dirichlet per la i -esima coordinata spaziale $\frac{\partial X^i}{\partial \tau}(\tau, 0) = \frac{\partial X^i}{\partial \tau}(\tau, \sigma_c) = 0$ (ossia vengono fissate le coordinate i -esime degli estremi della stringa) la componente i -esima del momento non risulta necessariamente conservata. Per questo motivo alle condizioni al contorno di Dirichlet non fu assegnato un significato fisico per lungo tempo, fino a quando furono introdotti oggetti noti come D-brane (Figura 3.1) ai quali gli estremi liberi della stringa sono vincolati: con l'aggiunta di queste entità è stato dimostrato che è il momento totale del sistema composto da stringa e D-brana a conservarsi, ripristinando l'interesse attorno a questa ipotesi.

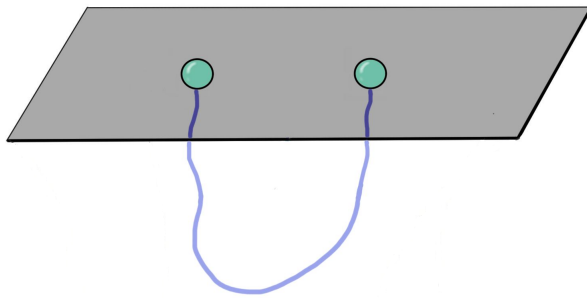


Figura 3.1: Una stringa con gli estremi vincolati a una D2-brana

Capitolo 4

Stringa ripiegata in AdS_3

Un esercizio interessante che si può svolgere con gli elementi di teoria finora esposti consiste nello studiare il moto e le quantità conservate di una stringa ripiegata che vive in uno spazio Anti de Sitter 3-dimensionale (abbreviato in AdS_3). Questo spazio consiste in una varietà lorentziana che può essere descritta, in uno spazio a 4 dimensioni con coordinate $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$ (dove \tilde{x}_1 e \tilde{x}_2 sono coordinate temporali mentre \tilde{x}_3 e \tilde{x}_4 sono coordinate spaziali), dall'equazione

$$\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2 = -1 \quad (4.1)$$

che rappresenta un iperboloide.

Questo calcolo assume anche un significato fisico più profondo, che qui ci limiteremo ad accennare. La corrispondenza AdS/CFT (che sta per Anti de Sitter/Conformal Field Theory) propone infatti l'equivalenza tra una particolare teoria di gauge in 4 dimensioni (nota come N=4 Super Yang-Mills, o N=4 SYM) e una teoria di stringa chiusa su uno spaziotempo a 10 dimensioni. Quest'ultimo ha una struttura ben precisa, con cinque dimensioni che formano una sfera S^5 e le altre cinque che formano uno spazio Anti de Sitter AdS_5 : lo spaziotempo di Minkowski della teoria di gauge può essere così visto come l'ipersuperficie che rappresenta il bordo di questo AdS_5 .

N=4 SYM invece è una delle più semplici teorie di gauge in 4 dimensioni: non ha la pretesa di essere realistica, ma viene utilizzata per testare se i procedimenti utilizzati su di essa possono avere una certa validità anche all'interno di teorie più realistiche e complicate. Per la precisione essa è una teoria di campo conforme (CFT), ossia una teoria di campo invariante per trasformazioni di scala. Queste ultime agiscono sulle coordinate come

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu$$

dove λ è un parametro detto *fattore di scala*, e sui campi come

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x') = \lambda^{-h_r} \phi_r(x)$$

dove h_r è un parametro detto *dimensione conforme* del campo $\phi_r(x)$.

Secondo la corrispondenza AdS/CFT alcuni calcoli che sarebbero molto complicati all'interno della teoria di gauge, risultano invece relativamente semplici all'interno della teoria di stringa una volta identificate le quantità correlate: i campi della CFT corrispondono ai vari stati di stringa, la dimensione conforme del singolo campo corrisponde all'energia trasportata dalla stringa e lo spin del campo è il duale del momento angolare della stringa.

Noi ci limiteremo a studiare una stringa ripiegata che ruota in AdS_3 , sottovarietà del so-
pracitato AdS_5 , poiché, pur essendo più semplice, questa soluzione ha comunque una certa
rilevanza: è infatti duale ad una particolare classe di operatori.

4.1 Equazioni del moto

Partiamo innanzitutto con una scelta di coordinate che ci permetta di parametrizzare lo spazio
in questione: i parametri più comodi per i nostri scopi sono le cosiddette coordinate globali
 $x^\mu = (t, \rho, \phi)$ tali che

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) = (\sinh(\rho) \cos(\phi), \sinh(\rho) \sin(\phi), \cosh(\rho) \cos(t), \cosh(\rho) \sin(t)) \quad (4.2)$$

Si dimostra facilmente che la parametrizzazione (4.2) soddisfa il vincolo (4.1).

In queste coordinate la metrica assume la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\tilde{x}_1^2 + d\tilde{x}_2^2 - d\tilde{x}_3^2 - d\tilde{x}_4^2 = \\ &= (\cosh(\rho) \cos(\phi) d\rho - \sinh(\rho) \sin(\phi) d\phi)^2 + (\cosh(\rho) \sin(\phi) d\rho + \sinh(\rho) \cos(\phi) d\phi)^2 + \\ &\quad - (\sinh(\rho) \cos(t) d\rho - \cosh(\rho) \sin(t) dt)^2 - (\sinh(\rho) \sin(t) d\rho + \cosh(\rho) \cos(t) dt)^2 = \\ &= -\cosh^2(\rho) dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\phi^2 \end{aligned}$$

e si ha quindi un tensore metrico

$$G_{\mu\nu}(x^\alpha) = \begin{pmatrix} -\cosh^2(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^2(\rho) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Possiamo ora utilizzare la (3.3) per derivare le equazioni del moto

$$\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X^\gamma} - 2\partial_\alpha (\partial^\alpha X^\nu G_{\gamma\nu}(X)) = 0$$

da cui, svolgendo i calcoli,

$$-\partial_\alpha t \partial^\alpha t \frac{\partial(\cosh^2(\rho))}{\partial X^\gamma} + \partial_\alpha \rho \partial^\alpha \rho \frac{\partial(1)}{\partial X^\gamma} + \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \frac{\partial(\sinh^2(\rho))}{\partial X^\gamma} - 2\partial_\alpha (\partial^\alpha X^\nu G_{\gamma\nu}(X)) = 0$$

Si ha quindi

- equazione del moto per t ($\gamma = 0$)

$$\partial_\alpha (\partial^\alpha t \cdot (-\cosh^2(\rho))) = 0$$

$$\cosh^2(\rho) \partial_\alpha \partial^\alpha t + 2 \sinh(\rho) \cosh(\rho) \partial^\alpha t \partial_\alpha \rho = 0$$

- equazione del moto per ρ ($\gamma = 1$)

$$-\partial_\alpha t \partial^\alpha t \frac{\partial(\cosh^2(\rho))}{\partial \rho} + \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \frac{\partial(\sinh^2(\rho))}{\partial \rho} - 2\partial_\alpha (\partial^\alpha \rho) = 0$$

$$2\partial_\alpha \partial^\alpha \rho + 2 \sinh(\rho) \cosh(\rho) (\partial_\alpha t \partial^\alpha t - \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) = 0$$

- equazione del moto per ϕ ($\gamma = 2$)

$$\partial_\alpha (\sinh^2(\rho) \partial^\alpha \phi) = 0$$

$$\sinh^2(\rho) \partial_\alpha \partial^\alpha \phi + 2 \sinh(\rho) \cosh(\rho) \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \rho = 0$$

4.2 Moto di una stringa ripiegata in rotazione

Procediamo ora con lo studio di una particolare soluzione: siamo interessati ad una stringa ripiegata su sé stessa che stia ruotando con velocità angolare costante. Essa è descritta dall'*ansatz* $X^\mu = (t, \rho, \phi)$ con

$$\rho(\tau, \sigma) = f(\sigma), \quad \phi(\tau, \sigma) = \omega\tau, \quad t(\tau, \sigma) = k\tau \quad (4.4)$$

In particolare, affinché la stringa sia ripiegata, imponiamo che la funzione $f(\sigma)$ sia definita per $\sigma \in [0, 2\pi]$ e che sia nulla per $\sigma = 0$, cresca fino a raggiungere un massimo per $\sigma = \pi/2$, quindi decresca fino ad annullarsi nuovamente per $\sigma = \pi$ e a raggiungere un minimo per $\sigma = 3\pi/2$ per poi tornare a 0 per $\sigma = 2\pi$.

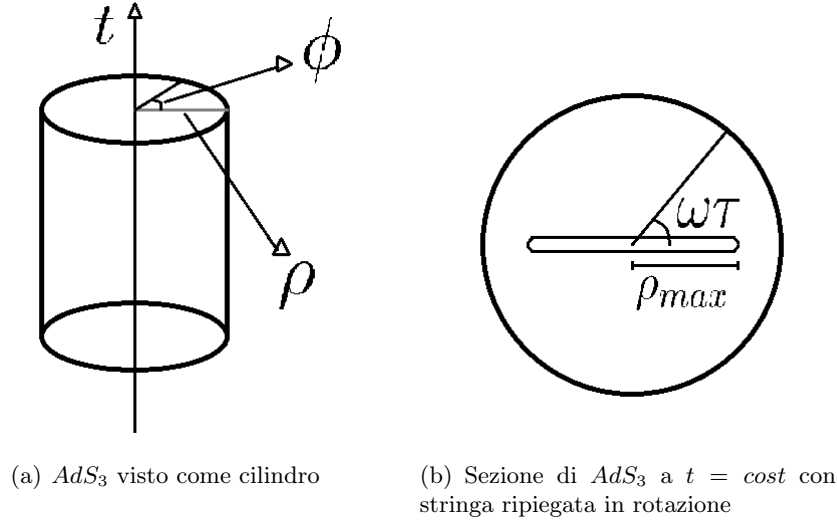


Figura 4.1: Rappresentazione dello spazio in esame come cilindro ed esempio di stringa rotante

Andiamo ora a sostituire le tre funzioni (4.4) nelle equazioni del moto trovate sopra:

- equazione per t

$$\cosh^2(\rho) \left(-\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \sigma^2} \right) + 2 \sinh(\rho) \cosh(\rho) \left(-\frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial \sigma} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right) = 0$$

ma si ha, dalla (4.4)

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \sigma} = 0$$

da cui ci si riduce all'identità $0 = 0$

- equazione per ρ

$$2 \left(-\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \sigma^2} \right) + 2 \sinh(\rho) \cosh(\rho) \left[-\left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right)^2 \right] = 0$$

$$2 \left(-0 + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \sigma^2} \right) + \sinh(2\rho) (-k^2 + 0 + \omega^2 - 0) = 0$$

$$2 \frac{d^2 f(\sigma)}{d\sigma^2} + (\omega^2 - k^2) \sinh(2f(\sigma)) = 0$$

- equazione per ϕ

$$\sinh^2(\rho) \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma^2} \right) + 2 \sinh(\rho) \cosh(\rho) \left(-\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right) = 0$$

ma si ha, dalla (4.4)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = 0$$

per cui anche questa equazione si riduce all'identità $0 = 0$.

Quindi, riassumendo, l'ansatz soddisfa identicamente le equazioni per t e ϕ , mentre per ρ porge

$$2 \frac{d^2 f(\sigma)}{d\sigma^2} + (\omega^2 - k^2) \sinh(2f(\sigma)) = 0 \quad (4.5)$$

Andiamo ora a vedere le equazioni dei vincoli: la (3.5) diventa

$$-\cosh^2(\rho) \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial t}{\partial \sigma} + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \sinh^2(\rho) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = 0$$

ma

$$\frac{\partial t}{\partial \sigma} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = 0$$

per cui il primo vincolo, riducendosi a $0 = 0$, è banalmente soddisfatto.

La (3.6) invece porge

$$\begin{aligned} -\cosh^2(\rho) \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right)^2 + \sinh^2(\rho) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 - \cosh^2(\rho) \left(\frac{\partial t}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right)^2 + \sinh^2(\rho) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right)^2 = 0 \\ \left(\frac{df(\sigma)}{d\sigma} \right)^2 - k^2 \cosh^2(\rho) + \omega^2 \sinh^2(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Derivando quest'ultima equazione rispetto a σ si ottiene:

$$2 \frac{df(\sigma)}{d\sigma} \frac{d^2 f(\sigma)}{d\sigma^2} - 2k^2 \cosh(\rho) \sinh(\rho) \frac{df(\sigma)}{d\sigma} + 2\omega^2 \sinh(\rho) \cosh(\rho) \frac{df(\sigma)}{d\sigma} = 0$$

da cui

$$2 \frac{d^2 f(\sigma)}{d\sigma^2} + (\omega^2 - k^2) \sinh(2f(\sigma)) = 0$$

che coincide con la (4.5). In pratica quindi i vincoli (3.5) e (3.6) selezionano una particolare costante di integrazione nella soluzione dell'equazione del moto per ρ .

4.3 Studio della funzione $f(\sigma)$

Andiamo ora a studiare la funzione $f(\sigma)$ introdotta nell'ansatz per la stringa ripiegata rotante. Innanzitutto introduciamo le variabili A e B tali che

$$\omega \pm k = Ae^{\pm B}$$

Invertendo queste relazioni si trova facilmente

$$\begin{cases} k = A \sinh(B) \\ \omega = A \cosh(B) \end{cases}$$

Troviamo ora il valore massimo e il valore minimo che assume la funzione $f(\sigma)$: sfruttando la (4.6) possiamo cercare per quali valori ρ_m si annulla la derivata $f'(\sigma) \equiv \frac{df(\sigma)}{d\sigma}$

$$(f'(\sigma))^2 = k^2 \cosh^2(\rho) - \omega^2 \sinh^2(\rho)$$

$$0 = k^2 \cosh^2(\rho_m) - \omega^2 \sinh^2(\rho_m)$$

$$\tanh^2(\rho_m) = \frac{k^2}{\omega^2} \implies \tanh(\rho_m) = \pm \frac{k}{\omega}$$

Di conseguenza

$$\rho_{max} = \operatorname{artanh}\left(\frac{k}{\omega}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\omega + k}{\omega - k}\right) = \frac{1}{2} \ln(e^{2B}) = B$$

e analogamente

$$\rho_{min} = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\omega + k}{\omega - k}\right) = -B$$

Adesso quindi sappiamo che la funzione in esame è nulla per $\sigma = 0$, cresce fino al valore B per $\sigma = \pi/2$, poi decresce fino a raggiungere il valore $-B$ per $\sigma = 3\pi/2$ ed infine torna a 0 per $\sigma = 2\pi$.

Possiamo ora scrivere una relazione che, per ognuno degli intervalli di valori che può assumere σ , leghi implicitamente $f(\sigma)$ e σ .

Per prima cosa notiamo che dalla (4.6), isolando la derivata ed estraendo la radice quadrata si ottiene

$$\begin{aligned} f'(\sigma) &= \pm \sqrt{k^2 \cosh^2(f(\sigma)) - \omega^2 \sinh^2(f(\sigma))} = \\ &= \pm A \sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(f(\sigma)) - \cosh^2 B \sinh^2(f(\sigma))} \end{aligned}$$

quindi

- se $0 \leq \sigma \leq \pi/2$ la funzione è crescente e quindi

$$f'(\sigma) = A \sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(f(\sigma)) - \cosh^2 B \sinh^2(f(\sigma))}$$

da cui

$$\sigma = \int_0^f \frac{dy}{A \sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} + \operatorname{cost}$$

ma si ha $f(\sigma = 0) = 0$, il che comporta $\operatorname{cost} = 0$ e quindi

$$\sigma = \int_0^f \frac{dy}{A \sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} \quad (4.7)$$

Adesso ci è possibile utilizzare quest'ultima equazione per scrivere una relazione che lega A e B . È sufficiente infatti imporre che $f(\sigma = \pi/2) = B$:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^B \frac{dy}{A \sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}}$$

da cui

$$A = \frac{2}{\pi} \int_0^B \frac{dy}{\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} \quad (4.8)$$

La (4.8) può essere allora sostituita nella (4.7) per ottenere un'equazione che legghi $f(\sigma)$ e σ , e che contenga il solo parametro B :

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma}{\pi} \int_0^B \frac{dy}{\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} &= \\ &= \int_0^f \frac{dy}{\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} \end{aligned}$$

Utilizzando un programma di calcolo numerico si può disegnare il grafico di f in funzione di $\sigma \in [0, \pi/2]$, utilizzando un valore di B arbitrario: Figura 4.2.

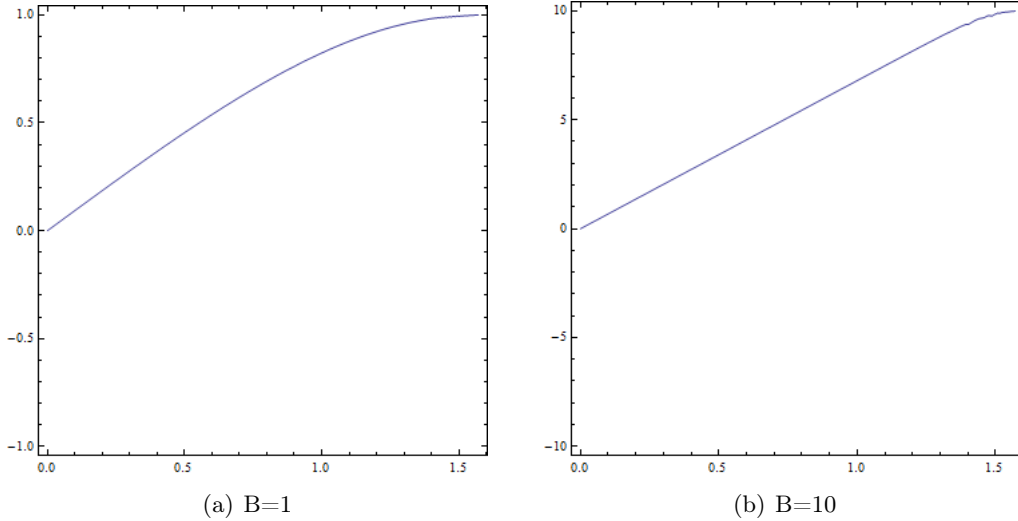


Figura 4.2: $f(\sigma)$ con $\sigma \in [0, \pi/2]$

- se $\pi/2 < \sigma < 3\pi/2$ la funzione è decrescente e quindi

$$f'(\sigma) = -A \sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(f(\sigma)) - \cosh^2 B \sinh^2(f(\sigma))}$$

da cui

$$\sigma = - \int_0^f \frac{dy}{A \sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} + cost$$

ma si ha $f(\sigma = \pi) = 0$, il che comporta $cost = \pi$ e quindi

$$\sigma = \pi - \int_0^f \frac{dy}{A \sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} \quad (4.9)$$

Utilizzando nuovamente la (4.8) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{2(\pi - \sigma)}{\pi} \int_0^B \frac{dy}{\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} &= \\ &= \int_0^f \frac{dy}{\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} \end{aligned}$$

Si può ora disegnare il grafico di f in funzione di $\sigma \in [\pi/2, 3\pi/2]$: Figura 4.3.

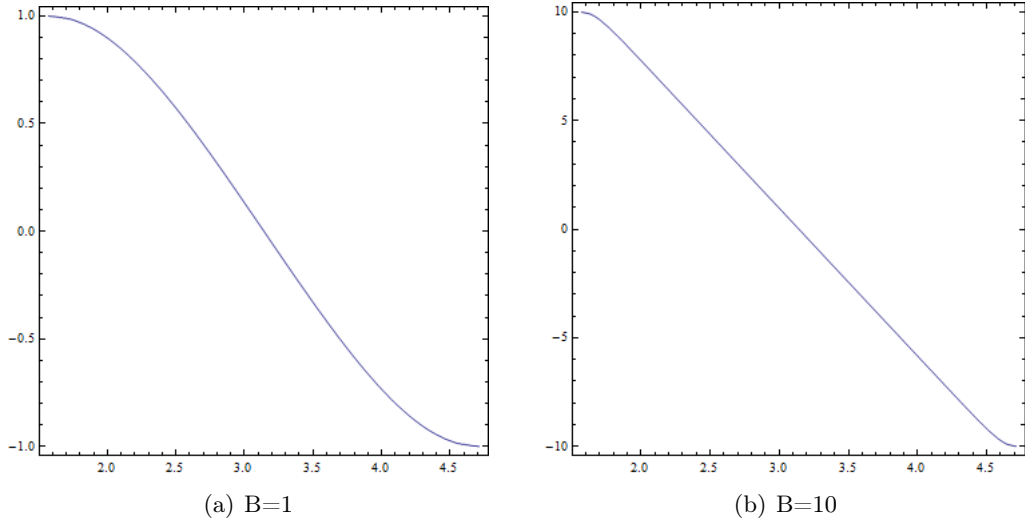


Figura 4.3: $f(\sigma)$ con $\sigma \in [\pi/2, 3\pi/2]$

- se $3\pi/2 < \sigma < 2\pi$ la funzione è di nuovo crescente e quindi

$$f'(\sigma) = A \sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(f(\sigma)) - \cosh^2 B \sinh^2(f(\sigma))}$$

da cui

$$\sigma = \int_0^f \frac{dy}{A \sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} + \text{cost}$$

ma si ha $f(\sigma = 2\pi) = 0$, il che comporta $\text{cost} = 2\pi$ e quindi

$$\sigma = 2\pi + \int_0^f \frac{dy}{A \sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} \quad (4.10)$$

Utilizzando ancora una volta la (4.8) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{2(\sigma - 2\pi)}{\pi} \int_0^B \frac{dy}{\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} &= \\ &= \int_0^f \frac{dy}{\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}} \end{aligned}$$

Disegniamo il grafico di f in funzione di $\sigma \in [3\pi/2, 2\pi]$: Figura 4.4.

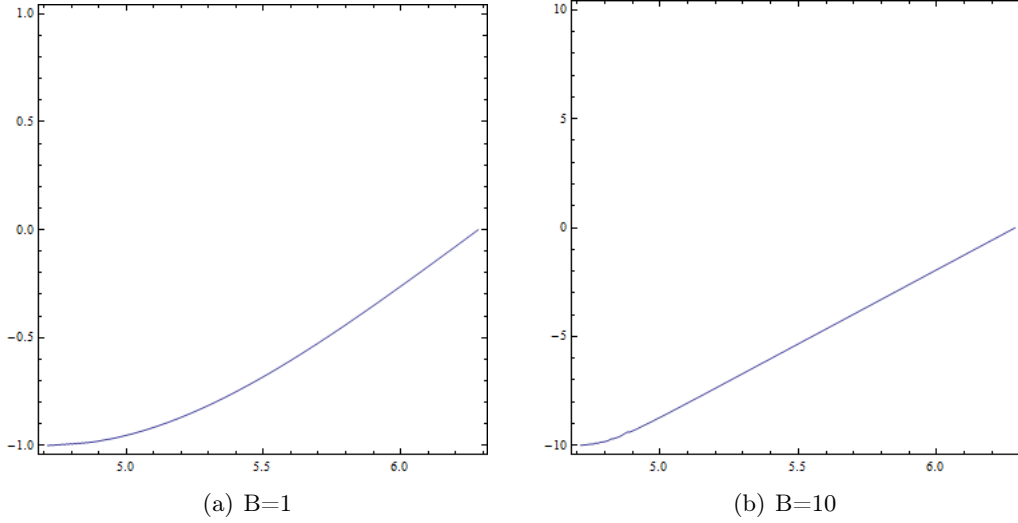


Figura 4.4: $f(\sigma)$ con $\sigma \in [3\pi/2, 2\pi]$

Notiamo quindi che per grandi valori del parametro B la funzione $f(\sigma)$ è ben approssimata da segmenti di retta tra gli estremi, mentre per piccoli valori di B l'andamento ricorda una senoide.

4.4 Quantità conservate

Continuiamo l'esercizio andando a studiare le quantità conservate nel moto della stringa ripiegata. Per far ciò richiamiamo per prima cosa la densità di lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{2c} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X^\alpha)$$

Sappiamo ora però che il tensore metrico è

$$G_{\mu\nu}(X^\alpha) = \begin{pmatrix} -\cosh^2(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^2(\rho) \end{pmatrix}$$

ossia è funzione solo della coordinata ρ e pertanto la densità di lagrangiana risulterà essere invariante per traslazioni lungo le altre due coordinate t e ϕ .

Calcoliamo allora la quantità $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma X^\rho)}$ da cui, come abbiamo visto nella Sezione 3.2, potremo ricavare le cariche conservate corrispondenti alle invarianze appena esposte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma X^\rho)} &= -\frac{T_0}{2c} \eta^{\alpha\beta} [\delta_\alpha^\gamma \delta_\rho^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu} + \partial_\alpha X^\mu \delta_\beta^\gamma \delta_\rho^\nu G_{\mu\nu}] = \\ &= -\frac{T_0}{2c} [\eta^{\gamma\beta} \partial_\beta X^\nu G_{\rho\nu} + \eta^{\alpha\gamma} \partial_\alpha X^\mu G_{\mu\rho}] = \\ &= -\frac{T_0}{c} \eta^{\gamma\alpha} \partial_\gamma X^\mu G_{\rho\mu} \end{aligned}$$

Per le traslazioni lungo t (ossia X^0) la corrente di Noether è di conseguenza

$$j_0^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^0)} = -\frac{T_0}{c} (k \cosh^2(\rho), 0)$$

dalla quale si ottiene l'energia della stringa E come carica conservata (aggiungendo un segno meno per far sì che la quantità estratta sia positiva)

$$E = - \int_0^{2\pi} d\sigma j_0^0 = \frac{kT_0}{c} \int_0^{2\pi} d\sigma \cosh^2(\rho)$$

Per quanto riguarda le traslazioni lungo ϕ (ossia X^2) invece la corrente di Noether è

$$j_2^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^2)} = \frac{T_0}{c}(\omega \sinh^2(\rho), 0)$$

Da essa discende il momento angolare della stringa S come carica conservata

$$S = \int_0^{2\pi} d\sigma j_2^0 = \frac{\omega T_0}{c} \int_0^{2\pi} d\sigma \sinh^2(\rho)$$

Vogliamo ora capire che tipo di relazione lega E ed S : a tal fine cerchiamo di esprimere queste due quantità in funzione del parametro B introdotto nella sezione precedente, per poi disegnarne un grafico parametrico. Prima però semplifichiamo le espressioni trovate per energia e momento angolare: $\rho = f(\sigma)$ è infatti una funzione definita a tratti e pertanto necessita di una certa manipolazione.

Partiamo dall'energia: si ha

$$E = \frac{kT_0}{c} \int_0^{2\pi} d\sigma \cosh^2(\rho) = \frac{kT_0}{c} \left(\int_0^{\pi/2} d\sigma \cosh^2(\rho) + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\sigma \cosh^2(\rho) + \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\sigma \cosh^2(\rho) \right)$$

Notiamo però che se $0 < \lambda < \pi/2$ si ha $f(\pi - \lambda) = f(\lambda)$: infatti dalla (4.9) si ottiene

$$\pi - \lambda = \pi - \int_0^{f(\pi-\lambda)} \frac{dy}{A\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}}$$

da cui

$$\lambda = \int_0^{f(\pi-\lambda)} \frac{dy}{A\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}}$$

Ma dalla (4.7) si ha anche

$$\lambda = \int_0^{f(\lambda)} \frac{dy}{A\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}}$$

e poiché l'integrando è necessariamente positivo si conclude che $f(\pi - \lambda) = f(\lambda)$ per $0 < \lambda < \pi/2$.

Inoltre si ha anche $f(2\pi - \lambda) = -f(\lambda)$: infatti dalla (4.10) si ottiene

$$2\pi - \lambda = 2\pi + \int_0^{f(2\pi-\lambda)} \frac{dy}{A\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}}$$

da cui

$$\lambda = - \int_0^{f(2\pi-\lambda)} \frac{dy}{A\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}}$$

e per il medesimo motivo di prima si conclude che $f(2\pi - \lambda) = -f(\lambda)$.
 Allo stesso modo si mostra che $f(2\pi - \lambda) = f(\pi + \lambda)$: dalla (4.9) si ha

$$\pi + \lambda = \pi - \int_0^{f(\pi+\lambda)} \frac{dy}{A\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}}$$

da cui

$$\lambda = - \int_0^{f(\pi+\lambda)} \frac{dy}{A\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(y) - \cosh^2 B \sinh^2(y)}}$$

e, sempre sfruttando il fatto che l'integrando è positivo, si conclude che $f(2\pi - \lambda) = f(\pi + \lambda)$.

A questo punto quindi abbiamo che, per $0 < \lambda < \pi/2$, vale $f(\lambda) = f(\pi/2 + \lambda) = -f(\pi + \lambda) = -f(3\pi/2 + \lambda)$. Di conseguenza, sfruttando il fatto che la funzione $\cosh^2(x)$ è pari, vale la catena di uguaglianze

$$\cosh^2(f(\lambda)) = \cosh^2(f(\pi/2 + \lambda)) = \cosh^2(f(\pi + \lambda)) = \cosh^2(f(3\pi/2\lambda))$$

il che ci permette infine di scrivere

$$\int_0^{\pi/2} d\sigma \cosh^2(\rho) = \int_{\pi/2}^{\pi} d\sigma \cosh^2(\rho) = \int_{\pi}^{3\pi/2} d\sigma \cosh^2(\rho) = \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\sigma \cosh^2(\rho)$$

da cui si deriva

$$E = \frac{4kT_0}{c} \int_0^{\pi/2} d\sigma \cosh^2(\rho)$$

Con ragionamenti analoghi, poiché anche la funzione $\sinh^2(x)$ è pari, si ottiene

$$S = \frac{4\omega T_0}{c} \int_0^{\pi/2} d\sigma \sinh^2(\rho)$$

Per esprimere E e S in funzione di B risulta ora comodo effettuare il cambio di variabile $\sigma \rightarrow \rho$ negli integrali, ricordando che per $0 < \sigma < \pi/2$ si ha

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{df(\sigma)}{d\sigma} = A\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(\rho) - \cosh^2 B \sinh^2(\rho)}$$

per cui

$$\begin{aligned} E &= \frac{4kT_0}{c} \int_0^B d\rho \frac{d\sigma}{d\rho} \cosh^2(\rho) = \\ &= \frac{4kT_0}{c} \int_0^B d\rho \frac{\cosh^2(\rho)}{A\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(\rho) - \cosh^2 B \sinh^2(\rho)}} = \\ &= \frac{4T_0}{c} \int_0^B d\rho \frac{\sinh(B) \cosh^2(\rho)}{\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(\rho) - \cosh^2 B \sinh^2(\rho)}} \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene

$$S = \frac{4T_0}{c} \int_0^B d\rho \frac{\cosh(B) \sinh^2(\rho)}{\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(\rho) - \cosh^2 B \sinh^2(\rho)}}$$

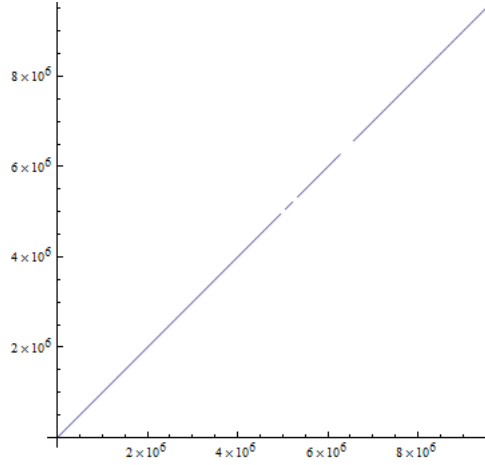


Figura 4.5: $E(B)$ in funzione di $S(B)$

Tracciando ora un grafico parametrico di $E(B)$ in funzione di $S(B)$ si nota (Figura 4.5) una dipendenza lineare.

D'altra parte un andamento lineare lo si poteva dedurre per via analitica utilizzando le espressioni

$$E = \frac{4kT_0}{c} \int_0^{\pi/2} d\sigma \cosh^2(\rho) \quad S = \frac{4\omega T_0}{c} \int_0^{\pi/2} d\sigma \sinh^2(\rho)$$

Si ricava infatti facilmente

$$\frac{E}{k} - \frac{S}{\omega} = \frac{4T_0}{c} \int_0^{\pi/2} d\sigma = \frac{2\pi T_0}{c}$$

Per concludere studiamo cosa accade a E ed S quando ci si pone nei limiti $B \ll 1$ e $B \rightarrow \infty$.

- $B \ll 1$. In questo caso le dimensioni della stringa, poiché B è anche il valore massimo che assume la coordinata ρ , diventano trascurabili rispetto alla distanza per la quale è significativa la curvatura dello spaziotempo in questione: si prevede perciò di ricondursi ai risultati tipici di uno spaziotempo piatto.

Dato che in questo limite $B \rightarrow 0$ e in generale vale $0 < \rho < B$, possiamo espandere le espressioni di E ed S in serie di B e ρ fino al primo ordine:

$$\begin{aligned} E &\simeq \frac{4T_0}{c} \int_0^B d\rho \frac{B}{\sqrt{B^2 - \rho^2}} = \frac{4T_0 B}{c} \left[\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{B^2 - \rho^2}}\right) \right]_{\rho=0}^{\rho=B} = \\ &= \frac{4T_0 B}{c} (\pi/2 - 0) = \frac{2\pi T_0}{c} B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\simeq \frac{4T_0}{c} \int_0^B d\rho \frac{\rho^2}{\sqrt{B^2 - \rho^2}} = \frac{4T_0}{c} \frac{1}{2} \left[-\rho\sqrt{B^2 - \rho^2} + B^2 \arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{B^2 - \rho^2}}\right) \right]_{\rho=0}^{\rho=B} = \\ &= \frac{2T_0}{c} (B^2 \pi/2 - 0) = \frac{\pi T_0}{c} B^2 \end{aligned}$$

Isolando B dall'espressione di E si trova infine una relazione esplicita tra E ed S

$$S = \frac{c}{4\pi T_0} E^2$$

che presenta l'andamento $S \sim E^2$ proprio di uno spaziotempo piatto. Questa proporzionalità tra S ed E^2 che si ottiene in uno spazio piatto fu uno dei primi indizi che fecero pensare alla teoria delle stringhe come possibile fondamento della fisica delle particelle. Nel 1959 infatti Tullio Regge sviluppò uno studio sullo scattering come funzione del momento angolare: uno dei risultati a cui giunse fu che gli stati eccitati dei mesoni presentavano relazioni tra momento angolare (J) e massa (M) del tipo $J = \alpha' M^2 + \beta'$ (note come *traiettorie di Regge*, Figura 4.6). Tenendo in considerazione l'equivalenza tra massa ed energia della Relatività Ristretta e il fatto che quantizzando la teoria di stringa la relazione classica $S = \alpha' E^2$ si modifica in $|S| \leq 1 + \alpha' E^2$, si nota una somiglianza tra il comportamento di una stringa e quello di un mesone eccitato: fu proprio questa analogia che indusse a ritenere che le traiettorie di Regge potessero avere una spiegazione basata sull'esistenza di microscopiche stringhe elementari.

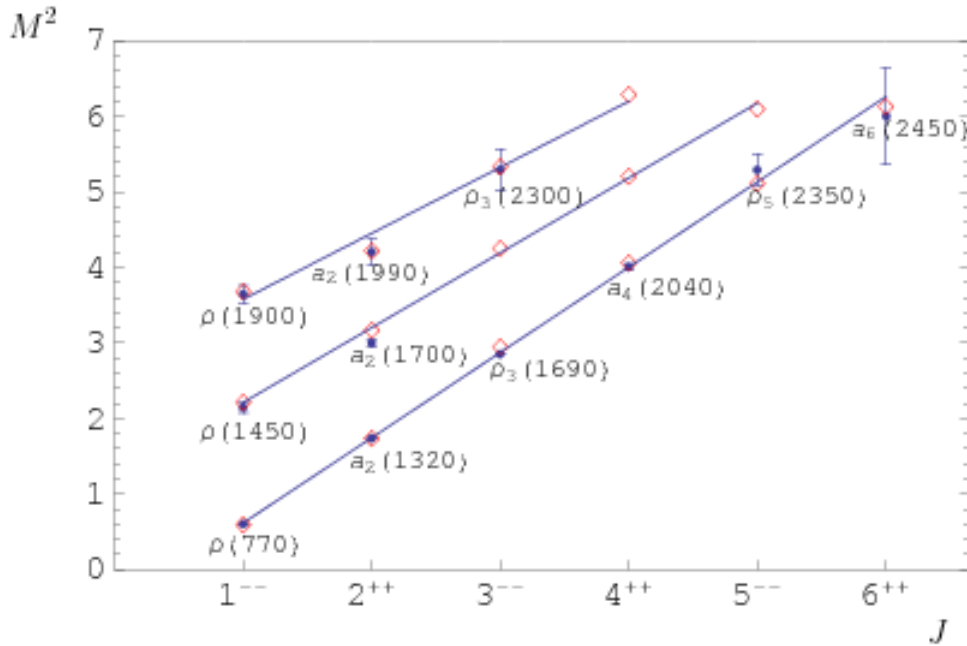


Figura 4.6: Traiettorie di Regge per stati eccitati del mesone ρ

- $B \rightarrow \infty$. Qui invece la stringa si estende per una porzione di spazio abbastanza grande perché sia influenzata dalla curvatura di quest'ultimo. Per studiare questo limite è

necessario ricondursi alle espressioni di E e S in funzione dei parametri k e ω :

$$\begin{aligned} E &= \frac{4T_0}{c} \int_0^B d\rho \frac{\sinh(B) \cosh^2(\rho)}{\sqrt{\sinh^2 B \cosh^2(\rho) - \cosh^2 B \sinh^2(\rho)}} = \\ &= \frac{4T_0}{c} \int_0^{\rho_{max}} d\rho \frac{\frac{k}{A} \cosh^2(\rho)}{\frac{1}{A} \sqrt{k^2 \cosh^2(\rho) - \omega^2 \sinh^2(\rho)}} = \\ &= \frac{4T_0}{c} \int_0^{\rho_{max}} d\rho \frac{k \cosh^2(\rho)}{\sqrt{k^2 \cosh^2(\rho) - \omega^2 \sinh^2(\rho)}} \end{aligned}$$

dove $\rho_{max} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\omega+k}{\omega-k}\right) = B$, e allo stesso modo

$$S = \frac{4T_0}{c} \int_0^{\rho_{max}} d\rho \frac{\omega \sinh^2(\rho)}{\sqrt{k^2 \cosh^2(\rho) - \omega^2 \sinh^2(\rho)}}$$

Osservando la definizione di ρ_{max} si nota che il limite $B \rightarrow \infty$ coincide con il limite $\omega \rightarrow k^+$ e perciò possiamo espandere le espressioni di energia e momento angolare usando la relazione $\omega = k + 2\epsilon$, con $\epsilon \ll k$. In particolare

$$\rho_{max} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2k+2\epsilon}{2\epsilon}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{k}{\epsilon}\right) \sim \frac{1}{2} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right)$$

da cui

$$\begin{aligned} E &\simeq \frac{4T_0}{c} \int_0^{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right)} d\rho \frac{k \cosh^2(\rho)}{\sqrt{k^2 \cosh^2(\rho) - (k+2\epsilon)^2 \sinh^2(\rho)}} \simeq \frac{4T_0}{c} \int_0^{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right)} d\rho \cosh^2(\rho) = \\ &= \frac{4T_0}{c} \left[\frac{\rho}{2} + \frac{1}{4} \sinh(2\rho) \right]_0^{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right)} = \frac{4T_0}{c} \left[\frac{1}{4} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{k}{\epsilon} - \frac{\epsilon}{k} \right) \right] \simeq \\ &\simeq \frac{T_0}{c} \left[\ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S &\simeq \frac{4T_0}{c} \int_0^{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right)} d\rho \frac{(k+2\epsilon) \sinh^2(\rho)}{\sqrt{k^2 \cosh^2(\rho) - (k+2\epsilon)^2 \sinh^2(\rho)}} \simeq \frac{4T_0}{c} \int_0^{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right)} d\rho \sinh^2(\rho) = \\ &= \frac{4T_0}{c} \left[-\frac{\rho}{2} + \frac{1}{4} \sinh(2\rho) \right]_0^{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right)} = \frac{4T_0}{c} \left[-\frac{1}{4} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{k}{\epsilon} - \frac{\epsilon}{k} \right) \right] \simeq \\ &\simeq \frac{T_0}{c} \left[-\ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \right] \end{aligned}$$

Notiamo quindi che

$$E - S = \frac{2T_0}{c} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}\right)$$

ossia che la differenza tra energia e spin della stringa (nel limite $B \rightarrow \infty$) non tende ad una costante, ma diverge ad infinito con andamento logaritmico. Nella corrispondente teoria di gauge questo comportamento si traduce nel fatto che nel limite di accoppiamento forte (ossia quando le interazioni sono molto intense) la differenza tra la dimensione conforme del campo e il suo spin diverge come un logaritmo: ciò assume una certa importanza per le proprietà quantistiche della teoria.

Bibliografia

- [1] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, 2009
- [2] J. Polchinski, *String Theory Volume I. An Introduction to the Bosonic String*, Cambridge University Press, 2007
- [3] D. Tong, *Lectures on String Theory*, University of Cambridge, 2009
- [4] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten, *Superstring theory. Volume 1. Introduction*, Cambridge University Press, 1988
- [5] S. S. Gubser, I. R. Klebanov e A. M. Polyakov, *A semi-classical limit of the gauge/string correspondence*, <https://arxiv.org/abs/hep-th/0204051>, 2002