

**Università degli Studi di Padova**

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

**Sistemi di produzione di raggi X per diagnostica  
medica: possibili sviluppi**

**Laureando:** Raffaele Di Vora

**Relatore:** Prof. Giovanni Carugno

Anno accademico 2015-2016

Alla mia fantastica famiglia.

## **Sommario**

Scopo di questo elaborato è esplorare alternative alla tecnologia dei tubi a raggi X per uso medico che nella forma attuale risale al 1913, con particolare riguardo alle radiografie dentali; individuate le quantità in gioco e i loro ordini di grandezza si analizzerà la fattibilità di una modifica a tali tecniche, la sostituzione dell'anodo degli apparati con un anodo fine, stimando nuovamente le grandezze sensibili e discutendo pro e contro della tecnica. Saranno inoltre prese in considerazione altre possibilità di produzione di raggi X.

# Indice

<b>1</b>	<b>Produzione di raggi X da particelle cariche</b>	<b>1</b>
1.1	Produzione di raggi X da elettroni . . . . .	1
1.2	Produzione di raggi X da protoni . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Utilizzo medico dei raggi X</b>	<b>10</b>
2.1	Il tubo a raggi X . . . . .	10
2.2	Indurimento del fascio X e spettro . . . . .	14
2.3	Fluenza richiesta per un esame . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Nuovi possibili tipi di sorgenti</b>	<b>20</b>
3.1	Tubo a raggi X con elettroni ad anodo fine . . . . .	20
3.2	Protoni da 2MeV su anodo fine . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>32</b>
<b>A</b>	<b>Bremsstrahlung diretto in campo magnetico</b>	<b>33</b>
<b>B</b>	<b>Assorbimento</b>	<b>34</b>
B.1	Effetto fotoelettrico . . . . .	34
B.2	Scattering Compton . . . . .	35
B.3	Scattering Rayleigh . . . . .	36
<b>C</b>	<b>Tabelle dei dati utilizzati</b>	<b>38</b>

# Capitolo 1

## Produzione di raggi X da particelle cariche

Il metodo più sfruttato per ottenere raggi X è la loro produzione a partire da fasci di particelle cariche; le modalità di emissione di radiazione X da collisioni fra particelle cariche ed atomi si riducono per i nostri scopi a due:

- l'irradiazione di bremsstrahlung (radiazione di frenamento);
- la PIXE (Proton Induced X-ray Emission).

Nel seguito presentiamo i fenomeni sfruttati nella produzione di X per un fascio elettronico e per un fascio protonico.

### 1.1 Produzione di raggi X da elettroni

I principali metodi di produzione degli X in uso oggi utilizzano fasci di elettroni: questo perchè gli elettroni sono particolarmente portati all'emissione di radiazione da accelerazione, avendo massa molto piccola ( $m_e \simeq 0,511 \frac{MeV}{c^2}$ ) rispetto a tutte le altre particelle cariche.

L'espressione della potenza irradiata da una carica in moto a velocità non relativistiche è infatti data dalla *formula di Larmor* [6]<sup>1</sup>

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} |\dot{v}|^2 \quad (1.1)$$

che dipende dal quadrato dell'accelerazione della particella, ed essendo essa la forza accelerante data in ogni caso da un'interazione elettromagnetica che non dipende dalla massa ciò risulta in una dipendenza della potenza irradiata da  $\frac{1}{m^2}$ .

---

<sup>1</sup>Tutte le formule nel Jackson sono espresse nel sistema CGS gaussiano e sono state quindi moltiplicate per gli opportuni coefficienti

Al raggio della shell K (vedi eq. A.1) la forza di Coulomb esercitata da un nucleo di tungsteno su un elettrone incidente si traduce quindi in una potenza irradiata stimata in  $P \approx 7 \cdot 10^4 W$ .

Tenendo conto che per un elettrone da  $100 keV$  (la cui velocità è  $\frac{v}{c} \simeq 0.4$ , vedi Appendice A) la collisione dura un tempo  $t \approx 10^{-19} s$ , l'ordine di grandezza dell'energia irradiata a tale raggio è di  $\Delta E \approx 5 \cdot 10^4 eV$  da cui otteniamo che il parametro d'impatto per avere emissione di raggi X deve essere dell'ordine di grandezza del raggio della shell K.

La dipendenza angolare dell'emissione per una particella non relativistica è [6]

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} |\dot{v}|^2 \cdot \sin^2(\theta) \quad (1.2)$$

, con  $\theta$  l'angolo fra il vettore dell'accelerazione e il versore della direzione di emissione.

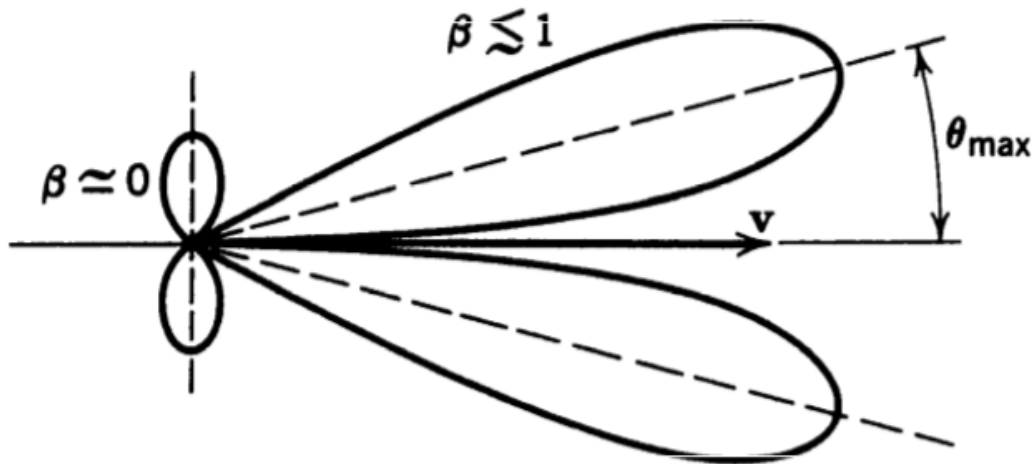


Figura 1.1: Emissione di radiazione per una particella con accelerazione diretta lungo l'asse x, vista nel sistema del suo centro di massa e per particella in moto a velocità relativistica lungo x, da [6]

Scelto dunque l'elettrone come particella accelerata, vi sono due possibilità per produrre la radiazione X desiderata: una consiste nell'accelerare l'elettrone fino ad energie ultrarelativistiche e sfruttare l'emissione nettamente collimata in avanti che si ottiene facendo passare la particella in un campo magnetico intenso (dell'ordine del Tesla).

Questa radiazione è chiamata radiazione di sincrotrone, dal nome dell'apparato utilizzato tipicamente per il raggiungimento delle elevatissime energie cinetiche dell'elettrone necessarie per avere il picco dell'emissione centrato sui raggi X (dell'ordine dei  $GeV$ ). Un tale dispositivo è però ingombrante e costoso e pertanto non si presta ai nostri fini.

La seconda possibilità è quella già citata nell'introduzione e sfruttata nei tubi a raggi X, il bremsstrahlung da collisione coulombiana. Una particella carica che attraversa la materia è infatti soggetta ai campi elettrici molto forti presenti in prossimità del nucleo atomico, dove le forze coulombiane dovute ai protoni non sono schermate dagli elettroni delle shell più esterne.

Ciò permette quindi di avere emissione di radiazione X già con elettroni di energie del keV: infatti se il parametro d'impatto col nucleo è confrontabile con le dimensioni del nucleo tutta l'energia dall'elettrone incidente può essere trasferita ad un fotone. L'endpoint dello spettro del bremsstrahlung coincide quindi con l'energia dell'elettrone incidente.

La sezione d'urto di radiazione per unità di frequenza del bremsstrahlung è data per elettroni non relativistici dalla

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \simeq \frac{16}{3} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \frac{Z^2 e^2}{c} \left( \frac{z^2 e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{\beta^2} \ln \left[ \lambda' \frac{(\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega})^2}{\hbar\omega} \right] \left[ \frac{\text{energia} \cdot \text{area}}{\text{frequenza}} \right] \quad (1.3)$$

con  $\omega$  pulsazione del fotone emesso,  $m$ ,  $E$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $z$  rispettivamente massa, energia, velocità in unità della velocità della luce, fattore di Lorentz e carica della particella incidente,  $Z$  numero atomico dell'atomo bersaglio e  $\lambda'$  parametro dell'ordine dell'unità; nel nostro caso porremo  $\lambda' = 1$  per ottenere il risultato dell'approssimazione quantomeccanica di Born [6] ed essendo le cariche di elettrone e protone unitarie anche  $z = 1$ .

L'energia irradiata per unità di cammino in un mezzo con densità numerica degli atomi della targhetta  $N$  quindi vale

$$\frac{dE_{rad}}{dx} = \int_0^{\omega_{max}=\frac{E}{\hbar}} N \frac{d\sigma}{d\omega} d\omega \quad (1.4)$$

che sostituendo l'eq. 1.3 e utilizzando il cambio di variabile  $x = \frac{\hbar\omega}{E}$  diventa

$$\frac{dE_{rad}}{dx} = \frac{16}{3} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \frac{NZ^2 e^6}{m\hbar c^3} \int_0^1 \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{16}{3} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \frac{NZ^2 e^6}{m\hbar c^3} \quad (1.5)$$

dato che l'integrale vale 1. La potenza di emissione in energia per unità di cammino è quindi facilmente correlata alla corrente  $I$  del fascio di elettroni da  $P_{rad} = \frac{dE_{rad}}{dx} I$ , e in prima approssimazione non dipende dall'energia dell'elettrone.

Notiamo una dipendenza quadratica dallo  $Z$  del materiale che giustifica la scelta di metalli pesanti come il tungsteno ( $Z = 74$ ) come materiale con cui realizzare l'anodo.

Lo yield è definito come il rapporto di conversione fra l'energia spesa per accelerare gli elettroni e l'energia della radiazione X ottenuta.

Una stima dello yield del bremsstrahlung si può effettuare valutando il rapporto fra l'energia irradiata per unità di cammino e la perdita di energia totale per unità di cammino; per particelle non relativistiche la perdita di energia per unità di cammino è approssimabile alla perdita di energia per unità di cammino dovuta alle collisioni data dalla formula

di Bethe [6] <sup>2</sup>

$$\frac{dE_{Bethe}}{dx} = 4\pi \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 NZ \frac{z^2 e^4}{mc^2 \beta^2} \left[ \ln \frac{2mc^2 \gamma^2 \beta^2}{I} - \beta^2 \right], \quad (1.6)$$

con  $I$  il *potenziale medio di eccitazione/ionizzazione*, proprio degli atomi di cui è composto il materiale.

Considerando che nell'approssimazione non relativistica il termine in  $\beta^2$  della formula di Bethe è trascurabile, lo yield del bremsstrahlung è dato da

$$Y \simeq \frac{\left( \frac{dE_{rad}}{dx} \right)}{\left( \frac{dE_{Bethe}}{dx} \right)} = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \pi \frac{Ze^2}{\hbar c} \beta^2 \frac{1}{\ln \left( \frac{2mc^2 \gamma^2 \beta^2}{I} \right)}. \quad (1.7)$$

Da questo risultato appare evidente come il rendimento dell'apparato aumenti al crescere del numero atomico del metallo anodico e dell'energia degli elettroni incidenti.

Per un anodo di tungsteno ed energia dell'elettrone incidente  $E_{e^-} = 100 \text{ keV}$ , l'espressione di cui sopra restituisce  $Y \simeq 6.4 \cdot 10^{-3}$ . La quasi totalità dell'energia del fascio viene quindi trasformata in calore.

Notiamo però che questo è un valore approssimato per eccesso, infatti:

- non tutta la radiazione di frenamento emessa appartiene al range energetico utile per le applicazioni mediche;
- man mano che gli elettroni attraversano il materiale perdono energia e dunque lo yield per unità di cammino cala;
- abbiamo trascurato l'attenuazione della radiazione dovuto allo spessore di materia che dovrà attraversare per uscire dall'anodo.

L'effettivo yield in raggi X dell'apparato dovrà quindi essere calcolato tenendo conto di questi fattori, ma una prima stima della resa in potenza di radiazione per milliampere di corrente di fascio nell'apparato di cui sopra è quindi  $P \simeq V \cdot (1 \text{ mA}) \cdot Y \simeq 6.4 \cdot 10^{-1} \frac{\text{W}}{\text{mA}}$ .

Dividendo l'eq. 1.5 per  $\hbar$  otteniamo la sezione d'urto per unità di energia della radiazione emessa; dividendo ulteriormente per  $E_\gamma = \hbar\omega$  otteniamo la sezione d'urto in numero di fotoni da bremsstrahlung per unità di energia del fotone:

$$\frac{d\sigma_{NR,photons}}{dE_\gamma} \simeq \frac{16}{3} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \frac{Z^2 e^2}{c} \left( \frac{z^2 e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{E_\gamma} \ln \left[ \frac{\left( \sqrt{E} + \sqrt{E - E_\gamma} \right)^2}{E_\gamma} \right] \left[ \frac{\text{fotoni} \cdot \text{area}}{\text{energia del fotone}} \right] \quad (1.8)$$

Gli andamenti delle due sezioni d'urto in funzione dell'energia ridotta  $E_{\gamma r} = \frac{E_\gamma}{E}$  sono riportati rispettivamente in fig. 1.2 e fig. 1.2 <sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Formalmente l'uguaglianza riportata nel seguito vale col segno -; tuttavia in considerazione del fatto che nei nostri calcoli utilizzeremo sempre l'energia persa, sia per il bremsstrahlung che per le collisioni, con abuso di notazione assegneremo ai  $\frac{dE}{dx}$  il segno positivo

<sup>3</sup>Per semplicità in entrambi i grafici le costanti moltiplicative sono state poste uguali a 1

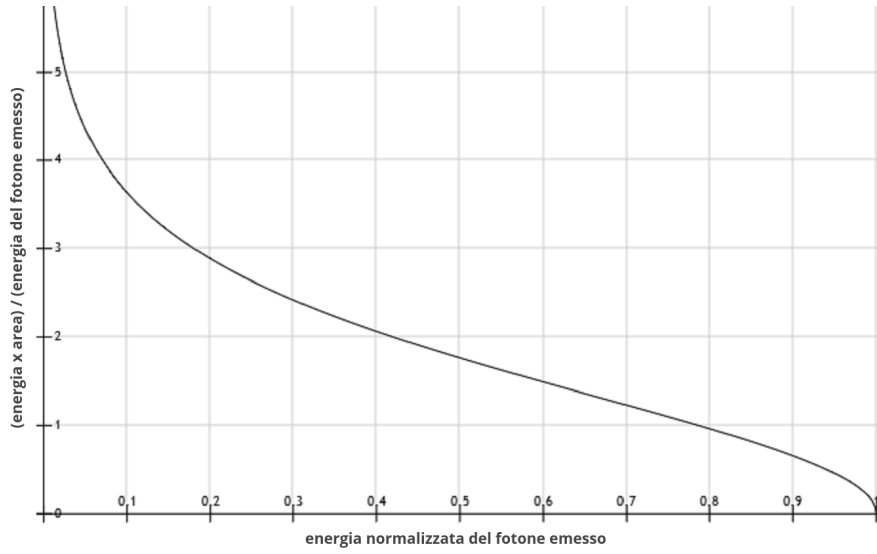


Figura 1.2: Andamento della sezione d'urto del bremsstrahlung per elettrone espressa in  $\frac{\text{energia} \cdot \text{area}}{\text{energia del fotone emesso}}$  in funzione di  $E_{\gamma r}$

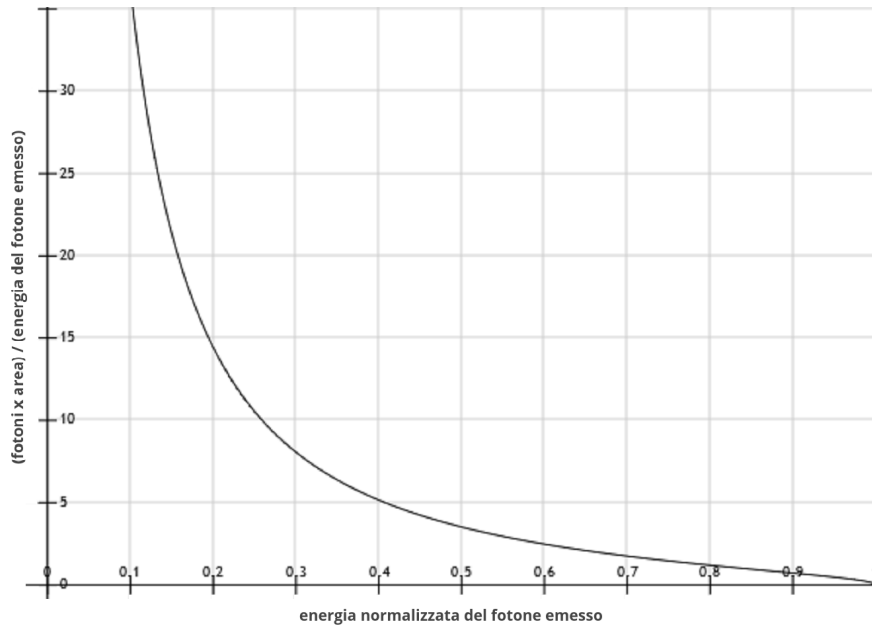


Figura 1.3: Andamento della sezione d'urto del bremsstrahlung per elettrone espressa in  $\frac{\text{fotoni} \cdot \text{area}}{\text{energia del fotone emesso}}$  in funzione di  $E_{\gamma r}$

Lo spettro del bremsstrahlung in energia per unità di energia del fotone ridotta risulta pertanto essere continuo e di intensità decrescente al crescere di  $E_{\gamma r}$ ; per bassi valori di  $E_{\gamma r}$  l'andamento segue quello di  $\frac{1}{E_{\gamma r}}$ .

Le stesse osservazioni si possono fare anche per lo spettro in numero di fotoni, che però nel limite di basse energie tende a  $\frac{1}{(E_{\gamma r})^2}$ .

L'energia più alta per cui c'è emissione di fotoni da bremsstrahlung (il cosiddetto "endpoint") è pari all'energia degli elettroni incidenti.

Integrando la parte dipendente da  $E_{\gamma}$  dell' eq.1.5 con il cambio di variabile  $E_{\gamma r} = \frac{E_{\gamma}}{E}$  e dimenticandoci delle costanti otteniamo l'integrale indefinito in termini dell'energia normalizzata all'energia dell'elettrone

$$Int(E_{\gamma r}) = \ln \left( \frac{(\sqrt{1 - E_{\gamma r}} + 1)^2}{E_{\gamma r}} \right) E_{\gamma r} - 2\sqrt{1 - E_{\gamma r}} + c \quad (1.9)$$

(c costante di integrazione) che useremo nel seguito per calcolare con precisione la quantità di energia irradiata per ogni intervallo di frequenza del fotone emesso, tenendo presente che

$$\int_0^1 \ln \left( \frac{(1 + \sqrt{1 - E_{\gamma r}})^2}{\sqrt{E_{\gamma r}}} \right) dE_{\gamma r} = 2. \quad (1.10)$$

Applicando questa espressione alla stima precedente e assegnando arbitrariamente a tutti i fotoni con energia maggiore di  $50keV$  l'energia media di  $60keV$ , possiamo ottenere quindi l'ordine di grandezza del numero di fotoni di energia maggiore di  $50keV$  emessi per milliampere di corrente di fascio con differenza di potenziale accelerante pari a  $100kV$ :

$$N \approx P \cdot \frac{Int \left( \frac{100keV}{100keV} \right) - \left( \frac{50keV}{100keV} \right)}{\int_0^1 \ln \left( \frac{(1 + \sqrt{1 - E_{\gamma r}})^2}{\sqrt{E_{\gamma r}}} \right) dE_{\gamma r}} \cdot \frac{1 eV}{60 keV} = 1.8 \cdot 10^{13} \left[ \frac{fotoni}{mA \cdot s} \right], \quad (1.11)$$

che è dell'ordine di grandezza richiesto per un sistema diagnostico radiologico.

## 1.2 Produzione di raggi X da protoni

Abbiamo quindi visto che da un fascio di elettroni di moderata energia si possono ottenere elevate intensità di raggi X; tale radiazione però presenta uno spettro molto ampio, che nella pratica risulta in varie problematiche.

Ci siamo dunque posti il problema di ottenere raggi X monocromatici. La soluzione naturale consiste nel sostituire al fascio di elettroni che incide sulla targhetta un fascio di protoni, in quanto per i protoni il fenomeno del bremsstrahlung diventa trascurabile.

Resta infatti valida l'espressione dello yield per basse velocità della particella incidente trovata in precedenza, ma compare a moltiplicare il termine  $\frac{m_e}{m_p} \simeq 5.4 \cdot 10^{-4}$ , in quanto la massa della particella accelerata responsabile del bremsstrahlung non è più uguale alla massa degli elettroni scatterati nelle collisioni coulombiane.

Gli X prodotti dalla collisione di un fascio protonico con gli atomi di un materiale sono quindi dovuti all'emissione di radiazione caratteristica degli stessi a seguito dell'ionizzazione per interazione coulombiana di un elettrone delle shell interne da parte dei protoni.

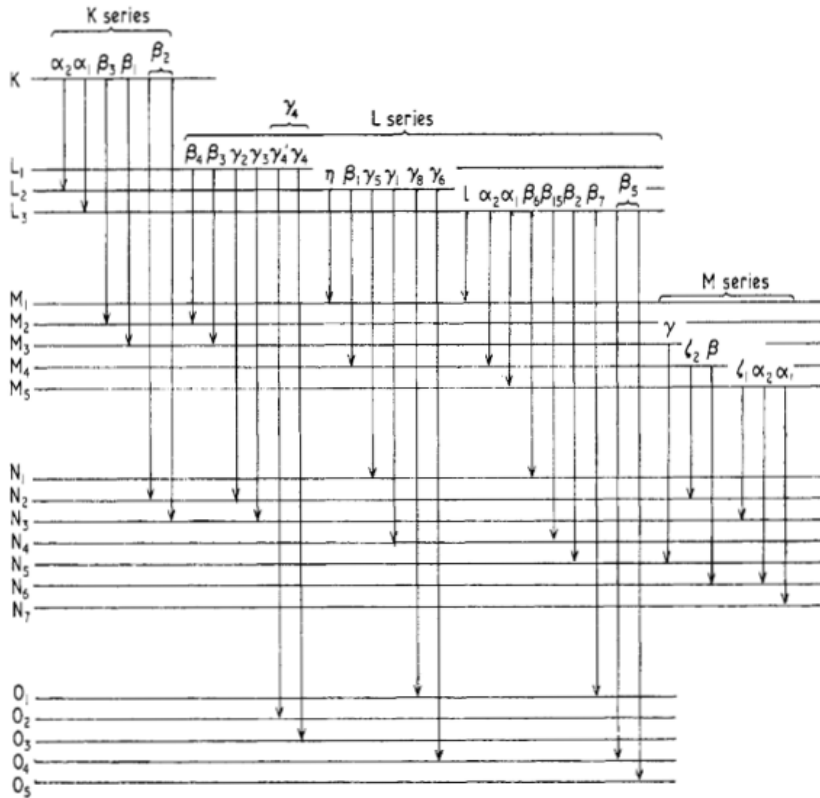


Figura 1.4: Transizioni elettroniche di un generico atomo ionizzato una volta (solo le più importanti sono indicate), da [7]

Riferendoci a un anodo in tungsteno, solo le ionizzazioni della shell K danno radiazione caratteristica nel range di energia a cui siamo interessati; infatti l'energia di legame della shell K è  $E_K \simeq 69.5 \text{ keV}$  mentre quella della shell successiva vale  $E_{L_1} \simeq 12.1 \text{ keV}$ .

Essendo le probabilità di transizione quanto più maggiori quanto più è alto l'overlap delle funzioni d'onda degli orbitali (*regola di Fermi*) le transizioni più importanti sono quelle connesse ai salti KL e KN.

Un tabulato delle energie delle transizioni e delle probabilità relative è reperibile presso [5]; notiamo che quindi sia le energie che il rapporto fra le intensità delle varie righe della radiazione caratteristica dovuta all'ionizzazione su una shell X sono signature caratteristiche dell'atomo colpito e permettono di effettuare analisi della composizione dei materiali basate sulla PIXE, previa conoscenza delle sezioni d'urto di ionizzazione delle varie shell degli elementi in funzione dell'energia dei protoni utilizzati.

Da rimarcare è il fatto che lo spettro così ottenuto è composto da righe discrete a differenza dello spettro continuo dato dal bremsstrahlung; la larghezza di riga è data dall'effetto Doppler dovuto al moto di agitazione termica.

Una volta che il protone ha ionizzato la shell K il fenomeno non presenta più alcuna dipendenza dall'energia e dalla direzione del protone che ha ionizzato: infatti essendo il

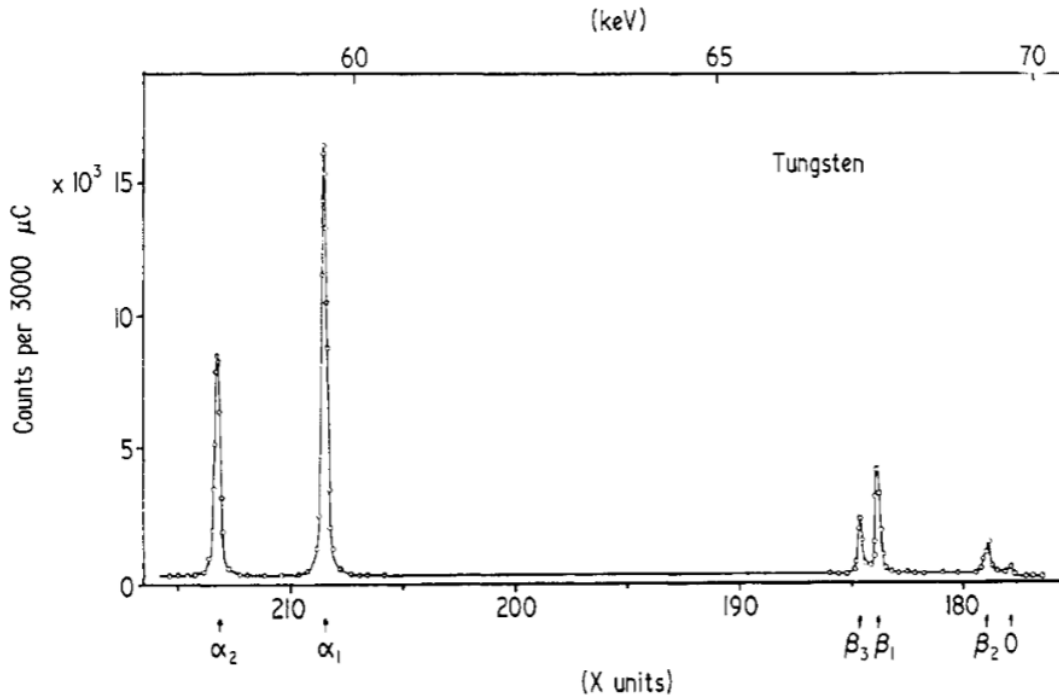


Figura 1.5: Spettro K del tungsteno, da [7]

trasferimento di quantità di moto all'atomo trascurabile l'unico effetto dovuto al protone è la creazione di una lacuna; pertanto l'emissione del fotone a seguito del riempimento della lacuna da parte di un elettrone è isotropa.

La sezione d'urto di ionizzazione da bombardamento protonico dell' $X$ -esima shell  $\sigma_X(E)$  è stata studiata estensivamente, e per ogni atomo  $\sigma_X E_X^2$  è la stessa funzione di  $U = \frac{E}{E_X}$  con  $E$  ed  $E_X$  rispettivamente l'energia del protone incidente e l'energia di legame della shell  $X$ -esima; ciononostante non è stata trovata nessuna relazione semplice che fitti ragionevolmente i dati sperimentali [7].

I calcoli della teoria ECPSSR<sup>4</sup> riproducono l'andamento trovato sperimentalmente con differenze massime dell'ordine del 10% [8], [9]; per calcoli precisi risulta utile riferirsi a fit polinomiali in funzione di  $U$  della forma  $\ln \sigma_X E_X^2 = \sum_{i=1}^5 b_i (\ln U)^i$  con coefficienti  $b_i$  ricavati dai dati sperimentali [8], ma per le nostre stime è sufficiente utilizzare i valori

<sup>4</sup>La teoria ECPSSR di Brandt e Lapicki è un'evoluzione dei metodi perturbativi al prim'ordine utilizzati per calcolare le sezioni d'urto di ionizzazione nella teoria PWBA. La teoria PWBA (Plane Wave Born Approximation) tratta il campo associato ad un'onda incidente (supposta piana) su un continuo come il campo totale e calcola per mezzo della teoria delle perturbazioni la diffusione causata dalle funzioni d'onda (supposte idrogenoidi con screening da parte degli elettroni e non relativistiche) presenti nel mezzo (supposto omogeneo), svolgendo i calcoli con limiti approssimati di trasferimento di momento. La teoria ECPSSR evolve questo metodo tenendo conto della perdita di energia ( $E$ ) e della deflessione coulombiana ( $C$ ) sperimentate dalla particella incidente, considerando anche la natura relativistica delle shell interne ( $R$ ) e la perturbazione dello stato stazionario ( $SSR$ ) causata dall'onda incidente [20].

ECPSSR.

Il suo andamento nel range energetico che ci interessa ( $0.5 \text{ MeV} < E_p < 2 \text{ MeV}$ ) è fortemente crescente con l'energia del protone incidente.

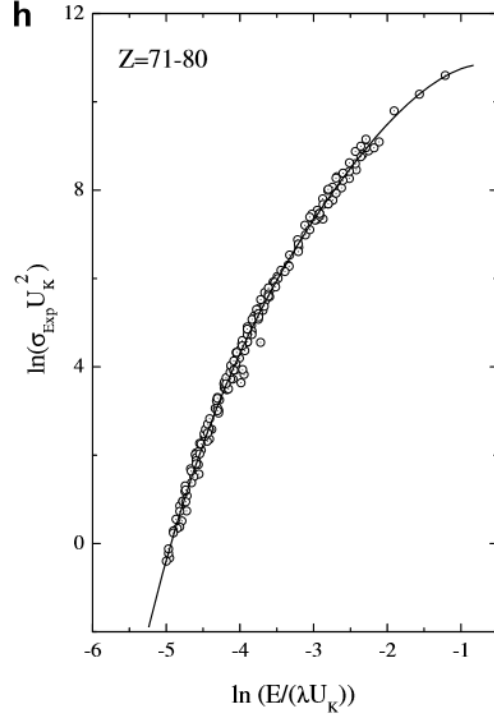


Figura 1.6: Valori sperimentali e fittati di  $\ln(\sigma_K E_K^2)$  in funzione di  $\ln(\frac{E}{\lambda U})$  per gli atomi con numero atomico  $71 < Z < 80$ , dove  $\lambda$  è il rapporto fra la massa del protone e la massa dell'elettrone; il valore  $E = 2 \text{ MeV}$  per il tungsteno corrisponde a un'ascissa pari a  $-4.15$ , da [8]

Per un protone incidente su uno strato di spessore  $dx$  il numero di ionizzazioni della shell K  $dN_K$  è

$$dN_K = n\sigma_K(E)dx, \quad (1.12)$$

dove  $n$  è la densità numerica degli atomi. Integrando e ricordando che l'espressione della perdita di energia per unità di percorso  $\frac{dE}{dx}$  è data dall'eq. 1.6, si può effettuare un cambio di variabile di integrazione in  $dE$ :

$$N_K = \omega_K n \int_0^{x_f} \sigma_K(E(x))dx = \omega_K n \int_{E_i}^{E_f} \sigma_K(E) \left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1} dE, \quad (1.13)$$

dove  $N_K$  è il numero di fotoni K emessi per protone,  $x_f$  è lo spessore del materiale attraversato,  $E_i$  e  $E_f$  sono le energie iniziali e finali del protone incidente e il fattore  $\omega_K = \frac{p_K}{p_K + p_{Auger}} \simeq 0.97$  per il tungsteno è il cosiddetto "fluorescence yield" ovvero la probabilità relativa di un'emissione K.

Per via della presenza del reciproco dell'eq. 1.6 tale espressione non è facilmente integrabile; una stima del suo valore verrà data nella sezione 3.2 trattandola numericamente.

## Capitolo 2

# Utilizzo medico dei raggi X

Uno dei settori più importanti della medicina è quello della radiologia: procedure come la CT (tomografia computerizzata, oltre 70 milioni l'anno nel 2007 [1]), le radiografie e in particolare le radiografie dentali (più di 500 milioni l'anno già nel 2001 [2]) sono fra i più diffusi strumenti diagnostici, utilizzati per ottenere immagini della struttura interna del corpo, risultando fondamentali nel trattamento di tumori, fratture e anomalie dei tessuti in generale.

Cio è reso possibile dall'utilizzo di particolari radiazioni penetranti, i raggi X duri, ovvero fotoni di energia maggiore di 30-40 keV e nello specifico compresi fra i 30 e i 150 keV; tale radiazione elettromagnetica è infatti in grado di attraversare i vari tessuti venendo assorbita più o meno dipendentemente dallo spessore attraversato, dallo spettro del fascio (più energia si traduce in più penetrazione) e dalla composizione del materiale.

Materiali più densi e contenenti elementi dal più elevato numero atomico come le ossa o i metalli tendenzialmente assorbono di più di materiali meno densi e più "leggeri" come l'acqua e la maggior parte dei tessuti carnosì; i coefficienti di assorbimento dei vari tipi di tessuti sono oggetto di studio per ovvii motivi e si possono trovare in tabulati [3]. Assieme all'eventuale utilizzo di agenti di radiocontrasto come i composti del Ba o dell'I ciò rende possibile distinguere in base alla quantità di radiazione assorbita il tipo e la forma dei tessuti attraversati, permettendo di identificare eventuali anomalie nella loro distribuzione e fornendo immagini bidimensionali (radiografie) o tridimensionali (CT, Tomografia Computerizzata) dell'interno del corpo.

### 2.1 Il tubo a raggi X

Un tubo a raggi X ideale consiste in una fonte di radiazione puntiforme e isotropa, possibilmente monocromatica; ciò permette infatti di ottenere un'immagine a fuoco a prescindere dall'ingrandimento richiesto e di avere valori di intensità in uscita dipendenti solo dal materiale attraversato, senza bisogno di compensazioni dovute alla direzione di emissione. Le dimensioni reali della sorgente introducono uno sfocamento che si manifesta nell'apparizione di zone di penombra attorno ai margini dell'immagine, altrimenti netti, che limitano il livello di ingrandimento utile (vedi fig. 2.1).

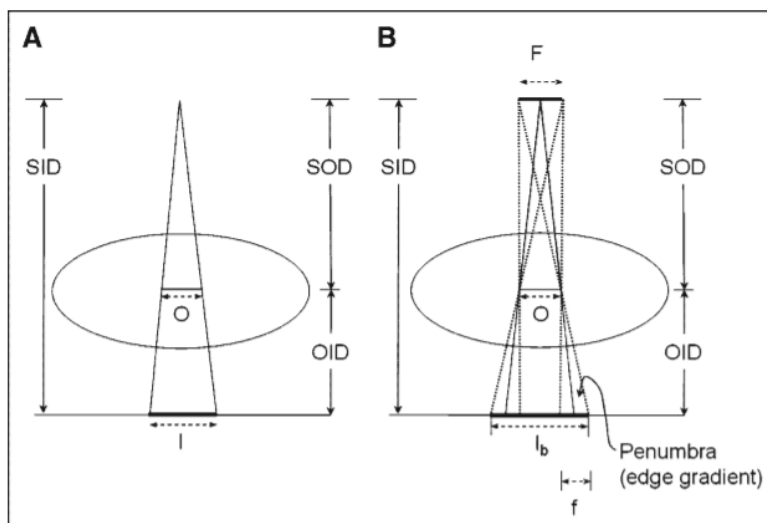


Figura 2.1: Sfocamento dovuto alla dimensione della sorgente, da [15]

Anche la non monocromaticità della radiazione X può risultare in un'errata stima del tasso di assorbimento dei tessuti dovuto alle differenze nella penetrazione delle varie frequenze, data la non sensibilità dei rilevatori utilizzati in fase di acquisizione dell'immagine alla frequenza della luce depositata; è proprio questa la ragione per cui sarebbe opportuno avere radiazione X monocromatica o di banda più stretta possibile. [18]

Un tubo a raggi X tipico (fig. 2.2) consiste in una camera a vuoto di vetro o metallo contenente due elettrodi separati da una distanza dell'ordine di 1-2 cm e un filamento di tungsteno posizionato presso il catodo, che viene messo a terra; il filamento, collegato a una sorgente a basso voltaggio regolabile, viene messo a un potenziale superiore a quello del catodo (nell'ordine delle decine di volt) mentre l'anodo è tenuto a un potenziale compreso fra i 50 e i 150 keV. Mediante il controllo del voltaggio dell'anodo e del generatore collegato al filamento l'operatore regola l'intensità e l'energia del flusso di elettroni, nonché l'intervallo di tempo per cui il tubo è acceso.

La *legge di Richardson* lega infatti la densità di corrente estratta  $J$  alla temperatura  $T$  del metallo

$$J = \lambda_R \frac{4\pi m k^2 e}{h^3} T^2 \cdot \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) \quad (2.1)$$

dove  $m$  ed  $e$  sono la massa e carica dell'elettrone,  $\exp$  la funzione esponenziale,  $k$  e  $h$  le costanti di Boltzmann e di Planck,  $\lambda_R$  è un coefficiente dipendente dal materiale e  $W$  è la cosiddetta *work function* del materiale, ovvero la minima energia richiesta per estrarvi un elettrone ( $\approx 4.5 \text{ eV}$  per il tungsteno). Essendo questa una funzione monotona crescente ed essendo la temperatura di equilibrio del filamento dipendente dalla potenza dissipata per effetto Joule ciò permette previa taratura del generatore di controllare finemente la corrente di fascio.

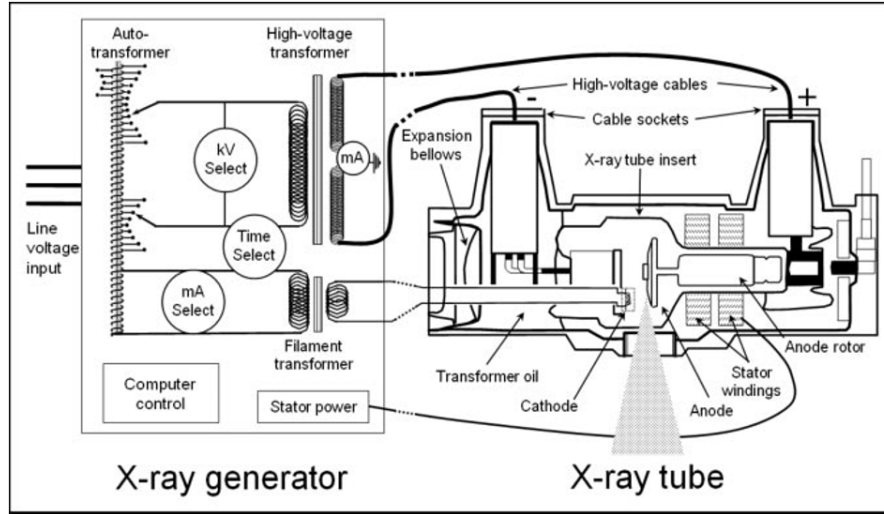


Figura 2.2: Schema di tubo a raggi X (ad anodo rotante), da [14]

Il catodo è sagomato come una coppa che racchiude il filamento al suo centro; gli elettroni estratti vengono dunque accelerati dalla differenza di potenziale fra catodo e anodo acquisendo un'energia cinetica pari al potenziale a cui erano soggetti e collidono con l'anodo, generando raggi X via bremsstrahlung e radiazione caratteristica.

La dominanza dell'emissione per bremsstrahlung da parte degli elettroni risulta in uno spettro d'emissione continuo che decresce fino all'energia dall'anodo, sormontato da alcuni picchi dovuti alle frequenze caratteristiche dell'anodo, solitamente realizzato in tungsteno per via del suo alto numero atomico, delle sue ottime proprietà termiche (punto di fusione 3695 K) e del suo costo contenuto (circa 25 euro/g).

La forma del catodo e del tubo per un tubo a raggi X ideale è dettata dalle esigenze di focalizzazione del fascio di elettroni sulla più piccola area possibile; in fig. 2.3 è proposto un design di tubo a focalizzazione elettrostatica che può arrivare a dimensioni della sorgente X pari a  $30 \mu\text{m}$  [13].

Nonostante ciò per un fascio da CT tipico l'ampiezza può variare a seconda della risoluzione richiesta fra  $0.3 \text{ mm} \leq r \leq 1.2 \text{ mm}$  ovvero valori da uno a due ordini di grandezza superiori, con notevoli svantaggi nella risoluzione dell'immagine ottenuta.

Ciò è dovuto alla difficoltà nello smaltire la potenza termica che il fascio di elettroni dissipa sulla targhetta; come abbiamo visto infatti solo lo 0.5% circa della potenza del fascio è convertito in raggi X; il resto diventa potenza termica e scalda l'anodo, difficile da refrigerare a causa dell'alto voltaggio a cui si trova e del vuoto che lo circonda.

Considerando che la corrente di fascio per una tipica CT può variare fra 50 e 300 mA [14], da  $P = IV$  con i dati di cui sopra otteniamo una potenza dell'ordine di  $10 \text{ kW}$ ; per un fascio con simmetria circolare ( $A = \pi r^2$ ) [14], e scegliendo un valore medio  $r = 0.8 \text{ mm}$  si ottiene per il flusso di energia trasferito al materiale il valore di

$$\phi = \frac{P}{A} \approx 5 \frac{\text{mW}}{\mu\text{m}^2}. \quad (2.2)$$

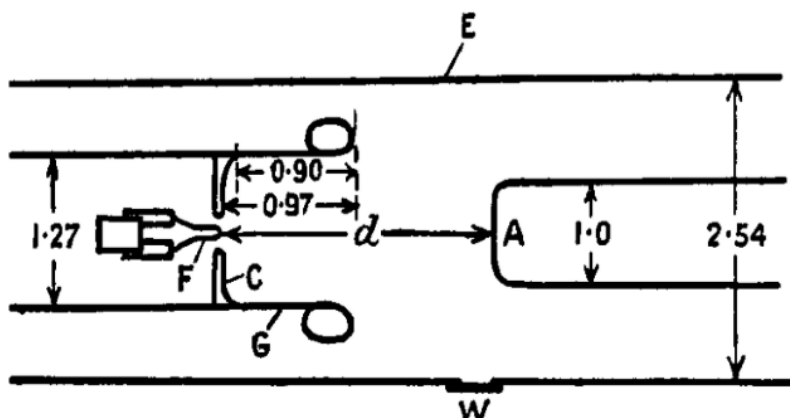


Figura 2.3: Schema di sistema di focalizzazione elettrostatico, con lunghezze espresse in cm; si nota la particolare forma del catodo C e la posizione del filamento F; l'anodo è indicato dalla lettera A e il potenziale della parte esterna del tubo E può variare fra quello dell'anodo e quello del catodo per regolare la messa a fuoco del fascio; W è la finestra di estrazione dei raggi X, da [13]

Calcolando tramite la *legge di Stefan Boltzmann* il limite massimo di dissipazione radiativa (per temperatura della superficie pari alla temperatura di fusione) si trova che il contributo radiativo alla dissipazione non supera i  $\phi_{rad} \approx 0.4 \frac{mW}{\mu m^2}$  e non è quindi il principale responsabile del raffreddamento della targhetta. Mancando la convezione, il calore deve essere quindi smaltito per conduzione.

Sapendo che il range degli elettroni da  $100 keV$  è di  $15.5 \mu m$  [4] il volume irradiato si può in prima approssimazione schematizzare come una superficie di area pari ad A. Assegnando arbitrariamente alla faccia (in realtà quella interna) la temperatura di  $T \simeq 3000 K$ , e sapendo che nell'intervallo  $\Delta T$  fra  $3000 K$  e  $2000 K$  la conduttività termica del tungsteno ha un valor medio di  $\lambda \approx 9 \cdot 10^{-2} \frac{mW}{\mu m \cdot K}$ , dalla *legge di Fourier*

$$Q = A \cdot \phi = \frac{A}{L} \lambda \Delta T \approx A \cdot 5 \frac{mW}{\mu m^2}, \quad (2.3)$$

otteniamo che la distanza  $L$  alla quale la temperatura scende al valore di  $2000 K$  è di  $L \approx 25 \mu m$ . Ripetendo stime dello stesso genere e sommando le distanze trovate, si trova che per poter dissipare in maniera continua il flusso di calore depositato dagli elettroni serve un sistema di raffreddamento che mantenga a temperatura ambiente lo strato a  $\approx 66 \mu m$  dal punto di deposizione del calore, limitando così a tale valore lo spessore di un ipotetico anodo che possa funzionare a ciclo continuo dissipando la potenza termica applicata.

La dissipazione termica risulta quindi il fattore limitante sia sul diametro del fascio che sulla durata dell'esposizione e sulla fluenza del fascio, creando problemi sia nell'esecuzione ripetuta di radiografie (dopo ogni "lastra" bisogna infatti attendere che l'anodo

si raffreddi) sia nella CT che richiede un numero elevato di scansioni da angoli diversi per ricostruire l'immagine tridimensionale [14].

Per attenuare questo problema spesso si utilizza un'architettura "ad anodo rotante", in cui l'anodo è un disco collegato ad un rotore, permettendo di distribuire su un'area più ampia la potenza termica data dal fascio incidente e quindi avendo sia un tasso di dissipazione che una capacità termica da sfruttare più elevati. A titolo di esempio la potenza termica effettiva per unità d'area del fascio considerato in precedenza diminuisce di un fattore  $\approx 400$  se esso viene fatto incidere su un anodo rotante ad una decina di centimetri di distanza dall'asse di rotazione.

E' inoltre consuetudine utilizzare anodi di grosso volume, dalla capacità termica di  $6 - 8 MJ$ , per poter prolungare il tempo di esposizione a parità di potenza termica o per poter utilizzare fasci più intensi. [14]

## 2.2 Indurimento del fascio X e spettro

Alle energie dei raggi X duri e dai raggi gamma, la luce presenta uno spiccato comportamento particellare; i fotoni si propagano lungo rette e hanno interazioni collisionali con le particelle con cui vengono a contatto [14].

In particolare alle scale energetiche alle quali siamo interessati le interazioni importanti sono l'effetto fotoelettrico, lo scattering Compton e lo scattering Rayleigh [15]. Esse verranno trattate brevemente in appendice; ci basti in questa sede dire che l'effetto complessivo di questi fenomeni è un'attenuazione del fascio X man mano che esso attraversa il materiale con la forma

$$N(x)(\omega) = N_0(\omega) \cdot e^{-\mu_{tot}x} \quad (2.4)$$

dove con  $x$  abbiamo indicato la distanza percorsa, con  $N(x)(\omega)$  il numero di fotoni di data pulsazione rimasti dopo aver attraversato una distanza  $x$ , con  $N_0(\omega)$  il loro numero originario e con  $\mu_{tot}$  il coefficiente di attenuazione lineare del materiale).

Dominando alle nostre scale energetiche la sezione d'urto fotoelettrica (vedi fig. B.1), decrescente all'aumentare dell'energia del fotone  $E_\gamma$ , anche per il coefficiente di attenuazione lineare totale vale  $\mu_{tot} \approx \frac{1}{E_\gamma^3}$ : pertanto fotoni più "duri" hanno coefficienti di attenuazione lineari più bassi (fig. 2.4).

Questo è il fenomeno citato inizialmente, base della radiologia X, ma viene anche sfruttato per "indurire" il fascio: infatti come detto lo spettro di emissione è continuo e presenta una crescita del numero di fotoni emessi man mano che ci si sposta verso le basse energie, dovuti al bremsstrahlung.

Come evidenziato da fig. 2.5 tali basse frequenze verrebbero assorbite dagli strati superficiali della pelle, originando danno cellulare senza poter contribuire alla formazione dell'immagine a causa della ridotta lunghezza di attenuazione.

Il fascio viene quindi filtrato mediante uno spessore di materiale dal basso numero atomico posizionato dopo l'anodo, tipicamente alluminio per aiutare il drenaggio della potenza termica ivi dissipata (vedi fig. 2.6).

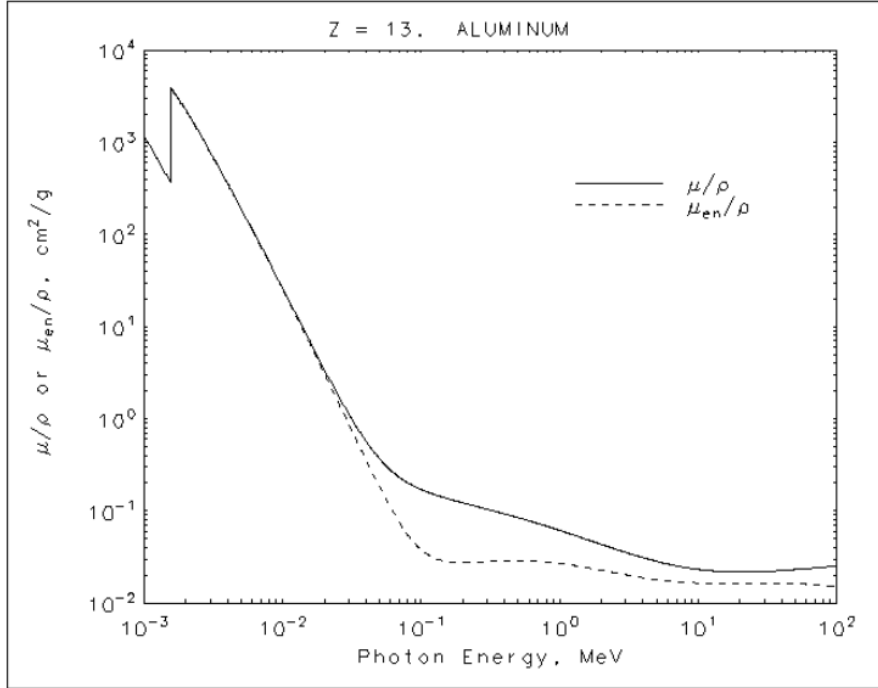


Figura 2.4: Coefficiente di attenuazione lineare rinormalizzato alla densità  $\frac{\mu}{\rho}$  in funzione della frequenza per l'alluminio ( $\frac{\mu}{\rho_{en}}$  è l'analogia quantità per l'energia depositata nel materiale), da [3]

Negli spettri filtrati dei tubi a raggi X riportati in fig. 2.7 si possono notare gli endpoint di ciascuna curva, pari all'energia degli elettroni incidenti, e i picchi della radiazione caratteristica, quanto più alti quanto più è elevata la differenza fra l'energia dell'elettrone e quella della shell K similamente a come avveniva nel caso dei protoni. Per elettroni delle energie che considereremo ( $E_e = 80 \text{ keV}$ ) essi risultano quindi trascurabili rispetto all'emissione da bremsstrahlung.

Discussione a parte merita la dipendenza angolare dello spettro e dell'intensità dagli angoli di osservazione e di incidenza del fascio sull'anodo.

Se l'angolo di incidenza  $\phi$  del fascio rispetto al piano è diverso dalla normale ci sarà maggior intensità dei raggi X riemessi all'indietro man mano che l'angolo aumenta (fig. 2.9): infatti le profondità  $D$  a cui il fascio raggiungeva una data energia media con incidenza normale vengono moltiplicate per  $\text{sen}(\phi)$  e quindi i raggi X emessi in profondità verranno assorbiti di meno, dovendo attraversare meno spessore di materiale per fuoriuscire dalla targhetta.

Ciò si traduce però in un allungamento della dimensione della sorgente parallela alla proiezione del fascio sul piano quantificabile in  $D \cdot \text{cos}(\phi)$  rendendo l'utilizzo di angoli di incidenza molto distanti dalla normale controproducenti per applicazioni mediche che richiedano alta risoluzione lungo tale direzione.

Ponendoci ora per comodità con incidenza normale del fascio si nota come per un

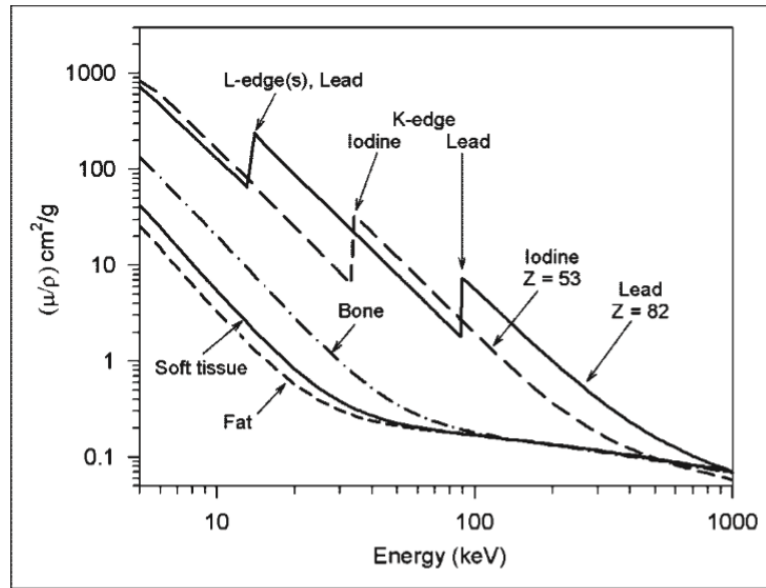


Figura 2.5: Coefficiente di attenuazione lineare rinormalizzato alla densità  $\frac{\mu}{\rho}$  in funzione della frequenza per vari materiali e tessuti ( $\frac{\mu}{\rho_{en}}$  è l'analogia quantità per l'energia depositata nel materiale), da [15]

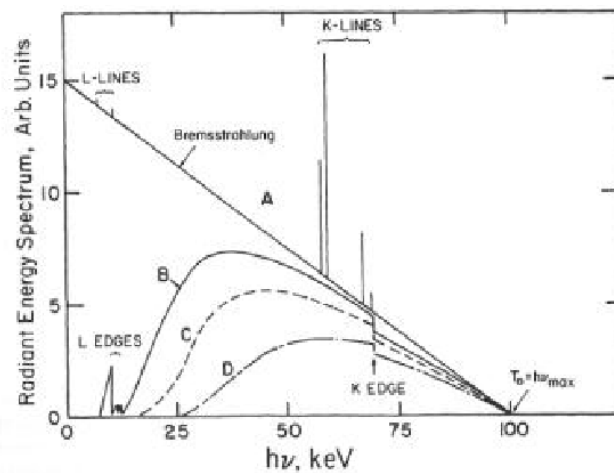


Figura 2.6: Spettro di tubi a raggi X con vari gradi di filtraggio A. approssimazione di spettro non filtrato, B. filtrato attraverso  $0.01\text{ mm}$  di tungsteno fuoriuscendo dalla targhetta, C. filtrato additionally da  $2\text{ mm}$  di alluminio, D. filtrato attraverso  $0.15\text{ mm}$  di rame e  $3.9\text{ mm}$  di alluminio (le righe della radiazione caratteristica sono mostrate solo sullo spettro non filtrato, ma verrebbero attenuate con lo stesso rapporto dello spettro continuo all'energia delle righe), da [19]

angolo di osservazione  $\epsilon$  pari a  $90$  gradi la sorgente è circolare con area pari alla sezione

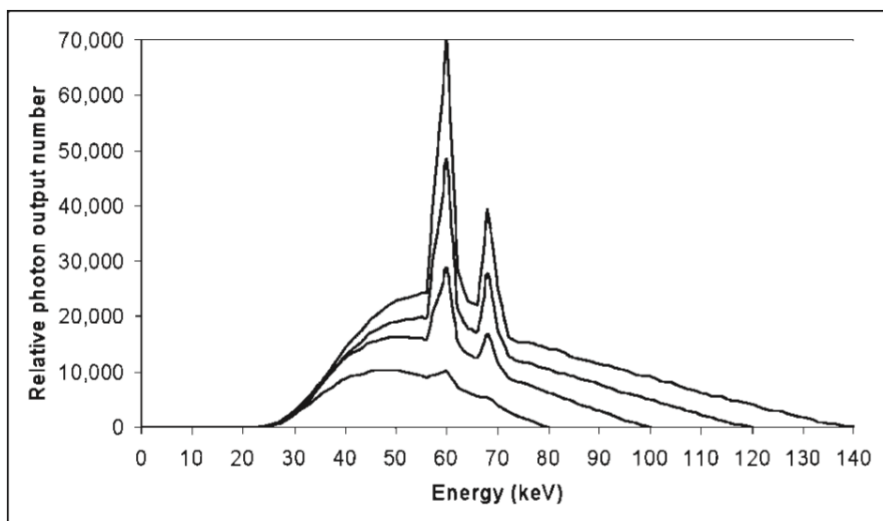


Figura 2.7: Spettro tipico di tubo a raggi X filtrati per fasci di elettroni da 80, 100, 120 e 140 keV, sovrapposizione dello spettro continuo dato dal bremsstrahlung e dei picchi dovuti all'emissione di radiazione caratteristica, da [14]

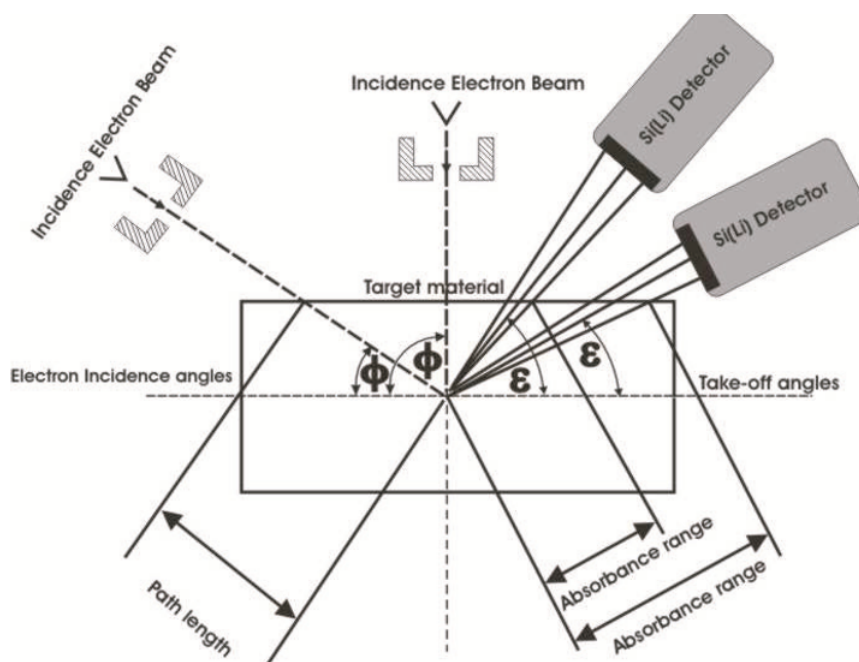


Figura 2.8: Schema di un anodo di tubo a raggi X con angoli di incidenza del fascio e di emissione, da [12]

del fascio  $A = \pi r_{fascio}^2$ , dove con  $r_{fascio}$  abbiamo indicato il raggio del fascio supponendo che l'intensità dello stesso si annulli oltre tale distanza dall'asse. Semplice trigonometria

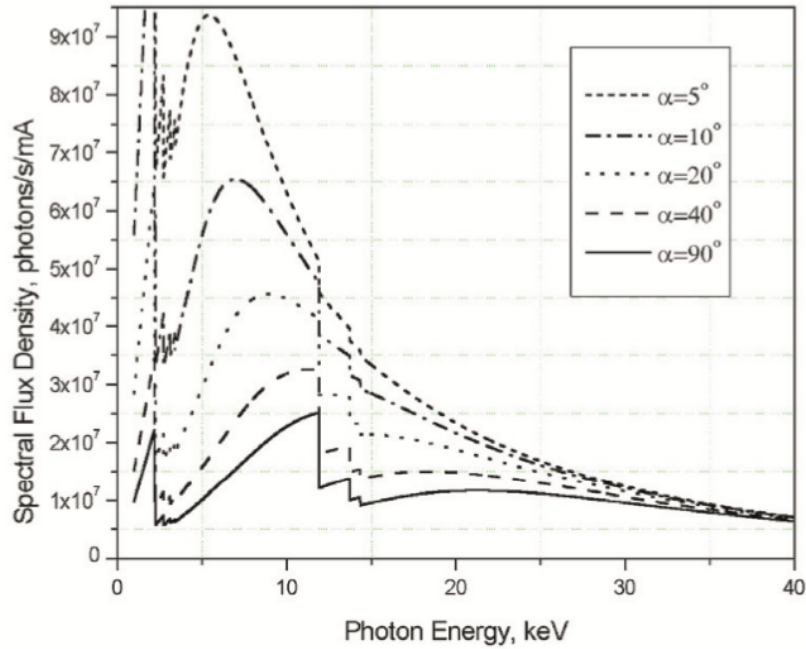


Figura 2.9: Intensità dello spettro continuo X prodotto da un anodo in oro ed elettroni da  $100\text{ keV}$  per vari angoli di incidenza, da [12]

mostra che man mano che l'angolo  $\epsilon$  decresce il contributo di quest'area all'area osservata della sorgente decresce come  $A \cdot \sin(\epsilon)$ .

La superficie laterale del volume cilindrico interessato dall'emissione X  $A_{cil} \approx \pi R r_{fascio}$  (dove con  $R$  abbiamo indicato il range degli elettroni all'interno della targhetta) è in tale situazione totalmente nascosta; al decrescere di  $\epsilon$  essa diventa visibile contribuendo all'area osservata della sorgente con un contributo  $A_{cil} \cdot \cos(\epsilon)$ .

Questi due andamenti di segno contrastante risultano in un massimo dell'area osservata della sorgente in corrispondenza di un angolo intermedio fra 0 e 90 gradi,  $\epsilon_{max} = \arctan(\frac{A}{A_{cil}})$ ; dato che nella maggior parte dei casi lo spessore del fascio è maggiore rispetto al range degli elettroni utilizzati, tale massimo risulta spostato verso angoli di osservazione vicini alla normale, col risultato che l'area osservata più piccola si ha per angoli quanto più prossimi a 0 gradi.

Ciononostante va considerato che anche l'angolo di osservazione ha incidenza sull'intensità osservata, poichè il cammino percorso all'interno della targhetta da un fotone emesso a profondità  $d$  varia in funzione dell'angolo come  $\frac{d}{\sin(\epsilon)}$  e quindi angoli di osservazione troppo bassi risultano in una pesante diminuzione dell'intensità osservata a causa dell'assorbimento (vedi fig. 2.10: l'emissione, che si presenta come isotropa ad elevati angoli di osservazione, cala come ci aspettavamo di intensità man mano che  $\epsilon$  tende a zero).

Per la combinazione di questi fattori un'area ridotta senza troppa riduzione nell'intensità della radiazione si ha per angoli di incidenza maggiori di 50 gradi ed angoli di

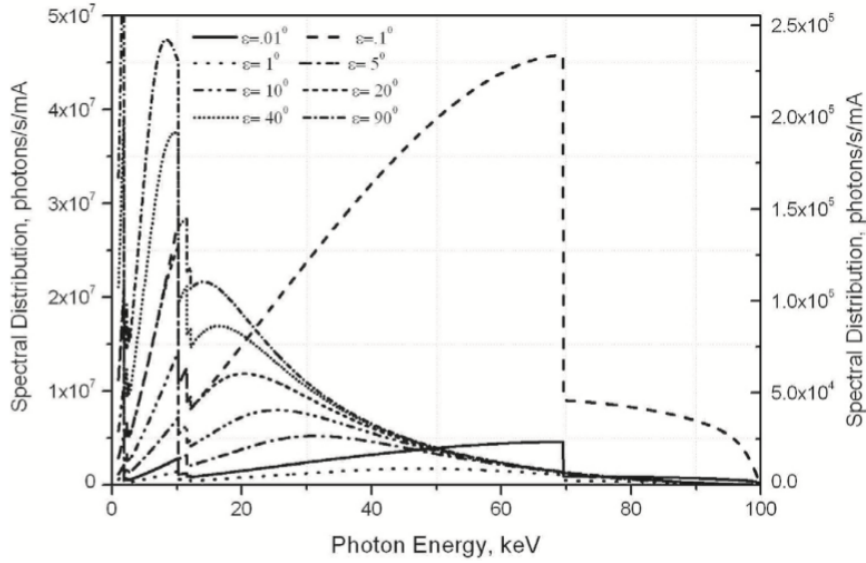


Figura 2.10: Intensità dello spettro continuo X prodotto da un anodo in tungsteno ed elettroni da  $100\text{ keV}$  per vari angoli di osservazione, da [12]

osservazione di  $\approx 20$  gradi [12].

### 2.3 Fluenza richiesta per un esame

La fluenza per una tipica scansione CT ( $V = 120\text{ kV}, I = 200\text{ mA}$ ) a  $50\text{ cm}$  è di

$$\phi_{@0.5m} \simeq 6.7 \cdot 10^6 \frac{\text{fotoni}}{\text{mm}^2 \cdot \text{s}} [14] \quad (2.5)$$

ciò corrisponde a un'intensità della sorgente per milliampere di corrente di fascio di

$$I = 4\pi r^2 \phi \simeq 2.1 \cdot 10^{13} \frac{\text{fotoni}}{\text{mA} \cdot \text{s}} \quad (2.6)$$

o equivalentemente ad una fluenza per milliampere ad un metro di

$$\phi_{@1m} \simeq 1.7 \cdot 10^6 \frac{\text{fotoni}}{\text{mA} \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{s}}. \quad (2.7)$$

Un apparato che miri a sostituire quelli correnti dovrà fornire intensità dello stesso ordine di grandezza.

Per tale apparato la potenza termica dissipata per milliampere di corrente vale  $120 \frac{\text{W}}{\text{mA}}$ , equivalenti a una potenza termica totale di  $24\text{ kW}$ .

## Capitolo 3

# Nuovi possibili tipi di sorgenti

Presenteremo in questa sezione una tecnica innovativa, la sostituzione dell'anodo spesso con un anodo fine congiunta allo spostamento della messa a terra su quest'ultimo, applicata prima ad un fascio di elettroni e poi di protoni. Abbiamo pertanto investigato due setup basati su queste caratteristiche.

### 3.1 Tubo a raggi X con elettroni ad anodo fine

La prima proposta di modifica mantiene un fascio di elettroni ed il meccanismo di estrazione termoionico, limitando quindi le dimensioni iniziali dal fascio alle dimensioni della sorgente degli elettroni sommate alla dispersione dovuta alla componente normale all'asse del tubo della velocità di estrazione dell'elettrone.

Un metodo alternativo di estrazione degli elettroni per effetto termoionico è costituito dalla focalizzazione di un fascio laser infrarosso direttamente sul catodo (in questo caso realizzato perlomeno in parte in tungsteno), ottenendo dimensioni del fascio analoghe a quelle ottenute con filamento, in quanto il contributo dominante è dato per l'estrazione via effetto termoionico dallo spread dovuto alla velocità iniziale di estrazione.

Partendo da questo metodo si può ottenere un ulteriore miglioramento nella sezione del fascio estraendo gli elettroni con energia quasi nulla, eliminando quindi la dispersione dovuta alla velocità iniziale di estrazione e riducendosi alla sezione del fascio laser.

Ciò si può fare estraendo gli elettroni per effetto fotoelettrico, dirigendo sul catodo un fascio laser costituito da fotoni monocromatici di energia pari (di poco superiore) al lavoro di estrazione del metallo del catodo; in tal caso verrebbe anche a mancare la necessità di raffreddare il catodo in quanto tutta l'energia verrebbe trasferita agli elettroni estratti.

Dati i recenti sviluppi nella costruzione di laser nell' ultravioletto a costi ridotti tale design rappresenta una proposta molto promettente, permettendo di raggiungere risoluzioni nettamente più alte di quelle odierne qualora l'anodo sia in grado di dissipare l'elevato flusso di calore derivante dalla concentrazione del fascio su un'area più piccola.

La prima importante differenza rispetto al tubo radiogeno "classico" consiste nello spostare la messa a terra sull'anodo, che in tal modo potrebbe essere collegato più facilmente

con l'esterno del tubo facilitandone il raffreddamento e sperabilmente riducendo il tempo richiesto fra una radiografia e la successiva.

Questo richiede di mettere in alta tensione negativa il catodo e di provvedere un'alimentazione al filamento in alta tensione, utilizzando un raggio laser focalizzato su una cellula fotovoltaica ad alta efficienza di conversione (cruciale per non trasferire al catodo il problema del raffreddamento).

La seconda miglioria proposta è la sostituzione dell'anodo spesso con un anodo fine, con i seguenti vantaggi:

- un anodo spesso attenua la radiazione che lo attraversa lungo la direzione e il verso del fascio degli elettroni, diminuendo lo yield e precludendo la possibilità di effettuare design di tubi con paziente posizionato lungo tale direttrice; proprio tale design diventa però ottimale nel caso di un anodo fine data la possibilità di inserire a contatto con l'anodo uno spessore filtrante di alluminio, permettendo di distribuire la deposizione di calore da parte degli elettroni all'interno di tale materiale grazie al numero atomico notevolmente più basso, filtrando per di più le emissioni di raggi X molli e aumentando al contempo il raffreddamento dell'anodo di tungsteno grazie alla maggior conduttività dell'alluminio;
- elettroni di energia minore dell'energia minima della radiazione utile all'esame emetteranno esclusivamente fotoni di frequenza minore di quelli utili, aumentando lo spessore del materiale filtrante necessario alla schermatura dei raggi X morbidi e riducendo quindi ulteriormente la resa in raggi X duri;
- lo stopping power, e quindi l'energia depositata per unità di percorso dagli elettroni, aumenta in prossimità della fermata (eq. 1.6); depositandola all'interno dello strato di alluminio filtrante (nel caso di un design lungo la direttrice del fascio) o su un'area predisposta sulla parete del tubo (dopo aver deviato gli elettroni con un debole campo magnetico), si può ridurre notevolmente la potenza termica depositata sull'anodo.

Di seguito presentiamo le stime effettuate applicando questa soluzione a un fascio di elettroni da  $80\text{ keV}$  su anodo fine in tungsteno che ne riducesse l'energia media a  $50\text{ keV}$ ; questi due valori rappresentavano anche i due estremi dell'intervallo di energie dei raggi X a noi utili.

Volendo ottenere risultati corretti solo sulla prima cifra significativa abbiamo utilizzato di volta in volta delle approssimazioni nello svolgimento dei calcoli, anch'esse esposte nel seguito.

Il primo passo è stato calcolare lo spessore di tungsteno necessario dopo il quale l'energia media del fascio fosse quella voluta; data la perdita di energia per unità di lunghezza  $\frac{dE}{dx}$ , il range è

$$R(E_i, E_f) = \int_{E_f}^{E_i} \frac{dE}{dx}(E)^{-1} dE, \quad (3.1)$$

(dove  $E_i$  è l'energia iniziale degli elettroni ed  $E_f$  l'energia finale).

Per effettuare il calcolo numerico si è suddivisa la distanza da calcolare in 30 intervalli in ognuno dei quali la decrescita dell'energia media del fascio fosse pari a  $1 \text{ keV}$ .

Si sono utilizzati i dati del NIST (National Institute of Standards and Technology, U.S.) sulla perdita di energia degli elettroni per unità di cammino e di densità nel tungsteno (tabella C.1), moltiplicati per la densità del tungsteno  $\rho = 19.3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ .<sup>5</sup>

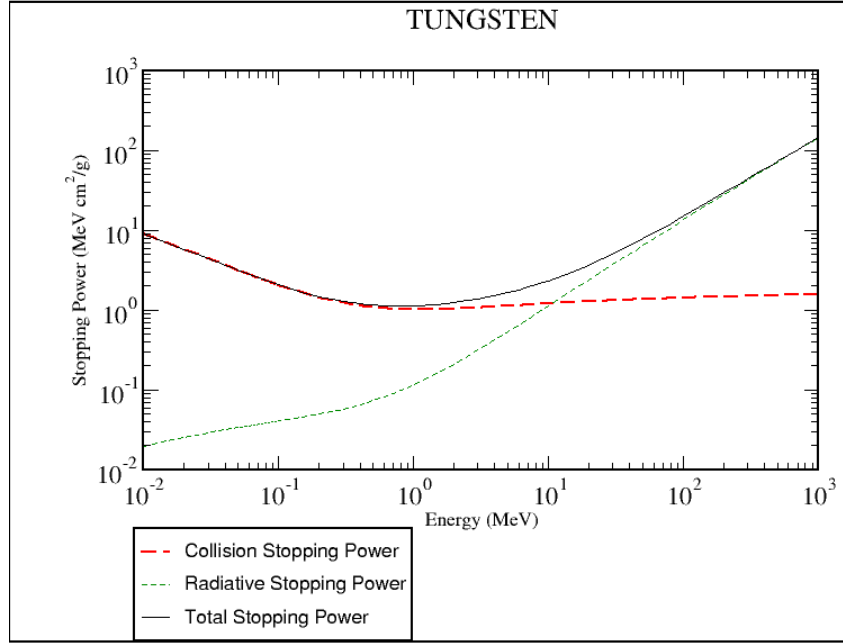


Figura 3.1: Stopping power totale, elettronico e radiativo del tungsteno per elettroni in funzione dell'energia; si noti come il contributo radiativo sia trascurabile alle energie da noi considerate, da [4]

In mancanza di un andamento teorico esplicito di questi dati, si sono presi i valori di  $\frac{dE}{dx}$  per gli estremi degli intervalli e ne si è ipotizzato un andamento lineare per ciascun intervallo, ottenendo

$$\frac{dx}{dE}(E) = \frac{dE}{dx}(E)^{-1} = \frac{E_i - E_f}{\left(\left(\frac{dE}{dx}\right)_f E_i - \left(\frac{dE}{dx}\right)_i E_f\right) + E \left(\left(\frac{dE}{dx}\right)_i - \left(\frac{dE}{dx}\right)_f\right)}, \quad (3.2)$$

dove  $E_i, \left(\frac{dE}{dx}\right)_i$  sono l'energia e la perdita di energia per unità di cammino degli elettroni all'inizio dell'intervallo e  $E_f = E_i - (1 \text{ keV}), \left(\frac{dE}{dx}\right)_f$  sono le medesime quantità alla fine

<sup>5</sup>E' uso nella fisica delle particelle esprimere dati come lo stopping power e i coefficienti di assorbimento dividendoli per la densità del materiale per normalizzarli; tutti i dati utilizzati nel nostro lavoro presentati in questa forma sono stati moltiplicati per la densità del tungsteno, anche se non esplicitamente indicato)

dell'intervallo. La lunghezza di un intervallo è quindi

$$R(E_i, E_f) = \int_{E_f}^{E_i} \frac{E_i - E_f}{\left(\left(\frac{dE}{dx}\right)_f E_i - \left(\frac{dE}{dx}\right)_i E_f\right) + E \left(\left(\frac{dE}{dx}\right)_i - \left(\frac{dE}{dx}\right)_f\right)} dE = \quad (3.3)$$

$$= \frac{E_i - E_f}{\left(\left(\frac{dE}{dx}\right)_f E_i - \left(\frac{dE}{dx}\right)_i E_f\right)} \ln \frac{\left(\left(\frac{dE}{dx}\right)_f E_i - \left(\frac{dE}{dx}\right)_i E_f\right) + E_i \left(\left(\frac{dE}{dx}\right)_i - \left(\frac{dE}{dx}\right)_f\right)}{\left(\left(\frac{dE}{dx}\right)_f E_i - \left(\frac{dE}{dx}\right)_i E_f\right) + E_f \left(\left(\frac{dE}{dx}\right)_i - \left(\frac{dE}{dx}\right)_f\right)}, \quad (3.4)$$

espressione analitica che è stata valutata per ogni intervallo. La somma delle lunghezze degli intervalli dà la stima dello spessore richiesto:

$$R(80 \text{ keV}, 50 \text{ keV}) \simeq 5.762 \mu\text{m}, \quad (3.5)$$

che confrontata con l'equivalente risultato ottenuto per differenza fra i range tabulati dal NIST per le energie di 50 e 80 keV,  $R_{NIST} = 5.763 \mu\text{m}$ , esibisce accordo fino alla quarta cifra significativa dimostrando la bontà dell'approssimazione fatta per gli intervalli spaziali considerati.

Per ciascun intervallo spaziale (indicato dall'intervallo delle energie degli elettroni equivalente  $[E_f; E_i]$ ) si è dunque proceduto a stimare l'energia totale irradiata da un elettrone  $\Delta E_{[E_f; E_i]}$  moltiplicando le lunghezze di ciascun intervallo spaziale per la media aritmetica dei valori della perdita energetica radiativa per unità di cammino tabulati dal NIST; quest'ultima approssimazione è giustificata in quanto come ricavato nell'eq. 1.5 (e come si osserva anche nei dati) la potenza irradiata per bremsstrahlung per unità di lunghezza è costante alla nostra scala energetica.

Si è poi divisa la porzione di spettro dei fotoni emessi compresa fra 30 e 80 keV in intervalli energetici da 1 keV; per ogni intervallo in energia dei fotoni emessi è stato calcolato un coefficiente di assorbimento medio  $\mu(E)$  dai dati sul coefficiente di assorbimento ricavati dal NIST, supponendo un andamento lineare del logaritmo di  $\mu$  in funzione dell'energia della radiazione E (come suggerito dal grafico in scala logaritmica in fig. 3.2).

Approssimando l'energia dei fotoni nell'intervallo con l'energia media dell'intervallo,  $E_\gamma = \frac{E_{\gamma,i} + E_{\gamma,f}}{2}$  (dove con la solita notazione  $E_{\gamma,i}$  ed  $E_{\gamma,f}$  sono le energie iniziali e finali dell'intervallo, con quella finale presa come la più bassa) quindi

$$\ln(\mu(E_\gamma)) = \ln(\mu_f) + \ln \left( \frac{\mu_i}{\mu_f} \right) \frac{\ln \left( \frac{E_\gamma}{E_f} \right)}{\ln \left( \frac{E_i}{E_f} \right)}, \quad (3.6)$$

dove  $\mu_i$  e  $\mu_f$  sono rispettivamente i coefficienti di assorbimento tabulati dal NIST relativi alle energie immediatamente più alta e immediatamente più bassa rispetto all'energia  $E_\gamma$ .

Come si può vedere da fig. 3.2 e dai coefficienti di assorbimento tabulati in tabella C.4 è stato però necessario riservare all'intervallo energetico [69 keV; 70 keV] un trattamento particolare a causa della presenza al suo interno dell'absorption edge della shell K ad  $E_\gamma = 69.525 \text{ keV}$ : sono stati dunque calcolati i coefficienti di assorbimento per le porzioni d'intervallo al di sotto e al di sopra dell'absorption edge col metodo presentato in

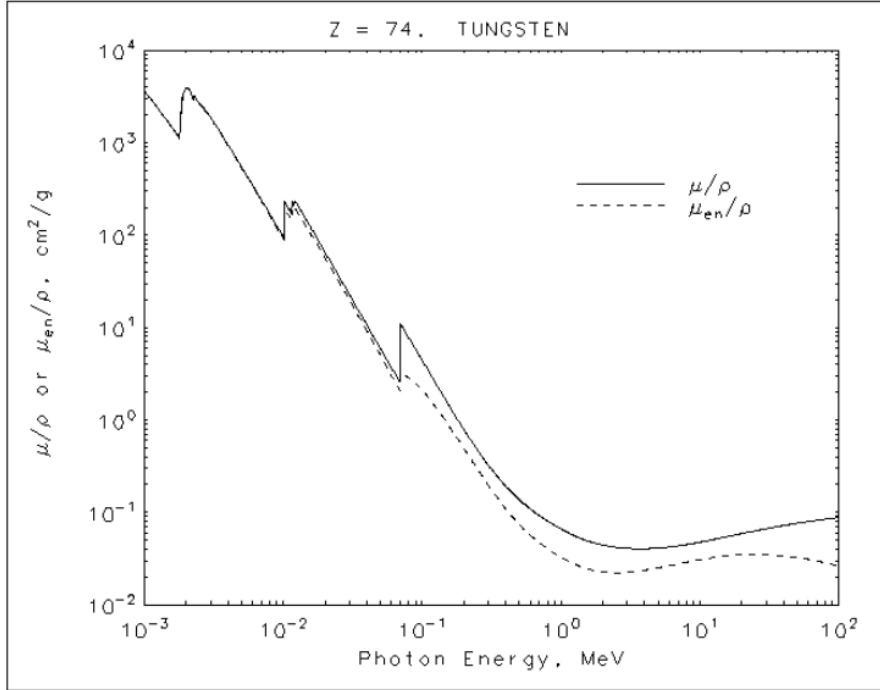


Figura 3.2: Coefficiente di attenuazione lineare rinormalizzato alla densità  $\frac{\mu}{\rho}$  in funzione della frequenza per il tungsteno ( $\frac{\mu}{\rho_{en}}$  è l'analogia quantità per l'energia depositata nel materiale), da [3]

precedenza, e ne è stata fatta una media pesata rispetto alla lunghezza dei due intervalli energetici.

Per ciascun intervallo spaziale si è stimata la quantità di energia irradiata in ciascun intervallo energetico  $\Delta E_{[E_f; E_i]}(E_\gamma)$ <sup>6</sup>, dove  $E_\gamma$  corrisponde all'intervallo energetico compreso fra le energie dei fotoni emessi  $E_{\gamma,i}$  ed  $E_{\gamma,f}$ , utilizzando l'eq. 1.9:

$$\Delta E_{[E_f; E_i]}(E_\gamma) = \Delta E_{[E_f; E_i]} \cdot \frac{Int(\frac{E_{\gamma,i}}{E_i}) - Int(\frac{E_{\gamma,f}}{E_i})}{2}, \quad (3.7)$$

dove si sono utilizzate le notazioni introdotte in precedenza per gli intervalli spaziali (espressi in energie degli elettroni) e per gli intervalli energetici della radiazione emessa, e dove il fattore 2 del denominatore è la normalizzazione ricavata dall'eq. 1.10.

Ogni  $\Delta E_{[E_f; E_i]}(E_\gamma)$  è stato quindi moltiplicato per  $e^{-\mu(E_\gamma) \cdot x_{[E_f; E_i]}}$  (dove  $x_{[E_f; E_i]}$  è la distanza fra il centro dell'intervallo spaziale  $[E_f; E_i]$  e la fine dell'anodo di tungsteno, ovvero la faccia da cui escono gli elettroni da 50 keV) per tenere conto dell'assorbimento della radiazione all'interno dell'anodo nella direzione parallela al fascio e con lo stesso verso; si è quindi calcolato il numero di fotoni fuoriusciti dall'anodo per ciascun intervallo

<sup>6</sup>Con abuso di notazione per tutto il resto della sezione ci si riferirà con  $E_\gamma$  all'energia dei fotoni emessi, mentre gli intervalli spaziali verranno dati nella forma  $[E_f; E_i]$

energetico  $N(E_\gamma)$ :

$$N(E_\gamma) = \sum_{[E_f; E_i]} \Delta E_{[E_f; E_i]}(E_\gamma) \cdot e^{-\mu(E_\gamma) \cdot x_{[E_f; E_i]}} \cdot \frac{1}{E_\gamma}. \quad (3.8)$$

Moltiplicando questo risultato per  $6.24 \cdot 10^{15}$ , numero di elettroni per milliampere di corrente, si è infine ottenuto per ogni intervallo energetico il numero di fotoni non filtrati per milliampere di corrente e secondo.

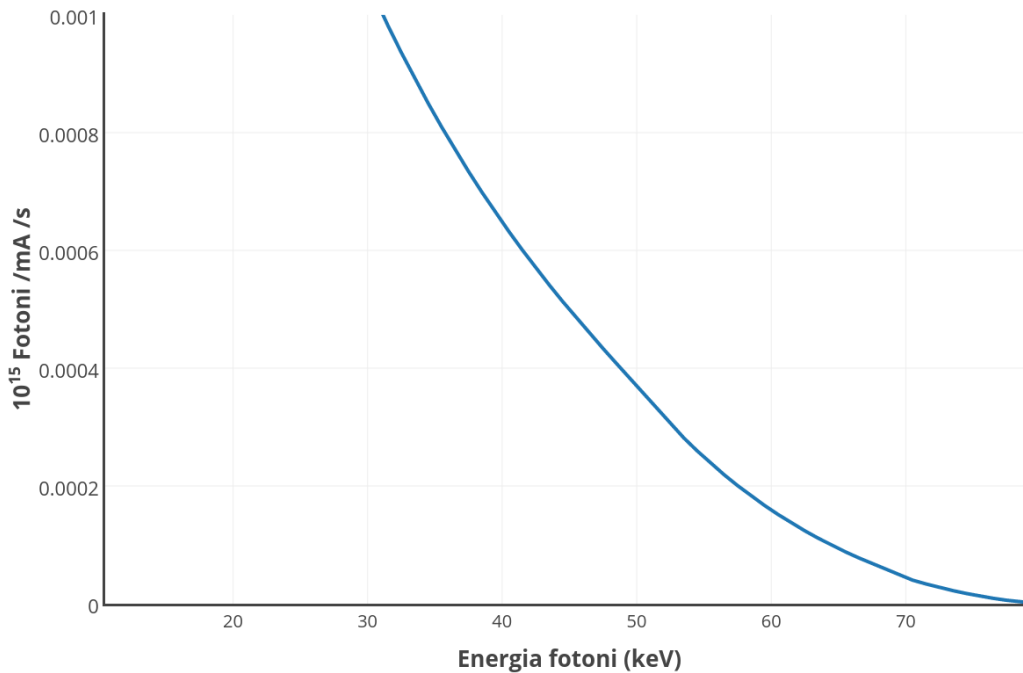


Figura 3.3: Fotoni fuoriusciti dall'anodo fine per secondo per milliampere di corrente in funzione dell'energia

Lo spettro ottenuto (fig. 3.3) nel confronto con quelli presenti in letteratura manca della discontinuità dovuta al contributo dell'assorbimento della shell K, testimoniando l'efficacia del metodo con anodo fine nell'evitare il riassorbimento della radiazione emessa da parte della targhetta.

Per ciascuna energia dei fotoni si è quindi calcolato il coefficiente di assorbimento lineare attraverso l'alluminio; i dati NIST utilizzati sono molto radi (tabella C.2) come era già successo per il tungsteno, ma a differenza di quest'ultimo non c'è più una proporzionalità diretta fra  $\ln(\mu)$  e  $\ln(E)$  (vedi fig. 3.4). Da 3.4 si può comunque notare che approssimando ciascun intervallo fra due valori con una retta  $\frac{d\mu}{dE} = cost.$  non si commettono errori marcati ad alte energie, ma solo dove la curvatura della curva diventa più evidente, ovvero negli intervalli fra 30 e 40 keV e in misura minore fra 40 e 50 keV.

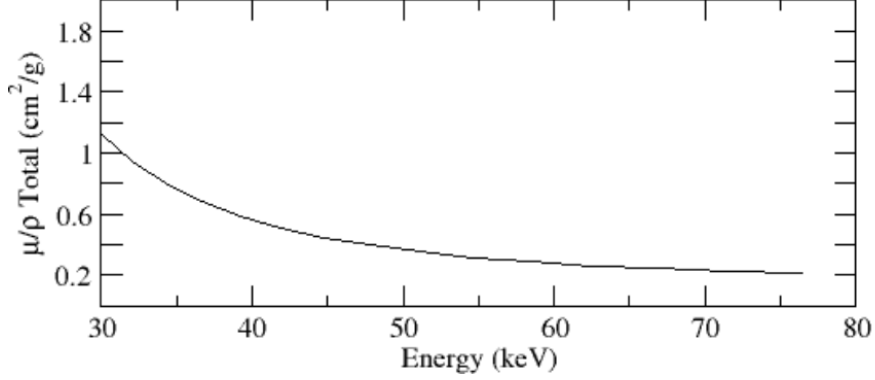


Figura 3.4: Coefficiente di assorbimento normalizzato alla massa per l'alluminio, [3]

Da una stima grafica si evince che tale approssimazione porterebbe a una sovrastima di  $\frac{\mu}{\rho}$  dell'ordine di  $0.1 \frac{cm^2}{g}$  al centro del primo intervallo e minore di  $0.05 \frac{cm^2}{g}$  al centro del secondo intervallo; ciò però non pregiudica gli scopi del nostro studio dato che entrambi questi intervalli sono fuori dal range della radiazione che ci interessa e che comunque il coefficiente di assorbimento per i fotoni di  $30 keV$  (che useremo come metro dell'assorbimento del filtro) non viene sovrastimato.

Supponendo quindi di voler ridurre il numero di fotoni di tipo  $E_\gamma \leq 30 keV$  al minimo di un fattore arbitrario  $F$ , lo spessore necessario  $\Delta x$  è

$$\Delta x = \frac{\ln(F)}{-\mu(30 keV)}. \quad (3.9)$$

Di seguito lo spettro ottenuto in precedenza senza filtraggio sovrapposto agli spettri ottenuti per vari valori di  $F$  (fig. 3.5) Si notano negli spettri filtrati in fig. 3.5 due zone piatte per  $30 keV < E_\gamma < 50 keV$  dovute all'errore nell'approssimazione del coefficiente di assorbimento lineare; ciò detto gli spettri ben corrispondono agli spettri filtrati trovati in letteratura e mostrano con chiarezza la differenza nell'attenuazione delle varie frequenze.

Il numero totale di fotoni per milliampere di corrente con energia  $E_\gamma > 50 keV$  non filtrati è

$$N_{>50 keV} \simeq 0.37 \cdot 10^{13} \left[ \frac{fotoni}{mA \cdot s} \right]; \quad (3.10)$$

introducendo un filtraggio  $F = 10$ , equivalente a uno spessore di alluminio di  $7.6 mm$  esso viene ridotto a

$$N_{>50 keV, F=10} \simeq 0.20 \cdot 10^{13} \left[ \frac{fotoni}{mA \cdot s} \right]; \quad (3.11)$$

mentre se il filtraggio viene portato a  $F = 100$ , equivalente a uno spessore di alluminio di  $1.52 cm$  esso viene ridotto a

$$N_{>50 keV, F=100} \simeq 0.11 \cdot 10^{13} \left[ \frac{fotoni}{mA \cdot s} \right]. \quad (3.12)$$

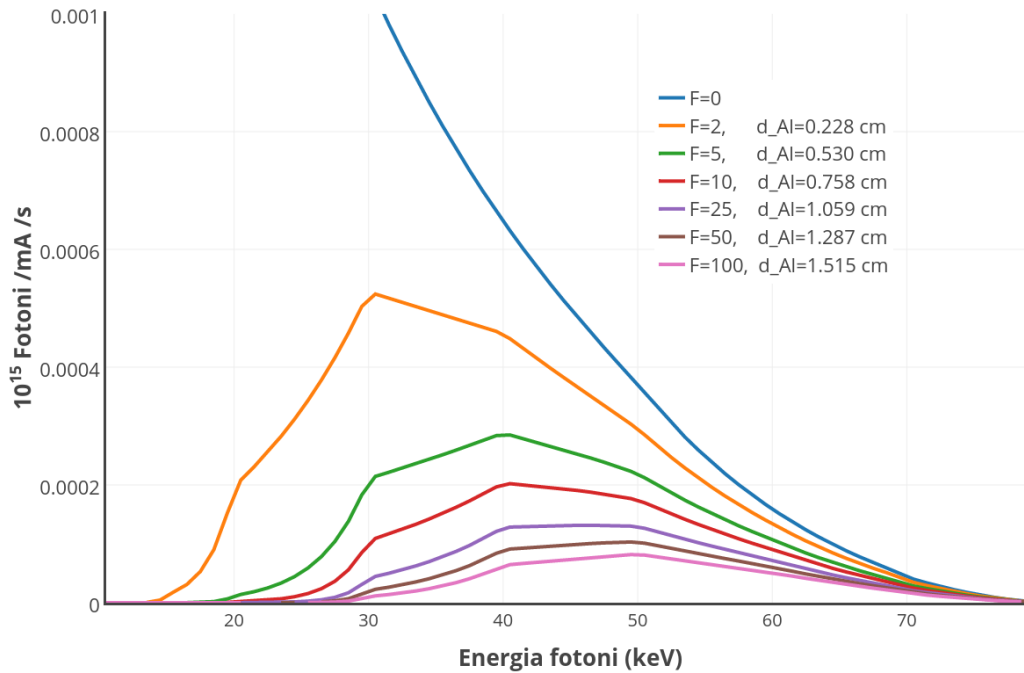


Figura 3.5: Fotoni fuoriusciti dall'anodo fine per secondo per milliampere di corrente in funzione dell'energia per vari valori del parametro di attenuazione  $F$ ; sono indicati anche gli spessori di alluminio utilizzati

La fluenza equivalente è per l'apparato con  $F=10$  pari a

$$\phi_{@1m, F=10} \simeq 1.6 \cdot 10^5 \frac{\text{fotoni}}{\text{mA} \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{s}}. \quad (3.13)$$

Tali intensità e fluenze per milliampere di corrente sono di un ordine di grandezza più piccole di quelle richieste da una CT, ma già dell'ordine di grandezza giusto per esami che richiedono fluenze minori come le angiografie e varie tipologie di radiografie; in più bisogna considerare che sono state ottenute con voltaggio minore rispetto all'apparato CT preso come riferimento, causando una diseguaglianza nella frazione di radiazione rilasciata nella parte dura dello spettro.

Un design di questo tipo potrebbe permettere correnti di fascio molto più intense e/o dimensioni della sorgente X ridotte, dipendentemente dal miglioramento dell'efficacia del raffreddamento della targhetta permesso dall'averla messa a terra.

La potenza termica dissipata per milliampere di corrente vale per questo design  $30 \frac{W}{mA}$ , ovvero un quarto del valore di riferimento. Da rimarcare inoltre è la necessità di minor filtraggio dovuta alla mancanza dei raggi X molli emessi dagli elettroni lenti nel design ad anodo fine, portando ad uno spettro più duro a parità di flusso di raggi X morbidi.

Lo yield in energia per la sorgente non filtrata e X con energia maggiore di  $50\text{ keV}$  vale

$$Y = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ mA}, \quad (3.14)$$

che è quattro volte inferiore alla stima per eccesso fatta all'inizio per elettroni da  $100\text{ keV}$ .

### 3.2 Protoni da 2MeV su anodo fine

La seconda proposta di modifica sostituisce al fascio di elettroni un fascio di protoni di energia iniziale  $2\text{ MeV}$ ; viene mantenuto il setup ad anodo fine, con energia media finale dei protoni pari a  $0.5\text{ MeV}$ .

Il limite dell'energia del fascio di protoni iniziale è imposto dalla richiesta che l'apparato possa essere contenuto in una stanza e quindi misuri al massimo dei metri; un apparato più grande sarebbe inutile data la presenza di una tecnologia già sviluppata di ingombro simile come quella della luce di sincrotrone.

Come analizzato in precedenza, per i protoni il bremsstrahlung è trascurabile, e l'emissione è composta da radiazione caratteristica. A differenza dello studio precedente che voleva testare la competitività del design con quelli già esistenti, questo vuole studiarne la fattibilità; pertanto siamo interessati ad ottenere una stima dei fotoni K prodotti per milliamperes di corrente, e non ci occuperemo dei raggi X molli prodotti dalle shell a energia più bassa e del filtraggio quindi richiesto.

Anche in questo caso si è diviso l'intervallo energetico fra l'energia iniziale e finale dei protoni in 15 intervalli spaziali ciascuno corrispondente a un decremento energetico medio dei protoni di  $0.1\text{ MeV}$ .

Ricavati i dati dello stopping power protonico totale del tungsteno dal database del NIST (tabella C.5) e controllata la bontà delle ipotesi (fig. 3.6), si è stimata con procedura analoga a quanto già fatto per il fascio di elettroni la lunghezza di ciascun intervallo; lo spessore della targhetta necessario è risultato essere

$$R(2\text{ MeV}, 0.5\text{ MeV}) \simeq 13.343\ \mu\text{m}, \quad (3.15)$$

che ancora una volta presenta un ottimo accordo con il valore ottenuto per differenza dai range NIST  $R_{NIST} = 13.347\ \mu\text{m}$  dimostrando la sufficiente frequenza degli intervalli spaziali considerati nel linearizzare la perdita di energia per unità di cammino.

Come passo successivo si sono ricavati i valori della sezione d'urto di ionizzazione della shell K  $\sigma_K$  secondo la teoria ECPSSR mediante il programma ERCS08 [10] per ciascuno degli estremi degli intervalli; il fatto che polinomi dei logaritmi delle energie siano un'ottima approssimazione del logaritmo delle energie ha suggerito una possibile approssimazione lineare  $\frac{d(\ln(\sigma_K))}{d(\ln(E))} = \text{cost.}$ , approssimazione la cui validità (perlomeno sugli intervalli da  $0.1\text{ MeV}$ ) è confermata anche dal plot dei dati effettuato (fig. 3.7). Pertanto si è usata l'approssimazione

$$\ln(\sigma_K)(E) = \ln(\sigma_K(E_f)) + \ln\left(\frac{\sigma_K(E_i)}{\sigma_K(E_f)}\right) \frac{\ln\left(\frac{E}{E_f}\right)}{\ln\left(\frac{E_i}{E_f}\right)} \quad (3.16)$$

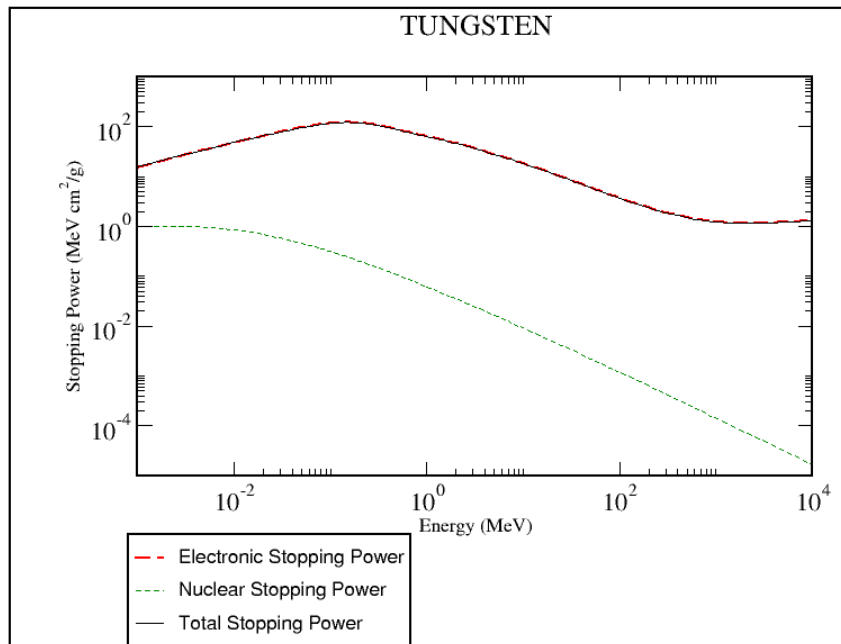


Figura 3.6: Stopping power totale, da collisioni elettroniche e da collisioni con il nucleo del tungsteno per protoni in funzione dell'energia; si noti come il contributo nucleare sia trascurabile alle energie da noi considerate, da [4]

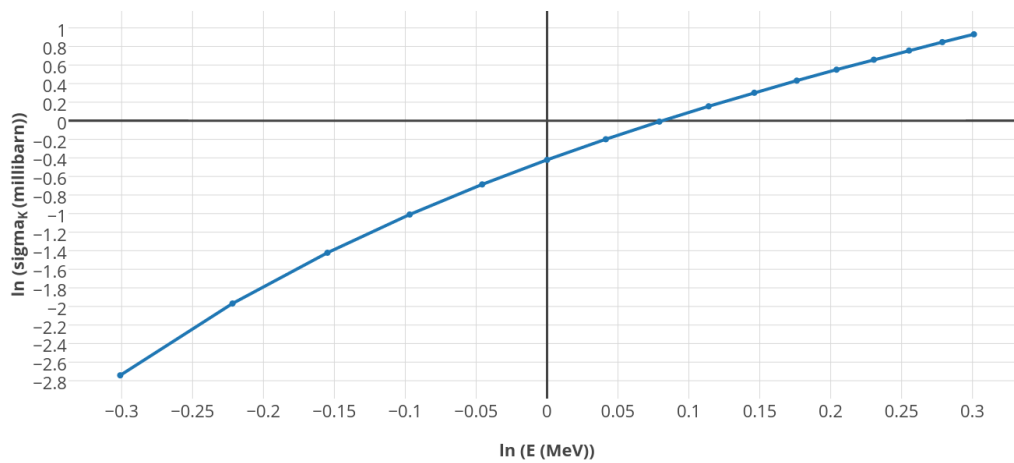


Figura 3.7: Andamento del logaritmo della sezione d'urto di ionizzazione della shell K rispetto al logaritmo dell'energia nel range energetico considerato, da [10]

dove con l'usuale notazione i pedici  $i$  e  $f$  indicano i valori delle funzioni calcolati all'inizio e alla fine di un intervallo. Ora, dall'eq. 1.13 si ricava che per un intervallo  $[E_f; E_i]$  il numero di fotoni caratteristici prodotti per protone vale

$$N_K = \omega_K n \int_{E_f}^{E_i} \sigma_K(E) \left( \frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE = \omega_K n \int_{E_f}^{E_i} e^{\ln(\sigma_K(E))} \left( \frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE. \quad (3.17)$$

Sostituendo a  $\left( \frac{dE}{dx} \right)^{-1}$  la media dei valori su ogni intervallo  $\left( \left( \frac{dE}{dx} \right)_{[E_f; E_i]} \right)^{-1}$  e a  $\ln(\sigma_K(E))$  l'espressione ricavata sopra, si ottiene:

$$N_K = \omega_K n \left( \left( \frac{dE}{dx} \right)_{[E_f; E_i]} \right)^{-1} \int_{E_f}^{E_i} \sigma_K(E_f) \left( \frac{E}{E_f} \right)^{\frac{\ln\left(\frac{\sigma_K(E_i)}{\sigma_K(E_f)}\right)}{\ln\left(\frac{E_i}{E_f}\right)}} dE, \quad (3.18)$$

che integrando e valutandola agli estremi diventa

$$= \omega_K n \left( \left( \frac{dE}{dx} \right)_{[E_f; E_i]} \right)^{-1} \frac{\sigma_K(E_f) E_f}{\left( \frac{\ln\left(\frac{\sigma_K(E_i)}{\sigma_K(E_f)}\right)}{\ln\left(\frac{E_i}{E_f}\right)} + 1 \right)} \left[ \left( \frac{E_i}{E_f} \right)^{\left( \frac{\ln\left(\frac{\sigma_K(E_i)}{\sigma_K(E_f)}\right)}{\ln\left(\frac{E_i}{E_f}\right)} + 1 \right)} - 1 \right]. \quad (3.19)$$

Calcolato questo valore per ogni intervallo, moltiplicatolo per le rese relative delle varie transizioni (tabella ), trattato l'assorbimento separatamente per ogni riga col metodo esposto prima e i dati forniti dal NIST [3] , diviso per  $4\pi$  in considerazione del fatto che l'emissione è isotropa si ottiene per il numero totale di fotoni per milliamperere per secondo per steradiante all'uscita dall'anodo

$$N_K \simeq 9.8 \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{fotoni}}{\text{mA} \cdot \text{s} \cdot 4\pi} \right]; \quad (3.20)$$

equivalenti a una fluensa a un metro di

$$\phi_{@1m} \simeq 9.8 \left[ \frac{\text{fotoni}}{\text{mA} \cdot \text{s} \cdot \text{mm}^2} \right]; \quad (3.21)$$

che sono insufficienti per qualsiasi tipo di esame, essendo 5 ordini di grandezza inferiore rispetto a quella di riferimento a parità di corrente di fascio (e quindi 6 ordini di grandezza inferiore al riferimento a parità di potenza termica applicata alla targhetta, tenendo conto della differenza nelle energie delle particelle incidenti).

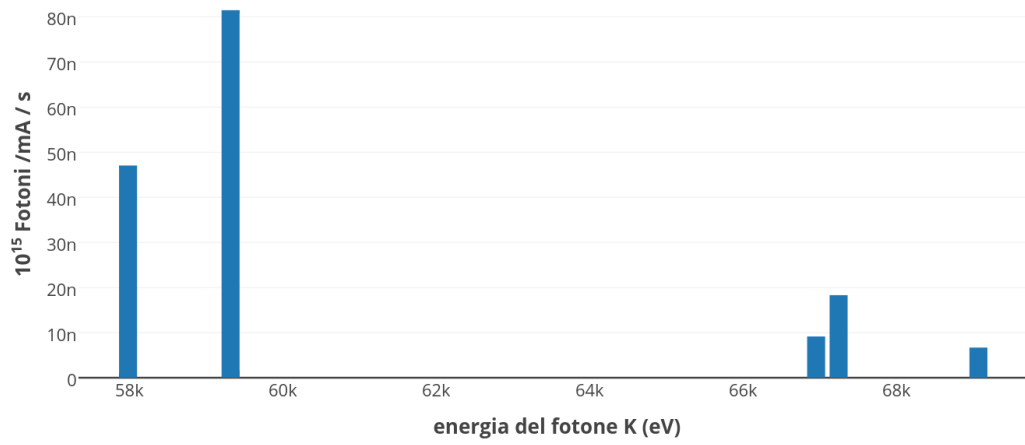


Figura 3.8: Ampiezze numeriche relative dei fotoni K uscenti dall'anodo per milliampere di corrente

## Capitolo 4

# Conclusioni

Dopo aver introdotto le caratteristiche e la fisica su cui sono basati i tubi a raggi X odierni, si è presentato un nuovo metodo per ricavare raggi X spostando la messa a terra sull'anodo, sfruttando un laser UV per l'estrazione degli elettroni<sup>5</sup> utilizzando un anodo fine.

Dai calcoli effettuati questo design alternativo si è dimostrato in grado di ridurre la potenza termica sviluppata all'interno dell'anodo e di ridurre l'attenuazione dei raggi X al proprio interno, aumentando al contempo il peso relativo della parte dello spettro composta dai cosiddetti raggi X duri. Data la ridotta capacità termica di un anodo fine, l'efficacia effettiva di questo promettente metodo di produzione di X è dipendente dall'aumento della refrigerazione dell'anodo (possibile grazie al nuovo posizionamento della messa a terra) che non è stato oggetto di studio. Eventuali applicazioni comprendono:

- la realizzazione di tubi X per immagini a più alta risoluzione grazie alla possibilità di focalizzare la medesima corrente di fascio su un'area minore, sfruttando un apparato a focalizzazione elettrostatica oppure ad estrazione fotoelettrica degli elettroni mediante laser UV;
- apparati per radiografie e per CT che non necessitino di tempi morti di raffreddamento dell'anodo fra un imaging e l'altro;
- apparati in grado di sostenere maggiori correnti di fascio, capaci di produrre fluenze di raggi X più elevate;
- apparati con intensità dello spettro X molle ridotto a parità di intensità dei fotoni duri emessi, con conseguente riduzione dell'irradiazione del paziente.

Si è esaminato un design analogo anche per un fascio di protoni da  $2\text{ MeV}$  nella speranza di ottenere uno spettro composto da righe monocromatiche; la fluenza di fotoni K caratteristici è risultata però 5 ordini di grandezza inferiore rispetto a quella di riferimento a parità di corrente di fascio, precludendo ogni applicazione pratica nonostante la maggior qualità spettrale dei fotoni emessi.

## Appendice A

# Bremsstrahlung diretto in campo magnetico

Un'altra ipotesi di produzione dei raggi X è quella di generare un campo magnetico impulsivo di forte intensità ( $30 - 40 T$ ) e farvi passare un fascio di elettroni attraverso per produrre raggi X tramite bremsstrahlung; questo avrebbe il vantaggio di una maggior efficienza di conversione ed eliminerebbe il problema del raffreddamento del sistema, non imponendo limitazioni alla corrente di fascio e quindi all'intensità della radiazione prodotta. Vogliamo però che ciò sia fattibile con elettroni di energia paragonabile al centinaio di keV, perchè la fase di accelerazione non incida troppo sui costi e sull'ingombro spaziale dell'apparato; diamo quindi una stima del campo magnetico necessario.

Il bremsstrahlung diventa importante quando il parametro d'impatto si avvicina al raggio della shell K e l'elettrone comincia a risentire meno della schermatura del nucleo [14].

Utilizzando come stima di tale raggio il raggio di Bohr con correzione alla carica nucleare  $Z$  dovuta al metodo variazionale di Ritz  $\tilde{Z} = Z - \frac{5}{16}$  [17], si giunge al valore di

$$r_K = \frac{a_0}{\tilde{Z}} \simeq 7.2 \cdot 10^{-13} m. \quad (\text{A.1})$$

La forza Coulombiana sull'elettrone dovuta alla carica nucleare a tale distanza è quindi

$$F_K \approx \frac{e^2 \tilde{Z}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_K^2} \approx 0.033 N. \quad (\text{A.2})$$

Uguagliamo tale espressione con la forza di Lorentz dovuta a un campo magnetico  $B$   $F_L = e \cdot v \times B$ , supponiamo  $B \perp v$ , ricordiamo poi come per una particella in relatività speciale valga  $E_{tot} = c \cdot p^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + E_{mecc}$  e dunque  $v = c \sqrt{1 - \frac{mc^2}{E_{tot}}} \simeq 0.4 c$ ; sostituendo otteniamo

$$B \approx \frac{e \tilde{Z}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_K^2 v} \approx 1.7 \cdot 10^9 T, \quad (\text{A.3})$$

che è un valore eccedente di diversi ordini di grandezza i campi che siamo capaci di generare.

## Appendice B

# Assorbimento

Come anticipato in precedenza, la sezione d'urto di assorbimento totale di un materiale alla scala energetica che stiamo considerando è somma dei contributi dovuti a tre effetti.

Di seguito per ciascuno verrà data una breve spiegazione, indicando poi l'andamento qualitativo alla nostra scala.

### B.1 Effetto fotoelettrico

Un elettrone su una delle shell atomiche viene colpito dal fotone ed estratto, ionizzando l'atomo.

Se indichiamo con  $T$  lo stato dell'atomo colpito dal fotone, con  $e_-$  l'elettrone estratto e con  $\gamma$  il fotone stesso, il processo può essere schematizzato come  $\gamma + T \rightarrow T^+ + e_-$

Per la conservazione dell'energia, l'energia dell'elettrone estratto dalla shell X

$$E_e = h\nu - I_X \quad (\text{B.1})$$

che restituisce la condizione necessaria  $E_\gamma > I_X$ . Ciò provoca la presenza dei cosiddetti "absorption edges", ovvero discontinuità nella sezione d'urto di ionizzazione al valore  $E_\gamma = I_X$  dovute all'accensione del contributo addizionale di una shell inaccessibile a energie più basse.

La sezione d'urto di ionizzazione fotoelettrica in funzione dell'energia del fotone incidente presenta i seguenti andamenti asintotici

$$\sigma_{ph}(E_\gamma) = \alpha\pi a_0 Z^5 \frac{I_0^{\frac{7}{2}}}{E_\gamma} \text{ per } I_0 = 13.6 \text{ eV} \ll E_\gamma \ll mc^2 \text{ (andamento non relativistico)} \quad (\text{B.2})$$

con  $a_0 \approx 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  il raggio di Bohr,  $\alpha$  costante e  $Z$  numero atomico dell'atomo;

$$\sigma_{ph}(E_\gamma) = 2\pi r_e^2 \alpha^4 Z^5 \frac{mc^2}{E_\gamma} \text{ per } E_\gamma \gg mc^2 \text{ (andamento relativistico)} \quad (\text{B.3})$$

dove  $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$  è il raggio classico dell'elettrone.

I due andamenti sono molto diversi ma notiamo come nessuno dei due si applichi alla scala energetica considerata: infatti l'andamento teorico da applicare sarebbe quello non relativistico, ma la sezione d'urto non si annulla al di sotto dell'energia di legame della shell come ci aspetteremmo dal ragionamento effettuato prima; questo non sarebbe un problema per la maggior parte degli atomi leggeri in virtù delle basse energie della shell K, ma considerando il caso del tungsteno troviamo  $I_K \simeq 69.5 \text{ keV}$  che è proprio l'energia dei fotoni a cui siamo interessati.

Ci riferiamo quindi indicativamente all'andamento ricavato dai dati sperimentali a tale scala energetica [15]:

$$\sigma_{ph}(E_\gamma) \approx k \cdot \frac{Z^3}{E_\gamma^3} \text{ con } E_\gamma \approx 10^2 \text{ keV} \quad (\text{B.4})$$

## B.2 Scattering Compton

Un fotone scattera su un elettrone (considerato come libero), ionizzando l'atomo; l'interazione Compton si può quindi scrivere come  $\gamma + T \rightarrow T^+ + e_- + \gamma'$

Dalla conservazione del quadrimomento segue che

$$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos\theta)} \quad (\text{B.5})$$

dove  $\theta$  è l'angolo del fotone scatterato rispetto alla direzione del fotone originario. Lo scattering Compton è uno scattering anelastico o incoerente, infatti non conserva l'energia del fotone. La sezione d'urto Compton per un elettrone libero è data dalla *formula di Klein-Nishina*, una cui approssimazione per fotoni non polarizzati, elettroni non allineati ed energie al di sotto dei 100 keV è data dalla

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} \simeq \frac{r_e^2(1 + \cos^2(\theta))}{2[1 + k(1 - \cos(\theta))]^2}, \quad (\text{B.6})$$

dove  $\Omega$  indica l'angolo solido, il parametro  $k$  è il rapporto fra l'energia del fotone  $E$  e  $mc^2$  energia a riposo dell'elettrone; integrando in  $d\theta d\phi$  si ottiene per la sezione d'urto totale l'espressione approssimata [5]

$$\sigma_{KN} \simeq 8\pi r_e^2 \frac{1 + 2k + 1.2k^2}{3(1 + 2k)^2}. \quad (\text{B.7})$$

Se l'elettrone invece di essere libero è legato a un atomo:

- per alte energie del fotone incidente lo scattering estrae l'elettrone dall'atomo e la sezione d'urto di scattering Compton  $\sigma_C$  tende a  $Z \cdot \sigma_{KN}$ ;
- per basse energie l'energia di legame dell'elettrone diventa importante e l'elettrone può essere lasciato nello stato iniziale (scattering coerente), riducendo in modo significativo la sezione d'urto Compton.

### B.3 Scattering Rayleigh

Lo scattering coerente a cui abbiamo appena accennato è chiamato scattering Rayleigh e può essere descritto come  $\gamma + T \rightarrow T' + \gamma'$ , dove  $\gamma'$  ha circa l'energia del fotone di partenza.

La sezione d'urto Rayleigh è data da[5]

$$\sigma_R = \pi r_e^2 \int_{-1}^1 |f(\theta)|^2 (1 + \cos^2(\theta)) d(\cos(\theta)), \quad (\text{B.8})$$

dove  $\theta$  è sempre l'angolo di scattering,  $r_e$  è il raggio classico dell'elettrone ed  $f(\theta)$  è il fattore di scattering atomico, la cui parte reale dà misura di quanti elettroni partecipano allo scattering per dato angolo ed energia.

Ad alte energie la sezione d'urto Rayleigh cala rapidamente con l'angolo di scattering.

Anche se abbiamo specificato gli andamenti alla nostra scala energetica delle tre sezioni d'urto di assorbimento, non sappiamo ancora qual'è il loro andamento relativo. Da fig. B.1 appare evidente come alle energie considerate i contributi degli effetti Rayleigh e Compton siano trascurabili e quindi la sezione d'urto totale sia essenzialmente data dalla sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico.

L'effetto complessivo dello scattering e dell'assorbimento fotoelettrico su un fascio di fotoni è che un fascio di raggi X attraversando la materia viene attenuato in intensità; la sezione d'urto d'assorbimento totale del fotone per un atomo è data dalla

$$\sigma = \sigma_{ph} + \sigma_C + \sigma_R. \quad (\text{B.9})$$

La probabilità complessiva di assorbimento di un fotone per uno spessore attraversato  $dx$  in un materiale composito con densità numeriche dei singoli elementi  $n_i$  e rispettive sezioni d'urto di assorbimento  $\sigma_i$  è quindi

$$\mu_{tot} = \sum_{i=1}^n \mu_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i n_i \quad (\text{B.10})$$

con  $\mu$  coefficiente di attenuazione lineare che risulta quindi ben definito per ogni materiale e uguale all'inverso della lunghezza di attenuazione. Per un flusso di  $N$  fotoni pertanto

$$dN = -N \mu_{tot} dx, \quad (\text{B.11})$$

che separando le variabili, integrando da 0 a  $x$  ed esponenziando rende

$$N(x) = N_0 e^{-\mu_{tot} x} \quad (\text{B.12})$$

che si traduce in un'analogia espressione per l'intensità.

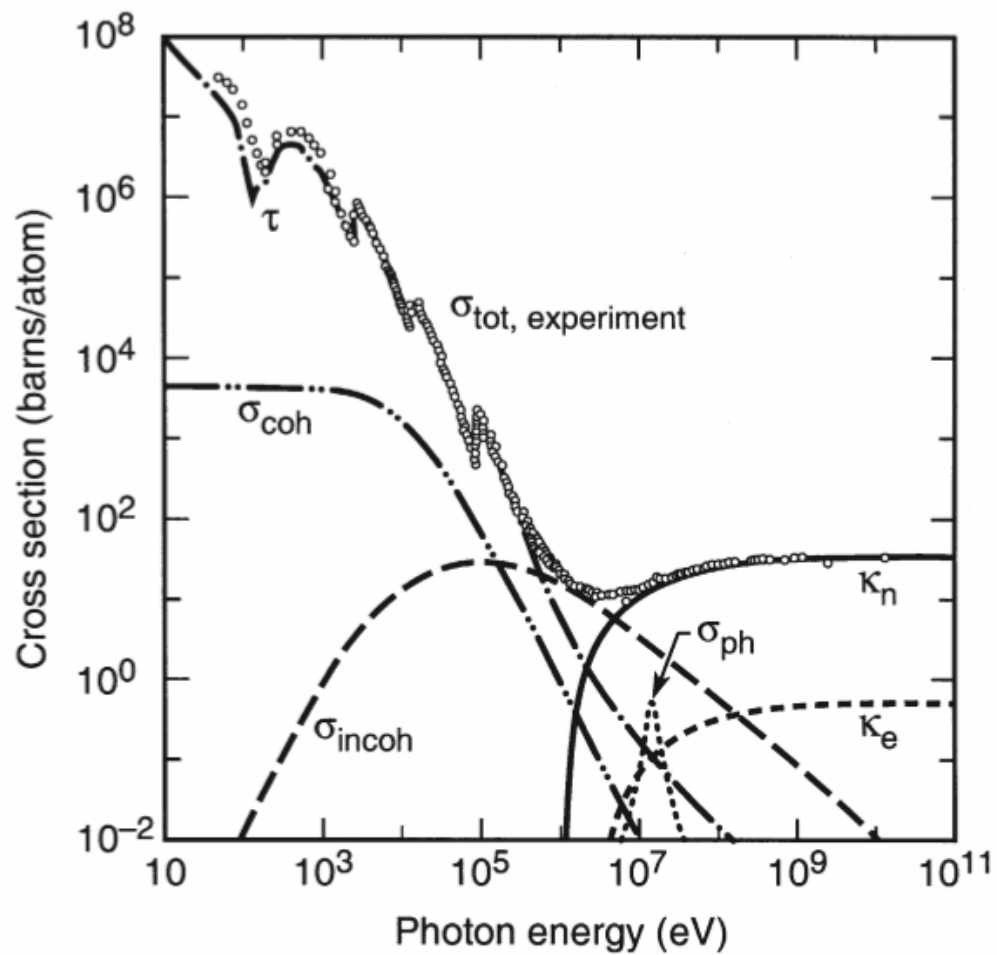


Figura B.1: Sezioni d'urto totale e per i vari effetti per il piombo ( $Z = 82$ ) in funzione dell'energia, da [16]

## Appendice C

### Tabelle dei dati utilizzati

Tabella C.1: Stopping power totale e radiativo per un elettrone in targhetta di tungsteno, da [4]

Kinetic Energy E (keV)	Radiative Stopping Power (keV*cm <sup>2</sup> /g)	Total Stopping Power (keV*cm <sup>2</sup> /g)
5,00E+001	3,36E+001	3,17E+003
5,10E+001	3,38E+001	3,13E+003
5,20E+001	3,40E+001	3,09E+003
5,30E+001	3,42E+001	3,06E+003
5,40E+001	3,43E+001	3,02E+003
5,50E+001	3,45E+001	2,99E+003
5,60E+001	3,47E+001	2,95E+003
5,70E+001	3,49E+001	2,92E+003
5,80E+001	3,51E+001	2,89E+003
5,90E+001	3,52E+001	2,86E+003
6,00E+001	3,54E+001	2,83E+003
6,10E+001	3,56E+001	2,80E+003
6,20E+001	3,57E+001	2,77E+003
6,30E+001	3,59E+001	2,74E+003
6,40E+001	3,60E+001	2,72E+003
6,50E+001	3,62E+001	2,69E+003
6,60E+001	3,63E+001	2,66E+003
6,70E+001	3,65E+001	2,64E+003
6,80E+001	3,66E+001	2,62E+003
6,90E+001	3,68E+001	2,59E+003
7,00E+001	3,69E+001	2,57E+003
7,10E+001	3,71E+001	2,55E+003
7,20E+001	3,72E+001	2,53E+003
7,30E+001	3,74E+001	2,51E+003
7,40E+001	3,75E+001	2,49E+003
7,50E+001	3,77E+001	2,47E+003
7,60E+001	3,78E+001	2,45E+003
7,70E+001	3,79E+001	2,43E+003
7,80E+001	3,81E+001	2,41E+003
7,90E+001	3,82E+001	2,39E+003
8,00E+001	3,83E+001	2,37E+003

Tabella C.2: Coefficienti di attenuazione lineare in alluminio per varie energie dei fotoni, da [3]

Energia fotone (keV)	30	40	50	60	80	100
Coefficiente di assorbimento/densità Al (cm <sup>2</sup> /g)	1,128	0,5685	0,3681	0,2778	0,2018	0,1704

Tabella C.3: Energie e intensità in numero di fotoni relative delle righe K del tungsteno, da [5]

Righe K del tungsteno	K $\alpha$ 1	K $\alpha$ 2	K $\beta$ 1	K $\beta$ 2	K $\beta$ 3
Energia (eV)	59318,2	57981,7	67244,3	69067	66951,4
Intensità relativa linee K	100	58	22	8	11

Tabella C.4: Coefficienti di attenuazione lineare in tungsteno per varie energie dei fotoni, da [3]

Energia fotone (keV)	30	40	50,0000000	60	69,525	69,525	80	100
Coefficiente di assorbimento/densità (cm <sup>2</sup> /g)	22,730	10,670	5,9490000	3,713	2,552	11,23	7,81	4,44

Tabella C.5: Stopping power totale ed elettronico per un protone in targhetta di tungsteno, da [4]

Kinetic Energy E (MeV)	Electronic Stopping Power (keV*cm <sup>2</sup> /g)	Total Stopping Power (keV*cm <sup>2</sup> /g)
5,00E-001	8,50E+004	8,51E+004
6,00E-001	7,88E+004	7,89E+004
7,00E-001	7,39E+004	7,40E+004
8,00E-001	6,99E+004	6,99E+004
9,00E-001	6,65E+004	6,65E+004
1,00E+000	6,35E+004	6,36E+004
1,10E+000	6,09E+004	6,10E+004
1,20E+000	5,86E+004	5,87E+004
1,30E+000	5,65E+004	5,66E+004
1,40E+000	5,46E+004	5,47E+004
1,50E+000	5,29E+004	5,29E+004
1,60E+000	5,13E+004	5,14E+004
1,70E+000	4,99E+004	4,99E+004
1,80E+000	4,85E+004	4,85E+004
1,90E+000	4,72E+004	4,73E+004
2,00E+000	4,60E+004	4,61E+004

# Bibliografía

- [1] Berrington de González, Mahesh M., Kim K.P., Bhargavan M., Lewis R., Mettler F., Land C., *Projected cancer risks from computed tomographic scans performed in the United States in 2007*, Arch Intern Med. 2009 Dec 14;169(22):2071-7
- [2] INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, *Radiological Protection for Medical Exposure to Ionizing Radiation*, IAEA SAFETY STANDARDS SERIES SAFETY GUIDE No. RS-G-1.5
- [3] J. H. Hubbell and S. M. Seltzer, *Tables of X-Ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients from 1 keV to 20 MeV for Elements Z = 1 to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest*, NISTIR 5632
- [4] M. J. Berger, J. S. Coursey, M. A. Zucker, J. Chang, *Stopping-Power & Range Tables for Electrons, Protons, and Helium Ions*, NISTIR 4999
- [5] A. Thompson, I. Lindau, D. Attwood, Y. Liu, E. Gullikson, P. Panetta, M. Howells, A. Robinson, K. Kim, J. Scofield, J. Kirz, J. Underwood, J. Kortright, G. Williams, H. Winick *X-Ray Data Booklet*, LBNL/PUB-490 Rev. 3 (2009)
- [6] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics, Third Edition*, John Wiley and Sons, Inc., ISBN-10: 047130932X
- [7] N. A. Dyson, *Characteristic X-rays-A Still Developing Subject*, Phys. Ned. Biol., 1975, Vol. 20, No. 1, 1-29. 0 (1975)
- [8] A. Kahoula, M. Nekkabb, B. Deghfela, *Empirical K-shell ionization cross-sections of elements from  $4\text{Be}$  to  $92\text{U}$  by proton impact*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms, Volume 266, Issue 23, December 2008, Pages 4969–4975
- [9] C. M. Romo-Kröger, *A polynomial curve for ionization cross sections of the atomic K-shell induced by protons and heavier ions*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 136-138 (1998) 196-199
- [10] V. Horvat, *ERCS08: A FORTRAN program equipped with a Windows graphics user interface that calculates ECPSSR cross sections for the removal of atomic electrons*, Computer Physics Communications, Volume 180, Issue 6, p. 995-1003

- [11] M. O. Krause, *Atomic radiative and radiationless yields for K and L shells*, J. Phys. Chem. Ref. Data 8, 307–327 (1979)
- [12] A. A. Shaltout, *On X-ray tube spectra, the dependence on the angular and electron energy on X-rays from the targets*, The European Physical Journal D - March 2007, DOI: 10.1051
- [13] W. Ehrenberg, W. E. Spear, *An Electrostatic Focusing System and its Application to a Fine Focus X-Ray Tube*, Proceedings of the Physical Society. Section B, Volume 64, Number 1
- [14] J. A. Seibert, *X-Ray Imaging Physics for Nuclear Medicine Technologists. Part 1: Basic Principles of X-Ray Production*, J. Nucl. Med. Technol. 2004; 32:139-147
- [15] J. A. Seibert, J. M. Boone, *X-Ray Imaging Physics for Nuclear Medicine Technologists. Part 2: X-Ray Interactions and Image Formation*, J. Nucl. Med. Technol. 2005; 33:3-18
- [16] J. H. Hubbell, H. A. Gimm, *Pair, Triplet, and Total Atomic Cross Sections (and Mass Attenuation Coefficients) for 1 MeV-100 GeV Photons in Elements Z=1 to 100*, J. Phys. Chem. Ref. Data 9, 1023 (1980)
- [17] A. F. Borghesani, *Introduzione alla Struttura della Materia, Seconda Edizione*, Edizioni Libreria Progetto, Padova
- [18] Ge W., Hengyong Y., B. De Man, *An outlook on x-ray CT research and development*, Medical Physics 35, 1051 (2008); DOI: 10.1118/1.2836950
- [19] F. H. Attix, *Introduction to Radiological Physics and Radiation Dosimetry, 1st Edition*, John Wiley and Sons, Inc., ISBN-10: 0471011460
- [20] G. Lapicki, *Testing the ECPSSR theory and its modifications with ratios of antiproton-to-proton ionization cross sections*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 241 (2005) 34-42