UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

L'evoluzione dei sistemi quantistici nel formalismo dell'informazione quantistica e nell'approccio ETH: analogie e diversità

Relatore

Prof. P.A. Marchetti

Laureando

Vincenzo Marrali

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione

Nella tesi si discute l'evoluzione di un sistema quantistico a contatto con l'ambiente, come descritta nel formalismo dell'informazione quantistica e nell'approccio Event Tree History alla Meccanica Quantistica, analizzando le analogie e diversità tra le due descrizioni. Il punto di partenza di questa trattazione risulta l'introduzione di un formalismo in grado di descrivere gli stati di un sistema quantistico nella loro più ricca generalità. Una volta definiti gli enti fisici che caratterizzano il sistema, si procederà nello stabilire le relazioni a cui tali enti obbediscono (valori medi ed evoluzione temporale). Successivamente, si percorreranno i passi che porteranno a una trattazione per l'evoluzione temporale dei sistemi secondo l'approccio-ETH alla Meccanica Quantistica. Tale approccio vedrà la Meccanica Quantistica poggiante su tre "pilastri" fondamentali (quantità fisiche caratteristiche di un sistema, dinamica degli operatori nella visuale di Heisenberg, valori di aspettazione di quantità fisiche in stati), che verranno brevemente richiamati, rimanendo però incompleta. Quello che si farà sarà allora introdurre un Quarto Pilastro con l'obiettivo di rendere la teoria solida e stabile. La trattazione procederà con una disamina degli aspetti fondamentali e delle innovazioni istituite da un tale approccio in rapporto alla formulazione standard dell'informazione quantistica.

L'evoluzione secondo l'informazione quantistica

1.1 Stato misto e valor medio, definizione e proprietà della matrice densità

Definizione 1. ***Stato misto***
Per mistura statistica o stato misto, si intende lo stato di un sistema S descritto da un insieme di N possibili stati puri $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1...N}$, ciascuno con probabilità classica p_i ($p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$).

Scrivendo un'osservabile $\hat{A}$ in termini dei proiettori della propria famiglia spettrale $\hat{P}_i$, in notazione di Dirac che verrà adottata in questo capitolo,

$$\hat{A} = \sum_i a_i \hat{P}_i = \sum_i a_i |a_i\rangle \langle a_i| \,. \tag{1.1}$$

Se il sistema S fosse nello stato puro $|\psi_k\rangle$ si potrebbe usare la formula per il valor medio di $\hat{A}$, pari alla combinazione lineare dei valor medi dei singoli proiettori, denotati con $q_k(i)$:

$$\langle \hat{A} \rangle_{\psi_k} = \sum_i a_i \langle \hat{P}_i \rangle_{\psi_k} = \sum_i a_i q_k(i) \qquad q_k(i) = \langle \psi_k | \hat{P}_i | \psi_k \rangle \tag{1.2}$$

Nel caso di uno stato misto, non sapendo però in quale $|\psi_k\rangle$ si trovi il sistema, si dovranno considerare tutte le N possibilità $\{|\psi_k\rangle\}$, pesandole con le rispettive probabilità di occorrenza, p_k:

$$\tilde{P}(i) = \sum_{k=1}^{N} p_k q_k(i) = \sum_{k=1}^{N} p_k \langle \psi_k | \hat{P}_i | \psi_k \rangle \tag{1.3}$$

in cui si indica la media pesata dei valori di aspettazione dell'i-esimo proiettore $\hat{P}_i$ nel range dei possibili stati $\{|\psi_k\rangle\}$ con $\tilde{P}(i)$. Sommando allora su tutti i proiettori si giunge al valor medio di uno stato misto:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i a_i \tilde{P}(i) = \sum_{k=1}^{N} p_k \langle \psi_k | \hat{A} | \psi_k \rangle = Tr(\rho \hat{A}) \tag{1.4}$$

dove compare la matrice ρ, detta matrice densità e definita come:

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \tag{1.5}$$

con le seguenti proprietà:

1. ρ è autoaggiunta, $\rho = \rho^\dagger$
2. $Tr(\rho) = 1$
3. ρ è un operatore non negativo, cioè $\forall \left|\psi\right\rangle$ vale $\left\langle\psi\right| \rho \left|\psi\right\rangle \geq 0$

Tale matrice può essere utilizzata indifferentemente per rappresentare sia stati puri che misti:

- $\rho_p = \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|, \qquad Tr(\rho_p^2) = 1$
- $\rho_m = \sum_{k=1}^{N} p_k \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|, \qquad Tr(\rho_m^2) < 1$

con la differenza che nel caso di stati puri risulta un proiettore la cui traccia è di conseguenza unitaria. Essendo ρ autoaggiunta, essa rappresenta un'osservabile misurabile direttamente e $Tr(\rho^2)$ è detta purezza dello stato ρ: pari a 1 per stati puri, $0 < Tr(\rho^2) < 1$ per stati misti.
L'evoluzione unitaria conserva la purezza. Uno stato puro può evolvere esclusivamente in modo unitario a stati puri, uno stato misto sarà sempre misto, almeno finché il sistema rimane isolato. Inoltre, scrivendo ρ in rappresentazione spettrale ($\rho = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left|j\right\rangle \left\langle j\right|$ con N possibilmente ∞ e $\{\left|j\right\rangle\}$ base in cui ρ è diagonale), si possono distinguere i termini sulla diagonale della matrice, detti termini di popolazione, rispetto a quelli fuori dalla diagonale, detti termini di coerenza. Questi ultimi sono indice di correlazione tra i singoli stati. La misurabilità delle correlazioni dipende dalla base scelta: se è quella che diagonalizza ρ allora non ci saranno correlazioni.

1.1.1 Evoluzione temporale

In visuale di Schrödinger, in un sistema isolato, gli stati $\left|\psi_k\right\rangle$ evolvono in modo unitario nel tempo secondo la relazione:

$$\left|\psi_k(t)\right\rangle = U(t-t_0) \left|\psi_k(t_0)\right\rangle \longleftrightarrow \left\langle\psi_k(t)\right| = \left\langle\psi_k(t_0)\right| U^\dagger(t-t_0) \tag{1.6}$$

Dalla definizione di matrice densità, sostituendo, è possibile scriverne l'evoluzione temporale come segue:

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^{N} p_k \left|\psi_k(t)\right\rangle \left\langle\psi_k(t)\right| = \sum_{i=1}^{N} p_k [U \left|\psi_k(t_0)\right\rangle][\left\langle\psi_k(t)\right| U^\dagger] = U(t-t_0)\rho_0 U^\dagger(t-t_0) \tag{1.7}$$

Inoltre, per gli stati puri $\left|\psi\right\rangle$ nel dominio dell'Hamiltoniana $\hat{H}$ del sistema, vale l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo:

$$i\hbar \frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(t) \tag{1.8}$$

Esiste un analogo per stati misti, in cui prende il nome di equazione di Liouville-Von Neumann, ottenuta calcolando la derivata temporale della matrice densità:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{k=1}^{N} p_k \left|\psi_k\right\rangle \left\langle\psi_k\right| = \sum_{k=1}^{N} p_k \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left|\psi_k\right\rangle \right) \left\langle\psi_k\right| + \left|\psi_k\right\rangle \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle\psi_k\right| \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} p_k \left(\frac{H \left|\psi_k\right\rangle}{i\hbar} \left\langle\psi_k\right| - \left|\psi_k\right\rangle \left\langle\psi_k\right| \frac{H}{i\hbar} \right) \\
&= \frac{1}{i\hbar}(H\rho - \rho H) = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho(t)]
\end{aligned} \tag{1.9}$$

e, riscritta in forma più compatta, risulta:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = [H, \rho(t)] \tag{1.10}$$

Questa equazione è valida nella visuale di Schrödinger, dove lo stato rappresentato dalla matrice densità ρ evolve nel tempo, mentre gli operatori che agiscono su di esso rimangono invariati. È possibile riscriverla in visuale di Heisenberg, in cui viceversa, sono gli operatori $A^H(t)$ ad evolvere nel tempo, mantenendo immutati gli stati:

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}A^H(t)}{\mathrm{d}t} = -[H, A^H(t)] \tag{1.11}$$

Si nota che le due relazioni, applicate in un caso a ρ come stato e nell'altro come osservabile, coincidono a meno di un segno.

1.2 Sistemi composti

Si procede con l'analisi di un sistema composto da n sottosistemi, partendo dal caso più semplice, con n=2. Lo spazio di Hilbert del sistema composto si trova attraverso il prodotto tensore dei due spazi:

$$\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \tag{1.12}$$

avendo indicato con $\mathcal{H}_1$ lo spazio degli stati del sistema 1 e con $\mathcal{H}_2$ lo spazio del sistema 2.
Una generica funzione d'onda nello spazio del sistema totale si scrive come:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,\alpha}^{dim(\mathcal{H}_{12})} c_{i,\alpha} |i\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2 \tag{1.13}$$

dove $\{|i\rangle_1\}$ e $\{|\alpha\rangle_2\}$ sono basi ortonormali rispettivamente di $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$.
In modo equivalente, si definisce la corrispondente matrice densità per il sistema composto come:

$$\rho_{12} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,\alpha}\sum_{j,\beta} c_{i,\alpha}c^*_{j,\beta} |i\rangle|\alpha\rangle\langle j|\langle\beta| = \sum_{i,\alpha}\sum_{j,\beta} \rho^{j,\beta}_{i,\alpha} |i,\alpha\rangle\langle j,\beta| \tag{1.14}$$

Si consideri adesso un'osservabile nel sistema 1, $\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \mathbb{1}_2$. Il valor medio nello stato ρ si determina attraverso la relazione (1.4), con la differenza di usare per la traccia una base ortonormale $\{|k\gamma\rangle\}$ del sistema composto:

$$\begin{aligned}\langle\hat{A}\rangle_\rho = Tr(\rho\hat{A}) &= \sum_{k\gamma}\langle k\gamma|\rho A|k\gamma\rangle = \sum_{k\gamma}\langle k\gamma|\left(\sum_{i,\alpha}\sum_{j,\beta}\rho^{j,\beta}_{i,\alpha}|i,\alpha\rangle\langle j,\beta|\right)(A_1\otimes\mathbb{1}_2)|k\gamma\rangle \\ &= \sum_{k\gamma}\sum_{i,\alpha}\sum_{j,\beta}\rho^{j,\beta}_{i,\alpha}\langle k|i\rangle\langle\gamma|\alpha\rangle\langle j|A_1|k\rangle\langle\beta|\mathbb{1}_2|\gamma\rangle = \sum_{i,j,\alpha}\rho^{j,\alpha}_{i,\alpha}\langle j|A|i\rangle\end{aligned} \tag{1.15}$$

Se nel calcolare la traccia si utilizzasse la base ortonormale di uno solo dei due sistemi, si otterrebbe una matrice densità ridotta. Per esempio, se $\{|\alpha\rangle\}$ è la base ortonormale di $\mathcal{H}_2$, la traccia parziale risulta essere la matrice ridotta del primo sistema, i cui elementi sono dati da:

$$(\rho_1)_{ij} = (Tr_2\rho_{12})_{ij} = \sum_{\alpha}^{dim\mathcal{H}_2}\langle\alpha|_2\,\rho_{12}\,|\alpha\rangle_2 = \sum_{\alpha}^{dim\mathcal{H}_2}\rho^{j,\alpha}_{i,\alpha}|i\rangle\langle j| \tag{1.16}$$

Poiché in quest'ultimo caso non viene usata una base del sistema composto, l'operazione di traccia si dice traccia parziale ed è analoga al processo di marginalizzazione di distribuzioni statistiche, dove si somma o si integra sulle variabili che non interessano.
La matrice ridotta è comoda per calcolare il valor medio di un'osservabile $\hat{A}$ che agisce solo sul primo sistema, poiché si ha: $\langle \hat{A} \rangle_1 = Tr(\rho_1 A_1)$.

In modo simmetrico, la matrice composta sul sistema 2 si riduce:

$$(\rho_2)_{\alpha\beta} = (Tr_1 \rho_{12})_{\alpha\beta} = \sum_i \langle i|_2 \, \rho_{12} \, |i\rangle_2 = \sum_i \rho_{i,\alpha}^{j;\alpha} \, |\alpha\rangle \langle\beta| \rightarrow \langle \mathbb{1} \otimes B_2 \rangle_2 = Tr(\rho_2 B_2) \tag{1.17}$$

Tuttavia, ρ_1 e ρ_2 non conservano la purezza dello stato. Se ρ_{12} descrive uno stato puro, non è detto che valga la stessa condizione per le singole ρ_1 e ρ_2 ottenute per riduzione. In generale, $\rho_{12} \neq \rho_1 \otimes \rho_2$. Del resto, se valesse l'uguaglianza non si avrebbe il problema della perdita di informazione sulla purezza dello stato originario.

1.3 Rappresentazione di Kraus

Si consideri un sistema composto da due sottosistemi 1 e 2, che si trova inizialmente in un generico stato ρ_{12} (puro o misto). Se *U(t)* è l'operatore di evoluzione temporale, lo stato al tempo t si ottiene dalla formula di evoluzione per una matrice densità:

$$\rho_{12}(t) = U(t) \rho_{12} U^\dagger(t) \tag{1.18}$$

Si trova che, sebbene ρ_{12} evolva unitariamente, non è detto che anche ρ_1 lo faccia, quindi in generale non esiste un operatore unitario, per cui

$$\rho_1(t) = U_1(t) \rho_1 U_1^\dagger(t) \tag{1.19}$$

Lo si può vedere esplicitamente supponendo che ρ_{12} sia separabile, cioè fisicamente i due stati sono scorrelati (non entangled), $\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2$ e ρ_2 sia puro, ossia: $\rho_2 = |0\rangle_2 \langle 0|_2$ dove con $|0\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$ viene indicato uno stato, scelto in modo arbitrario, del sottosistema 2.
A questo punto, scrivendo lo stato iniziale del sistema composto, $\rho_{12}(0) = \rho_1 \otimes |0\rangle_2 \langle 0|_2$ e calcolandone l'evoluzione temporale si ottiene $\rho_{12}(t) = U(t) \rho_{12}(0) U^\dagger(t)$.
Rimane da determinare la matrice ridotta $\rho_1(t)$ attraverso la traccia parziale:

$$\rho_1(t) = Tr_2(\rho_{12}(t)) = Tr_2 \left[U(\rho_1 \otimes |0\rangle_2 \langle 0|_2) U^\dagger \right] = \sum_{k=1}^{dim\mathcal{H}_2} \langle k|_2 \, U \, |0\rangle_2 \, \rho_1 \, \langle k|_2 \, U^\dagger \, |0\rangle_2 = \sum_{k=1}^{dim\mathcal{H}_2} E_k \rho_1 E_k^\dagger \tag{1.20}$$

dove è stata introdotta una base ortonormale $\{|k\rangle_2\}$ di $\mathcal{H}_2$ per poter calcolare la traccia parziale. La (1.20) mostra come l'evoluzione di ρ_1 abbia una forma più generale di quella che sarebbe propria di un'evoluzione unitaria come in (1.19). Si tratta di un'evoluzione generalizzata composta dalla "somma di più di un'evoluzione".

Gli operatori introdotti $E_k : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$, detti operatori di Kraus, agenti sullo spazio $\mathcal{H}_1$, soddisfano una condizione di normalizzazione, come nel caso unitario:

$$\sum_{k=1}^{dim\mathcal{H}_2} E_k^\dagger E_k = \sum_{k=1}^{dim\mathcal{H}_2} \langle 0|_2 \, U^\dagger \, |k\rangle_2 \, \langle k|_2 \, U \, |0\rangle_2 = \langle 0|_2 \, U^\dagger U \, |0\rangle_2 = \langle 0|_2 \, \mathbb{1}_{12} \, |0\rangle_2 = \mathbb{1}_1 \tag{1.21}$$

La mappa $\mathcal{S} : \rho_1 \to \rho_1' = \sum_{k=1}^{dim\mathcal{H}_2} E_k \rho_1 E_k^\dagger$ con la condizione appena vista, è detta operazione quantistica o superoperatore. Un superoperatore $\mathcal{S}$ è una mappa lineare tra operatori con le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{S}(\rho_1)$ è hermitiana se lo è ρ_1: $(\rho_1')^\dagger = \rho_1'$
2. $\mathcal{S}$ conserva la traccia: $Tr(\rho_1') = Tr(\rho_1)$
3. Se ρ_1 è non negativa, allora anche ρ_1 lo è
4. Si possono comporre due mappe di Kraus una dopo l'altra ottenendo ancora una mappa di Kraus: $\mathcal{S}(\rho) = (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1)(\rho) = \mathcal{S}_2(\mathcal{S}_1(\rho))$
5. Invertibilità: Data $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^{-1}$ esiste solo se è anche unitaria. Se quest'ultima condizione non si verifica, vuol dire, fisicamente, che vi è stata interazione tra A e B, cioè si è persa informazione del passaggio ρ_{A+B} a ρ_A (tale processo è detto decoerenza).

1.3.1 Teorema di Rappresentazione di Kraus

Tale costruzione è generalizzabile considerando evoluzioni relative alle varie operazioni quantistiche che si possono eseguire su un sistema.
Una mappa "evoluzione generalizzata" tra stati $\mathcal{S} : \rho_1 \to \rho_1'$ è:

1. Lineare: $\mathcal{S}(a\rho_1 + b\rho_2) = a\mathcal{S}(\rho_1) + b\mathcal{S}(\rho_2)$
2. Manda matrici Hermitiane in matrici Hermitiane: in dimensione finita vale $\mathcal{S}(\rho) = [\mathcal{S}(\rho)^T]^*$ ($\mathcal{S}(\rho)$ descrive un operatore simmetrico)
3. Conserva la traccia: $Tr\rho = Tr\mathcal{S}(\rho)$
4. $\mathcal{S}$ è completamente positiva. La positività significa che se ρ è un operatore non negativo, allora lo è anche $\mathcal{S}(\rho)$. La completa positività aggiunge anche che $\mathcal{S} \otimes \mathbb{1}_E$, ossia l'estensione di $\mathcal{S}$ da $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_E$ per ogni $\mathcal{H}_E$, è una mappa positiva. In altre parole, è sempre possibile estendere $\mathcal{S}(\rho)$ ad un'operazione che agisce localmente su un sistema lasciando invariato tutto il resto (che è il caso di interesse sperimentale, dato che non si lavora con stati dell'intero Universo).

Si dimostra che $\mathcal{S}$ si può scrivere in rappresentazione di Kraus, cioè nella forma decomposta come somma di M termini:

$$\mathcal{S} : \rho_1 \to \rho_1' = \sum_{k=1}^{M} E_k \rho_1 E_k^\dagger \qquad \sum_{k=1}^{M} E_k E_k^\dagger = \mathbb{1}$$

1.4 Master equation

Si conclude questa trattazione, cercando un'equazione che descriva l'evoluzione (generalmente non unitaria) di un sistema aperto, ovvero a contatto con l'ambiente. Sia $\rho(t_0)$ lo stato del sistema in esame ad un istante t_0 e $\rho_{tot}(t_0)$ quello di sistema + ambiente (generalmente non separabile). Lo stato totale ρ_{tot} evolve in maniera unitaria, mediante l'operatore $U(t_0 + \Delta t, t)$. Considerando un'evoluzione infinitesima ($\Delta t = dt$) e focalizzandosi con una traccia parziale sulla matrice ridotta ρ, si trova che:

$$\rho(t_0 + dt) = Tr_{amb.}[\rho_{tot}(t_0 + dt)] = Tr_{amb.}[U(t_0 + dt, t_0)\rho_{tot}(t_0)U^\dagger(t_0 + dt, t_0)] \tag{1.22}$$

Si ha perciò che $\rho(t_0 + dt)$ dipende da $\rho_{tot}(t_0)$. Ciò porta a due problemi:

1. Non si conosce lo stato dell'ambiente, l'obiettivo è trovare un'equazione che riguardi solo il sistema di interesse. È allora possibile utilizzare l'approssimazione di Born, in cui si suppone che l'ambiente sia molto più grande rispetto al sistema, per cui rimane invariato a seguito delle interazioni.

2. La presenza delle correlazioni fa sì che $\rho_{tot}(t_0)$ dipenda dagli stati $\rho(t)$ per $t < t_0$, ovvero la storia del sistema costituita dai suoi precedenti stati, ne influenza l'evoluzione. Si utilizza allora l'approssimazione di Markov, supponendo che l'ambiente non abbia memoria. Ciò significa che l'informazione può solo uscire dal sistema e quest'ultimo non può accedere a informazioni del suo passato. L'approssimazione è valida se ogni effetto di memoria dell'ambiente avviene su tempi molto minori rispetto alle dinamiche di interesse. Un'evoluzione Markoviana può essere espressa come sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$\rho(t+dt) = \rho(t) + \dot{\rho(t)}dt + O([dt]^2) \tag{1.23}$$

L'equazione (1.23) induce un'evoluzione generalizzata sul sistema, che ha una rappresentazione di Kraus:

$$\rho(t+dt) = \mathcal{S}(t, t+dt)\rho(t) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k \rho(t) E_k^\dagger \tag{1.24}$$

con $M < N^2, \quad N = dim(\mathcal{H})$. Per una tale evoluzione, si richiedono le seguenti condizioni:

1. L'evoluzione per un tempo nullo dia l'identità: $\mathcal{S}(t,t) = \mathbb{1}$
2. $\mathcal{S}(t, t+dt)$ riproduca i risultati dell'equazione di Schrödinger nel caso di evoluzione unitaria
3. Valga la condizione per la rappresentazione di Kraus:

$$\sum_{k=0}^{M-1} E_k^\dagger E_k = \mathbb{1} \tag{1.25}$$

Le prime due vengono soddisfatte se si scelgono come operatori di Kraus $\{E_k\}$:

$$\begin{cases} E_0 = \mathbb{1} + \frac{1}{\hbar}(-iH + K)dt \\ E_k = \sqrt{dt}L_k \end{cases}$$

dove H e K sono operatori hermitiani, mentre L_k sono operatori generici, detti operatori di Lindblad. Imponendo la (1.25):

$$\begin{aligned} &[\mathbb{1} + \frac{1}{\hbar}(iH + K)dt][\mathbb{1} + \frac{1}{\hbar}(-iH + K)dt] + \sum_{k=1}^{M-1} L_k^\dagger L_k = \mathbb{1} \\ &\approx \frac{2}{\hbar}kdt + \sum_{k=1}^{M-1} L_k^\dagger L_k dt + O([dt]^2) = 0 \\ \rightarrow &K = -\frac{\hbar}{2}\sum_{k=1}^{M-1} L_k^\dagger L_k \end{aligned} \tag{1.26}$$

dove l'approssimazione nella seconda riga è dovuta a un'espansione al primo ordine. Sostituendo (1.26) nell'espressione iniziale si trova:

$$\rho(t+dt) = \rho(t) - \frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)]dt + \sum_{k=1}^{M-1}\left(L_k\rho(t)L_k^\dagger - \frac{1}{2}L_k^\dagger L_k \rho(t) - \frac{1}{2}L_k^\dagger L_k\right)dt + O([dt]^2) \tag{1.27}$$

Si riconosce nel primo termine l'evoluzione data dall'equazione di Heisenberg. Confrontando (1.27) con (1.23), si ottiene la forma principale della Master equation, detta anche **equazione di Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad**:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2}L_k^\dagger L_k \rho - \frac{1}{2}\rho L_k^\dagger K_k) \tag{1.28}$$

L'evoluzione secondo l'approccio-ETH

Come già anticipato, in questa sezione verranno rivisti i risultati fondamentali su cui poggia la Meccanica Quantistica, procedendo con l'introduzione di un elemento mancante in grado di garantirne la completezza e risolvere alcuni problemi relativi al processo di misura nell'ambito dell'approccio-ETH.

2.5 I primi Tre Pilastri

1. *Quantità fisiche caratteristiche di un sistema.*
   In Meccanica Quantistica, un sistema fisico S, è caratterizzato da una lista di elementi autoaggiunti di una (C^* o almeno $*$) algebra di osservabili,
   $$\mathcal{O}_S = \{\hat{X}_i = \hat{X}_i^* | i \in \mathcal{J}_S\}$$
   con $\mathcal{J}_S$ insieme dipendente da S, dove ciascun $\hat{X} \in \mathcal{O}_S$ rappresenta una quantità fisica caratteristica del sistema. Ad ogni istante t, esiste una rappresentazione di $\mathcal{O}_S$ attraverso operatori autoaggiunti che agiscono su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}_S$:
   $$\mathcal{O}_S \ni \hat{X} \mapsto X(t) = X(t)^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$$
   dove $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ è l'algebra di tutti gli operatori limitati agenti su $\mathcal{H}_S$.
   Nota: con $*$ in questo capitolo sarà denotata sia l'involuzione dell'algebra delle osservabili sia l'aggiunto in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$.

2. *Dinamica degli operatori nella visuale di Heisenberg*
   Un sistema isolato, S, è tale che, per fini pratici, i suoi gradi di libertà hanno interazioni trascurabili con i gradi di libertà del suo complementare, S^c, cioè con il resto dell'Universo, durante il periodo di tempo in cui viene monitorata l'evoluzione di S. Questo comunque non esclude che lo stato di S possa essere legato con lo stato del suo complementare. L'importanza di tali sistemi è dovuta al fatto che solo per essi è possibile formulare una legge generale per l'evoluzione temporale. Per semplicità, si assume anche che il sistema S sia autonomo. Esiste quindi un operatore autoaggiunto, $H = H^*$, agente sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_S$, l'Hamiltoniana del sistema S, tale che due operatori che rappresentano una qualsiasi quantità fisica $\hat{X} \in \mathcal{O}_S$ a due differenti istanti, t e t', sono legati l'uno all'altro dal propagatore generato da H, cioè
   $$X(t') = e^{i(t'-t)H}\ X(t)\ e^{-i(t'-t)H} \quad \textit{per due istanti qualsiasi } t, t' \tag{2.29}$$
   Tale equazione è la versione finita dell'equazione di Heisenberg.
   Nota: Se ci sono sostanziali interazioni tra i gradi di libertà di S e i gradi di libertà dell'ambiente, S^c di S, la descrizione in termini di evoluzione temporale si complica ulteriormente. Tuttavia, nella sezione precedente, si è notato che è possibile procedere, con buona approssimazione, in termini di gruppi Markoviani generati da operatori di Lindblad.

3. *Valori di aspettazione di quantità fisiche in "stati".*
   In Meccanica Quantistica non relativistica, gli stati sono costituiti da matrici densità su $\mathcal{H}_S$, che sono operatori non-negativi con traccia unitaria: $\rho \geq 0$, con $Tr(\rho) = 1$. Gli stati puri sono dati

da proiettori ortogonali, $P = P^* = P^2$ di dimensione unitaria corrispondenti a raggi vettori su $\mathcal{H}_S$. Il valor medio, $\omega(X(t))$, di un'osservabile $\hat{X} \in \mathcal{O}_S$ al tempo t è definito come

$$\omega(X(t)) := Tr(\rho \cdot X(t))$$

In visuale di Heisenberg, solo gli operatori evolvono in modo non banale nel tempo, mentre gli stati risultano indipendenti. Tale visuale è tuttavia equivalente alla visuale di Schrödinger dove invece gli operatori che rappresentano le quantità fisiche sono indipendenti dal tempo, mentre gli stati evolvono secondo l'equazione di Schrödinger-Liouville:

$$\rho(t) = e^{-i(t-t')H} \rho(t') e^{i(t-t')H} \quad \textit{per due istanti qualsiasi } t, t' \tag{2.30}$$

2.5.1 Misure e Postulato del Collasso

Da quanto appena visto, le relazioni (2.29) e (2.30) sono lineari e deterministiche. In accordo all'Interpretazione di Copenaghen, l'evoluzione data dall'equazione di Schrödinger-Liouville viene interrotta non appena viene eseguita una misura e in quel momento viene rimpiazzata da un cambiamento non lineare di stati descritto dal cosiddetto *postulato del collasso della funzione d'onda*: sia una quantità fisica $\hat{X}$ misurata a un certo tempo t, con il risultato della misura dato da $\xi \in spec(\hat{X})$, ove con $spec(\hat{X})$ si denota lo spettro dell'osservabile, ovvero l'insieme dei valori ottenibili con una misura. Allora lo stato ρ del sistema S prima che misura di $\hat{X}$ venga effettuata, viene sostituito dallo stato $\rho_{\xi,t}$, dato da:

$$\rho \rightarrow \rho_{\xi,t} := [Tr(\pi_\xi(t))]^{-1} \pi_\xi(t) \rho \pi_\xi(t) \tag{2.31}$$

subito dopo la misura, dove $\pi_\xi(t)$ è il proiettore corrispondente all'autovalore ξ dell'osservabile $\hat{X}$ al tempo t. Sorge quindi il cosiddetto *"problema della misura"*. L'origine del problema risiede nel fatto che mentre l'evoluzione temporale di un sistema isolato è unitaria e completamente deterministica, la misura è proiettiva e provoca una perdita di informazione sullo stato precedente alla misura, ottenendo uno stato finale in modo non deterministico. L'osservatore che esegue la misura, assume quindi un ruolo fondamentale nella descrizione del sistema in esame. Tuttavia, la teoria, nei suoi postulati, non fornisce un metodo per trattare l'osservatore e la sua evoluzione temporale, sullo stato del quale in generale non si ha alcuna informazione.

2.6 Il Quarto Pilastro: sommario dell'approccio-ETH

In questa sezione, si introdurranno delle definizioni e dei concetti generali per riassumere le idee chiave dell'Approccio-ETH, le quali serviranno ad ottenere una legge generale per l'evoluzione temporale degli stati.

2.6.1 Algebra delle potenzialità e misure di probabilità

Gli operatori $X(t)$, rappresentanti osservabili $\hat{X} \in \mathcal{O}_S$, caratteristiche di un sistema S a un certo istante t, sono operatori autoaggiunti, cioè $X(t) = X(t)^*$ e agiscono su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}_S$. Si potrebbe associare un intervallo limitato $I_{X(t)}$ dell'asse dei tempi contenente l'istante t a ciascuno di questi operatori, per tener conto di un'eventuale media temporale con un'opportuna funzione di prova nel tempo, necessaria per osservabili localizzate nello spazio-tempo. Risulta naturale introdurre delle algebre, $\mathcal{E}_I, I \subset \mathbb{R}$, come le algebre generate da arbitrarie combinazioni lineari complesse di prodotti di operatori $X(t)$ che rappresentano osservabili, con la proprietà che $I_{X(t)} \subseteq I$ e che la matrice identità appartenga a tutte le algebre $\mathcal{E}_I$.
A questo punto è possibile dare la definizione di algebre $\mathcal{E}_{\geq t}$ come segue:

$$\mathcal{E}_{\geq t} := \overline{\bigvee_{I \subset [t,\infty]} \mathcal{E}_I} \tag{2.32}$$

dove la chiusura è presa nella topologia della convergenza debole su $\mathcal{H}_S$. Una tale algebra così definita è chiamata *algebra di tutte le potenzialità a tempi* $\geq t$ (è un'algebra di von Neumann). Segue direttamente dalla definizione che

$$\mathcal{E}_{\geq t'} \subseteq \mathcal{E}_{\geq t} \qquad \forall t' > t \tag{2.33}$$

Sia S un sistema autonomo isolato con Hamiltoniana H, e sia $t' > t$. Allora, l'equazione di Heisenberg per l'evoluzione temporale implica che

$$\mathcal{E}_{\geq t'} = \{e^{i(t'-t)H}\ X(t)\ e^{-i(t'-t)H} | X \in \mathcal{E}_{\geq t}\} \subseteq \mathcal{E}_{\geq t}$$

Segue quindi che questa importante caratteristica contraddistingue l'Approccio-ETH da altri schemi basati sull'osservazione che l'evoluzione temporale di un sistema potrebbe legare i suoi gradi di libertà a quelli di un ambiente non osservato o non osservabile.

Definizione 2. ***Evento potenziale***
Un evento potenziale o potenzialità, associato a un sistema S a un certo tempo t, è descritto da una partizione dell'unità di proiettori ortogonali su $\mathcal{H}_S$,

$$\{\pi_\xi | \xi \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{E}_{\geq t}$$

dove $\mathcal{X}$ è un insieme numerabile, con le seguenti proprietà:

1. $\pi_\xi = \pi_\xi^* \in \mathcal{E}_{\geq t}, \qquad \forall \xi \in \mathcal{X}$
2. $\pi_\xi \cdot \pi_\eta = \delta_{\xi,\eta}\pi_\xi, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{X}$
3. $\sum_{\xi \in \mathcal{X}} \pi_\xi = 1$

Sia $\mathcal{P}_{\geq t}$ lo spazio di tutti i proiettori ortogonali in $\mathcal{E}_{\geq t}$. Si definisce:

Definizione 3. ***Probabilità quantistiche***
Una misura di probabilità sulle potenzialità localizzate a tempi $\geq t$ è una mappa $\mu : \mathcal{P}_{\geq t} \to [0,1]$ con le seguenti proprietà:

1. $0 \leq \mu(\pi) \leq 1, \quad \forall \pi \in \mathcal{P}_{\geq t}, \quad$ *con* $\quad \mu(0) = 0 \quad$ *e* $\quad \mu(1) = 1$*;*
2. $\mu(\sum_{\xi \in \mathcal{X}_0} \pi_\xi) = \sum_{\xi \in \mathcal{X}_0} \mu(\pi_\xi)$*, per una potenzialità arbitraria $\{\pi_\xi | \xi \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{E}_{\geq t}$ e un arbitrario sottoinsieme $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}$*

Assumiamo che le algebre $\mathcal{E}_{\geq t}$ non abbiano una somma diretta data dall'algebra di matrici complesse 2×2. Allora:

Teorema 2.6.1. ***Gleason-Maeda:***
Ogni misura di probabilità, μ, sulle potenzialità fissate al tempo t è data da uno stato normale, ω_μ sull'algebra di von Neumann $\mathcal{E}_{\geq t}$ con

$$\omega_\mu(\pi) = \mu(\pi), \qquad \forall \pi \in \mathcal{P}_{\geq t}$$

(Uno stato normale su un'algebra di von Neumann è definito come un funzionale lineare positivo, ω, continuo nella topologia debole e normalizzato in modo che $\omega(1) = 1$).
Nota:

- Se $\{\pi_\xi | \xi \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{E}_{\geq t}$ è un evento potenziale localizzato a tempi $\geq t$ allora $\{e^{isH}\pi_\xi e^{-isH} | \xi \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{E}_{\geq t+s}$ è un evento potenziale localizzato a tempi $\geq (t+s)$.
- Per sistemi autonomi con gradi di libertà finiti, le algebre $\mathcal{E}_{\geq t}$ coincidono con l'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ di tutti gli operatori limitati su $\mathcal{H}_S$ e sono quindi indipendenti da t. Segue che, per tali sistemi, è impossibile introdurre una definizione non-banale di *eventi realmente accaduti (attualità)* a un certo istante t o successivi, e il *problema della misura* non può essere risolto considerando solo tali sistemi. La situazione è radicalmente diversa se si considerano sistemi per i quali le inclusioni in (2.33) sono strette, il che accade per sistemi con infiniti gradi di libertà che includono quelli descriventi modi privi di massa (come fotoni e gravitoni).

Definizione 4. ***Sistema chiuso***
Un sistema fisico S, costituito di eventi, è detto chiuso se e solo se le algebre $\mathcal{E}_{\geq t}$ di tutte le potenzialità fissate a un tempo t sono indipendenti da t, $\forall t \in \mathbb{R}$ (cioè si ha uguaglianza in (2.33)*).*

I sistemi chiusi hanno lo stesso problema dei sistemi con gradi di libertà finiti: per loro il problema della misura non può essere risolto senza aggiungere ulteriori sistemi quantistici ad infiniti gradi di libertà allo scopo di "misurare" i precedenti.

2.7 Il Principio delle Potenzialità Decrescenti (PDP)

Per cercare di dare una descrizione di eventi realmente accadenti a un tempo t (attualità) e cercare di capire come tali eventi possano essere registrati in misure proiettive, è utile introdurre il seguente postulato:

Postulato 1. ***Principio delle Potenzialità Decrescenti*** *(o principio di perdita di informazione): Un sistema isolato S caratterizzato da attualità, cioè di eventi fissati a un tempo (finito), hanno la proprietà che*

$$\mathcal{E}_{\geq t'} \subsetneqq \mathcal{E}_{\geq t} \subsetneqq \mathcal{E} \qquad \textit{ogni volta che } t' > t \qquad (PDP) \tag{2.34}$$

con $\mathcal{E} := \overline{\mathcal{E}_{\geq -\infty}}$ l'algebra di tutte le potenzialità nella storia del sistema S.
Per essere più precisi, se il tempo è assunto continuo,

$$(\mathcal{E}_{\geq t'})' \cap \mathcal{E}_{\geq t}, \quad \textit{con } t' > t$$

è un'algebra non commutativa, infinito-dimensionale.

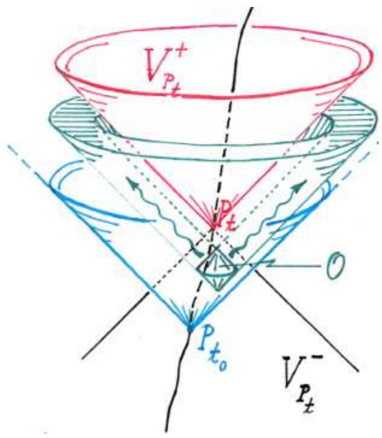

Figura 2.1: Rappresentazione del Principio delle Potenzialità Decrescenti

Nei modelli, le algebre $\mathcal{E}_{\geq t}$ sono associate a quantità fisiche localizzate in coni di luce futuro collocati l'uno dentro l'altro e il *PDP* risulta una conseguenza dell'esistenza di modi normali privi di massa, come i fotoni, la cui dinamica soddisfa il principio di località o la causalità di Einstein. La figura (2.1) mostra una rappresentazione del Postulato 1, indicando come l'algebra $\mathcal{E}_{\geq t}$ contenga $\mathcal{E}_{\geq t'}$ per $t' > t$ e che, asintoticamente, fasci di luce emessi dalla regione $\mathcal{O}$ appartengono a $(\mathcal{E}_{\geq t'})' \cap \mathcal{E}_{\geq t}$.

2.7.1 Descrizione di sistemi aperti isolati

Definizione 5. ***Sistema aperto isolato***
Un sistema isolato, ma aperto, S, è definito quantisticamente in termini di un filtro decrescente di algebre $\{\mathcal{E}_{\geq t}\}_{t\in\mathbb{R}}$ (o $\{\mathcal{E}_{\geq t}\}_{t\in\mathbb{Z}}$ se il tempo è assunto discreto) di von Neumann che soddisfano il PDP, rappresentate su un comune spazio di Hilbert $\mathcal{H}_S$, i cui proiettori descrivono eventi potenziali.

Sia ω lo stato di un sistema S. Lo stato ω_t, di S, al tempo t,

$$\omega_t(X) := \omega(X), \quad \forall X \in \mathcal{E}_{\geq t}$$

è definito come la restrizione dello stato ω definito su $\mathcal{E}_{\geq t}$.
Dal teorema di Gleason-Maeda, ω_t corrisponde a una misura di probabilità eseguita su $\mathcal{P}_{\geq t}$. Bisogna notare che, come conseguenza del *PDP* e dell'entanglement, la restrizione ω_t di S a un certo istante t sarà generalmente uno stato misto anche se ω è uno stato puro su $\mathcal{E}$.
Si deve chiarire cosa significa che ω_t è uno stato misto e quali implicazioni ha tale proprietà sul manifestarsi di un determinato evento a un istante t. Più precisamente, il criterio che verrà formulato permetterà di decidere se, dato uno stato ω_t, sull'algebra $\mathcal{E}_{\geq t}$, possa esistere un evento potenziale in un tempo $\geq t$ che descriva un evento attuale fissato al tempo t.

2.7.2 Eventi attuali

Per farlo, occorrono innanzitutto le seguenti definizioni:

Definizione 6. ***Il centralizzatore di uno stato***
*Data una *-algebra $\mathcal{A}$ e uno stato ω su $\mathcal{A}$, il centralizzatore, $\mathcal{C}_\omega(\mathcal{A})$ di uno stato ω è la subalgebra di tutti gli elementi $Y \in \mathcal{A}$ con la proprietà che*

$$\omega([Y, X]) = 0, \qquad \forall X \in \mathcal{A}$$

cioè

$$\mathcal{C}_\omega(\mathcal{A}) := \{Y \in \mathcal{A}| \quad \omega([Y, X]) = 0, \quad \forall X \in \mathcal{A}\}$$

Definizione 7. ***Il centro del centralizzatore***
Il centro del centralizzatore $\mathcal{C}_\omega(\mathcal{A})$ dello stato ω, denotato con $\mathcal{Z}_\omega(\mathcal{A})$, è una subalgebra abeliana di $\mathcal{C}_\omega(\mathcal{A})$ consistente di tutti gli operatori che commutano con tutti gli altri operatori in $\mathcal{C}_\omega(\mathcal{A})$, cioè

$$\mathcal{Z}_\omega(\mathcal{A}) := \{Y \in \mathcal{C}_\omega(\mathcal{A})|[Y, X] = 0, \quad \forall X \in \mathcal{C}_\omega(\mathcal{A})\}$$

Si nota che il centro $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$, di un'algebra $\mathcal{A}$ è contenuta in $\mathcal{Z}_\omega(\mathcal{A})$, per tutti gli stati ω su $\mathcal{A}$.
A questo punto è possibile dare una definizione *eventi attuali* o *attualità* in un sistema S.

Definizione 8. ***Eventi attuali o attualità***
Dato uno stato ω_t sull'algebra $\mathcal{E}_{\geq t}$, un evento attuale corrispondente a un evento potenziale descritto da una partizione dell'unità $\{\pi_\xi|\xi \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{E}_{\geq t}$ si manifesta al tempo t se e solo se $\mathcal{Z}_{\omega_t}(\mathcal{E}_{\geq t})$ è non banale, cioè

$$\{\pi_\xi|\xi \in \mathcal{X}\} \quad \textit{generano} \quad \mathcal{Z}_{\omega_t}(\mathcal{E}_{\geq t}) \tag{2.35}$$

e le probabilità di Born

$$\omega_t(\pi_{\xi_j}) \quad \textit{sono strettamente positive}, \quad \textit{per } \xi_j \in \mathcal{X}, j = 1, 2, ..., n$$

per qualche $n \geq 2$.

In accordo alla definizione, un evento potenziale $\{\pi_\xi | \xi \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{E}_{\geq t}$, per essere un evento attuale in un periodo di tempo contenuto nell'intervallo $[t, \infty]$ è apparentemente necessario e sufficiente che i proiettori $\{\pi_\xi | \xi \in \mathcal{X}\}$ generino il centro $\mathcal{Z}_\omega(\mathcal{E}_{\geq t})$, del centralizzatore dello stato ω_t sull'algebra $\mathcal{E}_{\geq t}$. In altre parole, le osservabili nel centro commutano, quindi possono essere misurate nello stesso istante e presentano una decomposizione spettrale comune da cui segue la richiesta che i proiettori generino il centro.

Ci si propone quindi di analizzare le conseguenze dell'affermazione che in un sistema aperto isolato, un evento attuale avviene al tempo t.

2.8 Eventi attuali e Postulato del Collasso

Sia S un sistema aperto isolato che soddisfa il PDP. Sia ω_t lo stato di S sull'algebra $\mathcal{E}_{\geq t}$ preparato in un istante di tempo precedente a t. Si suppone che $\{\pi_\xi | \xi \in \mathcal{X}\}$ sia un evento che, generante $\mathcal{Z}_{\omega_t}(\mathcal{E}_{\geq t})$, inizia ad accadere al tempo t. Questo implica che

$$\omega_t(A) = \sum_{\xi \in \mathcal{X}} \omega_t(\pi_\xi, A\pi_\xi), \qquad \forall A \in \mathcal{E}_{\geq t} \tag{2.36}$$

con il significato che ω_t è una sovrapposizione incoerente di stati nel range di tutti i proiettori $\pi_\xi, \xi \in \mathcal{X}$ (in altre parole i termini fuori dalla diagonale di $\omega_t(\pi_\xi, A\pi_\xi)$ non contribuiscono al membro di destra e la misura di probabilità determinata da ω_t sulle potenzialità, $\mathcal{P}_{\geq t}$ per tempi $\geq t$ è una combinazione convessa di misure di probabilità indicizzate dai punti $\xi \in \mathcal{X}$ che etichettano i proiettori di eventi attuali fissati al tempo t, quindi ω_t è uno stato misto.

Ci si trova dunque, nella posizione di descrivere l'evoluzione degli stati nell'approccio-ETH alla Meccanica Quantistica.

Postulato 2. ***Quarto Pilastro: Postulato del collasso, CP***
Sia S un sistema aperto isolato che soddisfa il PDP. Sia ω_t lo stato di S sull'algebra $\mathcal{E}_{\geq t}$ preparato a un istante di tempo precedente a t. Assumiamo che $\{\pi_\xi | \xi \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{Z}_{\omega_t}(\mathcal{E}_{\geq t})$ rappresenti un evento attuale, che inizia ad accadere al tempo t. Allora, lo stato su $\mathcal{E}_{\geq t}$ del sistema S subito dopo che l'evento ha iniziato a verificarsi, è dato da

$$\omega_{t,\xi_*}(\cdot) := [\omega_t(\pi_{\xi_*})]^{-1} \omega_t(\pi_{\xi_*}(\cdot)\pi_{\xi_*}) \tag{2.37}$$

per qualche punto $\xi_* \in \mathcal{X}$ con $\omega_t(\pi_{\xi_*}) > 0$.
La probabilità per il sistema S di essere trovato in ω_{t,ξ_*} subito dopo l'istante t è dato dalla regola probabilistica di Born, secondo cui

$$prob\{\xi_*, t\} = \omega_t(\pi_{\xi_*}) \tag{2.38}$$

La visione dell'evoluzione temporale degli stati di un sistema aperto isolato S è illustrata metaforicamente (per tempi discreti) in figura.

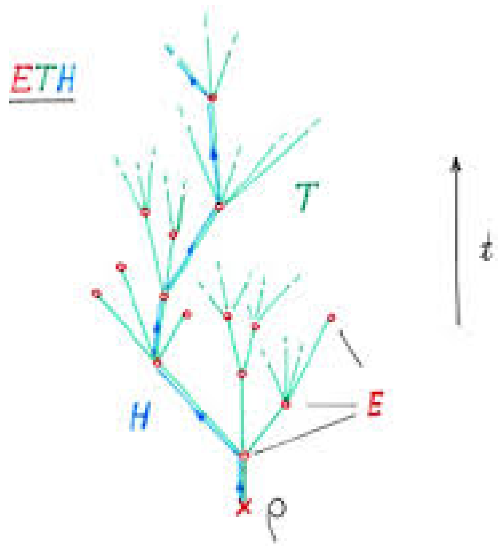

Figura 2.2: Evoluzione temporale di uno stato di S con la condizione iniziale $\omega := \rho$

A questo punto si è in grado di capire a cosa si riferiscono le iniziali nella sigla ETH:

- E sta per "event";
- T sta per "tree", di stati di S corrispondenti ai possibili eventi, riferendosi alla struttura simile a quella delle radici di un albero dello spazio di tutte le attualità in un sistema fisicamente isolato che si potrebbero in linea di principio incontrare nel corso dell'evoluzione;
- H sta per "history" di eventi osservati, riferito alla traiettoria attuale di stati occupata dal sistema nel corso dell'evoluzione.

Confronto e conclusioni

"L'interpretazione della meccanica quantistica è stata affrontata da molti autori, non voglio discuterne qui. Io voglio trattare delle cose più fondamentali." (P.A.M. Dirac)

Per concludere, vengono ricapitolati i passi fondamentali che accomunano e diversificano i due approcci.

La principale differenza tra le due teorie esaminate risulta nella risoluzione, secondo l'Approccio-ETH, del problema della misura, che rimane presente nella teoria dell'Informazione Quantistica. È stato infatti discusso nella precedente sezione, che l'evoluzione temporale di stati fisici S è determinata dal propagatore unitario U, che risolve un'equazione di Schrödinger (deterministica), eccetto quando una misura di una quantità fisica X viene eseguita: immediatamente dopo la misura, lo stato di S, in accordo all'interpretazione di Copenaghen, è un autostato di X corrispondente all'autovalore misurato. Se il valore non viene registrato, occorre utilizzare una matrice densità descrivendo una sovrapposizione incoerente di autostati di X, scelti in accordo con la "regola di Born", per descrivere la futura evoluzione di S; la conoscenza del valore determina poi il "collasso" (nel senso dell'informazione classica) nel corrispondente autostato. Questa non è una ricetta soddisfacente per come applicare la Meccanica Quantistica per descrivere fenomeni fisici. Si vorrebbe infatti poter vedere l'evoluzione degli stati in presenza di misure, come un certo processo stocastico. Tuttavia, in accordo all'Interpretazione di Copenaghen, predire o determinare le probabilità di transizione descriventi l'evoluzione temporale degli stati di S in presenza di misure ripetute richiede apparentemente la conoscenza di quantità fisiche misurate dall'intervento di *osservatori* e conoscere per quali tempi tali misure vengono eseguite. Senza informazioni complete su tutte le misure intermedie eseguite su S, che, nell'Interpretazione di Copenaghen non sono fornite dalla teoria, previsioni affidabili degli stati futuri del sistema e dei valori di aspettazione futuri delle quantità fisiche diventano impossibili. L'errore, secondo l'Approccio-ETH, risiede nel considerare che la Meccanica Quantistica possa essere una teoria lineare e deterministica. L'assioma CP (il Postulato del Collasso) sopra formulato, insieme alla definizione di stato al tempo t e la regola di Born rappresentano una reminiscenza del postulato del collasso della funzione d'onda nell'interpretazione di Copenaghen. Tuttavia, grazie al principio delle Potenzialità Decrescenti, il suo status nell'approccio-ETH non è solo logicamente consistente ma perfettamente naturale (non introdotto ad hoc). Non c'è ragione di aspettarsi che ci siano paradossi di informazione o di unitarietà. Infatti, l'evoluzione temporale di sistemi fisici esibisce processi di perdita di informazione ed eventi che non possono neppure in linea di principio essere registrati.

La conseguenza principale è che una tale teoria che non invoca l'intervento esterno di un altro ente di qualsiasi tipo, presenta la necessità di richiedere che il sistema abbia infiniti gradi di libertà di massa nulla. Se così non fosse allora le algebre $\mathcal{E}_{\geq t}$ sarebbero indipendenti dal tempo e, generalmente, coinciderebbero con $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ come nell'approccio usuale: per costruire una teoria della misura si sarebbe dunque costretti ad inserire un sistema esterno ad infiniti gradi di libertà, come avviene nella teoria quantistica dell'informazione.

L'approccio-ETH fornisce alla Meccanica Quantistica la seguente visione: l'evoluzione temporale degli stati di un sistema aperto isolato S in presenza di eventi, è determinato da un processo di diramazione stocastica continuo-temporale, il cui spazio degli stati è indicato come uno spettro non-commutativo,

$\mathfrak{I}_S$ di S. Assumendo che tutte le algebre $\mathcal{E}_{\geq t}$ siano isomorfe a una specifica e universale algebra di von Neumann, denotata da $\mathcal{N}$, lo spettro non commutativo, $\mathfrak{I}_S$ di S, è definito come

$$\mathfrak{I}_S := \bigcup_{\omega} (\omega, \mathcal{Z}_\omega(\mathcal{N}))$$

dove l'unione su ω è un'unione disgiunta e ω svaria su tutti gli stati di S di interesse fisico. La regola probabilistica di Born, insieme alla relazione (2.35), specifica le probabilità di diramazione del processo.
È importante notare che, in generale, gli eventi (descritti da proiettori ortogonali in $\mathcal{E}_{\geq t'}$) predetti accadere a un istante $t' > t$ sulla base degli stati $\omega_{t,\xi}, \xi \in \mathcal{X}$, sono diversi dagli eventi che vengono predetti al tempo t' sulla base dello stato $\omega_t|_{\mathcal{E}_{\geq t'}}$, utilizzato quando un evento attuale che si manifesta al tempo t non è conosciuto (cioè non viene registrato), e i proiettori che rappresentano questi diversi insiemi di eventi solitamente non commutano. Inoltre, per $t' > t$, gli operatori in $\mathcal{Z}_{\omega_{t,\xi}}(\mathcal{E}_{\geq t'})$ e in $\mathcal{Z}_{\omega_{t,\nu}}(\mathcal{E}_{\geq t'})$, con $\xi, \nu \in \mathcal{X}$, ma se $\xi \neq \nu$, in generale non commutano tra loro. Questa è una fondamentale differenza tra un processo di diramazione non commutativo come descritto dall'Approccio-ETH e un classico processo di diramazione stocastico.

In una versione discretizzata del tempo, denotando con γ lo $^*-$endomorfismo dell'algebra $\mathcal{E}$ corrispondente alla traslazione temporale di operatori nella visuale di Heisenberg in modo che $\gamma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\geq 1} \subset \mathcal{E}$, per una coppia di stati (ω, ω'), vi è una freccia da ω a ω', denotata con $\omega \to \omega'$ se e solo se esiste un proiettore ortogonale minimo $\pi \in \mathcal{Z}_\omega(\mathcal{E})$, ovvero un proiettore tale da non poter essere scomposto nella somma di due o più proiettori non nulli appartenenti a $\mathcal{Z}_\omega(\mathcal{E})$, tale che

$$\omega(\pi) \geq 0, \quad \omega'(X) = [\omega(\pi)]^{-1} \omega(\pi \gamma(X) \pi), \quad \forall X \in \mathcal{E} \tag{2.39}$$

A questo punto, si è in grado di poter dare la seguente definizione di *storia*.

Definizione 9. *Una storia di lunghezza r è un cammino connesso, $\omega_r := (\omega_0, ..., \omega_r)$, di stati su $\mathcal{E}$, con la proprietà che*

$$\omega_j \to \omega_{j+1}, \quad \forall j = 0, ..., r-1$$

Data una storia ω_r, esistono proiettori ortogonali minimi $\pi_j \in \mathcal{Z}_{\omega_j}(\mathcal{E})$, con $\omega_j(\pi_j) \geq 0$ tali che

$$\omega_{j+1}(X) = [\omega_j(\pi_j)]^{-1} \omega_j(\pi_j \gamma(X) \pi_j), \quad \forall X \in \mathcal{E}, \forall j = 0, ..., r-1$$

Quindi, una storia di lunghezza r può essere parametrizzata da una coppia (ω, π_r) dove $\omega = \omega_0$ rappresenta lo stato iniziale del sistema e i π_r sono i proiettori della forma vista sopra. Lo spazio delle storie è denotato con $\mathbb{H}_\omega$. È possibile definire inoltre degli operatori di storia $H(\pi_r)$ in modo da equipaggiare il loro relativo spazio con una misura di probabilità $\mathbb{P}_\omega(\pi_r)$:

$$H(\pi_r) := \prod_{j=0}^{r-1} \gamma^j(\pi_j), \quad \pi_r = (\pi_0, ..., \pi_{r-1})$$

$$\mathbb{P}_\omega(\pi_r) := \omega(H(\pi_r)^* \cdot H(\pi_r)) \tag{2.40}$$

L'aver definito cosa si intende per *storia* nell'Approccio-ETH mostra quindi che, secondo tale teoria, l'ontologia risiede quindi nelle *storie*, intese come sequenze di eventi che si susseguono ordinatamente nel tempo, percorse dai sistemi fisici isolati, mentre per la teoria quantistica dell'informazione è ancora lo stato a rappresentare l'ontologia. Nell'Approccio-ETH, invece, uno stato non descrive "cos'è" o "cosa sarà", è piuttosto un utile strumento matematico che permette di dare informazioni su quali siano gli eventi più probabili visti accadere nel futuro.

Un'altra discrepanza tra le due teorie riguarda la concezione di tempo. A differenza dell'informazione quantistica in cui non vi è una direzione preferenziale del tempo a livello fondamentale, nell'Appproccio-ETH il tempo non è puramente un parametro, ma può essere monitorato registrando gli *eventi* che accadono in un sistema aperto isolato. In tale visione, risulta quindi di fondamentale importanza la dicotomia tra il *futuro*, inteso come regno delle potenzialità e il *passato*, come reame di attualità e fatti.

Bibliografia

[1] Simone Montangero, *Appunti di Introduzione alla Teoria Quantistica dell'Informazione*. Unipd, 2021.

[2] Tommaso Stentella, *Relazione tra l'approccio ETH alla Meccanica Quantistica e la Decoerenza*, tesi.cab.unipd.it/65690

[3] Jürg Fröhlich, *A Brief Review of the "ETH-Approach to Quantum Mechanics"* in "Frontiers in Analysis and Probability", Springer-Verlag, 2020.

[4] Jürg Fröhlich, Alessandro Pizzo, *The Time-Evolution of States in Quantum Mechanics*. Communications in Mathematical Physics 389, 2021, 1673–1715.

[5] Philippe Blanchard, Jürg Fröhlich, and Baptiste Schubnel. *A "Garden of forking paths" – The quantum mechanics of histories of events*. Nuclear Physics B 912, 2016, 463-484.