UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Sorgenti di luce squeezed dipendenti dalla frequenza per rivelatori di onde gravitazionali

Relatore

Prof. Jean-Pierre Zendri

Laureando

Enrico Vedovato

Anno Accademico 2021/2022

Abstract

La rilevazione di onde gravitazionali richiede l'utilizzo di strumenti in grado di effettuare misurazioni ad alta precisione tramite l'utilizzo dell'interferometria laser. La natura dell'esperimento necessita di un continuo miglioramento della strumentazione e delle tecniche di misura per aumentare la sensibilità di interferometri come Advanced Virgo ed Advanced LIGO.

In questa tesi si esplora il contributo di rumori di origine quantistica al segnale in output di un interferometro: shot noise e radiation pressure. Lo shot noise si origina dalla natura discreta dei singoli fotoni del laser utilizzato nell'interferometro, la cui fluttuazione quantistica, normalmente insignificante, viene rilevata dallo strumento. La radiation pressure è invece un rumore meccanico dovuto allo scambio di momento con gli specchi dell'interferometro quando il fascio vi interagisce.

Per diminuire questo tipo di rumore si inietta nell'interferometro un fascio di luce non classico chiamato squeezed in cui la varianza di una delle quadrature è ridotta ("squeezata") rispetto all'altra. In questo modo è possibile limitare l'effetto solo di uno dei due contributi di rumore quantistico a scapito dell'altro. Infatti si dimostra che una delle quadrature è responsabile dello shot noise mentre l'altra della radiation pressure noise.

In questa tesi si discute una metodologia proposta, ed in parte già realizzata, di generare uno stato di luce squeezed in cui la varianza delle quadrature cambia in funzione della frequenza (frequency dependent squeezing). La rotazione ottimale dell'ellisse di squeezing è quella per cui si minimizza il rumore quantistico totale. Oltre ad una trattazione teorica sul metodo di ottimizzazione e sulla sua implementazione, vengono presentate delle simulazioni in cui si quantifica l'effetto delle possibili degradazioni dello stato squeezed e li si confronta con lo stato dell'arte sperimentale.

Indice

1 Introduzione

La rivelazione e lo studio delle onde gravitazionali avviene tramite l'utilizzo di interferometri: sensibilissimi strumenti, installati in diverse parti del mondo, che misurano anche la minima variazione di lunghezza relativa tra i suoi due bracci perpendicolari l'uno all'altro. Vista la precisione richiesta[1], una continua sfida sperimentale è il progressivo miglioramento strumentale per ridurre il più possibile i rumori che interferiscono con le misurazioni.

In figura 1 è rappresentato il *noise budget* in funzione della frequenza di un interferometro Advanced Ligo. La curva nera indica la sensibilità dell'interferometro tenendo conto di tutti i contributi al rumore. Tenendo presente che nel grafico non sono stati considerati alcuni errori tecnici, si nota come l'errore dovuto a contributi quantistici (curva viola) sia dominante a tutte le frequenze. Questo comporta quindi un peggioramento di sensibilità su tutta la banda di frequenza.

Nel corso di questa tesi ci si concentrerà su questo tipo di errori: ovvero si andrà a studiare cosa siano, come influenzino il comportamento del fascio iniettato nell'interferometro e come sia possibile limitarne l'effetto.

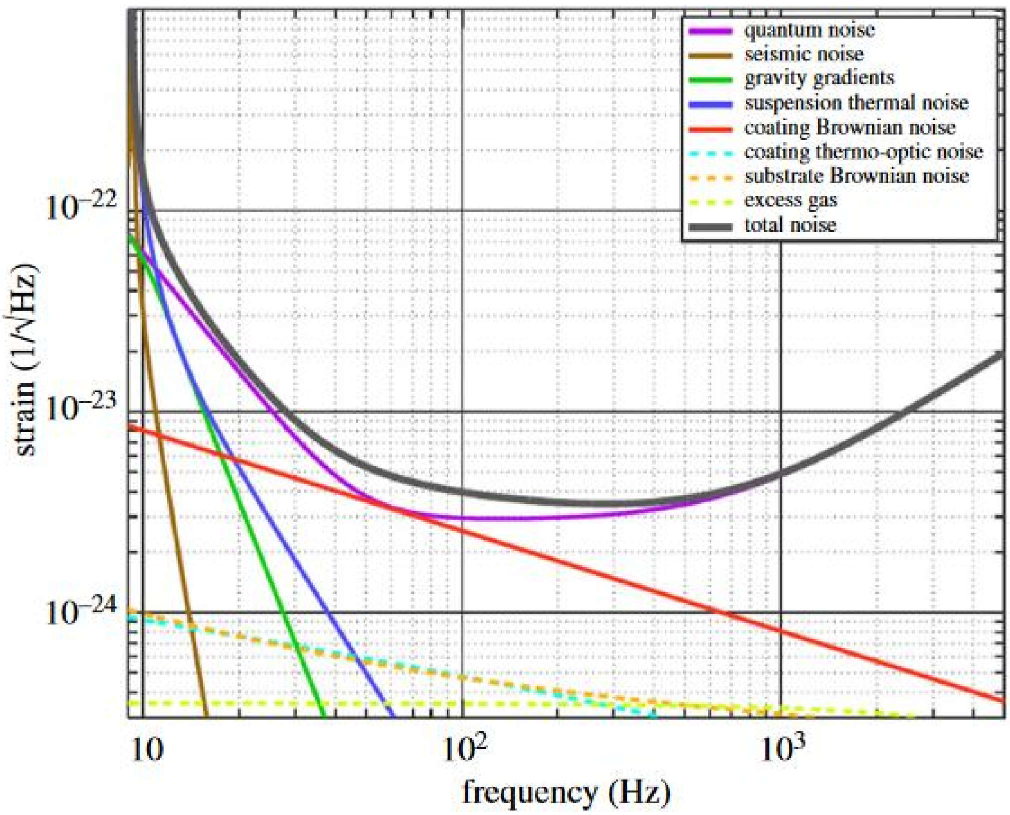

Figura 1: *Noise budget* in un interferometro Advanced LIGO con i contributi delle sorgenti di rumore rilevanti [Heu18].

[1] Gli interferometri utilizzati riescono a misurare differenze di lunghezza nell'ordine del decimillesimo di diametro di un protone.

2 Teoria quantistica della luce

2.1 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Per poter trattare fenomeni prettamente quantistici è necessario studiare il campo elettromagnetico dal punto di vista quantistico calcolandone il valore di aspettazione e le relative incertezze.

Classicamente si può descrivere un campo elettromagnetico con ampiezze complesse a_j e a_j^* in funzione della posizione r e del tempo t [Che07]

$$E(r,t) = \mathrm{i}\sum_j \left(\frac{\hbar\tilde{\omega}}{2\epsilon_0}\right)[a_j(r)u_j e^{-\mathrm{i}\omega_j t} - a_j^*(r)u_j^* e^{+\mathrm{i}\omega_j t}], \tag{2.1}$$

con $\hbar$ costante di Planck su 2π, ϵ_0 la costante dielettrica nel vuoto, $\tilde{\omega}$ la frequenza angolare e u_j sono funzioni che contengono informazioni sulla polarizzazione e la fase.

Per un campo con una certa frequenza $\omega_j = \omega$, la (2.1) può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} E(r,t) &= E_0[a(r)e^{-\mathrm{i}\omega t} - a(r)^* e^{+\mathrm{i}\omega t}]p(r) = \\ &= E_0[X_1\cos(\omega t) - X_2\sin(\omega t)]p(r,t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

esplicitando $a(r) = a_0(r)e^{i\phi(r)}$, con $a_0(r) \in \Re$ e $\phi(r)$ che contiene le informazioni sulla fase del fronte d'onda e sulla fase assoluta rispetto ad un'onda di riferimento. $p(r,t)$ è il vettore di polarizzazione dipendente anche da t, mentre X_1 e X_2 sono le ampiezze delle quadrature:

$$\begin{aligned} X_1(r) &= a^*(r) + a(r) \\ X_2(r) &= \mathrm{i}[a^*(r) - a(r)] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tramite quantizzazione canonica è possibile convertire il campo elettrico classico in un operatore quantistico. Nello specifico si sostituiscono le ampiezze a e a^* rispettivamente con gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$. In questo si va ad evidenziare un analogo nel mondo quantistisco tra il campo elettromagnetico e l'oscillatore armonico poichè $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ sono equivalenti agli operatori di creazione e distruzione

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega\hat{q} + \mathrm{i}\hat{p}) \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega\hat{q} - \mathrm{i}\hat{p}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

da cui derivano anche le relazioni di commutazione

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= 1 \\ [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] &= 0 \\ [\hat{a}, \hat{a}] &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Analogamente alle ampiezze nel caso classico, posso utilizzare questi operatori per definire gli operatori di quadratura

$$\begin{aligned} \hat{X}_1(r) &= \hat{a}^\dagger + \hat{a} \\ \hat{X}_2(r) &= \mathrm{i}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Conoscendo le relazioni di commutazione (2.5) di $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ è immediato calcolare

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = [\hat{a}^\dagger + \hat{a}, \mathrm{i}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})] = -\mathrm{i}[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] + \mathrm{i}[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 2\mathrm{i} \tag{2.7}$$

che implica, per principio di indeterminazione di Heisenberg, un limite inferiore al prodotto delle incertezze delle quadrature:

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq 1. \tag{2.8}$$

Come si vedrà, da questa relazione di indeterminazione deriva il limite quantistico di risoluzione degli interferometri.

Servendosi della quantizzazione canonica e delle condizioni al contorno delle funzioni u_j, si trova che l'Hamiltoniana quantizzata di (2.1) è

$$\hat{H} = \sum_j \hbar\omega_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right) \tag{2.9}$$

dove $\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ rappresenta il numero di fotoni con energia $\hbar\omega_j$, mentre l'addizionale $\frac{1}{2}\hbar\omega_j$ è l'energia di punto zero del campo elettromagnetico.

2.2 Stati di Fock

Per poter calcolare il valor medio del campo elettromagnetico quantistico è necessario inoltre definire lo stato in cui si trova la luce.

Una possibilità è quella di usare gli stati di Fock, ovvero $|\, n_j\rangle$ che rappresentano lo stato in base al numero di fotoni. Questi sono gli autostati degli operatori $n_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$. Quindi il *ground state* è definito da

$$\hat{n}_j |0\rangle = 0, \tag{2.10}$$

che combinato con l'equazione (2.9) dà l'energia di ground state

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_j \hbar\omega_j \neq 0 \tag{2.11}$$

Questo risultato predice correttamente l'esistenza di fluttuazioni dell'energia nel vuoto, causa di rumore quantistico di cui tener conto nello studio dei contributi agli errori.

Tuttavia nel momento in cui si calcola il valor medio del campo elettrico con gli stati di Fock si incorre in problemi. Infatti nonostante abbia un'energia ben definita per ogni stato $|\, n_j\rangle$, come si vede in (2.9), quando si calcola esplicitamente il valor medio dell'operatore campo elettrico si trova un valore nullo: come segue da (2.2) i termini del campo elettromagnetico sono moltiplicati per uno dei due operatori di quadratura $\hat{X}_1$ o $\hat{X}_2$. L'operazione di media del campo elettromagnetico può essere quindi studiata analizzando la media di questi operatori.

Prendendo ad esempio la media di $\hat{X}_1$

$$\langle n|\hat{X}_1|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle + \langle n|\hat{a}|n\rangle \tag{2.12}$$

ma $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ agiscono come gli operatori di creazione e distruzione, ovvero

$$\begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned} \tag{2.13}$$

Questo significa che

$$\langle n|\hat{X}_1|n\rangle = \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle + \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle = 0 \tag{2.14}$$

poichè $\langle n_i|n_j\rangle = \delta_{ij}$ essendo stati ortogonali. Per cui utilizzando gli stati di Fock si ottiene che per $n \neq 0$ il valore del campo elettrico è nullo, in chiaro contrasto con il caso classico che sappiamo oscillare sinusoidalmente nel tempo in un punto fisso dello spazio.

2.3 Stati coerenti

Un descrizione più appropriata del comportamento di un campo elettromagnetico è data dagli stati coerenti $|\alpha\rangle$ che si possono ottenere applicando un operatore di *displacement* $\hat{D}(\alpha)$ allo stato di vuoto $|0\rangle$

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \qquad \text{con} \qquad \hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}, \tag{2.15}$$

in cui α è un numero complesso adimensionale. $|\alpha\rangle$ sono gli autostati degli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned} \hat{a}|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle \\ \langle\alpha|\hat{a}^\dagger &= \langle\alpha|\alpha^* \end{aligned} \tag{2.16}$$

dove lo stato rimane uguale prima e dopo l'applicazione di $\hat{a}$ o $\hat{a}^\dagger$, questo fa sì che per gli stati coerenti non valga il discorso fatto nel paragrafo precedente e la media del campo elettromagnetico negli stati $|\alpha\rangle$ sia $\neq 0$. Più rigorosamente, si può espandere $|\alpha\rangle$ come

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle \tag{2.17}$$

dato che $|n\rangle$ come si è visto costituisce una base completa ortogonale. A partire da questa forma, $|\alpha\rangle$ può essere riscritto come [Kha11]

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{2.18}$$

Usando le coordinate polari, α è quindi separabile in un modulo ed una fase:

$$\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{2.19}$$

e il valore di aspettazione del campo elettrico in direzione x negli stati $|\alpha\rangle$ risulta essere

$$\langle\alpha|\hat{E}_x(r,t)|\alpha\rangle = 2|\alpha|\sqrt{\left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right)}\sin(\omega t - kr - \theta) \tag{2.20}$$

ovvero la parte reale del campo elettrico classico (2.1). Si verifica quindi che il valore di aspettazione del campo elettrico calcolato negli stati coerenti non è identicamente nullo per ogni t.

Confrontando la descrizione di α data in (2.19) con il campo elettrico in (2.2), si trova che

$$|\alpha| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \tag{2.21}$$

e

$$\begin{aligned} X_1 &= |\alpha|\cos(\theta) \\ X_2 &= |\alpha|\sin(\theta) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Uno stato coerente può quindi essere rappresentato come un fasore di modulo $|\alpha|$ e angolo θ come rappresentato in figura 2 A), dove l'area (in questo caso circolare) sfumata sulla punta del fasore rappresenta l'incertezza quantistica. Sia dalla figura che da (2.22) è evidente che nessuna delle due quadrature ha più "peso" dell'altra e quindi le loro incertezze devono essere identiche: un calcolo esatto di $\Delta X_{1,2}^2 = \langle\alpha|X_{1,2}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|X_{1,2}|\alpha\rangle^2$ risulta infatti che $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1$. Perciò vale

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = 1 \tag{2.23}$$

ovvero gli stati coerenti sono stati di minima incertezza.

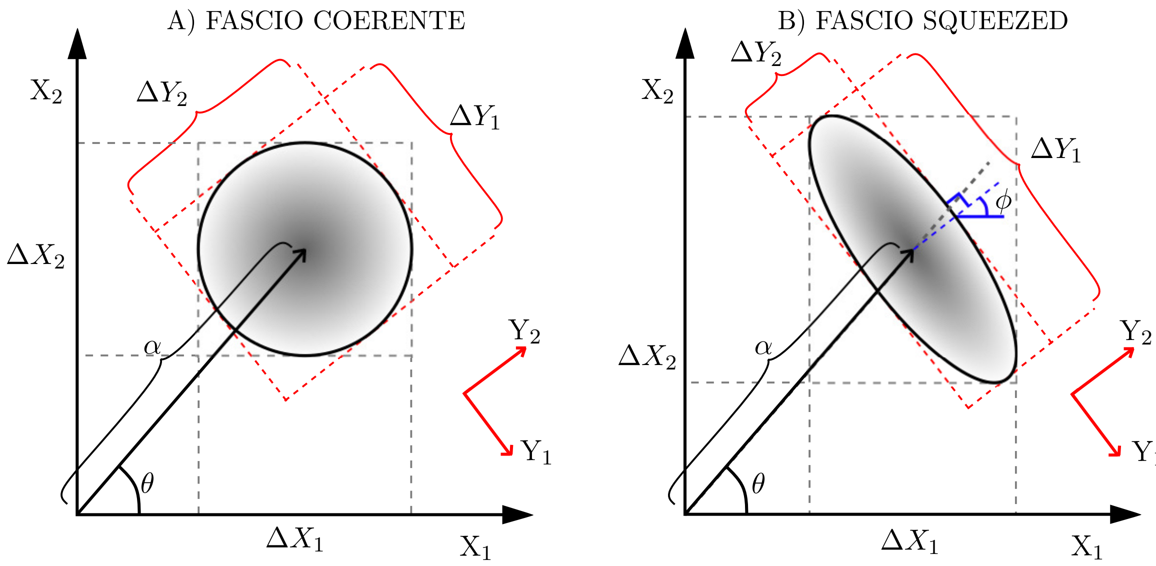

Figura 2: Rappresentazione pittoriale degli stati coerenti di squeezing. L'indeterminazione quantistica dello stato è rappresentata dall'area grigia. Per gli stati coerenti (a sinistra) l'area di indeterminazione è una circonferenza e quindi le varianze delle quadrature $X_{1,2}$ sono identiche. Nel caso di luce squeezed l'area di indeterminazione è un'ellisse e quindi le varianze delle quadrature sono diverse. Il fattore di squeezing e^{-r} è dato dall'asse minore dell'ellisse mentre quello di antisqueezing e^{r} da quello maggiore.

2.4 Luce squeezed

Gli stati *squeezed* sono stati di minima incertezza in cui le varianze delle due quadrature, contrariamente al caso degli stati coerenti, sono sbilanciate. In particolare visto che si tratta di uno stato di minima incertezza una quadratura avrà varianza maggiore e una inferiore a quella dello stato coerente. In un piano bidimensionale questo può essere visualizzato come un'area di incertezza ellittica invece che circolare (vedi figura 2).

Vi sono due stati squeezed principali: *bright* e *vacuum*. Dato l'operatore di squeezing [Che07]

$$\hat{S}(r,\phi) = \exp\left(\frac{1}{2}re^{-2\mathrm{i}\phi}\hat{a}^2 - \frac{1}{2}re^{+2\mathrm{i}\phi}\hat{a}^{\dagger 2}\right) \tag{2.24}$$

lo stato di *vacuum squeeze* è definito dall'applicazione dell'operatore di squeezing allo stato vuoto

$$|0,r,\phi\rangle = \hat{S}(r,\phi)|0\rangle. \tag{2.25}$$

Lo stato di *bright squeeze* invece, similarmente a quanto visto per la generazione degli stati coerenti, si ricava da

$$|\alpha,r,\phi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(r,\phi)|0\rangle \tag{2.26}$$

dove $\hat{D}(\alpha)$ è l'operatore di displacement visto nella formula (2.15), ϕ è l'angolo di squeezing con $\phi = 0$ indica uno squeezing in ampiezza mentre $\phi = \pi/2$ corrisponde ad uno squeezing della fase, r è invece il fattore di squeezing.

Nel caso di vacuum squeezing per tener conto dell'angolo di quadratura è comodo introdurre dei nuovi operatori di quadratura $\hat{Y}_1$ e $\hat{Y}_2$ che verranno ruotati di ϕ rispetto a $\hat{X}_1$ e $\hat{X}_2$ (introdotti in (2.7)). Si definisce quindi una nuova ampiezza complessa

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha e^{i\phi} \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle\hat{X}_1\rangle + \langle\hat{X}_2\rangle\right)e^{i\phi} \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle\hat{Y}_1\rangle + \langle\hat{Y}_2\rangle\right).\end{aligned} \tag{2.27}$$

L'operatore di squeezing $\hat{S}(r, \phi)$ attenua uno degli operatori di quadratura $Y_{1,2}$ mentre l'altro viene amplificato. Si verifica che $\hat{Y}_1$ e $\hat{Y}_2$ soddisfano il principio di indeterminazione di Heisenberg (2.8) e sono effettivamente descritte da stati di minima incertezza essendo

$$\begin{aligned} \Delta Y_1 &= e^{+r} \\ \Delta Y_2 &= e^{-r} \end{aligned} \tag{2.28}$$

e quindi

$$\Delta Y_1 \Delta Y_2 = 1. \tag{2.29}$$

3 Spettro del rumore quantistico in un interferometro di Michelson

3.1 Shot noise e radiation pressure

La figura 3 rappresenta un interferometro di Michelson, ovvero uno strumento con due bracci perpendicolari della stessa lunghezza alla cui intersezione si trova un *beam splitter* che separa il laser entrante in due fasci perpendicolari. Ognuno dei due fasci percorre avanti ed indietro il relativo braccio, dopo essere stato riflesso dagli specchi alle estremità. Quando si ricongiungono al beam splitter interferiscono distruttivamente se i bracci hanno la stessa lunghezza. Questo fa sì che all'uscita del beam splitter, chiamata appunto *dark port*, si abbia un segnale solamente nel momento in cui varia la lunghezza relativa dei due bracci, se vi è cambiamento comune (uguale) delle lunghezze non si vedono variazioni.

Due contributi fondamentali al rumore di un interferomentro sono lo *shot noise* e la *radiation pressure*. Lo shot noise origina dalla natura discreta dei singoli fotoni del laser utilizzato nell'interferometro, la cui fluttuazione quantistica, normalmente insignificante, viene rilevata dal rivelatore. La radiation pressure è invece un rumore meccanico dovuto allo scambio di momento con gli specchi dell'interferometro nel momento in cui il fascio vi interagisce.

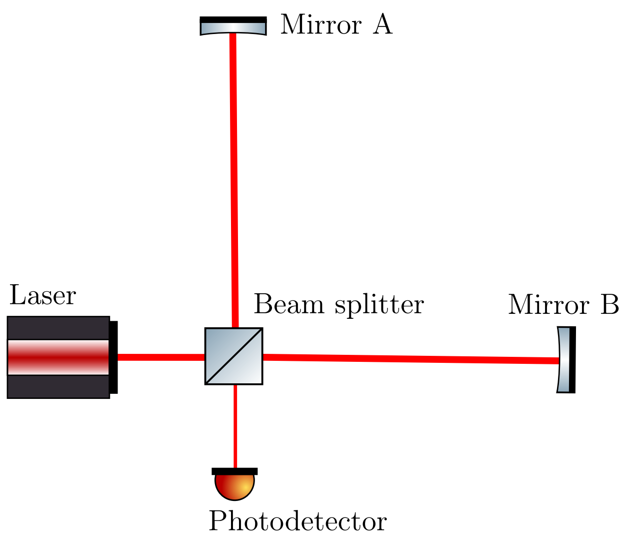

Figura 3: Schema di un semplice interferomentro di Michelson.

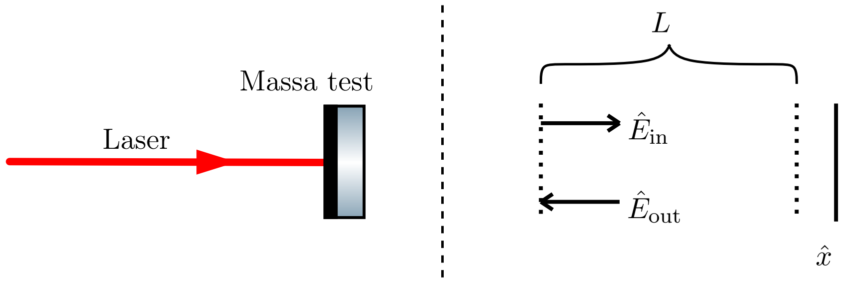

Figura 4: Schema dell'interazione tra un campo coerente ed una massa test (sinistra), rappresentazione delle quantità utilizzate nei conti (destra). L è una lunghezza di riferimento mentre $\hat{x}$ indica la posizione della massa test.

Per capire l'origine di questi contributi consideriamo inizialmente una massa singola di cui vogliamo determinare lo spostamento mediante interferometria laser. Facendo riferimento alla figura 4, si può scrivere il campo incidente come[2] [Mia10]

$$E_{\text{in}}(t) = [\sqrt{2I_0/(\hbar\omega_0)} + \hat{a}_1(t)]\cos\omega_0 t + \hat{a}_2(t)\sin\omega_0 t, \tag{3.1}$$

che comprende il contributo classico e il contributo delle fluttuazioni quantistiche: $E_{\text{in}}(t) = E_{\text{in,class}}(t) + E_{\text{in,quant}}(t)$ con

$$\begin{aligned} E_{\text{in,class}}(t) &= \sqrt{2I_0/(\hbar\omega_0)}\cos\omega_0 t \\ E_{\text{in,quant}}(t) &= \hat{a}_1(t)\cos\omega_0 t + \hat{a}_2(t)\sin\omega_0 t \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il campo uscente può essere similarmente scritto come

$$E_{\text{out}}(t) = [\sqrt{2I_0/(\hbar\omega_0)} + \hat{b}_1(t)]\cos\omega_0 t + \hat{b}_2(t)\sin\omega_0 t, \tag{3.3}$$

dove i coefficienti sono

$$\hat{b}_1(t) = \hat{a}_1(t - 2\tau), \tag{3.4}$$

$$\hat{b}_2(t) = \hat{a}_2(t - 2\tau) - 2\sqrt{\frac{2I_0}{\hbar\omega_0}}\frac{\omega_0}{c}\hat{x}(t - \tau). \tag{3.5}$$

che possono essere derivati tramite un'espansione di Taylor dato il piccolo spostamento x della massa di test. I_0 è l'ampiezza classica del campo incidente sulla massa singola, $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_2$ sono piccole fluttuazioni rispettivamente in ampiezza e fase il cui valor minimo è limitato dal principio di indeterminazione (2.8). τ è il tempo che impiega la luce ad arrivare alla massa singola.

Un eventuale segnale di spostamento nello spazio, come quelli misurati nella rivelazione di onde gravitazionali, è contenuto nella quadratura $\hat{b}_2$. (3.5) mostra anche che $\hat{b}_2$ contiene fluttuazioni di rumore che possono essere scambiate per segnale. Il generatore di queste fluttuazioni è la componente in fase del campo incidente $\hat{a}_2$, che viene chiamato shot noise.

L'equazione di moto del sistema è

$$m\ddot{\hat{x}}(t) = \hat{F}_{\text{rp}} + \hat{F}_{\text{t}} = 2\frac{I_0}{c}\left[1 + \sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{I_0}}\hat{a}_1(t - \tau)\right] + \frac{1}{2}mL\ddot{h}(t) \tag{3.6}$$

dove F_{rp} è la forza di pressione di radiazione che dipende dal quadrato del campo elettrico. Da un'espansione al primo ordine nelle $\hat{a}_{1,2}$ del quadrato del campo (3.1) risulta che F_{rp} dipende solo da $\hat{a}_1$. F_{t} sono invece forze gravitazionali.

[2] Con $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$ ampiezze di quadratura, da non confondere con gli operatori di creazione e distruzione visti in precedenza.

Allo spostamento della equazione (3.5) deve quindi essere aggiunta una componente di spostamento, derivante da (3.6), proporzionale ad $\hat{a}_1$. Questa componente viene chiamata rumore di radiation pressure.

Facendo la trasformata di Fourier di (3.5) e (3.6) si ottiene il segnale [Mia10]:

$$\Delta\hat{b}_2(\Omega) = e^{2i\Omega\tau}\hat{a}_2(\Omega) - e^{2i\Omega\tau}\kappa\hat{a}_1(\Omega), \tag{3.7}$$

nel quale si possono identificare due parti: $e^{2i\Omega\tau}\hat{a}_2(\Omega)$ relativo allo shot noise e $(-e^{2i\Omega\tau}\kappa\hat{a}_1(\Omega))$ relativo alla radiation pressure, κ è un coefficiente esplicitato in (3.9). Lo shot noise nasce da fluttuazioni della quadratura della fase $\hat{a}_2$ e nel caso di stati coerenti ha uno spettro di potenza costante $S_{\mathrm{sh}}(\Omega) = 1$, mentre la radiation pressure origina da oscillazioni della quadratura dell'ampiezza ed ha uno spettro $S_{\mathrm{rp}}(\Omega) = \kappa^2$ ed ha quindi dipendenza dalla frequenza pari a $1/\Omega^4$. Dato che il campo incidente è coerente, queste fluttuazioni sono indipendenti l'una dall'altra.

Lo spettro di potenza finale si ottiene dalla combinazione dello spettro dovuto allo shot noise e da quello dovuto alla radiation pressure, normalizzato:

$$S^h(\Omega) = \left[\frac{1}{\kappa} + \kappa\right]\frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2} \tag{3.8}$$

con

$$\kappa = \frac{8I_0\omega_0}{mc^2\Omega^2} \qquad \text{e} \qquad h_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{\frac{8\hbar}{m\Omega^2L^2}}. \tag{3.9}$$

Lo spettro di potenza ha la forma (3.8) solo nel caso di stati coerenti. Infatti lo spettro di potenza è definito come [Mia10]

$$\frac{1}{2\pi}\langle 0|\hat{O}_1(\Omega')\hat{O}_2^\dagger(\Omega)|0\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle 0|\hat{O}_1(\Omega')\hat{O}_2^\dagger(\Omega) + \hat{O}_2^\dagger(\Omega)\hat{O}_1(\Omega')|0\rangle \equiv \frac{1}{2}S_{O_1O_2}(\Omega)\delta(\Omega-\Omega') \tag{3.10}$$

per un paio di operatori $\hat{O}_1$ e $\hat{O}_2$ qualsiasi. Uno stato coerente, come espresso in (2.15), è uno stato di vuoto $|0\rangle$ a cui è applicato un operatore unitario di spostamento $\hat{D}_\alpha$. Allora, essendo $\hat{D}_\alpha$ unitario, deve valere

$$\frac{1}{2\pi}\langle 0|\hat{D}_\alpha^\dagger\hat{O}_1(\Omega')\hat{O}_2^\dagger(\Omega)\hat{D}_\alpha|0\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle 0|\hat{D}_\alpha^\dagger\hat{O}_1(\Omega')\underbrace{\hat{D}_\alpha\hat{D}_\alpha^\dagger}_{=1}\hat{O}_2^\dagger(\Omega)\hat{D}_\alpha|0\rangle \tag{3.11}$$

ovvero si riconduce all'equazione (3.10) con l'operatore $\hat{D}_\alpha^\dagger\hat{O}(\Omega')\hat{D}_\alpha$ invece di $\hat{O}$. La fisica rimane quindi invariata ed è giustificato l'uso di (3.10) per il calcolo dello spettro di potenza degli stati coerenti.

Non è tuttavia utilizzabile per stati squeezed. Uno stato squeezed è definito come (2.26) ma, nonostante l'operatore di squeezing sia unitario, $\hat{S}(r,\phi)$ e $\hat{D}_\alpha$ non sono compatibili. Non si può quindi riscrivere l'equazione dello spettro di potenza come è stato fatto per il caso degli stati coerenti, questo implica che $S^h(\Omega)$ ha una forma differente per gli stati squeezed, come si vedrà nel parafrafo 4.2. La formula (3.8) può essere minimizzata, infatti per $\kappa = 1$ assume il valore minimo h_{SQL}^2 che prende il nome di *standard quantum limit*.

3.2 Rumore quantistico in un interferometro di Michelson

Per vedere come lo shot noise e la radiation pressure influenzano il segnale alla dark port, si studia il campo entrante ed uscente dal beam splitter. La figura 5 è uno schema dei campi entranti ed uscenti dal beam splitter di un interferometro di Michelson. Similarmente a (3.1), i campi entranti incidenti sul beam splitter sono [Mia10]

$$\hat{E}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{in}}(t) = [\sqrt{2I_0/(\hbar\omega_0)} + \hat{c}_1(t)]\cos\omega_0 t + \hat{c}_2(t)\sin\omega_0 t \tag{3.12}$$

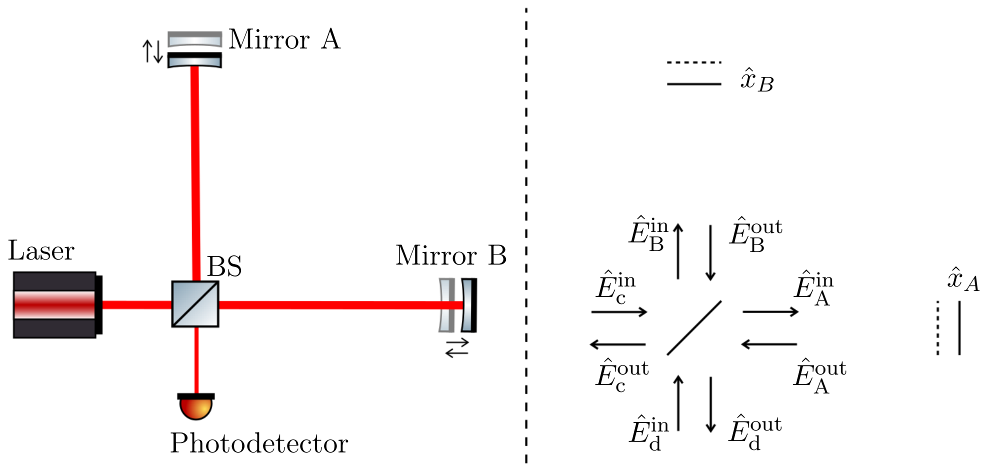

Figura 5: Schema di un interferometro semplice di Michelson con effetto di un'onda gravitazionale che sposta la posizione degli specchi in antifase (sinistra). Rappresentazione dei campi entranti ed uscenti dal beam splitter (destra).

e

$$\hat{E}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{in}}(t) = \hat{a}_1(t)\cos\omega_0 t + \hat{a}_2(t)\sin\omega_0 t \tag{3.13}$$

rispettivamente quello dovuto al laser e il campo di vuoto entrante dalla dark port in assenza del laser.

I fasci uscenti dal beam splitter, diretti verso la massa A e B, sono

$$\hat{E}_{\mathrm{A,B}}^{\mathrm{in}}(t) = \frac{\hat{E}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{in}}(t) \mp \hat{E}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{in}}(t)}{\sqrt{2}}. \tag{3.14}$$

Considerando che $\hat{E}_{\mathrm{A,B}}^{\mathrm{in}}(t)$ raggiungono l'estremità del braccio di lunghezza L dopo un tempo $\tau = L/c$, i campi riflessi dagli specchi incidenti sul beam splitter sono

$$\hat{E}_{\mathrm{A,B}}^{\mathrm{out}}(t) = \hat{E}_{\mathrm{A,B}}^{\mathrm{in}}(t)(t - 2\tau - 2\hat{x}_{\mathrm{A,B}}/c). \tag{3.15}$$

I due campi si ricombinano al beam splitter ed alla dark port arriva il fascio

$$\hat{E}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{in}}(t) = \frac{\hat{E}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{out}}(t) \mp \hat{E}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{out}}(t)}{\sqrt{2}} = [\hat{b}_1(t)\cos\omega_0 t + \hat{b}_2(t)\sin\omega_0 t] \tag{3.16}$$

approssimato al prim'ordine in x si ottiene

$$\hat{b}_1(t) = \hat{a}_1(t - 2\tau), \tag{3.17}$$

$$\hat{b}_2(t) = \hat{a}_2(t - 2\tau) - \sqrt{\frac{2I_0}{\hbar\omega_0}}\frac{\omega_0}{c}\hat{x}_d(t - \tau), \tag{3.18}$$

dove $\hat{x}_d(t) = \hat{x}_{\mathrm{B}}(t) - \hat{x}_{\mathrm{A}}(t)$ la componente differenziale del moto relativa ad entrambi i bracci. Essendo $\hat{x}_d(t)$ il segnale di nostro interesse, si viene ad evidenziare come esso contenga la quadratura $\hat{a}_2(t)$ relativa allo shot noise.

Al primo ordine nelle fluttuazioni $\hat{a}_{1,2}$ e $\hat{c}_{1,2}$ la pressione di radiazione diventa

$$\hat{F}_{\mathrm{A,B}} = 2\frac{I_0}{c}\left[1 + \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{I_0}}\frac{\hat{c}_1(t-\tau) \mp \hat{a}_1(t-\tau)}{\sqrt{2}}\right], \tag{3.19}$$

Similarmente a quanto visto nel paragrafo precedente, si può scrivere l'equazione del moto della componente differenziale, considerando le forze gravitazionali come $\hat{F}^h_{\mathrm{A,B}} = \mp mL\ddot{h}(t)/2$.

$$m\ddot{\hat{x}}_d(t) = \hat{F}_{\mathrm{B}} - \hat{F}_{\mathrm{A}} + \hat{F}^h_{\mathrm{B}} - \hat{F}^h_{\mathrm{A}} = 2\frac{\sqrt{2\hbar\omega_0 I_0}}{c}\hat{a}_1(t-\tau) + mL\ddot{h}(t) \tag{3.20}$$

Come nel caso della singola massa, unendo le equazioni (3.18) e (3.20) si vede che la quadratura $\hat{a}_2$ contiene l'eventuale segnale gravitazionale con incluse fluttuazioni di rumore di tipo shot noise e radiation pressure. I generatori di questo rumore sono rispettivamente $\hat{a}_2$ e $\hat{a}_1$ che sono le fluttuazioni delle quadrature del campo "vuoto" che entra dalla dark port. Le fluttuazioni di ampiezza e fase del laser di ingresso ($\hat{c}_1$,$\hat{c}_2$), se i bracci hanno lunghezza uguale e le masse degli specchi sono le medesime, non giocano nessun ruolo in quanto nel segnale di spostamento differenziale si cancellano.

Le equazioni (3.4), (3.5) e (3.6) sono rispettivamente equivalenti alle equazioni (3.17), (3.18) e (3.20) nel caso in cui si identifichi $\hat{x}_d(t)$ con $2\hat{x}$ utilizzato nel paragrafo precedente. Dato che un'onda gravitazionale agisce sulle braccia dell'interferometro espandendo un braccio e contraendo l'altro, anche il segnale aumenta di un fattore 2 nella visione differenziale. Il segnale ottenuto nel caso di massa singola, (3.8), ha la stessa forma anche nel caso di un interferometro ma con κ è dimezzato:

$$S^h(\Omega) = \left[\frac{1}{\kappa} + \kappa\right]\frac{h^2_{\mathrm{SQL}}}{2} \tag{3.21}$$

dove però

$$\kappa = \frac{4I_0\omega_0}{mc^2\Omega^2} \qquad \text{e} \qquad h_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{\frac{4\hbar}{m\Omega^2 L^2}}. \tag{3.22}$$

in accordo con quando precisato. Ancora una volta la (3.21) è minimizzata per $\kappa = 1$ (standard quantum limit). Si usa inoltre definire Ω_{SQL} che è la frequenza in cui lo shot noise eguaglia la radiation pressure. Dunque

$$1 = \kappa = \frac{8I_0\omega_0}{mc^2\Omega^2} \qquad \text{allora} \qquad \Omega_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{\frac{8I_0\omega_0}{mc^2}}. \tag{3.23}$$

Ω_{SQL} è un parametro proprio di ogni interferometro.

4 Spettro del rumore quantistico in un interferometro moderno

4.1 La visione sideband

Per studiare la fluttuazioni quantistiche esercitate su un campo elettromagnetico, è utile considerare il caso di un campo elettrico con modulazione di fase ed ampiezza. Consideriamo un campo elettrico con ampiezza modulata da un indice m, [Chu13]

$$\begin{aligned} E_a(t) &= E_0 e^{\mathrm{i}\omega_0 t}\big(1 + m\cos(\Omega t)\big) \\ &= E_0 e^{\mathrm{i}\omega_0 t}\left(1 + \frac{m}{2}e^{+\mathrm{i}\Omega t} + \frac{m}{2}e^{-\mathrm{i}\Omega t}\right), \end{aligned} \tag{4.1}$$

può essere considerato come la somma di tre campi: un *carrier* con ampiezza E_0 e frequenza ω_0, e due *sideband* con ampiezza $E_0\frac{m}{2}$ e frequenza $\omega_0 \pm \Omega$.

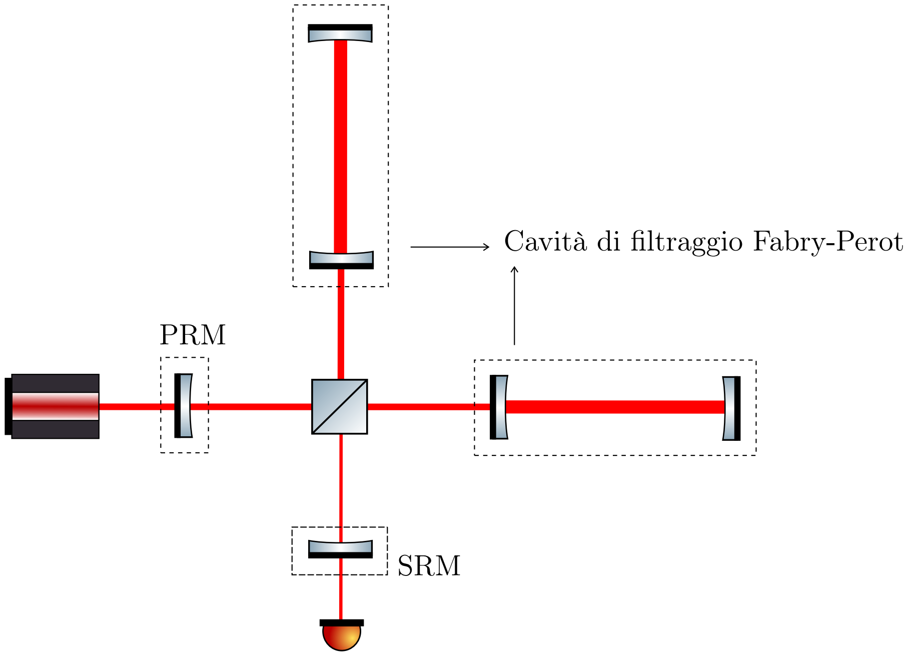

Figura 6: Rappresentazione schematica di un interferometro con cavità di filtraggio Fabry-Perot, Power Recycling Mirror e Signal Recycling Mirror.

A sua volta un campo elettrico modulato in fase[3]

$$\begin{aligned} E_f(t) &= E_0 e^{\mathrm{i}(\omega_0 t + m\cos(\Omega t))} \\ &\approx E_0 e^{\mathrm{i}\omega_0 t}\big(1 + m\cos(\Omega t)\big) \\ &= E_0 e^{\mathrm{i}\omega_0 t}\left(1 + \mathrm{i}\frac{m}{2}e^{+\mathrm{i}\Omega t} + \mathrm{i}\frac{m}{2}e^{-\mathrm{i}\Omega t}\right), \end{aligned} \tag{4.2}$$

dove si nota nuovamente una separazione in tre campi in cui però l'ampiezza delle sideband, $iE_0\frac{m}{2}$, è complessa.

In generale un campo elettrico reale può essere scritto come

$$E = E_0(1 + a_m(t))e^{\mathrm{i}(\omega t + \phi_m(t))} \tag{4.3}$$

dove $a_n(t)$ e $\phi_n(t)$ sono il rumore in ampiezza ed in fase. Essi possono avere componenti diversi ad ogni frequenza Ω e quindi in generale E può essere visto come somma a tutte le frequenze Ω di contributi in ampiezza (4.1) e fase (4.2) dove l'indice m è una variabile aleatoria.

La fluttuazione in ampiezza o frequenza può essere dunque vista come un campo carrier a cui vengono sommati vettorialmente due ulteriori campi sideband che, a seconda del tipo di modulazione, possono ruotare lungo l'asse reale o complesso con una frequenza $\omega_0 \pm \Omega$ (nel sistema di riferimento in cui il carrier è fisso).

Questa trattazione può essere estesa al caso delle quadrature visto che sono legate alle fluttuazioni in ampiezza e fase come [Mia10]

$$\begin{aligned} \hat{E}(z,t) &= (A + \hat{a}_1(z,t))\cos\omega_0 t + \hat{a}_2(z,t)\sin\omega_0 t \\ &\approx A\left[1 + \frac{\hat{a}_1(z,t)}{A}\right]\cos\left[\omega_0 t - \frac{\hat{a}_2(z,t)}{A}\right] \end{aligned} \tag{4.4}$$

[3] Nella (4.2) è stata utilizzata l'approssimazione $m \ll 1$.

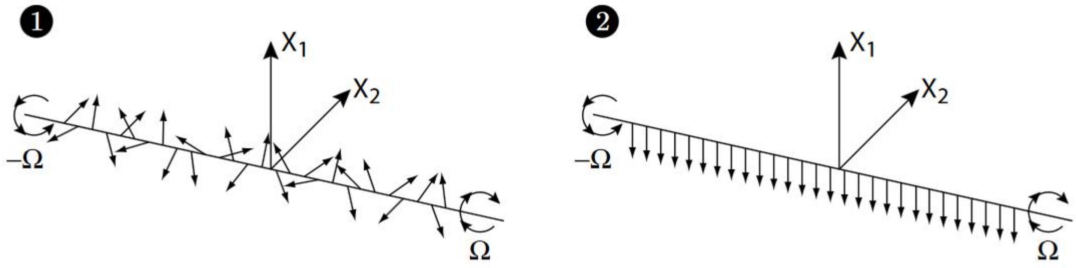

Figura 7: Rappresenzione sideband di un fascio coerente (sinistra) e un fascio con squeezing in fase (destra). Il fascio coerente è descritto da fasori, ognuno collocato ad una specifica frequenza Ω, che rappresentano fluttuazioni quantistiche casuali a tale frequenza. Data una Ω, in un fascio coerente le fluttuazioni dei fasori sono scorrelate tra loro per cui i fasori possono oscillare allo stesso modo sia in ampiezza che in fase. Un fascio squeezed invece introduce una correlazione tra i fasori e si rappresenta con vettori in direzione X_1 che fluttuano attorno a quella posizione. Un fascio antisqueezed, non rappresentato in figura, verrebbe indicato con vettori in direzione X_2 con relative fluttuazioni. [Chu13]

con A ampiezza del campo.

Quantisticamente si può quindi pensare alle sideband come a fluttuzioni casuali nel piano delle quadrature X_1 e X_2 rispettivamente alle aree di incertezza che possono essere squeezed o non (sezione 2.4, figura 2). La visione sideband del rumore quantistico comprende dunque le fluttuazioni a tutte le frequenze $\pm\Omega$.

La figura 7 mostra la differenza tra un fascio coerente e un fascio squeezed nella visione sideband.

4.2 Rumore quantistico in un interferometro di Michelson con squeezing

Per un interferometro semplice di Michelson, la presenza di un fascio squeezed con operatore di squeezing $\hat{S}$ modifica il rumore (3.7), e quindi nello specifico $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$ come

$$\begin{aligned}\hat{S}^\dagger\hat{a}_1\hat{S} &= \hat{a}_1(\cosh r + \sinh r\,\cos\phi) - \hat{a}_2\sinh r\,\sin 2\phi\\ \hat{S}^\dagger\hat{a}_2\hat{S} &= \hat{a}_2(\cosh r - \sinh r\,\cos\phi) - \hat{a}_1\sinh r\,\sin 2\phi\end{aligned} \tag{4.5}$$

dove r è il fattore di squeezing e ϕ l'angolo di squeezing.

Quindi, utilizzando la (3.10) con O_1 e O_2 pari all'espressione (3.7), lo spettro di potenza prende la forma

$$S^h(\Omega) = \frac{S_{\Delta b_2}(\Omega)}{|T|^2} = \frac{2\hbar}{ML^2\Omega^2}\left[\kappa + \frac{1}{\kappa}\right](\cosh 2r + \cos(\phi+\alpha_p)\sinh 2r). \tag{4.6}$$

dove $\alpha_p = \arctan(\kappa)$ è un angolo dipendente dalla frequenza Ω delle sideband. T invece è la funzione di trasferimento dal segnale di un'onda gravitazionale alla quadratura in fase in output[4], e viene utilizzata come normalizzazione per passare da $S_{\Delta b_2}(\Omega)$ a $S^h(\Omega)$.

In particolare se $\cos(\phi+\alpha_p) = -1$, e quindi se $\phi = \pi - \alpha_p$, allora

$$S^h(\Omega) = \frac{2\hbar}{ML^2\Omega^2}\left[\kappa + \frac{1}{\kappa}\right]\mathrm{e}^{-2r} \tag{4.7}$$

[4] Conoscendo (3.5), si può definire $\langle b_2(\Omega)\rangle \equiv Th$ e scrivere

$$T = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega\tau}\sqrt{2\kappa}\frac{1}{h_{\mathrm{SQL}}},$$

che indica una proporzionalità tra la modulazione in fase in output e il segnale gravitazionale, ritardato di una costante di tempo τ.

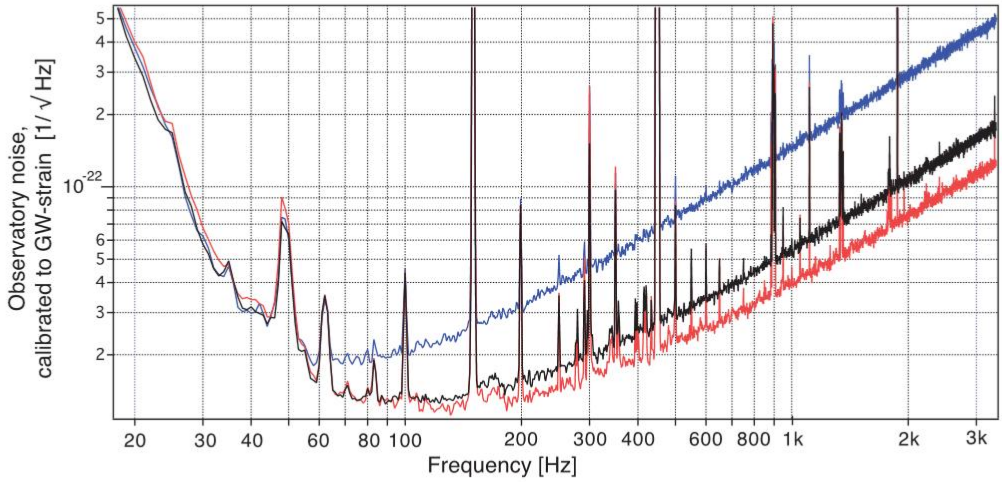

Figura 8: Misurazioni della sensibilità dell'interferometro Advanced Virgo con l'utilizzo di luce squeezed (rosso) e antisqueezed (blu). La curva nera è stata misurata in assenza di squeezing [Ace+19].

è lo spettro di potenza minimizzato per un fascio con squeezing dipendente dalla frequenza. (4.7) è l'equivalente dell'espressione (3.21) per il rumore quantistico standard soppresso per il termine dipendente dallo squeezing e^{-2r}. Scegliendo questo angolo di squeezing ideale si ottiene una riduzione del quantum noise su tutta la banda. Questo viene chiamato *frequency dependent squeezing* (FDS). Consideriamo adesso due angoli di squeezing ϕ indipendenti dalla frequenza: $\phi = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Se $\phi = 0$, (4.6) ha una dipendenza

$$S^h(\Omega) = \frac{2\hbar}{ML^2\Omega^2}\left[\kappa e^{+2r} + \frac{e^{-2r}}{\kappa}\right] \tag{4.8}$$

dove κe^{2r} è la componente di radiation pressure e si vede che aumenta esponenzialmente all'aumentare del fattore di squeezing, mentre e^{-2r}/κ è lo shot noise che viceversa viene diminuito esponenzialmente. Quindi con uno squeezing di angolo ϕ si minimizza lo shot noise a spese della radiation pressure.

Se $\phi = \frac{\pi}{2}$ invece

$$S^h(\Omega) = \frac{2\hbar}{ML^2\Omega^2}\left[\kappa e^{-2r} + \frac{e^{+2r}}{\kappa}\right] \tag{4.9}$$

ovvero ritrovo la situazione opposta a $\phi = 0$: la radiation pressure viene abbassata esponenzialmente mentre lo shot noise aumenta.

Uno squeezing di angolo $\phi = 0$ viene semplicemente chiamato squeezing, mentre quello di angolo $\phi = \frac{\pi}{2}$ si dice antisqueezing.

La figura 8 mostra la sensibilità dell'interferometro Advanced Virgo per fascio squeezed (rosso), antisqueezed (blu) e una misura di riferimento senza squeezing (nero). Come si nota anche dalla dipendenza delle componenti del rumore dalla frequenza Ω, un fascio squeezed riduce il rumore ad alte frequenze e lo aumenta a basse frequenze, mentre un fascio antisqueezed agisce in modo opposto.

Nell'interferometro Advanced Virgo l'effetto dell'utilizzo di un fascio con squeezing in fase indipendente dalla frequenza è più evidente ad alte frequenze perchè a basse frequenze dominano altri tipi di rumore, come il rumore tecnico interno allo stesso strumento, e questo fa sì che la radiation pressure abbia un impatto minore rispetto allo shot noise. Infatti le tre curve di sensibilità dello strumento molto meno separate per frequenze $\Omega \lesssim 70\text{Hz}$. In futuro però,

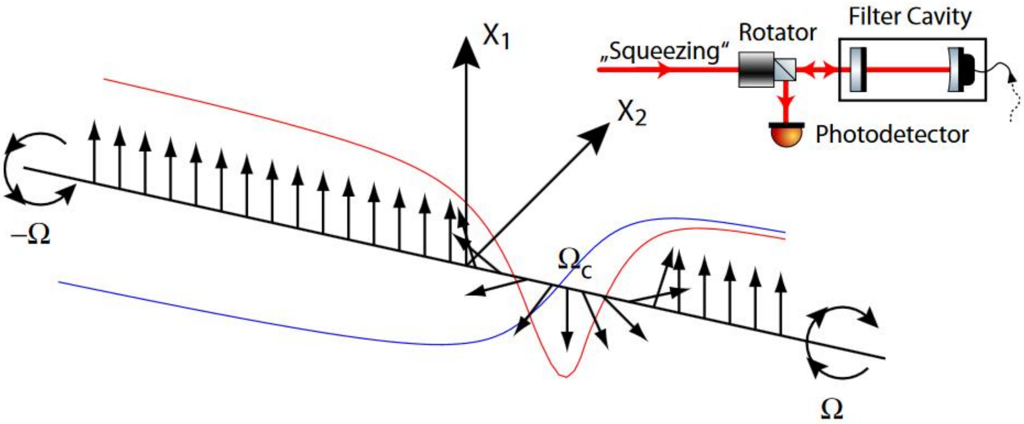

Figura 9: Rappresenzazione in visione sideband dell'azione di una cavità ottica Fabry-Perot detuned su un campo squeezed. In rosso è indicata l'ampiezza della luce riflessa ed in blu la fase della luce riflessa, entrambe in funzione della frequenza. In particolare si mette in evidenza come i fasori ruotino nello spazio delle quadrature per valori di Ω vicini alla frequenza di risonanza della cavita $\Omega_{\rm fc}$. In alto a destra è rappresentato schematicamente l'apparato ottico sperimentale.

con il progresso tecnologico della strumentazione e quindi con la diminuzione del rumore tecnico di fondo, la componente del rumore dovuta alla radiation pressure diventerà sempre più significativa.

Si nota inoltre che l'antisqueezing peggiora lo shot noise meno di quanto lo squeezing lo migliori, infatti la curva blu è significativamente più distante dalla nera di quanto lo sia invece la rossa. Questo è dovuto a perdite ottiche interne all'interferometro che hanno un impatto maggiore sullo squeezing che sull'antisqueezing, come si vedrà nel paragrafo 5.1.

Per un miglioramento della sensibilità su tutta la banda di frequenza è dunque necessario uno squeezing dipendente dalla frequenza $\phi = \pi - \arctan(\kappa)$. Un metodo per ottenere questo ϕ è utilizzare una cavità di filtraggio, come si vedrà nei prossimi paragrafi.

4.3 Cavità di filtraggio Fabry-Perot

Un metodo per ottenere una rotazione ottimale dell'ellisse di squeezing è quello di utilizzare una cavità Fabry-Perot. Un fascio di luce squeezed indipendente dalla frequenza è inviato ad una cavità Fabry-Perot di risonanza $\omega_{\rm fc}$ leggermente diversa dalla frequenza del campo carrier ω_0

$$\Delta\omega_{\rm fc} = \omega_{\rm fc} - \omega_0 \neq 0 \tag{4.10}$$

In figura 9 è rappresentata l'azione di una cavità di Fabry-Perot *detuned* su un campo squeezed in visione sideband. La cavità detuned modifica il campo ruotando i fasori in base alla frequenza Ω grazie alla relazione di dispersione della luce riflessa dalla cavità di filtraggio. Per frequenze attorno a $\omega_{\rm fc}$ le quadrature di squeezing cambiano in modo continuo da ampiezza a fase, per tornare a poi uno squeezing in ampiezza. Questo comportamento può essere interpretato come la rotazione dell'ellisse di squeezing nello spazio delle quadrature. In particolare il fasore alla frequenza di risonanza viene ruotato di 180° e mantiene quindi uno squeezing in ampiezza.

La cavità di filtraggio Fabry-Perot riceve quindi un campo squeezed indipendente dalla frequenza con una determinata frequenza carrier ω_0 in base alla quale ruota l'ellisse di squeezing e riduce le incertezze in fase ed in ampiezza del campo. Per migliorare la sensibilità su tutto il range di frequenza in un interferometro è necessario dunque calibrare la cavità in modo tale che ad alte frequenze minimizzi lo shot noise e contemporaneamente la radiation pressure per basse frequenze, ovvero cercando di ottenere l'angolo di squeezing ottimale $\phi = \pi - \alpha_p$.

4.4 Scelta dei parametri di una cavità di filtraggio senza perdite

In questo paragrafo si vedrà quali sono i parametri che una cavità di filtraggio deve soddisfare per ottenere un angolo di squeezing dipendente dalla frequenza ottimale. Per semplicità ci si limita all'approssimazione di cavità senza perdite in un interferometro di Michelson.

Nel caso di una cavità senza perdite il campo riflesso ha uno shift in fase (vedi appendice A)

$$\alpha(\Omega) = \arg\{r_{\text{fc}}\} = \arg\left\{ r_{\text{in}} - \frac{t_{\text{in}}^2}{r_{\text{in}}} \frac{r_{\text{rt}} e^{-i\Phi(\Omega)}}{1 - r_{\text{rt}} e^{-i\Phi(\Omega)}} \right\} \tag{4.11}$$

con r_{in} e t_{in} rispettivamente la riflettività e trasmissività dello specchio di input, e r_{rt} la riflettività di *round trip*, che combina i coefficienti di riflettività dei due specchi della cavità. r_{fc} invece è la riflettività complessa della cavità di filtro (vedi appendice A). $\Delta\omega_{\text{fc}} = \omega_{\text{fc}} - \omega_0$ è il detuning della cavità rispetto alla frequenza del carrier, mentre L è la sua lunghezza.

Quindi dopo la riflessione l'operatore di distruzione della sideband diventa

$$\hat{a}^{\text{ref}}_{\Omega \pm \Delta\omega_{fc}} = \hat{a}_{\Omega \pm \Delta\omega_{fc}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\pm\Omega)} \tag{4.12}$$

che viene inserita in (2.7) e si ottengono dunque gli operatori di quadratura

$$\begin{aligned} \hat{X}_1^{\text{ref}}(\Omega) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{\text{m}}}[\hat{X}_1(\Omega)\cos\alpha_{\text{p}}(\Omega) - \hat{X}_2(\Omega)\sin\alpha_{\text{p}}(\Omega)] \\ \hat{X}_2^{\text{ref}}(\Omega) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{\text{m}}}[\hat{X}_2(\Omega)\cos\alpha_{\text{p}}(\Omega) - \hat{X}_1(\Omega)\sin\alpha_{\text{p}}(\Omega)] \end{aligned} \tag{4.13}$$

dove

$$\alpha_{\text{p}} = \frac{\alpha(\Omega) + \alpha(-\Omega)}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_{\text{m}} = \frac{\alpha(\Omega) - \alpha(-\Omega)}{2}. \tag{4.14}$$

Utilizzando infine (4.11),(4.13) e (4.14) si calcola che nella riflessione le quadrature vengono ruotate di un angolo

$$\alpha_{\text{p}} = \arctan\left(\frac{2\gamma_{\text{fc}}\Delta\omega_{\text{fc}}}{\gamma_{\text{fc}}^2 - \Delta\omega_{\text{fc}}^2 + \Omega^2}\right) \tag{4.15}$$

con γ_{fc} (vedi appendice B) la *half width half maximum* della luce trasmessa dalla cavità.

Dunque si soddisfa la condizione sull'angolo di squeezing dipendente dalla frequenza $\alpha_{\text{p}} = \arctan\kappa$ se

$$\frac{\Omega_{\text{SQL}}^2}{\Omega^2} = \frac{2\gamma_{\text{fc}}\Delta\omega_{\text{fc}}}{\gamma_{\text{fc}}^2 - \Delta\omega_{\text{fc}}^2 + \Omega^2}, \tag{4.16}$$

da cui, dividendo in due uguaglianze

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{SQL}}^2 &= 2\gamma_{\text{fc}}\Delta\omega_{\text{fc}} \\ \Omega^2 &= \gamma_{\text{fc}}^2 - \Delta\omega_{\text{fc}}^2 + \Omega^2, \end{aligned}$$

si ricava

$$\Delta\omega_{\text{fc}} = \gamma_{\text{fc}} = \Omega\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \equiv \frac{\Omega_{\text{SQL}}}{\sqrt{2}} \tag{4.17}$$

che sono quindi i parametri secondo cui calibrare la cavità per ottenere un abbassamento del rumore lungo tutta la banda di frequenza.

Nel caso in cui ci siano perdite, indicate con ϵ, la (4.17) diventa [Kwe+14]

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\text{fc}} &= \sqrt{1-\epsilon}\,\gamma_{\text{fc}} \\ \gamma_{\text{fc}} &= \sqrt{\frac{1}{(2-\epsilon)\sqrt{1-\epsilon}}\,\Omega_{\text{SQL}}^2}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

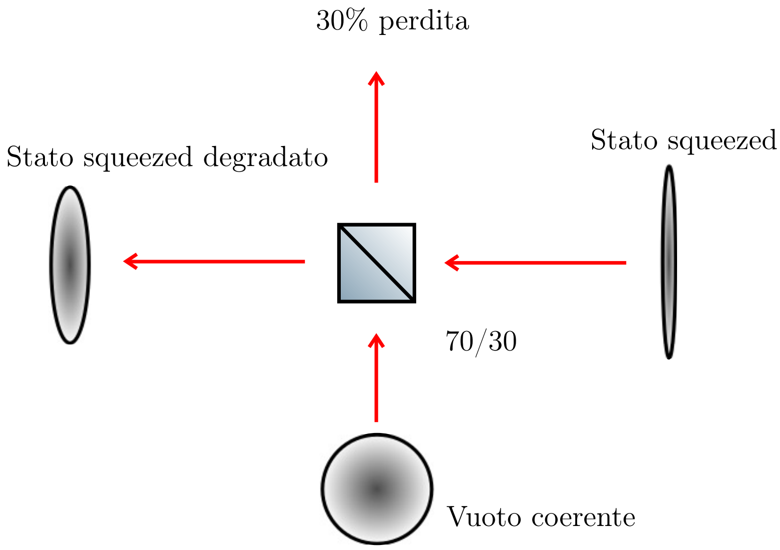

Figura 10: Rappresentazione di un modello 70%/30% utilizzato per lo studio della degradazione di un fascio squeezed in presenza di perdite ottiche.

5 Iniezione di un campo squeezed in una cavità ottica

5.1 Sorgenti di degradazione dello squeezing

Finora lo squeezing è stato trattato idealmente e non si è considerato l'impatto del rumore interno all'interferometro sull'ellisse di squeezing. Le due componenti principali a questo disturbo sono la degradazione del campo squeezed dovuto alle perdite ottiche e il *jitter* angolare.

La degradazione si può modellare mediante un modello a beam splitter che si riferisce ad un sistema con perdite del 30%. In questo modello le perdite del 30% sono modellate dalla riflessione del beam splitter al 30%, dopo questa perdita solamente il 70% della luce sarà disponibile (luce trasmessa). Nello stesso modo in cui la luce può disperdersi, si apre anche la possibilità per il campo di vuoto di entrare e combinarsi con il fascio principale. Quindi un eventuale campo squeezed in ingresso si combinerebbe con questo campo di vuoto coerente nelle proporzioni 70:30 e il tutto si conclude con un campo squeezed degradato come in figura 10. L'effetto di degradazione sulla quadratura minimizzata è tanto più evidente quanto è maggiore r e questo è anche il motivo per cui è più facile aumentare lo shot noise tramite antisqueezing che ridurlo utilizzando un campo squeezed, come si è visto in figura 8. Nella sezione 5.2 sono elencate le sorgenti della degradazione dello squeezing.

Il jitter angolare invece è causato da fluttuazioni di fase del fascio di squeezing che si traducono in un jitter angolare dell'ellisse di squeezing. Come si vede in figura 11, questa vibrazione va ad incrementare l'incertezza effettiva della quadratura minimizzata e l'effetto è maggiore quanto più r è grande. Durante le misure non si vedono esplicitamente le singole oscillazioni quanto invece una media di questo contributo che risulta quindi maggiore della larghezza originale dell'ellisse di squeezing.

Quantificando degradazione e jitter angolare è possibile calcolare lo squeezing ideale da iniettare nell'interferometro per limitare la perdita di squeezing.

5.2 Interferometro reale

Per diminuire il più possibile i contributi delle perdite ottiche è necessario studiare quali sono le loro fonti e capire che effetti hanno sullo squeezing del fascio interno all'interferometro. La

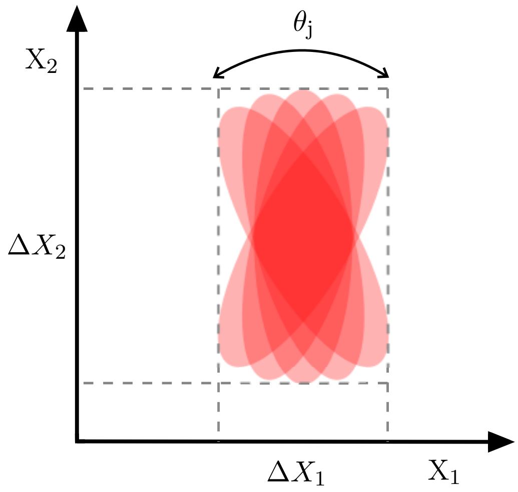

Figura 11: Oscillazione, causata dal jitter angolare, di angolo θ_j dell'ellisse di squeezing nello spazio delle quadrature. Si vede come il jitter va ad aumentare l'incertezza ΔX_1 dello squeezing.

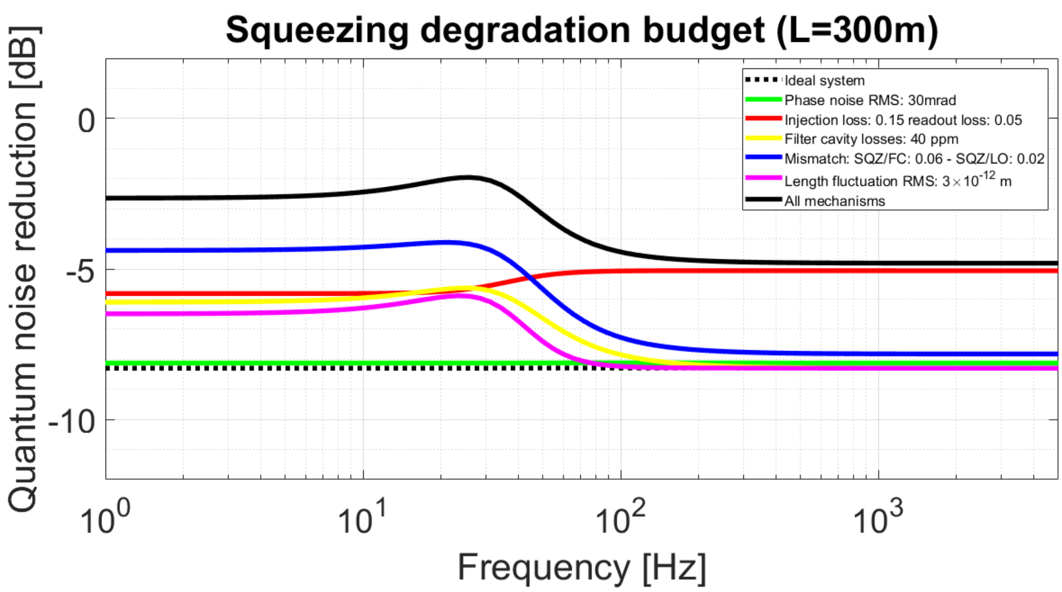

Figura 12: Squeezing degradation budget in un interferometro con cavità di lunghezza $L = 300$m. La curva nera rappresenta la somma quadratica di tutte le componenti.

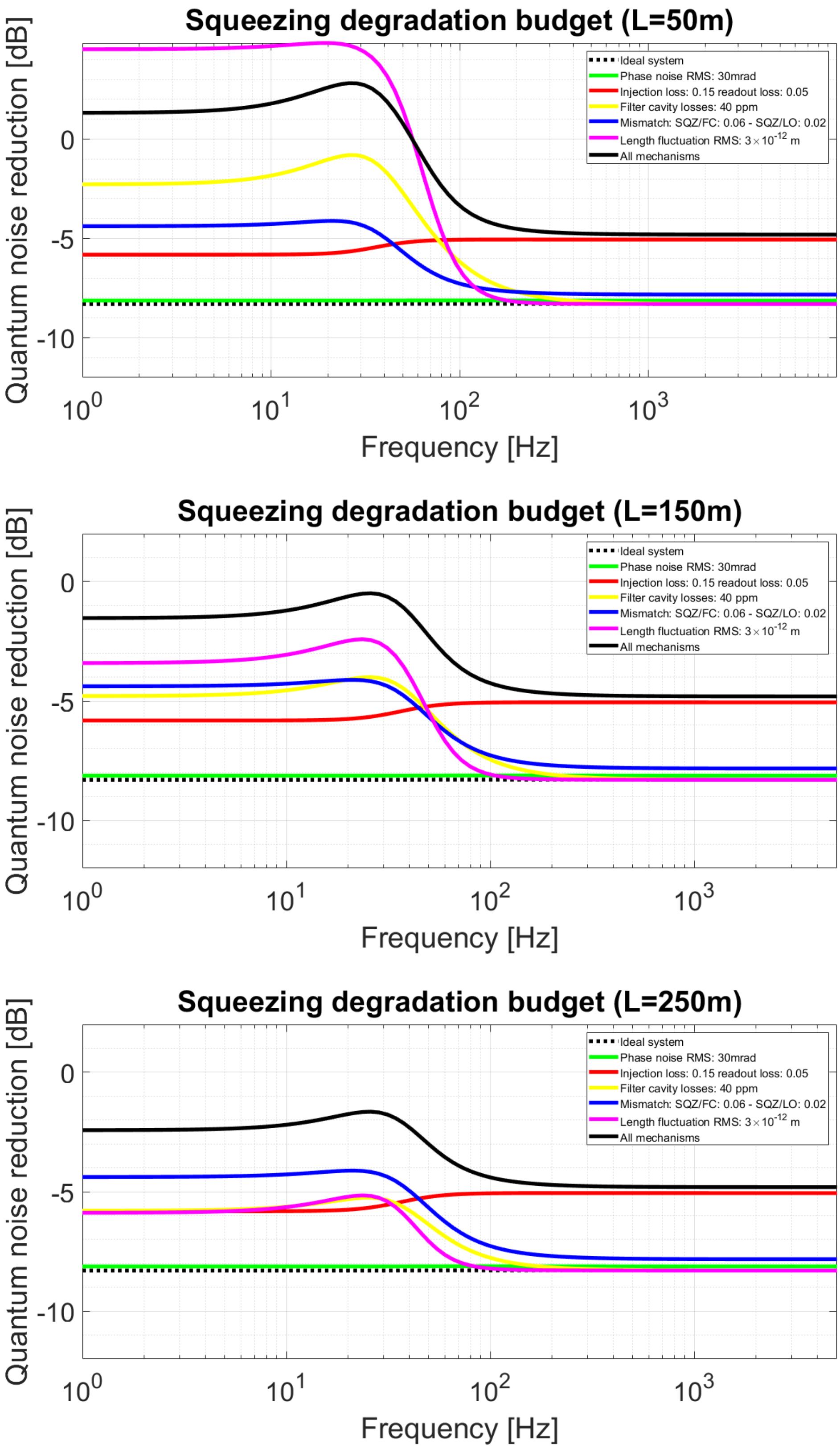

Figura 13: Squeezing degradation budget per interferometri con cavità di lunghezza 50, 150 e 250 metri. Si nota come la degradazione dello squeezing sia maggiore che per $L = 300\,\mathrm{m}$

.

figura a cui si farà riferimento per la descrizione dei contributi è la 12 che rappresenta lo *squeezing degradation budget*, ovvero il rapporto tra il rumore quantistico in un interferometro senza squeezing sul rumore quantistico con squeezing, relativo alle varie sorgenti di degradazione in un interferometro con cavità di lunghezza 300 metri. Figura 13 mostra invece lo squeezing degradation budget per diverse lunghezze L a scopo di paragone con $L = 300\,\text{m}$.

- **Perdite ottiche nella cavità**. In generale le perdite ottiche di una cavità sono quantificate da un coefficiente chiamato *round trip losses* (rtl) che è la frazione di luce persa dal fascio in un viaggio di andata e ritorno tra i due specchi della cavità. I migliori valori finora ottenuti per le rtl è di circa $30 - 40$ ppm. Il meccanismo di perdita principale è la rugosità e la pulizia degli specchi che diffonde la luce disperdendola fuori dalla cavità. Dato un certo valore di rtl in generale è conveniente progettare la cavità per minimizzare il numero di rimbalzi che fa la luce per tenere basso il valore totale delle perdite. Visto però che dobbiamo soddisfare la condizione (4.17) che richiede che le cavità siano a banda stretta, è conveniente utilizzare cavità lunghe a bassa *finesse* (ovvero con basso numero di rimbalzi), infatti

$$\gamma_{\text{fc}} = \text{finesse} * \frac{c}{2L} \tag{5.1}$$

  Questo contributo scala dunque come rtl/L.

- **Mode mismatch** (vedi appendice C). Ovvero imperfezioni nella sovrapposizione del fascio squeezed, con il modo della cavità di filtraggio e l'oscillatore locale. Questo contributo non dipende dalla lunghezza della cavità. Un tipico valore di *mismatch* con cavità ottiche di lunghezza sul centinaio di metri, è intorno al 2%.

- **Perdite nell'iniezione del fascio e nel readout dell'interferometro**. Le perdite in iniezione sono causate principalmente da scattering, assorbimento, imperfezioni nell'ottica, mismatch del fascio squeezed con l'interferometro e allineamento imperfetto; mentre al readout influisce anche l'efficienza quantistica del detector. L'effetto di queste perdite è una degradazione dello squeezing tramite un mescolamento del vuoto con il vuoto squeezed. Questi effetti non sono dipendenti dalla lunghezza della cavità e, come si nota in figura, sono dominanti per frequenze superiori al centinaio di Hertz.

- **Fluttuazioni della lunghezza della cavità**. Vibrazioni nella lunghezza vanno a variare la funzione di trasferimento della cavità. Questo comporta quindi un cambiamento del detuning $\Delta\omega_{\text{fc}}$ rispetto alla frequenza del campo carrier e va ad introdurre un errore nella fase della luce riflessa.

  Variazioni di lunghezza della cavità δL_{fc} modificano anche il detuning ottimale della cavità di [Cap+16]

$$\delta\Delta\omega_{\text{fc}} = \omega_0 \frac{\delta L_{\text{fc}}}{L_{\text{fc}}}. \tag{5.2}$$

  Ciò limita la riduzione del rumore possibile andando a compromettere la rotazione delle quadrature di squeezing. Come si vede dalla (5.2) anche in questo caso l'effetto diminuisce all'aumentare della lunghezza della cavità. Valori tipici per ΔL ottenuti sono dell'ordine di 1-2 ppm-rms.

- **Rumore in fase indipendente dalla frequenza**. Questo rumore origina da vibrazioni (ad esempio per effetti sismici) nella lunghezza del tragitto percorso dal fascio tra il banco ottimo in cui viene squeezato e l'interferometro. Si origina dunque un rumore in fase indipendente sia dalla frequenza sia dalla lunghezza della cavità, che risulta essere trascurabile rispetto agli altri contributi come appare evidente osservando la curva verde in figura 12.

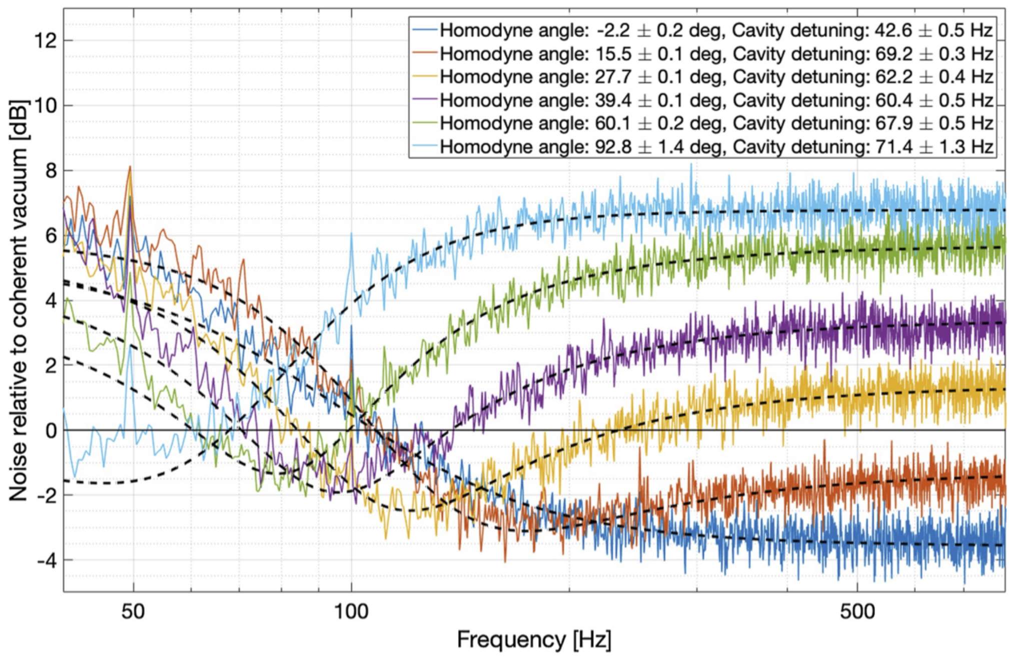

Figura 14: Rumore quantistico dipendente dalla frequenza normalizzato allo shot noise. Il rumore è riferito a diversi valori dell'angolo di fase tra il local oscillator e lo squeezing.

Sommando tutti i contributi al rumore quantistico si ottiene lo squeezing degradation budget totale (curva nera nella figura 12). In un interferometro reale quindi, con l'iniezione di un fascio squeezed, non si ottiene una diminuzione pari a e^{-2r} del rumore su tutta la banda di frequenza come si era invece visto in (4.7) nel caso di un interferometro ideale.

6 Stato dell'arte

La rotazione dell'ellisse di squeezing in funzione della frequenza è stata per la prima volta dimostrata in un esperimento su banco sia nel range di frequenze del MHz [Che+05] che successivamente del kHz [Oel+16].

Come discusso nel precedente capitolo (sezione 5.2), per l'applicazione su rivelatori di onde gravitazionali è necessario utilizzare cavità di riferimento di lunghezza di alcune centinaia di metri. Per questo motivo un generatore di luce squeezed indipendente dalla frequenza è stato accoppiato ad una cavita ottica lineare di 300 metri presente in Giappone al National Observatory of Japan (NAOJ). In questa modo, come si vede in figura 14, si è potuto dimostrare la rotazione della ellisse di squeezing fino a quasi 70 Hz [Zao+20]. Contestualmente, anche se con una cavità più corta, un risultato simile è stato ottenuto negli Stati Uniti [McC+20].

Una volta dimostrato che si può ottenere la luce squeezed ruotata ottimamente per l'impiego nei rivelatori di onde gravitazionali il prossimo passo è integrarla nei rivelatori a lungo braccio attualmente operanti. Entrambe le collaborazioni Virgo e LIGO stanno sviluppando delle cavità di filtraggio di 300 metri per per l'iniezione di Frequency Dependent Squeezing (FDS) già nel prossimo run scientifico che dovrebbe partire a fine 2022. La cavità di filtraggio di Virgo è attualmente in fase avanzata di commissioning e luce squeezed con rotazione sotto i 60 Hz è stata recentemente dimostrata (l'obiettivo è avere la rotazione intorno ai 40 Hz). Nel caso di LIGO invece l'infrastruttura per ospitare la cavità di filtraggio dovrebbe essere pronta entro giugno 2022. L'utilizzo della luce squeezed dovrebbe quindi permettere, per la prima volta al mondo, di operare i rivalatori con una sensibilità oltre il limite quantistico standard.

Appendice

A Calcolo del coefficiente di riflettività $r_{\mathrm{fc}}(\Omega)$

Si deriva ora il coefficiente di riflettività $r_{\mathrm{fc}}(\Omega)$ nel caso semplificato in cui le perdite ottiche della cavità siano trascurabili. La matrice di trasferimento di uno specchio è [BR04]

$$M = \begin{pmatrix} r & \mathrm{i}t \\ \mathrm{i}t & r \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

dove r e t sono rispettivamente la riflettività e la trasmissività degli specchi.

Da M si ricavano le relazioni tra i campi in entrata e quelli in uscita da ciascuno dei due specchi della cavità:

$$\begin{pmatrix} a_{\mathrm{refl}} \\ a_1 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} a_{\mathrm{in}} \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & \mathrm{i}t_1 \\ \mathrm{i}t_1 & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathrm{in}} \\ a_2' \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_{\mathrm{trans}} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} a_1' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 & \mathrm{i}t_2 \\ \mathrm{i}t_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

dove le ampiezze del campo a_1, a_2, a_1', a_2', 0, a_{in}, a_{refl} e a_{trans} sono rappresentate in figura 15.

a_1' e a_2' sono le ampiezze della propagazione dei campi a_1 e a_2 nella cavità, e assumono la forma

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} \\ a_2' &= a_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} \end{aligned} \tag{A.4}$$

con $k = 2\pi/\lambda$ numero d'onda e L la lunghezza della cavità.

Risolvendo le equazioni matriciali (A.2) e (A.3), ed applicando la propagazione (A.4) si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathrm{i}dt_1 a_{\mathrm{in}} \\ a_1' &= \mathrm{i}dt_1 a_{\mathrm{in}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} \\ a_2 &= \mathrm{i}dt_2 a_{\mathrm{in}} \\ a_2' &= \mathrm{i}dt_2 a_{\mathrm{in}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} \\ a_{\mathrm{trans}} &= -dt_1 t_2 a_{\mathrm{in}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} \\ a_{\mathrm{refl}} &= \left(r_1 - r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL}\right) d a_{\mathrm{in}} \end{aligned} \tag{A.5}$$

con

$$d = \frac{1}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL}} \tag{A.6}$$

É quindi semplice ricavare il coefficiente di riflessione cercato

$$r_{\mathrm{fc}} = \frac{a_{\mathrm{refl}}}{a_{\mathrm{in}}} = \frac{r_1 - r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL}}, \tag{A.7}$$

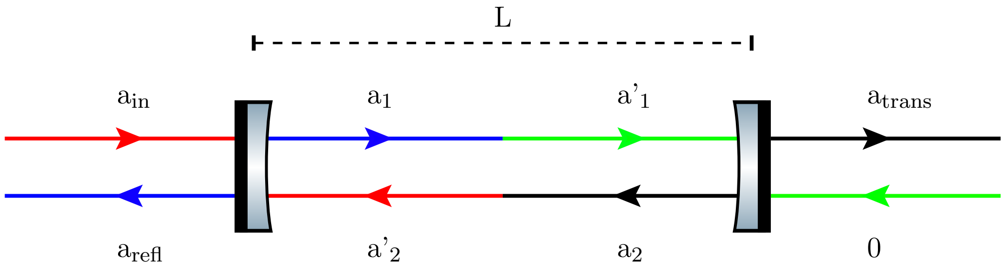

Figura 15: Rappresentazione tramite ampiezze dei campi interagenti con una cavità di Fabry-Perot di lunghezza L. I diversi colori differenziano tra le componenti in entrata e in uscita dai rispettivi specchi.

Con $\exp^{-i\Phi(\Omega)} = \exp^{2ikL}$, si vede che (A.7) è equivalente all'argomento della (4.11). Infatti, sempre assumendo che non ci siano perdite all'interno della cavità, vale che $r^2 + t^2 = 1$ e $r_{\mathrm{rt}} = r_1 r_2$, e quindi

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{fc}}(\Omega) &= r_1 - \frac{t_1^2}{r_1} \frac{r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\Phi(\Omega)}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi(\Omega)}} = \\ &= \frac{\left(r_1 - r_1^2 r_2 \mathrm{e}^{-i\Phi(\Omega)}\right) - t_1^2 \left(r_2 \mathrm{e}^{-i\Phi(\Omega)}\right)}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\Phi(\Omega)}} = \\ &= \frac{r_1 - r_1^2 r_2 \mathrm{e}^{-i\Phi(\Omega)} - t_1^2 r_2 \mathrm{e}^{-i\Phi(\Omega)}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\Phi(\Omega)}} \\ &= \frac{r_1 - \overbrace{(r_1^2 + t_2^2)}^{=1} r_2 \mathrm{e}^{-i\Phi(\Omega)}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\Phi(\Omega)}} = \\ &= \frac{r_1 - r_2 \mathrm{e}^{-i\Phi(\Omega)}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\Phi(\Omega)}} = (\mathrm{A.7}) \end{aligned} \tag{A.8}$$

B Larghezza del picco di risonanza γ_{fc}

Un fascio di luce iniettato in una cavità ottica viene riflesso avanti ed indietro tra i due specchi mentre una percentuale viene trasmessa all'esterno della cavità. Ad ogni giro della cavità il fascio acquisisce una fase

$$\delta = \left(\frac{2\pi\omega}{c}\right) 2nL\cos\theta \tag{B.1}$$

dove $c/\omega = \lambda$ è la lunghezza d'onda della luce, L è la lunghezza della cavità, n è l'indice di rifrazione degli specchi e θ l'angolo a cui si propaga il fascio. Studiando i contributi all'intensità del fascio trasmesso, si vede che il coefficiente di trasmissione segue la curva di Airy [Sve09]

$$\frac{a_{\mathrm{trans}}}{a_{\mathrm{in}}} = \frac{1 - r_1^2 r_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\delta} \tag{B.2}$$

con $r_{1,2}$ i coefficienti di riflessione dei due specchi. $a_{\mathrm{trans}}/a_{\mathrm{in}}$ si massimizza per $\delta = 2\pi m$ con m intero. In figura 16, si vede l'andamento del coefficiente di trasmissione presenta un picco

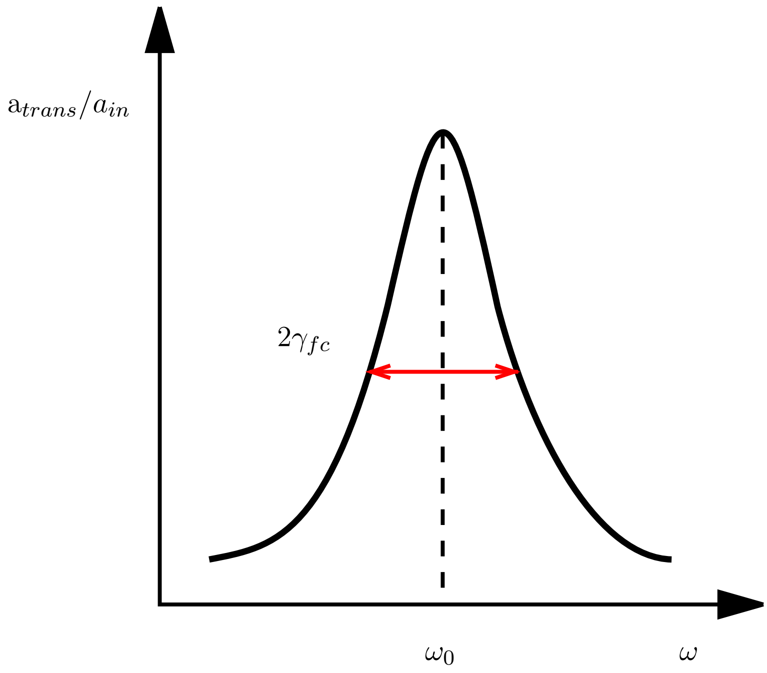

Figura 16: Curva di Airy con trasmittività dipendente dalla frequenza ω. In rosso è indicata la FWHM (Full Width Half Maximum) e la γ_{fc} è quindi la sua metà.

ad una frequenza ω_0 per cui l'intensità della luce trasmessa è massima. γ_{fc} è l'Half Width Half Maximum del picco della curva di Airy, ovvero la sempiampiezza a metà del picco:

$$\gamma_{\text{fc}} = \frac{c}{2nL\cos\theta}\frac{1-r_1r_2}{\pi\sqrt{r_1r_2}}, \tag{B.3}$$

che è quindi un parametro proprio della cavità in quanto dipende soltanto dai coefficienti di riflettività degli specchi. Sperimentalmente si parla di *finesse* della cavità, definita come

$$F = \frac{c}{2\gamma_{\text{fc}}nL\cos\theta}, \tag{B.4}$$

per cui una cavità con picchi della curva di Airy molto stretti si dirà essere con coefficiente di Finesse elevato, e viceversa.

C Mode Matching

Un fascio gaussiano che si propaga in direzione z con costante d'ampiezza $\tilde{A}$ può essere descritto dall'equazione d'onda [Mes07]

$$E(z,t) = \tilde{A}e^{-\mathrm{i}(\omega y - kz)} \tag{C.1}$$

che implica un comportamento molto simile a quello di un'onda planare. A grande distanza dalla sorgente il fascio tende invece a divergere come un'onda sferica

$$E(z,t) = \tilde{A}\frac{e^{-\mathrm{i}(\omega y - kz)}}{kz}. \tag{C.2}$$

In particolare ci si concentra su soluzioni in cui l'ampiezza $A(x,y,z)$ varia lentamente sulla scala della lunghezza d'onda, per cui si può utilizzare l'approssimazione

$$\frac{\partial}{\partial z}A \ll kA \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}A \ll kA' \tag{C.3}$$

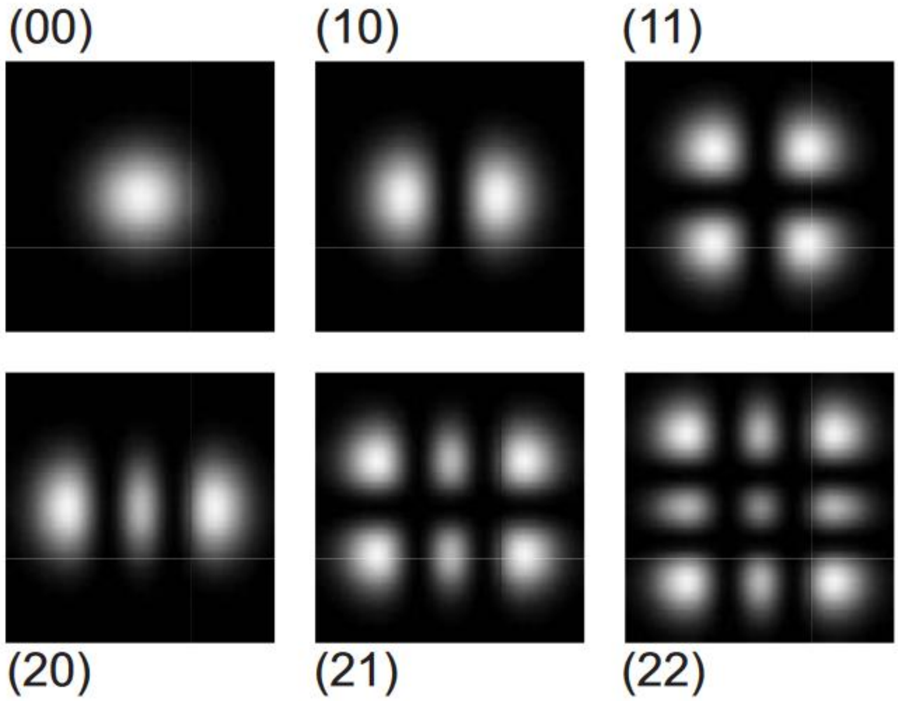

Figura 17: Sezioni a z fissato per fasci gaussiani in diversi modi $(m.n)$.

che permette di riscrivere l'equazione di Helmholtz come

$$(\nabla^2 + k^2)E(r) = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\nabla_{\mathrm{T}}^2 + 2\mathrm{i}k\frac{\partial}{\partial z} \right) A(x, y, z) = 0 \tag{C.4}$$

che è chiamata equazione di Helmholtz parassiale. La soluzione generale di (C.4) è [Mes07]

$$\begin{aligned} E_{mn} &= A_{mn}E_0\frac{\omega_0}{\omega(z)}e^{-(\rho/\omega(z))^2}e^{\mathrm{i}k\rho^2/2R(z)}e^{\mathrm{i}(kz-\eta(z))} \\ \text{con} \quad A_{mn} &= \mathrm{H}_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right)\mathrm{H}_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right)e^{-\mathrm{i}(m+n)\eta(z)}, \end{aligned} \tag{C.5}$$

dove m, n sono numeri naturali, $\mathrm{H}_{m,n}$ sono polinomi di Hermite e $\rho^2 = x^2+y^2$ Al variare di m ed n si ottengono soluzione per i cosiddetti modi Hermitiani-Gaussiani. Fissando z si ottiene che l'ampiezza decresce esponenzialmente nel piano x, y allontanandosi dall'origine come $e^{-(\rho/\omega(z))^2}$. Il punto in cui $\rho = \omega(z)$ si dice *waist* ed è il punto più stretto del fascio. In figura 17 sono rappresentate le sezioni di fasci gaussiani per i primi 6 modi.

Negli interferometri viene utilizzato il modo $(0, 0)$, ovvero il modo principale. Per ragioni di stabilità nelle cavità ottiche di un interferometro vengono utilizzati specchi curvi invece che piani. Si dice che un fascio gaussiano è *matched* alla cavità quando il suo raggio di curvatura è esattamente uguale a quello degli specchi nelle rispettive due posizioni, come rappresentato in figura 18.

Questa condizione si può esplicitare scrivendo [Mes07]

$$R_{1,2} = \frac{1}{z_{1,2}}(z_{1,2}^2 - z_0^2) \tag{C.6}$$

da cui

$$z_{1,2} = \frac{R_{1,2}}{2} \pm \sqrt{R_{1,2}^2 - 4z_0^2} \tag{C.7}$$

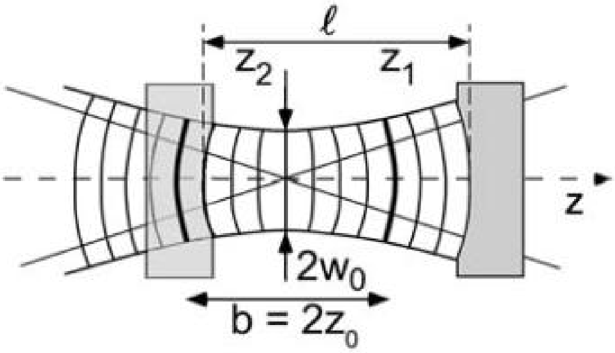

Figura 18: Fascio gaussiano con modo principale in una cavità ottica. ω_0 è il raggio del fascio al waist, mentre z_1 e z_2 sono la distanza dei due specchi dal waist. l indica la lunghezza della cavità.

con R_1 e R_2 i raggi di curvatura dei due specchi, e z_0 la lunghezza di Rayleigh, ovvero la distanza dal waist per cui il fascio non differisce significativamente in diametro (per diametri maggiori il fascio inizia a divergere a causa della diffrazione). In questo modo si possono esplicitare i parametri del fascio gaussiano in termini di grandezze fisiche proprie della cavità:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{-l(R_1+l)(R_2-l)(R_2-R_1-l)}{(R_2-R_1-2l)^2} \\ \omega_0 &= \frac{\lambda z_0}{n\pi}. \end{aligned} \tag{C.8}$$

con λ/n la lunghezza d'onda del fascio che si propaga in un mezzo con indice di rifrazione n.

I parametri (z_0, ω_0) dell'onda incidente devono quindi essere precisamente selezionati per poter eccitare la cavità di risonanza, in caso contrario solo una frazione del fascio entra in risonanza e questo causa una perdita di potenza ed introduzione di altri modi differenti da $(0, 0)$. Oltre (z_0, ω_0), è importante allineare il fascio all'asse ottico della cavità di filtraggio e far in modo che la posizione del waist della cavita' coincida con quella del fascio. Queste condizioni si chiamano *mode matching*.

Bibliografia

[BR04] Hans-A. Bachor e Timothy C. Ralph. *A Guide to Experiments in Quantum Optics.* WILEY-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, 2004. ISBN: 3-527-40393-0.

[Che+05] S. Chelkowski et al. "Experimental characterization of frequency-dependent squeezed light". In: (2005). DOI: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.013806.

[Che07] Simon Chelkowski. ""Squeezed Light and Laser Interferometric Gravitational Wave Detectors"". 2007.

[Mes07] Dieter Meschede. *Optics, Light and Lasers,The Practical Approach to Modern Aspects of Photonics and Laser Physics.* WILEY-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, 2007. ISBN: 9783527406289.

[Sve09] O. Svelto. *Principles of Lasers.* Springer, 2009. ISBN: 978-1441913012.

[Mia10] Haixing Miao. ""Exploring Macroscopic Quantum Mechanics in Optomechanical Devices"". 2010.

[Kha11] Aleksandr Khalaidovski. ""Beyond the Quantum Limit – A Squeezed-Light Laser in GEO 600"". 2011.

[Chu13] Sheon S. Y. Chua. ""Quantum Enhancement of a 4km Laser Interferometer Gravitational Wave Detector"". 2013.

[Kwe+14] "P Kwee et al. ""Decoherence and Degradation of Squeezed States in Quantum Filter Cavities"". In: (2014).

[Cap+16] Eleonora Capocasa et al. "Estimation of losses in a 300 m filter cavity and quantum noise reduction in the KAGRA gravitational-wave detector". In: (2016). DOI: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.93.082004.

[Oel+16] E. Oelker et al. "Audio-Band Frequency-Dependent Squeezing for Gravitational-Wave Detectors". In: (2016). DOI: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.041102.

[Heu18] M. Heurs. "Gravitational wave detection using laser interferometry beyond the standard quantum limit". In: (2018). DOI: http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2017.0289.

[Ace+19] F. Acernese et al. "Increasing the Astrophysical Reach of the Advanced Virgo Detector via the Application of Squeezed Vacuum States of Light". In: (2019). DOI: https://doi.org/10.1103/PHYSREVLETT.123.231108.

[McC+20] L. McCuller et al. "Frequency-Dependent Squeezing for Advanced LIGO". In: (2020). DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.171102.

[Zao+20] Y. Zao et al. "Frequency-Dependent Squeezed Vacuum Source for Broadband Quantum Noise Reduction in Advanced Gravitational-Wave Detectors". In: (2020). DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.171101.

Ringraziamenti

Ringrazio profondamente il mio relatore, Jean-Pierre Zendri, per il paziente aiuto, le molte idee proposte e l'infinita disponibilità ad ogni passo della stesura di questo elaborato.

Ringrazio Eleonora Capocasa per aver fornito il codice di simulazione dello squeezing degradation budget, indispensabile per la stesura della tesi.

Ringrazio di cuore la mia famiglia per l'incredibile ed immancabile sostegno sotto ogni aspetto, senza il quale niente di tutto questo sarebbe possibile.

Infine ringrazio moltissimo Marco, amico e collega, per la compagnia, le risate e il supporto in tutti questi anni.