

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L’Insegnamento della Combinatoria.

Un’esperienza didattica basata sul Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio
mediante un approccio per problemi

Laureando:

Ilaria De Marchi

Matricola 1234233

Relatore:

Dott. Samuele Maschio

Anno Accademico 2021/2022

21 aprile 2022

Indice

Introduzione	1
1 L'apprendimento della matematica	5
1.1 Behaviorismo (o comportamentismo)	5
1.2 Cognitivismo e costruttivismo	6
1.3 Il contratto didattico e la teoria delle situazioni didattiche . .	7
1.4 Risolvere problemi	10
2 I fondamenti matematici del Calcolo Combinatorio	13
2.1 I principi del Calcolo Combinatorio	13
2.2 Il fattoriale	14
2.3 Il coefficiente binomiale	14
2.4 I raggruppamenti classici	15
2.5 Il triangolo di Tartaglia-Pascal	18
3 La didattica del Calcolo Combinatorio	21
3.1 Formalismi e ragionamento combinatorio	21
3.2 Il ruolo della combinatoria	22
3.3 Il pensiero combinatorio	24
3.4 L'importanza di un conteggio strutturato	25
3.5 Errori frequenti e strategie di verifica	26
4 Le scelte metodologiche della sperimentazione didattica	29
4.1 Un approccio per problemi	29
4.2 Una matematica vicina alla realtà quotidiana	31
4.3 Una combinatoria senza uso di formule e nomenclatura non necessarie	32
5 Il progetto didattico	37
5.1 Struttura della sequenza didattica	37
5.2 Prima degli incontri	38
5.3 Primo incontro (2h)	38
5.4 Secondo incontro (2h)	42
5.5 Terzo incontro (2h)	45

INDICE

5.6	Quarto incontro (1h)	45
6	Lo svolgimento della sperimentazione didattica	51
6.1	Il contesto della sperimentazione	51
6.2	Verifica delle conoscenze pregresse	52
6.3	Svolgimento del primo incontro	59
6.4	Svolgimento del secondo incontro	69
6.5	Svolgimento del terzo incontro	75
6.6	Svolgimento del quarto incontro ed esiti della verifica	82
7	Risultati e conclusione	101
A	Allegati	107
B	Risultati dei test	113
	Bibliografia	119
	Sitografia	125

Elenco dei simboli

$:=$ Uguale per definizione

$\mathbb{N}$ Insieme dei numeri interi non negativi

Introduzione

Il calcolo combinatorio è un settore della matematica che viene spesso trascurato nell'insegnamento scolastico, ed è ritenuto particolarmente difficile dagli studenti [1, 21]: effettivamente, in generale i problemi combinatori non prevedono un'unica procedura risolutiva da poter applicare meccanicamente, come accade in diversi altri ambiti della matematica, ma richiedono uno sforzo di ragionamento per elaborare strategie differenti e adeguate a ogni particolare problema [37]. Eppure, questa difficoltà può tradursi in un grande pregio della combinatoria: stimolare le abilità di ragionamento e il pensiero critico negli studenti, che di fronte a un quesito combinatorio devono mettere in gioco attivamente e creativamente le proprie capacità di problem solving per arrivare a una soluzione [14]. Non solo: una volta congetturata una soluzione, lo studente deve riuscire ad argomentarla in maniera sufficientemente efficace da convincere i compagni e l'insegnante della sua validità e deve a sua volta adoperarsi per comprendere, in maniera critica, le soluzioni proposte dai compagni e dall'insegnante, rafforzando le proprie capacità dimostrative e comunicative, essenziali in matematica [37]. Un'ulteriore qualità della combinatoria è quella di essere accessibile anche a chi non possiede basi matematiche particolarmente approfondite, dal momento che richiede l'uso soltanto delle operazioni elementari, e il suo studio può, pertanto, costituire un'opportunità di successo anche per gli alunni che presentano carenze nella propria formazione [25, 45], oltre a contribuire a espandere gli orizzonti della matematica agli occhi degli studenti, rivelando loro un lato inconsueto e originale della disciplina [37].

Tradizionalmente, l'insegnamento della combinatoria prevede una classificazione dei raggruppamenti combinatori in sei distinte categorie: le permutazioni semplici e con ripetizione, le disposizioni semplici e con ripetizione, le combinazioni semplici e con ripetizione; a ciascuna di queste categorie, poi, viene fatta corrispondere una formula che permette di calcolarne il numero di raggruppamenti. Tuttavia, da un lato, non tutti i possibili quesiti che si possono incontrare nel calcolo combinatorio rientrano in una di queste categorie; dall'altro lato, gli studenti spesso faticano ad ascrivere un problema alla categoria corretta, trovandosi per lo più a imparare a memoria formule di cui non hanno compreso a fondo il significato e a fare affidamento sulle parole chiave presenti nel testo del problema per identificare la formula

da applicare [35, 36]. Il categorizzare i raggruppamenti combinatori presenta un'altra criticità, ossia l'ambivalenza della loro denominazione: i nomi utilizzati per indicare le categorie, infatti, sono *parole-termini* [44], che assumono un preciso significato nel contesto matematico ma che presentano anche ulteriori significati nel linguaggio comune¹, i quali possono interferire con il significato matematico del termine. In particolare, osserviamo come in combinatoria il termine 'combinazione' indichi un raggruppamento in cui l'ordine degli elementi non è significativo, mentre, nel linguaggio comune, la 'combinazione' di un lucchetto o di una cassaforte è una sequenza in cui l'ordine degli elementi è rilevante, e che sarebbe matematicamente considerata una 'disposizione'.

Alla luce di queste problematicità, è sorta naturale l'idea di sviluppare e sperimentare in classe una sequenza didattica che introduca studentesse e studenti al calcolo combinatorio senza far uso di definizioni e formule possibilmente fuorvianti, ma basandosi essenzialmente sul Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio e su pochi altri strumenti, quali il fattoriale e il coefficiente binomiale; si è scelto, dunque, di approfittare della ricchezza di questo argomento per stimolare il ragionamento matematico, promuovendo l'elaborazione creativa di strategie originali di risoluzione dei problemi a partire dal Principio Fondamentale. Nel corso dell'esperienza didattica, perciò, si è deciso di proporre problemi di vario genere, senza, però, classificarli nelle tradizionali categorie summenzionate, quanto, piuttosto, confrontandoli criticamente l'uno con l'altro, in modo da riconoscerne somiglianze e differenze, generalizzando, quando possibile, la soluzione di un problema ad altri affini.

D'altra parte, sulla base delle teorie costruttiviste dell'apprendimento [54] e della teoria delle situazioni didattiche di Brousseau [2, 11], si è scelto di non adottare la tradizionale metodologia didattica incentrata sulla lezione frontale, prediligendo un approccio per problemi, che consenta agli alunni di avere un ruolo attivo nella costruzione delle proprie conoscenze e capacità, utilizzando il problem solving come mezzo di apprendimento. Le lezioni, pertanto, sono state programmate prevedendo numerose attività di risoluzione di problemi da svolgere in piccoli gruppi, non precedute da spiegazioni teoriche ma seguite da momenti di confronto e riflessione, in cui analizzare le soluzioni proposte dai vari gruppi e, solo in conclusione, formalizzare i contenuti affrontati nel corso dell'attività. Si è cercato di ideare problemi quanto più possibile vicini alla vita quotidiana dei ragazzi, evitando i classici quanto astrusi quesiti con carte da poker ed estrazioni di biglie, con l'intenzione di promuovere una visione della matematica quale pratico strumento per interpretare la realtà di tutti i giorni, e non come un astratto sistema di regole da applicare meccanicamente per risolvere problemi irreali. Allo stesso tempo, si è approfittato della versatilità del calcolo combinatorio

¹Alle *parole-termini* si contrappongono i *termini*, come 'polinomio' o 'coseno', che hanno come unico significato quello matematico.

per proporre problemi che ammettano strategie di risoluzione diversificate, incentivando gli studenti a condividere la propria originale soluzione e a confrontarla con quelle dei compagni, in un'ottica di scambio e arricchimento reciproco, stimolando la creatività e la comunicazione matematica.

In questo lavoro, dunque, approfondiremo le ragioni soggiacenti alle scelte metodologiche adottate nell'elaborare la sequenza didattica e ripercorreremo alcuni studi presenti in letteratura riguardo alla didattica del calcolo combinatorio, per poi descrivere nel dettaglio la preparazione dell'esperienza didattica e il suo svolgimento in una classe quarta del Liceo Scientifico "Eugenio Curiel" di Padova.

Più precisamente, nel capitolo 1, "L'apprendimento della matematica", confronteremo i principi di Behaviorismo e Costruttivismo, due importanti teorie dell'apprendimento sviluppatesi nel corso del XX secolo. In seguito, ci concentreremo sull'apprendimento della matematica attraverso gli studi di Guy Brousseau, in particolare quelli relativi al contratto didattico e alla teoria delle situazioni didattiche. Infine, metteremo in rilievo l'importanza della risoluzione di problemi per l'apprendimento della matematica, rimarcando la differenza tra problemi ed esercizi.

Nel capitolo 2, "I fondamenti matematici del Calcolo Combinatorio", poi, tratteremo le basi matematiche della combinatoria: presenteremo brevemente i principi del Calcolo Combinatorio, introdurremo il fattoriale e il coefficiente binomiale, caratterizzeremo le sei principali categorie di raggruppamenti tradizionalmente studiate in combinatoria e descriveremo le proprietà combinatorie del Triangolo di Tartaglia-Pascal.

Nel capitolo 3, "La didattica del Calcolo Combinatorio", esploreremo gli studi presenti in letteratura relativamente all'insegnamento e apprendimento del calcolo combinatorio. Sottolineeremo l'importanza del ragionamento combinatorio e i pregi dello studio della combinatoria, proporremo gli studi di Lyn English ed Elise Lockwood relativamente al pensiero combinatorio negli studenti, elencheremo le difficoltà e i tipi di errore che possono sopraggiungere nel risolvere un problema di calcolo combinatorio.

Nel capitolo 4, "Le scelte metodologiche della sperimentazione didattica", stabiliremo e giustificheremo i tre principi metodologici su cui si è deciso di basare la sequenza didattica: un approccio per problemi, una matematica vicina alla realtà quotidiana, una combinatoria senza uso di formule e nomenclatura non necessarie.

Nel capitolo 5, "Il progetto didattico", presenteremo la struttura e i contenuti della sequenza didattica, pensata per introdurre al calcolo combinatorio una classe quarta di liceo scientifico attraverso un percorso della durata di 7 ore, organizzato in 4 incontri e comprensivo di test iniziale delle conoscenze pregresse e test finale di valutazione.

INTRODUZIONE

Nel capitolo 6, “Lo svolgimento della sperimentazione didattica”, descriveremo nel dettaglio la realizzazione della sequenza didattica, svoltasi tra gennaio e febbraio 2022 nella classe 4A del Liceo Scientifico "Eugenio Curiel" di Padova. Presenteremo esempi rappresentativi delle risposte fornite dagli alunni della classe ai problemi suggeriti nel corso degli incontri didattici e commenteremo le strategie risolutive da loro proposte.

Infine, nel capitolo 7, “Risultati e conclusione”, illustreremo i risultati ottenuti dalla sperimentazione didattica e commenteremo le implicazioni per eventuali lavori futuri.

Capitolo 1

L'apprendimento della matematica

Prima di addentrarci nelle peculiarità della didattica del calcolo combinatorio, è opportuno situare la nostra ricerca in un contesto più ampio, andando brevemente ad esplorare le principali teorie dell'apprendimento che si sono sviluppate a partire dal secolo scorso [2]. In particolare, osserveremo come due grandi scuole di pensiero si contrappongono in questo scenario: il behaviorismo da un lato, il cognitivismo-costruttivismo dall'altro.

1.1 Behaviorismo (o comportamentismo)

Il behaviorismo, o comportamentismo, è una teoria dell'apprendimento che nasce formalmente nel 1913, con la pubblicazione ad opera di John Watson (1878-1958) dell'articolo "La psicologia così come la vede il comportamentista" [48]. Il behaviorismo cerca di studiare l'apprendimento attraverso le interazioni osservabili dell'individuo con l'ambiente, ossia i comportamenti, a prescindere dai processi mentali interiori.

Secondo i behavioristi, l'apprendimento è un cambiamento comportamentale relativamente permanente che occorre come conseguenza di una pratica rinforzata, ovvero una semplice acquisizione di abitudini che si sviluppa tramite l'associazione nel discente di un comportamento ad un dato stimolo. Il comportamento, pertanto, viene modificato presentando un rinforzo positivo, come un premio, in risposta ad un comportamento desiderato e un rinforzo negativo, ad esempio una punizione, in risposta ad un comportamento indesiderato. Il fenomeno che permette di indurre l'associazione di uno stimolo naturale ad uno artificiale prende il nome di *condizionamento* ed è stato preso in analisi soprattutto da due studiosi, Ivan Pavlov (1849-1936) e Burrhus Frederic Skinner (1904-1990) [53].

In particolare, Pavlov è conosciuto per le sue ricerche sul cosiddetto *condizionamento classico*, attraverso cui viene creata un'associazione tra uno

stimolo naturale, incondizionato, ed uno precedentemente neutro, in modo tale che lo stimolo neutro arrivi a suscitare la stessa risposta di quello naturale. Ad esempio, nel suo classico esperimento sui cani, Pavlov abbina il suono di un campanello (stimolo neutro) ad una ciotola di cibo (stimolo incondizionato): inizialmente il cane inizia a salivare (produce, cioè, una risposta incondizionata) solo quando gli viene presentata la ciotola del cibo, ma, dopo un certo tempo, inizia a produrre saliva anche al solo suono del campanello, manifestando così una risposta di tipo condizionato.

Dall'altro lato, Skinner si occupa del fenomeno che prende il nome di *condizionamento operante*. Il condizionamento operante agisce, diversamente dal condizionamento classico, tramite rinforzi positivi o negativi per incentivare o ridurre un comportamento volontario. Ad esempio, un piccione chiuso in una gabbia riceve un premio in cibo se aziona una determinata leva o una scossa elettrica se ne aziona una seconda; dopo diversi tentativi di esplorazione, il piccione apprende quale leva va a suo vantaggio e quale, invece, gli conviene evitare.

Secondo il modello comportamentista dell'apprendimento, dunque, un comportamento viene appreso attraverso l'esercizio e l'associazione di rinforzi positivi alla risposta desiderata. In quest'ottica, qualsiasi conoscenza può essere appresa, a patto che il discente si eserciti abbastanza a lungo e riceva i giusti rinforzi. Il modello didattico legato al behaviorismo è un modello di tipo trasmissivo, che vede il docente come soggetto che trasmette la conoscenza all'alunno, oggetto passivo dell'apprendimento, scatola vuota da riempire di nozioni, nella fiducia che un messaggio trasmesso con la giusta chiarezza verrà sicuramente recepito e appreso. Il metodo comportamentista si è dimostrato efficace per l'apprendimento di procedure ben delineate come quelle algoritmiche e computazionali, ma rivela invece le sue carenze in aree meno strutturate nelle quali è necessaria una rielaborazione delle informazioni, ad esempio nell'ambito del problem solving.

1.2 Cognitivismo e costruttivismo

Verso gli anni '50 del secolo scorso si afferma una nuova corrente di pensiero, orientata a modellizzare i processi di acquisizione ed elaborazione delle conoscenze, la quale prende il nome di cognitivismo. L'apprendimento viene ora analizzato in relazione alle componenti cognitive interessate, ad esempio la memoria o la percezione, e viene attribuita un'importanza centrale all'elaborazione delle informazioni da parte del discente, che non è più protagonista passivo dell'apprendimento, ma soggetto attivo, che processa gli stimoli ricevuti dal mondo esterno e li organizza, strutturando la realtà che lo circonda. Lo sviluppo cognitivo, perciò, consiste in una progressiva riorganizzazione di processi mentali risultante dalla maturazione biologica e dall'esperienza ambientale.

A partire dal cognitivismo, grazie anche all'opera dello psicologo Jean Piaget (1896–1980), si sviluppa la teoria del costruttivismo [54], secondo cui l'apprendimento è un processo attivo di costruzione della conoscenza situato all'interno di un ambiente, e non una mera acquisizione di sapere. La conoscenza, cioè, non viene trasmessa dal docente al discente e immagazzinata nella sua memoria, ma costruita attivamente dallo stesso discente, che elabora la propria personale struttura della realtà grazie alle interazioni con il mondo circostante e con le altre persone coinvolte nel percorso formativo. In particolare, la corrente del socio-costruttivismo, guidata da Lev Vygotsky (1896-1934), evidenzia come l'apprendimento avvenga grazie alla collaborazione sociale e alla comunicazione interpersonale. Inoltre, i costruttivisti teorizzano che il processo di apprendimento sia profondamente influenzato dal contesto, ovvero dalle circostanze concrete in cui avviene l'apprendimento, e sia estremamente personale, in quanto ciascun alunno apprende in maniera diversa dalle proprie esperienze. Agli estremi si colloca il costruttivismo radicale, teorizzato da Ernst von Glasersfeld (1917-2010), secondo cui la conoscenza non porta a scoprire una verità indipendente dal discente ma piuttosto a creare il proprio sapere, una personale interpretazione della realtà.

Nell'ottica del costruttivismo, dunque, l'insegnante non è colui che travasa la conoscenza nella mente dell'allievo, ma una guida che orienta l'apprendimento attivo del discente, creando situazioni che permettano all'allievo di sviluppare le proprie strutture cognitive e costruire così il proprio personale bagaglio di conoscenze. Vygotsky parla di *Zona di Sviluppo Prossimale* (ZSP) per indicare la distanza tra il livello di attuale sviluppo del bambino e il livello di sviluppo potenziale che il bambino può raggiungere sotto un'opportuna guida, ossia la distanza tra ciò che il bambino è in grado di fare da solo e ciò che può riuscire a fare col supporto di un adulto o di un suo pari ad un livello di competenza maggiore, portando ad un ampliamento della propria zona di sviluppo attuale.

1.3 Il contratto didattico e la teoria delle situazioni didattiche

Parallelamente alle teorie più generali riguardo le dinamiche dell'apprendimento, coi matematici Guy Brousseau (n.1933) e Yves Chevallard (n.1946) si sviluppa uno studio più approfondito della didattica della matematica [2, 11]. Chevallard rappresenta il sistema didattico come uno schema triangolare (figura 1.1), ai cui poli si collocano il sapere istituzionalizzato, l'allievo e l'insegnante, in reciproca relazione e collocati all'interno di un ambiente sociale e culturale, detto noosfera.

Negli anni '70-'80, Brousseau riprende i concetti di *contratto sociale* e di *contratto pedagogico*, formulati rispettivamente da Jean-Jacques Rousseau

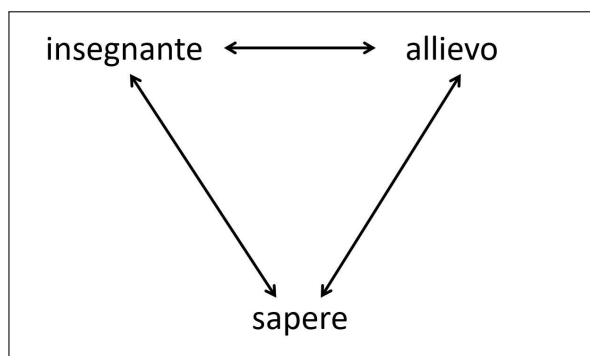


Figura 1.1: Il sistema didattico

(1712-1778) e da Janine Filloux, per teorizzare il cosiddetto *contratto didattico*. Il contratto didattico è l'insieme delle relazioni che assegnano e limitano, in maniera esplicita ma soprattutto implicita, i ruoli e le responsabilità di docente e discenti; ovvero, il contratto didattico è l'insieme delle abitudini dell'insegnante attese dall'allievo e dei comportamenti dell'allievo attesi dall'insegnante. Nel corso di una sequenza didattica, perciò, l'allievo interpreta la situazione che gli viene presentata, le domande che gli vengono poste, le informazioni che gli sono fornite, i vincoli che gli sono imposti in funzione delle dinamiche che il docente riproduce, più o meno consapevolmente, in maniera ripetitiva nella sua pratica d'insegnamento [8]. Il contratto didattico influenza inevitabilmente i comportamenti dell'allievo, traendo la propria forza da un tacito accordo sulla concezione della scuola in generale e del sapere matematico in particolare, ma anche dalla ripetizione di modalità da parte del docente. L'occasionale rottura del contratto didattico può costituire, allora, l'opportunità per riconoscere e rinegoziare clausole inadeguate che si sono instaurate nel contratto.

A tal proposito, un esperimento famoso è quello proposto nel 1980 dall'IREM di Grenoble e descritto da Stella Baruk in "L'Âge du capitaine: de l'erreur en mathématiques" (1985), nel quale ad una classe delle elementari viene richiesto di risolvere il problema seguente: "Su una nave ci sono 26 persone e 10 capre; qual è l'età del capitano?" Posti di fronte al problema paradossale, gli allievi non rinunciano a trovare comunque una risposta e affermano candidamente che l'età del capitano deve essere di $26 + 10 = 36$ anni. Questo perché i bambini sono abituati a ricevere dall'insegnante soltanto problemi a cui è possibile trovare una soluzione e, quindi, guidati dal contratto didattico, si sentono tenuti a dover dare una risposta ad ogni costo, eventualmente mettendo in atto procedure matematiche slegate da un vero significato del problema. Gli allievi si trovano, così, a sviluppare una visione distorta della matematica, vista come un insieme di regole da applicare, e a distinguere, come afferma Rosetta Zan [49], i problemi reali e concreti della vita quotidiana da quelli artificiosi e codificati della realtà scolastica, carat-

terizzati da un'operazione matematica necessaria a risolverli già determinata a priori.

Secondo la Teoria delle situazioni didattiche, formulata ancora da Brousseau, il processo di apprendimento-insegnamento comporta necessariamente un paradosso: davanti ad una richiesta dell'insegnante, l'alunno pone domande per liberarsi da eventuali difficoltà, ma più il professore indica precisamente all'allievo cosa deve fare e gli fornisce istruzioni precise, più perde la possibilità di veder realizzato l'apprendimento da parte dell'allievo. L'insegnante, secondo Brousseau, si trova pertanto costretto ad accettare la relazione didattica, ma al contempo la considera provvisoria e si sforza di rigettarla. Brousseau distingue, dunque, tre differenti tipi di situazioni: didattica, non-didattica e adidattica. In una situazione didattica, ci si colloca in pieno contratto didattico: l'insegnante struttura l'ambiente con il fine di portare l'allievo ad una conoscenza specifica, c'è un'esplicita intenzione di insegnare e di apprendere, l'allievo sa che sta apprendendo nozioni e competenze previste dal sistema scolastico, si sforza di dimostrare all'insegnante di aver appreso e cerca di fornire le risposte che pensa siano attese da lui. In una situazione non-didattica, l'insegnante non ha volontariamente costruito un ambiente destinato ad insegnare una precisa nozione, l'attività non è finalizzata all'acquisizione di uno specifico sapere. In una situazione a-didattica, infine, gli studenti si impegnano in un'attività di costruzione di conoscenza legata alla situazione e non a spinte da parte dell'insegnante, che assume il ruolo esterno di regista; la proposta dell'insegnante non è esplicitamente didattica e lo studente si trova a modificare il proprio sistema di conoscenze motivato dall'attività stessa, interessandosi in prima persona alla risoluzione del problema applicando strategie ed effettuando tentativi più o meno di successo.

Per condurre ad una nuova conoscenza, afferma Brousseau, l'azione didattica si deve strutturare in quattro diverse fasi:

- nella situazione di azione, l'insegnante formula un problema in maniera tale che gli studenti stessi siano motivati a risolverlo, per curiosità o ambizione; l'insegnante sta in disparte mentre gli studenti cercano di risolvere il problema, con gli strumenti che hanno già a loro disposizione o inventandone di nuovi, senza che l'insegnante suggerisca la strategia da seguire;
- nella situazione di formulazione, gli studenti comunicano e confrontano le proprie osservazioni, mentre l'insegnante guida lo scambio e aiuta gli allievi a sviluppare un linguaggio adeguato per esprimere le proprie conclusioni;
- nella situazione di validazione, lo studente spiega ai compagni la propria idea, come in un dibattito scientifico, moderato dall'insegnante;

il sapere prende progressivamente forma come una teoria in fase di sviluppo;

- nella situazione di istituzionalizzazione, infine, l'insegnante assume il ruolo di rappresentante della matematica ufficiale, permettendo che la conoscenza istituzionale venga riconosciuta e affermata, comunicando agli studenti la terminologia e le definizioni formalmente condivise dall'istituzione scolastica e dal mondo accademico.

1.4 Risolvere problemi

Fare matematica significa inevitabilmente formulare e risolvere problemi. Il matematico George Polya (1887-1985) afferma: "Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano" [41].¹

È evidente come la capacità di formulare, affrontare e risolvere problemi sia centrale nell'educazione, matematica e non solo, del discente. Insegnare a risolvere problemi non consiste soltanto nel dotare gli allievi di abilità e strategie efficaci, ma anche nel coltivare in loro l'abitudine e l'attitudine ad approcciare l'apprendimento come un problema a cui cercare risposta. Non solo gli studenti imparano a risolvere problemi, ma imparano anche *attraverso* la stessa risoluzione di problemi, mettendosi in gioco in prima persona: il problem solving si configura così come un obiettivo ma anche come un metodo didattico. Riprendendo il modello di Zona di Sviluppo Prossimale di Vygotsky, possiamo affermare che attraverso le attività di risoluzione di problemi l'allievo supera il proprio livello di sviluppo attuale per addentrarsi nella zona di sviluppo prossimale, di modo che, sotto un'opportuna guida, il problem solving dà origine all'apprendimento.

A questo punto, è opportuno chiarire cosa si intende per *problema* e sottolineare in cosa questo differisce da un *esercizio* [11]. Un esercizio è un compito che si presenta come qualcosa di conosciuto, che può essere risolto utilizzando strumenti e tecniche già note e ben delineate, per quanto talvolta ancora non del tutto consolidate. Un problema, al contrario, costituisce una situazione nuova rispetto a ciò che è già stato appreso, la quale richiede un utilizzo strategico delle tecniche già note o addirittura lo sviluppo creativo di nuovi strumenti da parte del risolutore. La distinzione tra esercizio e problema non è fissa e universale, dal momento che dipende fortemente dalle conoscenze e capacità della persona che si appresta a risolverlo; ciò che costituisce un problema per alcuni può essere percepito come un semplice

¹Traduzione italiana: Feltrinelli, 1967

esercizio da altri. Gli esercizi e i problemi richiedono da parte degli alunni l'attivazione di diverse procedure, ma anche di diverse motivazioni e atteggiamenti, in quanto la risoluzione di un problema implica una domanda cognitiva e motivazionale maggiore rispetto all'esecuzione di un esercizio.

Tra gli innumerevoli studiosi che si sono dedicati ad analizzare il processo di risoluzione di un problema, spicca senz'altro per notorietà il matematico Polya [2, 41]. Egli individua quattro fasi caratteristiche da percorrere per arrivare a risolvere efficacemente un problema:

- il primo passo da mettere in atto consiste nel comprendere il problema e, auspicabilmente, desiderare di trovarne la soluzione; più precisamente, lo studente deve capire l'enunciato del problema e considerare attentamente le diverse componenti del problema da più punti di vista, aiutandosi se necessario con figure e con una notazione opportuna;
- il secondo passo prevede di delineare un piano, ovvero uno schema di calcoli e computazioni da eseguire per raggiungere la soluzione; questo passaggio è basilare e può richiedere diversi tentativi infruttuosi prima di condurre, gradualmente o tutto d'un tratto, a un'idea brillante; in questa fase può essere utile, ma non sempre sufficiente, fare riferimento alla teoria e a problemi simili a quello dato dei quali si conosce una soluzione;
- il terzo passo consiste nel mettere in atto il piano elaborato al passo precedente, con pazienza e attenzione, assicurandosi che ciascun passaggio sia svolto correttamente;
- il quarto e ultimo passaggio è quello di guardarsi indietro e ripercorrere il percorso svolto, favorendo una migliore comprensione del problema stesso ed eventualmente un perfezionamento della risoluzione, ma anche stimolando, più in generale, la propria capacità di risolvere problemi.

Concludiamo questo capitolo con una citazione del didatta Frank Lester [29], che ben illustra la ricca complessità del problem solving: "Vedo diversi parallelismi tra l'andare in bicicletta e il risolvere problemi matematici. Innanzitutto, entrambe le attività sono difficili da spiegare a parole. Nel descrivere come si va in bicicletta a qualcuno che non ne è capace, si potrebbe dire, «Sali sulla bici, spingiti con un piede, e poi pedala finché ti reggi in equilibrio». Una spiegazione di questo tipo descrive le componenti essenziali dell'andare in bicicletta ma non cattura l'essenza di coordinare gli atti di pedalare, frenare, girare, guardare dove si sta andando e mantenere l'equilibrio. Inoltre, mostrare alla mia amica come andare in bicicletta è parso di ben poca utilità per lei. Il mio consiglio, «Guardami e poi fa' ciò che ho fatto io», ha provocato più apprensione che aiuto. Risolvere problemi è simile in quanto nessuna descrizione, per quanto attentamente redatta al fine di includere

tutte le componenti fondamentali, può esprimere la sua complessità, sottigliezza e natura estremamente personale. Inoltre, un buon comportamento di problem solving non è generalmente promosso facendo imitare agli studenti il modo in cui gli insegnanti risolvono i problemi. Poiché gli insegnanti tipicamente mostrano solo le mosse corrette, gli studenti spesso si trovano a vedere la risoluzione di problemi come l'atto di cercare in una misteriosa borsa di trucchetti di cui solo pochi iniziati sono a conoscenza."²

²Traduzione dell'Autore

Capitolo 2

I fondamenti matematici del Calcolo Combinatorio

Il calcolo combinatorio è il settore della matematica che si occupa di contare i possibili raggruppamenti od ordinamenti di oggetti appartenenti ad uno o più insiemi finiti, secondo regole prestabilite. In questo capitolo ripercorreremo brevemente i principi fondamentali su cui si basa il calcolo combinatorio, definiremo il fattoriale e il binomiale in quanto strumenti utili per alleggerire la notazione e analizzeremo le principali categorie di raggruppamenti tradizionalmente studiate dalla combinatoria.

2.1 I principi del Calcolo Combinatorio

Il calcolo combinatorio si fonda essenzialmente su due principi: il Principio Additivo e il Principio Moltiplicativo, noto anche come Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio. Enunciamo di seguito i due principi nella formulazione di Tucker [46].

Principio Additivo Dati m insiemi due a due disgiunti, se il primo insieme contiene r_1 diversi elementi, il secondo insieme contiene r_2 diversi elementi, $\dots$, e l' m -esimo insieme contiene r_m diversi elementi, allora il numero di modi di selezionare un oggetto da uno degli m insiemi è dato da $r_1 + r_2 + \dots + r_m$.¹

Principio Moltiplicativo (o Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio) Supponiamo che una procedura possa essere spezzata in m passaggi consecutivi (ordinati), con r_1 esiti possibili nel primo passaggio, r_2 esiti possibili nel secondo passaggio, $\dots$, e r_m esiti possibili nell' m -esimo passaggio. Se il numero di esiti ad ogni passaggio non dipende dalle scelte

¹Traduzione dell'Autore

effettuate nei passaggi precedenti e se gli esiti composti² sono tutti distinti, allora la procedura ha $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_m$ differenti esiti composti.³

2.2 Il fattoriale

Dato un numero naturale $n \in \mathbb{N}$, si definisce il fattoriale di n come il prodotto di tutti gli interi positivi minori o uguali ad n

$$n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

In particolare, il fattoriale di 0 è uguale ad 1: $0! = 1$.

Osserviamo che per ogni $n \geq 1$ vale la seguente relazione ricorsiva

$$n! = n \cdot (n-1)!.$$

2.3 Il coefficiente binomiale

Dati due numeri naturali $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$, si definisce il coefficiente binomiale di n su k come

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

In particolare, il coefficiente binomiale gode delle seguenti proprietà:

- il binomiale di n su 0 è uguale ad 1 per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = 1;$$

- il binomiale di n su n è uguale ad 1 per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = 1;$$

- *Legge delle classi complementari*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

²Con "esiti composti" si intendono le sequenze composte dagli esiti dei singoli passaggi.

³T.d.A.

Il coefficiente binomiale può essere calcolato anche utilizzando la relazione di ricorrenza

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{per ogni } n, k \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.1)$$

a partire dalle condizioni iniziali

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Infine, osserviamo che il coefficiente binomiale di n su k corrisponde al coefficiente del k -esimo termine dello sviluppo della potenza n -esima di un binomio

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2.4 I raggruppamenti classici

Classicamente, in combinatoria vengono identificate sei categorie fondamentali di raggruppamenti, a seconda che l'ordine degli elementi del raggruppamento sia significativo o irrilevante, che siano ammesse o meno ripetizioni di elementi, che vengano utilizzati tutti gli elementi a disposizione o soltanto alcuni di essi. Le sei categorie di raggruppamenti sono le seguenti: permutazioni semplici e con ripetizione, disposizioni semplici e con ripetizione, combinazioni semplici e con ripetizione.

Siano $n, k \in \mathbb{N}$ due numeri naturali.

Permutazioni semplici Le permutazioni semplici di n elementi distinti sono tutti i possibili riordini degli n elementi dati.

Il numero delle permutazioni semplici di n elementi si indica con P_n ed è dato da

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!. \quad (2.2)$$

Esempio. Agata, Bice, Carmela, Diana, Ettore e Fedele vanno al cinema ad assistere ad uno spettacolo. Agata si offre di comprare i biglietti, che sono numerati da H1 ad H6. In quanti modi i sei amici possono disporsi ad occupare i posti loro assegnati?

Il problema chiede di contare il numero di modi in cui $n = 6$ persone (distinte) possono essere disposte in ordine, ovvero il numero di permutazioni semplici di $n = 6$ elementi:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Di conseguenza, i sei amici possono occupare i posti loro assegnati in 720 modi differenti.

Permutazioni con ripetizione Le permutazioni con ripetizione di n elementi, di cui alcuni sono ripetuti, sono tutti i possibili riordini degli n elementi dati.

Il numero delle permutazioni con ripetizione di n elementi, in cui ci sono r elementi ripetuti e il primo elemento ripetuto compare k_1 volte, il secondo k_2 volte, $\dots$, l' r -esimo k_r volte, si indica con $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)}$ ed è dato da

$$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}. \quad (2.3)$$

Esempio. Quanti sono gli anagrammi della parola "COMBINATORIO"?

Il problema chiede di contare il numero di modi in cui $n = 12$ lettere, di cui alcune ripetute, possono essere riordinate, ovvero il numero di permutazioni con ripetizione di $n = 12$ elementi, di cui un elemento è ripetuto $k_1 = 2$ volte (la lettera "I") e un altro elemento è ripetuto $k_2 = 3$ volte (la lettera "O"):

$$P_{12}^{(2,3)} = \frac{12!}{2! \cdot 3!} = 39\,916\,800.$$

Di conseguenza, il numero di anagrammi della parola "COMBINATORIO" è 39 916 800.

Disposizioni semplici Sia $k \leq n$. Le disposizioni semplici di classe k di n elementi distinti sono tutte le sequenze ordinate formate da k elementi distinti scelti tra gli n elementi dati.

Il numero delle disposizioni semplici di classe k di n elementi si indica con $D_{n,k}$ ed è dato da

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (2.4)$$

Esempio. Venti atleti partecipano ad una gara di corsa. Saranno premiati soltanto i primi tre classificati. In quanti modi potrà essere composto il podio?

Il problema chiede di contare il numero di modi in cui si possono formare delle sequenze ordinate di $k = 3$ atleti distinti scelti tra $n = 20$, ovvero il numero di disposizioni semplici di classe $k = 3$ di $n = 20$ elementi:

$$D_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6\,840.$$

Di conseguenza, il podio potrà essere composto in 6 840 modi diversi.

Disposizioni con ripetizione Le disposizioni con ripetizione di classe k di n elementi distinti sono tutte le sequenze ordinate formate da k elementi (non necessariamente distinti) scelti tra gli n elementi dati.

Il numero delle disposizioni con ripetizione di classe k di n elementi si indica con $D'_{n,k}$ ed è dato da

$$D'_{n,k} = n^k. \quad (2.5)$$

Esempio. Lucia deve scegliere un nuovo PIN per il suo cellulare. Sapendo che il PIN deve essere composto da 4 cifre, tra quanti possibili PIN Lucia dovrà effettuare la sua scelta?

Il problema chiede di contare il numero di modi in cui si possono formare delle sequenze ordinate di $k = 4$ cifre (non necessariamente distinte) scelte tra $n = 10$ cifre (da 0 a 9), ovvero il numero di disposizioni con ripetizione di classe $k = 4$ di $n = 10$ elementi:

$$D'_{10,4} = 10^4 = 10\,000.$$

Di conseguenza, Lucia dovrà scegliere il suo nuovo PIN tra 10 000 possibili scelte.

Combinazioni semplici Sia $k \leq n$. Le combinazioni semplici di classe k di n elementi distinti sono tutti i raggruppamenti non ordinati formati da k elementi distinti scelti tra gli n elementi dati.

Il numero delle combinazioni semplici di classe k di n elementi, pertanto, è esattamente il numero di sottoinsiemi di cardinalità k di un insieme di cardinalità n ; tale numero si indica con $C_{n,k}$ ed è dato da

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}. \quad (2.6)$$

Esempio. Durante l'ora di educazione fisica, Giuditta deve scegliere 5 compagni e compagne per formare la propria squadra di pallavolo. Se gli alunni della classe sono 21 oltre a Giuditta, quante sono le possibili squadre che la ragazza potrebbe formare?

Il problema chiede di contare il numero di modi in cui si possono formare dei gruppi (non ordinati) di $k = 5$ alunni (distinti) scelti tra $n = 21$, ovvero il numero di combinazioni semplici di classe $k = 5$ di $n = 21$ elementi:

$$C_{21,5} = \binom{21}{5} = \frac{21!}{5! \cdot (21-5)!} = 20\,349.$$

Di conseguenza, Giuditta può formare la sua squadra in 20 349 modi possibili.

Combinazioni con ripetizione Le combinazioni con ripetizione di classe k di n elementi distinti sono tutti i raggruppamenti non ordinati formati da k elementi (non necessariamente distinti) scelti tra gli n elementi dati.

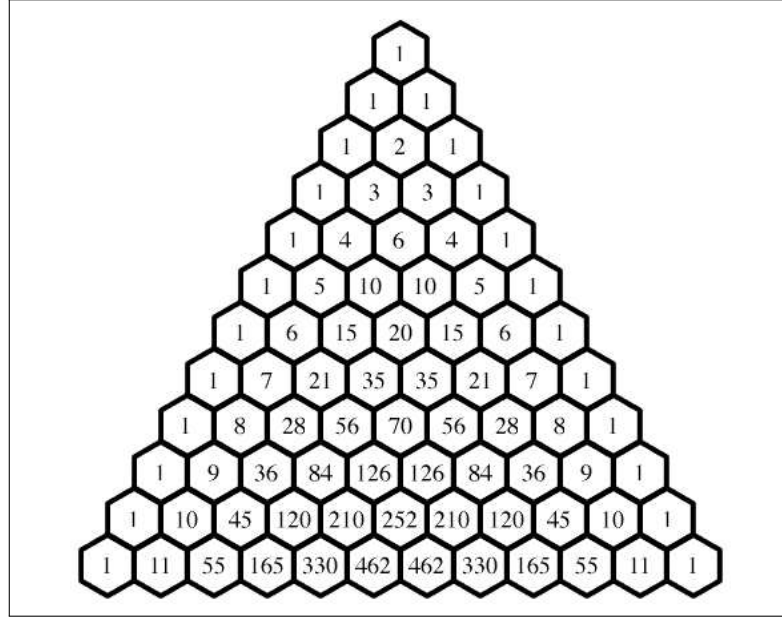


Figura 2.1: Le prime dodici righe del triangolo di Tartaglia-Pascal

Il numero delle combinazioni con ripetizione di classe k di n elementi si indica con $C'_{n,k}$ ed è dato da

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1) \cdot (n+k-2) \cdot \dots \cdot n}{k!}. \quad (2.7)$$

Esempio. Mathias va a comprare delle caramelle nel suo negozio preferito. I gusti disponibili sono fragola, menta, mou, frutti tropicali e limone. Mathias ne vuole acquistare 15. In quanti modi potrà comporre la sua confezione di caramelle?

Il problema chiede di contare il numero di modi in cui si possono formare delle confezioni (non ordinate) di $k = 15$ gusti (non necessariamente distinti) scelti tra $n = 5$, ovvero il numero di combinazioni semplici di classe $k = 15$ di $n = 5$ elementi:

$$C_{5,15} = \binom{5+15-1}{15} = \frac{19!}{15! \cdot (19-15)!} = 3876.$$

Di conseguenza, Mathias può comporre la sua confezione di caramelle in 3876 modi differenti.

2.5 Il triangolo di Tartaglia-Pascal

Il Triangolo di Tartaglia-Pascal (figura 2.1), noto in Italia come Triangolo di Tartaglia, dal matematico Niccolò Fontana detto Tartaglia (1499 ca.–1557),

o più comunemente, nei Paesi occidentali, come Triangolo di Pascal, dal matematico francese Blaise Pascal (1623-1662), ma conosciuto già a partire dal III sec. a.C. in India, Persia e Cina [56], è uno schema numerico che rappresenta i coefficienti binomiali disposti su righe orizzontali.

Più precisamente, l'elemento al posto k -esimo della riga n -esima del Triangolo di Tartaglia-Pascal (dove $n, k \in \mathbb{N}$ sono numeri interi non negativi, con $0 \leq k \leq n$) rappresenta il coefficiente binomiale di n su k , ovvero $\binom{n}{k}$. Pertanto, il Triangolo si costruisce utilizzando la relazione di ricorrenza 2.1: l'elemento al posto k -esimo della riga n -esima si ottiene, infatti, sommando gli elementi ai posti $(k-1)$ -esimo e k -esimo della riga precedente, con l'eccezione del primo e dell'ultimo elemento di ciascuna riga, che sono identicamente uguali ad 1.

Il Triangolo di Tartaglia-Pascal gode di numerose proprietà interessanti, ma è utile particolarmente nel contesto della combinatoria: il coefficiente al posto k -esimo della riga n -esima del Triangolo, infatti, non è altro che il numero di combinazioni semplici di classe k di n elementi, ovvero il numero di modi in cui k elementi distinti possono essere scelti tra n elementi distinti, senza che l'ordine in cui gli elementi vengono selezionati sia rilevante; il Triangolo, dunque, permette di risolvere problemi che coinvolgono combinazioni semplici (con n e k non eccessivamente elevati) svolgendo come uniche operazioni delle semplici addizioni.

Capitolo 3

La didattica del Calcolo Combinatorio

3.1 Formalismi e ragionamento combinatorio

Il calcolo combinatorio è una branca della matematica che è spesso ritenuta di difficile apprendimento [1]. La difficoltà sorge dal fatto che i problemi combinatori sono molto vari e alla maggior parte di essi non corrisponde in maniera diretta una formula da applicare per ottenere il risultato desiderato. Infatti, in letteratura come nei libri di testo, i raggruppamenti combinatori sono tradizionalmente classificati in diverse categorie (permutazioni, disposizioni e combinazioni, con o senza ripetizioni), ma non tutti i possibili quesiti rientrano chiaramente in una di queste categorie, perciò il più delle volte non è possibile risolvere il problema applicando una formula o un algoritmo prestabiliti. Inoltre, apprendendo le formule meccanicamente, gli studenti spesso hanno difficoltà a comprenderne appieno il significato e a individuare qual è la formula corretta da applicare in uno specifico contesto [35], e finiscono per orientare la propria scelta sulle parole chiave presenti nel testo piuttosto che su una comprensione ragionata e flessibile di ciò che è richiesto dal problema [36]. Gli studenti faticano a identificare la struttura di fondo dei problemi combinatori per ascriverli a una data categoria, in quanto la naturale ricchezza del calcolo combinatorio permette di confrontare tra loro i quesiti in maniera non convenzionale, evidenziandone somiglianze o differenze [30].

Eppure, è precisamente per queste ragioni che la combinatoria è un ambito eccellente per sviluppare il pensiero matematico: la difficoltà nell'applicare formule meccanicamente e l'esistenza di più procedimenti validi per risolvere uno stesso problema sono degli ottimi incentivi per indurre a riflettere coscientemente invece che a memorizzare formule non pienamente comprese [16], elaborando di volta in volta una risoluzione adeguata alla richiesta del problema, promuovendo così il ragionamento e le capacità di problem

solving negli alunni [14].

Come osserva Shabnam Kavousian [26], le formule sono uno strumento largamente adoperato in matematica, fisica ed ingegneria, in quanto rappresentano un metodo facile e veloce di rispondere a un quesito; tuttavia in combinatoria vengono spesso usate come surrogato della comprensione e applicate senza discernimento, anche a costo di andare contro la logica e il buonsenso. Kavousian sottolinea, dunque, come la memorizzazione di formule non possa in alcun modo sostituire una comprensione approfondita della matematica, e come la matematica non si possa ridurre a un elenco di formule da imparare a memoria. Negli ambiti STEM in particolare, è molto diffuso un metodo di insegnamento che prevede di introdurre prima gli argomenti in maniera formale e solo successivamente proporre esercizi a cui applicare la conoscenza teorica acquisita [40]. Questo metodo, tuttavia, privilegia la conoscenza formale rispetto a quella applicata e porta a presumere, erroneamente, che una conoscenza teorica preceda di necessità lo sviluppo di applicazioni, diversamente da quanto spesso accade nella pratica; tale metodo, inoltre, favorisce una mentalità per cui i formalismi si sostituiscono a ogni altro tipo di ragionamento. I formalismi sono uno strumento molto utile per rappresentare e trasmettere la conoscenza, ma non riflettono necessariamente lo sviluppo concettuale degli studenti, i quali, invece, possono aver bisogno di basare la comprensione dei formalismi sulle proprie conoscenze e su situazioni non simboliche facilmente accessibili.

3.2 Il ruolo della combinatoria

Come osservato in precedenza, studiare il calcolo combinatorio è un'attività stimolante e niente affatto banale, che richiede di impiegare le proprie capacità di ragionamento per risolvere problemi in assenza di formule e algoritmi adeguati [37]. Più precisamente, osserva Lyn English [17], il calcolo combinatorio favorisce lo sviluppo del pensiero sistematico e l'elaborazione di congetture e di generalizzazioni.

Ma non è questo l'unico pregio della combinatoria. A differenza di molti argomenti della matematica continua, i problemi combinatori sono accessibili fin dai livelli più elementari, perché si basano su semplici tecniche enumerative e propongono domande concrete che non fanno uso di particolari terminologie tecniche, richiedendo davvero pochi prerequisiti matematici [45]. La combinatoria prevede quesiti adatti a studenti di ogni età e capacità [25]: fin dalla tenera età, i bambini possono rappresentare gli insiemi degli esiti con materiali concreti, e successivamente attraverso liste più o meno organizzate e diagrammi ad albero [37].

Strettamente legata alla questione dell'accessibilità della combinatoria, ma abbastanza significativa per essere considerata separatamente, come argomentano Elise Lockwood e colleghi [37], c'è una terza ragione a favore

dello studio del calcolo combinatorio: questa attività aiuta a promuovere l'equità nell'educazione matematica. Infatti, anche gli studenti che presentano carenze nella propria istruzione matematica possono beneficiare della combinatoria come un'occasione per un nuovo inizio [14]; inoltre, incontrare la combinatoria nel proprio percorso educativo contribuisce ad espandere l'idea di ciò che, nella concezione di uno studente, viene studiato dalla matematica, allargando il dominio della disciplina ad argomenti diversi dalle classiche algebra e analisi, spingendo gli studenti a riconsiderare cos'è la matematica e, di conseguenza, anche il proprio rapporto con la materia. La combinatoria, infine, può essere un'opportunità per molti studenti di sentirsi bravi e capaci in matematica e, così, identificarsi maggiormente col dominio.

La natura stessa dei problemi formulati nell'ambito della combinatoria costringe gli studenti a mettere in atto una serie di eccellenti consuetudini matematiche, come difendere e argomentare il proprio ragionamento per giustificarne la validità, oltre a sforzarsi di tradurre un pensiero in formule o espressioni comprensibili e condivisibili, ma anche, al tempo stesso, impegnarsi a capire e analizzare con spirito critico le soluzioni proposte dagli altri [37], imparando a discernere le dimostrazioni valide e rigorose da quelle plausibili ma errate [25]. Una disposizione mentale di tipo combinatorio, sostiene Jagat Kapur [25], prevede di esaminare tutte le diverse possibilità, elencarle e individuare la migliore, permettendo di sviluppare naturalmente un pensiero di tipo computazionale attraverso la scomposizione di un problema complesso in passaggi più semplici o in sottocasi particolari, come ribadiscono anche Lockwood e colleghi [37].

Per concludere, la combinatoria non manca certo di sviluppi e applicazioni utili alla scienza moderna. Restando nell'ambito matematico, sia teorico sia applicato, la combinatoria è adoperata ad esempio:

- in teoria della probabilità (enumerazione di possibilità, distribuzioni discrete di probabilità, cammini aleatori, etc.);
- in statistica;
- in geometria (ricoprimenti piani, figure geometriche, reticolati, etc.);
- in algebra (gruppi simmetrici, potenza di un binomio, matrici, equazioni con soluzioni intere, etc.);
- in teoria dei numeri (numeri figurati, divisori di un naturale, aritmetica modulare, etc.);
- in teoria dei grafi (cammini, colorazione di vertici, spigoli e regioni, etc.);
- in ricerca operativa (determinazione di strade, distribuzione e collocamento di persone e oggetti, organizzazione di comitati e tornei, etc.);

- in matematica ricreativa (quadrati magici, passatempi numerici, scacchi, etc.).

Al di fuori della matematica, la combinatoria presenta ancora utili applicazioni nei settori più disparati, dalla fisica alla chimica, dalla programmazione alla scienza delle comunicazioni, dalla biologia molecolare all'ingegneria elettrica [19, 25, 26].

3.3 Il pensiero combinatorio

Nei suoi studi, il noto psicologo dello sviluppo Jean Piaget teorizza che il pensiero combinatorio non si formi fino ad uno stadio di crescita abbastanza avanzato, indicato dallo studioso come *stadio operatorio formale*, ossia a partire dagli 11-12 anni [23]. Tuttavia, studi più recenti, tra cui quelli compiuti da Lyn English [17], realizzati utilizzando materiali più concreti e quesiti adatti a bambini più piccoli, hanno mostrato come alcuni tipi di ragionamento combinatorio sono presenti già in età più precoce. English raccomanda, inoltre, una serie di buone pratiche volte ad incentivare questo tipo di ragionamento nei bambini e negli adolescenti:

- favorire il pensiero indipendente, ponendo interrogativi piuttosto di fornire istruzioni;
- incoraggiare la flessibilità negli approcci e nelle rappresentazioni, permettendo agli studenti di utilizzare le proprie rappresentazioni e seguire le proprie strategie, per poi confrontarle con quelle adottate dai compagni;
- focalizzarsi sulla struttura dei problemi, al fine di insegnare a riconoscere problemi che possono essere risolti in maniera simile ad altri affrontati in precedenza e adattare le capacità sviluppate a nuovi contesti;
- incoraggiare la condivisione delle risoluzioni, abituando a produrre soluzioni che siano argomentabili di fronte ad altri e a dare feedback sul ragionamento altrui;
- fornire opportunità di formulare problemi, e non soltanto di risolverli.

Un interessante modello del pensiero combinatorio degli studenti è stato elaborato da Elise Lockwood [32], secondo cui il ragionamento combinatorio si basa su tre componenti distinte ma collegate: le formule/espressioni (ossia, espressioni matematiche che portano ad un risultato numerico), i processi di conteggio (ossia, quei processi di enumerazione che una persona intraprende per risolvere un problema di conteggio) e gli insiemi degli esiti (ossia, le collezioni di oggetti che vengono contati attraverso il processo di conteggio).

Lockwood ipotizza che, mentre i membri delle coppie formule/espressioni-processi di conteggio e processi di conteggio-insiemi degli esiti sono direttamente connessi tra loro nella mente dello studente, gli insiemi degli esiti e le formule/espressioni non siano reciprocamente collegati se non attraverso gli stessi processi di conteggio, che permettono di dare un senso alle formule a partire dagli insiemi degli esiti che ci si accinge a contare. Questa ipotesi sottolinea l'importanza dei processi di conteggio nella risoluzione dei problemi combinatori, per stabilire una connessione tra la collezione di oggetti da enumerare e l'espressione matematica che permette concretamente di calcolare il risultato desiderato.

3.4 L'importanza di un conteggio strutturato

I processi di conteggio, alla luce del modello proposto da Elise Lockwood [32], svolgono una funzione fondamentale per creare e mantenere un collegamento tra le formule o le espressioni numeriche e gli insiemi di elementi da contare in un problema combinatorio. Come sottolineato ancora da Lockwood e colleghi [35], prima di applicare una formula è opportuno che gli studenti ragionino sulla natura di ciò che stanno tentando di contare, ovvero sugli insiemi degli esiti, e si basino sulla comprensione di questa per stabilire la procedura più adeguata da attuare per raggiungere una soluzione, invece di lasciarsi guidare soltanto dalle parole chiave presenti nel testo del problema. Al tempo stesso, rimarcano Lockwood e colleghi, per una corretta comprensione del calcolo combinatorio, è importante non perdere di vista i processi di conteggio e i principi che vi stanno alla base e che giustificano l'impiego di determinate espressioni matematiche, in particolare il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio.

A volte, gli studenti hanno difficoltà a riconoscere che il proprio ragionamento, all'apparenza robusto e logicamente fondato, nasconde in realtà una qualche falla, che può portare a contare più volte uno stesso elemento o, viceversa, ad escludere qualche elemento dal conteggio. Per aiutarli a individuare dove si annida l'errore, può essere d'aiuto far riferimento concretamente agli insiemi degli esiti da contare e, più nello specifico, evidenziare un elemento particolare che è stato erroneamente conteggiato più volte o dimenticato dal conteggio difettoso, basando così il ragionamento su qualcosa di concreto e accessibile e, pertanto, più carico di significato rispetto ad una formula [33].

Lavorare concretamente sugli insiemi degli elementi da contare, perciò, può rivelarsi di grande aiuto, ma è fondamentale che questo lavoro sia svolto in maniera strutturata. Solo un insieme ben organizzato, infatti, permette di verificare che tutti i possibili esiti siano stati contati una (e una sola) volta e di giustificare pertanto la correttezza di una soluzione [34]. Ad ogni possibile organizzazione dell'insieme degli esiti corrisponde un particolare processo di conteggio ed è interessante confrontare diverse organizzazioni per mettere in

relazione procedure di conteggio all'apparenza diverse ma che corrispondono ad uno stesso insieme [31]. Chiaramente, non sempre è possibile stilare un elenco completo di tutti gli elementi da contare, ma, come argomentano Elise Lockwood e Bryan Gibson [34], anche un elenco parziale, purché sistematico, può permettere di identificare una struttura nell'insieme degli esiti e indicare così una possibile strategia di conteggio per pervenire alla soluzione.

Ci sono diversi modi per organizzare gli insiemi degli esiti da contare, ad esempio graficamente, utilizzando i diagrammi ad albero, oppure seguendo l'ordine alfabetico (se possibile), o ancora raggruppando gli elementi in sottoinsiemi corrispondenti a diversi sottocasi del problema [31]. Lockwood e Gibson [34] hanno individuato le caratteristiche di un'elencazione produttiva, ossia di un'organizzazione degli elementi che permette di giungere a una soluzione corretta: la notazione adoperata dev'essere adeguata a modellare il problema, l'elenco va organizzato secondo una strategia intenzionale e attuata correttamente (ad esempio, nel caso delle permutazioni, fissando inizialmente il primo elemento e facendo variare gli altri termini, per poi considerare gli altri casi possibili) e, infine, la struttura realizzata dev'essere trasparente in modo tale che l'eshaustività dell'elencazione risulti evidente e, con essa, anche la correttezza della soluzione.

3.5 Errori frequenti e strategie di verifica

Varie studiose e studiosi hanno preso in considerazione le difficoltà tipiche che gli studenti si trovano ad affrontare nel tentativo di rispondere a un quesito di calcolo combinatorio. Già nel 1981, Nitsa Movshovitz-Hadar e Rina Hadass [21] hanno analizzato gli ostacoli più comuni da superare per riuscire a risolvere correttamente un problema combinatorio con un certo grado di complessità. Secondo le studiose, le graduali insidie in cui cimentarsi per venire a capo di un compito combinatorio sono le seguenti: individuare correttamente l'insieme degli eventi richiesto dal problema, scegliere una notazione che codifichi le informazioni necessarie in maniera appropriata, scindere il problema complessivo in un insieme di problemi più piccoli, ideare un metodo sistematico per contare gli eventi, fissare una o più variabili e scegliere quale/i vincolo/i imporre, mettere effettivamente in atto il piano di conteggio ideato e, infine, riuscire a generalizzare la soluzione.

Secondo altri studi [1, 3, 4, 26], vari sono gli errori più comuni propri della risoluzione scorretta dei problemi di tipo combinatorio, che possono occorrere singolarmente o accumularsi:

- un'elencazione non sistematica dei possibili eventi, che procede per tentativi e non segue uno schema ordinato;

- un uso scorretto dei diagrammi ad albero, nel caso in cui lo studente fa uso dei diagrammi ma li costruisce in maniera errata e/o li interpreta in modo sbagliato;
- errori di ordine, ossia tenere conto dell'ordinamento degli elementi quando questo è irrilevante o, viceversa, non considerarlo quando è significativo, o, ancora, considerare una scelta come successiva ad un'altra quando in realtà l'ordine delle due è ininfluenza;
- errori di ripetizione, ossia considerare la ripetizione di oggetti possibile quando non lo è o, viceversa, trascurarla quando è possibile, o, ancora, tralasciare i limiti imposti quando la ripetizione è possibile (ad esempio, quante volte un oggetto può ripetersi o quali oggetti possono ripetersi o meno);
- confondere il tipo di oggetti, ossia trattare come distinti due eventi indistinguibili o, viceversa, ritenere indistinguibili due eventi distinti;
- confondere il tipo di celle, ossia trattare come distinti due raggruppamenti indistinguibili o, viceversa, ritenere indistinguibili due raggruppamenti distinti;
- errori di partizionamento, ossia considerare una partizione in cui l'unione di tutti i sottoinsiemi non coincide con l'insieme di partenza o dimenticare alcune possibili partizioni;
- errore di over- o under-counting, quando un elemento viene contato più di una volta oppure escluso dal conteggio; un caso frequente di over-counting, evidenziano Scott Annin e Kevin Lai [1], si ha quando, nei problemi che impongono una condizione minima (es: formare un comitato composto da almeno tre donne), gli studenti contano separatamente le occorrenze che soddisfano alla condizione (le tre donne richieste dalla condizione minima) e le eventuali ulteriori occorrenze (le altre donne che possono far parte del comitato), trovandosi così a tenere conto più volte di uno stesso elemento;
- errore di esclusione, messo in rilievo da Carmen Batanero e colleghi [4], per cui gli oggetti che si ripetono vengono considerati una volta sola.

Batanero e colleghi [4] e Shabnam Kavousian [26] sottolineano anche alcuni errori relativi alla risoluzione di problemi in generale, riscontrabili in vari ambiti della matematica e nel calcolo combinatorio in particolare:

- fraintendimento del testo del problema, ossia interpretare erroneamente cosa è richiesto dal problema;
- uso di operazioni matematiche inappropriate, come la moltiplicazione al posto dell'addizione o viceversa;

- errori legati alle formule, ad esempio travisare il significato di una formula, utilizzare parametri inopportuni o memorizzare scorrettamente la formula stessa;
- risposta intuitiva scorretta, quando gli studenti si affidano a una risposta che intuitivamente può sembrare corretta ma non lo è;
- mancata applicazione di una proprietà; ad esempio, in un problema che richiede di dividere in due sottoinsiemi un insieme, moltiplicare il numero di modi possibili di generare il primo sottoinsieme e il numero di modi possibili di generare il secondo per ottenere il numero di possibili suddivisioni, dimenticando che, una volta che il primo sottoinsieme è stato formato, il secondo è automaticamente determinato;
- difficoltà nel verificare la soluzione e rilevare eventuali errori.

Effettivamente, non è affatto immediato verificare la correttezza di una risposta ad un problema combinatorio. Michal Eizenberg e Orit Zaslavsky [15], consapevoli di questa difficoltà, hanno stilato un elenco di possibili strategie di verifica da mettere in atto dopo aver risolto un problema di calcolo combinatorio:

- ripercorrere i passaggi della risoluzione cercando di identificare errori; questo, sostengono gli autori, è il metodo più utilizzato, ma è anche il meno proficuo dal punto di vista di un effettivo riconoscimento di errori;
- aggiungere giustificazioni parziali o globali alla risposta, metodo utile a identificare piccoli errori nel corso di una risoluzione nel complesso corretta;
- valutare la ragionevolezza della risposta, ad esempio calcolando la dimensione dello spazio degli eventi e verificando che non sia inferiore a quella dell'insieme dei risultati proposta nella soluzione; metodo utile in determinati casi, ma non sempre facilmente attuabile, permette di individuare una soluzione sbagliata però non il punto in cui si colloca l'errore all'interno della procedura risolutiva;
- modificare alcuni componenti della risoluzione, ad esempio riproporzionando il problema con numeri più piccoli e facilmente gestibili; è una strategia che può essere molto efficace, ma in mani inesperte rischia di condurre accidentalmente a formulare problemi non isomorfi a quello di partenza;
- utilizzare una diversa strategia di risoluzione e confrontare i risultati; è un metodo abbastanza utile, che tuttavia talvolta porta a sostituire una prima soluzione corretta con una errata.

Capitolo 4

Le scelte metodologiche della sperimentazione didattica

Alla luce delle teorie dell'apprendimento matematico, prese in analisi nel capitolo 1, e degli studi più specifici effettuati in relazione alla didattica del calcolo combinatorio, passati in rassegna nel capitolo 3, possiamo ora stabilire i tre pilastri principali su cui si è deciso di fondare l'ideazione e la realizzazione della sequenza didattica.

4.1 Un approccio per problemi

Sulle orme del pensiero costruttivista, avendo presenti le fasi dell'azione didattica elaborate da Brousseau, si è cercato di sviluppare una sequenza didattica che assegni un ruolo attivo agli studenti, protagonisti del proprio processo di apprendimento e costruttori del proprio sapere. Si è, dunque, scelto di non utilizzare il tradizionale modello di lezione frontale, secondo il quale l'insegnante spiega alla classe un nuovo argomento e propone, successivamente, dei compiti relativi all'argomento sui quali gli alunni devono esercitarsi, mettendo in pratica quanto appreso durante la spiegazione teorica. Si è preferito, invece, proporre di volta in volta agli studenti dei problemi che costituiscano per loro una novità, senza tuttavia essere fuori dalla loro portata, in modo da dar loro l'opportunità di cercare di elaborare una soluzione autonomamente, per poi confrontare con la guida dell'insegnante le diverse strategie emerse nei vari gruppi, cercando di capire dove si trova l'errore nelle strategie che si rivelano scorrette e quali, invece, sono le caratteristiche delle soluzioni corrette, e, soltanto alla fine, formalizzare i contenuti affrontati nel corso della lezione. L'intenzione, perciò, è di non fornire regole da applicare meccanicamente negli esercizi ma problemi nei quali mettere in gioco in prima persona il proprio ragionamento, per affinare le capacità di problem solving e costruire attivamente le proprie conoscenze, in collaborazione coi compagni.

In classe, infatti, si è deciso di far collaborare gli studenti in piccoli gruppi, in quanto numerosi studiosi concordano sul fatto che in gruppo si ottengono migliori risultati di apprendimento [10, 13, 20, 24, 28, 38], ma anche perché il lavoro di gruppo presenta svariati vantaggi [9]:

- in gruppo si hanno a disposizione più risorse, perché si attinge alle conoscenze e alle capacità di più persone, e ciò permette di analizzare un problema da diverse prospettive;
- il lavoro di gruppo stimola la creatività degli alunni;
- discutere di un argomento in gruppo fa sì che il ricordo resti impresso in maniera più vivida e duratura nella memoria degli studenti;
- il lavoro di gruppo favorisce l'impegno e il coinvolgimento degli studenti, accrescendo la soddisfazione nell'elaborare una soluzione.

Inoltre, la collaborazione in gruppo promuove due capacità molto importanti in matematica: la capacità di elaborare argomentazioni solide e fondate a favore della propria tesi, in grado di convincere i compagni, e la capacità di comunicare e trasmettere con efficacia le proprie idee e argomentazioni agli altri studenti.

Per il lavoro a casa, invece, si è preferito assegnare agli studenti dei compiti da svolgere individualmente, così che tutti gli alunni possano mettersi alla prova utilizzando le proprie capacità e consolidare quanto appreso durante la lezione.

Inoltre, per introdurre il Triangolo di Tartaglia-Pascal, argomento che richiede almeno una breve spiegazione teorica, si è scelto di adottare la metodologia della *flipped classroom* o insegnamento capovolto [27, 55], secondo cui la spiegazione teorica è sostituita dallo studio individuale, da svolgersi a casa prima della lezione vera e propria, preferibilmente attraverso la visione di videolezioni fornite dall'insegnante, permettendo di dedicare il tempo dell'incontro in aula ad attività pratiche sotto la guida dell'insegnante e al chiarimento di dubbi sorti durante il momento di studio individuale (si veda la scheda 5.6, pag. 45).

Per quanto riguarda poi la scelta e l'organizzazione dei problemi, in alcuni momenti (ad esempio, si veda la scheda 5.2, pag. 41) si sono proposti problemi combinatori simili tra loro ma di complessità crescente: prima problemi risolvibili anche elencando manualmente i casi possibili e poi problemi che richiedono l'uso di strategie di conteggio più accorte poiché riguardanti numeri più elevati, per far sperimentare agli studenti come la combinatoria nasca dall'esigenza di contare anche grandi quantità di casi senza doverli elencare esplicitamente e per permettere loro di elaborare su quantità più ridotte delle tecniche da estendere poi a casi più complessi.

Inoltre, nel corso degli incontri, si è evidenziato come, spesso, un problema ammetta più di una risoluzione corretta, confrontando le strategie proposte dagli alunni ed, eventualmente, proponendone di ulteriori: il calcolo combinatorio è un settore della matematica che si presta estremamente bene a smentire il preconceito degli studenti secondo cui un problema ammetterebbe sempre una e una sola soluzione, grazie al fatto che diverse strategie di conteggio e/o elencazione danno origine a diversi metodi risolutivi ed espressioni numeriche. In particolare, si è cercato di presentare problemi che favoriscano una varietà di soluzioni (ad esempio, si veda la scheda 5.7, pag. 48) e stimolino la creatività risolutiva negli studenti, incoraggiandoli a condividere le proprie strategie e valorizzandone la diversità.

Infine, per incentivare la flessibilità nel ragionamento combinatorio, sono stati assegnati anche problemi ‘al contrario’, cioè non solo problemi che chiedono di contare i possibili raggruppamenti ottenibili a partire da un certo numero di elementi dati ma anche problemi che chiedono quanti elementi sono necessari per ottenere un certo numero di raggruppamenti (ad esempio, si veda la sesta domanda della scheda 5.6, pag. 45).

4.2 Una matematica vicina alla realtà quotidiana

La risoluzione di problemi è centrale in matematica, sia come obiettivo di apprendimento, sia come strumento didattico; purtroppo, però, spesso i problemi proposti in classe sono estremamente stereotipati ed artificiosi, lontani dalla realtà degli alunni, che imparano ben presto a riconoscere i problemi come equazioni malamente dissimulate. Di fronte alla necessità di risolvere un problema, gli studenti si abituano ad attuare una lettura selettiva del testo, alla ricerca dei dati che serviranno a trovare la soluzione (ovvero tutti e soli i dati presenti nel testo del problema, come da contratto didattico), ignorando il contesto in quanto cornice priva di significato rispetto all’insieme dei dati. Così facendo, gli alunni non fanno riferimento al senso della situazione descritta e non si affidano al proprio buonsenso per elaborare considerazioni realistiche in merito al problema [6, 42, 47]. Un esempio di quest’abitudine assunta dagli studenti si può riconoscere nelle risposte al quarto problema della scheda 5.1 (pag. 38), in cui agli studenti viene chiesto di contare il numero di possibili targhe automobilistiche che si possono ottenere utilizzando lo standard italiano¹: diversi studenti forniscono risposte evidentemente inverosimili, come 1 452 possibili targhe, senza far riferimento a una stima di quale può essere il numero reale di macchine circolanti, mentre un’unica studentessa, dopo aver proposto come risultato 676 000 targhe, aggiunge di

¹Ovvero targhe costituite dalla sequenza di 2 cifre, 3 lettere e 2 numeri; si tratta in realtà di una leggera semplificazione, dal momento che le lettere "I", "O", "Q" e "U" non vengono utilizzate nell’attuale sistema di immatricolazione italiano.

non essere sicura poiché "sono troppe poche targhe" (si veda figura 6.7d, pag. 62).

L'intenzione alla base di questa sequenza didattica, invece, è di proporre problemi che siano vicini alla realtà degli alunni e che possano assumere per loro un significato quanto possibile concreto. Si è, perciò, evitato di utilizzare i classici problemi combinatori che fanno artificiosamente riferimento a estrazioni di biglie colorate, lanci di dadi o di monete, mani di carte da poker e numeri del lotto. Il calcolo combinatorio, al contrario, è un argomento che fornisce un ottimo pretesto per formulare problemi legati alle più disparate occasioni della vita quotidiana: una discussione all'interno di un gruppo di amici per scegliere i posti da occupare in aereo (scheda 5.3, pag. 41), un ragazzo sbadato che deve cambiare il PIN del cellulare (quinta domanda della scheda 5.4, pag. 42), le coppie da formare per un torneo di tennis in una classe in cui non tutti gli alunni sono disposti a stare in coppia con chiunque (quinta domanda della scheda 5.9, pag. 50), e così via. Anche un quesito come quello della scheda 5.7 (pag. 48), inizialmente pensato come una metaforica passeggiata su di un reticolo², è stato adattato in modo da rappresentare una passeggiata sulle vie ortogonali di New York, raffigurate in una carta geografica della città.

L'obiettivo, dunque, è quello di coinvolgere gli studenti attraverso problemi più vicini alla loro realtà, promuovendo un diverso atteggiamento verso la matematica, vista non come un enigmatico mondo a sé stante popolato da problemi irreali, ma come uno strumento pratico per capire e interpretare il mondo concreto, riconoscendo che la matematica permea innumerevoli aspetti della vita quotidiana, ovvero cercando di "matematizzare il quotidiano e quotidianizzare la matematica" [6].

4.3 Una combinatoria senza uso di formule e nomenclatura non necessarie

Il linguaggio della matematica è spesso percepito come un ostacolo all'apprendimento della disciplina da parte degli studenti, che lo ritengono eccessivamente complicato e distante dalla realtà [18, 51]. Chiaramente, il linguaggio matematico si è sviluppato nel corso del tempo secondo precise necessità funzionali, e imparare la matematica significa anche imparare a comunicare attraverso il suo linguaggio in maniera adeguata e precisa; tuttavia, è dovere dell'insegnante trasmettere i contenuti della matematica nel modo più chiaro ed efficace possibile, eliminando quando possibile le difficoltà non necessarie.

Una difficoltà del linguaggio matematico, in particolare, risiede nella presenza all'interno della terminologia della matematica, così come in quella di altre scienze, di due tipologie di lemmi [44]:

²Problema tratto da [39] (citato in [45]).

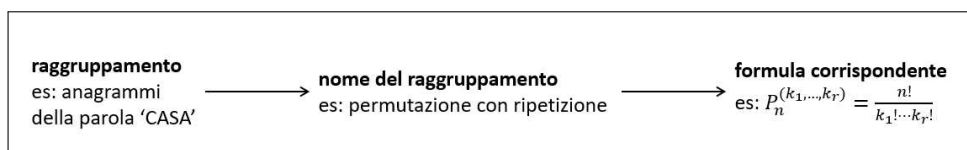


Figura 4.1: Il doppio passaggio necessario per selezionare la formula corretta nel calcolo combinatorio.

- i *termini*, che hanno un significato solamente nel contesto matematico (ad esempio: 'polinomio', 'esagono', 'coseno');
- le *parole-termini*, che presentano un significato nel contesto matematico ma assumono anche ulteriori significati nel linguaggio comune (ad esempio: 'altezza', 'massimo', 'campo').

I primi, dunque, possono risultare difficili da ricordare, in quanto rappresentano una novità per il discente, mentre i secondi presentano una difficoltà di tipo diverso, dovuta al fatto che gli studenti si trovano a dover integrare un nuovo significato ad uno vecchio, al quale sono già abituati da un uso nella comunicazione quotidiana e che può andare ad interferire con il nuovo significato.

La presenza di questa polisemia è un particolare fattore di disturbo anche nell'apprendimento del calcolo combinatorio: la classificazione dei raggruppamenti combinatori, infatti, si basa su parole-termini come 'disposizioni' o 'combinazioni', che hanno un significato ben preciso in combinatoria, il quale non corrisponde però a quello nel linguaggio comune. Ad esempio, osserviamo come il codice necessario ad aprire un lucchetto o una cassaforte prenda comunemente il nome di 'combinazione', ma matematicamente rappresenti una 'disposizione', in quanto l'ordine delle cifre del codice è significativo. La duplicità di significato di queste parole-termini può, perciò, risultare fuorviante per gli studenti nel momento in cui devono identificare un raggruppamento combinatorio, causando errori dovuti non tanto alla comprensione matematica dell'argomento quanto a difficoltà dipendenti dal linguaggio.

Un'ulteriore complicazione legata al linguaggio del calcolo combinatorio è la necessità di effettuare un doppio passaggio per selezionare la formula corretta da applicare nella risoluzione di un problema o esercizio (figura 4.1): di fronte ad un particolare raggruppamento combinatorio, lo studente deve in un primo momento riconoscere il raggruppamento e identificarne correttamente il nome, e in un secondo momento ricordarsi la formula che corrisponde al nome, col rischio di commettere errori in diversi momenti della procedura.

Tra l'altro, come approfondito nel capitolo 3.1, la nomenclatura dei raggruppamenti classici e, con essa, le formule corrispondenti sono ben lontane dall'esaurire tutti i possibili raggruppamenti che si possono incontrare

Disposizioni con ripetizione

Calcola.

Teoria a p. α5

41 AL VOLO $D'_{3,1}, D'_{2,6}, D'_{5,2}, D'_{10,3}.$

42 $D'_{6,2} - D_{6,2} + D'_{7,2}$ [55]

43 $12\left(D'_{3,3} - \frac{1}{4}D'_{4,3}\right): D_{3,2}$ [22]

44 $\frac{1}{2}D_{4,2} - D'_{2,3} + \frac{1}{3}D'_{3,3}$ [7]

45 TEST Un'impresa codifica le proprie merci utilizzando tre cifre diverse da 0, non necessariamente diverse tra loro. Il numero di merci che è possibile codificare è:

☐ A 729.
 ☐ B 6561.
 ☐ C 1000.
 ☐ D 720.
 ☐ E 504.

46 ESERCIZIO GUIDA Si lanciano due dadi, uno dopo l'altro. Quanti sono i casi possibili? Quanti sono i casi in cui entrambe le facce presentano numeri pari?

Rispondiamo alla prima domanda. Ogni dado ha 6 numeri e in un lancio lo stesso numero si può presentare in entrambi i dadi. Abbiamo quindi delle disposizioni con ripetizione. Tutti i casi che si possono presentare sono:

$D'_{6,2} = 6^2 = 36.$

$D'_{n,k} = n^k$

Per la seconda domanda, abbiamo $n = 3$ e $k = 2$. I casi in cui le due facce sono entrambe pari sono:

$$D'_{3,2} = 3^2 = 9.$$

47 Indica quanti numeri di tre cifre, anche ripetute, si possono formare con gli elementi del seguente insieme.

$A = \{3, 5, 6, 7, 8\}$ [125]

48 In un'urna ci sono dieci palline numerate da 1 a 10. Per tre volte si estrae una pallina, rimettendola ogni volta dentro l'urna. Calcola le possibili terne ordinate che si possono ottenere. [1000]

Figura 4.2: Alcuni esercizi tratti dal libro di testo "Manuale blu 2.0 di matematica" [5].

nella risoluzione di un problema combinatorio; inoltre, l'applicazione meccanica delle formule allontana gli studenti da una comprensione profonda delle stesse e comporta spesso una difficoltà nella scelta della formula corretta da utilizzare, al punto che gli studenti spesso basano la propria scelta più su una lettura selettiva del problema alla ricerca di parole chiave [50] ('ordinatamente', 'distinti', 'ripetute', etc.) che su una reale comprensione del significato del problema. A questo comportamento contribuiscono alcuni libri di testo, che presentano buona parte degli esercizi già suddivisi in categorie sulla base delle formule necessarie per la risoluzione, così che lo studente debba soltanto fare lo sforzo di leggere il titolo del paragrafo per sapere quale formula applicare, o addirittura propongono esercizi in cui viene richiesto soltanto di calcolare il numero di un certo tipo di raggruppamenti, riducendo la combinatoria a sterili calcoli (ad esempio, si veda la figura 4.2, pag. 34).

Il calcolo combinatorio rappresenta, invece, un'eccellente occasione per esercitare le capacità di problem solving degli alunni e stimolarli a ragionare in maniera creativa, sviluppando la propria originale strategia risolutiva a partire dall'elaborazione di un conteggio strutturato; perciò, alla luce delle considerazioni presentate in queste pagine, si è deciso di formulare una sequenza didattica basata sulla risoluzione di problemi di vario genere ma non categorizzati a seconda delle classiche tipologie di raggruppamenti, e, parallelamente, di non introdurre le singole formule per il conteggio di permutazioni semplici, permutazioni con ripetizioni, e così via, ma di proporre unicamente il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio come strumento di calcolo essenziale per la risoluzione dei problemi, affiancato soltanto dal fattoriale e dal coefficiente binomiale al fine di snellire la notazione e, nel caso del coefficiente binomiale, esplicitare il collegamento della combinatoria con il Triangolo di Tartaglia-Pascal. In questa maniera, il focus della sequenza didattica non sono le formule e la loro applicazione, ma la risoluzione di problemi attraverso cui gli studenti stessi possono costruire direttamente le proprie conoscenze e le proprie strategie risolutive basandosi, appunto, sul Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio.

Capitolo 5

Il progetto didattico

La sequenza didattica è stata ideata per presentare gli elementi fondamentali del Calcolo Combinatorio in una classe IV di un liceo scientifico, nel corso di quattro incontri della durata complessiva di 7 ore.

5.1 Struttura della sequenza didattica

La sequenza didattica è stata strutturata come segue:

- Una valutazione delle conoscenze pregresse degli alunni, da svolgere individualmente a casa prima degli incontri;
- Un primo incontro della durata di due ore, durante cui introdurre e applicare il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio attraverso due attività a gruppi;
- Un secondo incontro della durata di due ore, durante cui consolidare l'apprendimento del Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio ed evidenziare la distinzione tra raggruppamenti ordinati e non ordinati attraverso un'attività a gruppi, al termine della quale saranno introdotti i coefficienti binomiali;
- Un terzo incontro della durata di due ore, durante cui approfondire i metodi di conteggio di raggruppamenti non ordinati, anche con l'uso del Triangolo di Tartaglia-Pascal, e svolgere un'attività a gruppi mirata a stimolare il ragionamento matematico attraverso la risoluzione di un problema open-ended;
- Un quarto incontro della durata di un'ora, durante cui gli alunni svolgeranno individualmente una scheda di verifica delle conoscenze acquisite durante il percorso.

5.2 Prima degli incontri

Valutazione delle conoscenze pregresse. L'insegnante della classe consegna agli alunni la scheda 5.1, che prevede una valutazione delle eventuali conoscenze pregresse nell'ambito del calcolo combinatorio. Alla classe viene fatto presente che la scheda non sarà valutata ai fini di scrutinio e viene raccomandato di riportare nel foglio non solo la risposta finale ma anche il ragionamento sottostante. Gli alunni completano individualmente la scheda a casa e la riconsegnano all'insegnante prima dell'inizio degli incontri.

5.3 Primo incontro (2h)

Svolgimento a gruppi di una scheda per introdurre il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio. La classe viene suddivisa in gruppi di tre o quattro persone, formati precedentemente dall'insegnante al fine di renderli il più possibile equilibrati. A ogni studente viene distribuita una copia della scheda 5.2, finalizzata ad introdurre il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio. Gli alunni risolvono la scheda in gruppo, avendo a disposizione circa 15 minuti.

Formalizzazione del Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio e del fattoriale. Allo scadere del tempo, ciascun gruppo consegna un foglio con lo svolgimento della scheda; gli svolgimenti vengono fotografati e proiettati sulla lavagna multimediale. Le risposte degli alunni vengono analizzate alla lavagna, con l'aiuto di mezzi grafici come il diagramma ad albero, al fine di giustificare il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio. Vengono proiettate alcune slide (presentazione A.1, vedi Appendice A) per introdurre e definire il fattoriale, come strumento utile per snellire la notazione, e per formalizzare il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio. L'enunciato del Principio viene letto in classe e vengono fornite spiegazioni delle condizioni sotto cui il principio è valido, anche attraverso controesempi.

Svolgimento a gruppi di una scheda per applicare il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio. Mantenendo i gruppi precedentemente formati, a ciascun alunno viene distribuita la scheda 5.3, finalizzata a consolidare la comprensione del Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio, che viene applicato a nuovi quesiti. Gli alunni risolvono la scheda in gruppo, avendo a disposizione circa 15 minuti.

Confronto delle risoluzioni della scheda. Allo scadere del tempo, ciascun gruppo consegna un foglio con lo svolgimento della scheda; gli svolgimenti vengono fotografati e proiettati sulla lavagna multimediale. La classe,

Leggi le seguenti domande e prova a rispondere. Questo è solo un test iniziale per capire se conosci già qualcosa del prossimo argomento, il calcolo combinatorio, quindi non preoccuparti se non sai come rispondere!

Emma esce con gli amici e va a mangiare un hamburger. Il cameriere le consegna il menù, che prevede diverse opzioni:

- un hamburger a scelta tra manzo, pollo o vegetale;
- un tipo di pane a scelta tra il classico pane da hamburger o la ciabatta rustica;
- una salsa a scelta tra ketchup, maionese, salsa rosa, salsa BBQ e senape.

In quanti modi diversi Emma può comporre il suo panino?

Svolgimento:

Risposta:

Quanti sono i possibili anagrammi (anche privi di senso) che puoi formare con le lettere del tuo nome?

Svolgimento:

Risposta:

Scheda 5.1a

Il Commissario Basettoni ha messo a disposizione di Topolino ben otto agenti per dare la caccia al ricercato numero uno, Pietro Gambadilegno. Per organizzare la missione, Topolino forma una squadra speciale di tre agenti. In quanti modi diversi Topolino può selezionare gli agenti che formeranno la squadra?	
Svolgimento:	
Risposta:	
	In Italia, le targhe delle auto sono formate da una sequenza di due lettere, tre numeri e altre due lettere. Quante sono le possibili targhe che si possono generare seguendo questa regola?
Svolgimento:	
Risposta:	

Scheda 5.1b

Leggete attentamente le seguenti domande e rispondete motivando il vostro ragionamento.

- A. Andrea ama molto leggere e, per farsi un regalo, decide di andare in libreria a comprarsi un libro. Nella sua libreria preferita trova due libri fantasy e tre libri gialli che gli interessano. In quanti modi Andrea può scegliere che libro comprare?
- B. Andrea è davvero indeciso perché gli piacciono molto sia i fantasy che i gialli, quindi alla fine decide di comprare due libri, uno fantasy e uno giallo. In quanti modi Andrea può scegliere i due libri da comprare?
- C. Karim, Sofia e Carolina vanno in vacanza in Puglia. Hanno prenotato i biglietti del treno e gli sono stati assegnati i posti 10, 11 e 12 nella carrozza 4. In quanti modi diversi i tre amici possono sedersi nel treno?
- D. Samuele, Nadia, David, Luisa e Rebecca, invece, vanno in vacanza in Grecia. Hanno prenotato i biglietti dell'aereo e gli sono stati assegnati i posti 3A, 3B, 3C, 3D e 3E. In quanti modi diversi i cinque amici possono sedersi nell'aereo?

Scheda 5.2

Leggete attentamente le seguenti domande e rispondete motivando il vostro ragionamento.

- A. Samuele, Nadia, David, Luisa e Rebecca vanno in vacanza in Grecia. Hanno prenotato i biglietti dell'aereo e gli sono stati assegnati i posti 3A, 3B, 3C, 3D e 3E. In quanti modi diversi i cinque amici possono sedersi nell'aereo se Samuele vuole stare al finestrino (posto 3A)?
- B. E, invece, se né Nadia, né Samuele, né Luisa vogliono sedersi accanto ad uno sconosciuto (posto 3E)?
- C. All'ultimo minuto, Samuele, Luisa e Rebecca cambiano idea e decidono di andare in campeggio con la sorella di Luisa. Purtroppo è troppo tardi per cancellare la prenotazione del volo, quindi Nadia e David si trovano con ben cinque posti tutti per loro. In quanti modi diversi possono sedersi nell'aereo?

Scheda 5.3

in plenaria, confronta le risoluzioni proposte dagli alunni, al fine di identificare quali siano i possibili svolgimenti corretti. Si evidenzia come, in molti casi, procedimenti diversi possono condurre alla risposta esatta.

Assegnazione dei compiti per casa. Viene assegnata la scheda 5.4 da svolgere individualmente come compito per casa, al fine di consolidare l'apprendimento del Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio e applicarlo a diversi contesti.

5.4 Secondo incontro (2h)

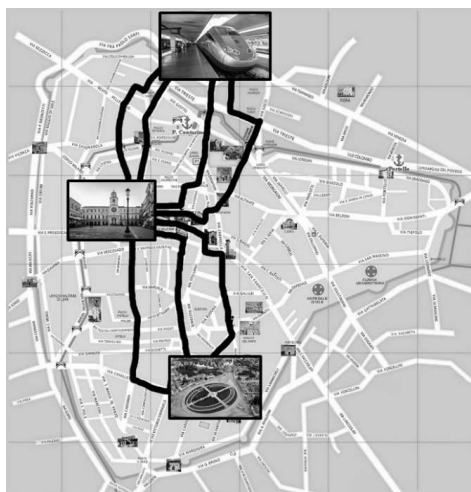
Correzione dei compiti per casa. Viene corretta in plenaria la scheda 5.4. Studenti diversi si offrono volontari o vengono chiamati a condividere e giustificare il proprio svolgimento dei vari quesiti.

Svolgimento a gruppi di una scheda per differenziare i raggruppamenti ordinati e non ordinati. La classe viene suddivisa in gruppi di tre o quattro persone, formati precedentemente dall'insegnante al fine di renderli il più possibile equilibrati. A ogni studente viene distribuita una copia della scheda 5.5, finalizzata ad introdurre la distinzione tra raggruppamenti in cui l'ordine è significativo e raggruppamenti in cui l'ordine non ha importanza. Gli alunni risolvono la scheda in gruppo, avendo a disposizione circa 15 minuti.

Formalizzazione e introduzione del coefficiente binomiale. Allo scadere del tempo, ciascun gruppo consegna un foglio con lo svolgimento della scheda; gli svolgimenti vengono fotografati e proiettati sulla lavagna multimediale. A partire dalle risoluzioni proposte dagli alunni, si fa notare alla classe come alcuni raggruppamenti implicino un ordinamento mentre altri no. Si fa osservare, inoltre, che per contare il numero di raggruppamenti non ordinati è possibile contare invece il numero di raggruppamenti ordinati e poi dividere per il numero dei possibili ordinamenti del raggruppamento. Vengono proiettate alcune slide (presentazione A.2, vedi Appendice A) per introdurre e definire il coefficiente binomiale, come strumento utile per snellire la notazione.

Assegnazione dei compiti per casa. Viene assegnata la scheda 5.6 da svolgere individualmente come compito per casa. La scheda prevede la visione di tre brevi video introduttivi sul Triangolo di Tartaglia-Pascal e la risoluzione di alcuni quesiti correlati. Il primo video (video A.3, vedi Appendice A) consiste in un'introduzione generale al Triangolo di Tartaglia-Pascal, alla sua storia e alle sue proprietà; il secondo video (video A.4, vedi Appendice A) presenta una spiegazione più dettagliata dell'utilizzo del Triangolo per

PER CASA: Leggi attentamente le seguenti domande e rispondi motivando il tuo ragionamento.



A. Daniele è in Prato della Valle e deve andare in stazione a prendere il treno per Venezia. Prima però vuole passare da Piazza dei Signori a salutare i suoi amici. Supponendo che gli itinerari più veloci per andare da Prato alla piazza e dalla piazza alla stazione siano quelli segnati nella cartina, quanti sono i percorsi possibili tra cui Daniele dovrà scegliere per andare da Prato alla stazione?

- B. L'agente Martini deve scoprire il codice di accesso ad un laboratorio supersegreto. Un infiltrato le ha già rivelato che il codice è formato da 4 lettere. A giudicare da quanto sono consumati i pulsanti del tastierino davanti al cancello del laboratorio, le lettere che compongono il codice sono G, M, R e W. Quante sono i possibili codici che l'agente dovrà provare per riuscire ad entrare nel laboratorio?
- C. L'agente Martini riesce a superare il cancello, solo per scoprire che c'è anche una porta blindata da aprire! Anche qui l'esperta agente osserva attentamente i tasti e riconosce che le lettere del codice sono F, H e K. Di sicuro anche questo codice è formato da 4 lettere, ma il tasto della H è più consumato, quindi l'agente deduce che la lettera H è ripetuta due volte. Quante sono i possibili codici che l'agente dovrà provare per riuscire superare anche questa porta?
- D. È sabato sera e Andrej, Beatrice, Carola e Damiano vanno in pizzeria. In quanti modi diversi possono disporsi attorno alla tavola rotonda che è stata preparata per loro?



Scheda 5.4a

- E. Giacomo deve cambiare il PIN del suo cellulare, che deve essere lungo quattro cifre. Non vuole scegliere un codice troppo complicato, perché sa già che rischierebbe di dimenticarselo. Decide, quindi, di formare il PIN scegliendo solo tra le cifre 0, 1, 2 e 3 e aggiunge la condizione che almeno tre delle quattro cifre del PIN siano zeri. Tra quanti possibili PIN di questo tipo dovrà scegliere?
- F. Mariam e la sua vicina di casa sono molto amiche e durante il lockdown, per passare il tempo, decidono di comunicare dalla finestra usando delle bandiere colorate come segnali in codice. Mariam propone di utilizzare delle bandierine formate da strisce orizzontali di colori tutti diversi. Sapendo che le due amiche vogliono codificare 150 diversi messaggi, qual è il numero minimo di colori di cui avranno bisogno?

Scheda 5.4b

Leggete attentamente le seguenti domande e rispondete motivando il vostro ragionamento.

- A. La professoressa di matematica della classe di Alice organizza una competizione a cui partecipano tutti gli alunni e le alunne. La professoressa ha preparato tre premi diversi per i tre studenti o studentesse che si troveranno in testa alla classifica. In quanti modi potranno essere assegnati i premi, sapendo che la classe è composta da 24 studenti oltre ad Alice?



- B. Il professore di inglese della classe di Alice ha ottenuto una borsa di studio per mandare tre studentesse o studenti della classe a studiare due settimane a Londra. Perché non ci siano ingiustizie, il professore decide di estrarre a sorte i nomi dal registro di classe. In quanti modi potrà essere composto il fortunato gruppetto che partirà per l'Inghilterra?

Scheda 5.5

sviluppare le potenze di un binomio; il terzo video (video A.5, vedi Appendice A), infine, evidenzia la relazione tra le entrate del Triangolo e i coefficienti binomiali.

5.5 Terzo incontro (2h)

Correzione dei compiti per casa. Viene corretta in plenaria la scheda 5.6. Studenti diversi si offrono volontari o vengono chiamati a condividere e giustificare il proprio svolgimento dei vari quesiti.

Svolgimento a gruppi di una scheda per ragionare su di un problema open-ended. La classe viene suddivisa in gruppi di tre o quattro persone, formati precedentemente dall'insegnante al fine di renderli il più possibile equilibrati. A ogni studente viene distribuita una copia della scheda 5.7, finalizzata a promuovere il ragionamento matematico per sviluppare diverse strategie di risoluzione per un problema open-ended. La scheda prevede di contare i possibili tragitti di lunghezza minima per spostarsi da un punto ad un altro su di una griglia¹. Gli alunni risolvono la scheda in gruppo, avendo a disposizione circa 20 minuti.

Confronto delle risoluzioni della scheda. Allo scadere del tempo, ciascun gruppo consegna un foglio con lo svolgimento della scheda; gli svolgimenti vengono fotografati e proiettati sulla lavagna multimediale. La classe, in plenaria, confronta le risoluzioni proposte dagli alunni, al fine di identificare quali siano i possibili svolgimenti corretti. Vengono proposte delle possibili soluzioni al problema.

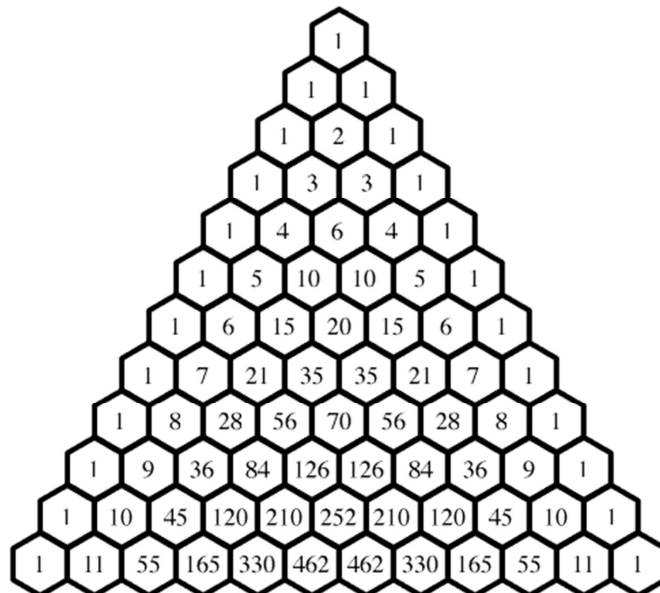
Assegnazione dei compiti per casa. Viene assegnata la scheda 5.8 da svolgere individualmente come compito per casa in preparazione alla verifica finale. La scheda prevede la risoluzione di alcuni esercizi presi dal libro di testo adottato dalla classe, "Manuale blu 2.0 di matematica" [5] (esercizi A.6, vedi Appendice A).

5.6 Quarto incontro (1h)

Svolgimento della verifica. La classe si dispone con i banchi leggermente distanziati e gli alunni risolvono individualmente la scheda 5.9, volta a verificare l'acquisizione delle competenze relative al calcolo combinatorio e lo sviluppo del ragionamento matematico a fine del percorso didattico. Assieme alla scheda, a ogni alunno viene distribuita anche una copia del Triangolo di Tartaglia-Pascal identica a quella già presentata nella scheda 5.6. Non è

¹Problema ispirato a [39] (citato in [45]).

Il triangolo di Tartaglia-Pascal



Leggi con calma le domande della scheda.

Poi, guarda attentamente il seguente video e rispondi alle domande aiutandoti con il triangolo di Tartaglia.

https://www.ted.com/talks/wajdi_mohamed_ratemi_the_mathematical_secrets_of_pascal_s_triangle/transcript?language=it

1. Qual è lo sviluppo del binomio $(x + y)^7$?
2. Qual è lo sviluppo del binomio $(2A + B)^4$?

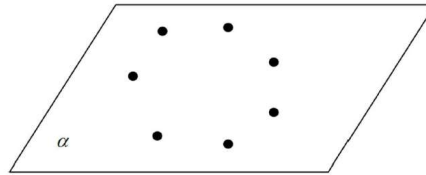
[Se ti trovi in difficoltà a rispondere a queste domande, puoi aiutarti con il seguente video: Il triangolo di Tartaglia e le potenze di un binomio -

<https://youtu.be/ZnDLfUpDBO0>]

3. In quanti modi posso comporre un cono gelato da tre gusti, sapendo che i gusti possibili sono pistacchio, biscotto, cocco, amarena e gianduia?
4. In un comitato di dieci persone, tutti si salutano stringendosi la mano. Quante saranno le strette di mano in totale?

Scheda 5.6a

5. Su un piano ci sono sette punti, a tre a tre non allineati. Quanti triangoli è possibile formare usando come vertici tre di questi punti?



6. Cristiano sta comprando dei cioccolatini di diverse varietà per fare dei regali. Sapendo che ha deciso di preparare 30 confezioni con quattro cioccolatini diversi ciascuna e che non vuole che ci siano due confezioni uguali tra loro, qual è il numero minimo di varietà diverse di cioccolatini che dovrà comprare?
7. Alla yogurteria “Biancolatte” si può guarnire il proprio yogurt gelato con quanti topping si vuole, a scelta tra cioccolato, granella di nocciole, cocco, fragole e crema di pistacchio. In quanti modi diversi è possibile guarnire uno yogurt gelato?

[Se ti trovi in difficoltà a rispondere a queste domande, puoi aiutarti con il seguente video: Il triangolo di Tartaglia e i coefficienti binomiali -

<https://youtu.be/qQpgP8AKxGM>]

Scheda 5.6b

consentito l'uso della calcolatrice, in quanto è d'interesse verificare la correttezza dei ragionamenti e non tanto dei calcoli, pertanto non viene richiesto che gli studenti svolgano i prodotti e/o i fattoriali.

A passeggio per New York

Sarah abita a New York. In questo momento si trova all'angolo tra la 10th Avenue e la West 16th Street e vuole andare al suo bar preferito, tra la 8th Avenue e la West 19th Street. Quanti sono i possibili percorsi di lunghezza minima (ovvero muovendosi solo verso destra e verso l'alto) che Sarah può seguire per raggiungere il bar?

E se invece Sarah volesse tornare direttamente a casa (senza quindi passare necessariamente dal bar), tra la 6th Avenue e la West 23rd Street, quanti possibili percorsi di lunghezza minima potrebbe seguire?

Scheda 5.7

PER CASA:

Svolgi i seguenti esercizi in preparazione alla verifica. Quando rispondi alle domande, cerca sempre di giustificare le tue risposte.

Pag α32 es 187

Pag α36 es 238, 240

Pag α37 es 241, 243, 244, 246, 247, 249

Pag α39 es 252

Pag α43 es 42, 43

Pag α44 es 47, 56

Pag α49 es 91, 94, 97, 98

Scheda 5.8

Nome e Cognome _____	Classe IV A	1/2/2022
VERIFICA DI MATEMATICA		
Rispondi alle seguenti domande, avendo cura di giustificare adeguatamente le risposte. Non è necessario svolgere i prodotti e i fattoriali (ad esempio, $4 \times 5 \times 8$ o $7!$ sono già risposte ammissibili).		
1. Quante sono le diagonali di un dodecagono (poligono con 12 lati e 12 vertici)? 2. Mario si è dimenticato il PIN del suo bancomat. Si ricorda soltanto che il PIN è composto da 5 cifre e che l'ultima cifra è divisibile per 4. Quanti sono i possibili PIN che Mario dovrebbe provare per essere certo di indovinare il suo PIN? [suggerimento: ricorda che anche lo 0 è divisibile per 4] 3. Mario si ricorda improvvisamente che nel PIN non ci sono cifre uguali consecutive. Quanti PIN dovrà provare Mario adesso che si è ricordato anche questa informazione? 4. Il fisioterapista di Marta le ha consigliato una serie di esercizi utili per il suo dolore alla schiena. Si è raccomandato che Marta ne faccia quattro ogni giorno. Marta, per non annoiarsi, decide che ogni giorno la sua scelta di esercizi sarà diversa dalle scelte già fatte nei giorni precedenti; fa un paio di conti e si accorge che potrà andare avanti ben 210 giorni prima di dover ripetere una scelta. Quanti sono gli esercizi proposti dal fisioterapista? 5. La classe di Ahmed partecipa ad un torneo di tennis. La classe, composta da 18 studenti, si sta organizzando per formare le squadre per il doppio. Quante sono le possibili coppie che si possono formare, sapendo che Marisa vuole stare in coppia con Jacopo, ed Eric non vuole stare in coppia né con Lisa né con Filippo? 6. Quanti sono gli anagrammi (anche privi di senso) della parola "COMBINATORIA" in cui le due "A" appaiono una di seguito all'altra?		
N.B. <i>Tutte le risposte ed i passaggi devono essere adeguatamente motivati e scritti in maniera chiara e leggibile. Saranno valutate 0 punti le risposte in cui compare solo il risultato (sia esso numerico o grafico) dell'esercizio, anche se tale risultato è quello giusto.</i>		

Scheda 5.9

Capitolo 6

Lo svolgimento della sperimentazione didattica

6.1 Il contesto della sperimentazione

La sperimentazione della sequenza didattica si è svolta durante il secondo periodo dell'anno scolastico 2021/22, tra gennaio e febbraio, presso la classe IV A del Liceo Scientifico "Eugenio Curiel", a Padova, sotto la supervisione della professoressa Anna Gobitti, docente di Matematica e Fisica della classe.

La classe IV A è composta da 22 alunni e alunne, di età compresa tra i 16 e i 18 anni. Durante il periodo di svolgimento della sperimentazione didattica, alcuni alunni sono stati sottoposti a quarantena o isolamento in seguito alle misure per il contenimento dell'epidemia da Covid-19; gli alunni interessati dalle restrizioni hanno continuato a seguire le lezioni in didattica a distanza, attraverso la piattaforma Google Meet.

A causa del contesto pandemico, inoltre, la durata delle ore di lezione della scuola è stata ridotta da 60 a 50 minuti, per permettere intervalli da 10 minuti tra ogni lezione e la successiva, durante cui arieggiare e sanificare gli ambienti scolastici. Si è deciso, inoltre, di mantenere quanto possibile gli stessi gruppi di lavoro in tutti gli incontri, al fine di limitare i contatti tra gli studenti.

Ad eccezione dell'ultimo incontro di verifica, tutti gli incontri si sono svolti nell'Aula 3.0 della scuola, attrezzata con Lavagna Interattiva Multimediale (LIM) collegata alla rete internet e banchi modulari per permettere agli studenti di disporsi più agevolmente a gruppi.

Gli incontri hanno seguito la seguente calendarizzazione:

- Primo incontro: venerdì 21/01/2022, dalle ore 11:10 alle ore 13:00;
- Secondo incontro: martedì 25/01/2022, dalle ore 8:10 alle ore 10:00;
- Terzo incontro: venerdì 28/01/2022, dalle ore 11:10 alle ore 13:00;

- Quarto incontro: martedì 01/02/2022, dalle ore 8:10 alle ore 9:00.

6.2 Verifica delle conoscenze pregresse

Durante la settimana precedente agli incontri, la prof.ssa Gobitti ha consegnato alla classe la scheda 5.1 (pag. 38), da svolgere individualmente a casa come valutazione iniziale delle conoscenze degli studenti relativamente al calcolo combinatorio. Dai risultati è emerso che diversi alunni avevano già qualche conoscenza in materia; in particolare, si è osservato che era diffusa l'idea che per rispondere ai quesiti di combinatoria fosse necessario svolgere delle moltiplicazioni, sebbene molto spesso non fosse ben chiaro quali fossero i fattori da moltiplicare. Inoltre, sebbene gli studenti fossero stati invitati a rispondere alle domande facendo ricorso soltanto alle proprie conoscenze, in quanto non sarebbero stati giudicati per i propri errori, si suppone che qualche alunno abbia consultato il libro di testo o altri materiali, poiché in alcune risposte è stato fatto già uso di terminologia e/o formule specifiche della combinatoria.

I risultati complessivi della classe nel rispondere alla scheda 5.1 sono riportati in maniera estesa nella tabella B.1 dell'appendice B e riassunti nel grafico 7.2 (pag. 103).

La prima domanda della scheda 5.1 chiedeva: "Emma esce con gli amici e va a mangiare un hamburger. Il cameriere le consegna il menù, che prevede diverse opzioni: un hamburger a scelta tra manzo, pollo o vegetale; un tipo di pane a scelta tra il classico pane da hamburger o la ciabatta rustica; una salsa a scelta tra ketchup, maionese, salsa rosa, salsa BBQ e senape. In quanti modi diversi Emma può comporre il suo panino?"

L'intera classe ha risposto correttamente alla domanda. Alcuni studenti hanno fatto uso direttamente del Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio, moltiplicando i numeri di opzioni fornite per ciascuna componente del panino ad ottenere $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$ (ad esempio, figura 6.1a, pag. 53). Altri studenti sono giunti alla conclusione dividendo il problema in sotto-casi (es.: modi in cui si può scegliere l'hamburger), ragionando su un sotto-caso particolare (es.: hamburger di manzo) e poi generalizzando la soluzione (ad esempio, figura 6.1b, pag. 53). Alcuni studenti, invece, hanno elencato in maniera sistematica le possibili composizioni dell'hamburger, eventualmente anche senza esaurire tutte le opzioni possibili, interrompendosi una volta individuato lo schema con sufficiente sicurezza da poter calcolare il risultato generale (figura 6.1c, pag. 53). Altri, infine, si sono aiutati con rappresentazioni grafiche, utilizzando diagrammi ad albero (figura 6.1d, pag. 53) o grafi (figura 6.1e, pag. 54), in maniera più o meno completa.

Svolgimento:

moltiplico il numero che rappresenta ogni operazione con gli altri due

Risposta: $3 \times 2 \times 5 = 30$

(a)

dati:

-3 carni

-2 pani

-5 salse

Prendendo come esempio l'hamburger di manzo, posso combinarlo con il pane classico e con ognuna delle 5 salse, avendo così 5 opzioni di panino con stessa carne e pane. Se abbino la stessa carne all'altro tipo di pane e a sua volta a ognuna delle salse, ho altre 5 opzioni di panino sempre con la carne di manzo. In totale quindi ho 10 opzioni di panino per l'hamburger di manzo e deduco che ciò vale per ogni tipo di carne. Essendo i tipi di carne 3, in totale Emma avrà a disposizione 30 modi diversi per comporre il suo panino.

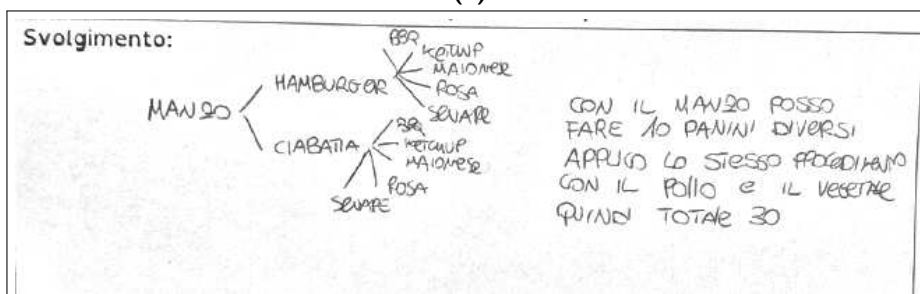
Osservando i dati, posso anche notare che il risultato corrisponde al prodotto del numero degli alimenti: 3 carni x 2 pani x 5 salse = 30 opzioni

(b)

es. 1

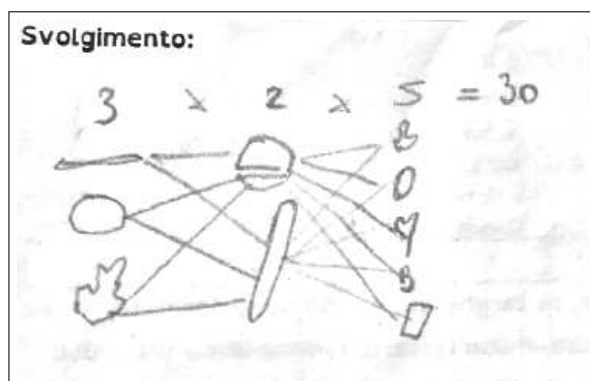
CARNE: 3 tipi	1) manzo, pane, ket.	6) manzo, rustica, ket.
PANE: 2 tipi	2) manzo, pane, maio	7) " " " maio
SALSA: 5 tipi	3) manzo, pane, salsa	8) " " " salsa
	4) " " " BBQ	9) " " " BBQ
	5) " " " senape	10) " " " senape
30 tipi di panino	11) pollo, pane, ket	16) pollo, rustica, "
$3 \times 2 \times 5 = 30$	12) " " " maio	17) " " " "
	13) " " " salsa	18) " " " "
	14) " " " BBQ	19) " " " "
	15) " " " senape	20) " " " "

(c)



(d)

Figura 6.1: Risoluzioni corrette del primo problema della scheda 5.1



(e)

Figura 6.1: Risoluzioni corrette del primo problema della scheda 5.1 (cont.)

La seconda domanda chiedeva: "Quanti sono i possibili anagrammi (anche privi di senso) che puoi formare con le lettere del tuo nome?" Evidentemente, in questo problema alcuni studenti avevano una difficoltà aggiuntiva, dovuta alla ripetizione di una o più lettere all'interno del proprio nome; tuttavia, considerando gli 11 alunni il cui nome presenta lettere ripetute e che hanno dato una risposta sbagliata, soltanto per 2 di tali alunni l'errore risiedeva nel non aver tenuto conto della ripetizione, mentre per i restanti 9 era dovuto ad altri fattori.

Tra gli studenti che hanno risposto correttamente, un'unica studentessa ha applicato già la formula delle permutazioni con ripetizione (formula 2.2, pag. 15): essendo il suo nome composto da 6 lettere, di cui una ripetuta 2 volte, la studentessa ha giustamente risposto $6! : 2! = 360$ anagrammi (figura 6.2a, pag. 55). Altri studenti, invece, hanno di fatto utilizzato il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio, direttamente (figura 6.2b, pag. 55) o dividendo il risultato in modo da tener conto di eventuali ripetizioni (figura 6.2c, pag. 55), a seconda che il proprio nome lo richiedesse o meno. Infine, alcuni alunni, il cui nome era sufficientemente breve da permetterlo, hanno elencato esplicitamente tutti i possibili anagrammi (figura 6.2d, pag. 55, dove la studentessa osserva anche che il risultato è differente se le lettere ripetute sono considerate uguali oppure distinte).

Una risoluzione particolarmente originale è quella di un'alunna, che ha calcolato il numero di anagrammi in maniera ricorsiva, facendo variare prima le ultime due lettere del suo nome, poi le ultime tre, e così via (figura 6.3a, pag. 57); la soluzione sarebbe stata corretta se non per il fatto che l'alunna non ha tenuto conto delle lettere ripetute all'interno del nome.

Osservando le risoluzioni errate, si è notato un elemento in comune: tutti gli studenti hanno dimostrato di sapere che per ottenere la soluzione era necessario svolgere dei prodotti, ma anche di non avere chiaro quali fossero i

Giulia
 $n=6$
 $r(i)=2$
 $6! : 2! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 : 2 = 360$

(a)

Svolgimento: Alberto 7 lettere 7 X 6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1

(b)

Svolgimento: M A T T I A 6 tipi di lettere

M, 6 possibili soluzioni
 A, 5 pos. sol.
 T, 4 pos. sol.
 I, 3 pos. sol.
 A, 2 pos. sol.
 A, 1 pos. sol.

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
 $2A \Rightarrow \frac{720}{2} = 360$
 $2T \Rightarrow \frac{360}{2} = 180$

si dimezzano
 gli arrangiamenti
 2 volte

esempio: $\left\{ \begin{array}{l} M A T T I A \\ M A T I T A \\ M T A T I A \\ M T I A T A \end{array} \right\}$ 4 casi
 teoricamente
 diversi, ma
 praticamente
 uguali

Risposta: 180 possibili soluzioni

(c)

Svolgimento:

GAIA $\rightarrow$ GAIA x 2
 x 2

AAAG x 2
 GAA x 2
 AAIG x 2
 AIA x 2
 AGIA x 2
 AIGA x 2
 IAA x 2
 IAGA x 2
 GAAI x 2
 AGAI x 2
 IGA x 2

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Risposta: 12 se considero le A uguali; se le considero diverse $\rightarrow 24$

(d)

Figura 6.2: Risoluzioni corrette del secondo problema della scheda 5.1

fattori da moltiplicare. L'errore in assoluto più comune è stato quello di moltiplicare il numero delle lettere del nome per il numero dei posti (figura 6.3b, pag. 57); uno studente, in particolare, ha seguito questo procedimento ma sottraendo un'unità sia al numero di lettere sia al numero di posti nel tentativo di escludere la configurazione di partenza (figura 6.3c, pag. 57). Altri studenti, infine, hanno moltiplicato fattori diversi (figura 6.3d, pag. 57) o fatto ricorso all'elevamento a potenza (figura 6.3e, pag. 58).

La terza domanda chiedeva: "Il Commissario Basettoni ha messo a disposizione di Topolino ben otto agenti per dare la caccia al ricercato numero uno, Pietro Gambadilegno. Per organizzare la missione, Topolino forma una squadra speciale di tre agenti. In quanti modi diversi Topolino può selezionare gli agenti che formeranno la squadra?"

Questa è la domanda che ha ricevuto di gran lunga il minor numero di risposte esatte, infatti soltanto 2 studenti hanno risposto correttamente. Di questi, la prima studentessa ha elencato esplicitamente e in maniera ordinata tutte le possibili squadre (figura 6.4a, pag. 58), mentre il secondo studente ha elencato solamente le squadre ottenibili con un agente fissato e ha poi generalizzato il ragionamento fissando gli altri agenti uno alla volta (figura 6.4b, pag. 58).

Tra gli studenti che hanno risposto scorrettamente alla domanda, alcuni hanno tentato di elencare esplicitamente le possibili squadre ma non sono riusciti a stilare una lista completa (figura 6.5a, pag. 59). Molti alunni hanno utilizzato il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio, ma senza tenere conto del fatto che l'ordine in cui gli agenti vengono scelti non è rilevante, fornendo dunque la risposta errata $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ (figura 6.5b, pag. 60) o, in diversi casi, anche $8^3 = 512$ (figura 6.5c, pag. 60). Altri studenti hanno moltiplicato diversi fattori, ad esempio il numero di agenti totali per il numero di agenti da selezionare per ogni squadra, contando $8 \cdot 3 = 24$ squadre possibili (figura 6.5d, pag. 60). Diversi studenti, inoltre, hanno elaborato strategie di conteggio corrette ma hanno considerato soltanto le squadre in cui compariva il primo agente (figura 6.5e, pag. 60). Una studentessa, infine, ha applicato la formula delle disposizioni semplici (formula 2.4, pag. 16), osservando erroneamente che l'ordine è significativo (figura 6.5f, pag. 60).

La quarta domanda chiedeva: "In Italia, le targhe delle auto sono formate da una sequenza di due lettere, tre numeri e altre due lettere. Quante sono le possibili targhe che si possono generare seguendo questa regola?"

Diversi studenti hanno risposto correttamente alla domanda. In particolare, una studentessa ha utilizzato la formula delle disposizioni con ripetizioni (formula 2.5, pag. 17), calcolando il numero di disposizioni con ripetizione di 2 lettere a scelta tra 26 come $26^2 = 676$ e di 3 numeri a scelta tra 10 come $10^3 = 1\,000$, moltiplicando a ottenere, infine, $676 \cdot 1\,000 \cdot 676 = 456\,976\,000$

Svolgimento:

M A R T I N A

MARTI⁽²⁾ → 2
 MART⁽³⁾ → 2 + 4
 MAR⁽⁴⁾ → 6 + 6 · (4-1) = 24
 MA⁽⁵⁾ → 24 · 5 = 120
 M⁽⁶⁾ → 120 · 5 = 720
 (7) → 720 · 7 = 5040

(a)

Svolgimento:

i possibili anagrammi si ottengono moltiplicando il
 n° di lettere del nome con i posti occupati da essi,
~~staccando alla volta una lettera~~

M I C H E L E
 1 2 3 4 5 6 7

sono 7 lettere e quindi 7 posti: $7^2 = 49$ anagrammi!

(b)

FRANCESCO

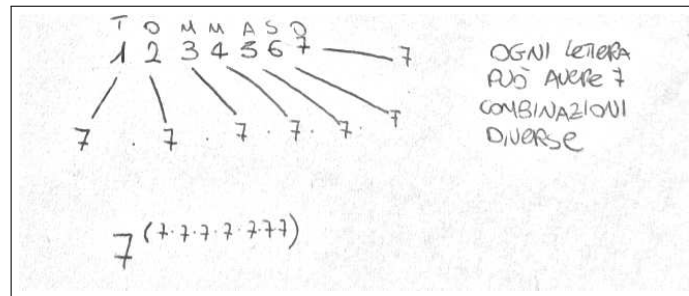
9 lettere
 altre 8 togliendo
 quella in
 cui già si
 trovano
 $8 \cdot 8 = 64$

(c)

Svolgimento: MATTEO = 6 lettere di cui 5 diverse. ogni lettera sta in una posizione per 6 volte
 quindi $(6 \times 5) \times 5 = 150$

(d)

Figura 6.3: Risoluzioni scorrette del secondo problema della scheda 5.1



(e)

Figura 6.3: Risoluzioni scorrette del secondo problema della scheda 5.1 (cont.)

Svolgimento:

A B C D E F G H					
ABC	ACH	BCD	BEH	CEH	EHG
ABD	ADE	BCE	BFG	CFG	EFH
ABE	ADF	BCF	BFH	CFH	EGH
ABF	ADG	BCG	BGH	CGH	FGH
ABG	ADH	BDE	CDE	DEF	
ABH	AEF	BDF	CDF	DEG	
ACD	AEG	BDG	CDG	DEH	
ACE	AEH	BDH	CDH	DFG	
ACF	AFG	BEF	CEF	DFH	
ACG	AGH	BEG	CEG	DGH	

Risposta: 56

(a)

Svolgimento:

3 AGENTI

```
graph TD
    A[3 AGENTI] --> B[1° AGENTE A]
    A --> C[1° AGENTE B]
    A --> D[1° AGENTE C]
    A --> E[1° AGENTE D]
    A --> F[1° AGENTE E]
    A --> G[1° AGENTE F]
```

A B C D E F G H

1° AGENTE A → ABC, ABD, ABCE, ABCE, ABCE, ABCE } 6
ACD, ACE, ACE, ACE, ACE } 5
ADE, ADE, ADE, ADE, ADE } 4
AEF, AEF, AEF, AEF, AEF } 3
AFG, AFG, AFG, AFG, AFG } 2
AGH, AGH, AGH, AGH, AGH } 1

1° AGENTE E } 2
3 } 3

1° AGENTE F } 1

1° AGENTE B } 5
4 } 4
3 } 3
2 } 2
1 } 1

1° AGENTE C } 4
3 } 3
2 } 2
1 } 1

1° AGENTE D } 3
2 } 2
1 } 1

56 TOTALE

(b)

Figura 6.4: Risoluzioni corrette del terzo problema della scheda 5.1

```

tutti gli agenti: a b c d e f g h
abc acd ade aef afg agh
      bcd bde bef bfg bgh bha
            cde cef cfg cgh cha
                  def dfg dgh dha dab
e bc              efg egh eha eab
fbc fcd          fgh fha fab
gbc gcd gde      gha gab
hbc hcd hde hef      hab

6x2+6x5=42

```

(a)

Figura 6.5: Risoluzioni scorrette del terzo problema della scheda 5.1

targhe possibili (figura 6.6a, pag. 61). Gli altri studenti, invece, hanno utilizzato direttamente il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio, contando $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 456\,976\,000$ targhe possibili (figura 6.6b, pag. 61).

Alcuni studenti, invece, hanno applicato il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio, ma senza considerare che gli stessi numeri e lettere possono essere ripetuti all'interno della targa, rispondendo erroneamente $26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 26 \cdot 25 = 304\,200\,000$ (figura 6.7a, pag. 62, dove lo studente ha inoltre dimenticato di contare le possibilità per le ultime due cifre). Nella maggior parte dei casi, poi, gli alunni hanno effettuato operazioni diverse, come l'elevamento a potenza (figura 6.7b, pag. 62, in cui sono sbagliati anche il numero di cifre e di lettere dell'alfabeto) o la moltiplicazione tra il numero di posti e di cifre/lettere (figura 6.7c, pag. 62). Una studentessa, inoltre, ha applicato correttamente il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio, ma ha erroneamente considerato una sola lettera all'inizio della targa e una sola alla fine (figura 6.7d, pag. 62); è interessante notare che la studentessa stessa ha dubitato della correttezza della risposta perché il numero di targhe ottenuto non le sembrava sufficientemente grande, utilizzando di fatto una stima del risultato per valutare la plausibilità della soluzione.

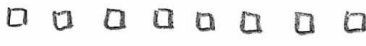
6.3 Svolgimento del primo incontro

Dopo una breve introduzione, gli studenti si sono disposti a formare i gruppi stabiliti dalla professoressa. Erano presenti tutti gli alunni della classe: 19 alunni in presenza, a formare cinque gruppi da 3 persone ciascuno e un gruppo da 4 persone, e 3 alunne in didattica a distanza, a formare un ulteriore gruppo da 3 persone.

Svolgimento: $8 \times 7 \times 6$

Risposta: 336

(b)

Svolgimento: 
 8 agenti
 squadra di 3 agenti
 le possibili combinazioni sono $8^3 = 512$

(c)

Svolgimento: 8×3

Risposta: 24

(d)

dati:

-8 agenti (A, B, C, D, E, F, G, H)

-3 agenti per squadra

Prendo come esempio l'agente A e lo accoppio con B. A e B assieme potranno formare 6 squadre diverse assieme ognuno degli altri agenti. AeC potranno formare insieme 5 squadre diverse, perchè la sesta è già stata contata nella coppia AeB assieme a C. AeD, per lo stesso motivo, ne potranno formare altre 4 di diverse e così via.

In totale quindi otteniamo $6+5+4+3+2+1=21$ squadre diverse

(e)

$n=8$

$k=3$

conta l'ordine

non ammesse ripetizioni

$n! : (n-k)! = 8! : (8-3)! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5! : 5! = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

(f)

Figura 6.5: Risoluzioni scorrette del terzo problema della scheda 5.1 (cont.)

n=26 lettere
k=2

conta l'ordine
sono ammesse ripetizioni

$$n^k = 26^2 = 676$$

n=10 numeri
k=3

$$n^k = 10^3 = 1000$$

n=26 lettere
k=2

$$n^k = 26^2 = 676$$

$$676 \times 1000 \times 676 = 456976000$$

(a)

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 26 & 26 & 10 & 10 & 10 & 26 & 26 \\ = 26^4 \cdot 10^3 = 456976000 \end{array}$$

(b)

Figura 6.6: Risoluzioni corrette del quarto problema della scheda 5.1

Svolgimento: 26 lettere $26 \times 25 = 650$ 10 numeri $10 \times 9 \times 8 = 720$
 Risposta: $650 \times 720 = 468000$

(a)

Svolgimento: 2^{24} lettere alfabeto
 3^9 cifre
 2^{24} lettere alfabeto
 Moltiplicazione
 Risposta: 6530347008

(b)

Svolgimento:

2 · 26
 $\downarrow$
 LETTERE

NUMERI
 $\uparrow$
 9 · 3

26 · 2
 $\rightarrow$ lettere

(c)

Svolgimento:

① 26 lett. alfabeto
 ② 3 numeri $\rightarrow 001-999 \Rightarrow \text{tot. } 1000$
 ③ 26 lett.

Non sono sicura ma giuria
 Sono troppo poche targhe.

$26 \times 1000 \times 26 = 676.000$

(d)

Figura 6.7: Risoluzioni scorrette del quarto problema della scheda 5.1

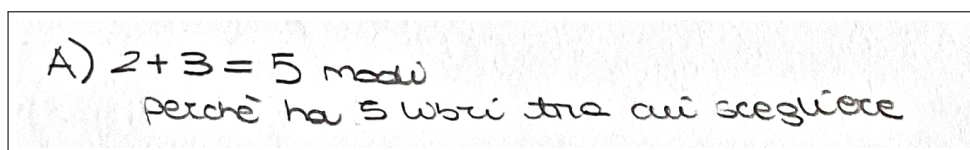


Figura 6.8: Risoluzione corretta del problema A della scheda 5.2

Ad ogni studente è stata consegnata una copia della scheda 5.2 (pag. 41), con l'indicazione di risolverla in gruppo in un tempo limite di 15 minuti. Allo scadere del tempo, ogni gruppo ha consegnato una scheda, che è stata fotografata e proiettata alla LIM, per commentare le risoluzioni assieme a tutti gli studenti.

Il primo problema previsto dalla scheda era il seguente: "Andrea ama molto leggere e, per farsi un regalo, decide di andare in libreria a comprarsi un libro. Nella sua libreria preferita trova due libri fantasy e tre libri gialli che gli interessano. In quanti modi Andrea può scegliere che libro comprare?" Sei gruppi su sette hanno risposto correttamente, affermando che Andrea può scegliere tra 5 libri (ad esempio, figura 6.8). Soltanto il gruppo 4 ha lasciato in bianco la risposta: gli studenti del gruppo hanno spiegato che si erano trovati in difficoltà poiché si aspettavano che il quesito richiedesse una risoluzione più complessa.

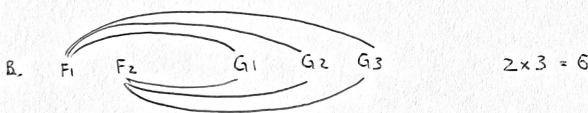
Il secondo problema era il seguente: "Andrea è davvero indeciso perché gli piacciono molto sia i fantasy che i gialli, quindi alla fine decide di comprare due libri, uno fantasy e uno giallo. In quanti modi Andrea può scegliere i due libri da comprare?" Tutti i gruppi hanno risposto correttamente alla domanda, riportando direttamente il prodotto $2 \cdot 3 = 6$, oppure giustificando la risposta a parole (figura 6.9a) e/o con l'uso di diagrammi (figura 6.9b). Durante la discussione, si è mostrato il diagramma ad albero come strumento per schematizzare la situazione e giustificare l'uso del prodotto nella risoluzione.

Il terzo problema era il seguente: "Karim, Sofia e Carolina vanno in vacanza in Puglia. Hanno prenotato i biglietti del treno e gli sono stati assegnati i posti 10, 11 e 12 nella carrozza 4. In quanti modi diversi i tre amici possono sedersi nel treno?" Tutti i gruppi hanno fornito la risposta corretta al quesito, indicando 6 come soluzione. Alcuni gruppi hanno elencato le varie possibilità (figura 6.10a), mentre altri hanno giustificato il proprio ragionamento a parole (figura 6.10b). Il gruppo 6, tuttavia, nonostante avesse ottenuto il risultato corretto elencando esplicitamente le varie possibilità, ha poi ricavato scorrettamente $(3 \cdot 3) - 3 = 6$ come formula che potesse giustificare il risultato (figura 6.11).

Il quarto problema era il seguente: "Samuele, Nadia, David, Luisa e Rebecca, invece, vanno in vacanza in Grecia. Hanno prenotato i biglietti dell'aereo e gli sono stati assegnati i posti 3A, 3B, 3C, 3D e 3E. In quanti

B) $2 \cdot 3 = 6$
 Per ogni libro fantasy può abbinare 3 gialli
 Essendo i fantasy 2, le combinazioni totali sono 6

(a)

B.  $2 \times 3 = 6$
 Volendo prendere 2 libri di 2 generi diversi, a un libro fantasy può abbinare 3 libri gialli differenti e siccome i libri fantasy sono 2 raddoppio il risultato del primo ragionamento.

(b)

Figura 6.9: Risoluzioni corrette del problema B della scheda 5.2

C.

KSC	KCS
SKK	SKC
CSK	CKS

 $3 \cdot 2 = 6$

(a)

c. K/S/C $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilità
 K 3 possibilità
 S 3 possibilità - 1 possibilità già occupata da K
 C 3 pos. - 2 pos.

(b)

Figura 6.10: Risoluzioni corrette del problema C della scheda 5.2

c) le combinazioni sono 6

{	K	S	C
	C	K	S
	S	C	K

{	K	C	S
	C	S	K
	S	K	C

$(3 \cdot 3) - 3 = 6$ combinaz

Figura 6.11: Risoluzione scorretta del problema C della scheda 5.2

D) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ modi diversi

Figura 6.12: Risoluzione corretta del problema D della scheda 5.2

D) Seguendo il ragionamento del punto precedente $(5 \cdot 5) - 5 = 20$ combinaz

S	N	D	L	R
	D	N	L	R
	D	N	R	L
	D	L	N	R
	D	R	L	N

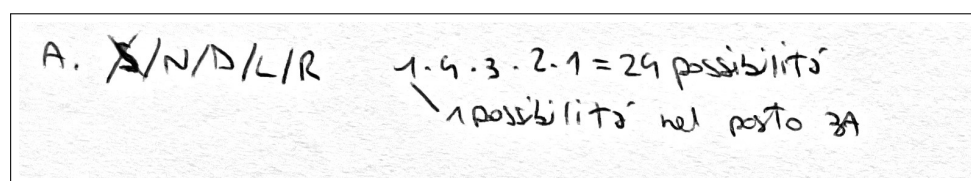
Non corrisponde ai calcoli ??

Figura 6.13: Risoluzione scorretta del problema D della scheda 5.2

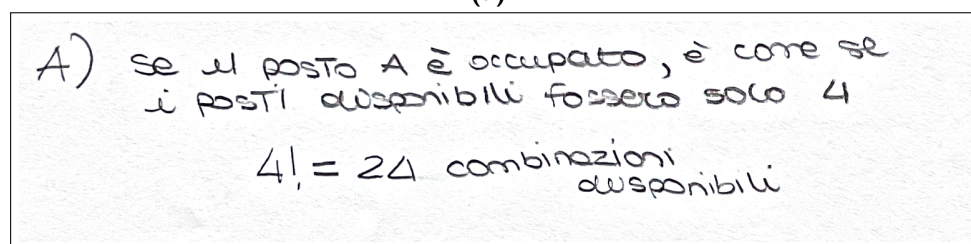
modi diversi i cinque amici possono sedersi nell'aereo?" Cinque gruppi hanno risposto correttamente, applicando lo stesso ragionamento utilizzato al punto precedente e riportando, quindi, come risposta $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, perlopiù senza aggiungere ulteriori giustificazioni (figura 6.12). Per quanto riguarda gli altri due gruppi, il gruppo 7 ha lasciato in bianco la risposta, mentre il gruppo 6 ha tentato di applicare la formula erroneamente ottenuta nel risolvere il problema precedente, ricavando così $(5 \cdot 5) - 5 = 20$, risultato che non corrispondeva al numero di possibilità elencate esplicitamente (figura 6.13).

Terminata la discussione sulla scheda, è stata proposta la presentazione A.1 (vedi Appendice A) per definire il fattoriale e presentare il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio. È stata posta particolare attenzione sulle condizioni da soddisfare affinché il principio sia applicabile.

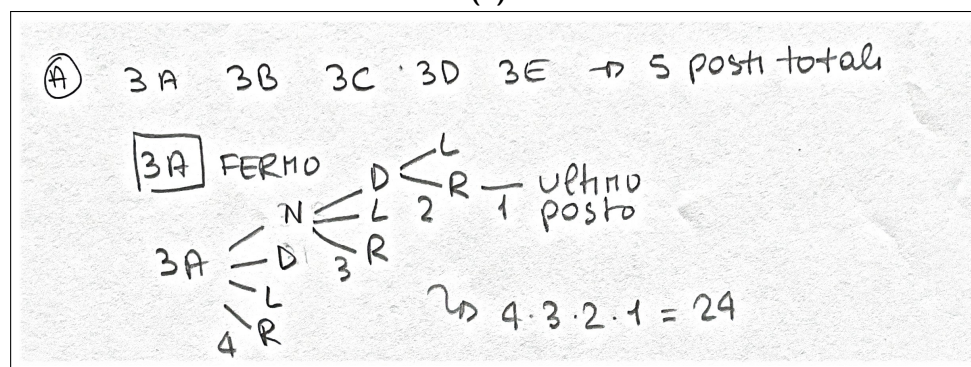
Dopo una pausa di 10 minuti, ad ogni studente è stata consegnata una copia della scheda 5.3 (pag. 41), con l'indicazione di risolverla in gruppo in un tempo limite di 15 minuti. Allo scadere del tempo, ogni gruppo ha consegnato una scheda, che è stata fotografata e proiettata alla LIM, per commentare le risoluzioni assieme a tutti gli studenti.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.14: Risoluzioni corrette del problema A della scheda 5.3

Il primo problema proposto dalla scheda era il seguente: "Samuele, Nadia, David, Luisa e Rebecca vanno in vacanza in Grecia. Hanno prenotato i biglietti dell'aereo e gli sono stati assegnati i posti 3A, 3B, 3C, 3D e 3E. In quanti modi diversi i cinque amici possono sedersi nell'aereo se Samuele vuole stare al finestrino (posto 3A)?" Tutti i gruppi hanno risposto correttamente al quesito: alcuni hanno osservato che per il posto 3A c'era un'unica possibilità e hanno proposto, quindi, $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ come risposta (figura 6.14a); altri hanno notato che, essendo il posto 3A già scelto da Samuele, il problema era equivalente a far sedere le rimanenti 4 persone, proponendo $4!$ come risposta (figura 6.14b); il gruppo 5 si è aiutato anche raffigurando il problema con un diagramma ad albero (figura 6.14c).

Il secondo problema era il seguente: "E, invece, se né Nadia, né Samuele, né Luisa vogliono sedersi accanto ad uno sconosciuto (posto 3E)?" Sei gruppi su sette hanno risposto correttamente: alcuni gruppi hanno osservato che c'erano due possibilità per la persona seduta al posto 3E e hanno riportato

B. $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ possibilità
 2 possibilità nel posto 3E

(a)

B) 3A 3B 3C 3D 3E < D
 4! = 24
 $(4)2 = 48$ combinaz → il ragionamento è simile a prima. Il posto 3E vicino allo scorsciuto è fisso e occupabile da 2 persone diverse. Quindi svolgo il calcolo per la 1a persona nel posto 3E e lo rifaccio per la 2a

(b)

Figura 6.15: Risoluzioni corrette del problema B della scheda 5.3

⑤ 5 POSTI - 1 POSTO = 4 POSTI (3E)
 $2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 26$
 il posto 3E può essere occupato solo da 2 persone; i rimanenti 4 posti danno le combinazioni

Figura 6.16: Risoluzione scorretta del problema B della scheda 5.3

come risposta $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ (figura 6.15a), mentre altri hanno supposto di far sedere David al posto 3E e poi assegnare i restanti 4 posti, ripetendo poi il ragionamento con Rebecca al posto 3E, rispondendo dunque $2 \cdot (4!) = 48$ (figura 6.15b). Il gruppo 5, invece, ha identificato correttamente i modi per far accomodare 4 persone nei posti 3A-3D come $4!$, ma poi vi ha erroneamente sommato le 2 possibilità per il posto 3E invece di moltiplicarle, rispondendo così $2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 26$ (figura 6.16).

Il terzo problema era il seguente: "All'ultimo minuto, Samuele, Luisa e Rebecca cambiano idea e decidono di andare in campeggio con la sorella di Luisa. Purtroppo è troppo tardi per cancellare la prenotazione del volo, quindi Nadia e David si trovano con ben cinque posti tutti per loro. In quanti modi diversi possono sedersi nell'aereo?" Sei gruppi su sette hanno risposto correttamente al problema: cinque gruppi hanno osservato che la

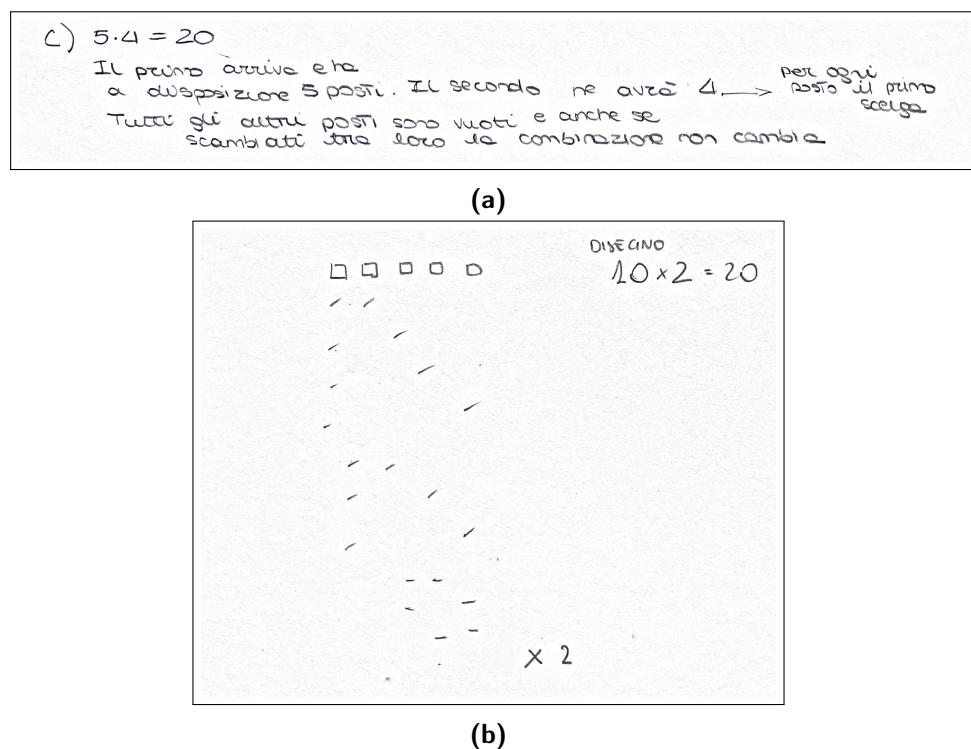


Figura 6.17: Risoluzioni corrette del problema C della scheda 5.3

prima persona che si siede ha a disposizione 5 posti tra cui scegliere, mentre la seconda ne ha 4, e hanno, pertanto, risposto $5 \cdot 4 = 20$, alcuni accompagnando la risposta con una giustificazione a parole (figura 6.17a); il gruppo 7, invece, ha elencato e contato manualmente i modi in cui 2 posti su 5 potevano essere occupati, e poi ha moltiplicato per 2 la risposta, tenendo conto del fatto che, per ogni possibile scelta dei posti da occupare, David e Nadia potevano scambiarsi tra loro, ottenendo così due configurazioni differenti (figura 6.17b). Il gruppo 1, infine, aveva iniziato a contare manualmente le diverse possibilità, ma non ha fatto in tempo a terminare prima dello scadere del tempo (figura 6.18). In aggiunta, è stata proposta alla classe una risoluzione alternativa del quesito, la quale prevedeva di considerare il problema dal punto di vista opposto, ossia non dei ragazzi che devono sedersi ma dei posti che devono essere occupati. Seguendo questo ragionamento, i posti potevano essere occupati da David, Nadia o restare vuoti: si è proposto di codificare, quindi, gli occupanti come D, N e $\emptyset_1$, $\emptyset_2$ e $\emptyset_3$, a rappresentare i tre posti vuoti. Ragionando assieme alla classe, si è osservato che i posti potevano essere occupati in $5!$ modi, ma che così facendo gli stessi modi venivano contati più volte; infatti, scambiando tra loro i posti vuoti $\emptyset_1$, $\emptyset_2$ e $\emptyset_3$, le posizioni di David e Nadia restavano invariate. Allora, una studentessa ha proposto di sottrarre $3!$ (ossia i modi possibili in cui i tre posti vuoti

1	2	3	4	5
A	B			
	A	B		
		A	B	
			A	B
A				B
	A			B
A				B
A	B			
	A			B
		A		B

Figura 6.18: Risoluzione incompleta del problema C della scheda 5.3

possono essere riordinati) a $5!$, per eliminare queste ripetizioni. Dopo alcune riflessioni, la stessa studentessa è giunta alla conclusione che la soluzione consisteva non nel sottrarre ma nel dividere i $5!$ modi di occupare i cinque posti per i $3!$ modi di riordinare i tre posti vuoti. Si è previsto che presentare questa risoluzione alternativa sarebbe stato utile agli studenti per risolvere alcuni quesiti della scheda 5.4, da svolgere per casa.

Per terminare la lezione, dunque, alla classe è stata assegnata la scheda 5.4 (pag. 42) come compito per casa.

6.4 Svolgimento del secondo incontro

La prima ora dell'incontro è stata dedicata a correggere i compiti per casa svolti dagli alunni e a chiarire gli eventuali dubbi. Per ogni problema della scheda 5.4, si è chiesto ad un alunno o alunna di leggere l'enunciato e la propria risposta, commentando poi assieme le soluzioni proposte.

La prima domanda chiedeva: "Daniele è in Prato della Valle e deve andare in stazione a prendere il treno per Venezia. Prima però vuole passare da Piazza dei Signori a salutare i suoi amici. Supponendo che gli itinerari più veloci per andare da Prato alla piazza e dalla piazza alla stazione siano quelli segnati nella cartina, quanti sono i percorsi possibili tra cui Daniele dovrà scegliere per andare da Prato alla stazione?" Nella cartina, inoltre, erano indicati 3 percorsi possibili per andare da Prato della Valle a Piazza dei Signori e 4 percorsi possibili per andare da Piazza dei Signori alla stazione.

La risposta correttamente proposta è stata $3 \cdot 4 = 12$ percorsi possibili, e tutta la classe ha concordato senza difficoltà.

La seconda domanda chiedeva: "L'agente Martini deve scoprire il codice di accesso ad un laboratorio supersegreto. Un infiltrato le ha già rivelato che il codice è formato da 4 lettere. A giudicare da quanto sono consumati i pulsanti del tastierino davanti al cancello del laboratorio, le lettere che compongono il codice sono G, M, R e W. Quante sono i possibili codici che l'agente dovrà provare per riuscire ad entrare nel laboratorio?" La risposta correttamente proposta è stata $4! = 24$ possibili codici, e tutta la classe ha concordato senza difficoltà.

La terza domanda chiedeva: "L'agente Martini riesce a superare il cancello, solo per scoprire che c'è anche una porta blindata da aprire! Anche qui l'esperta agente osserva attentamente i tasti e riconosce che le lettere del codice sono F, H e K. Di sicuro anche questo codice è formato da 4 lettere, ma il tasto della H è più consumato, quindi l'agente deduce che la lettera H è ripetuta due volte. Quante sono i possibili codici che l'agente dovrà provare per riuscire superare anche questa porta?" La risposta correttamente proposta è stata di riordinare in $4! = 24$ modi le lettere e poi dividere per 2 il risultato per tener conto dei modi in cui le due H possono essere scambiate, ottenendo così $\frac{24}{2} = 12$ possibili codici. Per accertarsi che la classe avesse compreso correttamente come contare sequenze in cui due o più oggetti si ripetono, è stato proposto di risolvere lo stesso problema ma stavolta con un codice formato dalle lettere F, H, H, K, A, A, A. La classe ha correttamente individuato come risposta $\frac{7!}{2! \cdot 3!} = 420$ possibili codici.

La quarta domanda chiedeva: "È sabato sera e Andrej, Beatrice, Carola e Damiano vanno in pizzeria. In quanti modi diversi possono disporsi attorno alla tavola rotonda che è stata preparata per loro?" La risposta correttamente proposta è stata di contare i possibili modi di fare sedere 4 persone come $4! = 24$ e poi dividere il risultato per i 4 diversi modi in cui la tavola rotonda poteva essere girata, ottenendo $\frac{24}{4} = 6$ modi. Alcuni studenti non hanno subito compreso per quale ragione era necessario dividere per 4, ma, dopo averne brevemente discusso assieme, hanno concordato con la soluzione proposta. Si è suggerito anche un altro modo di risolvere il problema, ossia di considerare che la prima persona che si siede può accomodarsi indifferentemente in qualsiasi posto, la seconda ha a disposizione 3 posti, la terza 2 e l'ultima 1 soltanto, ricavando $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibili modi di far sedere i quattro amici.

La quinta domanda chiedeva: "Giacomo deve cambiare il PIN del suo cellulare, che deve essere lungo quattro cifre. Non vuole scegliere un codice troppo complicato, perché sa già che rischierebbe di dimenticarselo. Decide, quindi, di formare il PIN scegliendo solo tra le cifre 0, 1, 2 e 3 e aggiunge la condizione che almeno tre delle quattro cifre del PIN siano zeri. Tra quanti possibili PIN di questo tipo dovrà scegliere?" Inizialmente, un'alunna ha proposto $3 \cdot 4 = 12$ come soluzione, in quanto per ciascuna delle 3 cifre diverse

da zero ci sono 4 possibili posizioni nel PIN che possono essere occupate da quella cifra. Subito, un'altra studentessa è intervenuta e ha precisato che andava aggiunto anche il caso in cui il PIN fosse composto da soli zeri, ricavando così la risposta corretta, $12 + 1 = 13$ codici PIN possibili. Infine, una terza alunna ha proposto una risoluzione alternativa, che consisteva nel contare i modi di riordinare le cifre $\{0, 0, 0, 1\}$, ripetendo poi lo stesso ragionamento per $\{0, 0, 0, 2\}$ e $\{0, 0, 0, 3\}$, e aggiungendo in fine il caso del PIN composto da soli zeri, ottenendo l'espressione $\frac{4!}{3!} \cdot 3 + 1 = 13$. Si è, dunque, proposto di risolvere lo stesso problema ma con un PIN di 10 cifre, di cui almeno 9 fossero zeri. Gli studenti hanno correttamente adattato entrambe le risoluzioni precedenti a questo nuovo caso, ottenendo rispettivamente le espressioni $3 \cdot 10 + 1 = 31$ e $\frac{10!}{9!} \cdot 3 + 1 = 31$.

La sesta domanda chiedeva: "Mariam e la sua vicina di casa sono molto amiche e durante il lockdown, per passare il tempo, decidono di comunicare dalla finestra usando delle bandiere colorate come segnali in codice. Mariam propone di utilizzare delle bandierine formate da strisce orizzontali di colori tutti diversi. Sapendo che le due amiche vogliono codificare 150 diversi messaggi, qual è il numero minimo di colori di cui avranno bisogno?" L'alunna che ha letto l'enunciato del problema ha ammesso di non essere riuscita a trovare una soluzione. Si è provveduto, dunque, a contare assieme caso per caso quante bandierine si possono formare con diversi colori: con un colore si ottiene 1 bandierina da una striscia, con due colori si ottengono $2! = 2$ bandierine da due strisce, con tre colori si ottengono $3! = 6$ bandierine da tre strisce, e così via fino ad arrivare a sei colori, con cui si ottengono $6! = 720$ bandierine da sei strisce, numero minimo sufficiente per codificare i 150 messaggi. Allora, un'altra studentessa ha obiettato che, nell'enunciato del problema, non era specificato che le bandierine dovessero avere tutte lo stesso numero di strisce. Si è allora proposto di risolvere assieme questa variante dell'esercizio, contando nuovamente i vari casi: con un colore si ottiene 1 bandierina da una striscia, con due colori si ottengono 2 bandierine da una striscia e $2 \cdot 1 = 2$ bandierine da due strisce, e così via fino ad arrivare a cinque colori, con cui si ottengono 5 bandierine da una striscia, $5 \cdot 4 = 20$ bandierine da due strisce, $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ bandierine da tre strisce, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ bandierine da quattro strisce e $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ bandierine da cinque strisce, raggiungendo così un numero sufficiente di bandierine per codificare tutti i 150 messaggi.

Dopo una pausa di 10 minuti, gli studenti si sono disposti a formare i gruppi stabiliti dalla professoressa. Erano presenti 21 alunni su 22: 20 alunni in presenza, a formare sei gruppi da 3 persone ciascuno e un gruppo da 2 persone, e 1 alunna in didattica a distanza, unita al gruppo da 2 persone. Ad ogni studente è stata consegnata una copia della scheda 5.5 (pag. 44), con l'indicazione di risolverla in gruppo in un tempo limite di 15 minuti.

A) 25 studenti
3 premi

$25 \times 24 \times 23$

$\frac{25!}{22!}$ come se fossero tutti uguali

1° posto 2° posto 3° posto

Figura 6.19: Risoluzione corretta del problema A della scheda 5.5

Allo scadere del tempo, ogni gruppo ha consegnato una scheda, che è stata fotografata e proiettata alla LIM, per commentare le risoluzioni assieme a tutti gli studenti.

La prima domanda della scheda 5.5 era la seguente: "La professoressa di matematica della classe di Alice organizza una competizione a cui partecipano tutti gli alunni e le alunne. La professoressa ha preparato tre premi diversi per i tre studenti o studentesse che si troveranno in testa alla classifica. In quanti modi potranno essere assegnati i premi, sapendo che la classe è composta da 24 studenti oltre ad Alice?" La classe ha dimostrato alcune difficoltà nel risolvere il quesito: infatti, solo tre gruppi su sette hanno risposto correttamente alla domanda, calcolando i modi possibili di assegnare i premi come $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800$; in particolare, il gruppo 7 ha osservato che assegnare i tre premi equivale ad ordinare tutti i 25 alunni della classe e poi considerare come indifferente l'ordinamento degli ultimi 22 alunni (figura 6.19). Il gruppo 6 ha correttamente riconosciuto che il podio poteva essere occupato in $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800$ modi differenti, ma poi ha erroneamente pensato di dover permutare anche i possibili ordinamenti dei tre premi in $3! = 6$ modi (figura 6.20a). Il gruppo 5 ha scorrettamente risposto che i premi potevano essere assegnati in $25 \cdot 3! = 150$ modi (figura 6.20b), mentre il gruppo 1 ha riportato due diverse risposte, una uguale a quella data dal gruppo 5 e una, invece, corretta. Infine, il gruppo 3 ha lasciato la risposta in bianco.

La seconda domanda era la seguente: "Il professore di inglese della classe di Alice ha ottenuto una borsa di studio per mandare tre studentesse o studenti della classe a studiare due settimane a Londra. Perché non ci siano ingiustizie, il professore decide di estrarre a sorte i nomi dal registro di classe. In quanti modi potrà essere composto il fortunato gruppetto che partirà per l'Inghilterra?" Tre gruppi su sette hanno risposto correttamente alla domanda, osservando che il ragionamento da attuare era lo stesso del quesito precedente, con la differenza che qui non era rilevante l'ordine di estrazione degli studenti: dunque, i tre gruppi hanno risposto $\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} = 2\,300$ (figura 6.21). Altri tre gruppi, invece, hanno risposto $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800$, senza realizzare che non bisognava tenere in conto l'ordine di estrazione degli studenti (figura 6.22a). Infine, il gruppo 2 ha capito che la risposta al secondo quesito

A)

tot 25 alunni

$$25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\ 800 \rightarrow \left(\begin{array}{c} 25 \\ \text{possibilità} \\ \text{al 1° posto} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 24 \\ \text{al} \\ \text{secondo} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 23 \\ \text{al terzo} \end{array} \right)$$

i premi in un singolo podio sono $3! = 6$ combinazioni

i possibili podi sono $13\ 800 \rightarrow 13\ 800 \cdot 6 = 82\ 800$

(a)

Ⓐ 25 studenti
3 posti
3 premi

A

$$\begin{array}{l} \swarrow 1^{\circ} - 1 \\ \quad \swarrow 2^{\circ} - 1 \\ \quad \quad \swarrow 3^{\circ} - 1 \end{array}$$

1) nel podio le combinazioni possibili sono 150
($25 \cdot 3! = 150$)

↓

3 i posti nel podio

(b)

Figura 6.20: Risoluzioni scorrette del problema A della scheda 5.5

Handwritten solution for problem B. At the top, it says "distribuiti i premi". Below, the calculation is $B. \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} = 2300$. An arrow points from the result to three boxes containing the numbers 25, 24, and 23, with the word "possibilità" written below them. At the bottom, it says "non importa l'ordine in cui vengono estratti".

Figura 6.21: Risoluzione corretta del problema B della scheda 5.5

Handwritten incorrect solution (a). It shows the calculation $B) 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\ 800$ and the text "stesso ragionamento del podio" below it.

(a)

Handwritten incorrect solution (b). It shows the calculation $B) 25 + 24 + 23 = 72$ and the word "possibilità" to the right.

(b)

Figura 6.22: Risoluzioni scorrette del problema B della scheda 5.5

doveva essere numericamente inferiore a quella del primo quesito, perciò ha proposto di utilizzare l'addizione invece della moltiplicazione per ottenere un risultato più piccolo, ossia $25 + 24 + 23 = 72$ possibilità (figura 6.22b). Si è discusso assieme sulle risoluzioni della scheda, evidenziando come i due problemi si distinguessero per la rilevanza o meno dell'ordinamento degli studenti.

Terminata la discussione sulla scheda, è stata proposta la presentazione A.2 (vedi Appendice A) per derivare la formulazione del coefficiente binomiale come $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Si è posta particolare attenzione sul significato combinatorio del coefficiente binomiale e dei simboli n e k .

Per concludere la lezione, infine, alla classe è stata assegnata la scheda 5.6 (pag. 45) come compito per casa.

6.5 Svolgimento del terzo incontro

La prima ora dell'incontro è stata dedicata a correggere i compiti per casa svolti dagli alunni e a chiarire gli eventuali dubbi. Per ogni problema della scheda 5.6, si è chiesto ad un alunno o alunna di leggere l'enunciato e la propria risposta, commentando poi assieme le soluzioni proposte.

La prima domanda chiedeva: "Qual è lo sviluppo del binomio $(x+y)^7$?" La risposta correttamente proposta è stata $x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$, gli altri studenti hanno concordato senza difficoltà. Si è evidenziato come trovare i coefficienti dello sviluppo del binomio all'interno del triangolo di Tartaglia-Pascal.

La seconda domanda chiedeva: "Qual è lo sviluppo del binomio $(2A+B)^4$?" La risposta correttamente proposta è stata $16A^4 + 32A^3B + 24A^2B^2 + 3AB^3 + B^4$, e anche in questo caso gli altri studenti hanno concordato senza difficoltà.

La terza domanda chiedeva: "In quanti modi posso comporre un cono gelato da tre gusti, sapendo che i gusti possibili sono pistacchio, biscotto, cocco, amarena e gianduia?" Lo studente interpellato ha affermato di aver risposto al quesito utilizzando la formula del coefficiente binomiale vista durante la lezione precedente, ottenendo $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ modi di comporre il cono gelato. Si è chiesto allo studente come si poteva ricavare questa risposta a partire dal Triangolo di Tartaglia-Pascal e si è visto insieme che per trovare in quanti modi si possono scegliere k elementi tra n (senza che importi l'ordine in cui detti elementi sono presi) è sufficiente guardare il termine k -esimo dell' n -esima riga del Triangolo di Tartaglia-Pascal, con l'accortezza di contare sia le righe sia i termini di ogni riga partendo da zero. In particolare, si è visto che la risposta al quesito si poteva trovare nella terza posizione della quinta riga del Triangolo (figura 6.23, cerchiato). Sono stati proposti altri esempi con differenti n e k per accertarsi che la classe avesse compreso come utilizzare correttamente il Triangolo per ricavare i coefficienti binomiali. In seguito, un'altra alunna è intervenuta affermando che il problema si poteva risolvere in una terza maniera, ossia contando i modi di scegliere i 3 gusti di gelato con il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio e dividendo per i modi possibili di riordinare i 3 gusti, ossia facendo $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$.

La quarta domanda chiedeva: "In un comitato di dieci persone, tutti si salutano stringendosi la mano. Quante saranno le strette di mano in totale?" La risposta correttamente proposta è stata di utilizzare la formula del coefficiente binomiale $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45$. Un altro studente è intervenuto e ha spiegato di aver risolto il quesito nella maniera seguente: ha considerato che la prima persona stringeva la mano a 9 altre persone, la seconda ad altre 8, escludendo la prima che è già stata contata, e così via, dando luogo a $9 + 8 + 7 + \dots + 1$ strette di mano totali; si è fatto notare che la risposta era corretta ma più difficoltosa da applicare per numeri elevati di persone.

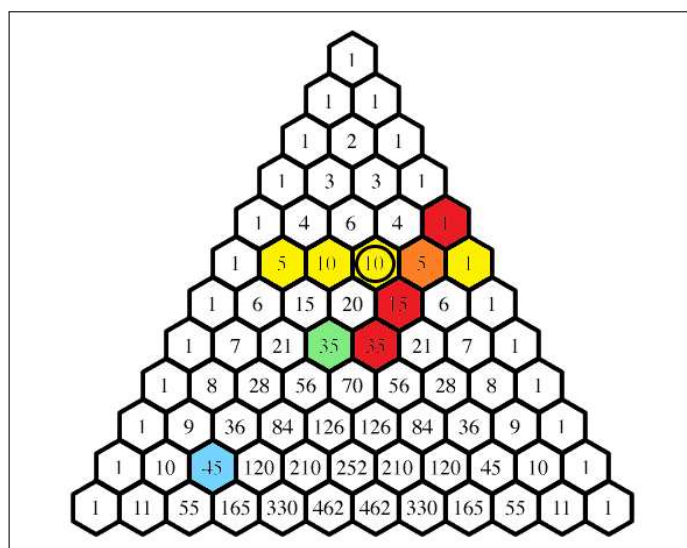


Figura 6.23: Risoluzioni dei quesiti della scheda 5.6 attraverso il Triangolo di Tartaglia-Pascal

Infine, si è riproposto di cercare assieme la risposta al quesito all'interno del Triangolo di Tartaglia-Pascal, andando a prendere il secondo termine della decima riga (figura 6.23, in blu).

La quinta domanda chiedeva: "Su un piano ci sono sette punti, a tre a tre non allineati. Quanti triangoli è possibile formare usando come vertici tre di questi punti?" La risposta correttamente proposta è stata di utilizzare la formula del coefficiente binomiale $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$. Alternativamente, si è chiesto allo studente di cercare la risposta nel Triangolo di Tartaglia-Pascal, selezionando il terzo elemento della settima riga (figura 6.23, in verde).

La sesta domanda chiedeva: "Cristiano sta comprando dei cioccolatini di diverse varietà per fare dei regali. Sapendo che ha deciso di preparare 30 confezioni con quattro cioccolatini diversi ciascuna e che non vuole che ci siano due confezioni uguali tra loro, qual è il numero minimo di varietà diverse di cioccolatini che dovrà comprare?" La risposta correttamente proposta è stata di utilizzare il Triangolo di Tartaglia-Pascal, guardando il quarto termine di ogni riga fino a trovare un coefficiente maggiore di 30, fatto che si verifica una volta raggiunta la settima riga (figura 6.23, in rosso): pertanto, scegliendo tra 7 varietà di cioccolatini si potranno formare 35 confezioni composte da 4 cioccolatini diversi ciascuna, ossia con 7 varietà di cioccolatini sarà possibile comporre le 30 confezioni richieste. Si è fatto notare come questo problema sarebbe di difficile risoluzione senza utilizzare il Triangolo di Tartaglia-Pascal, in quanto la richiesta si traduce in una disequazione di quarto grado data da $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \geq 30$. Si è proposto di rispondere nuovamente al quesito, sempre utilizzando il Triangolo

di Tartaglia-Pascal, considerando stavolta confezioni da 3 cioccolatini l'una.

La settimana domanda chiedeva: "Alla yogurteria "Biancolatte" si può guarnire il proprio yogurt gelato con quanti topping si vuole, a scelta tra cioccolato, granella di nocciole, cocco, fragole e crema di pistacchio. In quanti modi diversi è possibile guarnire uno yogurt gelato?" La risposta correttamente proposta è stata che 1 topping si può scegliere in 5 modi, 2 topping in $\binom{5}{2}$ modi, 3 topping in $\binom{5}{3}$ modi, 4 topping in $\binom{5}{4}$ modi e 5 topping in 1 unico modo, per un totale di 31 topping. Si è osservato come la risposta si potesse trovare più facilmente dal Triangolo di Tartaglia-Pascal, sommando i termini della quinta riga (ad esclusione del termine al posto zero): $5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ (figura 6.23, in giallo).

Dopo una pausa di 10 minuti, gli studenti si sono disposti a formare i gruppi stabiliti dalla professoressa. Erano presenti 20 alunni su 22: 17 alunni in presenza, a formare tre gruppi da 3 persone ciascuno e quattro gruppi da 2 persone, e 3 alunni in didattica a distanza, a formare un ulteriore gruppo. Ad ogni studente è stata consegnata una copia della scheda 5.7 (pag. 48), con l'indicazione di risolverla in gruppo in un tempo limite di 15 minuti. Allo scadere del tempo, ogni gruppo ha consegnato una scheda, che è stata fotografata e proiettata alla LIM, per commentare le risoluzioni assieme a tutti gli studenti.

La scheda chiedeva: "Sarah abita a New York. In questo momento si trova all'angolo tra la 10th Avenue e la West 16th Street e vuole andare al suo bar preferito, tra la 8th Avenue e la West 19th Street. Quanti sono i possibili percorsi di lunghezza minima (ovvero muovendosi solo verso destra e verso l'alto) che Sarah può seguire per raggiungere il bar? E se invece Sarah volesse tornare direttamente a casa (senza quindi passare necessariamente dal bar), tra la 6th Avenue e la West 23th Street, quanti possibili percorsi di lunghezza minima potrebbe seguire?" Assieme al testo, è stata presentata una cartina della porzione di New York citata nella domanda (figura 6.24).

Cinque gruppi su otto hanno risposto correttamente alla prima domanda: di questi, quattro hanno risolto il problema contando manualmente i percorsi, in maniera più o meno strutturata (figura 6.25a). Soltanto il gruppo 1 è riuscito ad identificare una formula generalizzabile per contare i percorsi: il gruppo ha spiegato a voce di aver utilizzato la formula del coefficiente binomiale, scegliendo $n = 3 + 2$, perché Sarah deve spostarsi 3 volte verso destra e 2 verso l'alto, e indifferentemente $k = 2$ o $k = 3$, ottenendo $\binom{3+2}{3} = \binom{3+2}{2} = \frac{(3+2)!}{3!2!} = 10$ percorsi possibili (figura 6.25b). Un altro gruppo è intervenuto riportando di aver osservato delle regolarità nel numero di percorsi possibili che passavano per ciascun incrocio ma di non aver saputo come ricavare una soluzione da queste osservazioni.

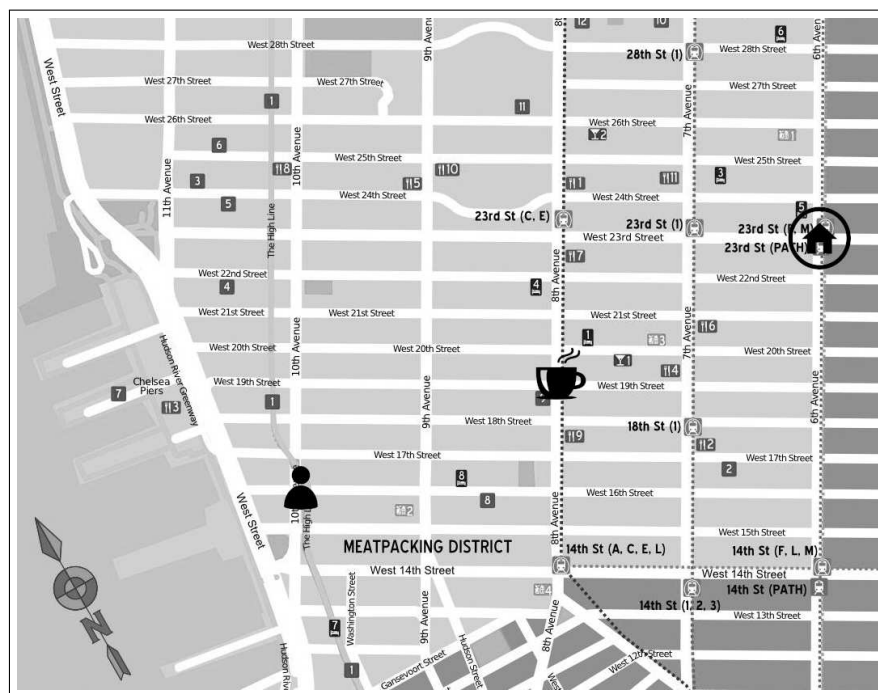


Figura 6.24: Cartina allegata alla scheda 5.7

1) 1^o STRADA → 4 POSSIBILITÀ
 2^o STRADA → 3 POSSIBILITÀ
 3^o STRADA → 2 POSSIBILITÀ
 4^o STRADA → 1 POSSIBILITÀ

10 POSSIBILITÀ

(a)

$$\frac{(3+2)!}{3!2!} = 10$$

(b)

Figura 6.25: Risposte corrette alla prima domanda della scheda 5.7

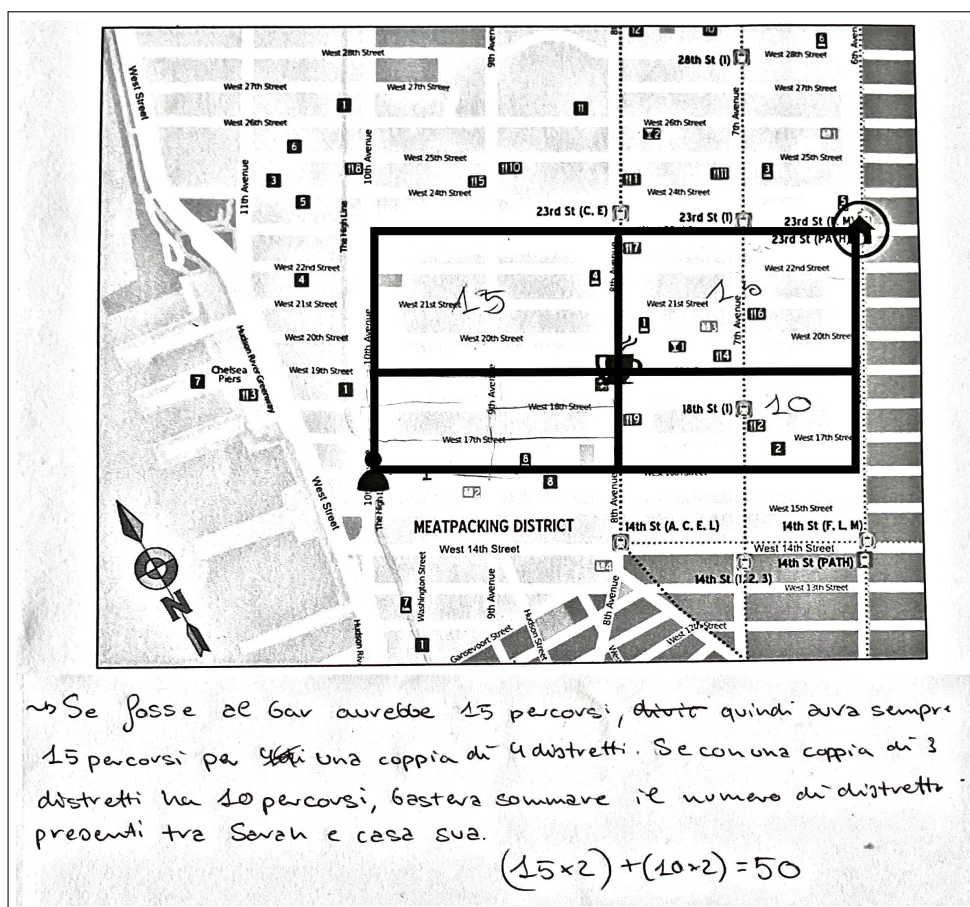


Figura 6.26: Risposta scorretta alla seconda domanda della scheda 5.7

I gruppi si sono trovati in maggiore difficoltà nel rispondere alla seconda domanda, che prevedeva una risposta numericamente troppo grande da permettere di contare manualmente i percorsi. Il gruppo 3 ha cercato di ricondursi al caso precedente, in maniera scorretta, suddividendo il reticolo stradale in quattro sotto-reticoli e sommando il numero di percorsi che attraversano ciascuno dei sotto-reticoli (figura 6.26). Solo il gruppo 1 è riuscito a calcolare correttamente il numero di percorsi possibili, applicando nuovamente la formula del coefficiente binomiale, stavolta con $n = 4 + 7 = 11$ e $k = 4$, e ottenendo così $\frac{11!}{4! \cdot 7!} = 330$ percorsi possibili (figura 6.27).

Dialogando con la classe, si è cercato di giustificare più dettagliatamente la soluzione proposta dal gruppo 1: si è osservato che, per raggiungere il bar, a prescindere dal percorso intrapreso, Sarah deve necessariamente effettuare un totale di 5 spostamenti, di cui 2 verso destra e 3 verso l'alto. Di conseguenza, scegliere un possibile percorso equivale a scegliere $k = 2$ spostamenti da effettuare verso destra tra $n = 5$ spostamenti totali o, equivalentemente,

$$\frac{(4+7)!}{4! 7!} = \frac{11!}{4! 7!} = 330$$

Figura 6.27: Risposta corretta alla seconda domanda della scheda 5.7

$k = 3$ spostamenti da effettuare verso l'alto tra $n = 5$ spostamenti totali: una volta scelti gli spostamenti da fare verso destra (o verso l'alto), il percorso sarà univocamente determinato, come si è provveduto a mostrare tramite un paio di esempi.

Si è proposta una soluzione alternativa, che prevede di rappresentare i percorsi per raggiungere il bar attraverso stringhe di lettere: la lettera D codifica uno spostamento verso destra, la lettera A uno spostamento verso l'alto. In questa maniera, i possibili percorsi coincidono con gli anagrammi della stringa "DDAAA", che sono precisamente $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$. Si è proposto, dunque, di applicare il medesimo ragionamento anche alla seconda domanda: dal momento che stavolta Sarah deve spostarsi 4 volte verso destra e 7 volte verso l'alto, i possibili percorsi coincidono con gli anagrammi della stringa "DDDDAAAAAAAA", che sono $\frac{11!}{4! \cdot 7!} = 330$.

Infine, si è mostrata una terza soluzione possibile, che consiste nel sovrapporre al reticolo stradale il Triangolo di Tartaglia-Pascal, opportunamente ruotato e deformato, in modo da far corrispondere i coefficienti del Triangolo agli incroci (figura 6.28): il coefficiente relativo a ciascun incrocio rappresenta, dunque, il numero di percorsi possibili che conducono a tale incrocio; infatti, il numero di modi che permettono di arrivare ad un incrocio X si ottiene sommando il numero di modi che conducono all'incrocio immediatamente a sinistra di X e il numero di modi che conducono all'incrocio immediatamente sotto a X , riproducendo per l'appunto la costruzione del Triangolo di Tartaglia-Pascal.

Per concludere la lezione, infine, alla classe è stata assegnata la scheda 5.8 (pag. 49) come compito per casa in preparazione alla verifica dell'incontro successivo.

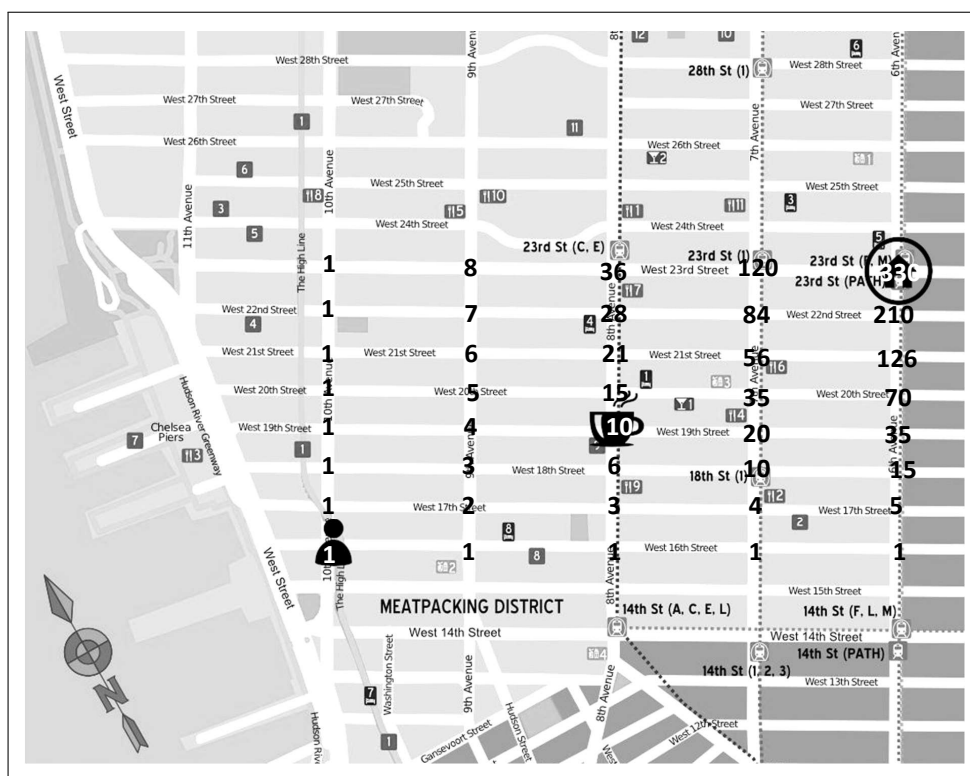


Figura 6.28: Risoluzione della scheda 5.7 utilizzando il Triangolo di Tartaglia-Pascal

6.6 Svolgimento del quarto incontro ed esiti della verifica

All'incontro erano presenti 19 alunni su 22, oltre a 2 in didattica a distanza, che non hanno pertanto svolto la prova di verifica. Gli alunni si sono disposti con i banchi opportunamente distanziati. Si è consegnata la scheda di verifica 5.9 (pag. 50) a ciascuno studente, assieme ad una copia del Triangolo di Tartaglia-Pascal, con l'indicazione di rispondere alle domande su un foglio protocollo entro il tempo limite di 50 minuti, senza utilizzare la calcolatrice. Allo scadere del tempo, le verifiche completate sono state raccolte.

I risultati complessivi della classe nel rispondere alla scheda 5.9 sono riportati in maniera estesa nella tabella B.3 dell'appendice B e riassunti nel grafico 7.1 (pag. 102).

La prima domanda della scheda 5.9 di verifica chiedeva: "Quante sono le diagonali di un dodecagono (poligono con 12 lati e 12 vertici)?"

Sono stati soltanto 3 gli studenti che hanno risposto correttamente alla domanda. Di questi:

- due hanno utilizzato il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio, affermando che il primo estremo della diagonale poteva essere scelto tra i 12 vertici e il secondo tra 9 (escludendo il punto già scelto e i due adiacenti), e che era necessario dividere per $2!$ per non contare più volte la stessa diagonale, ottenendo $\frac{12 \cdot 9}{2!} = 54$ diagonali (figura 6.29a, pag. 83);
- la terza studentessa, invece, ha utilizzato la formula del coefficiente binomiale per contare tutte le possibili coppie non ordinate di vertici e vi ha sottratto i 12 lati, ricavando $\binom{12}{2} - 12 = 54$ diagonali (figura 6.29b, pag. 83).

Tra gli studenti che non hanno risposto correttamente, invece:

- una studentessa ha erroneamente contato anche i lati, considerando tutte le $\binom{12}{2} = 66$ possibili coppie non ordinate di vertici (figura 6.30a, pag. 84);
- alcuni studenti hanno scelto il primo estremo della diagonale tra i 12 vertici e il secondo tra gli altri 9 ammissibili, senza accorgersi che così ogni diagonale veniva contata due volte, per un totale di $12 \cdot 9 = 108$ diagonali (figura 6.30b, pag. 84);
- diversi studenti hanno cercato di escludere i vertici adiacenti già in partenza, per poi andare a contare le coppie di vertici, ottenendo come risultato $\binom{10}{2} = 45$ diagonali (figura 6.30c, pag. 84) o simili;

1) $n = 12$

$$\frac{n \times (n-3)}{2!} = \frac{12 \times 9}{2} = 54$$

- prima scelgo tra 12 vertici
 - poi ne restano 11 ma non si forma una diagonale unendo 2 vertici vicini. Quindi sottraggo 2 a 11.
 - alla fine divido per 2! poiché non importa l'ordine e $k=2 \rightarrow$ sono le combinazioni uguali che posso avere con 2 vertici.

(a)

1) 12 vertici (12 lati)

$$\left(\frac{12}{2} \right) - 12 =$$

$$= \frac{12!}{2!10!} - 12 =$$

$$= \frac{6 \cdot 12 \cdot 11}{2} - 12 =$$

$$= 66 - 12 = 54$$

$\rightarrow -12$ poiché i lati del poligono non sono dette diagonali, ma sono comunque l'unione di due vertici, quindi non devo considerarle
 $\rightarrow 10!$ poiché la diagonale è l'unione di 2 vertici e poiché non conta l'ordine in cui i 2 vertici sono uniti

(b)

Figura 6.29: Risoluzioni corrette del problema 1 della scheda 5.9 di verifica

- alcuni studenti hanno frainteso i concetti geometrici di dodecagono e/o di diagonale, nonostante fosse stata ripetuta alla classe la definizione di diagonale durante lo svolgimento della verifica (figura 6.30d, pag. 84);
- i restanti studenti, infine, hanno fatto errori di diverso genere, intraprendendo il conteggio in maniera differente (figura 6.30e, pag. 84).

La seconda domanda chiedeva: "Mario si è dimenticato il PIN del suo bancomat. Si ricorda soltanto che il PIN è composto da 5 cifre e che l'ultima cifra è divisibile per 4. Quanti sono i possibili PIN che Mario dovrebbe provare per essere certo di indovinare il suo PIN? [suggerimento: ricorda che anche lo 0 è divisibile per 4]"

La maggior parte della classe ha risposto correttamente a questa domanda:

- molti studenti hanno osservato che le prime quattro cifre del PIN possono essere scelte in 10 modi differenti ciascuna (ossia, tutte le cifre da 0 a 9), mentre l'ultima in soli 3 modi (essendo 0, 4 e 8 le cifre divisibili per 4), e hanno ricavato la soluzione applicando il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio, ottenendo $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 = 30\,000$ PIN possibili (figura 6.31a, pag. 86); alcuni studenti si sono aiutati con strumenti grafici, come la rappresentazione dei caratteri del PIN come

7) $\binom{12}{2} = 66$

I vertici totali sono 12 e per formare una diagonale mi occorrono 2 vertici alla volta.

(a)

① 12 vertici
12 lati
dato che le diagonali uniscono vertici non adiacenti
per ogni vertice ho 12-3 possibilità perché uno è il vertice che considero e per altri 2 sono i vertici adiacenti
• 9×12 diagonali possibili
• $\div 2$

(b)

① diagonali di un decagono (12 lati e 12 vertici)

che per vertice la diagonale può andare in 9 vertici differenti, non tenendo conto dei 2 vertici adiacenti a quello considerato

ogni vertice per formare una diagonale deve unirsi ad un altro vertice $\rightarrow$ quindi faccio 9×12 come se volessi fare delle coppie

$\frac{9 \times 12}{2} = \frac{108}{2} = 54$

do xché i 2 vertici di lato a quello considerato non valgono

(c)

④ un dodecagono ha 12 vertici e le diagonali uniscono i vertici in coppie di due punti. Dato che le diagonali devono passare per il centro allora ogni punto è collegato con quello opposto rispetto al centro

$\frac{12}{2} = 6$ diagonali

(d)

es 1

$9 \times 9 + 8 \times 7 + 6 \times 5 + 4 \times 3 + 2 \times 1$

ogni vertice crea 9 diagonali perché non possiamo contare il vertice stesso

non considero le stesse diagonali

x ogni vertice ne considero sempre uno in meno

(e)

Figura 6.30: Risoluzioni scorrette del problema 1 della scheda 5.9 di verifica

trattini o caselle (figura 6.31a, pag. 86), oppure l'utilizzo di rudimentali diagrammi ad albero (figura 6.31b, pag. 86);

- un paio di studenti, invece, hanno fissato l'ultima cifra del PIN e hanno calcolato che le restanti quattro cifre potevano essere scelte in $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ modi, per un totale di $3 \cdot 10\,000 = 30\,000$ possibili PIN, al variare dell'ultima cifra (figura 6.31c, pag. 86);
- un unico studente ha utilizzato la formula delle disposizioni con ripetizione (formula 2.5, pag. 17) per contare le possibilità per le prime 4 cifre del PIN e la formula delle disposizioni semplici (formula 2.4, pag. 16) per contare le possibilità per l'ultima cifra, ottenendo $10^4 \cdot \frac{3!}{2!} = 30\,000$ possibili PIN (figura 6.31d, pag. 86).

Per quanto riguarda, invece, chi non ha risposto correttamente a questa domanda:

- alcuni studenti hanno commesso errori minori, ad esempio considerare le cifre da 0 a 9 come 9 cifre invece di 10 (figura 6.32a, pag. 87);
- due studenti hanno effettuato il conteggio come se le cifre del PIN non potessero ripetersi, contando così $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 = 15\,120$ possibili PIN (figura 6.32b, pag. 87);
- una studentessa, infine, ha erroneamente utilizzato il coefficiente binomiale di 10 su 4 per conteggiare le possibilità per le prime 4 cifre (figura 6.32c, pag. 87).

La terza domanda chiedeva: "Mario si ricorda improvvisamente che nel PIN non ci sono cifre uguali consecutive. Quanti PIN dovrà provare Mario adesso che si è ricordato anche questa informazione?"

Sono state 3 le alunne che hanno risposto correttamente a questa domanda. Tutte e tre le alunne hanno cominciato col considerare l'ultima cifra, che può essere scelta in 3 modi (ovvero può essere 0, 4 o 8 come nell'esercizio precedente), e da lì hanno proceduto a ritroso, osservando che ciascun altro carattere del PIN può essere scelto tra 9 cifre, così da differire dal carattere alla destra. Dunque, le alunne hanno risposto correttamente che i possibili PIN sono $9^4 \cdot 3 = 19\,683$ (figura 6.33, pag. 87).

Per quanto riguarda, invece, le risoluzioni inesatte:

- alcuni alunni hanno preso in considerazione le cifre del PIN partendo dalla sinistra e hanno affermato che il primo carattere può essere scelto in 10 modi (tutte le possibili cifre da 0 a 9), il secondo in 9 modi per essere differente dal primo, il terzo in 9 modi per essere differente dal secondo, il quarto ancora in 9 modi per essere differente dal terzo, e il quinto in 3 modi (ovvero 0, 4 o 8), senza tenere conto del fatto

2) 5 cifre scelte tra 10
l'ultima divisibile per 4

① 0 1 2 3 ④ 5 6 7 ⑧ 9

3 cifre divisibili per 4

① 0 0 0 ① x3

Considerando che le cifre possono ripetersi
 $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 = 30.000$ combinazioni

(a)

② 5 cifre
ultima
verifica

- neee, ultimo posto ho 3 possibilità e neppoi dietro dato che posso ripetere ee ci ere quindi $\rightarrow 10^4 \times 3$ PIN possibili

(b)

5 CIFRE

0, 4, 8,

Fisso prima 10 0

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

FISSANDO 10 4 OTTENGO 10 STESSO numero = 10.000
 FISSANDO 10 8 OTTENGO 10 STESSO numero = 10.000

QUINDI IN TOTALE $\rightarrow 10.000 \cdot 3 = 30.000$

(c)

2. $n=10$
 $k=4$
 Prime 4 cifre, ammesse ripetizioni

$n=3$ (0, 4, 8)
 $k=1$ divisibili per 4
 Ultima cifra

$h_1 \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = 10^4 \cdot \frac{3!}{2!} = 10.000 \cdot 3 = 30.000$

(d)

Figura 6.31: Risoluzioni corrette del problema 2 della scheda 5.9 di verifica

Più 5 cifre, ultima cifra divisibile per 4 0 0 0 0 0
 cifre divisibili per 4 sono 0, 4, 8
 se l'ultima è 0, tot = ~~99999~~ 9^4
 ripetendo le ragionamento per 4 e 8, in totale le combinazioni
 sono $9^4 \cdot 3$

(a)

② PIN da 5 cifre
 ultima cifra divisibile per 4 $\rightarrow 0, 4, 8$
~~data che non posso avere ultima cifra possibile~~

Posizione della	1° cifra ci saranno	2°	3°	4°	5°	possibilità di cifre
1°	"	"	"	"	"	9
"	"	"	"	"	"	8
"	"	"	"	"	"	7
"	"	"	"	"	"	3

 Lo dato che deve essere
 divisibile per 4
 $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 = 15120$ possibili PIN

(b)

0 0 0 0 0
 $\left(\frac{10}{4}\right) \rightarrow$ scopro le prime 4 cifre perché si possono
 ripetere
 numeri cifre divisibili $\times 4 \rightarrow 0, 4, 8$
 $\left(\frac{10}{4}\right) \times 3 \times 3 \rightarrow$ 3 cifre divisibili $\times 4$
 3 scelte

(c)

Figura 6.32: Risoluzioni scorrette del problema 2 della scheda 5.9 di verifica

3. No cifre uguali consecutive
 $\rightarrow$ Le considero il PIN a
 partire dallo 0, la cifra
 seguente avrà 9 scelte e
 quelle seguenti pure.

□	□	□	□	□
0	1	2	3	4
9	8	7	6	5

 Considerando che questo può avvenire per 3 casi distinti (ultima cifra =
 0, 4, 8), i PIN possibili saranno $\rightarrow 9^4 \cdot 3$

Figura 6.33: Risoluzione corretta del problema 3 della scheda 5.9 di verifica

che anche le ultime due cifre non devono essere uguali, e rispondendo, dunque, che i possibili PIN sono $10 \cdot 9^3 \cdot 3 = 21\,870$ (figura 6.34a, pag. 89);

- la maggior parte degli studenti, poi, ha cominciato a considerare le cifre del PIN partendo sempre da sinistra, ma senza tralasciare il fatto che la quarta cifra deve differire non solo dalla terza ma anche dalla quinta cifra; le soluzioni proposte, perciò, concordano nel fatto che la prima cifra possa essere scelta in 10 modi, la seconda e la terza in 9 modi ciascuna, e la quinta in 3, mentre sono state diverse le strategie adottate per la quarta cifra: scelta tra $10 - 1 - 3 = 6$ possibilità, per essere differente sia dalla terza cifra che da tutte e tre le possibili scelte per la quinta cifra, ovvero $10 \cdot 9^2 \cdot 6 \cdot 3 = 14\,580$ PIN (figura 6.34b, pag. 89); scelta tra $10 - 1 - 1 = 8$ possibilità, per essere differente sia dalla terza che dalla quinta cifra, ovvero $10 \cdot 9^2 \cdot 8 \cdot 3 = 19\,440$ PIN (figura 6.34c, pag. 89); scelta tra $10 - 3 = 7$ possibilità, per essere differente dalle tre possibili scelte per la quinta cifra, ovvero $10 \cdot 9^2 \cdot 7 \cdot 3 = 17\,010$ PIN;
- altri studenti hanno risolto l'esercizio supponendo erroneamente che tutte le cifre del PIN debbano essere diverse tra di loro, rispondendo che i possibili PIN sono $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 = 9\,072$ (figura 6.34d, pag. 90);
- i restanti alunni, infine, hanno conteggiato i PIN in maniere differenti, ad esempio utilizzando la formula del coefficiente binomiale in maniera inappropriata (figura 6.34e, pag. 90) o dividendo il numero di PIN ottenuto nell'esercizio precedente per il numero di modi in cui le cifre del PIN possono essere permutate (figura 6.34f, pag. 90).

La quarta domanda chiedeva: "Il fisioterapista di Marta le ha consigliato una serie di esercizi utili per il suo dolore alla schiena. Si è raccomandato che Marta ne faccia quattro ogni giorno. Marta, per non annoiarsi, decide che ogni giorno la sua scelta di esercizi sarà diversa dalle scelte già fatte nei giorni precedenti; fa un paio di conti e si accorge che potrà andare avanti ben 210 giorni prima di dover ripetere una scelta. Quanti sono gli esercizi proposti dal fisioterapista?"

La maggior parte della classe ha risposto correttamente a questa domanda, utilizzando il fatto che l'elemento di posto k della riga n del Triangolo di Tartaglia-Pascal (con $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$) è il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, ossia il numero di modi in cui si possono prendere k elementi a scelta tra n senza che l'ordine sia rilevante. Gli studenti, perciò, hanno percorso il Triangolo di riga in riga, cercando lungo la diagonale formata dagli elementi di posto $k = 4$ il numero 210 (figura 6.35a, pag. 91), ovvero il numero di modi in cui Marta può scegliere i suoi esercizi, concludendo che il numero

10
possibilità

9 9 9 3

$(10 \cdot 9^3 \cdot 3)$

c'è sempre 1 numero che non possiamo mettere, quello uguale alla cifra precedente

(a)

3) Non ci sono cifre uguali CONSECUTIVE
L'ultimo numero è sempre divis per 4

$10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 = 2430 \cdot 3 = 7290$

perché non uguale alla prec

perché non uguale alla prec ma può essere uguale alla prima

6 possibilità perché ha 9 possibilità rispetto al 4° numero precedente ma non può essere una delle 3 cifre divisibili per 4 che la seguono

810
18
6480
8100
13580

(b)

Nella seconda cifra ho 9 possibilità perché il 2° numero non deve essere uguale al primo

Nell'ultima ho 3 possibilità per problema precedente

Nella prima cifra ho 10 possibilità perché non ho unità

Nella 3° cifra ho 9 possibilità perché deve essere ~~uguale~~ diversa dalla 2° cifra ma può essere uguale alla prima

8 possibilità perché deve essere diversa dalla 3° cifra e dalla 5° cifra

10 9 9 8 3

(c)

Figura 6.34: Risoluzioni scorrette del problema 3 della scheda 5.9 di verifica

$$\text{totale} = (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) \cdot 3$$

(d)

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 3 = 45 \cdot 45 \cdot 3$$

(e)

$$\frac{10!}{5!} = 30240$$

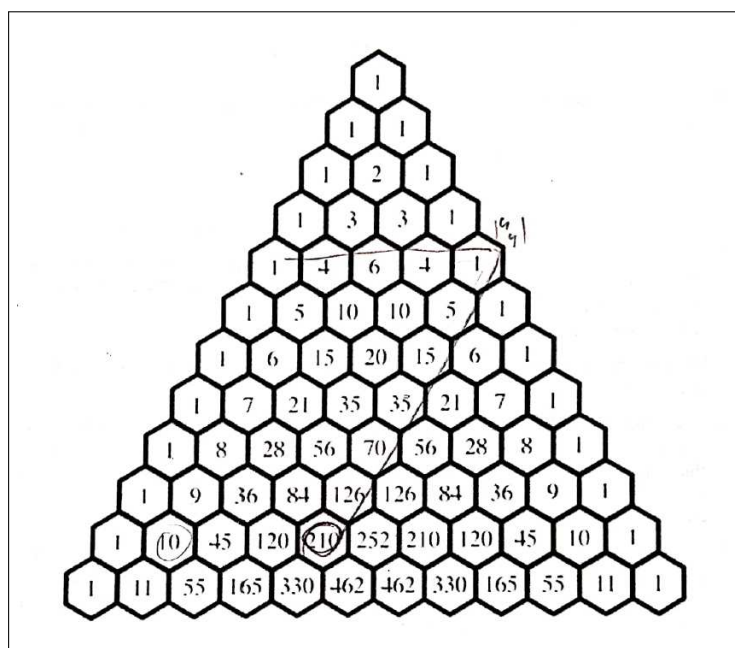
(f)

Figura 6.34: Risoluzioni scorrette del problema 3 della scheda 5.9 di verifica (cont.)

totale di esercizi corrispondeva al numero della riga in cui avevano trovato il coefficiente 210, ovvero la riga $n = 10$ (figura 6.35b, pag. 92). In particolare, alcuni alunni hanno indicato anche che il numero x di esercizi proposti dal fisioterapista deve soddisfare la relazione $\binom{x}{4} = 210$ (figura 6.35c, pag. 92, in cui è interessante notare che la studentessa ha fatto riferimento al problema risolto in classe relativo ai podi di una gara per puntualizzare che in questo problema, invece, l'ordine non è significativo) e/o hanno confermato la soluzione ottenuta dal Triangolo di Tartaglia-Pascal verificando che 210 sia effettivamente il numero di modi in cui si possono prendere 4 elementi a scelta tra 10 senza che l'ordine sia rilevante (figura 6.35d, pag. 92).

Soltanto due studenti non hanno risposto correttamente a questa domanda: la prima studentessa ha frainteso la richiesta del problema e ha ritenuto che nessun esercizio potesse essere ripetuto per più di un giorno (figura 6.36, pag. 93), mentre l'altro studente ha risposto che gli esercizi proposti dal fisioterapista sono 7 senza giustificare la risposta.

La quinta domanda chiedeva: "La classe di Ahmed partecipa ad un torneo di tennis. La classe, composta da 18 studenti, si sta organizzando per formare le squadre per il doppio. Quante sono le possibili coppie che si possono formare, sapendo che Marisa vuole stare in coppia con Jacopo, ed Eric non



(a)

Figura 6.35: Risoluzioni corrette del problema 4 della scheda 5.9 di verifica

vuole stare in coppia né con Lisa né con Filippo?"

La maggior parte della classe ha risposto correttamente a questa domanda.

- molti studenti hanno osservato che c'è già una coppia formata in partenza (Marisa-Jacopo), quindi hanno contato le possibili coppie da formare tra i $18 - 2 = 16$ alunni restanti con il coefficiente binomiale $\binom{16}{2}$ o direttamente come $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$, e vi hanno poi sottratto le due coppie non desiderate (Eric-Lisa, Eric-Filippo) e aggiunto la coppia già fissata (Marisa-Jacopo), ottenendo nel complesso $\frac{16 \cdot 15}{2} - 2 + 1 = 119$ coppie (figura 6.37a, pag. 93); alcuni studenti hanno seguito questo medesimo ragionamento ma non hanno conteggiato la coppia fissata Marisa-Jacopo, ottenendo pertanto 118 coppie (figura 6.37b, pag. 93);
- due studenti, invece, hanno risposto che se Marisa va necessariamente in coppia con Jacopo, Eric può stare in coppia con $18 - 2 - 1 - 2 = 13$ possibili compagni (escludendo Marisa e Jacopo, Eric stesso, Lisa e Filippo), mentre gli altri $18 - 3 = 15$ alunni possono formare $\binom{15}{2} = 105$ possibili coppie, per un totale di $1 + 13 + 105 = 119$ coppie (figura 6.37c, pag. 94).

I restanti studenti hanno commesso errori di diverso tipo nel tentativo di risolvere il problema:

4 es. ogni giorno $\rightarrow$ li combina in modo diverso x 210 giorni
 $\rightarrow$ n° es. a disposizione?
 Utilizzando il triangolo di Tartaglia $\rightarrow$ cerco in ogni "casella"
 in cui ho 4 esercizi a disposizione, quanti modi ho per
 combinarli $\rightarrow$ alla riga 10 al 4° posto, trovo il valore di 210
 modi. Di conseguenza Marta ha a disposizione 10 esercizi.

(b)

4) 4 ogni giorno
 210 gruppi diversi

$$\binom{x}{4} = 210 \rightarrow x = 10$$

 Dalla quarta posizione
 del triangolo di Tartaglia
 scendo in diagonale fino
 a raggiungere un numero $\geq$ di 210
 $\Rightarrow$ scelgo quella riga
 questo
 succede se
 il gruppo di 4 esercizi
 SONO TUTTI DIVERSI TRA LORO
 $(ABC) \neq (BCA)$ non è un poduo)

(c)

④ 210 giorni
 4 esercizi al giorno, sono le numero che devo scegliere tra
 un gruppo più grande quindi
 equivoce a k e devo disporre
 4 del triangolo di Tartaglia.
~~scendo~~ controllo la diagonale
 $k=4$ fino a trovare 210 ~~es~~ e
 la riga $n=10$ è soluzione.
 Infatti $\binom{n}{k} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = 210$

(d)

Figura 6.35: Risoluzioni corrette del problema 4 della scheda 5.9 di verifica (cont.)

4) 4 al giorno
 210 giorni → senza ripetere

1g	2g	3g	
↓	↓	↓	
0 n	n-4	n-8	

$n \cdot (n-4) \cdot (n-8) \cdot (n-12) = 210$
 98

Figura 6.36: Risoluzione scorretta del problema 4 della scheda 5.9 di verifica

ES 5

DATO CHE MARISA E SACPO VUOLNO STARE
 IN COPPIA POSSO GIÀ TOGLIERLI DAL TOTALE
 E CONTARE LE COMBINAZIONI CON GLI ALTRI 16 STUDENTI

□ □ CALCOLO LE POSSIBILI COPPIE SENZA
 TENER CONTO CHE ERIC NON VUOL
 STARE NE CON LISA NÉ CON FIUPPO

QUINDI LE POSSIBILI COPPIE SARANNO

LE RIPETIZIONI
 (A) B
 (B) A
 È LA
 STESSA
 COSA

16 · 15 = 240
 2
 120

A QUESTO N° TOGLIO LE
 COPPIE ERIC / MARISA
 ERIC / FIUPPO
 ERIC / LISA
 ERIC / SACPO

SI POSSONO FORMARE IN 2 MODI

$n^{\circ} \text{ coppie} = 1 + \frac{16 \cdot 15}{2} - 4 = 117$

MARISA
 e SACPO

(a)

ES 5

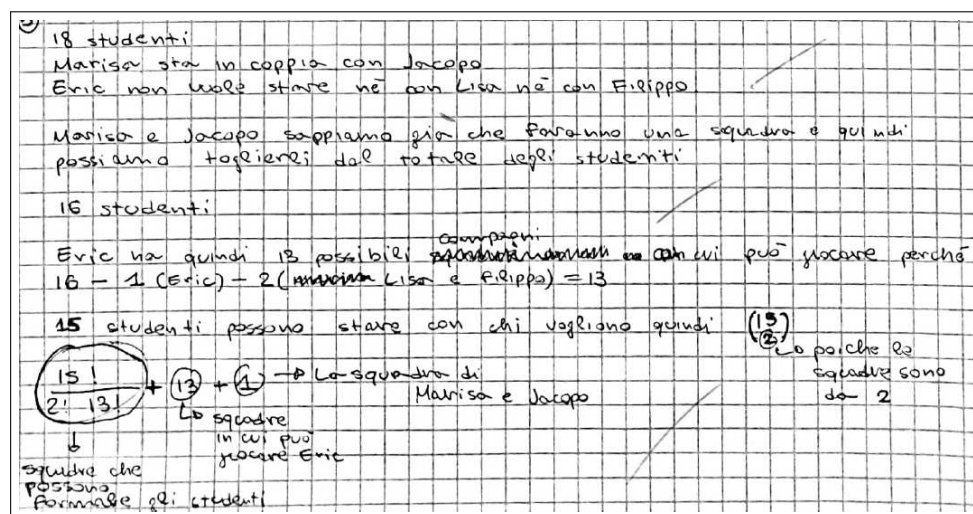
18 studenti coeff bin $\binom{18}{2}$ ma una coppia
 è fissa e altre due coppie non sono possibili.

$\frac{16!}{2! 14!} - 2$

coppie che non possono essere formate
 (Lisa e Eric possono essere in coppia)

(b)

Figura 6.37: Risoluzioni corrette del problema 5 della scheda 5.9 di verifica



(c)

Figura 6.37: Risoluzioni corrette del problema 5 della scheda 5.9 di verifica (cont.)

- una studentessa ha seguito la prima strategia ma ha erroneamente conteggiato le coppie da escludere come $\binom{3}{2} = 3$, escludendo accidentalmente non soltanto le coppie Eric-Lisa ed Eric-Filippo ma anche Lisa-Filippo (figura 6.38a, pag. 95);
- alcuni studenti, poi, hanno moltiplicato i numeri di coppie ottenute in ciascun passaggio invece di sommarle (figura 6.38b, pag. 95, che presenta anche alcuni altri errori);
- altri studenti hanno adottato strategie di calcolo differenti e scorrette (figura 6.38c, pag. 96);
- qualche studente, infine, ha consegnato una risposta incompleta, avendo iniziato a rispondere alla domanda senza terminare per mancanza di strategie o di tempo (figura 6.38d, pag. 96).

La sesta domanda chiedeva: "Quanti sono gli anagrammi (anche privi di senso) della parola 'COMBINATORIA' in cui le due 'A' appaiono una di seguito all'altra?"

Gli alunni che hanno risposto correttamente hanno seguito due differenti strategie:

- un primo gruppo di alunni ha considerato la coppia formata dalle due "A" come un'unica lettera e ha, dunque, contato il numero di anagrammi di una parola formata da 11 lettere, di cui due ripetute 2 volte (la "I" e la "O"), come $\frac{11!}{2! \cdot 2!}$ (figura 6.39a, pag. 98);

5) 18 studenti
2 studenti x squadra
M e J
 $\binom{18}{2}$ = numero coppie
 $\binom{16}{2}$ = se Marisa e Jacopo stanno assieme
 $\binom{16}{2} - \binom{3}{2}$ = numero di combinazioni possibili se Eric volesse stare con ~~Marisa~~ L e F
↳ numero di coppie senza quella già formata da ~~Marisa~~ M e J

(a)

5) 18 studenti
2 studenti per squadra
- 1 coppia già scelta
18 ~~studenti~~ - Eric ha 18 - (2 + 2) scelte = 14 scelte
↳ persone che non vuole
↳ coppia già scelta
- con Eric posso formare 14 coppie → mi restano 14 persone da accoppiare
- ~~perché ho già 2 coppie~~
 $\binom{14}{2} = \frac{14!}{2! \cdot 12!}$ coppie dei restanti
 $\frac{14!}{2! \cdot 12!} \times 14$

(b)

Figura 6.38: Risoluzioni scorrette del problema 5 della scheda 5.9 di verifica

3) $n=18$ studenti

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R

M - J E - 13 possibili coppie A - 13 possibili B - 11 possibili coppie

C - 9 possibili D - 8 possibili F = 5 possibili G = 3 possibili H = 1 possibile

1 coppia c'è l'ho già + $13 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 1675755$

2) $\frac{1675755}{2} = 837877.5$

risultato è una coppia

(c)

5) 18

tot studenti = 18 squadre da 2 M deve stare J E no con F L

calcolo per coppie tenendo conto della prima condizione

tot $\frac{18 \cdot 17}{2!} \cdot 2$ per tenere conto di M e J

per coppia coppia aggiungendo condizione che X deve stare con L e Y non è in modo che

(d)

Figura 6.38: Risoluzioni scorrette del problema 5 della scheda 5.9 di verifica (cont.)

- un secondo gruppo di alunni, invece, ha contato i possibili anagrammi della parola "COMBINATORIA" ottenibili senza considerare le due lettere "A" come $\frac{10!}{2! \cdot 2!}$ e ha poi moltiplicato per il numero di posizioni in cui la coppia "AA" può essere inserita nella parola, ossia 11 posizioni (sebbene due alunni abbiano sbagliato a contare correttamente il numero di posizioni possibili), per un totale di $\frac{10!}{2! \cdot 2!} \cdot 11$ anagrammi (figura 6.39b, pag. 98).

Per quanto riguarda gli errori commessi nel rispondere a quest'ultimo quesito:

- alcuni studenti hanno utilizzato le due strategie precedenti ma hanno erroneamente diviso ancora una volta il risultato per $2!$, con l'intenzione di escludere le possibili permutazioni della coppia "AA", ottenendo così rispettivamente $\frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ o $\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot 11$ anagrammi (figura 6.40a, pag. 99);
- una sola studentessa ha seguito la seconda strategia ma non ha tenuto in considerazione le ripetizioni delle lettere "I" ed "O", rispondendo che il numero di anagrammi possibili è $10! \cdot 11$ (figura 6.40b, pag. 99);
- un paio di studenti hanno contato gli anagrammi formati dalle lettere della parola "COMBINATORIA" escludendo totalmente due "A" (figura 6.40c, pag. 100);
- i restanti studenti hanno cercato di conteggiare gli anagrammi con strategie differenti ma imprecise (figura 6.40d, pag. 100).

COMBINATORIA

COMBINATORIA AA

le considero come unica lettera

LETTERE TOTALI

$\frac{11!}{2!2!}$

RIPETIZIONE

RIPETIZIONE I

(a)

COMBINATORIA

~~AA~~ anagrammi?

"A" di seguito

12 lettere

2 A

2 O

2 I

AA x x x x x x x x x x

CALCOLO ANAGRAMMI POSSIBILI DELLE RESTANTI 10 LETTERE

POI "AA" PUO' STARE TRA OGNI LETTERA

10 lettere

2 O

2 I

ANG: $\frac{10!}{2!2!}$

possibili posti di "AA" sono 11

11. $\frac{10!}{2!2!}$

"AA" può essere considerata come unica lettera

ANAGRAMMI POSSIBILI CON "AA" VICINI

Posso contare "AA" come unica lettera

(b)

Figura 6.39: Risoluzioni corrette del problema 6 della scheda 5.9 di verifica

6) COMBINATORIA

12 totali
 $O \times 2$
 $I \times 2$
 $A \times 2$



le due A devono essere vicine

Considero le 2 A come un'unica lettera
 $\rightarrow$ le lettere totali al questo punto diventano 11

$11!$
 $2! \cdot 2! \cdot 2!$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $I \quad O \quad A$

divido lo stesso per $2!$
 perché le 2 A si scambiano
 tra loro danno parole uguali
 Se considerate tutte 12 le lettere

(a)

6. COMBINATORIA

12 lettere

tolte le 2 A $\rightarrow$ 10 lettere

11 modi $\times$ avere le AA vicine

$10!$ $\rightarrow$ sono le possibilità di combinazione delle lettere restanti

$10! \cdot 11 = n^\circ$ di anagrammi possibili



(b)

Figura 6.40: Risoluzioni scorrette del problema 6 della scheda 5.9 di verifica

6) COMBINATORIA

2A
20
2I

anagrammi in cui le 2A vicine

$\frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ = anagrammi totali senza condizioni

$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$

riord. le A
riord. le O
riord. le I

che se
si scambiano
2 lettere uguali ~~risultano~~ la parola ottenuta e' comunque uguale

$12 - 2 = 10$

tolgo le 2A
tra le possibili
di scelta

(c)

6) COMBINATORIA $n=12$

2O
2I
2A

$\frac{12 \times 10 \times 2 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2! \times 2! \times 2!}$

- ho pensato di mettere per prime le 2 A e:

- per la prima calcolo che ci sono 10 possibilità (i 10 posti centrali)
- per la seconda le possibilità sono 2 poiché siccome le 2 A devono essere consecutive, la seconda si trova a destra o a sinistra della prima

- dopo aver posizionato le A mi rimanevano altri 10 spazi, quindi $10!$, le prime dei 10 ha 10 possibilità, le seconde 9, ecc.

- alla fine divido tutto per il numero delle combinazioni che può fare con le coppie di lettere uguali:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{COMBINATORIA} \\ \text{COMBINATORIA} \end{array} \right.$

(d)

Figura 6.40: Risoluzioni scorrette del problema 6 della scheda 5.9 di verifica (cont.)

Capitolo 7

Risultati e conclusione

In conclusione, come emerge in dettaglio dal resoconto del capitolo 6, l'esperienza didattica si è svolta in maniera piuttosto positiva. Superata l'iniziale timidezza, la classe si è mostrata coinvolta nelle attività proposte, adoperandosi proficuamente nei lavori di gruppo e intervenendo attivamente nelle discussioni in plenaria con domande e considerazioni. Sembra che i problemi abbiano suscitato l'interesse degli alunni, che in diverse occasioni hanno continuato a dibattere sulle strategie risolutive anche nei momenti di pausa, sia internamente al proprio gruppo sia con membri di altri gruppi. L'insegnante della classe, la prof.ssa Anna Gobitti, si è dichiarata soddisfatta dello svolgimento della sequenza didattica e ha manifestato la sua intenzione di riproporla stabilmente anche negli anni a seguire, avendo avuto modo di apprezzare un livello di partecipazione da parte degli studenti superiore rispetto alla media usuale della classe.

Per quanto riguarda i risultati quantitativi del test finale (scheda 5.9, pag. 50), riportati in maniera estesa nella tabella B.3 dell'appendice B e riassunti nel grafico 7.1 (pag. 102), si può notare come l'andamento generale sia piuttosto al di sopra del livello della sufficienza, ad eccezione dei due quesiti che si sono rivelati i più difficili per la classe, ossia il primo ed il terzo quesito. In particolare, il primo quesito prevedeva un ragionamento di tipo geometrico, mentre il terzo richiedeva un'elevata flessibilità per considerare gli elementi di una sequenza da destra verso sinistra, contrariamente alla norma consueta, oppure la precisione di prendere in analisi svariati possibili casi.

In generale, le difficoltà riscontrate più frequentemente da parte degli studenti consistono nello scomporre correttamente i problemi in passaggi a cui applicare il Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio e, in alcuni casi, nel riconoscere quando l'ordine di un raggruppamento è significativo o quando sono possibili ripetizioni di elementi. Si è potuto, invece, apprezzare come gli alunni abbiano adoperato le proprie capacità di ragionamento nell'elaborare strategie risolutive originali e diversificate per rispondere ai

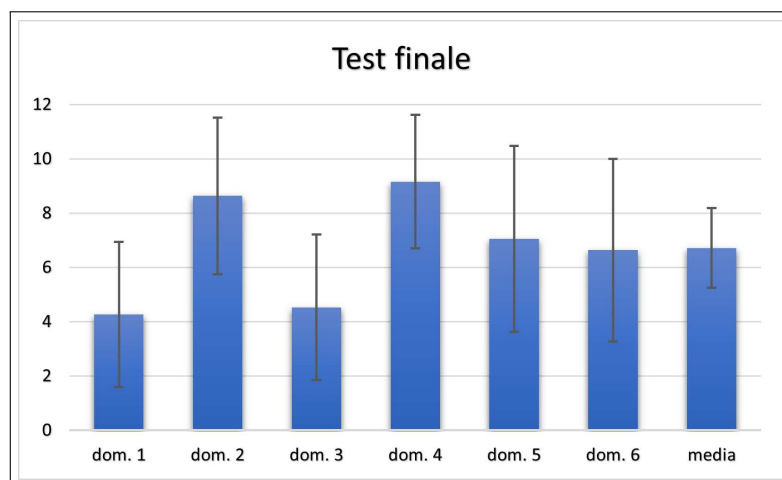


Grafico 7.1: I risultati della verifica finale. Nel grafico sono riportate le medie dei risultati delle singole domande e del risultato complessivo della verifica; le barre di errore rappresentano la deviazione standard.

quesiti, e come si siano impegnati ad argomentare accuratamente le proprie soluzioni.

Per contestualizzare i risultati ottenuti dagli studenti in un quadro di riferimento più generale, una seconda classe dello stesso istituto è stata sottoposta ai medesimi test iniziale (scheda 5.1, pag. 38) e finale (scheda 5.9, pag. 50), avendo svolto, però, un percorso didattico sul calcolo combinatorio impostato in maniera tradizionale, sotto la guida dell'insegnante della classe, la prof.ssa Elena Biviano. I risultati dei test sono riportati in maniera estesa nell'appendice B; nel grafico 7.2 (pag. 103), invece, sono messi a confronto i risultati dei test iniziali delle due classi, mentre nel grafico 7.3 (pag. 103) sono comparati i risultati dei test finali.

È importante sottolineare che il confronto tra le due classi ha una validità limitata, dal momento che si tratta di un campione piuttosto ridotto (22 alunni nella classe sperimentale, 15 in quella di controllo) e che, per motivi tecnici, vi sono state alcune differenze tra le due classi nella somministrazione dei test iniziali e nello svolgimento delle lezioni. In particolare, la classe sperimentale ha svolto il test iniziale a casa a causa dei tempi più stretti, mentre la classe di controllo lo ha completato in classe, senza la possibilità di consultare materiali di approfondimento, per quanto ad entrambe le classi sia stato segnalato che il test non aveva scopo valutativo e tutti gli studenti siano stati invitati a rispondere in maniera sincera in base alle proprie conoscenze pregresse; alla classe di controllo, poi, è stata presentata a lezione la formula per calcolare le diagonali di un poligono a partire dal numero dei lati, a differenza della classe sperimentale; infine, la classe sperimentale ha svolto

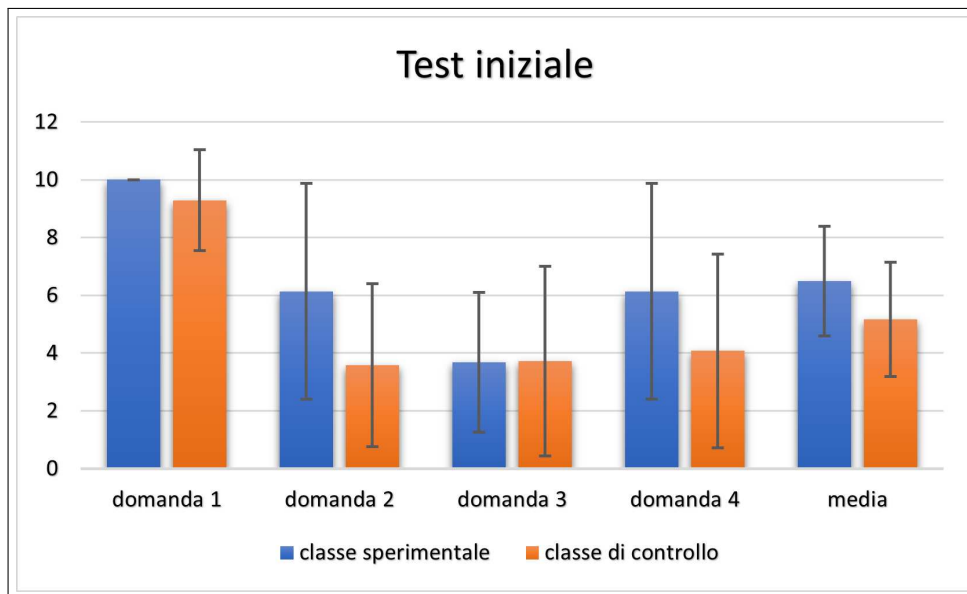


Grafico 7.2: I risultati della verifica iniziale delle conoscenze pregresse (scheda 5.1) delle due classi. Nel grafico sono riportate le medie dei risultati delle singole domande e del risultato complessivo della verifica; le barre di errore rappresentano la deviazione standard.

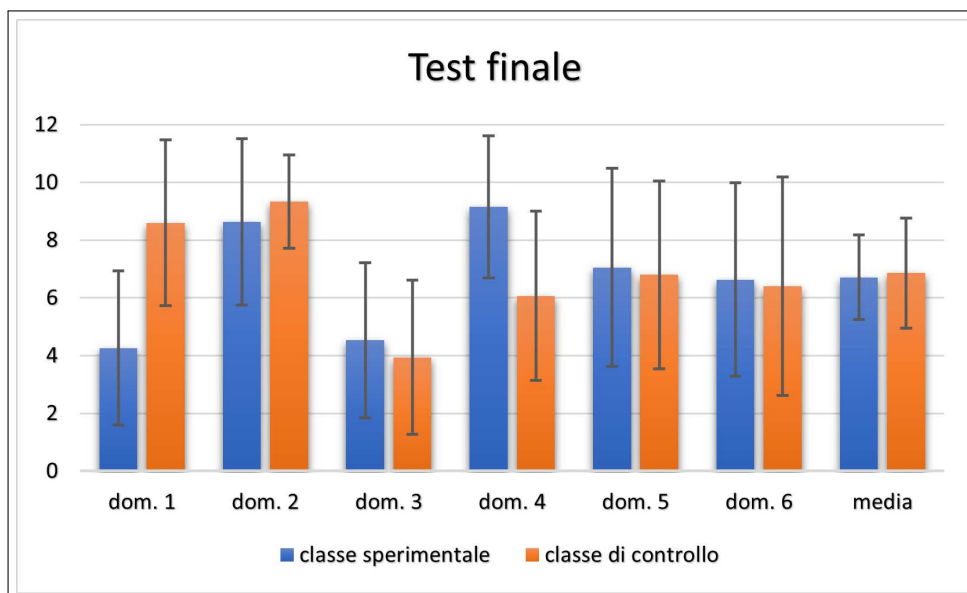


Grafico 7.3: I risultati della verifica finale (scheda 5.9) delle due classi. Nel grafico sono riportate le medie dei risultati delle singole domande e del risultato complessivo della verifica; le barre di errore rappresentano la deviazione standard.

un percorso della durata complessiva di 7 ore, contro le 13 ore della classe di controllo.

Alla luce di queste diversità, interpretiamo brevemente i risultati ottenuti. Nel test iniziale, la classe sperimentale ha ottenuto risultati leggermente superiori alla classe di controllo, possibilmente in virtù dell'aver svolto il test a casa e non in aula; la differenza tra i risultati, però, non si è rivelata statisticamente significativa¹, fatta eccezione per la seconda domanda ($p = 0,0396$). In generale, dunque, possiamo affermare che i livelli iniziali delle due classi fossero essenzialmente equivalenti.

Per quanto riguarda i test finali, anche qui gli andamenti delle due classi si sono dimostrati molto simili. Le uniche domande che hanno presentato una differenza statisticamente rilevante² sono la prima ($p = 0,0001$) e la quarta ($p = 0,0028$). In particolare, nella prima domanda la classe di controllo ha ottenuto risultati notevolmente migliori, dovuti anche al fatto che la classe aveva visto a lezione la formula per calcolare le diagonali di un poligono, e, quindi, questo problema si è rivelato per i suoi studenti un semplice esercizio; nella quarta domanda, invece, impossibile da risolvere utilizzando le tradizionali formule dei raggruppamenti, si è riscontrata una migliore prestazione da parte della classe sperimentale. È notevole, ad ogni modo, come la classe sperimentale abbia raggiunto approssimativamente lo stesso livello della classe di controllo avendo svolto circa metà del tempo di lezione rispetto a quest'ultima.

Considerate le limitazioni della presente sperimentazione, perciò, sarebbe interessante replicare l'esperienza apportandovi alcune migliorie. In primo luogo, la sequenza didattica potrebbe essere proposta ad un numero più elevato di classi, prevedendo anche diverse classi di controllo per poter sviluppare un confronto più accurato. In secondo luogo, si potrebbe dedicare un tempo maggiore agli incontri, compatibilmente con la disponibilità dei docenti delle classi, in modo da proporre un maggior numero di problemi diversificati su cui gli studenti possano fare pratica ed esercitare il proprio ragionamento combinatorio; si potrebbero elaborare ulteriori problemi aperti, che stimolino la creatività risolutiva negli alunni senza prevedere un'unica risoluzione corretta, e quesiti sempre più legati alla realtà quotidiana. Potrebbe essere proficuo anche approfondire non soltanto attività di problem solving ma anche di problem posing, per stimolare ulteriormente le capacità di ragionamento matematico. Infine, poiché le misure di sicurezza per contenere la pandemia da Covid-19, in atto nel periodo in cui si è svolta questa esperienza didattica, hanno purtroppo limitato le possibilità di contatto e scambio, si potrebbero prevedere momenti di confronto e interazione

¹Ovvero, i *p-values* ricavati confrontando i risultati ottenuti dalle due classi tramite *t-test* o *ANOVA* sono superiori a 0,05. Per l'elenco completo dei *p-values* relativi al test iniziale, si veda la tabella B.5 dell'appendice B.

²Per l'elenco completo dei *p-values* relativi al test finale, si veda la tabella B.6 dell'appendice B.

tra i diversi gruppi, con l'obiettivo di ottenere una conoscenza ancor più costruita attivamente dagli alunni stessi, e di favorire l'argomentazione e la comunicazione matematica, nonché un'attitudine maggiormente propositiva e partecipativa da parte degli studenti.

Appendice A

Allegati

FATTORIALE

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ si scrive come $5!$ («cinque fattoriale»)

In generale, definiamo il fattoriale di $n \in \mathbb{N}$ come

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Oppure usiamo la definizione ricorsiva

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)! \quad \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(a)

IL PRINCIPIO FONDAMENTALE DEL CALCOLO COMBINATORIO

Supponiamo che una procedura possa essere spezzata in m passaggi consecutivi (ordinati), con r_1 esiti possibili nel primo passaggio, r_2 esiti possibili nel secondo, ... e r_m esiti possibili nell' m -esimo passaggio.

Se il numero di esiti ad ogni passaggio non dipende dalle scelte effettuate nei passaggi precedenti e se gli esiti composti sono tutti distinti, allora la procedura complessiva ha $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_m$ differenti esiti.

(b)

Presentazione A.1

COEFFICIENTE BINOMIALE

Tra n elementi ne voglio scegliere k senza che importi l'ordine.
In quanti modi posso sceglierli?

$$\begin{aligned} & \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \end{aligned}$$

(a)

COEFFICIENTE BINOMIALE

Questa formula si indica più brevemente così

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$(n \geq k \geq 0)$$

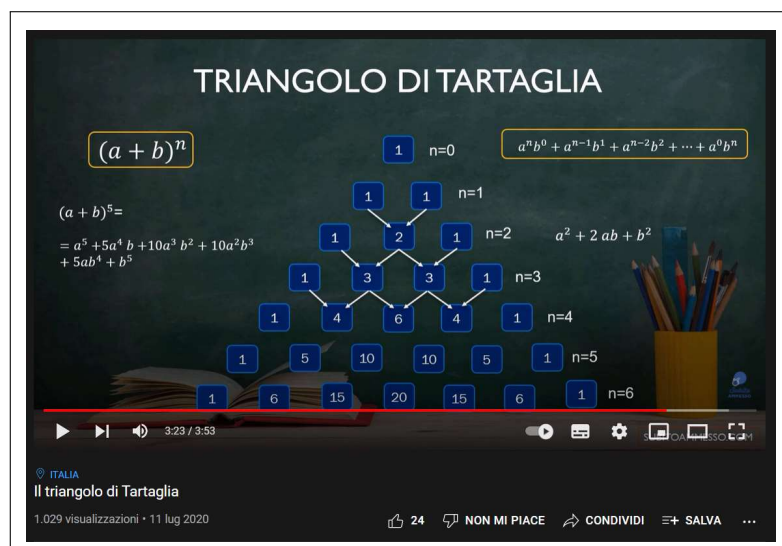
e prende il nome di «coefficiente binomiale» di n su k .

(b)

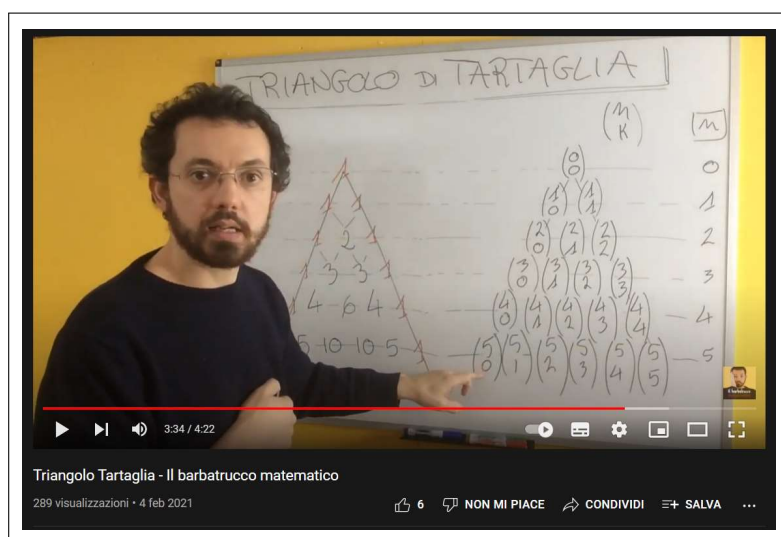
Presentazione A.2



Video A.3: I segreti matematici del Triangolo di Pascal - Wajdi Mohamed Ratemi per TED-Ed: https://www.ted.com/talks/wajdi_mohamed_ratemi_the_mathematical_secrets_of_pascal_s_triangle/transcript?language=it



Video A.4: Il triangolo di Tartaglia - Subito Ammesso: <https://youtu.be/ZnDLfUpDB00>



Video A.5: Triangolo Tartaglia - Il barbatrucco matematico: <https://youtu.be/qQpgP8AKxGM>

187 ••	Tutte le persone che partecipano a una riunione si stringono la mano reciprocamente. Se le strette di mano che le persone si scambiano sono in tutto 15, quanti sono i partecipanti alla riunione? [6]
238 ••	Per formare le targhe automobilistiche si utilizzano ventidue lettere (quelle dell'alfabeto inglese, escluse I, O, Q e U) e le dieci cifre decimali; le targhe sono formate da due lettere seguite da tre cifre e di nuovo da due lettere. Calcola quante sono le targhe che: a. si possono formare; b. hanno uguali le prime due lettere e uguali le ultime due; c. hanno le tre cifre tutte pari. [a) 234 256 000; b) 484 000; c) 29 282 000]
240 ••	Si vuole creare un gruppo di 3 statistici e 2 informatici scegliendoli tra 5 statistici e 6 informatici. Quanti gruppi diversi possiamo creare se: a. non imponiamo alcuna condizione aggiuntiva; b. due particolari statistici devono appartenere al gruppo; c. un certo informatico non può essere incluso nel gruppo. (Università di Torino, Corso di laurea in Informatica) [a) 150; b) 45; c) 100]
241 ••	Una squadra di calcio schiera 1 portiere, 5 difensori e 5 attaccanti, da scegliere tra 2 portieri, 8 difensori e 12 attaccanti. a. Quante sono le squadre possibili? b. Se Luca e Alex sono due attaccanti, quante sono le formazioni che contengono entrambi? (Università di Torino, Corso di laurea in Informatica) [a) 88 704; b) 13 440]
243 ••	PIN Devi costruire il codice PIN del tuo cellulare nuovo; vuoi scegliere quattro delle dieci cifre, senza ripetere nessuna. Quanti possibili codici puoi inventare? [5040]
244 ••	In partenza per le vacanze, devi inserire la combinazione per chiudere e aprire la tua valigia. Il numero deve contenere sei cifre, anche ripetute. Quante sono le possibili combinazioni? Se le cifre non possono essere ripetute, le combinazioni aumentano o diminuiscono? [1 000 000]
246 ••	Tre amici si recano in un negozio per acquistare una T-shirt ciascuno. Sono disponibili 25 magliette diverse. Quante sono le possibili terne di T-shirt acquistabili dai tre ragazzi? [15 625]
247 ••	A una festa cui partecipano quindici ragazzi si fa un brindisi. Se ciascuna persona fa incontrare il suo bicchiere con quello di tutte le altre, quanti «cin-cin» si fanno? [105]
249 ••	Quanti numeri diversi si possono scrivere mescolando le cinque cifre dispari? Quanti terminano con 1? [120; 24]
252 ••	In un piano sono dati nove punti a tre a tre non allineati. Quanti triangoli si possono disegnare con i vertici in quei punti? [84]
42 ••	Trova in quanti modi si possono riporre quattro oggetti distinti in sei scatole diverse sapendo che è possibile riporre in una scatola più oggetti. [1296]
43 ••	Determina il numero degli anagrammi delle parole ANTENNA e RADIO . [420; 120]
47 ••	Quanti numeri di quattro cifre distinte, scelte fra 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, si possono formare? Quanti di questi sono pari? Quanti dispari? Quanti terminano con 2? Quanti sono maggiori di 6000? [840; 360; 480; 120; 240]
56 ••	Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola CALCOLATRICE ? Quanti cominciano per C ? Quanti finiscono per TRICE ? [19 958 400; 4 989 600; 630]
91 ••	Il computer sceglie a caso tra le due cifre 0 e 1 per quattro volte. Calcola quante sono le possibili successioni: a. di 0 e 1; b. di 0 e 1 che iniziano con 0; c. nelle quali la cifra 0 compare una volta; d. nelle quali compare sempre la stessa cifra. [a) 16; b) 8; c) 4; d) 2]
94 ••	Angela, Beatrice, Carlo, Diego, Elena e Fabrizio siedono a un tavolo circolare di un ristorante per la cena. Calcola il numero dei modi distinti in cui i sei amici possono sedersi al tavolo: a. se si siedono casualmente; b. se Beatrice e Diego vogliono stare vicini; c. se non solo Beatrice e Diego, ma anche Angela e Carlo vogliono stare vicini; d. se Carlo ed Elena non vogliono stare vicini. [a) 120; b) 48; c) 24; d) 72]
97 ••	Un'urna contiene 5 palline rosse e 85 nere. Calcola quanti sono i gruppi di 5 palline che contengono: a. una rossa e quattro nere; b. due rosse e tre nere; c. tre rosse e due nere; d. quattro rosse e una nera; e. tutte rosse. [a) 10 123 925; b) 987 700; c) 35 700; d) 425; e) 1]
98 ••	Dato l'insieme $A = \{a, e, l, o, m, r, t\}$, calcola quante parole, anche prive di significato, si possono scrivere: a. con quattro lettere diverse; b. con quattro lettere diverse nelle quali la prima sia r e l'ultima a ; c. con sette lettere diverse; d. con otto lettere supponendo che la lettera m si possa ripetere due volte. [a) 840; b) 20; c) 5 040; d) 20 160]

Esercizi A.6: Esercizi tratti dal libro "Manuale blu 2.0 di matematica" [5]

Appendice B

Risultati dei test

	Domanda 1	Domanda 2	Domanda 3	Domanda 4	Media
	10	10	2	10	8,00
	10	10	2	2	6,00
	10	10	5	5	7,50
	10	2	2	2	4,00
	10	10	2	10	8,00
	10	10	10	10	10,00
	10	2	2	2	4,00
	10	2	5	2	4,75
	10	10	2	2	6,00
	10	7	5	2	6,00
	10	2	2	2	4,00
	10	10	5	7	8,00
	10	10	5	10	8,75
	10	10	10	10	10,00
	10	2	2	2	4,00
	10	2	2	10	6,00
	10	5	5	10	7,50
	10	2	2	5	4,75
	10	2	5	10	6,75
	10	2	2	2	4,00
	10	5	2	10	6,75
	10	10	2	10	8,00
μ	10,00	6,14	3,68	6,14	6,49
σ	0,00	3,73	2,42	3,73	1,90

Tabella B.1: Risultati della scheda 5.1 di valutazione delle conoscenze pregresse nella classe sperimentale.

	Domanda 1	Domanda 2	Domanda 3	Domanda 4	Media
	5	10	2	2	4,75
	10	2	10	2	6,00
	10	2	2	2	4,00
	10	2	2	2	4,00
	10	2	2	2	4,00
	10	10	10	10	10,00
	10	2	2	2	4,00
	10	5	2	10	6,75
	10	2	2	7	5,25
	10	2	2	2	4,00
	10	5	10	10	8,75
	10	2	2	2	4,00
	10	2	2	2	4,00
	5	2	2	2	2,75
μ	9,29	3,57	3,71	4,07	5,16
σ	1,75	2,82	3,28	3,35	1,98

Tabella B.2: Risultati della scheda 5.1 di valutazione delle conoscenze pregresse nella classe di controllo.

	Dom. 1	Dom. 2	Dom. 3	Dom. 4	Dom. 5	Dom. 6	Media
	3	9	4	10	2	10	6,33
	2	2	2	10	10	2	4,67
	5	10	5	10	7	7	7,33
	4	10	10	10	2	7	7,17
	2	9	2	10	2	10	5,83
	2	10	5	10	2	9	6,33
	10	10	10	10	10	7	9,50
	3	10	2	10	5	10	6,67
	4	10	2	10	10	10	7,67
	2	2	2	2	5	10	3,83
	4	10	5	10	10	10	8,17
	3	10	2	10	7	2	5,67
	4	10	5	10	10	2	6,83
	5	10	4	10	10	2	6,83
	10	10	5	2	10	7	7,33
	2	2	4	10	10	2	5,00
	2	10	5	10	10	2	6,50
	4	10	2	10	2	7	5,83
	10	10	10	10	10	10	10,00
μ	4,26	8,63	4,53	9,16	7,05	6,63	6,71
σ	2,67	2,89	2,68	2,46	3,43	3,36	1,47

Tabella B.3: Risultati della scheda 5.9 di verifica nella classe sperimentale.

	Dom. 1	Dom. 2	Dom. 3	Dom. 4	Dom. 5	Dom. 6	Media
	10	10	2	2	5	2	5,17
	10	10	5	10	10	5	8,33
	10	10	2	4	2	2	5,00
	10	10	2	4	5	2	5,50
	10	10	4	4	5	9	7,00
	2	10	5	4	7	2	5,00
	10	7	2	10	4	10	7,17
	10	4	2	4	2	10	5,33
	10	10	4	10	10	10	9,00
	10	10	10	10	10	10	10,00
	10	10	2	4	10	10	7,67
	10	10	10	10	10	10	10,00
	2	10	2	4	2	2	3,67
	10	10	5	4	10	10	8,17
	5	9	2	7	10	2	5,83
μ	8,60	9,33	3,93	6,07	6,80	6,40	6,86
σ	2,87	1,62	2,67	2,93	3,25	3,79	1,90

Tabella B.4: Risultati della scheda 5.9 di verifica nella classe di controllo.

Domanda 1	Domanda 2	Domanda 3	Domanda 4	Media
0,0714	0,0396	0,9738	0,1111	0,0587

Tabella B.5: I *p-values* relativi ai risultati della scheda 5.1 di valutazione delle conoscenze pregresse.

Dom. 1	Dom. 2	Dom. 3	Dom. 4	Dom. 5	Dom. 6	Media
0,0001	0,4198	0,5382	0,0028	0,8335	0,8560	0,8092

Tabella B.6: I *p-values* relativi ai risultati della scheda 5.9 di verifica.

Bibliografia

- [1] Scott **Annin** e Kevin **Lai** (2010), "Common Errors in Counting Problems", in *Mathematics Teacher*, 103(6), 402-409.
- [2] Anna **Baccaglini Frank**, Pietro **Di Martino**, Roberto **Natalini** e Giuseppe **Rosolini** (2018), "Didattica della matematica", Mondadori.
- [3] Carmen **Batanero**, Juan D. **Godino** e Virginia **Navarro-Pelayo** (1997), "Combinatorial Reasoning and its Assessment", in *The Assessment Challenge in Statistics Education*, 239-252, a cura di Iddo **Gal** e Joan B. **Garfield**, IOS Press.
- [4] Carmen **Batanero**, Virginia **Navarro-Pelayo** e Juan D. **Godino** (1997), "Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils", in *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.
- [5] Massimo **Bergamini**, Graziella **Barozzi** e Anna **Trifone** (2016), "Manuale blu 2.0 di matematica", vol. 4A, Zanichelli.
- [6] Cinzia **Bonotto** (2007), "Quotidianizzare la Matematica", Pensa Multimedia.
- [7] David W. **Braithwaite** e Robert L. **Goldstone** (2013), "Integrating Formal and Grounded Representations in Combinatorics Learning", in *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 666-682.
- [8] Guy **Brousseau** (1980), "L'échec et le contrat", in *Recherches*, 41, 177-182.
- [9] Alison **Burke** (2011), "Group Work: How to Use Groups Effectively", in *The Journal of Effective Teaching*, 11(2), 87-95.
- [10] Arthur W. **Chickering** e Zelda F. **Gamson** (1987), "Seven Principles for Good Practice in Undergraduate Education", in *American Association for Higher Education Bulletin*, 39(7), 3-7.
- [11] Bruno **D'Amore** (2001), "Didattica della matematica", Pitagora.

BIBLIOGRAFIA

- [12] Diogo P. **Da Silva** (2017), "A Aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio", Tesi di specializzazione, Universidade Federal de Alagoas.
- [13] Barbara G. **Davis** (1993), "Collaborative Learning: Group Work and Study Teams", in Barbara G. **Davis**, *Tools for Teaching*, Jossey-Bass.
- [14] Valerie A. **DeBellis** e Joseph G. **Rosenstein** (2008), "Discrete Mathematics in the Schools: Experiences from the USA", in *Mathematics in School*, 37(2), 2-4.
- [15] Michal M. **Eizenberg** e Orit **Zaslavsky** (2004), "Students' Verification Strategies for Combinatorial Problems", in *Mathematical Thinking and Learning*, 6(1), 15-36.
- [16] Lyn D. **English** (1991), "Young Children's Combinatoric Strategies", in *Educational Studies in Mathematics*, 22, 451-474.
- [17] Lyn D. **English** (2005), "Combinatorics And The Development Of Children's Combinatorial Reasoning", in *Exploring Probability in School. Mathematics Education Library*, 40, a cura di Graham A. **Jones**, Springer.
- [18] Pier Luigi **Ferrari** (2021), "Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe", UTET Università.
- [19] Juan D. **Godino** e Carmen **Batanero** (2016), "Implicazioni delle Relazioni fra Epistemologia e Insegnamento della Matematica per lo Sviluppo Curricolare: il Caso della Combinatoria", in *La Matematica e la sua Didattica*, 24(1-2), 17-39.
- [20] Anne S. **Goodsell**, Michelle R. **Maher**, Vincent **Tinto** et al. (1992), "Collaborative Learning: A Sourcebook for Higher Education", National Center on Postsecondary Teaching, Learning, and Assessment.
- [21] Nitsa Movshovitz-**Hadar** e Rina **Hadass** (1981), "The Road to Solving a Combinatorial Problem is Strewn with Pitfalls", in *Educational Studies in Mathematics*, 12, 435-443.
- [22] Zach **Hurdle** (2016), "The Place and Purpose of Combinatorics", in *Mathematics Teacher*, 110(3), 216-221.
- [23] Bärbel **Inhelder** e Jean **Piaget** (1958), "The Growth of Logical Thinking: From Childhood to Adolescence", Routledge and Kegan Paul.

-
- [24] David W. **Johnson** e Roger T. **Johnson** (2018), "Cooperative Learning: The Foundation for Active Learning", in *Active Learning - Beyond the Future*, a cura di Sílvia M. **Brito**, IntechOpen.
- [25] Jagat N. **Kapur** (1970), "Combinatorial Analysis and School Mathematics", in *Educational Studies in Mathematics*, 3(1), 111-127.
- [26] Shabnam **Kavousian** (2008), "Enquiries into Undergraduate Students' Understanding of Combinatorial Structures", Tesi di dottorato, Simon Fraser University.
- [27] Maureen J. **Lage**, Glenn J. **Platt** and Michael **Treglia** (2000), "Inverting the Classroom: A Gateway to Creating an Inclusive Learning Environment", in *The Journal of Economic Education*, 31(1), 30-43.
- [28] Judith J. **Lambiotte**, Donald F. **Dansereau**, Thomas R. **Rocklin** et al. (1987), "Cooperative learning and test taking: transfer of skills", in *Contemporary Educational Psychology*, 12(1), 52-61.
- [29] Frank K. **Lester** (1983), "Trends and issues in mathematical problem-solving research", in *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 229-261, a cura di Richard **Lesh** e Marsha **Landau**, Academic Press.
- [30] Elise **Lockwood** (2011), "Student Connections among Counting Problems: an Exploration Using Actor-Oriented Transfer", in *Educational Studies in Mathematics*, 78(3), 307-322.
- [31] Elise **Lockwood** (2012), "Counting Using Sets of Outcomes", in *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18(3), 132-135.
- [32] Elise **Lockwood** (2013), "A Model of Students' Combinatorial Thinking", in *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 251-265.
- [33] Elise **Lockwood** (2014), "Both Answers Make Sense!", in *Journal of Mathematics Teacher Education*, 108(4), 296-301.
- [34] Elise **Lockwood** e Bryan R. **Gibson** (2016), "Combinatorial Tasks and Outcome Listing: Examining Productive Listing among Undergraduate Students", in *Educational Studies in Mathematics*, 91, 247-270.
- [35] Elise **Lockwood**, Craig A. **Swinyard** e John S. **Caughman** (2015), "Patterns, Sets of Outcomes, and Combinatorial Justification: Two Students' Reinvention of Counting Formulas", in *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1, 27-62.
- [36] Elise **Lockwood**, Nicholas H. **Wasserman** e William **McGuffey** (2018), "Classifying Combinations: Investigating Undergraduate Students' Responses to Different Categories of Combination Problems",

BIBLIOGRAFIA

- in *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(2), 305-322.
- [37] Elise **Lockwood**, Nicholas H. **Wasserman** e Erik S. **Tillema** (2020), "A Case for Combinatorics: A Research Commentary", in *The Journal of Mathematical Behavior*, 59, 100783.
- [38] Yiping **Lou**, Philip C. **Abrami**, John C. **Spence** et al. (1996), "Within-Class Grouping: A Meta-Analysis", in *Review of Educational Research*, 66(4), 423-458.
- [39] Olga S. **Medvedeva** (2002), "An Application of Davydov's Methodology to a Combinatorial Problem", poster presentato all'incontro dell'American Educational Research Association del 2002.
- [40] Mitchell J. **Nathan** (2012), "Rethinking Formalisms in Formal Education", in *Educational Psychologist*, 47(2), 125-148.
- [41] George **Polya** (1945), "How to solve it", Princeton University Press.
- [42] Kurt **Reusser** e Rita **Stebler** (1997), "Every Word Problem Has a Solution. The Social Rationality of Mathematical Modeling in Schools", in *Learning and Instruction*, 7(4), 309-327.
- [43] Thiago M. **Roda** (2018), "Análise Combinatória: Uma Abordagem Diferenciada sem a Utilização de Fórmulas", Tesi di Laurea Magistrale Professionalizzante, Universidade Federal de São Carlos.
- [44] Silvia **Sbaragli**, Elena **Franchini** e Silvia **Demartini** (2021), "Le difficoltà di comprensione e di gestione dei termini specialistici della geometria all'ingresso della scuola secondaria di primo grado", in *La matematica e la sua didattica*, 29(1), 7-37.
- [45] Bharath **Sriraman** e Lyn D. **English** (2004), "Combinatorial Mathematics: Research into Practice", in *The Mathematics Teacher*, 98(3), 182-191.
- [46] Alan **Tucker** (2007), "Applied combinatorics" (5^a ed.), Wiley.
- [47] Lieven **Verschaffel**, Brian **Greer** e Erik **De Corte** (2000), "Making Sense of Word Problems", Swets & Zeitlinger Publishers.
- [48] John **Watson** (1913), "Psychology as the Behaviorist Views It", in *Psychological Review*, 20(2), 158-177.
- [49] Rosetta **Zan** (1991-1992), "I modelli concettuali di 'problema' nei bambini della scuola elementare", in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, in 3 parti: I: 1991, 14(7), 659-677; II: 1991, 14(9), 807-840; III: 1992, 15(1), 39-53.

- [50] Rosetta **Zan** (2016), "I problemi di matematica: difficoltà di comprensione e formulazione del testo", Carocci.
- [51] Rosetta **Zan** e Pietro **Di Martino** (2017), "Insegnare e Apprendere Matematica con le Indicazioni Nazionali", Giunti Scuola.

Sitografia

- [52] Autori di Wikipedia, "Coefficiente binomiale", *Wikipedia, L'enciclopedia libera*, https://it.wikipedia.org/wiki/Coefficiente_binomiale (consultato il 5 marzo 2022, 17:00)
- [53] Autori di Wikipedia, "Comportamentismo", *Wikipedia, L'enciclopedia libera*, <https://it.wikipedia.org/wiki/Comportamentismo> (consultato il 10 marzo 2022, 13:00)
- [54] Autori di Wikipedia, "Constructivism (philosophy of education)", *Wikipedia, L'enciclopedia libera*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Constructivism_\(philosophy_of_education\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Constructivism_(philosophy_of_education)) (consultato il 10 marzo 2022, 15:00)
- [55] Autori di Wikipedia, "Flipped classroom", *Wikipedia, L'enciclopedia libera*, https://en.wikipedia.org/wiki/Flipped_classroom (consultato il 17 marzo 2022, 17:40)
- [56] Autori di Wikipedia, "Pascal's triangle", *Wikipedia, L'enciclopedia libera*, https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle (consultato il 5 marzo 2022, 17:00)