UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Relazione per la prova finale

Costruzione con riga e compasso e polinomi ciclotomici

Relatore: Riccardo Colpi

Serafin Pietro
Matricola: 1201495

Anno accademico 2021/2022

Indice

1. Introduzione e cenni storici 4

2. Costruibilità in $\mathbb{C}$: 5

3. Teoremi che semplificano la costruzione con riga e compasso 15

3.1 Teorema di Mohr-Mascheroni 15

3.2 Teorema di Steiner … 18

4. Problemi non risolvibili, nuovi strumenti ed estensioni di L 22

4.1 Trisezione dell'angolo 22

4.2 Radice cubica 24

4.3 Eptagono ed ennagono 26

5.Osservazioni finali 28

5.1 Relazioni tra radici di $\phi_n(x)$ dove n sia non primo 28

5.2 Gruppi di Galois di un n-gono dove n sia non primo 30

5.3 Grado di una estensione di α su $\mathbb{Q}$ a partire dalla costruzione di α 32

Riferimenti bibliografici e sitografia 35

1. Introduzione e cenni storici

Siano assegnati nel piano due punti, detti 0 l'origine e 1 l'identità. È detto insieme dei punti "costruibili con riga e compasso" l'insieme che contiene i punti 0, 1 e tutti i punti che posso ottenere intersecando tra loro rette passanti per due punti costruibili, dette "rette costruibili", e circonferenze centrate in un punto costruibile e passanti per un altro punto tale, dette "circonferenze costruibili". Di seguito chiamerò L l'insieme degli elementi costruibili.

La riga e il compasso costituiscono i mezzi più facili con cui tracciare curve su un piano, e per questo motivo alcuni tra i primi risultati matematici furono dimostrati grazie ad essi. Questi strumenti infatti furono utilizzati già dalla civiltà egizia e babilonese, per poter costruire oggetti utili principalmente ai fini dell'agricoltura e dell'architettura.

Ma per comprendere l'importanza dello studio di queste costruzioni dobbiamo passare alla matematica nel mondo greco, con il lavoro del matematico Euclide (IV-III secolo a.C), e più precisamente alla sua opera "Elementi", contenente quelli che erano all'epoca i fondamenti della matematica, presentati in struttura assiomatica. Fino al XVII secolo l'opera costituì la base del pensiero matematico e l'essenza stessa della matematica, e non ebbe rivali fino alla fine del XIX secolo; dal Medioevo fin quasi al XIX secolo, fu ritenuta un modello di ragionamento e, in una certa misura, del metodo stesso con cui veniva insegnata. Albert Einstein in "Come io vedo il mondo"(1954) descrive così tale lavoro: "Quest'opera ammirevole della ragione ha dato al cervello umano la più grande fiducia nei suoi sforzi ulteriori. Colui che nella sua prima giovinezza non ha provato entusiasmo davanti a quest'opera non è nato per fare lo scienziato teorico". Una volta compresa l'importanza di tale opera, si noti che i primi tre dei cinque postulati su cui Euclide basa le costruzioni e le dimostrazioni per le proposizioni esposte negli "Elementi" sono:

1) Per due punti distinti del piano passa una e una sola retta;
2) Una retta può essere prolungata indefinitamente;
3) Dato un punto e una lunghezza si può descrivere una circonferenza.

Notiamo dunque come tre dei cinque postulati su cui si basa uno dei libri più importanti della storia della matematica descrivano i mezzi che ci apprestiamo ad analizzare per lo studio dei punti costruibili.

Euclide utilizza le costruzioni per dimostrare sia le proposizioni, mediante la costruzione dell'oggetto geometrico con determinate proprietà (οπερ ἔδει ποιῆσαι= "come dovevasi fare"), sia per i teoremi, dimostrando una certa proprietà di un oggetto (οπερ ἔδει δεῖξαι = "come dovevasi dimostrare"). La geometria dei costruibili era dunque il metodo con cui furono risolti fondamentali problemi algebrici (quali il Teorema di Pitagora) e lo studio delle costruzioni in questione può essere utile per vedere il problema sotto un punto di vista nuovo, riuscendo ad ampliarne la visione e comprenderlo in modo più completo.

Un altro fattore che innalzò l'importanza di tali costruzioni fu l'affermarsi, intorno al 350 a.C., dell'idealismo di Platone, che sviluppò una gerarchia di tre classi di costruzioni geometriche, scendendo dall' "astratto e nobile" al "meccanico e concreto". In questa visione le costruzioni con riga e compasso occupano il grado più elevato, adattandosi al concetto platonico di idealizzazione e perfezione geometrica, seguite dalle costruzioni che utilizzano le coniche per poi arrivare a tutti gli altri tipi di costruzione.

Il procedimento della dimostrazione tramite la costruzione però, pur essendo utile ed immediato, risulta condizionato e determinato dal fatto che si riesca a trovare la figura che provi o neghi una data proposizione.

Come infatti vedremo qui di seguito, diverse domande hanno atteso molto tempo un esito circa la costruibilità o meno di certi elementi. Si dovrà aspettare la nascita e lo sviluppo della teoria dei gruppi nel XIX secolo, da parte di Galois, Gauss, Abel e altri matematici, per poter esaminare i problemi da un altro punto di vista, non più geometrico ma algebrico, e ottenere una risposta definitiva.

2. Costruibilità in $\mathbb{C}$

Fin dagli albori della matematica, dunque, le proprietà delle costruzioni tramite riga e compasso hanno fornito un valido strumento per dimostrazioni in ambito sia algebrico che geometrico.

Diversi quesiti, però, non hanno trovato risposta per molti secoli dopo Euclide. Le tre grandi domande a cui si cercava di dar risposta erano la possibilità di:

1. Quadrare un cerchio, ovvero trovare il lato di un quadrato avente area pari a un cerchio dato;
2. Trisecare un angolo;
3. Trovare la radice cubica di una lunghezza.

Furono trovati metodi diversi dall'uso canonico di riga e compasso per tali costruzioni, ma per molto tempo non si fu in grado di affermare che un elemento non fosse costruibile.

Si dovette aspettare la fine del XVIII secolo per ottenere dei criteri per affermare la non costruibilità di una figura, grazie ai lavori da parte di Galois (1811-1833), Gauss (1777-1855) e molti altri matematici.

Definisco il punto dato 0 come l'origine del piano di Gauss, la retta passante per 0, 1 l'asse reale e la perpendicolare a quest'ultimo passante per l'origine l'asse immaginario. La lunghezza del segmento di estremi 0, 1 mi dà l'unità. Sfruttando l'introduzione di questo piano, lo stesso Gauss poté trasformare i problemi originari, puramente geometrici, in problemi risolvibili algebricamente, riuscendo a sfruttare tutti i risultati che erano stati ottenuti in questo ambito.

Dato un elemento del piano, di cui siano dati i punti 0 e 1, per vedere se sia costruibile vado ad analizzare il complesso corrispondente ad α nel piano di Gauss avente come origine 0 e unità reale 1. Dato il polinomio minimo di α, $f_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[x]$, vado a studiare il campo di spezzamento E di f_α su $\mathbb{Q}$ (che so essere costruibile) e il gruppo di Galois G = Gal(E/$\mathbb{Q}$).

Il teorema principale nell'ambito della costruibilità segue dalla Teoria di Galois e afferma che:

Teorema (1): Sia $\alpha \in \mathbb{C}$. Allora sono equivalenti:

1. α è costruibile con riga e compasso;
2. $\mathbb{Q}(\alpha)$ è sottocampo di $\mathbb{C}$ normale e di grado 2^m su $\mathbb{Q}$, con m $\in \mathbb{N}$;
3. $\exists\, E_i \subset \mathbb{C}$, E_i campo, $\mathbb{Q} = \mathrm{E}_0 \subset \ldots \subset \mathrm{E}_\mathrm{r} = \mathbb{Q}(\alpha)$ $\forall\, i = 1, \ldots, r$ tali che:

$$| E_i : E_{i-1} | = 2 \qquad \forall\, i = 1, \ldots, r$$

In conclusione, un elemento $\alpha \in \mathbb{C}$ se non è algebrico o non ha campo di spezzamento di grado una potenza di 2 su $\mathbb{Q}$, allora non è costruibile.

Per la dimostrazione chiamo L il gruppo degli elementi costruibili.

Ricordo in primo luogo che, dati segmenti di lunghezza 1, a, b , è possibile costruire i segmenti di lunghezza:

- a + b, a – b;
- a · b, $\frac{a}{b}$;
- $\sqrt{a}$

Posso quindi affermare che:

Teorema (2): Detto L ∈ ℂ il sottoguppo degli elementi costruibili, L è un sottocampo di ℂ.

Dimostrazione: per dimostrare che L sia un campo basta mostrare che, dati $\alpha,\ \beta \in L$, con $\beta \neq 0$, anche $\alpha - \beta,\ \frac{\alpha}{\beta} \in L$.

Dal momento che $0 \in L$, trovo $-\beta$ come la simmetrica rispetto all'origine di $\beta \in L$, e L è chiuso per simmetria, dunque $-\beta \in L$. Costruisce poi $\alpha - \beta$ come il quarto vertice del parallelogramma avente come altri tre vertici $0, \alpha, \beta$. Nel caso particolare in cui tali tre punti siano collineari, costruisco il segmento di direzione la retta passante per i tre punti, lunghezza la differenza tra i segmenti di vertici $0, \alpha\ e\ \alpha, -\beta$ e avente come primo vertice α . Il punto $\alpha - \beta$ si troverà nell'altro vertice del segmento.

Chiamo poi $\theta\ e\ \phi$ gli angoli formati dall'asse reale rispettivamente coi segmenti di estremi 0, α e 0, β, e costruisco la retta passante per 0 che crea un angolo di ampiezza $\theta - \phi$ con l'asse reale. Il punto α/β giace su quest'ultima retta a distanza $|\alpha|/|\beta|$ da 0, e sapendo che il rapporto tra distanze è costruibile, ho dimostrato che il punto è costruibile.

Teorema (3): sia $\alpha \in \mathbb{C}$, con $\alpha^2 \in$ L , allora anche $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione: sia θ l'angolo tra il segmento di estremi 0, α^2 e l'asse reale positivo. Traccio la retta passante per 0 e che biseca l'angolo θ. Il punto α cercato si trova su quest'ultima retta a distanza $\sqrt{|\alpha^2|}$, e dal momento che sia la distanza che l'angolo di inclinazione sono costruibili, α è costruibile.

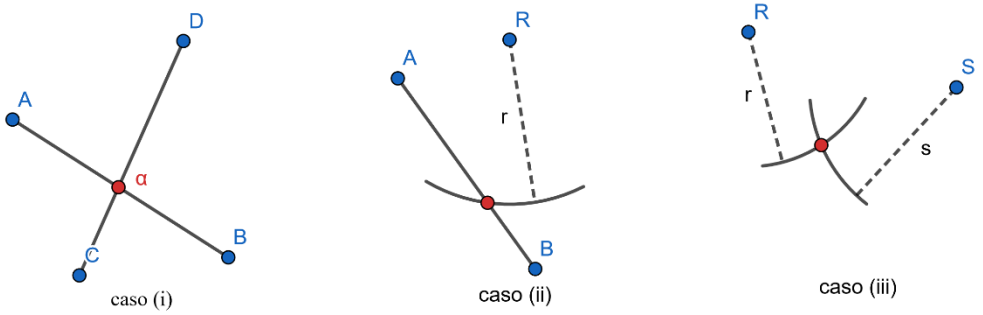
Dunque, L è il minimo e unico sottocampo di ℂ chiuso per estrazione di radici.

Lemma: Sia $E \subseteq \mathbb{C}$, E chiuso per l'azione del coniugio, e sia $\alpha \in \mathbb{C}$ costruibile in un passaggio dai punti di E. Allora:

$|\ E(\alpha) : E\ | \leq 2$

Dimostrazione: le tre possibili costruzioni di α sono tramite (i) intersezione tra due rette, (ii) intersezione tra una retta e una circonferenza, (iii) intersezione tra circonferenze.

Determino la retta dai due punti per cui passa, la circonferenza dal centro e dalla lunghezza del raggio.



fig(2.1)

Siano come in figura A, B, C, D, R, S elementi del campo E, e r, s lunghezze tali che $r^2, s^2 \in E$. Il mio obiettivo è trovare un polinomio di grado ≤ 2 a coefficienti in E, di cui α sia uno zero.

In entrambi i casi, ottengo tale polinomio trovando due espressioni per il complesso coniugato $\bar{\alpha}$, e imponendo l'uguaglianza tra i due.

Nei casi (i) e (ii) assumo che α giaccia nella retta determinata da A e B, e questo implica che $\frac{\alpha - A}{B - A}$ sia reale. Dunque:

$$\bar{\alpha} = \bar{A} + \frac{\alpha - A}{B - A} (\bar{B} - \overline{A})$$

Nel caso (i) ottengo:

$$\bar{\alpha} = \bar{A} + \frac{\alpha - A}{B - A} (\bar{B} - \overline{A}) = \bar{C} + \frac{\alpha - C}{D - C} (\bar{D} - \overline{C})$$

Ho dunque trovato una relazione lineare soddisfatta da α a coefficienti in E. se questa uguaglianza vale per ogni valore di α, risolvo per α e deduco che $\alpha \in$ E .

Se la relazione è una identità, sostituisco A con α e ottengo:

$$\bar{A} = \overline{D} + \frac{A - D}{C - D} (\bar{C} - \bar{D})$$

Questo porta B a giacere sulla retta determinata da C e D, e dunque α = A $\in E$.

Dunque, nel caso (i):

$$| E(\alpha) : E | = 1$$

Nei casi (ii) e (iii), assumere che α dista r da R può essere scritto come $(\alpha - R)(\bar{\alpha} - \bar{R}) = r^2$, ovvero:

$$\bar{\alpha} = \bar{R} + \frac{r^2}{\alpha - R}$$

Nel caso (ii) posso porre l'uguaglianza con la precedente espressione per $\bar{\alpha}$. Moltiplicando per $(\alpha - R)$ ottengo:

$$(\alpha - R) \left[\bar{A} + \frac{\alpha - A}{B - A} (\bar{B} - \bar{A}) \right] = \bar{R} (\alpha - R) + r^2$$

Ed è una relazione quadratica soddisfatta da α a coefficienti in E. Tale relazione non è una identità in quanto, sostituendo R per α ottengo $r^2 = 0$, una contraddizione, e quindi:

$$| E(\alpha) : E | \leq 2$$

In conclusione, nel caso (iii), α dista s da S, e moltiplicando per $(\alpha - R)(\alpha - S)$ ottengo la relazione:

$$\bar{S} (\alpha - R)(\alpha - S) + r^2(\alpha - R) = \bar{R}(\alpha - R)(\alpha - S) + s^2(\alpha - S)$$

Che è una relazione quadratica in α a coefficienti in E. Questa non è una identità, dal momento che sostituendo S con α otterrei R=S, contraddizione ponendo $r^2 \neq 0$. Deduco che nel caso (iii):

$$| E(\alpha): E | \leq 2$$

Posso ora passare alla dimostrazione del Teorema (1).

Dimostrazione (Teorema (1)):

(i) →(ii) sia $\alpha \in L$, allora α è costruibile in un numero m finito di passaggi, a partire dai due punti dati 0, 1 ∈ L. Ora provo per induzione su m che esiste una estensione normale $\mathbb{Q} \subseteq L$ in $\mathbb{C}$ di grado una potenza di 2 su $\mathbb{Q}$, e così α e tutti i punti intermedi usati per la costruzione di α stanno in L.

(ii) →(iii) se m = 0, allora $\alpha \in \mathbb{Q}$, e non c'è nulla da provare. Se m>0, allora l'ipotesi induttiva produce un campo normale di grado una potenza di 2 su $\mathbb{Q}$, e dunque E contiene tutti i punti usati nella costruzione di α. Essendo E normale su $\mathbb{Q}$, è invariante per l'azione del coniugio e il lemma sopra dimostrato. Ne deduco che $| E[\alpha] : E| \leq 2$, e dunque assumo che $| E[\alpha] : E| = 2$ oppure E = L. Sia f = $min_E(\alpha)$, e chiamo g il prodotto delle immagini di f sotto Gal(E/$\mathbb{Q}$). Costruisco L come il campo di campo di spezzamento di g su E in $\mathbb{C}$. In primo luogo, discuto il grado e osservo che, se prendo una radice β di g nel campo di spezzamento L, allora deg($min_E(\beta)$) = 2, e dunque estendendo con β qualunque campo che contenga E, ottengo una estensione di grado 1 o 2 su E. Dal momento che ottengo L a partire da E, estendendo a ogni passaggio una radice β come descritta prima, vedo che | L : E | è una potenza di 2, come richiesto. Dimostro ora che L sia normale su $\mathbb{Q}$, e per farlo osservo in primo luogo che essendo E una estensione di Galois su Q e g è invariante per il gruppo di Galois Gal(E/$\mathbb{Q}$), ho $g \in \mathbb{Q}[x]$. Inoltre, E è campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ per qualche polinomio $h \in \mathbb{Q}[x]$. Segue che L è campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ per il polinomio *gh*, e dunque L è una estensione normale su $\mathbb{Q}$. Assumo ora (ii), così ho $\alpha \in E$ per qualche campo $E \subseteq \mathbb{C}$ con E estensione normale e di grado una potenza di 2 su $\mathbb{Q}$. Essendo E di Galois su $\mathbb{Q}$ e il gruppo di Galois Gal(E/$\mathbb{Q}$) è un 2-gruppo, segue che che esiste una catena di sottogruppi forma la torre dei campi descritta nell'asserzione (iii).

(iii) →(i) viene data la torre di sottocampi E_i e mostro per induzione su i che $E_i \subseteq L$. Dal momento che L è un campo dal Teorema (3), ottengo che $E_0 = \mathbb{Q} \subseteq L$. Basta ora mostrare che se $U \subseteq V \subset \mathbb{C}$ sono sottocampi di $\mathbb{C}$ con $U \subseteq L$ e | V : U | = 2, allora $V \subseteq L$. Ottengo che V = U[γ], dove γ è una radice di un polinomio quadratico a coefficienti in U. Segue che posso anche scrivere V = U[δ] con $\delta^2 \in U \subseteq L$. Dal lemma concludo che $\delta \in L$, e poiché L è un campo, ho $V \subseteq L$, come richiesto.

In conclusione, dati i punti 0 e 1 del piano, per vedere se a punto del piano sia costruibile studio $\alpha \in \mathbb{C}$ elemento complesso corrispondente ad a nel piano di Gauss, come descritto prima. Dato $f_\alpha \in \mathbb{Q}[x]$ polinomio minimo di α ed E campo di spezzamento di f_α su $\mathbb{Q}$, a è costruibile se $\left|Gal\left(E/_{\mathbb{Q}}\right)\right|$ è una potenza di 2.

Per disegnare un poligono regolare di n lati, è sufficiente studiare polinomio $f_n(x) = x^n - 1$, i cui zeri in $\mathbb{C}$ saranno:

$$\zeta_i = \cos\left(\frac{2i\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \qquad \forall i = 1 \dots n$$

Trovati gli n punti $\zeta_i \in \mathbb{C}$, essi forniscono i vertici di un poligono n-regolare inscritto nella circonferenza unitaria. Per vedere se un poligono regolare sia costruibile devo vedere se i punti ζ_i sono costruibili, e quindi analizzo il campo di spezzamento E del polinomio f_n e il relativo gruppo di Galois alla luce dei risultati ottenuti.

Definisco p "primo di Fermat" se è un primo della forma $p = 1 + 2^{2^m}$, m intero ≥ 1. Tengo conto poi del seguente

Teorema (di Gauss-Wantzel): sia n $\geq$ 3. È possibile costruire con riga e compasso un poligono regolare di n lati se e solo se la funzione di Eulero $\phi(n)$ è una potenza di 2.

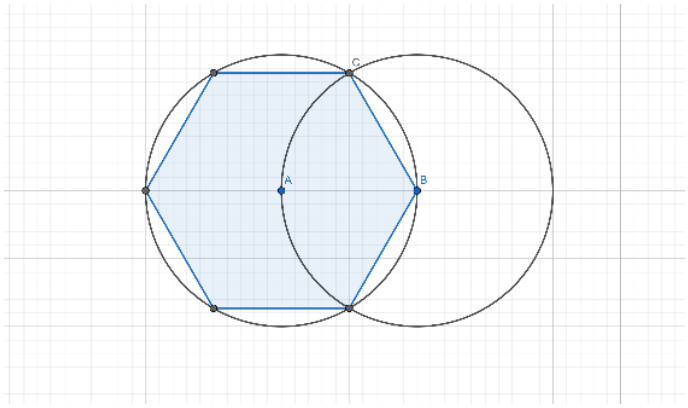
Osservazione: La funzione di Eulero di n è una potenza di 2 se n è della forma n = $2^m p_1 \dots p_r$ con $m \geq 0$ e p_i primi di Fermat distinti tra loro $\forall i = 1 \dots r$.

Osservazione: ci sono solo cinque primi di Fermat conosciuti, ovvero $3=2^{2^0}+$, $5=2^{2^1}+1$, $17=2^{2^2}+1$, $257=2^{2^3}+1$, $65537=2^{2^4}+1$. Nel 1732 infatti Eulero dimostrò che per n=5, $2^{2^5}+1$ è fattorizzabile, e lo sono anche i numeri costruiti in questo modo per n=6…11. Quindi potrei affermare che non ci siano più di 31 interi dispari n≥3 tali che il poligono di n lati sia costruibile.

Posso dunque affermare definitivamente che l'eptagono non è costruibile, mentre un eptadecagono lo è. Infatti, $\phi(7) = 6$, mentre $\phi(17) = 16 = 2^4$.

Analizzo ora le costruzioni di alcuni poligoni n-regolari costruibili. Definisco inizialmente 0=A e 1=B

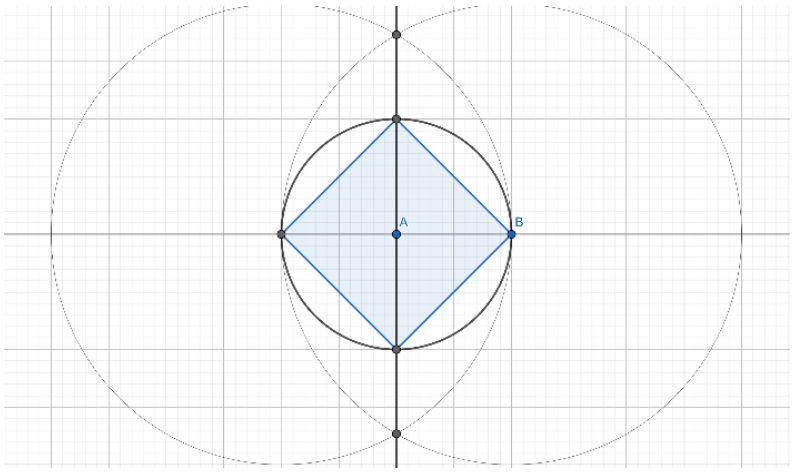
1) Il triangolo e l'esagono sono costruibili, in quanto $\phi(3)= \phi(6)=2$.
   Dato il segmento di estremi A, B costruisco la circonferenza $\mathcal{C}_{A|B}$ centrata in A e passante per B. Per trovare l'esagono inscritto in $\mathcal{C}_{A|B}$ trovo C punto di intersezione tra $\mathcal{C}_{A|B}$ e $\mathcal{C}_{B|A}$ circonferenza centrata in B e passante per A. Il segmento BC sarà uno dei lati dell'esagono, e per trovare i vertici successivi V_i è sufficiente trovare l'intersezione tra $\mathcal{C}_{A|B}$ e $\mathcal{C}_{V_{i-1}|BC}$ centrata nel vertice precedente e di ampiezza la lunghezza del segmento BC.



fig(2.2)

Per costruire il triangolo è sufficiente prendere un vertice ogni due dell'esagono.

2) Il quadrato è costruibile, in quanto $\phi(4)=2$, e anche questo risulta di facile costruzione.
Traccio $\mathcal{C}_{A|B}$ e la retta R_{AB} passante per A e B. La loro intersezione fornisce il vertice C del quadrato opposto a B. Trovo poi la retta passante per le intersezioni delle circonferenze $\mathcal{C}_{C|B}$ e $\mathcal{C}_{B|C}$, e le intersezioni di questa con $\mathcal{C}_{A|B}$ danno gli altri due vertici.

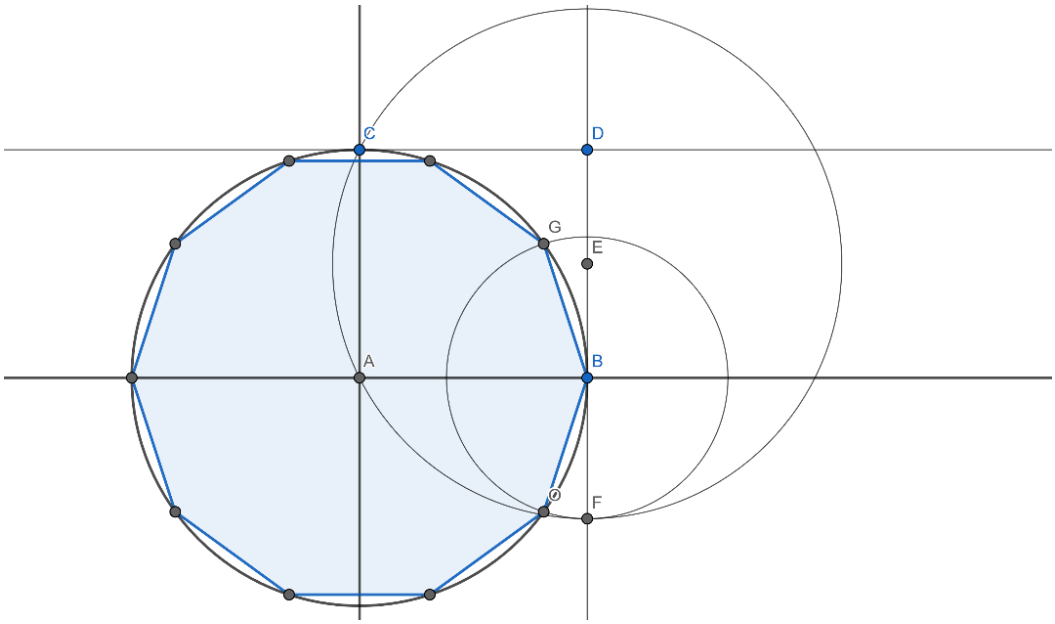


fig(2.3)

3) Il pentagono e il decagono sono costruibili, in quanto $\phi(5)= \phi(10)=4$.
Per la costruzione devo tenere conto che il rapporto tra il lato l del pentagono e la diagonale d corrisponde alla sezione aurea, ovvero $d = l \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

1. Traccio $\mathcal{C}_{A|B}$ e R_{AB}, trovo poi la perpendicolare a R_{AB} passante per A, e dalla sua intersezione con $\mathcal{C}_{A|B}$ trovo C
2. Traccio la perpendicolare a R_{AC} passante per C, la perpendicolare a R_{AB} per B e l'intersezione di queste due rette mi dà il punto D. Trovo poi il punto medio del segmento BD e lo chiamo E.
3. Disegno la circonferenza $\mathcal{C}_{E|A}$ e nomino F il punto di intersezione tra questa e la retta R_{BD}.
4. Trovo i due vertici del decagono consecutivi a B: $\{O,G\} = \mathcal{C}_{A|B} \cap \mathcal{C}_{B|F}$, e avendo trovato tre vertici consecutivi del poligono inscritto in una circonferenza trovo facilmente gli altri vertici.

Per disegnare il pentagono basta prendere un vertice ogni due del decagono.



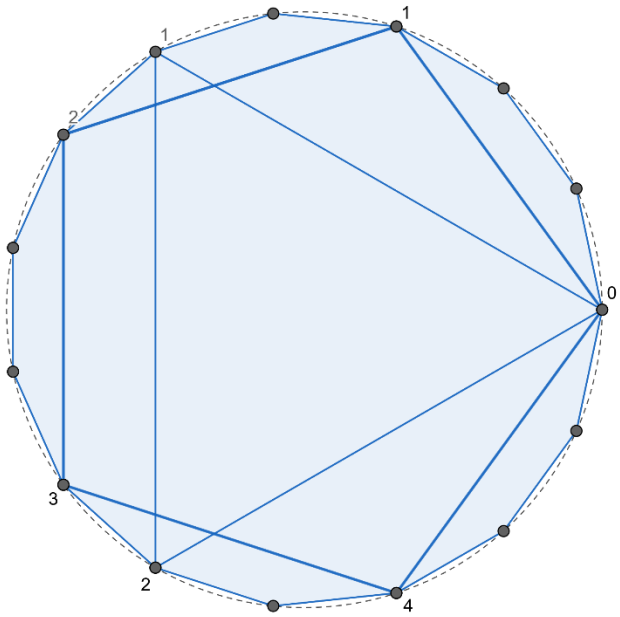
fig(2.4)

Osservazione : Dato un poligono di n lati costruibile, è sempre possibile costruirne uno di 2n lati, e viceversa. Dato un lato BC e il centro A della circonferenza circoscritta all'n-gono, è sufficiente tracciare la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$, trovarne l'intersezione D con $\mathcal{C}_{A|B}$ e prendere come lati del 2n-gono i segmenti BD e DC.

4) Analizzo ora il caso in cui n sia scomponibile in fattori. Perché l'n-gono sia costruibile, i fattori devono essere o 2 o primi di Fermat coprimi tra loro. Sia n=a·b di tale forma, allora grazie al teorema di Bézout posso affermare che esistano x, y interi tali che $a \cdot x + b \cdot y = 1$. Una volta trovati x e y, costruisco i due poligoni regolari di a e b lati inscritti nella stessa circonferenza e con un vertice in comune. A partire da quel vertice, indifferentemente se in senso orario o antiorario, collego l'y° vertice X del poligono di a lati con l'x° vertice Y del poligono di b lati. Il segmento XY trovato descrive un angolo al centro di $\frac{2\pi}{a \cdot b}$, ed è quindi il lato del poligono regolare di n=a· b lati. Infatti, grazie a x e y ottengo $y \cdot \frac{2\pi}{a} + x \cdot \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi(ax+by)}{a \cdot b}$.

Propongo qui di seguito l'esempio del pentadecagono regolare. In questo caso n = 15 = 3·5 . Sia il triangolo che il pentagono sono costruibili, dunque anche il pentadecagono regolare è costruibile.

Osservo che: $2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 1$, dunque un lato del poligono cercato ha come estremi il primo vertice del triangolo e il secondo vertice del pentagono. Avendo due vertici consecutivi e la circonferenza circoscritta, riesco a trovare la figura cercata.



fig(2.5)

5) A differenza delle figure appena elencate, la cui costruzione era nota già ai tempi di Euclide, si dovettero aspettare la Teoria di Galois e gli studi di Gauss sui primi di Fermat per sapere che l'eptadecagono fosse costruibile. Infatti, 17 è un primo di Fermat e $\phi(17) = 16 = 2^{2^2}$.

Il problema della costruibilità dell'eptadecagono fu risolta da Gauss nella sua opera principale "Disquisitiones arithmaticae", pubblicato nel 1801. Alla conclusione di questa dimostrazione afferma: "La divisione di una circonferenza in tre e cinque parti era conosciuta già all'epoca di Euclide; è assurdo che non sia stato scoperto nulla di nuovo i successivi duemila anni, tanto che i geometri assumessero che nessun altro poligono fosse costruibile con riga e compasso, a meno che non derivasse da questi".

Una prima costruzione dell'eptadecagono fu fornita nel 1825, pochi anni dopo l'elaborazione del teorema di Gauss, dal matematico Johannes Herchinger, che sfruttò il metodo di Gauss per analizzare e risolvere il polinomio ciclotomico per l'eptagono:

$$(1) \quad \sum_{i=0}^{16} z^i = 0$$

Sia $\phi = \frac{2\pi}{17}$, $\epsilon = \epsilon_1 = \cos(\phi) + i \cdot sen(\phi)$ e chiamo $\epsilon_0 \dots \epsilon_{16}$ i vertici dell'eptagono inscritto nella circonferenza unitaria $\mathcal{C}$ del piano di Gauss, per cui $z_i = z^{g^i}$, dove g rappresenta la minima radice primitiva 3 di 17. Le potenze $3^0 \dots 3^{16}$ ridotti modulo 17 corrispondono a: $1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6$

E di conseguenza : $(z_0, z_1, \dots, z_{15}) = \sigma = (1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6)$

σ è un elemento generatore del gruppo di Galois relativo alla chiusura algebrica del polinomio ciclotomico di n=17.

A questo punto, $\sigma^2 = (1, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2)(3, 10, 5, 11, 14, 7, 12, 6)$, le cui radici sono:

$$X = z_0 + z_2 + z_4 + z_6 + z_8 + z_{10} + z_{12} + z_{14} = \epsilon + \epsilon^9 + \epsilon^{13} + \epsilon^{15} + \epsilon^{16} + \epsilon^8 + \epsilon^4 + \epsilon^2$$

$$x = \epsilon^3 + \epsilon^{10} + \epsilon^5 + \epsilon^{11} + \epsilon^{14} + \epsilon^7 + \epsilon^{12} + \epsilon^6$$

Da (1) trovo: $X + x = -1$, inoltre trovo che Xx è pari a quattro volte la somma delle radici di (1), e quindi:

$$Xx = -4$$

Da queste ultime due osservazioni ricavo l'equazione quadratica di radici X e x : $t^2 + t - 4 = 0$

Le radici sono quindi: $X = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, dove ho che $x < X$.

Se chiamo $\mathscr{R}$(z) la parte reale di $z \in \mathbb{C}$, allora ho che:

$$(3) \quad \mathcal{R}(\epsilon^m) = \mathcal{R}(\epsilon^n) \qquad se\ m + n = 17$$

Questo è dato dal fatto che , come si evince dalla raffigurazione, se $m + n = 17$ allora il vertice ϵ^m è il coniugio del vertice ϵ^n, e dunque le parti reali sono uguali.

Grazie a (3) affermo che: 1. $\mathcal{R}(\mathrm{X}) = 2(\mathcal{R}(\epsilon_1) + \mathcal{R}(\epsilon_2) + \mathcal{R}(\epsilon_4) + \mathcal{R}(\epsilon_6))$

2. $\mathcal{R}(\mathrm{x}) = 2(\mathcal{R}(\epsilon_3) + \mathcal{R}(\epsilon_5) + \mathcal{R}(\epsilon_6) + \mathcal{R}(\epsilon_7))$

E basta guardare la raffigurazione per capire che il valore di $\mathcal{R}(X)$ è positivo, mentre quello di $\mathcal{R}(\mathrm{x})$ è negativo.

I quattro 4-cicli poi li ottengo da:

$$\sigma^4 = (1, 13, 16, 4)(9, 15, 8, 2)(3, 5, 14, 12)(10, 11, 7, 6)$$

E chiamo: $U = \epsilon + \epsilon^{13} + \epsilon^{16} + \epsilon^4$, $u = \epsilon^9 + \epsilon^{15} + \epsilon^8 + \epsilon^2$,

$V = \epsilon^3 + \epsilon^5 + \epsilon^{14} + \epsilon^{12}$, $v = \epsilon^{10} + \epsilon^{11} + \epsilon^7 + \epsilon^6$

Ottengo : $\begin{cases} U + u = X \\ Uu = \epsilon^1 + \cdots + \epsilon^{16} = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} V + v = x \\ Vv = \epsilon^1 + \cdots + \epsilon^{16} = -1 \end{cases}$

Per cui trovo le rispettive equazioni quadratiche: $t^2 - Xt - 1 = 0$, $t^2 - xt - 1 = 0$

Trovo così le radici: $U = \frac{X+\sqrt{X^2+4}}{2}$, $u = \frac{X-\sqrt{X^2+4}}{2}$, $V = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$, $v = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$

con $u < U$, $v < V$. Dunque: $\mathcal{R}(U) = 2(\mathcal{R}(\epsilon_1) + \mathcal{R}(\epsilon_4))$, $\mathcal{R}(u) = 2(\mathcal{R}(\epsilon_2) + \mathcal{R}(\epsilon_8))$,

$\mathcal{R}(V) = 2(\mathcal{R}(\epsilon_3) + \mathcal{R}(\epsilon_5))$, $\mathcal{R}(v) = 2(\mathcal{R}(\epsilon_8) + \mathcal{R}(\epsilon_7))$,

per i periodi di lunghezza due mi bastano solo i due elementi:

$$W = \epsilon + \epsilon^{16} \ , \quad w = \epsilon^4 + \epsilon^{13}$$

in modo che $W + w = U$, e così ho il sistema $\begin{cases} W + w = U \\ Ww = \epsilon^5 + \epsilon^{14} + \epsilon^3 + \epsilon^{12} = V \end{cases}$

inoltre, osservo che $w < W$, perché $\mathcal{R}(W) = 2\mathcal{R}(\epsilon_1)$ e $\mathcal{R}(w) = 2\mathcal{R}(\epsilon_4)$.

Ricavo l'equazione quadratica:

$$(3) \qquad t^2 - Ut + V = 0$$

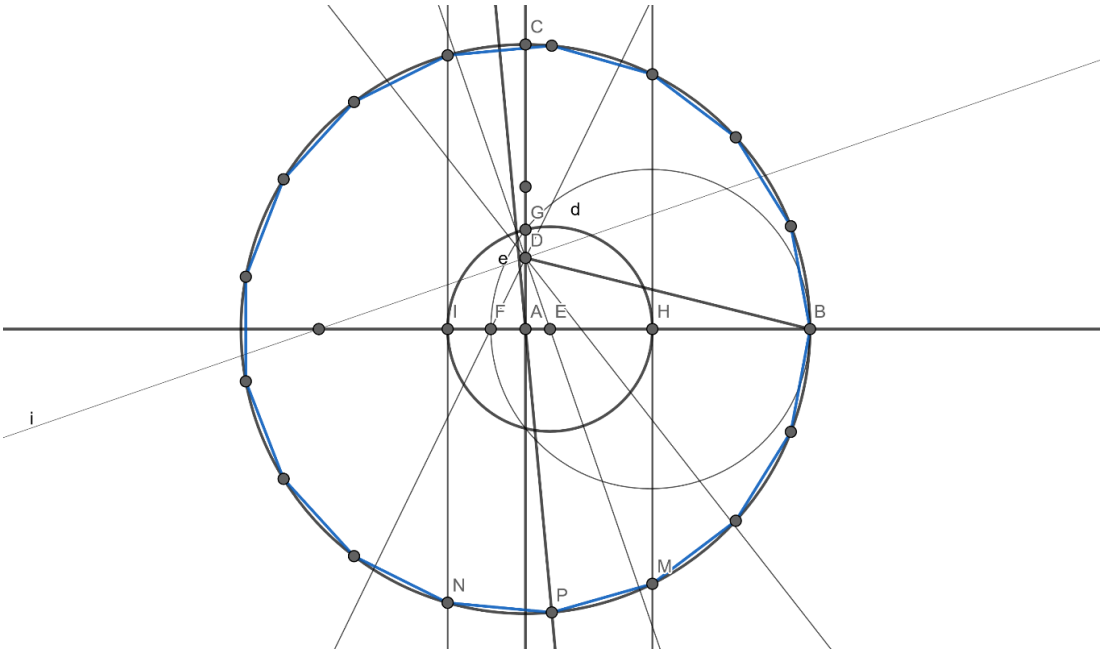
E per la costruzione dell'eptagono attuo i successivi passaggi:

1. Costruisco X e x;
2. Costruisco U e V;
3. Costruisco W e w come radici dell'equazione (3);

4. Trovo i punti W e w sull'asse reale. Traccio le rette passanti per W e w perpendicolari all'asse reale, e l'intersezione di queste con la circonferenza $\mathcal{C}_{0|1}$ centrata nell'origine mi fornisce i vertici $\epsilon_1, \epsilon_{16}, \epsilon_4, \epsilon_{13}$, da cui ricavo gli altri vertici.

Tra le costruzioni note riportiamo quella di H.W. Richmond, apparsa col titolo "To construct a regular polygon of 17 sides" (1909).

1. Disegno la retta R_{AB} e la circonferenza $\mathcal{C}_{A|B}$traccio poi la retta perpendicolare a R_{AB} passante per A e chiamo C il punto di intersezione tra questa retta e $\mathcal{C}_{A|B}$.
2. Costruisco il punto D su AC tale che |AD| = $\frac{1}{4}$ |AC|, disegno il segmento BD e trovo il punto E sul segmento AB come punto di intersezione con la bisettrice della bisettrice di A$\widehat{D}B$, in maniera che A$\widehat{D}E$ = $\frac{1}{4}$ A$\widehat{D}$B . Disegno il segmento DE.
3. Traccio la retta perpendicolare a DE passante per D, costruisco poi F come punto di intersezione della bisettrice di $\widehat{D}$ con R_{AB}. Disegno quindi la circonferenza $\mathcal{C}_{FB}$ di diametro FB
4. Trovo il punto {G} = $AC \cap \mathcal{C}_{FB}$, traccio $\mathcal{C}_{E|G}$ e costruisco {H,I}=$\mathcal{C}_{E|G} \cap R_{AB}$. Disegno poi m e n rette ortogonali a R_{AB} passanti rispettivamente per H e I. Chiamo poi {M}= $\mathcal{C}_{A|B} \cap$ m , {N}=$\mathcal{C}_{A|B} \cap$ n . Tracciando la bisettrice all'angolo M$\hat{A}$N riesco a trovare il punto medio P dell'arco MN. N, P, M sono tre vertici consecutivi dell'eptagono consecutivo inscritto nella circonferenza unitaria, e partendo dal segmento PM lato dell'eptagono riesco a trovare gli altri vertici.



fig(2.6)

3. Teoremi che semplificano le costruzioni con riga e compasso

Tra la fine del XVIII e l'inizio del XIX secolo, insieme agli studi di Galois e Gauss, si può notare un rinnovato interesse nei confronti degli aspetti più elementari della matematica e si cerca di ridurre ancora più al minimo gli strumenti utilizzabili al fine di ottenere gli stessi risultati costruibili con riga e compasso.

3.1 Teorema di Mohr-Mascheroni:

"Il primo pensiero che mi invitò a tentare le strade nuove di questa Geometria del Compasso fu questo: mentre si trovano tante cose nuove progredendo nelle matematiche, non si potrebbe trovare qualche luogo ancora incognito retrocedendo? Finora le più semplici soluzioni della geometria sono giudicate quelle, che altro non impiegano, che il compasso e la riga. [...] Or dissi, `e vero che i problemi di Euclide sieno della più semplice costruzione? A questo punto mi avvidi, che non potendosi far uso della riga sola se non per condurre una retta; si poteva però forse far uso del solo compasso non per descrivere solamente il cerchio, o un arco d'esso; ma descrivendone più con più cerchi, e con diverse aperture, trovare per via delle loro sezioni mutue più punti, che fossero utili, e appunto i cercati di posizione in qualche problema."

Con queste parole il matematico Lorenzo Mascheroni (1750-1800) introduce la sua opera "La Geometria del Compasso" (1797). In questo trattato elabora e dimostra il teorema secondo il quale tutti i punti costruibili con riga e compasso sono costruibili per mezzo del solo compasso. Esaminando i vari passaggi con cui costruisco un punto con riga e compasso, vedo che ogni step consiste in una di queste tre costruzioni:

I. trovare il punto di intersezione tra due righe;
II. trovare il punto di intersezione tra una riga e una circonferenza;
III. trovare il punto di intersezione tra due circonferenze.

Per il teorema di Mascheroni devo dunque dimostrare che i punti costruibili nei casi I e II possono essere trovati allo stesso modo per mezzo del solo compasso. Risolvo innanzitutto dei problemi preliminari:

Problema 1) Disegnare la somma e la differenza di due segmenti a e b dati.

Soluzione: siano dati i segmenti PQ=a e QX=b. Disegno la circonferenza centrata in Q di raggio b e da qualsiasi punto H in essa trovo il punto H' simmetrico rispetto alla retta g passante per P e Q. Il punto simmetrico H' corrisponde all'intersezione della circonferenza centrata in P e passante per H con la circonferenza centrata in Q e passante per H. Chiamo dunque h il segmento HH'. Disegno le circonferenze centrate in Q e H di raggi rispettivamente h e b. Chiamo K il punto di intersezione tra queste due circonferenze e trovo K' come punto simmetrico a K rispetto alla retta g. I punti KHH'K' disegnano un trapezio isoscele i cui lati obliqui KH e K'H' sono di lunghezza b e la base KK' è di lunghezza 2h. Chiamo le diagonali KH' = HK' = d. Dato che il trapezio può essere inscritto in una circonferenza, posso applicare l'equazione: $d^2 = b^2 + 2h^2$

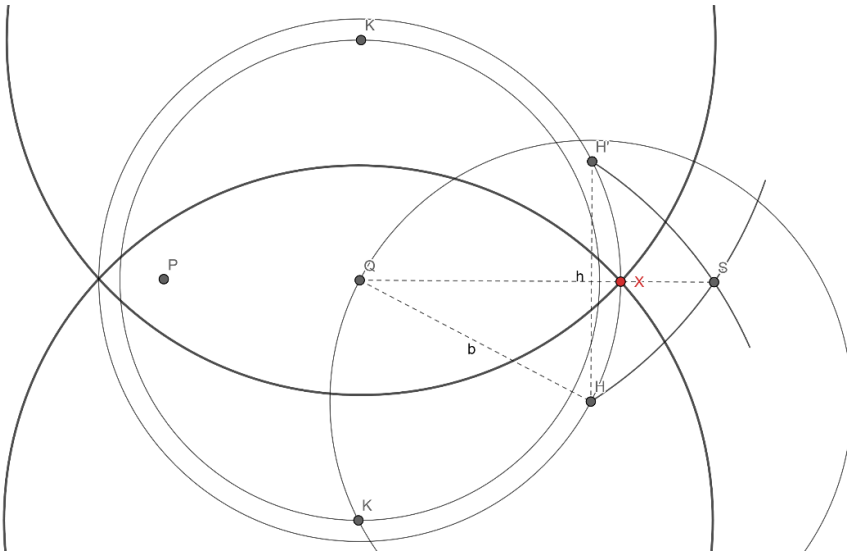
Inoltre, chiamo K'X = x, e dal fatto che il triangolo QK'X è retto segue che:

$$x^2 = \mathrm{b}^2 + h^2$$

Disegnando il cerchio di centro Q e raggio b noto che viene a crearsi un triangolo rettangolo di cateti x, h e ipotenusa d, da cui ottengo l'equazione:

$$d^2 = \mathrm{x}^2 + h^2$$

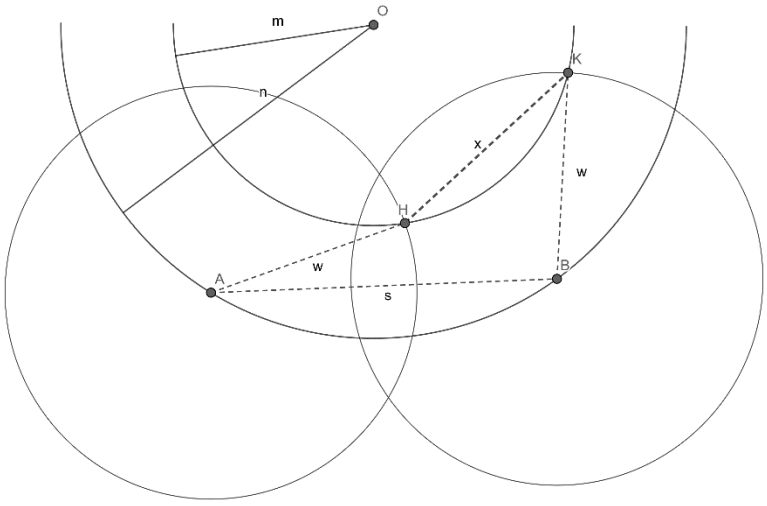
Ora trovo il punto S di intersezione tra le circonferenze centrate in K e K', entrambe di raggio d, sulla retta g, e definisco il segmento QS = x. Infine disegno le circonferenze di raggio x centrate in K e K', e il punto X di intersezione è il punto cercato.



fig(3.1)

Problema 2) Dati i segmenti di lunghezze m, n, s, trovare la quarta proporzionale x, ovvero trovare il segmento di lunghezza $x = \frac{n}{m}s$

Soluzione: Dato O punto, disegno due circonferenze concentriche centrate in O di raggio m e n. Traccio poi sulla prima una corda AB di lunghezza s, e centrando poi il compasso in A e poi in B trovo due punti H, K nella seconda circonferenza tale che rispettivamente AH = w, BK = w. il segmento HK = x è la quarta proporzionale cercata. Per provare ciò basta osservare che i triangoli OAB e OHK sono simili.



fig(3.2)

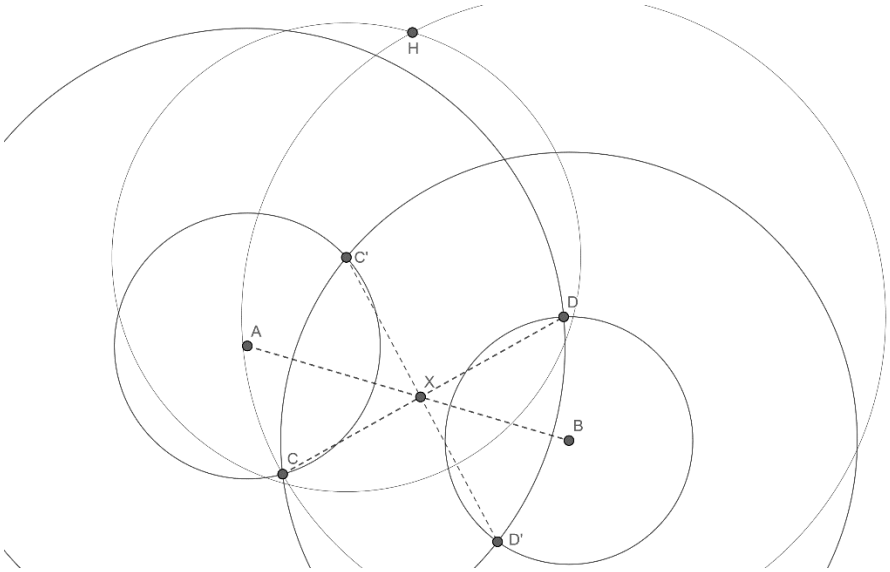
I costruzione: intersezione tra due rette.

Considero le due rette f, g passanti rispettivamente per le coppie di punti A, B e C, D.

Trovo poi i punti C' e D' simmetrici rispetto a f. Il punto di intersezione cercato X si troverà anche nel segmento C'D'. Dal teorema del raggio segue che $\frac{CX}{CD} = \frac{CC'}{DD'}$, oppure nominando CX, CD, CC', DD' rispettivamente come x, e, c, d, ottengo che:

$$x = \frac{c}{c+d}\, e$$

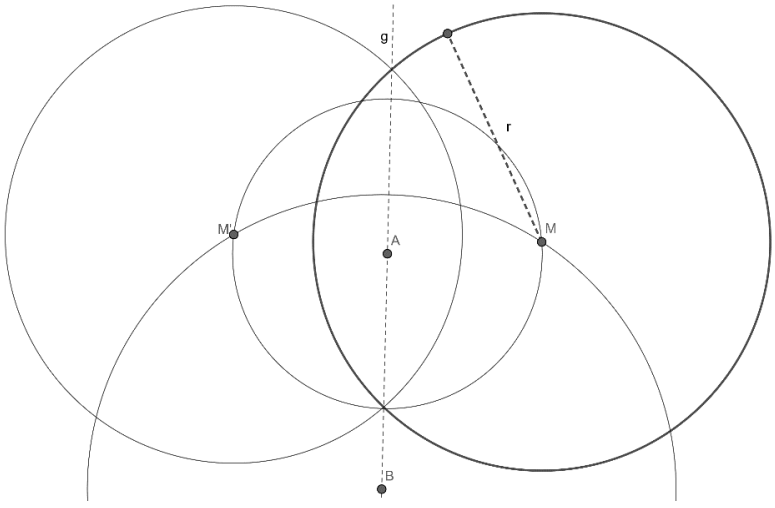
Chiamo ora H il punto di intersezione delle circonferenze di centro C' e D e raggi rispettivamente d ed e, e definisco il segmento CH=c+d. Ora, come descritto nel problema 2, disegno il segmento x e concludo trovando X come punto di intersezione tra le circonferenze di raggio x e centri C e C'.



fig(3.3)

II costruzione: Suppongo mi siano dati M il centro della circonferenza e r il raggio. Siano poi A e B i punti per cui passa la retta g.

Disegno il punto M' simmetrico a M rispetto a g, quindi traccio la circonferenza centrata in M' di raggio r. I punti di intersezione tra le due circonferenze descritte saranno i punti di intersezione tra la retta g e la circonferenza iniziale.



fig(3.4)

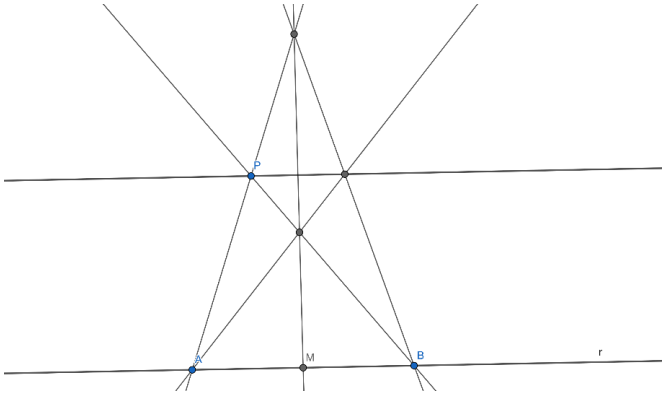
Nel particolare caso, invece, in cui la retta g passi per M tale costruzione non è possibile (essendo M simmetrica a se stessa). In questa situazione particolare trovo due nuovi segmenti sommando e sottraendo al segmento dato AM un segmento di lunghezza r, come indicato nel problema 2. Gli estremi dei segmenti trovati saranno i punti di intersezione cercati.

3.2 Teorema di Steiner

Sulla scia del lavoro svolto da Mascheroni anche i matematici Poncelet (1788-1867) e Jacob Steiner (1793-1876) elaborarono un teorema volto a ridurre al minimo gli strumenti utilizzabili al fine di ottenere gli stessi risultati dello studio delle costruzioni con riga e compasso. Tale teorema afferma che ogni costruzione possibile con riga e compasso può essere eseguita per mezzo della sola riga e di una "circonferenza fissata" (ovvero di cui sono fissati sia centro che raggio). Con l'uso della riga è possibile rappresentare solo le espressioni algebriche la cui forma algebrica sia razionale. Infatti, come già visto al capitolo 2, la retta corrisponde a una funzione di grado uno, e detta α l'intersezione tra le due rette in L[x], essa sarà di grado 1 su L. Questo fatto portò Poncelet all'aggiunta di un cerchio fissato per poter ottenere gli stessi elementi costruibili con riga e compasso. Tale intuizione venne poi confermata da Steiner nel suo libro "Die geometrischen Konstruktionen ausgefiuhrt mittels der geraden Linie und Eines festen Kreises", pubblicato a Berlino nel 1833. La dimostrazione qui di seguito esposta del teorema si basa su quest'ultima pubblicazione ed è volta a dimostrare che con riga e cerchio fissato posso trovare i punti di intersezione tra riga e compasso e tra due compassi. Risolvo inizialmente alcuni problemi preliminari.

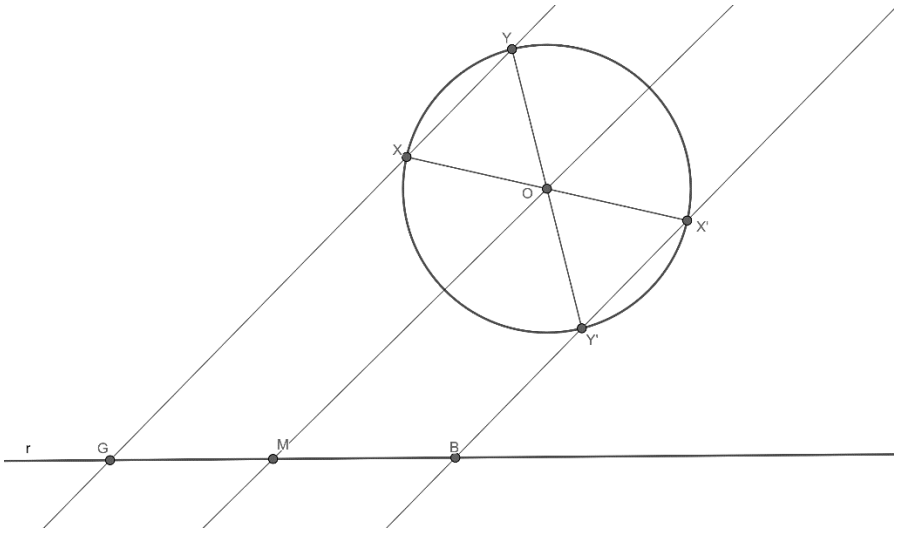
Problema 1) dimostro la costruibilità della parallela a una retta r passante per un punto dato P.

Soluzione: Considero una retta r determinata da due punti A, B contenuti in essa, e ipotizzo di conoscere il punto medio M del segmento AB. Traccio la retta s passante per P e A, scelgo un punto S in s esterno al segmento AP e traccio le rette per BS, per MS e per BP. Detto O il punto di intersezione tra MS e BP, traccio la retta per AO, chiamo Q il punto di intersezione tra BS e AO e la retta cercata sarà quella passante per P e Q.



fig(3.5)

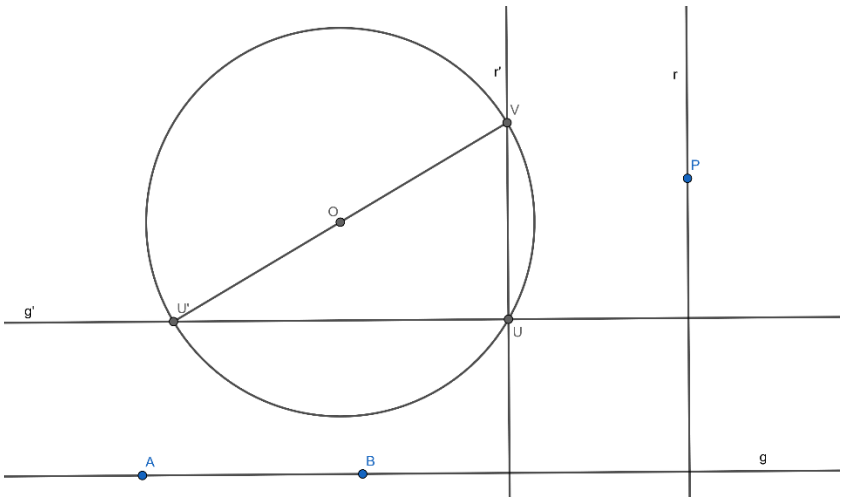
Per determinare i due punti A, B nella retta e il loro punto medio, e la retta data passa per il centro del cerchio fissato, M corrisponderà al centro e A, B saranno le intersezioni della circonferenza con la retta. Altrimenti prendo un punto M della retta data e traccio la retta per M e il centro O del cerchio fissato. Traccio poi due diagonali diverse nel cerchio, di estremi rispettivamente X,X' e Y,Y'. Traccio poi le rette per X,Y e X',Y', e i punti di intersezione con la retta data saranno rispettivamente A e B.



fig(3.6)

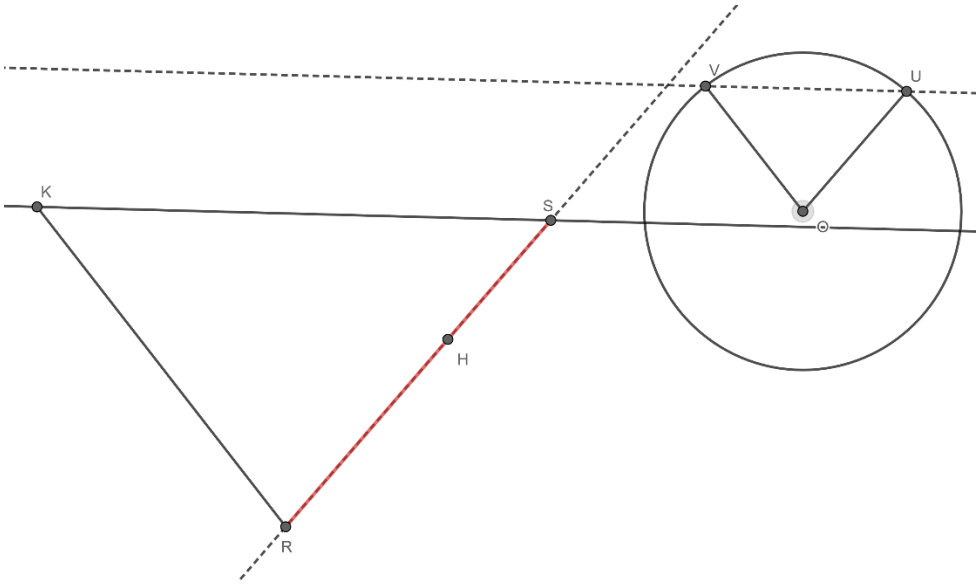
Problema 2) disegnare la retta perpendicolare a una retta data g per un punto dato P.

Soluzione: Traccio la retta g' parallela a g passante per la circonferenza (ma non per il centro O) e chiamo U,U' i punti di intersezione con la retta. Traccio il diametro per U e chiamo l'altro estremo V. Traccio poi la retta r' contenente V,U', e tale retta sarà perpendicolare a g. Trovo infine la retta r passante per P e parallela a r', r sarà la retta cercata.



fig(3.7)

Problema 3) Traslare un segmento PQ da un dato punto R in una direzione data. Soluzione: Considero la direzione data come data dal segmento RH da R. In primo luogo, dispongo PQ parallelo a RK. Detto O il centro del cerchio, costruisco due raggi del cerchio dato OU e OV, paralleli a RH e RK. Infine, disegno la retta r parallela a UV passante per K, e chiamo S il punto di intersezione tra r e la parallela a RH. S è l'altro estremo del segmento RS cercato.



fig(3.8)

Problema 4) Date tre distanze m, n, s trovare la quarta proporzionale x. Soluzione: Da un punto O qualsiasi traccio due distinti vettori I e II. Segno li segmenti OM = m e ON = n su I e il segmento OS = s su II. Traccio poi la parallela al segmento MS passante per N, e chiamo X il punto di intersezione di tale parallela con II. OX = x è la quarta proporzionale cercata, dal momento che:

$$OX = \frac{n}{m}s$$

Problema 5) Dati due segmenti a e b, trovare la media proporzionale.

Soluzione: Chiamo x la media proporzionale √ab. Sia d il diametro del cerchio fissato, c = a + b la somma che può essere costruita grazie al problema 3. Scrivo $x = \frac{c}{d}s$, con s=√ hk , h=$\frac{d}{a}c$, $k = \frac{d}{c}b$ (in modo tale che d = h + k). In accordo con prob.4 traccio i segmenti h e k, e in accordo con prob.3 disegno HO=h su un diametro HK nel cerchio fissato, così KO sarà uguale a K. Allora costruisco per O la perpendicolare ad HK e chiamo S l'intersezione della perpendicolare con il cerchio fissato. Allora:

OS = s = √hk. Infine, traccio il segmento x cercato, $x = \frac{c}{d}s$.

Passo ora al teorema, dimostrando che posso trovare i punti di intersezione tra una retta e una circonferenza e allo stesso modo l'intersezione tra due circonferenze costruibili.

II costruzione: disegnare i punti di intersezione di una retta e una circonferenza date.

Soluzione: Considero di avere dati il punto C centro e P punto per cui passa la circonferenza, r il suo diametro, g la retta, X e Y i punti di intersezione della circonferenza con g. Sia poi il segmento XY=2s e M il suo punto medio, MC = l. Grazie al triangolo retto ottengo l'equazione: $s^2 = r^2 - l^2$, ovvero s = √(r + l)(r − l) . A questo punto faccio cadere la perpendicolare CM=l su g e disegno i segmenti a = r + l e b = r – l , disegno poi il segmento s=$\sqrt{ab}$. Infine, traccio i due segmenti di lunghezza s e un estremo M in entrambe le direzioni, gli altri estremi dei due segmenti saranno X e Y.

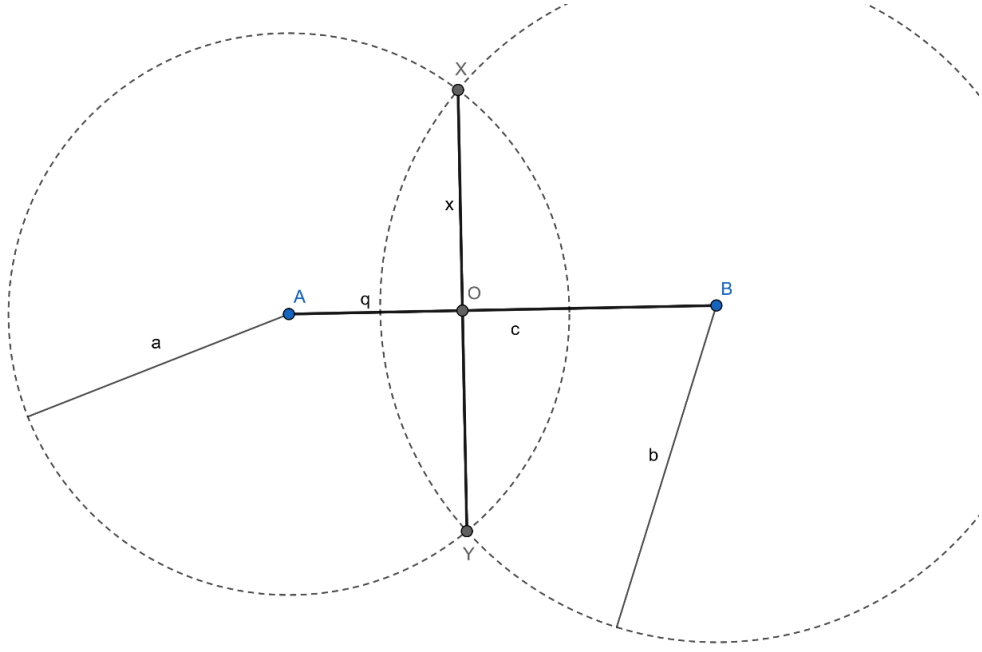
III costruzione: Trovare i punti di intersezione di due circonferenze date.

Soluzione: Definisco le due circonferenze di centri e raggi rispettivamente A, a e B, b. Definisco AB=c il segmento che congiunge i due centri, X, Y i due punti di intersezione delle circonferenze e O il punto di intersezione tra i segmenti XY e AB. Chiamo infine i segmenti AO=q e OX=x. Trovo q: Dal triangolo ABX, grazie al teorema di Pitagora, posso affermare: $b^2 = c^2 + a^2 - 2cq$. Dunque, ponendo $d^2 = c^2 + a^2$, ho:

$$q = \frac{(d+b)(d-b)}{2c}$$

Disegno dunque un triangolo retto di cateti a e c, ottenendo l'ipotenusa di lunghezza d. Disegno poi i segmenti n = d + b, m = 2c , s = d – b , q = $\frac{n}{m}$ s.

Trovo x: dal triangolo retto AOX segue che: $x^2 = c^2 + a^2$. Così : x = √(a + q)(a − q). Disegno poi k = a + q, h = a - q e avrò x=√kh. Costruisco X,Y: Faccio giacere il segmento di lunghezza q su AB, avendo come estremi A e O. Partendo da O traccio la perpendicolare rispetto al segmento AB e disegno in entrambe le direzioni due segmenti di lunghezza X. I due estremi diversi da O che trovo saranno i punti X e Y.



fig(3.9)

4. Problemi non risolvibili, nuovi strumenti e rapporti con estensioni di L

Ho visto dunque come a priori si possa dire se una costruzione sia possibile o meno. Per poter ottenere graficamente figure non costruibili sono stati utilizzati diversi metodi diversi dall'uso dei soli riga e compasso. Il mio intento ora è di mostrare le soluzioni alternative di tre tra i problemi che si pongono il problema di costruire elementi che grazie ai lavori del XIX sec si è scoperto definitivamente non essere costruibili.

4.1 Trisezione dell'angolo

Il primo problema che analizzo è la possibilità di trisecare un qualsiasi angolo. Dato l'angolo $\theta = 3\phi$, vedo se sia sempre possibile trovare ϕ. Comincio osservando che per trovare un angolo θ, mi basta trovare il punto $\alpha = \big(\cos(\theta)\,, sen(\theta)\big)$, l'angolo θ sarà individuato tra l'asse reale e il segmento di estremi 0 e α. Dal momento che sen(θ)= $\sqrt{1-\cos^2(\theta)}$, è sufficiente dimostrare la costruibilità o meno di cos(θ). Partendo da :

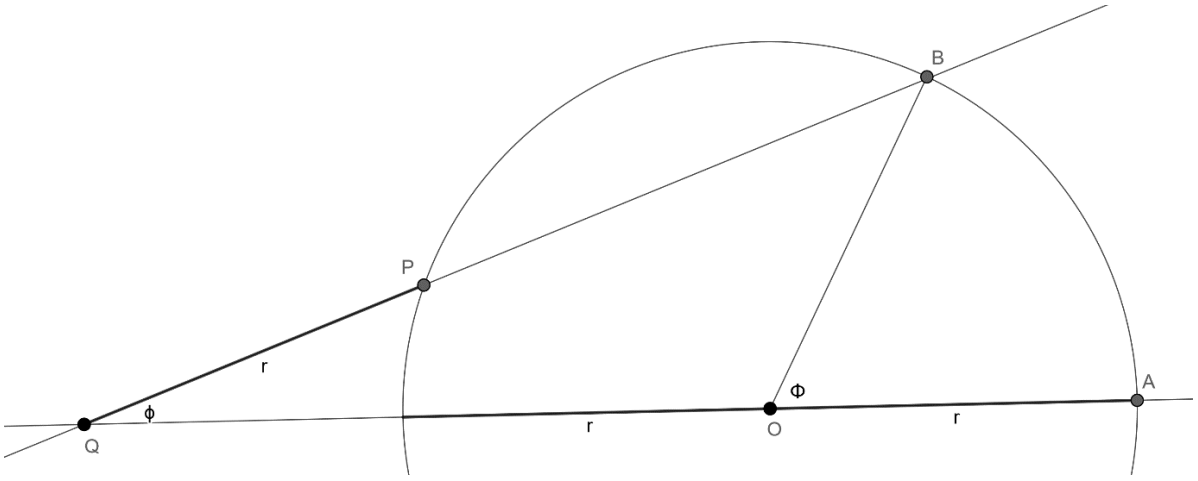
$$e^{i\cdot 3\phi} = \cos(3\phi) + i\cdot sen(3\phi) = (\cos^3(\phi) - 3\cos(\phi)\, sen^2(\phi)) + i(3\cos^2(\phi)sen(\phi) - sen^2(\phi))$$

Ottengo: $\cos(3\phi) = 4\cos^3(\phi) - 3\cos(\phi)$ e ponendo $\cos(\phi) = x$ mi riconduco al polinomio:

$$x^3 - \frac{3}{4}\,x - \cos(\theta) = 0$$

Che a meno di situazioni particolari (ad esempio $\theta = \frac{2\pi}{n}$ dove n sia primo di Fermat tale che 3 non divida n) questo è un polinomio irriducibile di grado 3. Essendo dunque x=cos(ϕ) lo zero di un polinomio irriducibile di grado 3, ho che $3 \mid |Gal(\mathbb{Q}(\cos(\phi)) : \mathbb{Q}|$, e quindi per il teorema di Gauss espresso al capitolo 3 non è costruibile. Per poter trisecare un angolo è dunque necessario importare tra i mezzi utilizzabili uno nuovo. Voglio illustrare qui di seguito la soluzione di Archimede di Siracusa (287 a.C. ca., 212 a.C.), che fa uso della "neusi" (dal greco $\nu\epsilon\acute{\upsilon}\epsilon\iota\nu$, ovvero "inclinare verso"). Tale metodo, altresì detto metodo della "riga marcata", consiste nel fissare su una retta un segmento di lunghezza l, detta "direzione della neusi", imponendo che gli estremi di tale segmento passino per due curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, in modo tale che la retta su cui giace il segmento passi per un terzo punto P dato, il "polo della neusi".

In questo caso, considero Φ l'angolo determinato dall'apertura di due segmenti OA e OB, raggi della circonferenza $\mathcal{C}_{O|A}$. Prolungo OA nella retta R_{OA}, e passo ora alla costruzione di neusi. Fisso su una retta un segmento di lunghezza |OA| = r , di estremi P, Q, impongo poi che Q giaccia su R_{OA} e P su $\mathcal{C}_{O|A}$ e inclino la retta finché non passa per il punto B. Detto ϕ l'angolo A$\hat{Q}$B, ottengo che $\Phi = 3\phi$. Osservo infatti che $\widehat{QPO}$ è un triangolo isoscele con angolo alla base ϕ, così come lo è il triangolo $\widehat{POB}$ con gli angoli alla base $\frac{\Phi+\phi}{2}$. Dal momento che l'angolo $Q\hat{P}O$ ha ampiezza pari a $\pi - 2\phi$, e il suo supplementare è $O\hat{P}B$ di ampiezza $\frac{\Phi+\phi}{2}$, ottengo che $\pi = \pi - 2\phi + \frac{\Phi+\phi}{2}$, da cui ricavo facilmente $\Phi = 3\phi$.



fig(4.1)

L'uso di questo metodo conferma i teoremi espressi al cap.3, vado a verificarlo.

Mi pongo nel sistema di riferimento in cui O sia l'origine: O = (0,0) . Allora A = (r,0), B = (x_B, y_B) dove $x_B = rcos(\Phi)$, $y_B = r\text{sen}(\Phi)$. Ricordo che $r^2 = x_B^2 + y_B^2$. Impongo poi le condizioni affinché sia rispettata la costruzione di neusi:

1. $Q \in R_{OA} \quad \Rightarrow \quad y_Q = 0; \qquad Q = (x_Q, 0)$
2. $P \in \mathcal{C}_{O|B} \quad \Rightarrow \quad x_P^2 + y_P^2 = r^2 \qquad P = \left(x_P, \sqrt{r^2 - x_P^2}\right)$
3. $|PQ| = r \quad \Rightarrow \quad (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 = r^2$
4. P, Q, B allineati, $R_{PB} : \binom{x}{y} = \binom{x_B}{y_B} + t\binom{x_P - x_B}{y_P - y_B} \Rightarrow \; Q \in R_{PB}$

Dalle condizioni (1),(2),(3) ottengo:

$r^2 = x_P^2 + x_Q^2 - 2x_P x_Q + r^2 - x_P^2 \;\Rightarrow\; x_Q(x_Q - 2x_P) = 0 \;\; dove \; x_Q \neq 0$ (altrimenti Q = O)

$$\Rightarrow \; x_Q = 2\,x_P \qquad (5)$$

Ora impongo Q $\in R_{PB} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_Q = x_B + t(x_P - x_B) \\ y_Q = y_B + t(y_P - y_B) \end{cases} \overset{(1),(5)}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,x_B = x_B + t(x_P - x_B) \\ 0 = y_B + t(y_P - y_B) \end{cases}$

E ottengo: $\begin{cases} (2-t)\,x_P = (1-t)\,x_B \\ y_B(1-t) + t \cdot y_P = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_P = \frac{1-t}{2-t}\,x_B \\ y_B^2 = \frac{t^2}{(1-t)^2}\,y_P^2 \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} x_P = \frac{1-t}{2-t}\,x_B \\ r^2 - x_B^2 = \frac{t^2}{(1-t)^2}\left(r^2 - \frac{1-t}{1+t}\,x_B^2\right) \end{cases}$

Avendo già noto Φ, e quindi anche x_B = cos(Φ), riesco a descrivere x_P (e di conseguenza y_P) in funzione della variabile t. Vedo il grado della funzione considerata:

$$r^2 - x_B^2 - \frac{t^2(2-t)^2 r^2 - t^2(1-t)^2 x_B^2}{(1-t)^2(2-t)^2} = 0$$

E a questo punto, dopo facili calcoli, ottengo :

$$(6) \qquad \frac{t^3(-2r^2+4x_B^2)+t^2(9r^2-12x_B^2)-12ty_B^2+4y_B^2}{(1-t)^2(2-t)^2}=0$$

Il numeratore dell'equazione espressa in (6), a meno di casi particolari (come ad esempio $\Phi = 2\pi$ o $\Phi = \pi$ oppure ancora $\Phi = \frac{2\pi}{5}$) è un polinomio irriducibile di grado 3, ed essendo P punto utilizzato nella costruzione per trovare ϕ determinato dallo zero t di un polinomio irriducibile di grado un multiplo di tre ottengo che :

$$3 \mid \left| Gal\left({}^{\mathbb{Q}(\cos(\phi))}/_{\mathbb{Q}} \right) \right|$$

Ho dunque mostrato un esempio di come, una volta che risulti necessario utilizzare un metodo che comprenda un mezzo al di fuori di linea e compasso, non ottengo più i risultati del Teorema (1) del paragrafo 3.

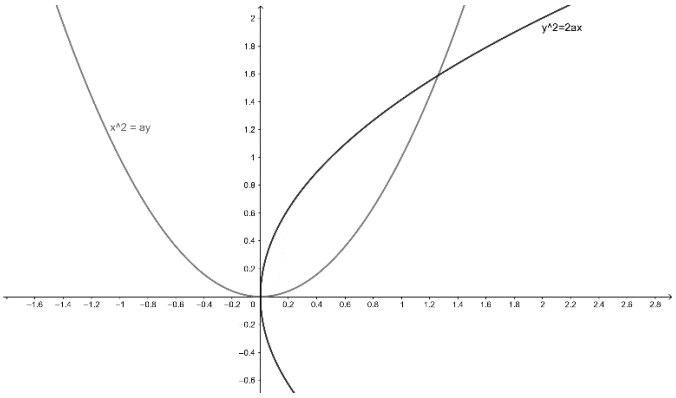
4.2 Radice cubica

Dato a $\in \mathbb{Q}$, il polinomio minimo di $\sqrt[3]{a}$ corrisponde a $f(x) = x^3 - a$. A meno che la radice cubica di a non sia in $\mathbb{Q}$, il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[3]{a})$, di grado 6 su $\mathbb{Q}$.(dove indico ζ come la radice cubica dell'unità). Poiché non esiste m $\in \mathbb{N}$ tale che $6 = 2^m$, $\sqrt[3]{a}$ in generale non è costruibile. Vedo ora in che modi si è data una risposta al cosiddetto "Problema di Delfi", ovvero il problema di costruire un cubo il cui volume sia il doppio del volume di un cubo dato. D. E. Smith nella sua opera "History of Mathematics" riguardo l'origine del problema e del suo nome riporta "Gli Ateniesi si recarono a Delfi e chiesero all'oracolo come combattere la peste che si era abbattuta sulla loro città intorno al 480 a.C., si dice che l'oracolo rispose che avrebbero dovuto costruire un altare simile a quello di Apollo ma grande il doppio. Essendo tale altare un cubo, il problema consisteva nel raddoppiarne il volume". Questo aneddoto ci fa comprendere come già nel V secolo a.C. si fosse compresa la difficoltà, se non l'impossibilità, di risolvere tale problema. Dopo i teoremi espressi precedentemente, dal momento che tale problema corrisponde a trovare un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$ volte la lunghezza del lato del cubo iniziale, posso affermare a priori che il problema non è risolvibile. Non sapendolo, nell'antichità si sono trovati diversi metodi alternativi alla costruzione con riga e compasso per trovare una risposta, qui di seguito ne mostro una, che si attribuisce a Platone e al matematico Menecmo e fa uso della costruzione per "neusi", già introdotta.

Comincio osservando che l'equazione $x^3 = 2a^3$ equivale al sistema: (Σ): $\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases}$, infatti da $y = \frac{x^2}{a}$ ottengo

$\frac{x^4}{a^2} = 2ax \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3}{a^2} = 2a$

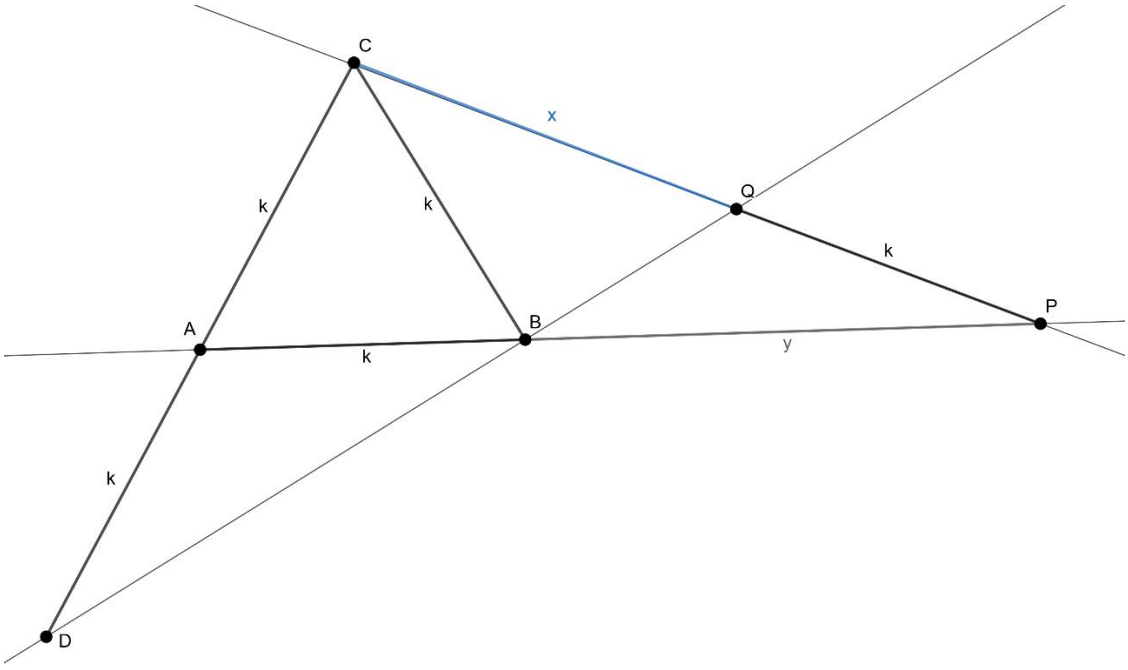
Si tratta dunque di trovare il punto di intersezione tra le due parabole descritte dal sistema. Osservo preliminarmente che anche se alcuni punti della parabola sono costruibili, non lo è l'intero grafico, in particolare il punto di intersezione cercato.



fig(4.2)

Inizio costruendo un triangolo equilatero con i lati di lunghezza k. Prolungo il lato CA col segmento AD di lunghezza k, e traccio la retta R_{DB}. Faccio poi la costruzione per neusi fissando sulla retta r un segmento di lunghezza k ed estremi P,Q , pongo poi la retta r in modo che: (1) $C \in r$, (2) $Q \in R_{BD}$, (3) $P \in R_{AB}$. Allora:

$$x := |CQ| = k\sqrt[3]{2}$$



fig(4.3)

Dimostrazione: siano CQ = x, BP = y . Osservando la figura CABP, dal teorema di Pitagora ottengo: $(x+k)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}k^2 + \left(\frac{k}{2}+y\right)^2$, ovvero:

$$x^2 + 2kx = y^2 + ky \qquad (1)$$

Applicando poi il teorema di Menelao al triangolo ACP di trasversale DBQ: $AD \cdot CQ \cdot BP = PQ \cdot AB \cdot CD$, ovvero:

$$xyk = 2k^3 \quad \Rightarrow \quad xy = 2k^2 \qquad (2)$$

Le due equazioni appena trovate sono soddisfatte dalle radici x e y delle equazioni del sistema (Σ) sopra descritto. Le incognite x e y date da (1) e (2) sono allo stesso tempo le coordinate punti di intersezione delle parabole. In particolare, $x = k\sqrt[3]{2}$.

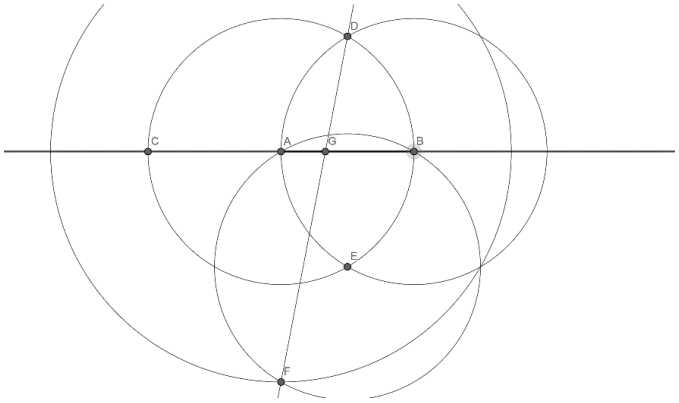
Osservazione: Queste affermazioni sono volte a trovare la lunghezza del segmento di estremi 0 e $\sqrt[3]{a}$. Se a non si trova sulla retta reale, allora giace su a una retta di inclinazione θ rispetto alla retta reale, e per definire la posizione di a devo trovare anche l'inclinazione del segmento di estremi $0,\sqrt[3]{a}$ con la retta R_{01}. Tenendo presente la formula di de Moivre: $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)\right)$, l'inclinazione del segmento di estremi 0 e $\sqrt[3]{a}$ sarà data dall'angolo $\frac{\theta}{3}$, che trovo come indicato al punto precedente. Osservo che in tal caso per la costruzione necessiterò di due costruzioni per neusi, corrispondenti a due funzioni irriducibili di grado 3, il che si rifletterà sul polinomio minimo di $\sqrt[3]{a}$, che avrà come grado un multiplo di $6 = 3 + 2$ (essendo $\alpha \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$, non essendoci alcuna radice reale a meno che α non giaccia su una retta di inclinazione $\pm\frac{2\pi}{3}$). Basti pensare al polinomio minimo di $\sqrt[3]{2i}$: $f_1(x) := x^6 + 4 \in \mathbb{Q}$, appunto di grado 6, rispetto al polinomio minimo di $\sqrt[3]{2}$ (per la cui costruzione è sufficiente impiegare una sola volta tale strumento):

$f_2(x) := x^3 - 2 \in \mathbb{Q}$, di grado 3.

4.3 Eptagono ed ennagono

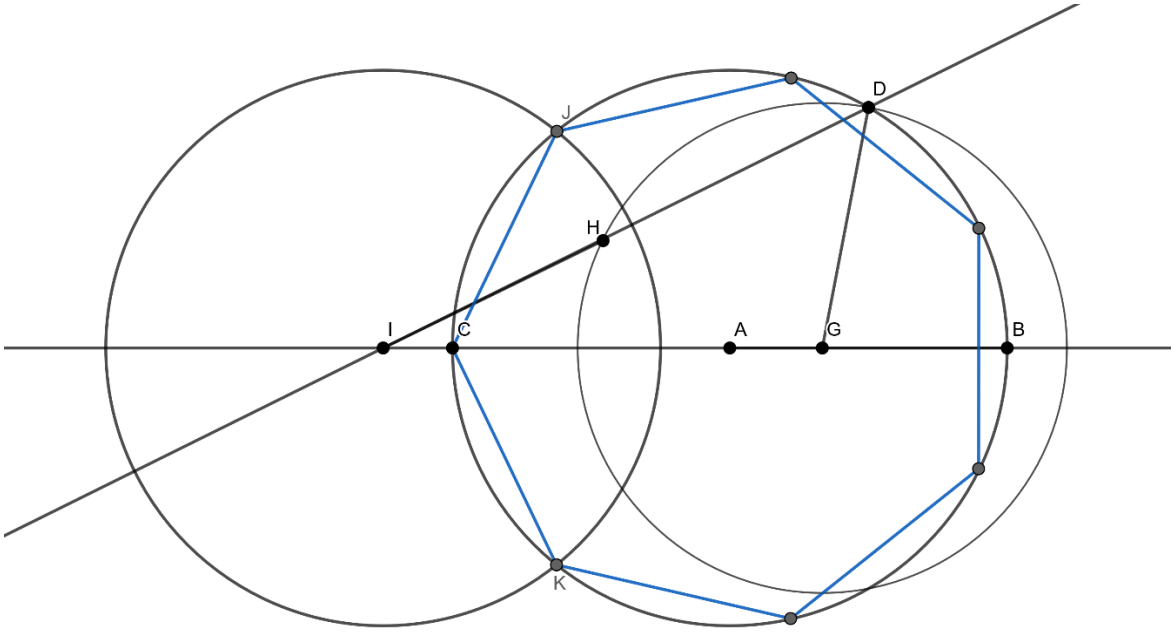
Le prime figure regolari non costruibili che si incontrano sono l'eptagono e l'ennagono ($\phi(7) = \phi(9) = 6$). Per costruire un ennagono basta prendere due vertici di un triangolo regolare e trisecare l'angolo che formano col centro della circonferenza ad esso circoscritta, ottenendone l'angolo al centro.

Per la costruzione di un eptagono sono stati trovati diversi metodi, i quali fanno uso in maniera differente della costruzione per neusi. Archimede per primo ha trovato un procedimento, ma essendo molto complicato propongo la soluzione fornita dal matematico francese Viéte (1540-1603). Dati punti A e B, traccio la retta R_{AB} e la circonferenza $\mathcal{C}_{A|B}$, chiamo il punto $\{C\} = R_{AB} \cap \mathcal{C}_{A|B}$. Traccio poi $\mathcal{C}_{B|A}$ e trovo i punti $\{D, E\} = \mathcal{C}_{A|B} \cap \mathcal{C}_{B|A}$ come in figura. Disegno $\mathcal{C}_{E|A}$ e $\mathcal{C}_{A|DE}$, chiamo $\{F\} = \mathcal{C}_{E|A} \cap \mathcal{C}_{A|DE}$, traccio la retta R_{FD} e chiamo $\{G\} = R_{AB} \cap R_{DF}$, osservando che $|AB| = \frac{1}{3}|AG|$.



fig(4.4)

Ora traccio la circonferenza $\mathcal{C}_{G|D}$ e faccio una costruzione per neusi, fissando su una retta r il segmento IH di lunghezza pari a |GD|, imponendo che (1) $I \in R_{AB}$, (2) $H \in \mathcal{C}_{G|D}$, (3) $D \in R_{IH}$. Disegno $\mathcal{C}_{I|AB}$ di centro I e raggio la lunghezza di AB. Trovo così i due punti $\{J, K\} = \mathcal{C}_{A|B} \cap \mathcal{C}_{I|AB}$. Il segmento CJ è uno dei lati dell'eptagono inscritto nella circonferenza $\mathcal{C}_{A|B}$.



fig(4.5)

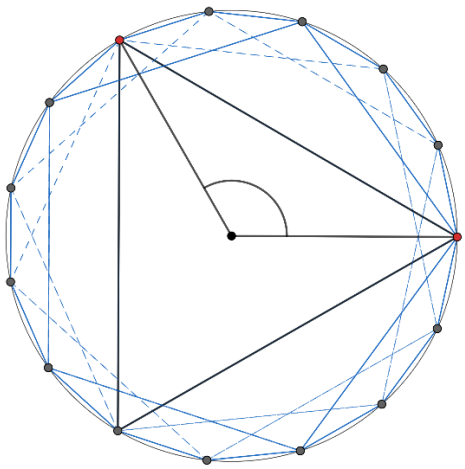
5. Osservazioni finali e conclusioni

Ritengo che le costruzioni con riga e compasso abbiano un grande potenziale in ambito didattico nelle scuole secondarie. Infatti, credo che testare in modo pratico un dato problema, tramite una risoluzione grafica, sia in grado di offrire una nuova visione di risultati visti solo in modo teorico dello stesso, e quindi aiuti una buona assimilazione di essi. La costruzione, quando possibile, può aiutare lo studente a integrare la pura teoria con una delle possibili applicazioni, favorendo la coesione delle ormai affermate "conoscenze multiple", in modo da non limitarne una in favore di un'altra ma offrendo un quadro più completo dell'argomento studiato. L'applicazione grafica di un elemento astratto (o meglio diverse applicazioni dello stesso argomento),inoltre, può favorire la capacità intuitiva stessa con cui lo studente si appresta all'argomento trattato. Lo stesso matematico Klein (1849-1925), noto per il suo ruolo rilevante nelle geometrie non euclidee e per i collegamenti tra le geometrie e la teoria dei gruppi, riconosce che nell'ambito didattico l'intuizione ha un ruolo importante, tanto che nella sua opera "*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*" ("Programma di Erlangen") del 1872 vi dedicherà l'intera nota III, "Sull'importanza dell'intuizione dello spazio", affermandone il suo ruolo nell'insegnamento: "L'intuizione ha per esso [il contenuto puramente matematico, n.d.r.] il solo scopo dell'evidenza, il quale però dal lato pedagogico è da stimarsi assai. Un modello geometrico, per esempio, è sotto questo punto di vista assai istruttivo ed interessante".

Come è accaduto già dall'epoca di Euclide, inoltre, l'osservazione di oggetti e raffigurazioni grafiche può mettere in luce possibili proprietà e suggerire idee per teoremi e proposizioni.

5.1 Relazioni tra radici di un n-gono con n non primo.

Osservando la costruzione di un pentadecagono, si può notare che al suo interno ci sono tre pentagoni. Dati un pentagono e un triangolo inscritti nella stessa circonferenza e aventi un vertice in comune, costruisco altri due pentagoni inscritti nella stessa circonferenza in modo che uno dei vertici di ogni pentagono coincida con uno dei vertici rimanenti del triangolo dato. I vertici del pentadecagono inscritto nella circonferenza saranno dati dai vertici dei tre pentagoni disegnati.



Dall'osservazione della costruzione vedo dunque che, dato il pentagono di 5 vertici, per trovare un poligono regolare di $5 \cdot 3$ lati posso ruotare due volte il pentagono iniziale di un angolo pari a $\frac{2\pi}{3}$ con $\backslash\, k \in \mathbb{N}$. Provo a costruire poi allo stesso modo i poligoni di lati $20 = 5 \cdot 4$ e $30 = 5 \cdot 6$, e riesco a farlo ruotando il pentagono intorno al centro della circonferenza circoscritta rispettivamente di angoli $\frac{2k\pi}{4}$ e $\frac{2k\pi}{6}$. Osservo che ciò è possibile in quanto gli angoli citati sono costruibili e perché $(5,4) = (5,6) = 1$. Se non valesse quest'ultima condizione, starei cercando di costruire un poligono non costruibile, in quanto di lati $n = 2^m p_1^k p_2 \dots p_l$ con p_1 primo di Fermat diverso da 2 e $k > 1$.

Vedo come questo mi può aiutare nel caso dei polinomi ciclotomici.
Osservo preliminarmente che dato $n = a \cdot b$, a, b primi:

$$x^n - 1 = \phi_1(x) \cdot \phi_a(x) \cdot \phi_b(x) \cdot \phi_{a \cdot b}(x)$$

Dove gli zeri del polinomio $x^n - 1$ corrispondono ai vertici del poligono di n lati inscritto nella circonferenza unitaria, lo zero $\phi_1(x)$ corrisponde al punto 1, di gli zeri di $\phi_a(x)$ corrispondono agli zeri primitivi del polinomio $x^a - 1$, ovvero ai vertici del poligono di a lati inscritto nella stessa circonferenza meno il vertice nella retta reale (lo stesso vale per $\phi_b(x)$) e gli zeri di $\phi_{a \cdot b}(x)$ sono dati dai vertici rimanenti.
Osservo poi che, dato il poligono costruibile di n lati, con $n = m \cdot p$, tale che p sia 2 oppure un primo di Fermat coprimo con m, il poligono di n lati lo trovo a partire dal poligono m-regolare inscritto nella circonferenza ruotandolo di angolo $\frac{2\pi}{p}$ p volte attorno al centro della stessa. Intuisco dunque che debba esserci una connessione tra le radici dei polinomi ciclotomici $\phi_m(x)$ e $\phi_{p \cdot m}(x)$. Gli zeri del polinomio ciclotomico $\phi_p(x)$ si ottengono ruotando il punto 1 di angolo $\frac{2\pi}{p}$ attorno all'origine, sia ξ una radice primitiva di $\phi_p(x)$. Dimostro che allora :

$$\phi_{p \cdot m}(x) = \phi_m(\xi \cdot x)$$

Se ζ è radice primitiva m-esima dell'unità, allora $\xi \cdot \zeta$ è radice primitiva $(m \cdot p)$-esima dell'unità. Infatti:

$$(\xi \cdot \zeta)^{pn} = (\xi)^{pm} \cdot (\zeta)^{mp} = 1^m \cdot 1^p = 1$$

dimostro che è anche primitiva: sia $\eta = e^{\frac{i2\pi}{pm}} \in \mathbb{C}$ radice pm-esima di $1_{\mathbb{C}}$. Allora $\zeta = \eta^{pj}$ per qualche j intero positivo tale che $(j, m) = 1$ perché ζ è radice primitiva m-esima. Allora $\xi \cdot \zeta = \xi \cdot \eta^{pj} = \eta^m \eta^{pj} = \eta^{m+pj}$. Mi resta solo da verificare che $(m + pj, pm) = 1$. Provo per assurdo che non posso avere $(m + pj, pm) = r$ con $r > 1$. Avendo imposto $(p, m) = 1$, se $r | mp$, allora $r | m$ oppure $r | p$. Se $r | p$, allora $r = p$ essendo p primo. Se in tal caso r dividesse $m + pj$ allora dividerebbe anche m, assurdo perché per ipotesi $(m, p) = 1$.Se invece $r | m$ e $r | (m + pj)$, allora $r | j$, assurdo perché per ipotesi $(m, j) = 1$, mentre in tal caso dovrei avere $(m, j) = r > 1$.

Questo giustifica da un punto di vista teorico l'osservazione precedente sul pentadecagono, e mi permette di ampliarla a tutte le situazioni che soddisfano le condizioni richieste in precedenza.

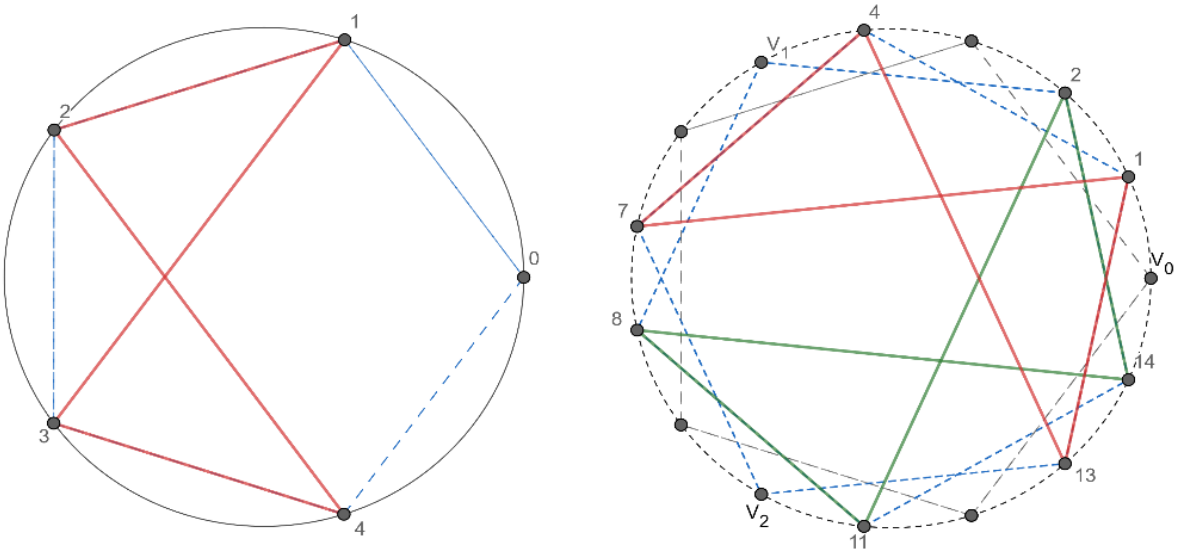
5.2 Gruppo di Galois di un n-gono con n non primo

Sempre confrontando pentagono e pentadecagono, vedo come i rispettivi gruppi di Galois ne mettono in relazione le radici. So che date ξ radice primitiva di $\phi_5(x)$ ed η radice primitiva di $\phi_{15}(x)$, ho che $Gal\left(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}\right) \simeq C_4$ e $Gal\left(\mathbb{Q}(\eta)/\mathbb{Q}\right) \simeq C_4 \times C_2$, e identificando $\eta^i = i$, e lo stesso valga per ξ, i relativi generatori dei gruppi sono:

$$\sigma_5 = (1\ 2\ 4\ 3)$$

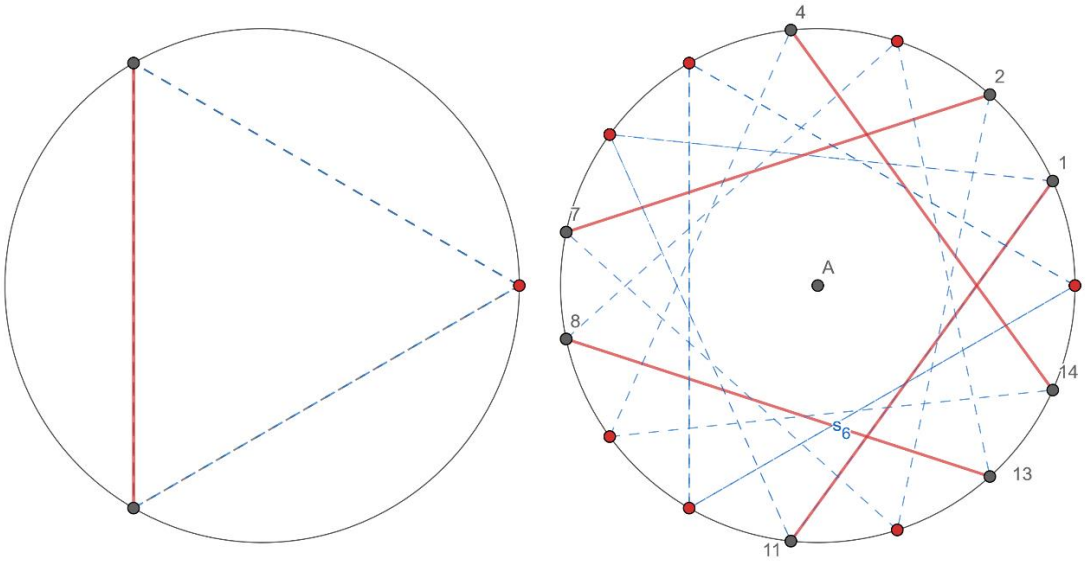
$$\sigma_{15} = \rho \circ \tau \qquad \rho = (1\ 7\ 4\ 13)(2\ 14\ 8\ 11)\ ,\ \ \tau = (1\ 11)(2\ 7)(4\ 14)(8\ 13)$$

La scelta di queste permutazioni non è certo univoca, ma se andiamo a raffigurare graficamente come i gruppi di Galois legano le radici dei relativi polinomi ciclotomici, appare evidente la naturalità di questa scelta di permutazioni e il legame con quanto discusso la sezione precedente. Infatti, una volta creato il pentadecagono facendo ruotare due volte il pentagono iniziale, applicando ρ a una radice primitiva, questa seguirà all'interno del pentagono della rotazione a cui appartiene lo stesso percorso che segue una radice primitiva del pentagono. Per capire si veda la figura qui di seguito, dove a sinistra rappresento σ_5 e a destra ρ (le altre possibili configurazioni di σ nel pentagono le potrò ottenere componendo con τ, che è il coniugio).



Dalla figura sopra è evidente, tracciando come il gruppo di Galois lega le radici, che nel pentadecagono vengono a delinearsi nei tre pentagoni da cui è formato la stessa figura disegnata nel pentagono (lo stesso cammino che lega le radici prime), ruotata rispettivamente di $\pm\frac{2\pi}{3}$, corrispondente a ρ.

Allo stesso modo, facendo ruotare il triangolo dato quattro volte di $\frac{2\pi}{5}$, ottengo τ.



Questa osservazione può essere fatta su ogni poligono costruibile che non abbia un numero n di lati primo. Una volta notato questo fatto, risulta molto più facile trovare un generatore di un gruppo di Galois associato a un polinomio ciclotomico. Infatti, dato un poligono n-regolare costruibile, sia $n = 2^k p_1 \dots p_q$ con p_i primi di Fermat. Preso un qualunque p_i (oppure 2^k) divisore di n, costruisco il p_i-gono inscritto nella circonferenza unitaria, lo ruoto $m = \frac{n}{p_i}$ volte di angolo $\frac{2\pi}{m}$, trovando gli altri vertici dell'n-gono. Trovato poi il gruppo di Galois legato al polinomio ciclotomico $\phi_{p_i}(x)$, ne traccio le linee che costituiscono il "cammino" fra le $p_i - 1$ radici prime, e facendo ruotare tale figura $m = \frac{n}{p_i}$ volte di angolo $\frac{2\pi}{m}$ trovo il cammino di una delle componenti del gruppo di Galois. Trovo poi che le radici si legheranno nel percorso a gruppi di p_i in ognuno degli m p_i-goni che formano l'n-gono. Ripetendo questo procedimento per ogni p_i divisore di n (e similmente per 2^k) nel modo appena descritto, trovo le raffigurazioni delle varie componenti del gruppo di Galois relativo a $\phi_n(x)$.
Inoltre, osservando sempre il pentadecagono, vedo che lo costruisco servendomi di un triangolo e un pentagono, aventi gruppi di Galois rispettivamente C_2 e C_4. Il gruppo di Galois relativo agli zeri di $x^{15} - 1$ (che ricordo corrispondono ai vertici di un pentadecagono costruito in $\mathbb{C}$) lo posso ottenere senza necessariamente ricercarne un generatore, ma a priori so che:

$$Gal_{pentadecagono} = Gal_{pentagono} \times Gal_{triangolo} = C_4 \times C_2$$

Questo fatto può aiutare il lettore a comprendere ad esempio come mai, data ζ radice ottava e ξ radice quinta dell'unità, le estensioni di esse su $\mathbb{Q}$ abbiano lo stesso grado ma gruppi di Galois differenti. Infatti, $[\mathbb{Q}(\zeta): \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\xi): \mathbb{Q}] = 4$ ma $Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) = C_2 \times C_2$, mentre $Gal(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}) = C_4$, e tra le altre spiegazioni possibili affermo che l'ottagono è costruibile facendo ruotare il quadrato di un angolo costruibile ($\pi/2$), mentre ciò non è applicabile per il pentagono.

5.3 Grado di una estensione α su $\mathbb{Q}$ a partire dalla costruzione di α

Un'altra osservazione che possiamo fare è incentrata sull'estensione semplice $\mathbb{Q}(\alpha)$, con α punto costruibile su $\mathbb{Q}$. Considero data la sequenza più breve di passaggi per costruire α, e noto che è possibile mettere in relazione il grado dell'estensione con lo studio delle costruzioni intermedie per giungere ad α, nozione che è possibile ricavare anche algebricamente andando a trovare il polinomio minimo a coefficienti razionali di α.
Facciamo qualche considerazione iniziale, chiamo E l'estensione di $\mathbb{Q}$ al passaggio a cui ci riferiamo.
In primo luogo, osservo che l'intersezione di due rette passanti per due punti di E mi danno ancora un punto di E. Infatti, dati i punti $A = \binom{a_1}{a_2}$ $B = \binom{b_1}{b_2}$ $C = \binom{c_1}{c_2}$ $D = \binom{d_1}{d_2}$, le rette saranno:

$\begin{cases} y_1 = \frac{(x-a_1)}{a_2-a_1}(b_2-b_1)-b_1 \\ y_2 = \frac{(x-c_1)}{c_2-c_1}(d_2-d_1)-d_1 \end{cases}$ e trovo l'intersezione $\frac{(x-a_1)}{a_2-a_1}(b_2-b_1)-b_1 = \frac{(x-c_1)}{c_2-c_1}(d_2-d_1)-d_1 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{a_1(b_2-b_1)}{a_2-a_1}+b_1+d_1+\frac{c_1(d_2-d_1)}{c_2-c_1}\right)\cdot\left(\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}-\frac{d_2-d_1}{c_2-c_1}\right)^{-1}$

E dunque il punto di intersezione $P = \binom{x}{y}$ è ancora in E, essendo questo chiuso per somma, prodotto e inversa.
Vedo poi che, dato l'elemento $\alpha \in E$, la simmetrica α' rispetto all'asse immaginario è ancora in E, dunque il grado di E(α) su $\mathbb{Q}$ è lo stesso del grado di E. Infatti, se α è costruibile mediante una sequenza n finita di passaggi mediante riga e compasso a partire dai punti 0 e 1, per trovare α' sarà sufficiente trovare il punto $-1 \in \mathbb{Q}$, e da questo e dal punto 0 attuo gli n passaggi usati per trovare α.
Se poi chiamo β punto intermedio per costruire α, allora $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]$.
A conferma di quanto detto, mi rivolgo nuovamente alla costruzione già descritta in (5.2) della radice cubica $\sqrt[3]{\alpha}$ dato $\alpha \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$. Osservo che in tal caso per la costruzione necessiterò di due costruzioni per neusi, corrispondenti a due funzioni irriducibili di grado 3, il che si rifletterà sul polinomio minimo di $\sqrt[3]{\alpha}$, che avrà come grado un multiplo di 6= $3 \cdot 2$ (essendo $\alpha \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$, non essendoci alcuna radice reale a meno che α non giaccia su una retta di inclinazione $\pm\frac{2\pi}{3}$). Basti pensare al polinomio minimo di $\sqrt[3]{2i}$: $f_1(x) := x^6 + 4 \in \mathbb{Q}$, appunto di grado 6, rispetto al polinomio minimo di $\sqrt[3]{2}$ (per la cui costruzione è sufficiente impiegare una sola volta tale strumento): $f_2(x) := x^3 - 2 \in \mathbb{Q}$, di grado 3. Per costruire $\sqrt[3]{2i}$ ho dunque attuato due volte la costruzione per neusi, ma su elementi diversi (la lunghezza e l'angolo) e ho trovato quindi che il polinomio minimo per $\sqrt[3]{2i}$ ha grado $6 = 3 \cdot 2$. Se però voglio trovare sull'asse reale un segmento di lunghezza $\sqrt[9]{2}$, devo applicare due volte la costruzione per neusi allo stesso elemento (in tal caso la lunghezza, per trovare prima $\sqrt[3]{2}$ e poi $\sqrt[9]{2}$), e il polinomio minimo in tal caso avrà grado $9 = 3^2$. Questo fatto incide anche sull'indice del gruppo di Galois associato al polinomio minimo. Infatti, nel primo caso 3 divide $\left|Gal\left(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2i})/\mathbb{Q}\right)\right| = 12$, ma 9 no, mentre nel secondo caso trovo che 9 divide $\left|Gal\left(\mathbb{Q}(\sqrt[9]{2})/\mathbb{Q}\right)\right| = 18$.

Guardando allo stesso modo una figura costruibile, studio a titolo di esempio la costruzione del pentagono nella figura fig(2.4). Per i vari passaggi fino al punto E devo trovare punti di intersezione tra rette e circonferenze (devo trovare rette parallele o perpendicolari a una retta data per un punto dato e il punto medio di un segmento) In questi casi osservo che le circonferenze non devono passare per due punti specifici, ma per l'arbitrarietà del raggio posso comunque trovarle in maniera che i punti di intersezione siano ancora in $\mathbb{Q}$. Infatti, trovo che il punto di arrivo $E = \left(|AB|, \frac{|AB|}{2}\right)$ è in $\mathbb{Q}$. Caso diverso è per $\mathcal{C}_{EA}$, che ho bisogno passi per A ai fini della costruzione, e avendo raggio $r = \frac{|AB|\sqrt{5}}{2}$ l'estensione di $\mathbb{Q}(F)$ su $\mathbb{Q}$ è di grado 2. Allo stesso modo per trovare i punti $\{O,G\} = \mathcal{C}_{AB} \cap \mathcal{C}_{BF}$ devo usare la circonferenza $\mathcal{C}_{BF}$ di raggio $\frac{|AB|(1-\sqrt{5})}{2}$, e dunque, dal momento che il punto F è il punto intermedio nella costruzione di O:

$$[\mathbb{Q}(O): \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(O): \mathbb{Q}(F)][\mathbb{Q}(F): \mathbb{Q}] = 4$$

Dal momento che $O, B \in \mathbb{Q}(O)$ e sono due vertici consecutivi del decagono inscritto in $\mathcal{C}_{AB} \in \mathbb{Q}$, per trovare gli altri vertici V_i del decagono (e di conseguenza del pentagono) devo intersecare $\mathcal{C}_{AB}$ con la circonferenza centrata del vertice precedente di raggio $|OB|$, e dunque $V_i \in \mathbb{Q}(O)$ $\forall V_i$ vertice cercato. Chiamando S l'estensione dei punti appartenenti al pentagono inscritto nella circonferenza unitaria su $\mathbb{Q}$, dallo studio della costruzione ho confermato, come già sapevamo, $[S: \mathbb{Q}] = 4 = \phi(5)$.

Possiamo trarre considerazioni analoghe nella costruzione dell'eptadecagono, facendo riferimento alla figura fig(2.6) al paragrafo 4. Ricordo che dato il campo intermedio F nella costruzione, dati tre punti $P, Q, S \in F$, la retta perpendicolare alla retta R_{PQ} passante per S e la bisettrice dell'angolo $P\hat{Q}S$ sono ancora rette determinate da due punti in F, e dunque trovare la loro intersezione con altre rette costruibili in F non accresce il grado dell'estensione su $\mathbb{Q}$. Questo avviene per l'arbitrarietà del centro e del raggio delle circonferenze usate nei passaggi intermedi per trovare tali figure. Osservato questo e seguendo i passaggi della costruzione precedentemente proposta, affermo che fino al punto (3.) trovo sempre punti razionali. Situazione diversa per $\{G\} = AC \cap \mathcal{C}_{FB}$, in quanto il raggio di $\mathcal{C}_{FB}$ ha lunghezza non razionale, e $[\mathbb{Q}(G): \mathbb{Q}] = 2$, e lo stesso vale per $\{H,I\} = \mathcal{C}_{EG} \cap R_{AB}$, ed essendo tali due punti costruiti attraverso la costruzione del punto intermedio G:

$$[\mathbb{Q}(H): \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(H): \mathbb{Q}(G)][\mathbb{Q}(G): \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$$

Di seguito, M e N sono due punti la cui ascissa è in $\mathbb{Q}(H)$ e $\mathbb{Q}(I)$, ma l'ordinata no ($\sqrt{|AB|^2 - |0H|^2} \notin \mathbb{Q}(H)$), e allo stesso modo la bisettrice dell'angolo M$\hat{A}$N non aumenta il grado su $\mathbb{Q}$, ma l'intersezione di questa con la circonferenza $\mathcal{C}_{AB}$ è esterna a $\mathbb{Q}(M)$ e $\mathbb{Q}(N)$, dunque l'estensione $\mathbb{Q}(P)$ è di grado 2^4 su $\mathbb{Q}$. Questo conferma quanto visto precedentemente, ovvero $\mathbb{Q}(P) = \phi(17) = 16$, in quanto la P trovata è radice prima di $x^{17} - 1 = 0$.

Conclusioni

Con queste osservazioni finali ho voluto mostrare degli esempi dello stretto legame tra la formulazione algebrica di un problema e quella geometrica.
Come è già stato affermato, grandi teoremi algebrici basano la propria intuizione e dimostrazione sull'osservazione delle costruzioni geometriche, si pensi al teorema di Pitagora o ai teoremi relativi ai criteri congruenza dei triangoli.
Inoltre, come fa notare Odifreddi nel saggio "Il museo dei numeri", un conto è affermare e dimostrare che un poligono sia costruibile in teoria, un altro è mostrare come costruirlo in pratica. Nel caso dell'eptagono, ad esempio, il teorema di Gauss sulla costruibilità risale al 1796, mentre la prima costruzione effettiva risale al lavoro svolto da Johannes Erchinger nel 1825, più di un ventennio dopo. È tuttavia vero che sapere che un risultato fosse possibile abbia riacceso il desiderio di trovare una soluzione a questo problema, che era stato abbandonato da più di mille anni. Allo stesso modo, negli anni successivi, conoscere a priori la possibilità di una costruzione ha portato alla scoperta del poligono di 257 lati, ad opera di Richelot nel 1832, e dopo un lavoro decennale anche del poligono di 65.537 lati, grazie a Johann Hermes nel 1894, completando le costruzioni dei poligoni aventi come lato un primo di Fermat.

Vuole dunque questa essere una ulteriore dimostrazione di come l'interdisciplinarità all'interno dell'ambiente matematico abbia in più occasioni fornito lo stimolo che mancava per trovare la soluzione a dei problemi, e di come spesso basti porre il problema sotto punti di vista differenti per giungere a una soluzione per entrambi.

Riferimenti bibliografici e sitografia

[1] Wooster Beman and David Smith, “Famous problems of elementary geometry” Ginn and Company, 1897.

[2] Benjamin Bold, “Famous problems of Geometry and how to solve them” Dover, 1982.

[3]] Dörrie Heinrich “100 great problems of elementary mathematics: their history and solutions” Dover, 1965.

[4] Lorenzo Mascheroni “La geometria del compasso” Era Nova, 1901

[5] Asger Aaboe “Episodes from the early history of mathematics” Random house, 1964.

[6] Stefania Gabelli “Teoria delle equazioni e teoria di Galois” Springer, 2008.

[7] I. M. Isaacs, “Algebra. A graduate course” Brooks/Cole, Pacific Grove, 1994.

[8] Piergiorgio Odifreddi “Il museo dei numeri” Rizzoli, 2015

[9] Felix Klein “Il programma di Erlangen” La Scuola, 1999

[10] https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED175697.pdf: William Schaaf “Geometric constructions”

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Poncelet%E2%80%93Steiner_theorem

[12] http://personal.unizar.es/elduque/files/GroupsGalois2019.pdf

[13] https://www.math.utah.edu/~bertram/courses/4030/Constructible.pdf

[14] https://www.treccani.it/enciclopedia/euclide

[15] https://it.frwiki.wiki/wiki/Neusis